

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

PLZEŇ 2019

JULIE RAKOVCOVÁ

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2018/2019

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Julie RAKOVCOVÁ**

Osobní číslo: **A18N0002P**

Studijní program: **N3902 Inženýrská informatika**

Studijní obor: **Řídicí a rozhodovací systémy**

Název tématu: **Návrh lokálních metod odhadu stavu**

Zadávací katedra: **Katedra kybernetiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

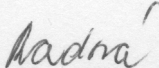
1. Seznamte se s bezderivačními lokálními metodami odhadu stavu a jejich návrhem.
2. Proveďte shrnutí technik volby návrhových parametrů lokálních metod.
3. Analyzujte vlastnosti jednotlivých technik - teoreticky i simulačně.
4. Zhodnoťte dosažené výsledky.



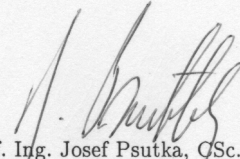
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Rozsah kvalifikační práce: **40-50 stránek A4**
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**
Seznam odborné literatury:
Dodá vedoucí diplomové práce.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Jindřich Duník, Ph.D.**
Katedra kybernetiky

Datum zadání diplomové práce: **1. října 2018**
Termín odevzdání diplomové práce: **25. května 2019**


Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
děkanka




Prof. Ing. Josef Psutka, CSc.
vedoucí katedry

V Plzni dne 1. října 2018

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne

.....
podpis

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala vedoucímu diplomové práce, Ing. Jindřichu Duníkovi, Ph.D., za ochotné poskytnutí cenných rad, připomínek a odborné konzultace. A neméně děkuji za trpělivost, kterou se mnou během této práce měl.

Dále bych ráda poděkovala rodině a přátelům za jejich podporu během celého studia. A ze všeho nejvíce děkuji svému příteli, Ondřeji Kopáčkovi, za oporu, kterou mi byl během psaní této práce.

Abstrakt

Tato diplomová práce se věnuje problematice odhadu, neboli estimaci, stavu. Konkrétněji lokálnímu filtru, který se nazývá unscentovaný Kalmanův filtr a je zpravidla označován zavedenou zkratkou UKF. Jedná se o filtr umožňující nelineární filtraci. Tento filtr se řadí do skupiny bez-derivačních filtrů, neboť jeho aproximace nespočívá v linearizaci nelineárního systému pomocí členů Taylorovy řady, jako je tomu u jiného lokálního filtru nazývaného rozšířený Kalmanův filtr, nýbrž v aproximaci popisu pravděpodobnostního rozložení odhadu stavu. Hlavním cílem této práce je shrnout a implementovat vybrané metody návrhu škálovacího parametru filtru UKF a poté zhodnotit jejich výsledky ve smyslu kvality poskytnutého odhadu.

Klíčová slova

odhad stavu, nelineární filtrace, lokální filtr, unscentovaný Kalmanův filtr, UKF, škálovací parametr, adaptace

Abstract

This diploma thesis deals with state estimation. Particularly with a local filter called Unscented Kalman Filter also known under abbreviation UKF. This filter is designed for nonlinear filtering. It belongs into a non-derivative filters class because it is based on approximation of a random variable probability distribution instead of on approximation of Taylor series as it is for another local filter referred as Extended Kalman Filter. The main goal of this thesis is to summarize and implement selected methods for UKF scaling parameter adaptation and evaluate their estimation performance.

Keywords

state estimation, nonlinear filtering, local filter, unscented Kalman filter, UKF, scaling parameter, adaptation

Obsah

1	Úvod	1
2	Problematika modelování a estimace	2
2.1	Motivace	2
2.1.1	Sledování	3
2.1.2	Navigace	4
2.1.3	Oblasti aplikace filtrace	4
2.2	Modelování	5
2.2.1	Obecné modely	5
2.2.1.1	Deterministický vs. stochastický model	6
2.2.1.2	Statický vs. dynamický model	6
2.2.1.3	Lineární vs. nelineární model	6
2.2.1.4	T-variantní vs. t-invariantní model	7
2.2.1.5	Diskrétní vs. spojitý model	7
2.2.2	Vstupně-výstupní vs. stavový	7
2.2.3	Výběr dále používaného modelu	8
2.3	Stavové modely	8
2.4	Estimace stavu	8
2.4.1	Bayesovský přístup	10
2.4.2	Gaussovo rozdělení	11
3	Kalmanův filtr	13
3.1	Bayesovský přístup k syntéze filtru	14
3.1.1	Přímý přístup	14
3.1.2	Nepřímý přístup	15
3.2	Jednokrokový prediktor a Riccatiho rovnice	16
3.3	Inovace	17

3.4	Algoritmus Kalmanova filtru	17
4	Lokální filtry	18
4.1	Rozšířený Kalmanův filtr - EKF	18
4.1.1	Přímý přístup	19
4.1.2	Nepřímý přístup	20
4.1.3	Nevýhody rozšířeného Kalmanova filtru	21
4.2	Unscentovaný Kalmanův filtr	21
4.2.1	Filtrace	22
4.2.2	Predikce	23
4.2.3	Standarní volba škálovacího parametru	24
5	Adaptace škálovacího parametru v UKF	26
5.1	Použité metody adaptace a jejich rozdělení	27
5.1.1	Offline metody adaptace	27
5.1.1.1	Offline adaptace založená na logaritmické věrohodnosti . . .	28
5.1.1.2	Offline adaptace založená na střední kvadratické chybě . . .	29
5.1.2	Online metody adaptace	29
5.1.2.1	Online adaptace založená na maximalizaci logaritmu podmíněné hustoty pravděpodobnosti	30
5.1.2.2	Online adaptace založená na maximalizaci aproximativní věrohodnostní funkce	31
5.1.2.3	Online adaptace založená na maximalizaci podílu aproximativních podmíněných hustot pravděpodobnosti	31
5.2	Použitý adaptivní UKF	31
5.3	Jiné přístupy k návrhu UKF s prvky adaptace	33
6	Simulační výsledky	35
6.1	Generátory dat	35
6.1.1	Kitagawa	35
6.1.2	Sinusoid	36
6.1.3	Model sledování	36
6.2	Vlatnosti odhadu	36
6.3	Použitá kritéria kvality estimace	37
6.3.1	Odmocnina ze střední kvadratické chyby	37

6.3.2	Střední absolutní chyba	37
6.3.3	Věrohodnost odhadu	37
6.3.4	Výpočetní náročnost	38
6.4	Simulační výsledky použitých metod adaptace	38
6.4.1	Offline adaptace LOG	39
6.4.2	Offline adaptace AMSE	41
6.4.3	Online adaptace LOGPDF	43
6.4.4	Online adaptace NORM	47
6.4.5	Online adaptace APDF	51
6.4.6	Standardní volba škálovacího parametru	55
6.5	Porovnání metod adaptací ve smyslu hodnot škálovacího parametru	57
6.6	Porovnání metod adaptací ve smyslu kvality estimace	59
6.7	Zhodnocení simulací	64
7	Závěr	67

Kapitola 1

Úvod

Odhad stavu nebo také estimace stavu, je součástí většího celku nazývaného teorie odhadu. Jeho existence je naprosto fundamentální pro filtrování signálů, navigaci, sledování, zpracování obrazů, řídicí systémy a mnohé další aplikace. Úkolem estimace je nalézt hodnoty parametrů nebo stavu na základě dat získaných pozorováním či měřeními a na základě modelu systému. Bohužel měřicí přístroje a reálné systémy nedokáží poskytnout čistý signál. Ten tudíž obsahuje poruchy a šумы, které je, za účelem návrhu kvalitního řízení či poskytnutí správné informace, nutné potlačit nebo ideálně úplně eliminovat. Toho je možné docílit pomocí filtrování signálu. Předmětem této práce bude konkrétně lokální filtr nazývaný unscentovaný Kalmanův filtr. Jedná se o bezderivační filtr umožňující nelineární filtraci. Pojem bezderivační znamená, že v rámci zpracování nelineárního systému není napřed nutné linearizovat nelineární funkci pomocí aproximace Taylorovou řadou, neboť v tomto případě je aproximováno pravděpodobnostní rozložení náhodné veličiny.

Práce se podrobněji zabývá návrhem škálovacího parametru unscentovaného Kalmanova filtru. Bude navrženo několik metod věnujících se jeho adaptaci. Metody budou posléze implementovány a simulovány. Na konci práce budou zhodnoceny a analyzovány získané výsledky.

Diplomová práce je rozdělena do několika kapitol. Kapitola 2 je věnována motivaci za odhadem stavu, problematice modelování a estimaci. Kapitola 3 popisuje Kalmanův filtr, jakožto optimální estimátor pro lineární systémy, představující základní kámen unscentovaného Kalmanova filtru. V kapitole 4 jsou zmíněny lokální filtry - rozšířený Kalmanův filtr a unscentovaný Kalmanův filtr. Kapitola 5 je věnována adaptivním metodám návrhu škálovacího parametru unscentovaného Kalmanova filtru. Implementace a simulace vybraných adaptivních technik je spolu se zhodnocením výsledků jednotlivých metod popsána v následující kapitole 6. V poslední kapitole 7 je závěrečné shrnutí diplomové práce.

Kapitola 2

Problematika modelování a estimace

2.1 Motivace

Odhad stavu spadá do odvětví nazývaného teorie odhadu, anglicky označovaného jako *Estimation Theory*. Odhadování je proces hledání hodnot parametrů nebo stavu, a to na základě dat získaných pozorováním či měření. Pozorování ale mohou být nepřímá, nepřesná a mohou obsahovat neurčitost.

Za základní metodu teorie odhadu lze považovat metodu nejmenších čtverců (MNČ), která byla v 18. století navržena Legendrem a Gaussem pro odhad parametrů planetárních orbit. MNČ je optimální metodou pro odhad parametrů lineárního a časově invariantního systému a stále nachází uplatnění téměř ve všech oborech lidského snažení. Avšak existuje i mnoho aplikací, ve kterých předpoklad linearit a t-invariantnosti systému nemůže být splněn a tak brání použití této metody. Z toho důvodu došlo k rozvoji identifikačních metod použitelných i pro nelineární časově variantní systémy, začaly vznikat filtry. Dnes jsou filtry neodmyslitelnou součástí mnoha oborů k nimž patří i navigace a sledování.

Filtrace je odhad stavu dynamického systému v aktuálním časovém okamžiku. Slovo filtrace je použito, neboť je potřeba „přefiltrovat“ vstupní data a zbavit je tak šumu za účelem získání nejlepšího možného odhadu. Proces filtrace se také používá v řídicích systémech a při zpracování signálu. Tato práce se zabývá právě filtrací, a proto bude popsána podrobněji v následujících kapitolách.

Několik příkladů využití teorie odhadu a filtrace v praxi a jejich stručný popis je v následujících odstavcích [1–4].

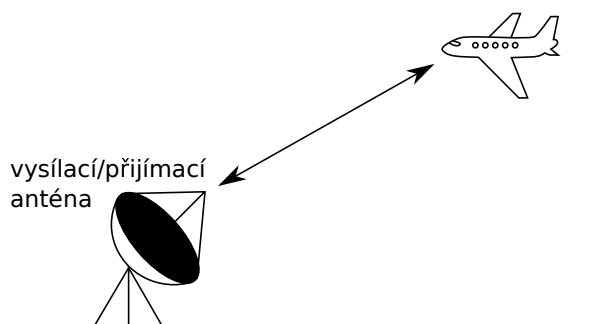
2.1.1 Sledování

Prvním příkladem úlohy filtrace může být sledování. Při sledování, v anglické literatuře označovaném jako *tracking*, se provádí odhad polohy objektu na základě dat získaných z měření ze snímacích zařízení nacházejících se mimo sledovaný objekt. Snímací zařízení se může skládat z jednoho nebo více senzorů, a stejně tak může být součástí pevné či pohyblivé struktury.

Mohlo by se zdát, že sledování je speciálním případem odhadu, avšak není tomu tak. Pro sledování je zapotřebí všech nástrojů teorie odhadu a k tomu navíc i statistické teorie rozhodování.

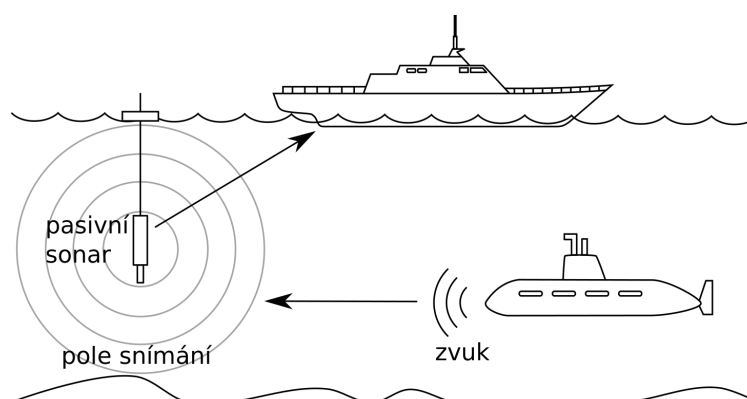
Příklady druhů sledování

Radar poskytuje odhad polohy letounu na základě vysílání elektromagnetického signálu anténou, kterýžto signál je letounem odražen zpět na anténu. Přijatý signál má sníženou amplitudu a může obsahovat šum, což je způsobeno průchodem atmosférou. Pro lepší představu je komunikace znázorněna na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Radar [1]

Sonar slouží k určení odhadu polohy například ponorky. Ponorka vysílá zvuk způsobený strojní technikou nacházející se na palubě - lodní šroub, apod. Tento zvuk se šíří skrz vodu a je snímán polem senzorů. Výstupy ze senzorů se odesílají na loď, kde se provedou potřebné výpočty k odhadu polohy ponorky. Tento proces je znázorněn na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Pasivní sonar [1]

2.1.2 Navigace

U navigace se senzory pro určení odhadu stavu objektu nachází na objektu samotném. Navigace je tedy schopná říct uživateli, kde se v daném momentě nachází, a to zpravidla na základě údajů o pozici, rychlosti, orientaci a zrychlení.

2.1.3 Oblasti aplikace filtrace

Úloha filtrace v dnešní době nalézá uplatnění v mnoha dalších technických i netechnických oblastech, kterými jsou například

- zpracování obrazu - detekce letounu z infračervených snímků
- biomedicínské inženýrství - rozpoznání srdeční arytmie z EKG křivky
- komunikace - zpracování řeči, komunikace člověk - stroj
- řídicí systémy - řízení strojů a technologických procesů, rozpoznání výskytu náhlých změn na řízeném systému
- seismologie - detekce naleziště oleje
- ekonomie
- dopravní systémy
- předpověď počasí

2.2 Modelování

Lidé interagují se systémy na denní bázi. Řídí auta, motocykly, obsluhují stroje, řídí pohyby svého těla a tak dále. K ničemu z toho nepotřebují matematické rovnice ani nic podobného. Používají tak zvaný mentální model, jinak označovaný také jako intuitivní či slovní model, který je vytvářen lidským mozkem v souladu s předchozími zkušenostmi.

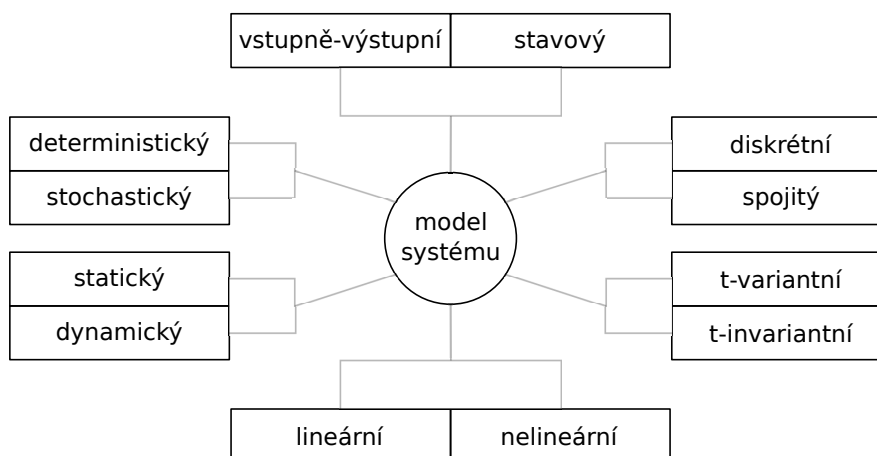
Model může být reprezentován i graficky. Mezi takové modely patří tabulky nebo grafy. Příkladem tabulky může být například zápis vztahu ceny a spotřeby zboží a příkladem grafu logaritmická frekvenční charakteristika.

Mentální ani grafický model ale zpravidla nelze využívat při práci s počítači. Proto je nezbytné vytvořit model matematický, v tomto případě chápán jako model postavený na diferenciálních a diferenciálních rovnicích. Tento model lze využít jak v teorii odhadu pro analýzu a predikci chování dynamických systémů, tak i v teorii řízení pro návrh filtrů a regulátorů.

Matematický model je možné získat dvěma způsoby - matematickým modelováním anebo experimentálně. Matematické modelování je odvozeno od znalosti fyzikálních, ekonomických a jiných zákonů, na jejichž bázi je určena struktura modelovaného systému. Mezi často používané zákony patří například zákony Newtonovské nebo Lagrangeovské mechaniky. Mezi experimentální postupy určení modelu patří různé metody identifikace systémů. Zpravidla se na sledovaném systému provádí rozličné experimenty v podobě vybuzení systému různorodými vstupy. To umožňuje získání reálných naměřených dat a na základě jejich znalosti lze pak vytvořit vyhovující matematický model [2, 5–9].

2.2.1 Obecné modely

Obecně lze modely rozdělit podle schématu na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Rozdělení modelů [9]

2.2.1.1 Deterministický vs. stochastický model

Deterministický model popisuje chování objektu nebo fenoménu, jehož chování je přesně dáno jeho počátečním stavem a vstupem. Pro deterministické modely platí, že stejný vstup povede vždy ke stejnému výstupu.

Naproti tomu stochastický model, rovněž označován jako pravděpodobnostní, obsahuje kromě deterministické části i neurčitost. Neurčitost může být způsobena poruchami na systému, chybami měření, sensorů apod. Výskyt neurčitosti má za následek, že odezvy na tentýž vstup se budou lišit.

U stochastických modelů je ale možné budoucí chování objektu nebo fenoménu *předpovídat*, neboť stav v následujícím časovém okamžiku závisí jak na deterministické části, tak i na náhodném elementu. Kvůli prvku náhody však není možné predikovat přesné chování modelu, ale je možné určit pravděpodobnost výskytu určité hodnoty v určitém čase s požadovanou mírou věrohodnosti.

2.2.1.2 Statický vs. dynamický model

Statický model je model nacházející se v ustáleném stavu a v čase je tedy neměnný. Pro dynamický model platí, že budoucí stav závisí na stavu přítomném, což znamená, že se v čase vyvíjí.

2.2.1.3 Lineární vs. nelineární model

Tato charakteristika je odvozena od vlastností systému. Jak je řečeno v [8]: „Prakticky všechny reálné systémy jsou nelineární, ale jednoduchá a účinná metodika analýzy systémů a návrhu řídicích systémů je vypracována zejména pro lineární dynamické systémy. Je tedy přirozenou snahou získat nějakou linearizační metodou lineární model i pro nelineární dynamické systémy, byť za cenu jeho omezené platnosti.“

Hlavním rozdílem mezi lineárním a nelineárním systémem je, že pro lineární systémy platí princip superpozice. Dále je u lineárních systémů možné použít transformační modely typu Laplace, Fourier a Z-transformace. Výhodou je také existence obecného řešení lineárních diferenciálních rovnic, které je možné využít pro reprezentaci lineárních systémů.

Ukázka reprezentace obecného spojitého modelu pomocí **lineární diferenciální rovnice**

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_mu^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0t(t),$$

pro $m \leq n$ (2.2.1)

a pomocí **nelineární diferenciální rovnice**

$$y^{(n)}(t) = f [y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(m)}(t)], \quad (2.2.2)$$

kde $f(\cdot)$ je nelineární funkce. V obou rovnicích n představuje stupeň nejvyšší derivace a určuje řád dynamického modelu, m je stupeň derivace vstupního signálu u označovaného také jako řízení a y značí výstup systému.

Modely v této práci mají charakteristiku nelineárního systému. Jak se s takovými systémy pracuje, je popsáno v dalších kapitolách, hlavně pak v kapitole 4.

2.2.1.4 T-variantní vs. t-invariantní model

Jak napovídá název, odezva t-variantního modelu je v čase proměnná. Pro t-invariantní model toto tvrzení neplatí a v čase je tedy neměnný.

2.2.1.5 Diskrétní vs. spojitý model

Hovoří-li se o diskrétním či spojitém modelu, je tím myšleno, že je model diskrétní či spojitý z hlediska času. Vstupem i výstupem modelu spojitého systému je signál spojitý v čase, což mimo jiné znamená, že je v čase diferencovatelný, a všechny veličiny daného modelu jsou rovněž spojitě v čase. Hlavním předmětem této práce jsou však diskrétní dynamické systémy popisované diskrétním matematickým modelem.

Dynamické chování lineárního systému popsaného diskrétním modelem lze popsat lineárními diferenčními rovnicemi n -tého řádu s konstantními koeficienty

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_0y(k) = b_mu(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + \dots + b_0u(k), \quad (2.2.3)$$

kde $m \leq n$, $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ jsou dané počáteční podmínky a $k = 0, 1, \dots, N$

2.2.2 Vstupně-výstupní vs. stavový

Systém může být reprezentován buď vstupně-výstupním modelem nebo stavovým modelem. Vstupně-výstupní model tvoří tzv. vnější popis a jeho ukázkou mohou být rovnice (2.2.1) a (2.2.2). Pokud by se zmíněné rovnice převedly na n lineárních či nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu, získal by se stavový model systému. Ten pak kromě vnějšího popisu zahrnuje i vnitřní proměnné systému a hovoří se o tzv. modelu vnitřního popisu.

2.2.3 Výběr dále používaného modelu

Bylo zmíněno mnoho druhů modelů a tak by bylo záhodno specifikovat model, který je dále používán. Pro účely této práce je použit stochastický diskretní nelineární dynamický stavový t-variantní model.

2.3 Stavové modely

Pro řešení systémů a modelů z hlediska estimace je zapotřebí si nejprve definovat několik pojmů. Základní jednotkou všeho je signál. Je to veličina měřitelná v čase a prostoru, která je odvozena z latinského slova *signalis* neboli *dávat znamení*. Signál může být optický, elektrický, akustický, mechanický, apod. a zpravidla slouží k přenosu informace. V rámci estimace se signál často označuje slovem proces. Stochastický signál nebo také stochastický proces obsahuje nějaký druh neurčitosti. Stochastický proces je výstupem stochastického systému. Stochastický systém je systém, který je pod vlivem náhodného šumu nebo poruchy [1–4, 6, 7].

Aby bylo možno s tímto systémem pracovat, je nutné definovat jeho model. Tato práce se, v rámci estimačních algoritmů, věnuje pouze estimaci stochastických diskretních nelineárních systémů s gaussovskými poruchami, takže model je definován jako

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k \quad (2.3.1)$$

$$z_k = h_k(x_k) + v_k \quad (2.3.2)$$

kde x_k představuje stav systému v čase k , $f_k(\cdot)$ a $h_k(\cdot)$ jsou nelineární funkce stavu a měření, z_k je měření na systému v čase k , w_k a v_k zastávají pozici stavového šumu a šumu měření v čase k .

Co se týče šumu w_k a v_k , je žádoucí, aby oba tyto stochastické procesy byly absolutně nezávislé, nepredikovatelné a vykazovaly nulovou závislost do minulosti. Takové procesy jsou označovány jako *bílé šumy* a jejich hustoty pravděpodobností splňují vlastnost

$$p(w^k) = p(w_0, w_1, \dots, w_k) = p(w_0) \cdot p(w_1) \dots p(w_k) \quad (2.3.3)$$

$$p(v^k) = p(v_0, v_1, \dots, v_k) = p(v_0) \cdot p(v_1) \dots p(v_k) \quad (2.3.4)$$

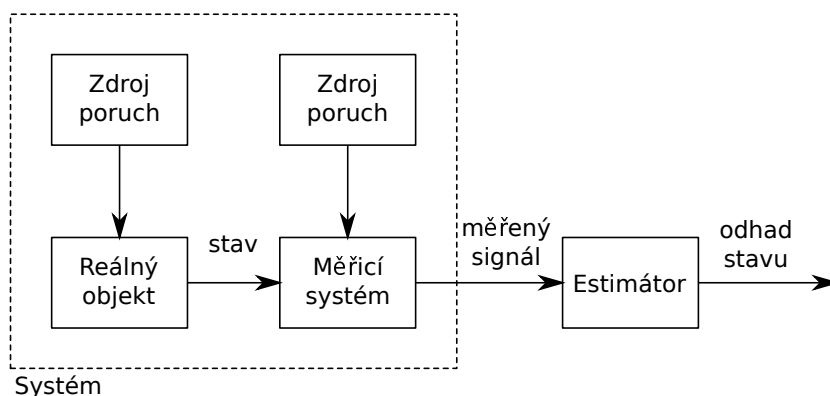
2.4 Estimace stavu

Gauss v minulosti přišel s přínosnými filozofickými poznatky týkajícími se odhadu parametrů, a sice že kdyby byla k dispozici naprosto přesná pozorování, bylo by možné určit parametry

s dokonalou přesností a stačil by k tomu minimální počet pozorování n pro n neznámých parametrů. Pozorování ale nikdy nemůže být naprosto přesné, a tak je k určení parametrů nutné zkombinovat více pozorování za účelem získání co nejlepšího odhadu. Data získaná z dalších pozorování umožňují totiž lepší potlačení poruch. Poruchy způsobené nepřesností měření je nutné modelovat pomocí pravděpodobnostního modelování. Dalším cílem estimační teorie je minimalizovat chybu odhadu, což vede k celkovému zlepšení odhadu. Možnost aplikace vícero pozorování a kontinuální úprava odhadu vede zpravidla na rekurzivní typ algoritmů.

Úloha estimace stochastických procesů bývá alternativně označována pojmem filtrace. Systém generující odhad je nazýván estimátor. Proces odhadování je dalším důležitým pojmem, byl již stručně popsán v předchozí sekci 2.1 a důkladněji bude popsán dále. Pojem odhad veličiny je pak nazýván výstup procesu odhadování. Pro model definovaný rovnicemi (2.3.1) a (2.3.2) lze cíl estimace definovat jako odhad stavu x_k na základě měření $z^k = [z_0, \dots, z_k]$ [1–4, 6, 7].

Problém estimace stavu reálného objektu lze graficky znázornit blokovým schématem uvedeným na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Schéma odhadování stavu reálného objektu [2]

Existuje mnoho způsobů jak problém estimace řešit. Lze je však rozdělit do dvou přístupů

- klasický přístup - v klasickém přístupu odhadu je odhadovaná veličina deterministická, ale neznámá konstanta. Výsledný odhad je pak pouze funkcí měřených dat a zpravidla tedy není nutné specifikovat počáteční podmínky.
- Bayesovský přístup - v tomto přístupu je parametr náhodnou proměnnou vyvíjející se v čase a k jeho odhadu se navíc používá apriorní informace. Apriorní informace o hledané veličině spočívá ve znalosti apriorní hustoty pravděpodobnosti.

2.4.1 Bayesovský přístup

Bayesovský přístup je postaven na Bayesově teorému, který je definován vztahem

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} \quad (2.4.1)$$

Tento teorém umožňuje spočítat aposteriorní hustotu pravděpodobnosti $p(x|y)$, pokud je k dispozici apriorní hustota pravděpodobnosti $p(x)$. Hustota $p(y)$

$$p(y) = \int p(y|x)p(x)dx \quad (2.4.2)$$

nezávisí na x a slouží jen jako normalizační konstanta zajišťující platnost rovnice

$$\int p(x|y)dx = 1 \quad (2.4.3)$$

Protože je stav t -variantní, je nutné do řešení problému estimace stavu za pomoci Bayesova teorému zahrnout i čas. Pokud se stav v každém časovém okamžiku mění, je zapotřebí v každém časovém okamžiku počítat i jeho odhad.

Zavedení proměnné času do výpočtu se projeví na zápisu podmíněné hustoty pravděpodobnosti

$$p(x_k|z^l) \quad (2.4.4)$$

kde k a l jsou časové okamžiky. V případě, že $k = l$, hovoří se namísto estimace či odhadu o *filtraci*, pokud platí $k < l$, jedná se o úlohu *vyhlazování* a je-li $k > l$ odhad stavu je nazýván *predikce*. V této práci budou dále rozvíjeny pouze pojmy *filtrace* a *predikce*.

Je-li model zadán rovnicemi (2.3.1) a (2.3.2) a cílem je určit podmíněnou hustotu pravděpodobnosti $p(x_k|z^l)$, nabývá vztah pro výpočet filtrační hustoty pravděpodobnosti stavu tvaru

$$p(x_k|z^k) = \frac{p(z_k|x_k)p(x_k|z^{k-1})}{p(z_k|z^{k-1})} \quad (2.4.5)$$

kde prediktivní hustota pravděpodobnosti stavu je dána vztahem

$$p(x_k|z^{k-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|z^{k-1})dx_{k-1} \quad (2.4.6)$$

a normalizační konstanta jako

$$p(z_k|z^{k-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z_k|x_k)p(x_k|z^{k-1})dx_k \quad (2.4.7)$$

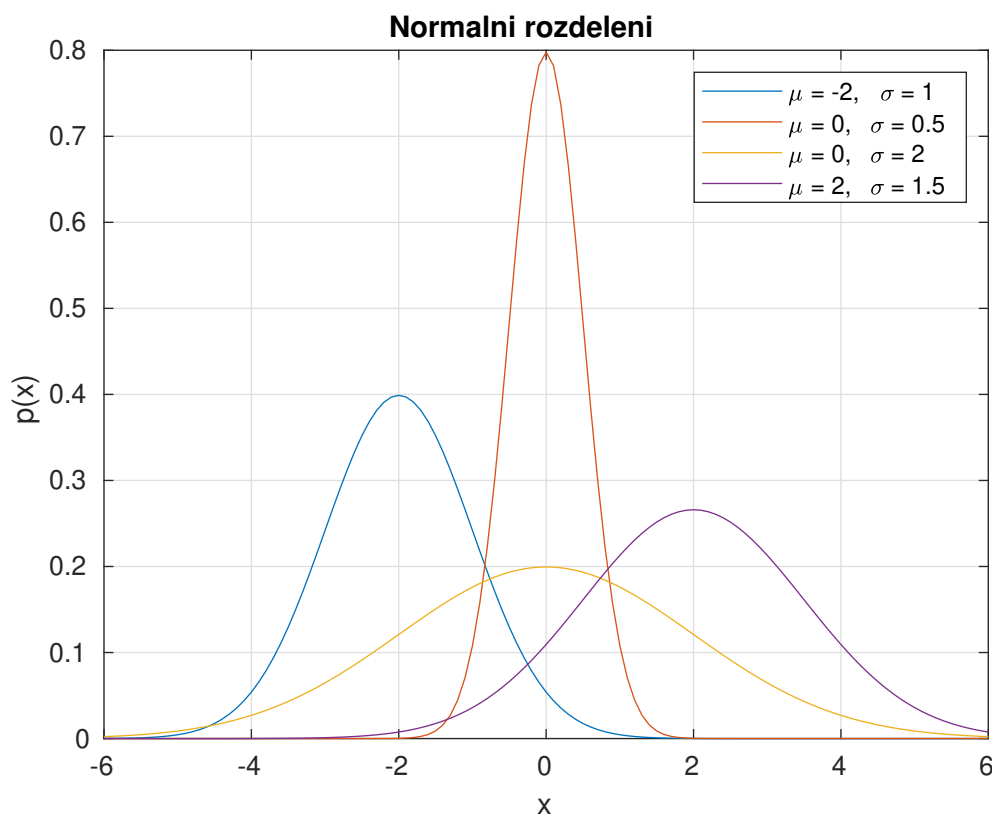
Také platí, že počáteční prediktivní hustotu pravděpodobnosti stavu lze definovat počáteční hustotou pravděpodobnosti, tedy

$$p(x_0|z^{-1}) \triangleq p(x_0) \quad (2.4.8)$$

kde x_0 je počáteční stav.

2.4.2 Gaussovo rozdělení

K odhadu parametrů a stavu neodmyslitelně patří Gaussovo nebo také normální rozdělení. Jedná se o jedno z nejdůležitějších rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny, a to kvůli výhodným matematickým vlastnostem. Gaussovská náhodná proměnná si zachovává gaussovost i po lineární transformaci. Součet gaussovských proměnných dá opět gaussovskou proměnnou. Ukázka normálního rozdělení pro různé střední hodnoty μ a standardní odchylky σ je k vidění na následujícím grafu



Obrázek 2.5: Normální rozdělení

Gaussovo rozdělení pro skalár je definováno hustotou pravděpodobnosti

$$p(x) = \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.4.9)$$

kde $\mathcal{N}(\cdot)$ značí normální hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny x , se střední hodnotou μ a variancí σ^2 definující parametry hustoty.

Další možnost zápisu ekvivalentní k (2.4.9) je

$$x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (2.4.10)$$

a říká, že x má normální rozdělení s danou střední hodnotou a variancí.

Jedná-li se o vektorovou náhodnou proměnnou, potom má normální rozdělení hustotu definovanou následujícím způsobem

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}) \triangleq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n (\det \mathbf{P})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (2.4.11)$$

kde \mathbf{x} je n -dimenzionální náhodná veličina, \mathbf{P} je $n \times n$ symetrická pozitivně definitní kovarianční matice a $\det \mathbf{P}$ značí determinant matice \mathbf{P} . Kovarianční matice je dána vztahem

$$\mathbf{P} = E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T] = \text{cov}[\mathbf{x}] \quad (2.4.12)$$

a střední hodnota

$$\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{x}] \quad (2.4.13)$$

Kapitola 3

Kalmanův filtr

Kalmanův filtr je optimální filtr pro lineární gaussovský systém. Oproti Wienerovu filtru, ze kterého Kalman při návrhu vycházel, dokáže pracovat i se signály a poruchami, které nejsou stacionární. Kalmanův filtr je také méně matematicky náročný. Naproti Wienerovu filtru, který je postaven na spektrální faktorizaci a pracuje ve frekvenční oblasti, Kalmanův filtr je odvozen z ortogonální projekce a pracuje se stavovými veličinami v oblasti časové.

Kalmanův filtr je rekurzivní algoritmus a umožňuje odhadování vnitřního stavu lineárního dynamického systému ze šumem zatížených dat získaných v diskrétních časových okamžicích. Odhad generovaný Kalmanovým filtrem je lineární, nestranný a optimální ve smyslu podmíněné střední hodnoty.

Tento filtr se nejčastěji využívá v problematice řízení, komunikace a monitorování. Příkladem může být sledování pohybujícího se objektu za použití radarového měření. V posledních letech začíná jeho využití pronikat také do oblastí ekologie a ekonomie.

Za předpokladu gaussovosti počátečního stavu a všech poruch, Kalmanův filtr je optimálním estimátorem minimalizujícím střední kvadratickou chybu (MMSE - *Minimal Mean Square Error*). Pokud zmíněné náhodné veličiny nejsou gaussovské a jedna z nich má jen první dva momenty, potom je Kalmanův filtr nejlepší lineární estimátor stavu neboli LMMSE (*Linear Minimal Mean Square Error*) estimátor [1–4, 7, 10].

3.1 Bayesovský přístup k syntéze filtru

V této sekci budou nastíněny dva přístupy k návrhu filtru generujícího odhad stavu lineárního gaussovského systému, který je dán rovnicemi

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.1.1)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.1.2)$$

Matice F_k a H_k v časovém okamžiku k jsou známé a mají vhodnou dimenzi. Rovnice (3.1.1) se nazývá stavová rovnice, a jak pojmenování naznačuje, popisuje dynamiku systému neboli vývoj stavu systému v čase x_k . Druhá rovnice (3.1.2) je označována jako rovnice měření a jejím účelem je popsat vztah mezi neznámým stavem systému a dostupným měřením z_k . Signály w_k a v_k jsou vzájemně nezávislé gaussovské bílé šумы s nulovou střední hodnotou, pro které platí

$$\begin{aligned} E[w_k w_k^T] &= E[w_k] E[w_k^T] = Q_k & E[v_k v_k^T] &= E[v_k] E[v_k^T] = R_k \\ E[w_k w_l^T] &= E[w_k] E[w_l^T] = 0 & E[v_k v_l^T] &= E[v_k] E[v_l^T] = 0, \quad \text{pro } k \neq l \end{aligned}$$

kde matice Q_k a R_k jsou symetrické a pozitivně definitní.

Dále je důležité říci, že počáteční stav x_0 je na šumech nezávislý a jedná se o gaussovskou náhodnou veličinu. Počáteční stav je obvykle zadán jako $p(x_0) = \mathcal{N}(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0)$, kde střední hodnota \hat{x}'_0 i kovariance P'_0 jsou známé [7, 10].

3.1.1 Přímý přístup

Tento přístup důsledně vychází z Bayesovských vztahů. Nejdříve bude nastíněn výpočet filtrační hustoty pravděpodobnosti. K tomu je zapotřebí znát podmíněnou prediktivní hustotu pravděpodobnosti pro $k = 0$

$$p(x_0 | z^{-1}) = p(x_0) = \mathcal{N}(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0) \quad (3.1.3)$$

kde $\hat{x}'_0 = E[x_0 | z^{-1}]$ je apriorní střední hodnota a $P'_0 = \text{cov}[x_0 | z^{-1}]$ je apriorní kovarianční matice chyby odhadu stavu. Dále platí

$$p(z_0 | x_0) = \mathcal{N}(z_0 : H_0 x_0, R_0) \quad (3.1.4)$$

$$p(z_0 | z^{-1}) = \mathcal{N}(z_0 : H_0 \hat{x}'_0, H_0 P'_0 H_0^T + R_0) \quad (3.1.5)$$

Po dosazení do (2.4.5) je získán Bayesův vztah

$$p(x_0 | z^0) = \frac{p(z_0 | x_0) p(x_0 | z^{k-1})}{p(z_0 | z^{k-1})} = \frac{\mathcal{N}(z_0 : H_0 x_0, R_0) \mathcal{N}(\hat{x}'_0, P'_0)}{\mathcal{N}(z_0 : H_0 \hat{x}'_0, H_0 P'_0 H_0^T + R_0)} \quad (3.1.6)$$

Následnými mnohými úpravami a operacemi, které jsou podrobně sepsány v [7], je nakonec získán vztah pro výpočet momentů filtrační hustoty pravděpodobnosti ve tvaru

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + P'_k H_k^T (R_k + H_k P'_k H_k^T)^{-1} (z_k - H_k \hat{x}'_k) \quad (3.1.7)$$

$$P_k = P'_k - P'_k H_k^T (R_k + H_k P'_k H_k^T)^{-1} H_k P'_k \quad (3.1.8)$$

kde pro filtrační hustotu pravděpodobnosti platí

$$p(x_k | z^k) = \mathcal{N}(x_k : \hat{x}_k, P_k), \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.1.9)$$

Nyní bude nastíněno odvození prediktivní hustoty pravděpodobnosti stavu $p(x_1 | z^0)$ tedy pro $k = 1$. Tentokrát bude dosazováno do vztahu (2.4.6). K výpočtu je potřeba znát filtrační hustotu pravděpodobnosti $p(x_0 | z^0)$ a přechodovou hustotu pravděpodobnosti $p(x_1 | x_0)$. Filtrační hustota již byla odvozena pro předchozí případ a přechodová hustota může být spočítána na základě znalosti vztahu (3.1.2) a základních vět teorie pravděpodobnosti. Tedy

$$p(x_1 | x_0) = \mathcal{N}(x_1 : F_0 x_0, Q_0) \quad (3.1.10)$$

Nyní je možné dosadit (3.1.9) a (3.1.10) do rovnice (2.4.6), čímž je získána rovnice nazývaná Chapman-Kolmogorovova rovnice

$$p(x_1 | z^0) = \int \mathcal{N}(x_1 : F_0 x_0, Q_0) \mathcal{N}(\hat{x}_0, P_0) dx_0 \quad (3.1.11)$$

Následujícími úpravami, které jsou opět detailně sepsány v [7], je odvozen požadovaný vztah pro prediktivní hustotu pravděpodobnosti

$$p(x_{k+1} | z^k) = \mathcal{N}(x_{k+1} : \hat{x}'_{k+1}, P'_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.1.12)$$

$$\hat{x}'_{k+1} = F_k \hat{x}_k \quad (3.1.13)$$

$$P'_{k+1} = F_k P_k F_k^T + Q_k \quad (3.1.14)$$

3.1.2 Nepřímý přístup

Kvůli složitosti odvození rovnic na základě bayesovských vztahů existuje i alternativní způsob odvození stojící na základních větách pravděpodobnosti a statistiky. Tento alternativní způsob je ve srovnání s předchozím výrazně snazší.

Tento přístup podrobně specifikovaný v [7] vede na následující vztahy

- filtrační hustota pravděpodobnosti

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + P'_{xz,k} (P'_{z,k})^{-1} (z_k - \hat{z}'_k) \quad (3.1.15)$$

$$P_k = P'_k - P'_{xz,k} (P'_{z,k})^{-1} (P'_{xz,k})^T \quad (3.1.16)$$

kde prediktivní momenty odhadu měření a stavu jsou dány jako

$$\hat{z}'_k = H_k \hat{x}'_k \quad (3.1.17)$$

$$P'_{z,k} = H_k P'_k H_k^T + R_k \quad (3.1.18)$$

$$P'_{xz,k} = P'_k H_k^T \quad (3.1.19)$$

- prediktivní hustota pravděpodobnosti

$$\hat{x}'_{k+1} = F_k \hat{x}'_k \quad (3.1.20)$$

$$P'_{k+1} = F_k P'_k F_k^T + Q_k \quad (3.1.21)$$

Porovnání výsledných vztahů obou přístupů ukazuje, že oba v návrhu Kalmanova filtru vedou ke stejnému algoritmu.

3.2 Jednokrokový prediktor a Riccatiho rovnice

Jednokrokový prediktor vznikne dosazením (3.1.7) do (3.1.13) a (3.1.8) do (3.1.14) tak, že vyjde

$$\hat{x}'_{k+1} = F_k [\hat{x}'_k + P'_k H_k^T (H_k P'_k H_k^T + R_k)^{-1} (z_k - H_k \hat{x}'_k)] \quad (3.2.1)$$

$$P'_{k+1} = F_k [P'_k - P'_k H_k^T (H_k P'_k H_k^T + R_k)^{-1} H_k P'_k] F_k^T + Q_k \quad (3.2.2)$$

(3.2.1) lze alternativně zapsat ve tvaru

$$\hat{x}'_{k+1} = (F_k - K'_k H_k) \hat{x}'_k + K'_k z_k \quad (3.2.3)$$

kde K_k je Kalmanův zisk

$$K_k = P'_k H_k^T (H_k P'_k H_k^T + R_k)^{-1} \quad \text{respektive} \quad K_k = P'_{xz,k} (P'_{z,k})^{-1} \quad (3.2.4)$$

$$K'_k = F_k P'_k H_k^T (H_k P'_k H_k^T + R_k)^{-1} \quad (3.2.5)$$

Vztah (3.2.2) je označován jako Riccatiho rovnice a pro t-invariantní systém nabývá tvaru

$$P' = F [P' - P' H^T (H P' H^T + R)^{-1} H P'] F^T + Q \quad (3.2.6)$$

a pokud navíc bude dvojice H, F pozorovatelná a šum systému bude ovlivňovat všechny složky systému, bude prediktivní kovariance konvergovat a bude existovat jediné pozitivně definitní řešení Riccatiho rovnice [3, 7].

3.3 Inovace

Dosazení Kalmanova zisku (3.2.5) do rovnice prediktivní střední hodnoty (3.2.1) ústí v rovnici

$$\hat{x}'_{k+1} = F_k[\hat{x}'_k + K_k(z_k - H_k\hat{x}'_k)] \quad (3.3.1)$$

Inovační posloupnost je potom definována jako

$$\tilde{z}_k \triangleq z_k - H_k\hat{x}'_k \quad (3.3.2)$$

a umožňuje alternativní popis modelu Kalmanova filtru, který je označován jako *inovační model*

$$\hat{x}_{k+1} = F_k x_k + K_k \tilde{z}_k \quad (3.3.3)$$

$$z_k = H_k \hat{x}'_k + \tilde{z}_k \quad (3.3.4)$$

3.4 Algoritmus Kalmanova filtru

1. Inicializace

$$p(x_0|z^{-1}) = \mathcal{N}(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0) \quad (3.4.1)$$

2. Filtrace

$$p(x_k|z^k) = \mathcal{N}(x_k : \hat{x}_k, P_k) \quad (3.4.2)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + K_k(z_k - H_k\hat{x}'_k) \quad (3.4.3)$$

$$P_k = (I - K_k H_k^T) P'_k \quad (3.4.4)$$

$$K_k = P'_k H_k^T (R_k + H_k P'_k H_k^T)^{-1} \quad (3.4.5)$$

3. Predikce

$$\hat{x}'_{k+1} = F_k \hat{x}_k \quad (3.4.6)$$

$$P'_{k+1} = F_k P_k F_k^T + Q_k \quad (3.4.7)$$

Kapitola 4

Lokální filtry

Jak již bylo řečeno, Kalmanův filtr je optimální estimátor pro *lineární* gaussovské systémy a lze u něj zaručit konvergenci odhadu. Tento předpoklad ale značně omezuje použitelnost jinak po všech stránkách mimořádného filtru.

Pro nelineární systémy obecně neexistuje analytické řešení pomocí Bayesových rekursivních vztahů (BRV). Existují ale *lokální metody*, při kterých dochází k modifikaci modelu nelineárního systému tak, aby byl návrh Kalmanova filtru možný. Metody jsou navíc jednoduché a výpočetně úsporné, mají ale i stinné stránky. Není u nich možné analyticky zaručit konvergenci odhadu. Tu dokáží v limitním případě zaručit *globální metody* představující numerické řešení BRV. To s sebou ale nese neblahé následky v podobě extrémní výpočetní náročnosti.

Cílem této práce jsou právě lokální metody návrhu, a proto bude nyní představeno několik zástupců lokálních filtrů [7, 11, 12].

4.1 Rozšířený Kalmanův filtr - EKF

Rozšířený Kalmanův filtr je v angličtině označován jako *Extended Kalman Filter* - odtud používaná zkratka EKF. Tento filtr obohacuje oblast systémů, na které je možné použít algoritmus Kalmanova filtru, o nelineární systémy, avšak na úkor některých výhodných vlastností, které budou specifikovány po odvození rovnic definujících EKF - (4.1.10) a (4.1.16).

U EKF je aplikován stejný přístup k odvození estimátoru jako u klasického Kalmanova filtru s tím rozdílem, že během algoritmu navíc dochází k linearizaci nelineárního systému. Linearizace je postavena na aproximaci Taylorova rozvoje, tedy na použití derivace. Tímto se filtr řadí do skupiny *derivačních* filtrů, kam patří například i filtr druhého řádu.

Nelineární systém bude reprezentován vztahy zmíněnými v kapitole 2 rovnicemi (2.3.1) a

(2.3.2). Tedy

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k \quad (4.1.1)$$

$$z_k = h_k(x_k) + v_k \quad (4.1.2)$$

kde funkce $f_k(\cdot)$ a $h_k(\cdot)$ jsou známé nelineární diferencovatelné vektorové funkce o příslušných dimenzích. Náhodné veličiny tohoto systému v podobě počátečního stavu a bílých šumů jsou opět definovány normálním rozdělením

$$p(x_0) = \mathcal{N}(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0) \quad (4.1.3)$$

$$p(w_k) = \mathcal{N}(w_k : 0, Q_k) \quad (4.1.4)$$

$$p(v_k) = \mathcal{N}(v_k : 0, R_k) \quad (4.1.5)$$

$$k = 0, 1, \dots, N$$

Stejně jako u návrhu klasického Kalmanova filtru bude i u tohoto filtru nastíněn návrh přímým i nepřímým přístupem.

4.1.1 Přímý přístup

Obdobně jako v předchozí kapitole je nejprve dosazeno do Bayesova vztahu, který po dosazení hustot pravděpodobností relevantních pro tento případ nabývá tvaru

$$p(x_0|z^0) = \frac{\mathcal{N}(z_0 : h_0(x_0), R_0)\mathcal{N}(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0)}{\int \mathcal{N}(z_0 : h_0(x_0), R_0)\mathcal{N}(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0)dx_0} \quad (4.1.6)$$

Kvůli přítomnosti nelinearity není možné postupovat přesně tak, jak tomu bylo v předchozí kapitole. Nejprve je potřeba provést linearizaci nelineární funkce ve vhodném bodě. Tímto bodem je složka počátečního stavu \hat{x}'_0 . Bod je použit pro Taylorův rozvoj nelineární funkce $h_0(\cdot)$, ze kterého budou vzaty první dva členy, tj.

$$h_0(x_0) = [h_{1,0}(x_0), h_{2,0}(x_0), \dots, h_{n_z,0}(x_0)] \simeq h_0(\hat{x}'_0) + H_0(\hat{x}'_0)(x_0 - \hat{x}'_0) \quad (4.1.7)$$

$$H_0(\hat{x}'_0) = \frac{\partial h_0(x_0)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=\hat{x}'_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{1,k}(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_{1,k}(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_{1,k}(x_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_{2,k}(x_0)}{\partial x_1} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_{n_z,k}(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial h_{n_z,k}(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.1.8)$$

kde $H_0(\cdot)$ je tzv. Jakobiho matice o rozměrech $n_z \times n_x$, kde n_z představuje dimenzi měření a n_x dimenzi stavu. Dosadí-li se Taylorův rozvoj ze vztahu (4.1.7) do vztahu (4.1.6), potom

$$p_A(x_0|z^0) = \frac{\mathcal{N}(z_0 : h_0(\hat{x}'_0) + H_0(\hat{x}'_0)(x_0 - \hat{x}'_0), R_0)\mathcal{N}(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0)}{\int \mathcal{N}(z_0 : h_0(\hat{x}'_0) + H_0(\hat{x}'_0)(x_0 - \hat{x}'_0), R_0)\mathcal{N}(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0)dx_0} \quad (4.1.9)$$

Označení $p_A(\cdot)$ říká, že se jedná pouze o aproximativní hustotu pravděpodobnosti, což je dáno použitím pouze prvních dvou členů Taylorovy řady. Po aplikaci stejného postupu odvození jako v předešlé kapitole a následném zobecnění pro k , bude mít **aproximační filtrační hustota pravděpodobnosti** podobu

$$\begin{aligned} p_A(x_k|z^k) &= \mathcal{N}(x_k : \hat{x}_k, P_k) \\ \hat{x}_k &= \hat{x}'_k + P'_k H_k^T(\hat{x}'_k) [R_k + H_k(\hat{x}'_k) P'_k H_k^T(\hat{x}'_k)]^{-1} (z_k - h_k(\hat{x}'_k)) \\ P_k &= P'_k - P'_k H_k^T(\hat{x}'_k) [R_k + H_k(\hat{x}'_k) P'_k H_k^T(\hat{x}'_k)]^{-1} H_k(\hat{x}'_k) P'_k \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

A nyní nalezení prediktivní hustoty pravděpodobnosti. Je známo, že

$$p(x_1|z^0) = \int p(x_1|x_0)p(x_0|z^0)dx_0 \quad (4.1.11)$$

Potřebné hustoty jsou známé, takže je možné je rovnou dosadit

$$p_A(x_1|z^0) = \int \mathcal{N}(x_1 : f_0(x_0), Q_0)p_A(x_0|z^0)dx_0 = \int \mathcal{N}(x_1 : f_0(x_0), Q_0)\mathcal{N}(x_0 : \hat{x}_0, P_0)dx_0 \quad (4.1.12)$$

Opět byl použit index A pro označení aproximační hustoty a opět je potřeba linearizovat nelineární funkci Taylorovým rozvojem. Nelineární funkce $f_0(\cdot)$ aproximovaná prvními dvěma členy Taylorova rozvoje v bodě \hat{x}_0 má tvar

$$f_0 x_0 \simeq f_0(\hat{x}_0) + F_0(\hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0) \quad (4.1.13)$$

$$F_0(\hat{x}_0) = \left. \frac{\partial f_0(x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=\hat{x}_0} \quad (4.1.14)$$

kde $F_0(\cdot)$ je Jakobiho matice o rozměrech $n_x \times n_x$. Dosazením (4.1.13) do (4.1.12) vyjde

$$p_A(x_1|z^0) = \int \mathcal{N}(x_1 : f_0(\hat{x}_0) + F_0(\hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0), Q_0)\mathcal{N}(x_0 : \hat{x}_0, P_0)dx_0 \quad (4.1.15)$$

Analogickým postupem je získána **aproximační prediktivní hustota pravděpodobnosti**

$$\begin{aligned} p_A(x_{k+1}|z^k) &= \int \mathcal{N}(x_{k+1} : \hat{x}'_{k+1}, P'_{k+1}) \\ \hat{x}'_{k+1} &= f_k(\hat{x}_k) \\ P'_{k+1} &= F_k(\hat{x}_k)P_k(F_k(\hat{x}_k))^T + Q_k \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

4.1.2 Nepřímý přístup

Odvození opět vychází z nepřímého přístupu v kapitole 3. Nelineární funkce $f_k(\cdot)$ a $h_k(\cdot)$ jsou aproximovány stejně jako u přímého přístupu v předchozí části. Výslednou aproximační fil-

trační hustotu stavu v čase k lze vyjádřit jako

$$p_A(x_k | z^k) = \mathcal{N}(x_k : \hat{x}_k, P_k) \quad (4.1.17)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + P'_{xz,k} (P'_{z,k})^{-1} (z_k - \hat{z}'_k) \quad (4.1.18)$$

$$P_k = P'_k - P'_{xz,k} (P'_{z,k})^{-1} (P'_{xz,k})^T \quad (4.1.19)$$

a momenty predikce měření

$$\hat{z}'_k = h_k(\hat{x}'_k) \quad (4.1.20)$$

$$P'_{z,k} = H_k(\hat{x}'_k) P'_k (H_k(\hat{x}'_k))^T + R_k \quad (4.1.21)$$

$$P'_{xz,k} = P'_k (H_k(\hat{x}'_k))^T \quad (4.1.22)$$

Aproximační prediktivní hustota pravděpodobnosti a její momenty mají podobu

$$p_A(x_{k+1} | z^k) = \mathcal{N}(x_{k+1} : \hat{x}'_{k+1}, P'_{k+1}) \quad (4.1.23)$$

$$\hat{x}'_{k+1} = f_k(\hat{x}_k) \quad (4.1.24)$$

$$P'_{k+1} = F_k(\hat{x}_k) P_k (F_k(\hat{x}_k))^T + Q_k \quad (4.1.25)$$

4.1.3 Nevýhody rozšířeného Kalmanova filtru

Jeden z rozdílů EKF oproti KF spočívá v tom, že kovarianční matice P_k a P'_{k+1} není nadále možné počítat dopředu, neboť v tomto případě jsou funkcemi měření. Za nevýhodu lze považovat ten fakt, že filtrační a prediktivní hustoty ztrácí na přesnosti, neboť se již nejedná o exaktní řešení problému, nýbrž o jeho aproximaci. Aproximace je navíc prováděna pouze v jednom bodě, tudíž je platnost omezena jen na blízké okolí bodu. Proto je tento filtr označován jako *lokální*.

4.2 Unscentovaný Kalmanův filtr

Unscentovaný Kalmanův filtr (UKF), v angličtině označován jako *Unscented Kalman Filter*, je dalším filtrem umožňujícím odhad stavu pro modely obsahující nelineární funkce. Je součástí širší třídy lokálních filtrů nazývaných sigma-bodové filtry [13].

Narozdíl od EKF, při návrhu aproximuje namísto nelineární funkce popis podmíněné hustoty pravděpodobnosti, a to tak, že je deterministicky zvolena množina bodů reprezentující dané rozložení. Body jsou označovány jako tzv. *sigma-body*. Tímto se UKF řadí k *bezderivačním* filtřům, kam lze zařadit i filtr diferenční [14].

Odvození rovnic UKF bude za účelem jednoduchosti provedeno pouze nepřímým přístupem [7, 11, 12].

4.2.1 Filtrace

Pro získání vztahů filtračního kroku unscentovaného filtru je, jako v předešlých kapitolách, nutné vypočítat momenty aproximační filtrační hustoty pravděpodobnosti

$$p_A(x_k|z^k) = \mathcal{N}(x_k : \hat{x}_k, P_k) \quad (4.2.1)$$

kde

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + P'_{xz,k}(P'_{z,k})^{-1}(z_k - \hat{z}'_k) \quad (4.2.2)$$

$$P_k = P'_k - P'_{xz,k}(P'_{z,k})^{-1}(P'_{xz,k})^T \quad (4.2.3)$$

Aproximační prediktivní hustota je dána rovnicí

$$p_A(x_k|z^{k-1}) = \mathcal{N}(x_k : \hat{x}'_k, P'_k) \quad (4.2.4)$$

Ve výpočtu prediktivních momentů odhadu měření nastává rozdíl. Zde jsou již použity sigma-body, které jsou transformovány přes nelineární funkci v rovnici měření. Jejich počet je určen jako $(2n_x + 1)$ a výpočet probíhá následovně

$$\mathcal{X}'_{k,0} = \hat{x}'_k \quad (4.2.5)$$

$$\mathcal{X}'_{k,i} = \hat{x}'_k + \sqrt{n_x + \kappa} s'_{k,i}, \quad i = 1, \dots, n_x \quad (4.2.6)$$

$$\mathcal{X}'_{k,j} = \hat{x}'_k - \sqrt{n_x + \kappa} s'_{k,j-n_x}, \quad j = n_x + 1, \dots, 2n_x \quad (4.2.7)$$

Veličina κ je škálovací parametr, jehož volba je diskutována později, a $s'_{k,i}$ značí i -tý sloupec v odmocninové matici S'_k , která je vzata ze vztahu

$$P'_k = S'_k(S'_k)^T \quad (4.2.8)$$

Každý ze sigma-bodů má navíc svoji váhu

$$\mathcal{W}_0 = \frac{\kappa}{n_x + \kappa} \quad (4.2.9)$$

$$\mathcal{W}_i = \frac{\kappa}{2(n_x + \kappa)}, \quad i = 1, \dots, 2n_x \quad (4.2.10)$$

Váhy se během celého návrhu nemění, neboť závisí pouze na konstantě κ a na dimenzi stavu. To znamená, že je stačí vypočítat pouze jedenkrát.

Důležitou vlastností vážených sigma-bodů je, že jsou zachovány první dva momenty prediktivní hustoty pravděpodobnosti. Střední hodnota množiny sigma-bodů je tedy

$$\hat{x}'_k = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} \mathcal{X}'_{k,i} \quad (4.2.11)$$

a kovarianční matice

$$P'_k = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} (\mathcal{X}'_{k,i} - \hat{x}'_k) (\mathcal{X}'_{k,i} - \hat{x}'_k)^T \quad (4.2.12)$$

Následuje transformace bodů nelineární funkcí v rovnici měření (4.1.2)

$$\mathcal{Z}'_{k,i} = h_k(\mathcal{X}'_{k,i}), \quad i = 0, \dots, 2n_x \quad (4.2.13)$$

Transformované sigma-body jsou použity pro výpočet prediktivní charakteristiky měření

$$\hat{z}'_k = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} \mathcal{Z}'_{k,i} \quad (4.2.14)$$

$$P'_{z,k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} (\mathcal{Z}'_{k,i} - \hat{z}'_k) (\mathcal{Z}'_{k,i} - \hat{z}'_k)^T + R_k \quad (4.2.15)$$

$$P'_{xz,k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} (\mathcal{X}'_{k,i} - \hat{x}'_k) (\mathcal{Z}'_{k,i} - \hat{z}'_k)^T \quad (4.2.16)$$

kteřá je dosazena do rovnic pro výpočet momentů aproximativní filtrační hustoty pravděpodobnosti (4.2.2) a (4.2.3).

4.2.2 Predikce

Prediktivní hustota pravděpodobnosti je dána jako

$$p_A(x_{k+1}|z^k) = \mathcal{N}(x_{k+1} : \hat{x}'_{k+1}, P'_{k+1}) \quad (4.2.17)$$

a aby bylo možné vypočítat její momenty, je zapotřebí znát filtrační množinu sigma-bodů.

Sigma-body se počítají na základě filtračních momentů a jejich výpočet je dán rovnicemi

$$\mathcal{X}_{k,0} = \hat{x}_k \quad (4.2.18)$$

$$\mathcal{X}_{k,i} = \hat{x}_k + \sqrt{n_x + \kappa} s_{k,i}, \quad i = 1, \dots, n_x \quad (4.2.19)$$

$$\mathcal{X}_{k,j} = \hat{x}_k - \sqrt{n_x + \kappa} s_{k,j-n_x}, \quad j = n_x + 1, \dots, 2n_x \quad (4.2.20)$$

kde $s_{k,i}$ značí i -tý sloupec v matici S_k , která je vzata ze vztahu

$$P_k = S_k (S_k)^T \quad (4.2.21)$$

Dalším krokem je transformace filtračních sigma-bodů nelineární funkcí v rovnici dynamiky (4.1.1)

$$\mathcal{X}'_{k+1,i} = f_k(\mathcal{X}_{k,i}), \quad \forall i \quad (4.2.22)$$

Transformované sigma-body jsou použity pro výpočet prediktivní charakteristiky stavu

$$\hat{x}'_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} \mathcal{X}'_{k+1,i} \quad (4.2.23)$$

$$P'_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} (\mathcal{X}'_{k+1,i} - \hat{x}'_{k+1})(\mathcal{X}'_{k+1,i} - \hat{x}'_{k+1})^T + Q_k \quad (4.2.24)$$

Tímto je algoritmus unscentovaného Kalmanova filtru dokončen.

4.2.3 Standardní volba škálovacího parametru

Ještě je důležité říci, že škálovací parametr může být volen dle vztahu

$$\begin{aligned} \kappa &= 3 - n_x & n_x &\leq 3 \\ \kappa &= 0 & n_x &> 3 \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

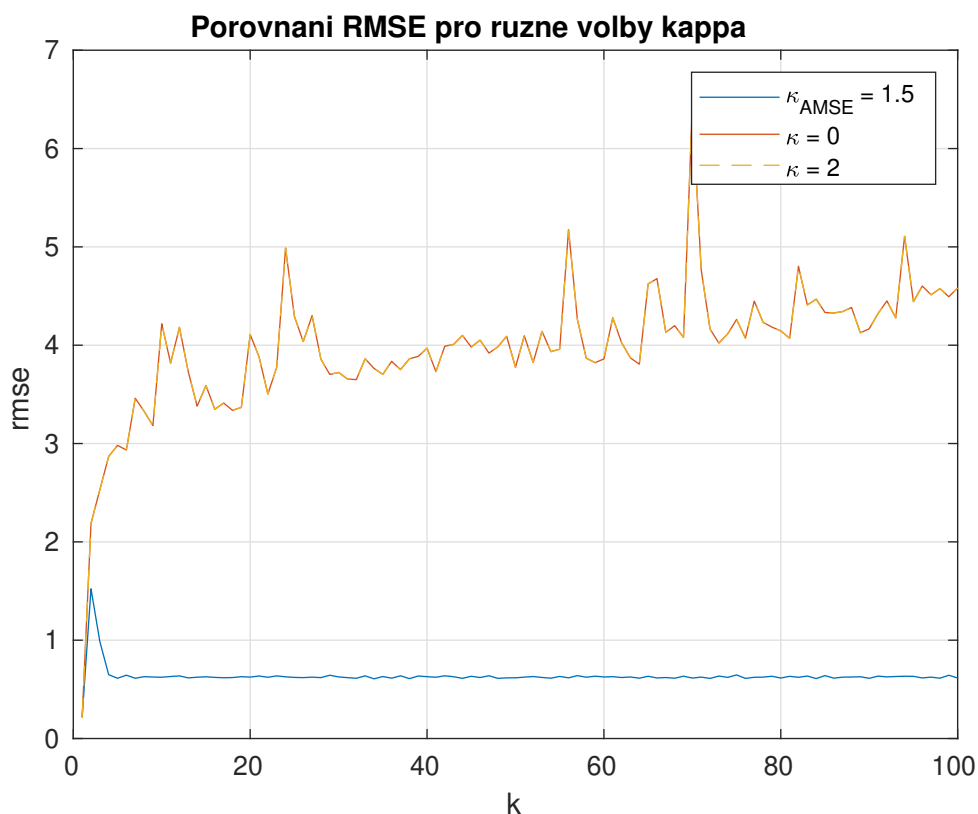
který je optimální volbou dle analýzy v [15]. Jiná možnost je volit

$$\kappa = 0 \quad (4.2.26)$$

což je standardní volba u tzv. kubaturních filtrů, o kterých lze zjistit více v [16].

Tyto dvě metody jsou považovány za optimální, ale mělo by s nimi být zacházeno spíše jen jako se suboptimálním doporučením. Za prvé, si jejich myšlenky vzájemně odporují, za druhé, vůbec nezávisí na systému, a za třetí, je při jejich odvození použita aproximace.

Motivací, proč nebrat tato doporučení jako jediná správná, může být následující graf 4.1, který znázorňuje odmocninu ze střední kvadratické chyby pro různě zvolené hodnoty škálovacího parametru κ . Hodnota κ_{AMSE} byla volena pomocí offline adaptace AMSE založené na kritériu MSE (*Mean Square Error*). O adaptační metodě bude více řečeno v kapitole 5.



Obrázek 4.1: Porovnání kvality odhadů

Z grafu je vidět, že RMSE s parametry κ nastavenými dle výše popsáných pravidel, nabývají mnohem vyšších hodnot než chyba s parametrem κ_{AMSE} nastaveným pomocí adaptace. Pro kontrolu jsou v následující tabulce 4.1 uvedeny průměry všech odmocnin středních kvadratických chyb.

	κ_{AMSE}	$\kappa = 0$	$\kappa = 2$
RMSE	0.6423	4.0356	4.0356

Tabulka 4.1: Porovnání průměrů RMSE

Zavedená pravidla zkrátka neumožňují UKF využít svého plného potenciálu a právě problematice návrhu κ se bude věnovat celý zbytek práce.

Na závěr je nutno poznamenat, že detaily k uvedenému příkladu jsou dány v sekci věnované numerické ilustraci.

Kapitola 5

Adaptace škálovacího parametru v UKF

Jak bylo řečeno i předvedeno na konci předchozí kapitoly, standardní volba škálovacího parametru κ nevede na optimální filtrační výsledky. Z tohoto důvodu začaly vznikat nové metody návrhu tohoto parametru a v této kapitole je představeno několik jejich zástupců. Jsou zde zmíněny i metody zabývající se adaptací jiných parametrů, ale ty práce dále nerozvádí. Nejprve ale pár motivačních slov na úvod.

Aktivní estimace se stává stále důležitější oblastí v teorii řízení a její aplikaci. Zvláště v nelineárním řízení systémů s neurčitostí jako jsou například roboti a bezpilotní letouny. Zde se totiž časově proměnné parametry a neurčitost vyskytují ve vysoké míře jak v rovnici dynamiky, tak i v rovnici měření.

Mezi nejefektivnější techniky aktivního modelování v letech kolem roku 1990 patřily například neuronové sítě, anglicky označované jako *Neural Networks (NN)*, a strojové učení založené na neuronových sítích. Avšak problémy zahrnuté v NN, jako jsou výběr trénovacích dat, robustnost, spolehlivost a implementace v reálném čase, stále zůstávají nevyřešeny a omezují tak jejich použití v reálných systémech. Především pak v systémech vyžadujících vysoce spolehlivé řízení.

V poslední době se díky povzbudivým úspěchům stává důležitým směrem pro online modelování sekvenční odhad. Co se týče stochastické estimace, mezi nejpopulárnější řešení patří EKF. Jak už ale bylo řečeno, EKF trpí jistými nedostatky, a tak je snaha místo něj používat UKF. Ten nabízí bezderivační řešení estimace stavových parametrů nelineárních systémů, a to pomocí unscentované transformace. K tomu navíc dosahuje přesnosti druhého řádu při řádově stejných výpočetních nárocích jako EKF.

Ačkoli se v algoritmu UKF nepoužívá linearizovaná nelineární dynamika stavu a není zapotřebí výpočtu Jakobiho matice, stále tento filtr spadá do skupiny lokálních filtrů, které jsou

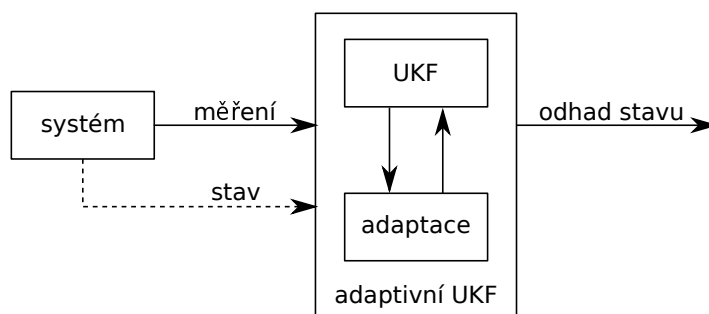
schopny dosáhnout dobrých výsledků pouze tehdy, jsou-li k dispozici apriorní předpoklady zahrnující přesný referenční model, kompletní informace o typu rozdělení šumu a vhodné počáteční podmínky. Bohužel tyto apriorní informace často nejsou dostatečně přesné anebo nejsou vůbec k dispozici. Klasický UKF bude za těchto okolností ztrácet na efektivitě a dokonce i stabilitě kvůli nesouladu mezi apriorním předpokladem a tím reálným.

Jedním z možných řešení tohoto problému je použití adaptivního mechanismu při filtraci. To znamená, že parametry filtru s nedostatečnou apriorní informací jsou automaticky laděny tak, aby odpovídaly reálným statistikám [17].

Možné přístupy k adaptaci budou představeny právě v této kapitole.

5.1 Použité metody adaptace a jejich rozdělení

Pro účely této práce bylo vybráno několik článků [18–22], ve kterých je adaptivní algoritmus postaven na návrhu metody volby škálovacího parametru. Blokové schéma úlohy odhadu pro tento typ adaptace lze znázornit obrázkem 5.1.



Obrázek 5.1: Model adaptivního UKF

Některé adaptace vyžadují navíc znalost skutečného stavu systému, což je na obrázku znázorněno přerušovanou čarou.

Metody návrhu lze rozdělit do dvou základních skupin - *offline* a *online*. V čem tkví tyto metody, je popsáno v následujících sekcích.

5.1.1 Offline metody adaptace

Offline metoda adaptace spočívá v použití adaptace v *offline* stavu. Což znamená, že je adaptace provedena mimo cyklus procesu filtrování signálu. Tudíž se u ní logicky předpokládá nižší výpočetní náročnost, neboť probíhá pouze jednou.

Offline adaptace slouží hlavně jako nástroj k trénování škálovacího parametru pro určitý model. Získaný optimální parametr je pak možné použít pro systémy, které mají podobnou charakteristiku jako referenční model trénování.

V této práci jsou offline adaptace prováděny tak, že nejdřív je v cyklu pro množinu \mathcal{K} obsahující různé hodnoty parametru κ vypočten odhad pomocí UKF. Pro získaný odhad pak následuje výpočet kriteriální funkce $J(\cdot)$. Po ukončení cyklu proběhne výběr optimálního škálovacího parametru na základě minimalizace či maximalizace kriteriální funkce, díky němuž je následně získán optimální odhad. Obecný pseudo-algoritmus je znázorněn v algoritmu 1.

```

1 for each  $\kappa \in \mathcal{K}$  do
2    $[\hat{\mathbf{x}}(\kappa), \mathbf{P}(\kappa)] \leftarrow \text{ukf}(\hat{\mathbf{x}}'_0, \mathbf{P}'_0, f(\cdot), h(\cdot), Q, R, \kappa)$ 
3    $J(\kappa) \leftarrow \text{criterion}(\hat{\mathbf{x}}(\kappa), \mathbf{P}(\kappa))$ 
4 end
5  $\kappa_{\text{optimal}} = \arg \underset{\kappa \in \mathcal{K}}{\text{optimum}} J(\kappa)$   $\triangleright$  optimum represents min or max
6  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{optimal}} = \hat{\mathbf{x}}(\kappa_{\text{optimal}})$ 
7  $\mathbf{P}_{\text{optimal}} = \mathbf{P}(\kappa_{\text{optimal}})$ 

```

Algoritmus 1: Obecný algoritmus implementovaných offline adaptací

5.1.1.1 Offline adaptace založená na logaritmicke věrohodnosti

Tato adaptace využívá jako kritérium logaritmicke podmíněnou věrohodnost z článku [18], která je pro účely této práce upravena do podoby

$$\kappa_{LOG} = \arg \max_{\kappa \in \mathcal{K}} LH_{log}(\kappa) = \arg \max_{\kappa \in \mathcal{K}} \frac{\sum_{k=1}^N \log(\mathcal{N}(\mathbf{z}_k : \hat{\mathbf{z}}_k(\kappa), \mathbf{P}_{z,k}(\kappa)))}{N} \quad (5.1.1)$$

kde κ_{LOG} je hodnota κ poskytující nejlepší odhad ve smyslu maximalizace kritéria logaritmicke věrohodnosti $LH_{log}(\cdot)$. \mathcal{K} je množina hodnot κ a N je celkový počet časových okamžiků k .

V článku, ze kterého bylo toto kritérium přejato, je na adaptaci nahlíženo jako na optimalizační problém. Autoři navrhli dva algoritmy provádějící optimalizaci na základě tohoto kritéria. První algoritmus je standardní modelově založená optimalizace využívající genetický algoritmus pro maximalizaci kritéria horní meze spolehlivosti, v článku referované jako UCB - *Upper Confidence Bound*. Druhý navrhuje novou metodu ladění založenou na stochastickém hledání [18].

Tato adaptace je dále označována jako LOG.

5.1.1.2 Offline adaptace založená na střední kvadratické chybě

Dalším kritériem pro výběr optimální hodnoty κ je střední kvadratická chyba (MSE). Škálovací parametr κ_{AMSE} se v tomto případě získává z

$$\kappa_{AMSE} = \arg \min_{\kappa \in \mathcal{K}} \text{MSE}(\kappa) = \arg \min_{\kappa \in \mathcal{K}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x_k - \hat{x}_k(\kappa)]^2 \quad (5.1.2)$$

kde x_k je skutečný stav v čase k a $\hat{x}_k(\kappa)$ je odhad stavu v čase k závislý na volbě parametru κ .

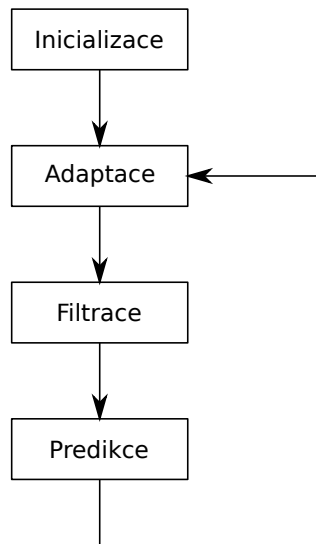
Nevýhodou tohoto kritéria, jehož předlohou byl článek [19], je fakt, že je nezbytné znát skutečný stav systému. V praxi je tedy zapotřebí mít k dispozici vysoce přesná měření, což zpravidla nebývá možné.

Tato adaptace je dále označována jako AMSE.

5.1.2 Online metody adaptace

Online metoda adaptace škálovacího parametru probíhá přímo za běhu unscenovaného Kalmanova filtru v každém časovém okamžiku. Z tohoto důvodu se obecně předpokládá vyšší výpočetní náročnost online adaptačních metod.

Pro lepší představu je algoritmus adaptivního UKF znázorněn schématem na obrázku 5.2.



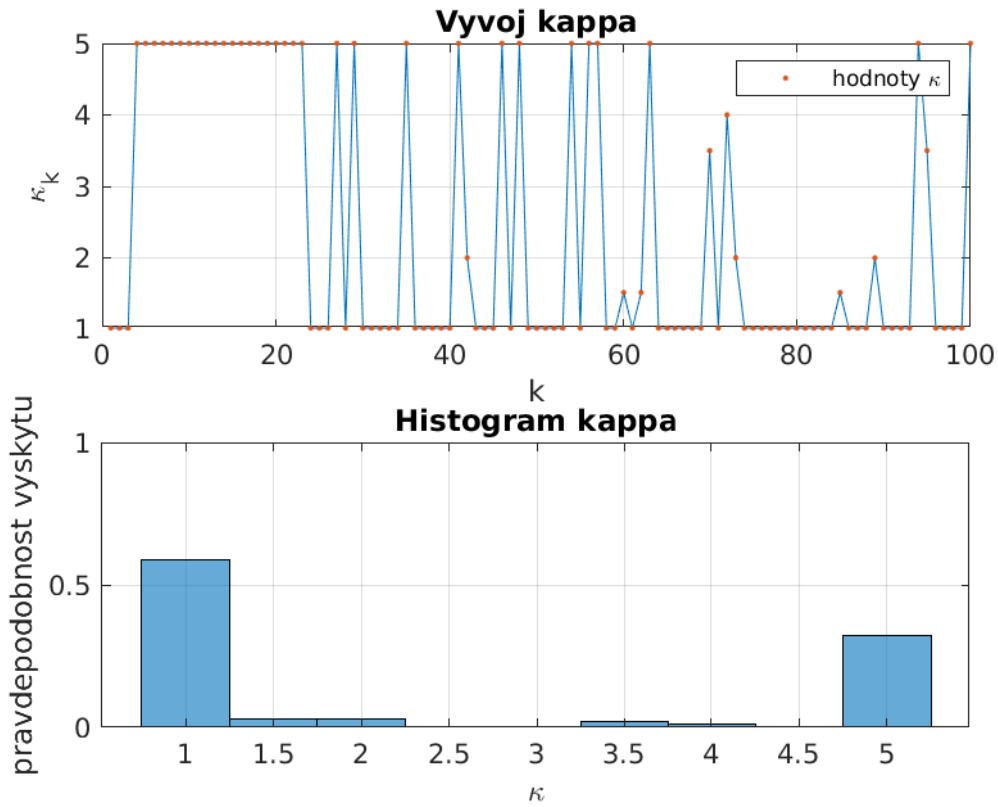
Obrázek 5.2: Schéma adaptivního UKF použitého v této práci

Jelikož se κ adaptuje v každém časovém okamžiku, znamená to, že vzniká vektor s hodnotami κ o stejné délce, jako je počet měření. Parametr κ může nabývat hodnot

$$\kappa_k \in \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} = \{0 : 0.5 : 5\} \quad (5.1.3)$$

kde κ_k je hodnota škálovacího parametru pro časový okamžik k .

Příklad, jak může vypadat vývoj κ_k pro jedno z adaptačních kritérií, je na obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: Vývoj a histogram κ pro jednu Monte Carlo simulaci

Ve vývoji je vidět, že se hodnota parametru κ během času neustále mění. Nejčastěji však pro tento příklad nabývá hodnot 1 a 5, což je dobře vidět v histogramu.

5.1.2.1 Online adaptace založená na maximalizaci logaritmu podmíněné hustoty pravděpodobnosti

Kritérium pro tuto adaptaci, pro účely práce nazývanou LOGPDF, je vybráno z článku [20] a má tvar

$$\begin{aligned}
 \kappa_{LOGPDF,k} &= \arg \max_{\kappa \in \mathcal{K}} \log p(x_k | z^k, \kappa) = \\
 &= \arg \min_{\kappa \in \mathcal{K}} \left\{ \tilde{z}_k(\kappa)^T [U'_k(\kappa) - P'_{z,k}(\kappa)] \tilde{z}_k(\kappa) + \right. \\
 &\quad \left. + [z_k - h_k(\hat{x}_k(\kappa))]^T R [z_k - h_k(\hat{x}_k(\kappa))] - \frac{1}{2} \log |P'_{z,k}(\kappa)| \right\}
 \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

kde

$$U'_k(\kappa) = [P'_{z,k}(\kappa)]^{-1} [P'_{xz,k}(\kappa)]^T P'_{k+1}(\kappa) P'_{xz,k}(\kappa) [P'_{z,k}(\kappa)]^{-1} \tag{5.1.5}$$

Autoři článku [20], za účelem získání co nejpřesnějšího odhadu stavu, zvolili kritérium maximalizující logaritmus aposteriorní pravděpodobnosti filtračního odhadu stavu $\hat{x}_k(\kappa)$, které upravili do podoby kritéria minimalizujícího filtrační kovarianční matici.

5.1.2.2 Online adaptace založená na maximalizaci aproximativní věrohodnostní funkce

V této adaptaci je použito kritérium dále označováno jako NORM z článku [21]

$$\kappa_{NORM,k} = \arg \max_{\kappa \in \mathcal{K}} p_A(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}^{k-1}, \kappa) \quad (5.1.6)$$

kde aproximativní věrohodnostní funkce je dána

$$p_A(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}^{k-1}, \kappa) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_k : \hat{\mathbf{z}}'_k(\kappa), \mathbf{P}'_{z,k}(\kappa)) \quad (5.1.7)$$

V tomto článku [21] se autoři rozhodli jako kritérium použít věrohodnostní funkci, která je obecně neznámá. Pro některé případy je ale možné ji aproximovat gaussovskou hustotou pravděpodobnosti uvedenou v rovnici (5.1.7). Podmínkou použití této adaptivní techniky je závislost věrohodnostní funkce na parametru κ .

5.1.2.3 Online adaptace založená na maximalizaci podílu aproximativních podmíněných hustot pravděpodobnosti

Další a poslední online adaptace, zde označována jako APDF, je založena na kritériu použitém v článku [22], které má tvar

$$\kappa_{APDF,k} = \arg \max_{\kappa \in \mathcal{K}} \frac{p_A(\mathbf{z}_k | \hat{\mathbf{x}}'_k, \kappa)}{p_A(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}^{k-1}, \kappa)} \quad (5.1.8)$$

kde hustota pravděpodobnosti měření je aproximována jako

$$p_A(\mathbf{z}_k | \hat{\mathbf{x}}'_k, \kappa) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi|R|}} \times e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}'_k, \kappa)]^T R^{-1}[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}'_k, \kappa)]} \quad (5.1.9)$$

a aproximativní věrohodnostní funkce je dána vztahem

$$p_A(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}^{k-1}, \kappa) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi|\mathbf{P}'_{z,k}|}} \times e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}'_k]^T (\mathbf{P}'_{z,k})^{-1}[\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}'_k]} \quad (5.1.10)$$

Kritérium (5.1.8) lze chápat jako ad hoc modifikaci kritéria (5.1.6), která je vhodná pro některé situace diskutované v [22].

5.2 Použitý adaptivní UKF

Základem pro všechny adaptační algoritmy, implementované v rámci této práce, je standardní UKF, do kterého je přidán krok adaptace

1. Inicializace

$$p(x_0) = \mathcal{N}(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0) \quad (5.2.1)$$

2. Adaptace

- offline - probíhá před vlastním během UKF a po jeho skončení, viz algoritmus 1
- online - probíhá pro každý časový okamžik k , viz obrázek 5.2

Výstupem obou typů adaptace je škálovací parametr κ .

3. Filtrace

(a) Výpočet vah

$$\mathcal{W}_0 = \frac{\kappa}{n_x + \kappa} \quad (5.2.2)$$

$$\mathcal{W}_i = \frac{\kappa}{2(n_x + \kappa)}, \quad i = 1, \dots, 2n_x \quad (5.2.3)$$

(b) Výpočet prediktivní množiny sigma-bodů

$$\mathcal{X}'_{k,0} = \hat{x}'_k \quad (5.2.4)$$

$$\mathcal{X}'_{k,i} = \hat{x}'_k + \sqrt{n_x + \kappa} s'_{k,i}, \quad i = 1, \dots, n_x \quad (5.2.5)$$

$$\mathcal{X}'_{k,j} = \hat{x}'_k - \sqrt{n_x + \kappa} s'_{k,j-n_x}, \quad j = n_x + 1, \dots, 2n_x \quad (5.2.6)$$

(c) Určení momentů na základě sigma-bodů a jejich vah

$$\hat{x}'_k = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} \mathcal{X}'_{k,i} \quad (5.2.7)$$

$$P'_k = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} (\mathcal{X}'_{k,i} - \hat{x}'_k)(\mathcal{X}'_{k,i} - \hat{x}'_k)^T \quad (5.2.8)$$

(d) Transformace sigma-bodů přes nelineární funkci v rovnici měření

$$\mathcal{Z}'_{k,i} = h_k(\mathcal{X}'_{k,i}), \quad i = 1, \dots, 2n_x \quad (5.2.9)$$

(e) Výpočet momentů predikce měření

$$\hat{z}'_k = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} \mathcal{Z}'_{k,i} \quad (5.2.10)$$

$$P'_{z,k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} (\mathcal{Z}'_{k,i} - \hat{z}'_k)(\mathcal{Z}'_{k,i} - \hat{z}'_k)^T + R_k \quad (5.2.11)$$

$$P'_{xz,k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} (\mathcal{X}'_{k,i} - \hat{x}'_k)(\mathcal{Z}'_{k,i} - \hat{z}'_k)^T \quad (5.2.12)$$

(f) Výpočet momentů aproximativní filtrační hustoty pravděpodobnosti

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + P'_{xz,k}(P'_{z,k})^{-1}(z_k - \hat{z}'_k) \quad (5.2.13)$$

$$P_k = P'_k - P'_{xz,k}(P'_{z,k})^{-1}(P'_{xz,k})^T \quad (5.2.14)$$

4. Predikce

(a) Výpočet filtrační množiny sigma-bodů

$$\mathcal{X}_{k,0} = \hat{x}_k \quad (5.2.15)$$

$$\mathcal{X}_{k,i} = \hat{x}_k + \sqrt{n_x + \kappa} s_{k,i}, \quad i = 1, \dots, n_x \quad (5.2.16)$$

$$\mathcal{X}_{k,j} = \hat{x}_k - \sqrt{n_x + \kappa} s_{k,j-n_x}, \quad j = n_x + 1, \dots, 2n_x \quad (5.2.17)$$

(b) Transformace sigma-bodů přes nelineární funkci ve stavové rovnici

$$\mathcal{X}'_{k+1,i} = f_k(\mathcal{X}_{k,i}), \quad \forall i \quad (5.2.18)$$

(c) Výpočet momentů aproximativní prediktivní hustoty pravděpodobnosti

$$\hat{x}'_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} \mathcal{X}'_{k+1,i} \quad (5.2.19)$$

$$P'_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W} (\mathcal{X}'_{k+1,i} - \hat{x}'_{k+1})(\mathcal{X}'_{k+1,i} - \hat{x}'_{k+1})^T + Q_k \quad (5.2.20)$$

5.3 Jiné přístupy k návrhu UKF s prvky adaptace

Existuje mnoho dalších adaptivních verzí UKF adaptujících jiné parametry než je škálovací parametr κ . Zde je stručně nastíněno pár jejich příkladů, nicméně se jimi tato práce dále nezabývá a pozornost je věnována pouze adaptaci škálovacího parametru.

Jeden z přístupů, který je popsán v článku [23], staví například na korekci kovarianční matice stavové chyby v každém časovém okamžiku za pomoci suboptimálního škálovacího faktoru, který je založen na inovační sekvenci.

Další příklad adaptivního filtru je předložen v článku [24] a je referovaný jako *Mixture Unscented Kalman Filter*, což lze do češtiny volně přeložit jako *smíšený UKF*. Článek navrhuje hned dva možné přístupy. Oba přístupy využívají zároveň jak kubární Kalmanův filtr, v angličtině označovaný jako *Cubature Kalman Filter (CKF)*, tak transformovaný unscentovaný Kalmanův filtr, v anglické literatuře znám pod pojmem *Transformed Unscented Kalman Filter (TUKF)*. Odtud termín *Mixture UKF*. Tyto filtry byly vybrány, neboť se vzájemně doplňují

v kontextu kvalitativních vlastností. Adaptace prvního přístupu spočívá v maximalizaci věrohodnostní funkce, čehož je dosaženo výběrem toho filtru, který poskytuje vyšší hodnotu věrohodnosti odhadu. V druhém přístupu je s vybranými filtry zacházeno jako s tzv. *subfiltry*, což znamená, že na výpočtu odhadu se podílí oba, ale jejich přínos závisí na přiřazené váze. Váha je filtrům přisuzována v každém časovém okamžiku opět na základě věrohodnostní funkce. Výsledné hodnoty momentů jsou dány váženým součtem momentů subfiltrů CKF a TUKF.

Filtr referovaný v článku [25] jako UKF-G je založený na modifikaci škálovacího parametru α v každém časovém okamžiku. Parametr α je počítán jako součet diagonálních prvků filtrační kovarianční matice vydělený hodnotou vzdálenosti nacházející se mezi střední hodnotou a nejvzdálenějším sigma-bodem. V posledním běhu cyklu se pak provádí porovnání filtračních kovariančních matic získaných ze standardního UKF a z UKF-G, vybere se ta menší a jako střední hodnota se použije ta k této kovarianci přidružená.

Předmětem dalšího článku [26] je zlepšení výkonu hvězdné refrakční navigace, v angličtině označované jako *Starlight Refraction Navigation*, která je využívána hlavně pro armádní účely, pomocí UKF, ve kterém jsou jako adaptivní parametry zvoleny váhy. Váhy jsou laděny na základě gradientní spádové metody opět pro každý časový okamžik. Zmiňované váhy sigma-bodů jsou pro standardní UKF pevně dané a po celý proces filtrování neměnné.

Kapitola 6

Simulační výsledky

Jedním z úkolů této práce je implementovat a následně porovnat několik metod zabývajících se adaptací škálovacího parametru κ a ukázat tak, že standardní volba κ , viz. (4.2.25) a (4.2.26), zdaleka není optimální a že si volba škálovacího parametru zaslouží více pozornosti.

Data jsou získávána z generátorů dat uvedených níže pro M Monte Carlo simulací, kde $M = 1000$, a každá Monte Carlo simulace běží pro stavy s časovými okamžiky $k = 0, 1, \dots, N$, kde $N = 100$.

6.1 Generátory dat

Pro numerické porovnání jsou použity dynamické systémy známé jako *Kitagawa*, *Sinusoid* a model *sledování*, které se často používají jako testovací příklady pro vyhodnocení kvality odhadu. Parametry modelů jsou vzaty z článku [18].

6.1.1 Kitagawa

Rovnice tohoto modelu používaného pro nelineární filtraci mají tvar

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 0.5x_k + \frac{25x_k}{(1+x_k^2)} + w_k, & w_k &\sim \mathcal{N}(0, 0.2^2) \\ z_k &= 5 \sin(2x_k) + v_k, & v_k &\sim \mathcal{N}(0, 0.01^2) \\ x_0 &\sim \mathcal{N}(0, 0.5^2) \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

6.1.2 Sinusoid

Tento model je dán rovnicemi

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= 3 \sin(x_k) + w_k, & w_k &\sim \mathcal{N}(0, 0.01^2) \\z_k &= \sigma(x_k/3) + v_k, & v_k &\sim \mathcal{N}(0, 0.01^2) \\x_0 &\sim \mathcal{N}(0, 1^2)\end{aligned}\tag{6.1.2}$$

kde $\sigma(\cdot)$ reprezentuje funkci *sigmoid*, jejíž obecný zápis může vypadat následovně

$$y = \text{sigmoid}(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}\tag{6.1.3}$$

6.1.3 Model sledování

Model *sledování*, v anglické literatuře referován jako *Bearings Only*, reprezentuje problém sledování pohyblivého cíle založeného pouze na měření poskytnutých jedním úhlovým senzorem.

Rovnice modelu jsou

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, & \mathbf{w}_k &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}) \\z_k &= \tan^{-1} \left(\frac{x_{2,k} - \sin(k)}{x_{1,k} - \cos(k)} \right) + v_k, & v_k &\sim \mathcal{N}(0, R) \\ \mathbf{x}_0 &\sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 20 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \right)\end{aligned}\tag{6.1.4}$$

kde

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \\ 0.01 & 0.1 \end{bmatrix} \\R &= 0.025\end{aligned}\tag{6.1.5}$$

6.2 Vlatnosti odhadu

Kvalita estimační metody je obvykle posuzována podle hodnoty kritériální funkce

$$J = E[c]\tag{6.2.1}$$

kde c může být například kvadratická chyba odhadu jisté proměnné, což by znamenalo, že kritériální funkce J pak odpovídá střední kvadratické chybě, v anglické literatuře označované jako *Mean Square Error (MSE)*.

V mnoha situacích není možné zhodnotit kvalitu odhadu analyticky. V těchto případech je možné použít *Monte Carlo simulace*, které spustí běh několika na sobě nezávislých realizací posuzované estimace pro c_i , $i = 1, 2, \dots, M$. Čím vyšší je počet simulací, tím lepší je statistické vyhodnocení vlastností odhadu [3].

Kritéria použitá pro posouzení kvality výsledků této práce jsou popsána v následující sekci.

6.3 Použitá kritéria kvality estimace

Pro porovnání kvality odhadu adaptačních metod je použito několik kritérií [22, 27].

6.3.1 Odmocnina ze střední kvadratické chyby

Anglicky *Root Mean Square Error (RMSE)*, udává rozdíl mezi skutečným stavem a jeho odhadem. V obecném tvaru je kritérium pro časový okamžik k dáno jako

$$\text{RMSE}_k = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[(x_{i,k} - \hat{x}_{i,k})^T (x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}) \right]} \quad (6.3.1)$$

RMSE je standardní kritérium a platí, že čím je jeho hodnota menší, tím je posuzovaný odhad stavu lepší.

6.3.2 Střední absolutní chyba

Anglicky *Mean Absolute Error (MAE)*, je další způsob zhodnocení rozdílu mezi skutečným stavem a jeho odhadem, jehož obecný tvar je dán jako

$$\text{MAE}_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}| \quad (6.3.2)$$

Opět platí, že čím nižší hodnoty MAE nabývá, tím lépe. Nicméně rozdíl oproti RMSE tkví v tom, že MAE není tak citlivé na extrémní hodnoty neboli outliersy.

6.3.3 Věrohodnost odhadu

Anglicky *Non-Credibility Index (NCI)*, určuje, zda je kovarianční matice chyby posuzovaného odhadu vůči střední kvadratické chybě optimistická $\text{NCI} > 0$, tedy menší než MSE, nebo pesi-

mistická $\text{NCI} < 0$, tedy větší. Vztah pro jeho výpočet je vzat z článku [22]

$$\text{NCI}_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left\{ 10 \log_{10} \left[(x_{i,k} - \hat{x}_{i,k})^T \mathbf{P}_{i,k}^{-1} (x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}) \right] - \right. \\ \left. - 10 \log_{10} \left[(x_{i,k} - \hat{x}_{i,k})^T \text{MSE}_k^{-1} (x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}) \right] \right\} \quad (6.3.3)$$

kde M je počet Monte Carlo simulací, $\mathbf{P}_{i,k}$ je kovarianční matice odhadu stavu v i -té Monte Carlo simulaci a MSE_k je střední kvadratická chyba v čase k

$$\text{MSE}_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[(x_{i,k} - \hat{x}_{i,k})^T (x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}) \right] \quad (6.3.4)$$

Tj. kritérium vyhodnocuje, jak je filtr schopen ohodnotit kvalitu svého odhadu \hat{x}_k pomocí kovarianční matice chyby odhadu P_k . Optimálním výsledkem NCI je tedy hodnota 0, neboť ta značí konzistentnost posuzovaného odhadu.

6.3.4 Výpočetní náročnost

Výpočetní náročnost je dána průměrnou dobou trvání algoritmu.

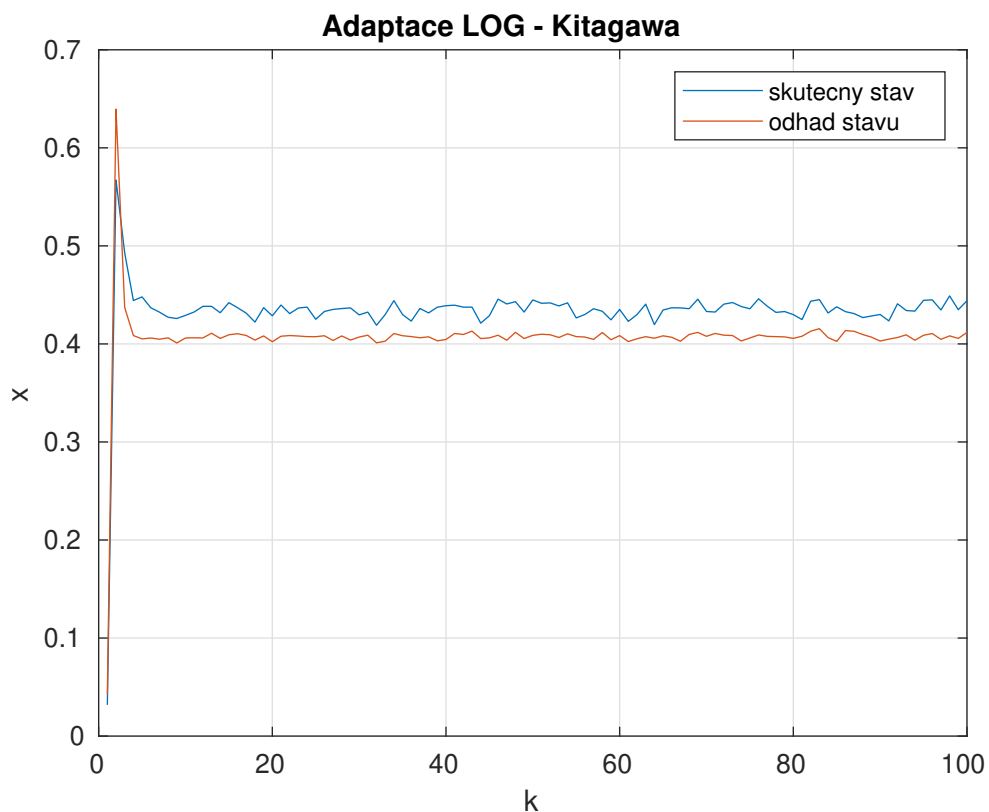
6.4 Simulační výsledky použitých metod adaptace

V této sekci jsou prezentovány simulační výsledky použitých metod adaptace škálovacího parametru κ deklarovaných v předchozí kapitole. Zobrazené grafy ukazují skutečné stavy dané generátory dat a k nim vypočtené odhady. Přesněji, znázorněné skutečné stavy i jejich odhady jsou vždy průměrem všech trajektorií získaných během Monte Carlo simulací týkajících se daného modelu. To znamená, že rozdíly mezi trajektoriemi viditelné v grafech by se daly nazvat průměrnou odchylkou vypočítaných odhadů od skutečných stavů.

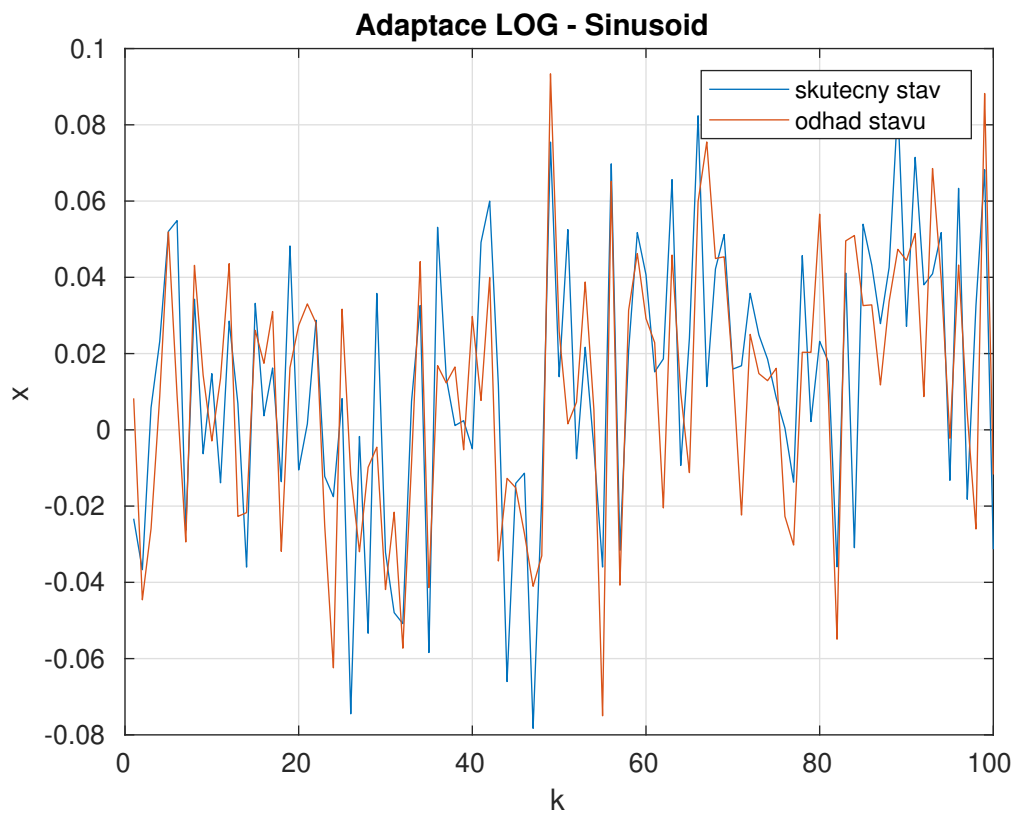
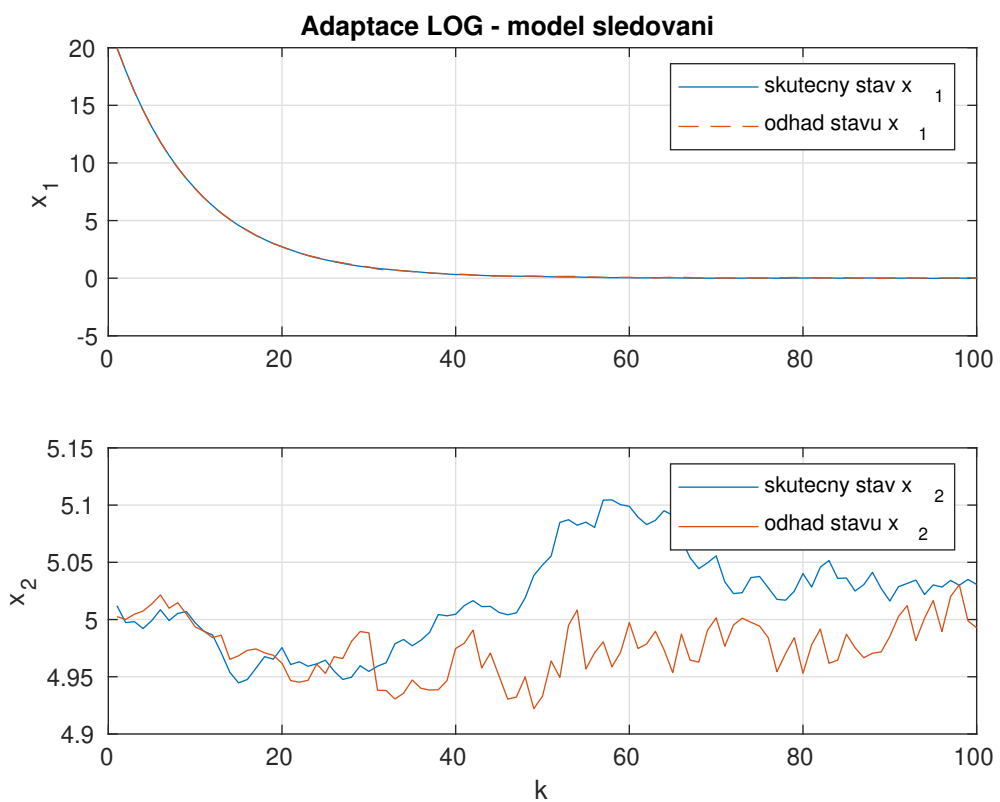
6.4.1 Offline adaptace LOG

Tato adaptace využívá jako kritérium logaritmicou podmíněnou věrohodnost deklarovanou rovnicí (5.1.1). Cílem je získat parametr κ poskytující nejlepší odhad ve smyslu maximalizace kritéria logaritmicke věrohodnosti.

Nyní následují grafy, obrázky 6.1, 6.2 a 6.3, znázorňující skutečné stavy a jejich odhady získané pomocí této adaptace pro modely popsané výše v sekci 6.1.



Obrázek 6.1: Adaptace LOG pro model *Kitagawa*

Obrázek 6.2: Adaptace LOG pro model *Sinusoid*Obrázek 6.3: Adaptace LOG pro model *sledování*

V tabulce 6.1 je znázorněn počet výskytů všech hodnot κ pro daný model. Součet čísel na

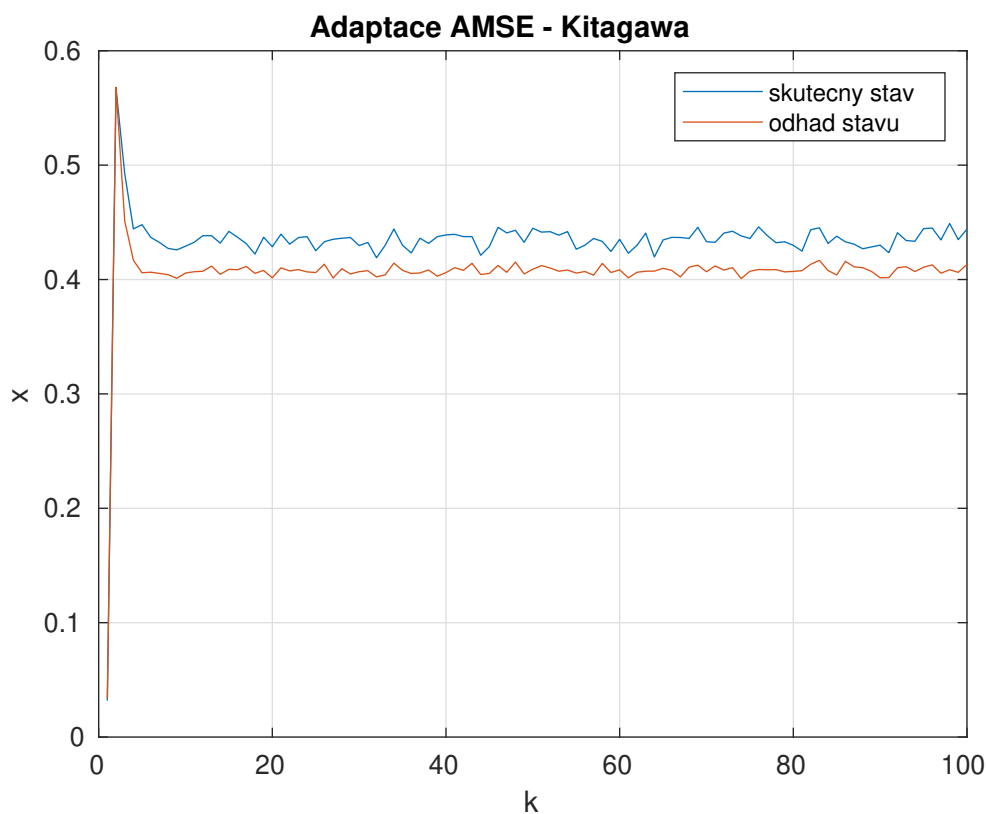
řádku dá celkový počet Monte Carlo simulací, v tomto případě se jedná o 1000 simulací.

hodnota κ	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Kitagawa - LOG	233	204	298	99	43	35	35	39	14
Sinusoid - LOG	885	9	10	13	16	19	14	14	20
Sledovani - LOG	583	157	79	53	34	35	20	22	17

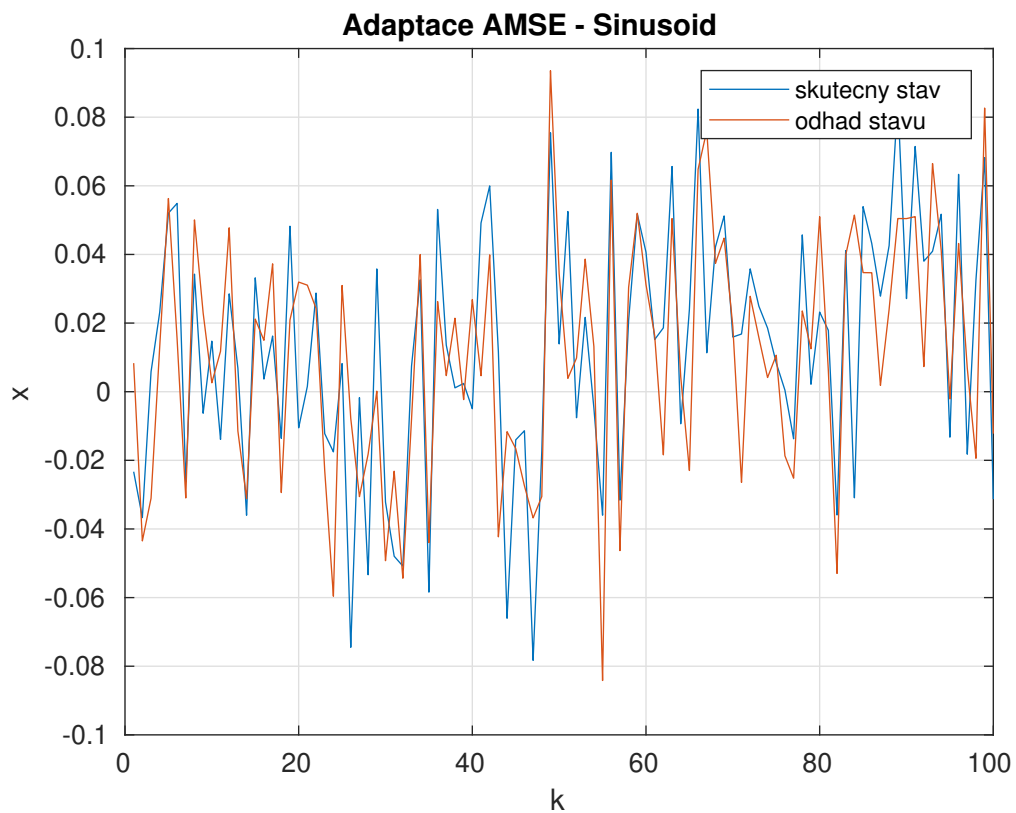
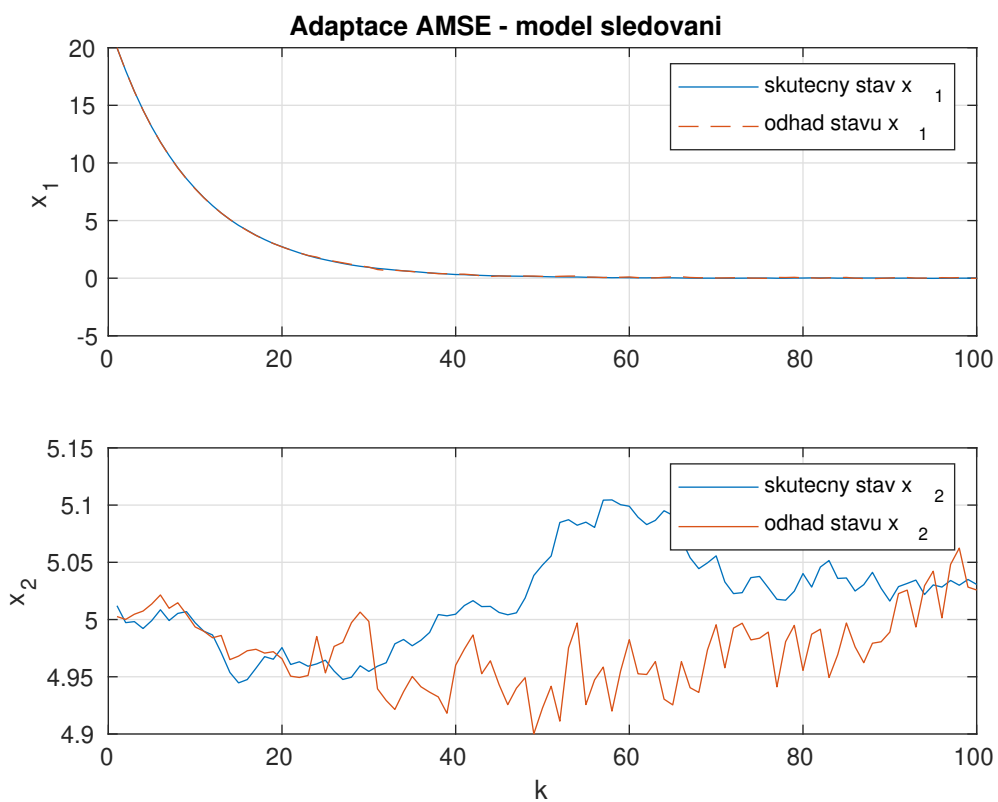
Tabulka 6.1: Porovnání výskytů κ offline adaptací LOG

6.4.2 Offline adaptace AMSE

Škálovací parametr κ se v tomto případě získává dle rovnice (5.1.2). Následující grafy na obrázcích 6.4, 6.5 a 6.6 znázorňují skutečný stav a jeho odhad na základě této adaptace.



Obrázek 6.4: Adaptace AMSE pro model *Kitagawa*

Obrázek 6.5: Adaptace AMSE pro model *Sinusoid*Obrázek 6.6: Adaptace AMSE pro model *sledování*

V tabulce 6.2 je opět znázorněn počet výskytů všech hodnot κ pro daný model pro M Monte

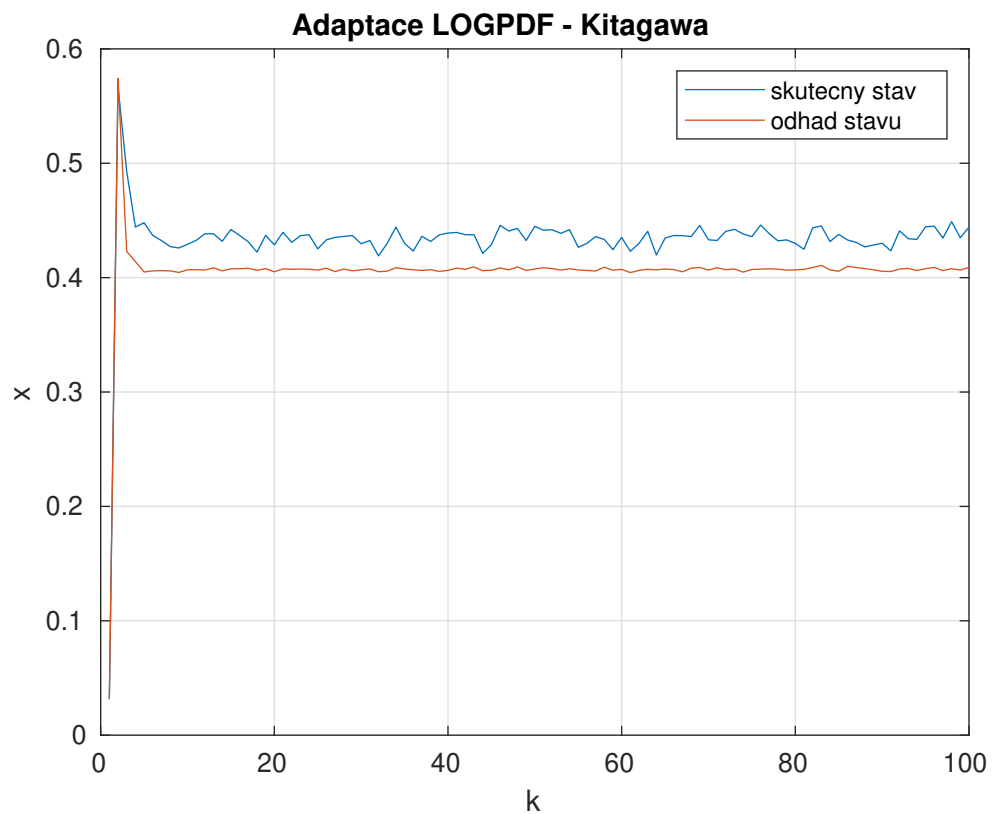
Carlo simulací.

hodnota κ	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Kitagawa - AMSE	368	378	113	52	40	15	3	5	26
Sinusoid - AMSE	891	14	20	19	24	13	6	3	10
Sledovani - AMSE	202	127	110	96	87	97	78	92	111

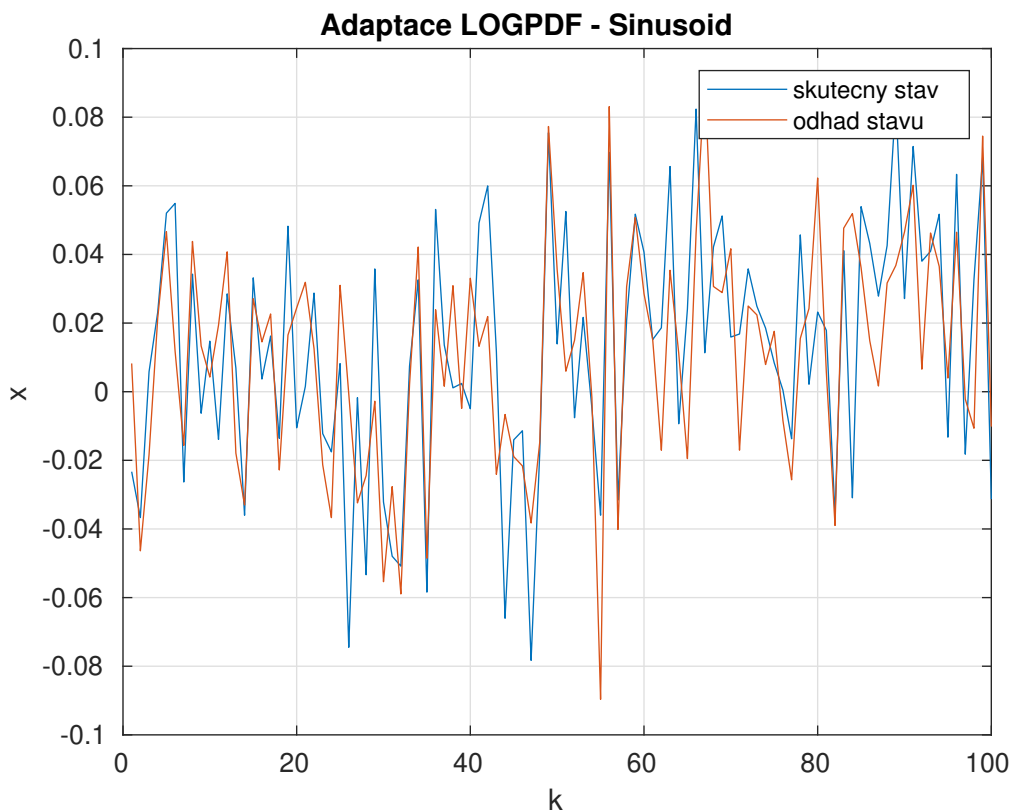
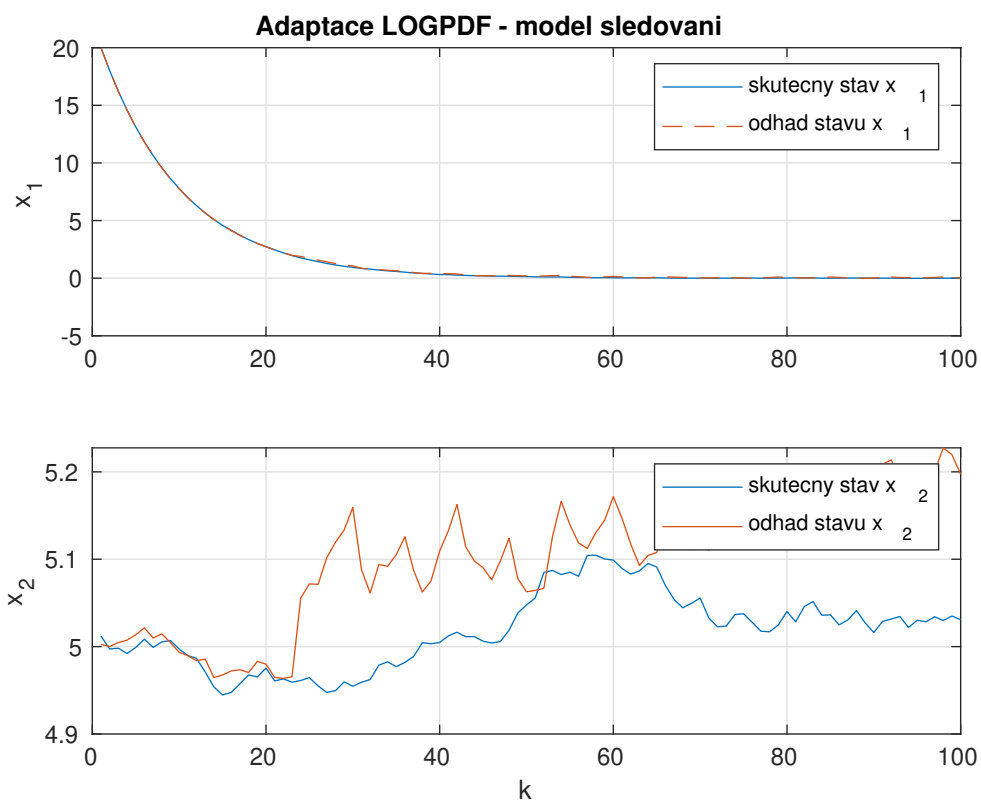
Tabulka 6.2: Porovnání výskytů κ offline adaptací AMSE

6.4.3 Online adaptace LOGPDF

Tato adaptace je provedena na základě rovnice (5.1.4). Odhady získané touto adaptací jsou k nahlédnutí níže na obrázcích 6.7, 6.8 a 6.9.

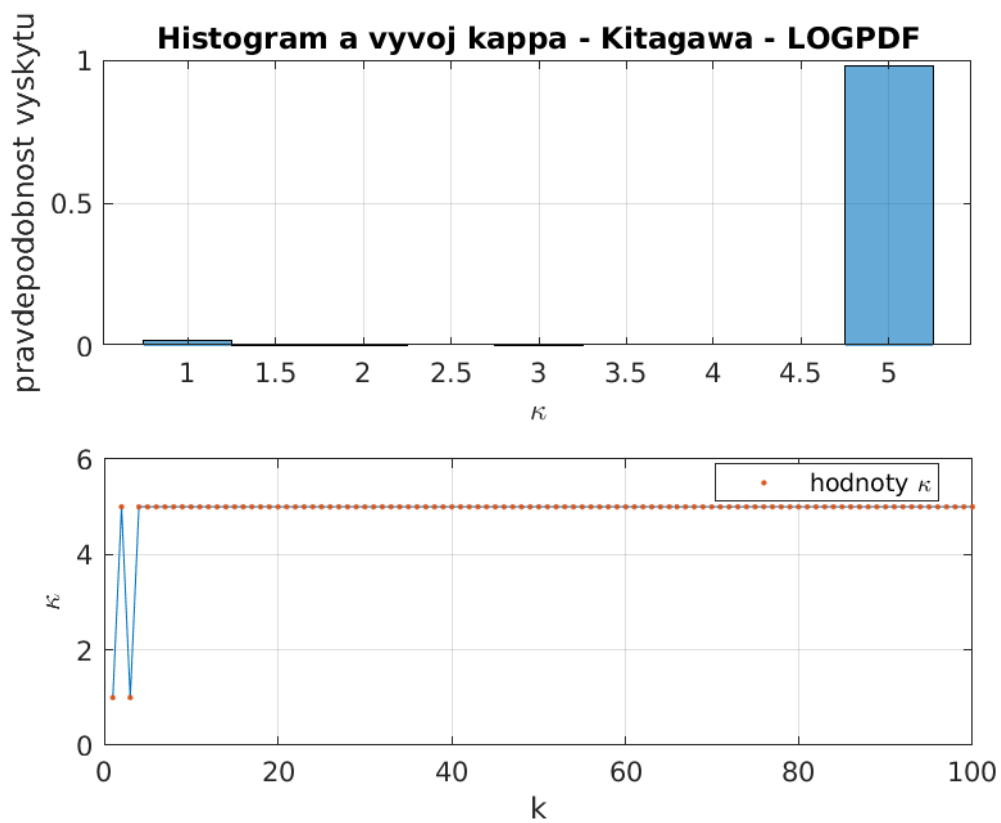


Obrázek 6.7: Adaptace LOGPDF pro model *Kitagawa*

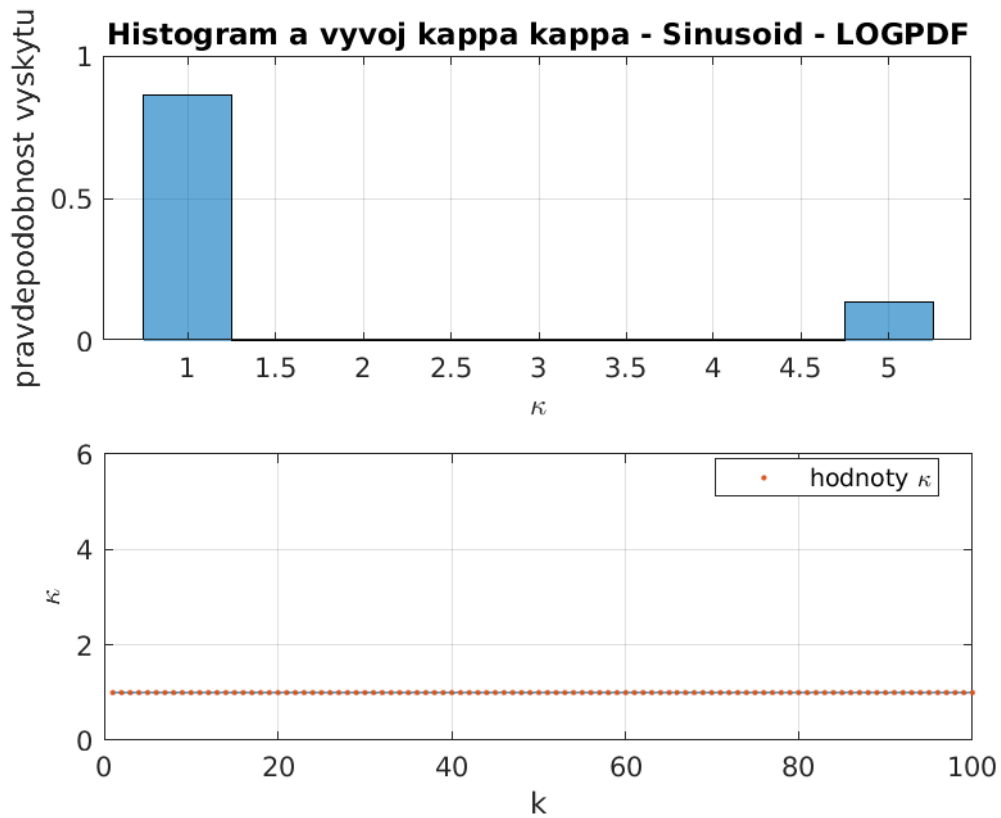
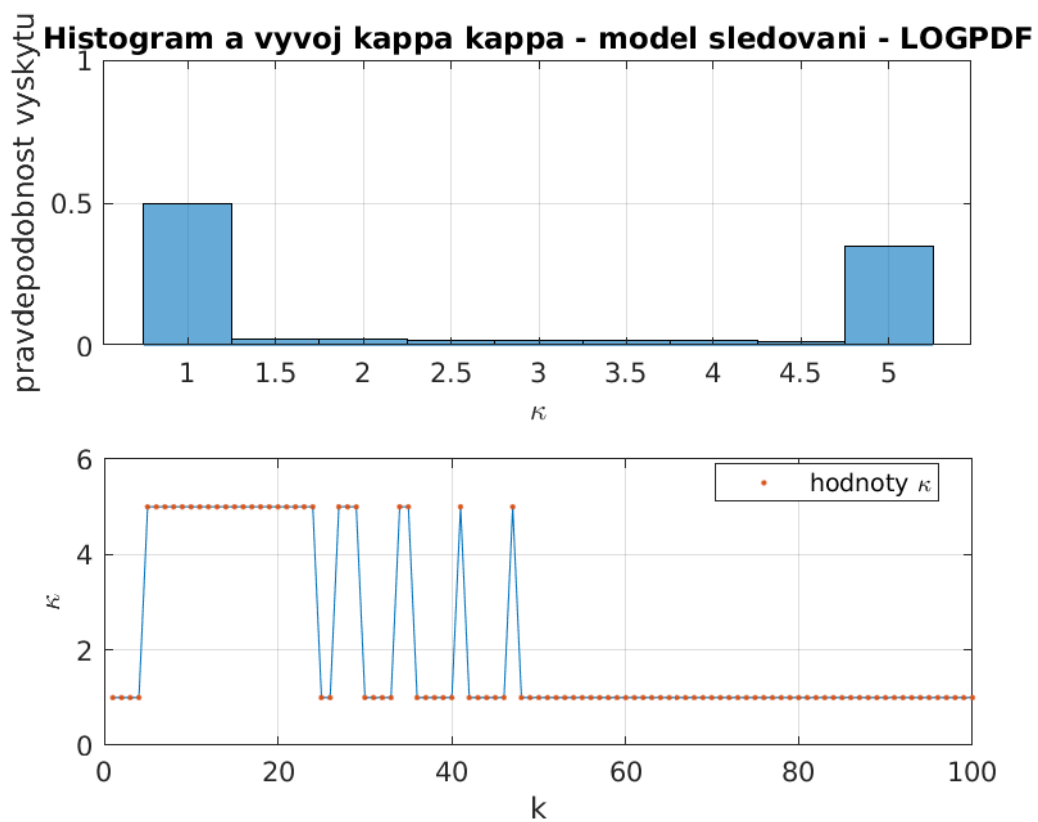
Obrázek 6.8: Adaptace LOGPDF pro model *Sinusoid*Obrázek 6.9: Adaptace LOGPDF pro model *sledování*

V grafech na obrázcích 6.10, 6.11 a 6.12 je znázorněna pravděpodobnost výskytu dané

hodnoty κ a modus jejího vývoje napříč všemi Monte Carlo simulacemi.



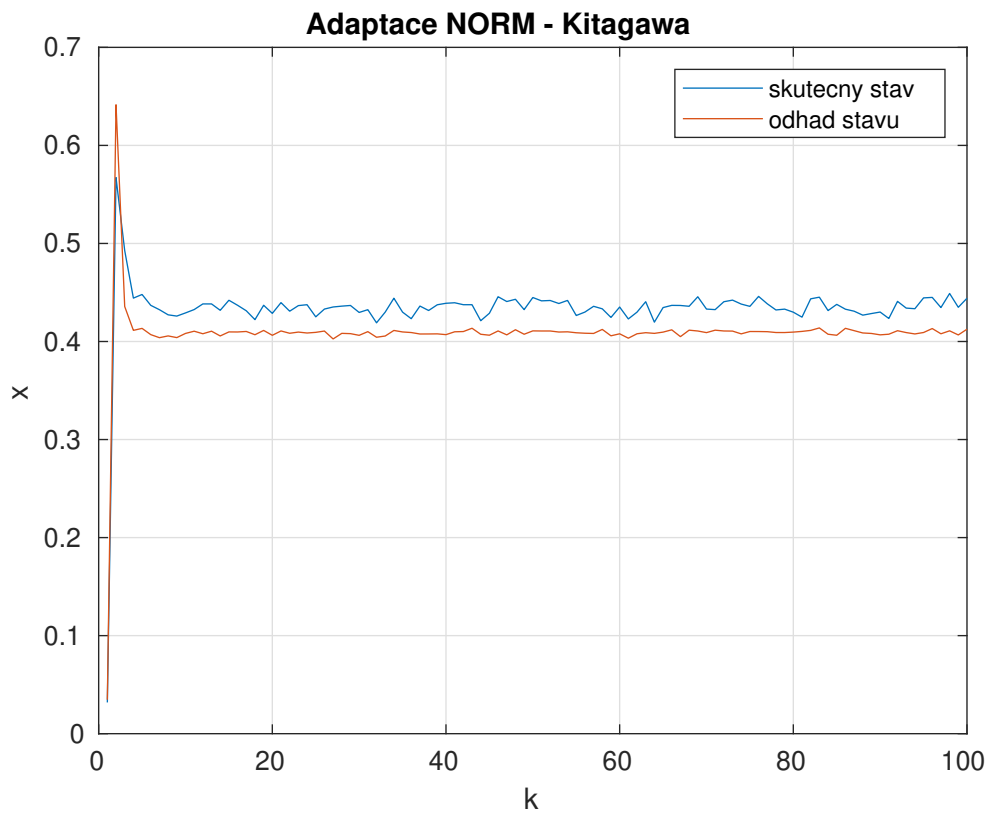
Obrázek 6.10: Histogram hodnot a vývoj κ adaptace LOGPDF pro model *Kitagawa*

Obrázek 6.11: Histogram hodnot a vývoj κ adaptace LOGPDF pro model *Sinusoid*Obrázek 6.12: Histogram hodnot a vývoj κ adaptace LOGPDF pro model *sledování*

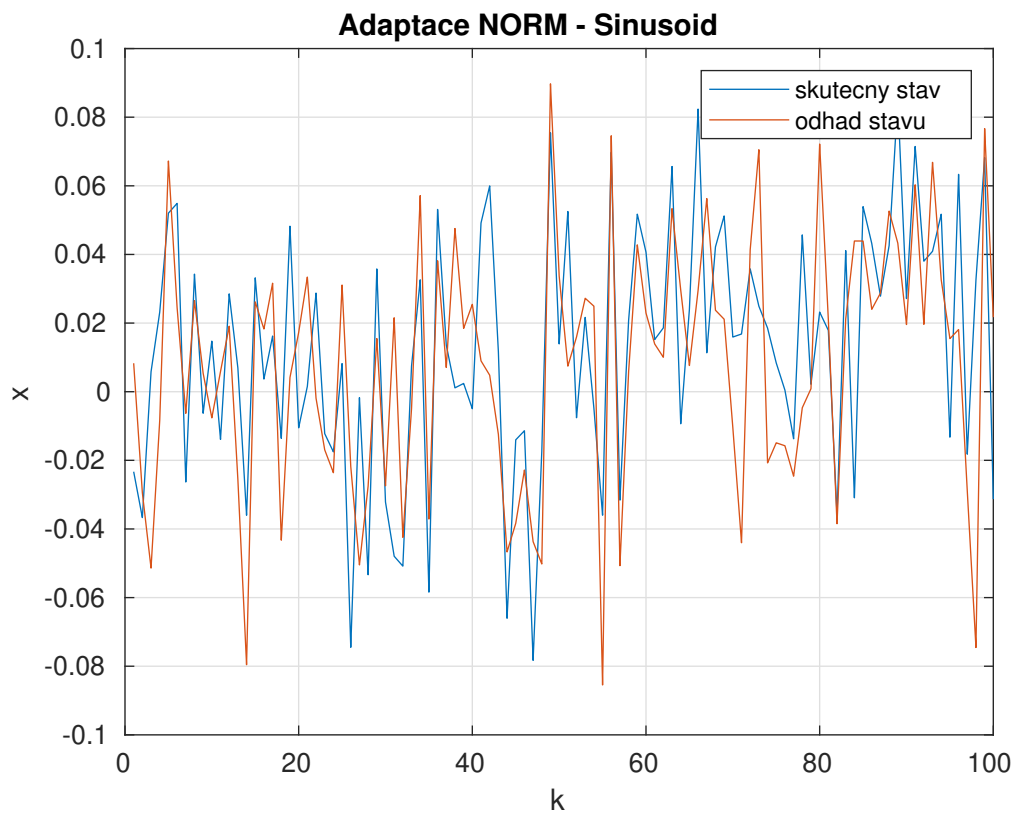
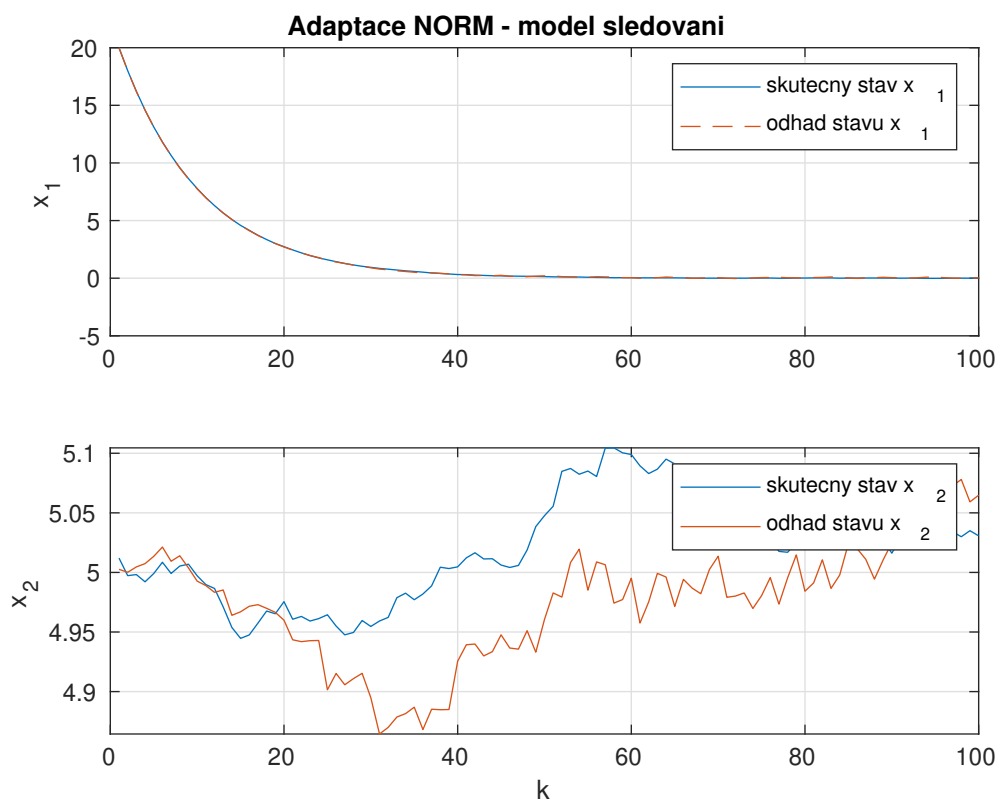
6.4.4 Online adaptace NORM

V této adaptaci je pro určení optimální hodnoty škálovacího parametru použita rovnice (5.1.6).

Tato adaptace dá vzniknout odhadům na obrázcích 6.13, 6.14 a 6.15.

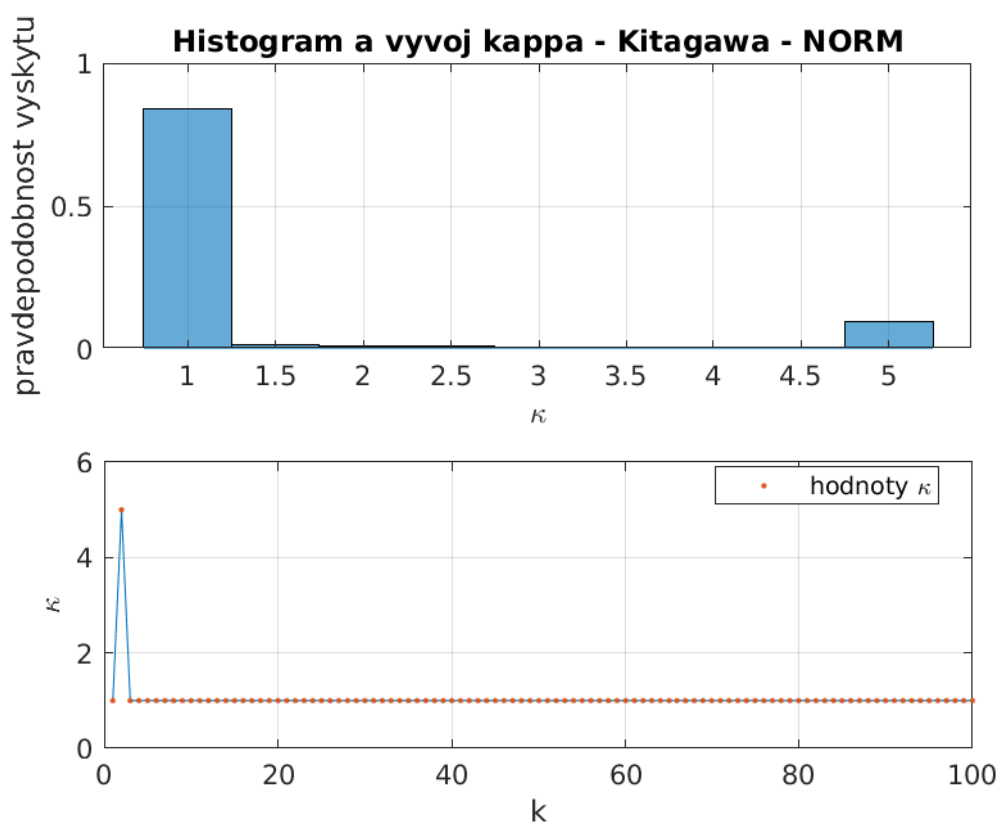


Obrázek 6.13: Adaptace NORM pro model *Kitagawa*

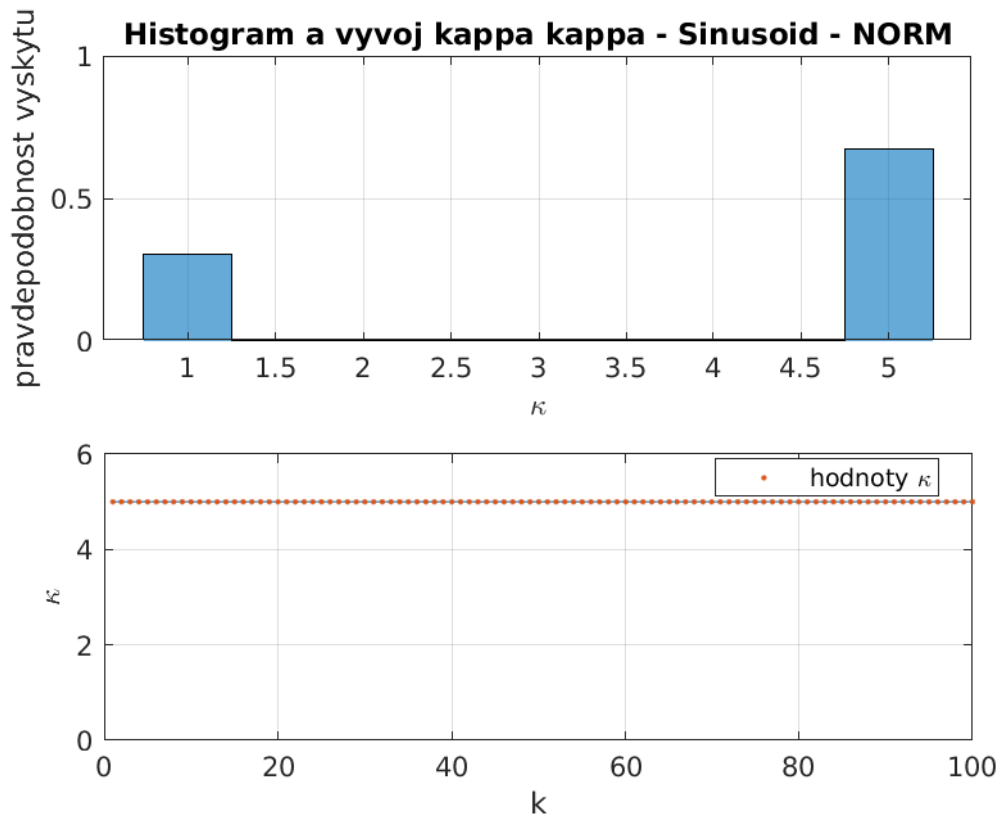
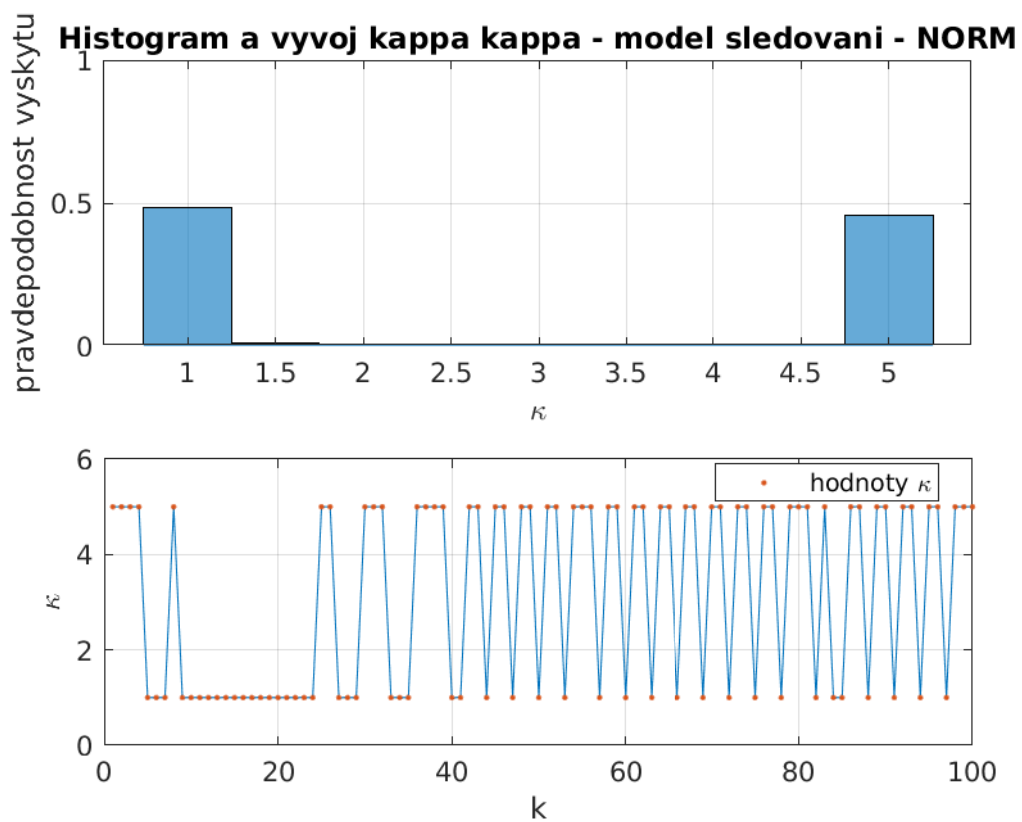
Obrázek 6.14: Adaptace NORM pro model *Sinusoid*Obrázek 6.15: Adaptace NORM pro model *sledování*

V grafech na obrázcích 6.16, 6.17 a 6.18 je znázorněna pravděpodobnost výskytu dané

hodnoty κ a modus jejího vývoje napříč všemi Monte Carlo simulacemi.

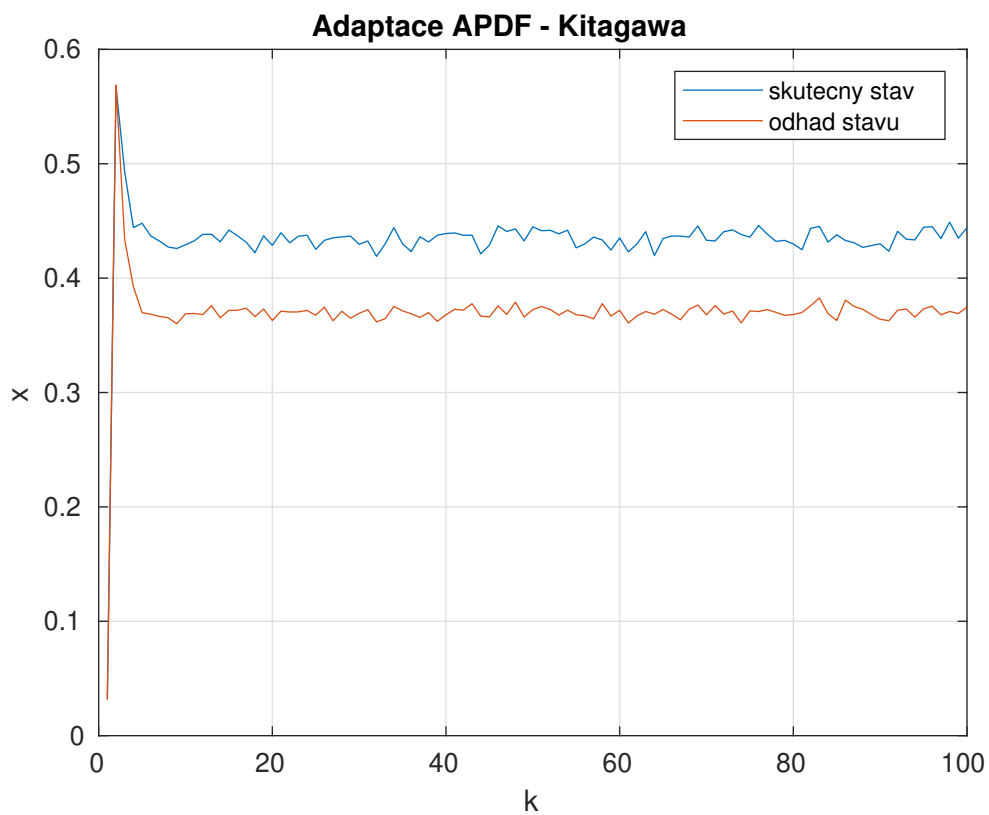


Obrázek 6.16: Histogram hodnot a vývoj κ adaptace NORM pro model *Kitagawa*

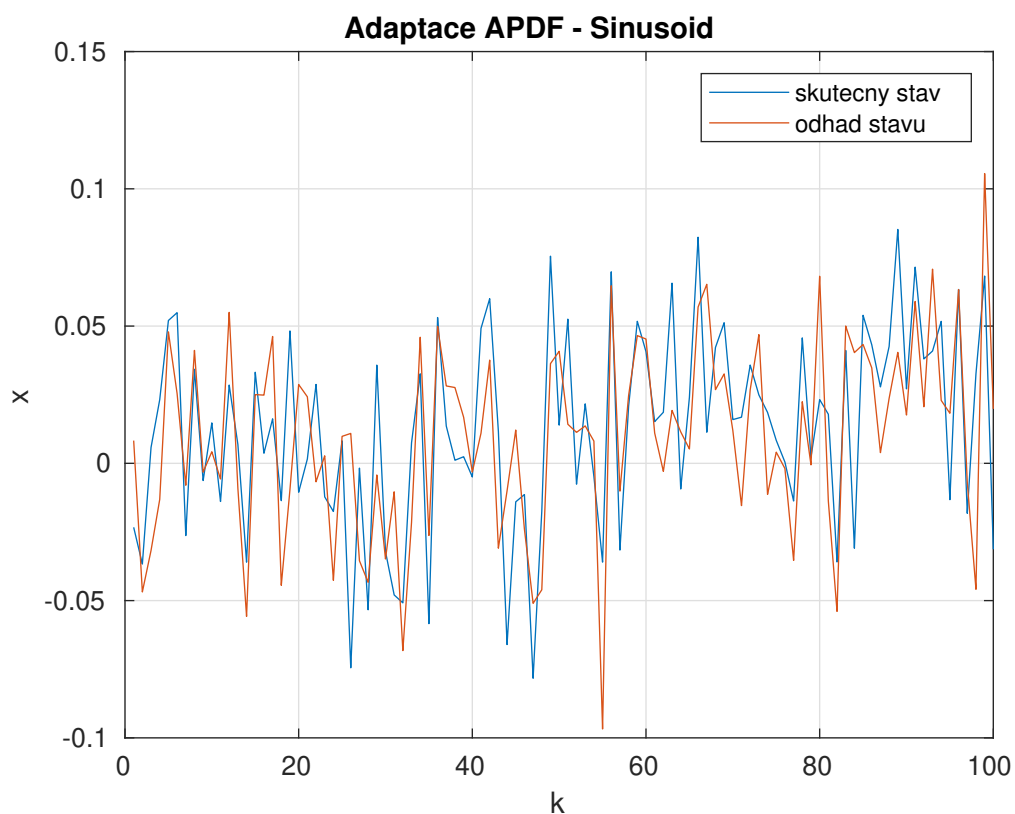
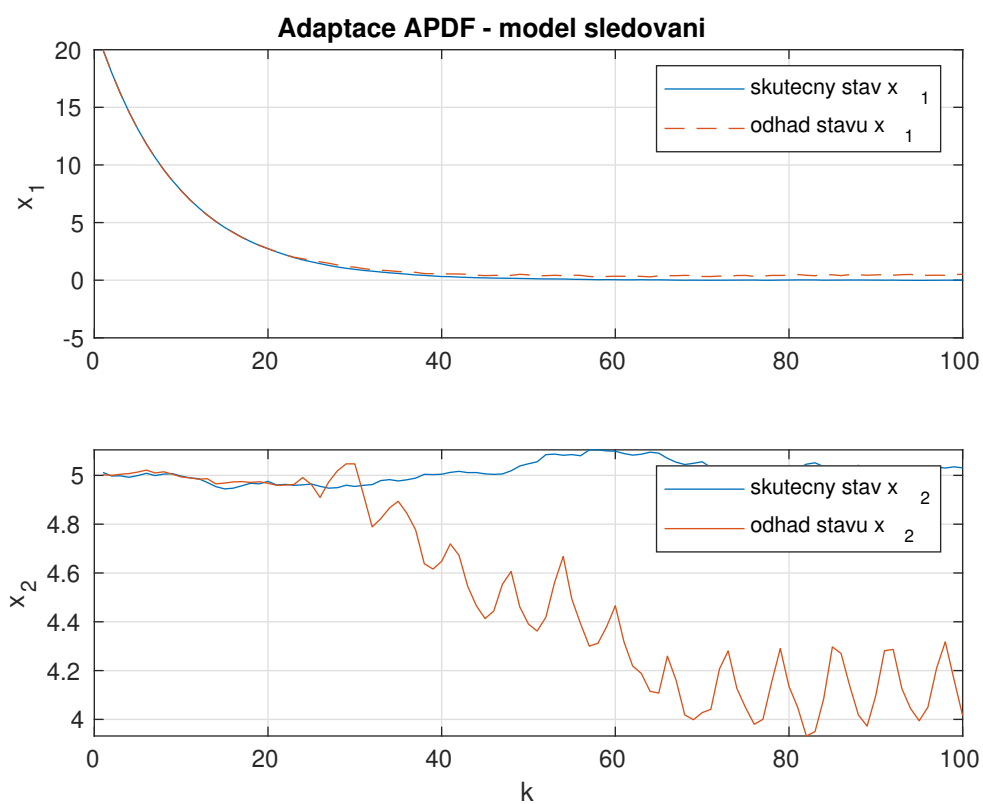
Obrázek 6.17: Histogram hodnot a vývoj κ adaptace NORM pro model *Sinusoid*Obrázek 6.18: Histogram hodnot a vývoj κ adaptace NORM pro model *sledování*

6.4.5 Online adaptace APDF

Další a poslední online adaptace je založena na kritériu (5.1.8). Odhady založené na této adaptaci jsou znázorněny v grafech na obrázcích 6.19, 6.20 a 6.21.

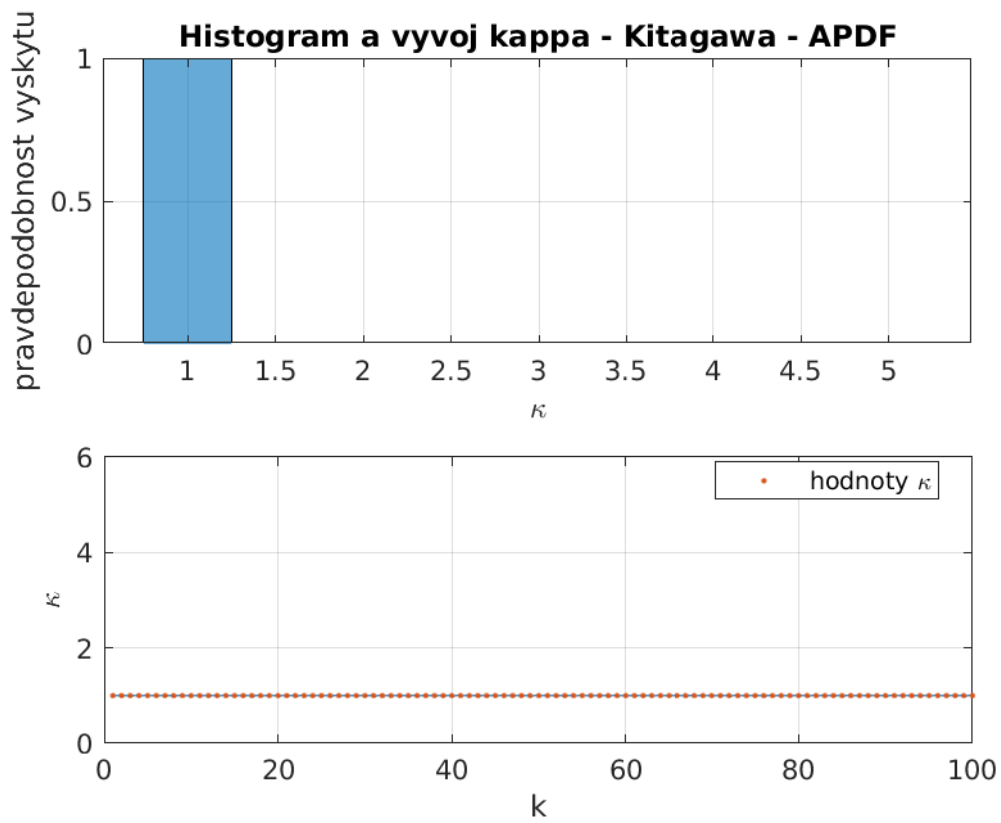


Obrázek 6.19: Adaptace APDF pro model *Kitagawa*

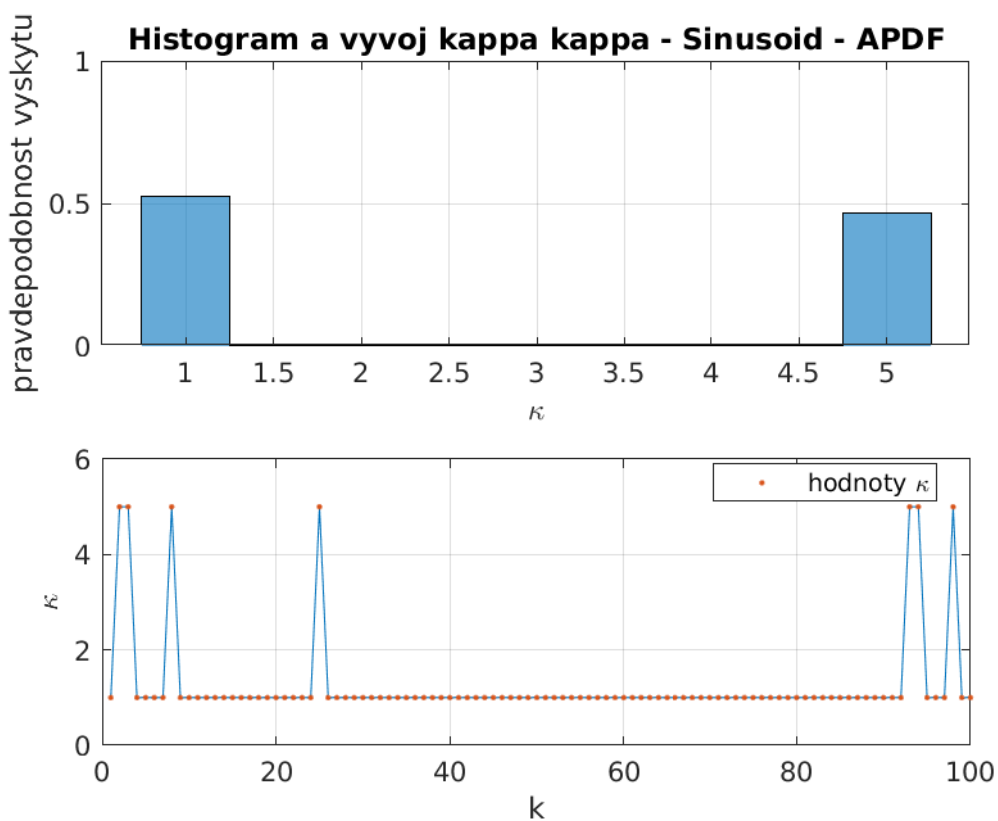
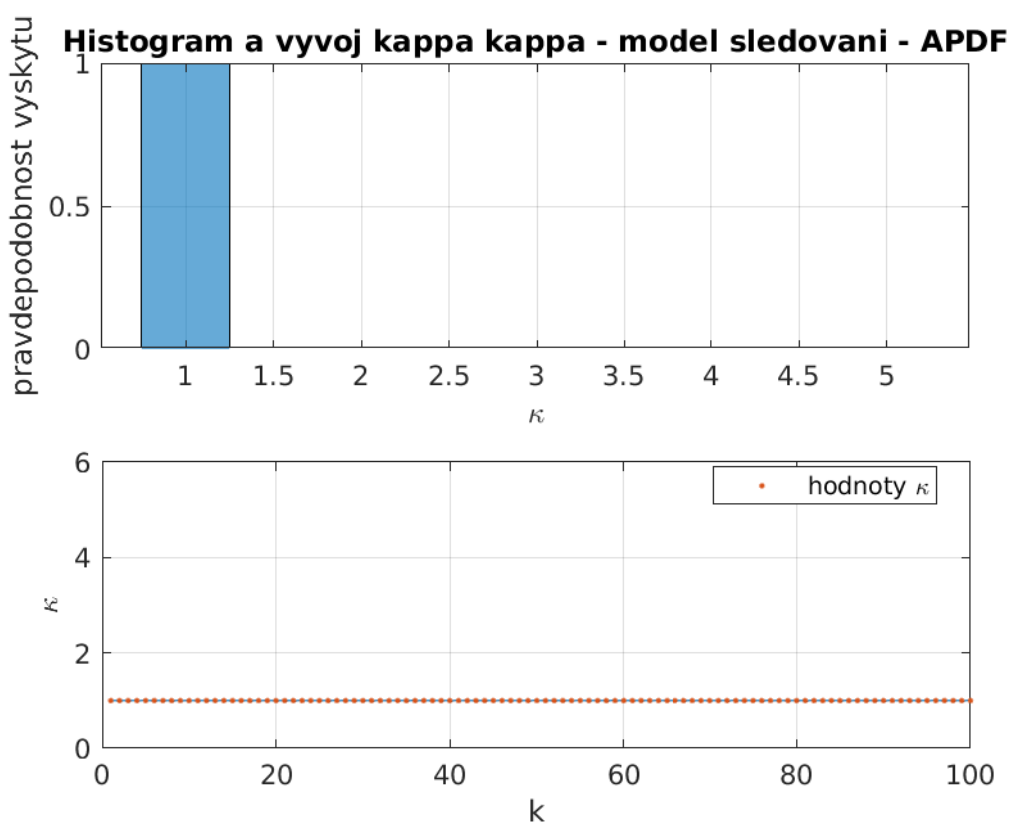
Obrázek 6.20: Adaptace APDF pro model *Sinusoid*Obrázek 6.21: Adaptace APDF pro model *sledování*

V grafech na obrázcích 6.22, 6.23 a 6.24 je znázorněna pravděpodobnost výskytu dané

hodnoty κ a modus jejího vývoje napříč všemi Monte Carlo simulacemi.



Obrázek 6.22: Histogram hodnot a vývoj κ adaptace APDF pro model *Kitagawa*

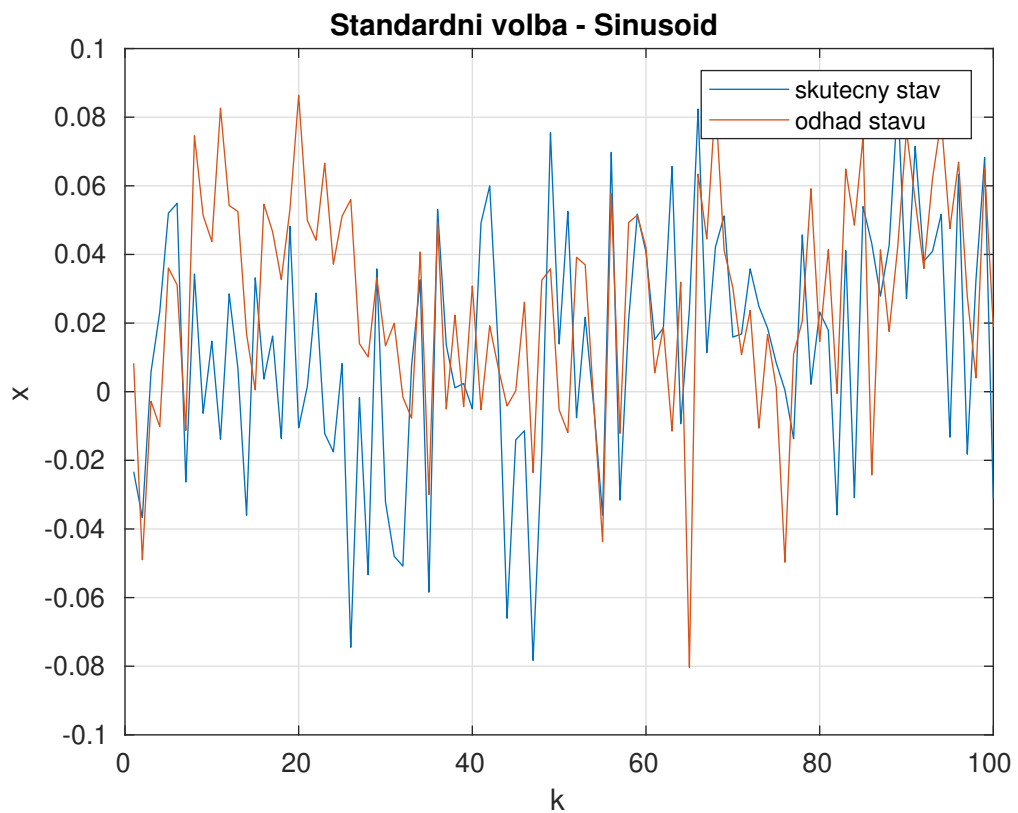
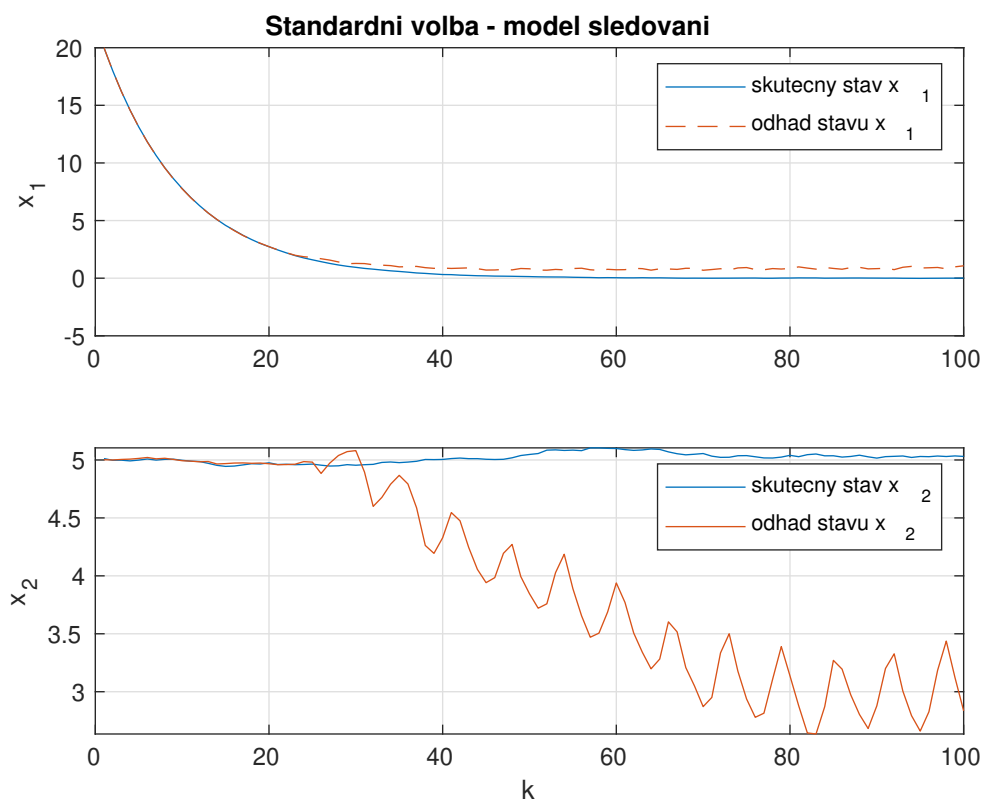
Obrázek 6.23: Histogram hodnot a vývoj κ adaptace APDF pro model *Sinusoid*Obrázek 6.24: Histogram hodnot a vývoj κ adaptace APDF pro model *sledování*

6.4.6 Standardní volba škálovacího parametru

Pro možnost lepšího srovnání je odhad počítán i pomocí standardní volby $\kappa = 0$. Odhady získané pro toto nastavení škálovacího parametru jsou v následujících grafech



Obrázek 6.25: Standardní volba $\kappa = 0$ pro model *Kitagawa*

Obrázek 6.26: Standardní volba $\kappa = 0$ pro model *Sinusoid*Obrázek 6.27: Standardní volba $\kappa = 0$ pro model *sledování*

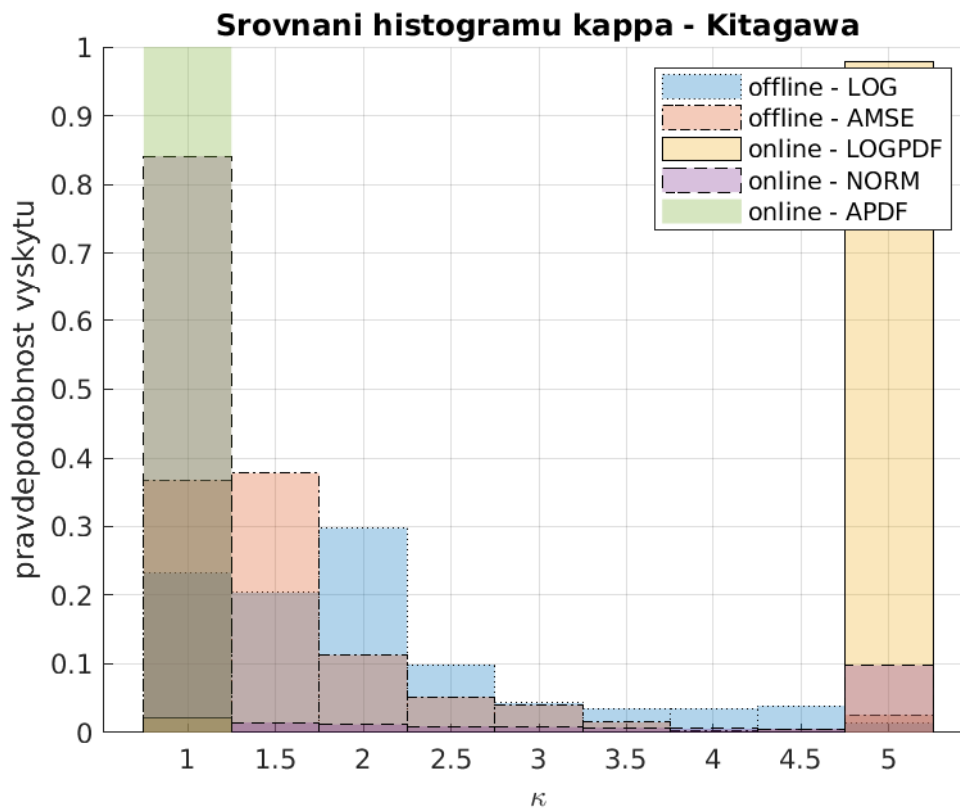
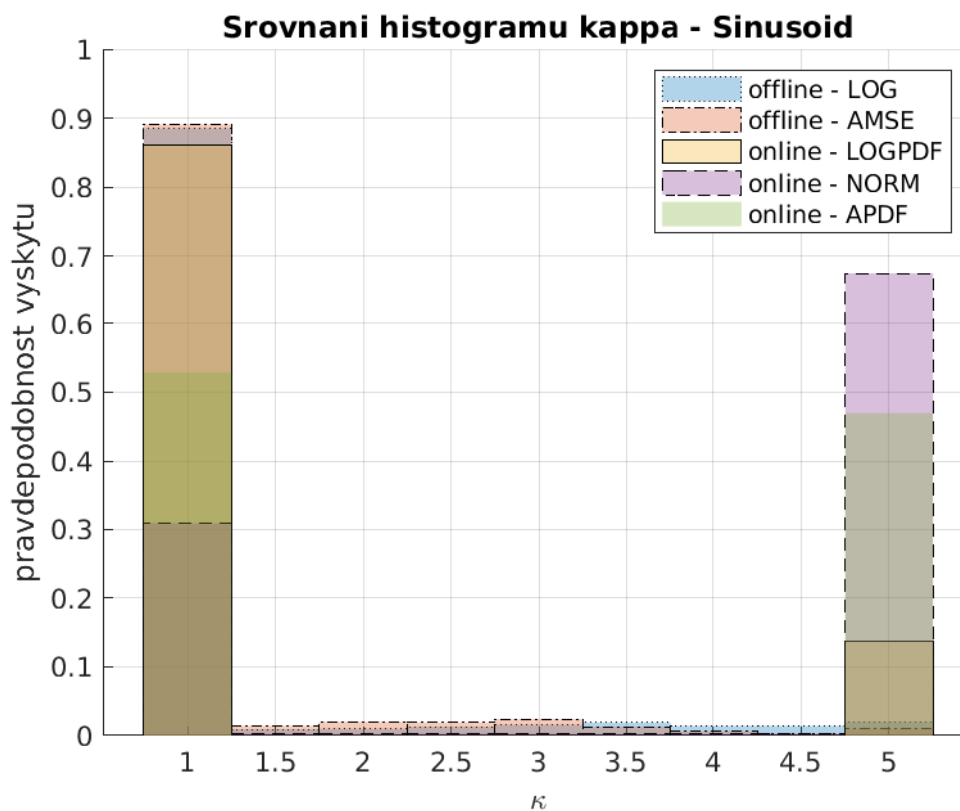
6.5 Porovnání metod adaptací ve smyslu hodnot škálovacího parametru

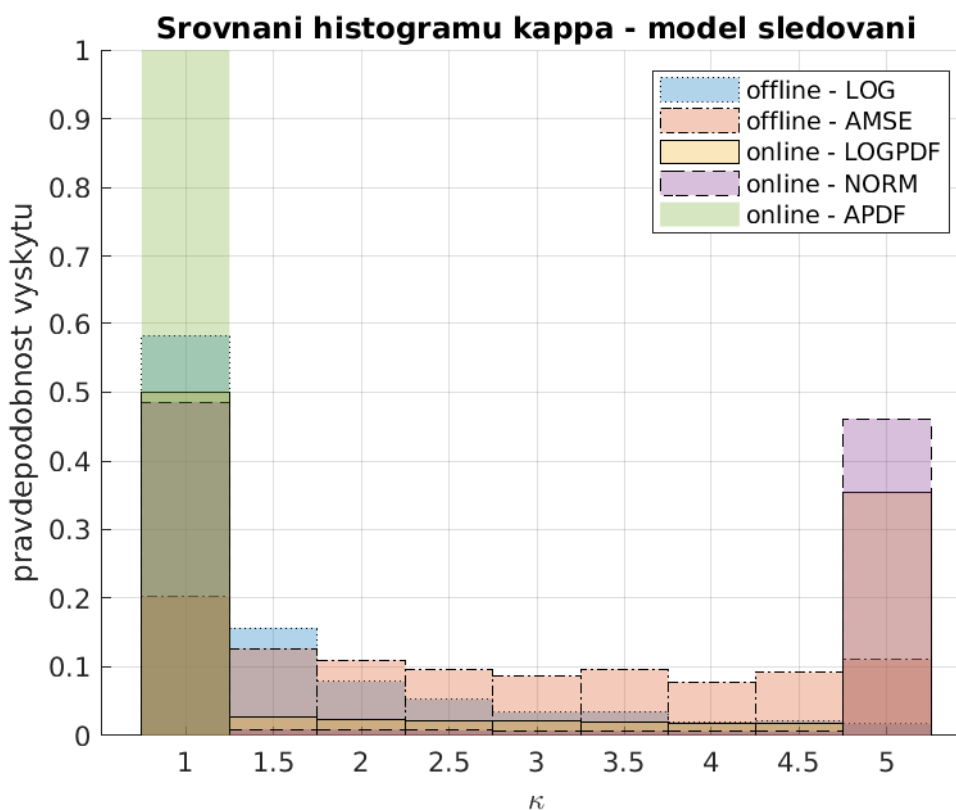
V následujících grafech na obrázcích 6.28, 6.29 a 6.30 je velmi dobře vidět rozdíl v pravděpodobnostech výskytu použitých hodnot κ napříč všemi metodami, ačkoli se estimace provádí pro stejná data.

Například pro model *Kitagawa* v grafu na obrázku 6.28 adaptace APDF používá ve 100 % případů hodnotu $\kappa = 1$, ačkoli adaptace LOGPDF v převážné většině volí hodnotu $\kappa = 5$. V adaptaci NORM se vyskytují všechny hodnoty κ , nicméně převažuje výskyt škálovacího parametru $\kappa = 1$. Co se týče offline adaptací, ty pro model *Kitagawa* vykazují rovnoměrnější zastoupení všech hodnot κ ve srovnání s online adaptacemi.

Toto tvrzení o offline adaptacích už ale neplatí pro model *Sinusoid* na obrázku 6.29. Zde totiž obě offline adaptace vykazují vysoký výskyt škálovacího parametru $\kappa = 1$. To samé se dá říci i o online adaptaci LOGPDF. Adaptace NORM má vyšší zastoupení parametru $\kappa = 5$ a adaptace APDF je výjimečně celkem vyvážená mezi hodnotami $\kappa = 1$ a $\kappa = 5$.

Na obrázku 6.30 má napříč Monte Carlo simulacemi nejrovnoměrnější zastoupení všech hodnot κ offline adaptace AMSE. Druhá offline adaptace vykazuje nejvyšší pravděpodobnost výskytu pro $\kappa = 1$ a pro každou další hodnotu κ se její pravděpodobnost snižuje. Online adaptace LOGPDF použila v 50 % časových okamžiků hodnotu $\kappa = 1$ a přibližně v 35 % hodnotu $\kappa = 5$. Hodnota $\kappa = 5$ nabývá nejvyššího výskytu pro adaptaci NORM, nicméně preferovanější hodnota pro tuto adaptaci je $\kappa = 1$, třebaže jen nepatrně. Adaptace APDF opět použila $\kappa = 1$ pro všechny časové okamžiky napříč všemi simulacemi.

Obrázek 6.28: Porovnání pravděpodobnosti vyskytů hodnot κ pro model *Kitagawa*Obrázek 6.29: Porovnání pravděpodobnosti vyskytů hodnot κ pro model *Sinusoid*



Obrázek 6.30: Porovnání pravděpodobnosti vyskytů hodnot κ pro model *sledování*

6.6 Porovnání metod adaptací ve smyslu kvality estimace

Chyby odhadu stavu pro všechny tři modely jsou ukázány v tabulkách 6.3, 6.4 a 6.5. Ve všech případech filtry běžely pro stejná data.

	RMSE	MAE	NCI	průměrný čas
offline - LOG	0.681	0.1845	0.0112	0.0187
offline - AMSE	0.6423	0.172	0.0112	0.0187
online - LOGPDF	0.6555	0.186	0.0112	0.0225
online - NORM	1.1245	0.2594	0.0158	0.0077
online - APDF	1.0457	0.2105	0.0225	0.0098
$\kappa = 0$	4.0356	1.1771	0.0652	0.0021

Tabulka 6.3: Porovnání adaptivních filtrů pro model *Kitagawa*

	RMSE	MAE	NCI	průměrný čas
offline - LOG	0.9448	0.7502	-0.0005	0.0182
offline - AMSE	0.9349	0.7434	-0.0007	0.0182
online - LOGPDF	0.9269	0.7365	-0.0004	0.0227
online - NORM	1.0622	0.8425	0.0044	0.0077
online - APDF	1.0251	0.8121	0.0035	0.0099
$\kappa = 0$	1.1857	0.8785	0.0131	0.002

Tabulka 6.4: Porovnání adaptivních filtrů pro model *Sinusoid*

	RMSE	MAE	NCI	průměrný čas
offline - LOG	1.1134	0.6923	-2.3474	0.0335
offline - AMSE	1.056	0.6605	-2.094	0.0335
online - LOGPDF	1.2188	0.7498	-2.8064	0.0325
online - NORM	1.0468	0.6924	-1.9446	0.0116
online - APDF	2.1942	1.1351	-6.6785	0.0138
$\kappa = 0$	2.9876	1.6207	-8.7878	0.0037

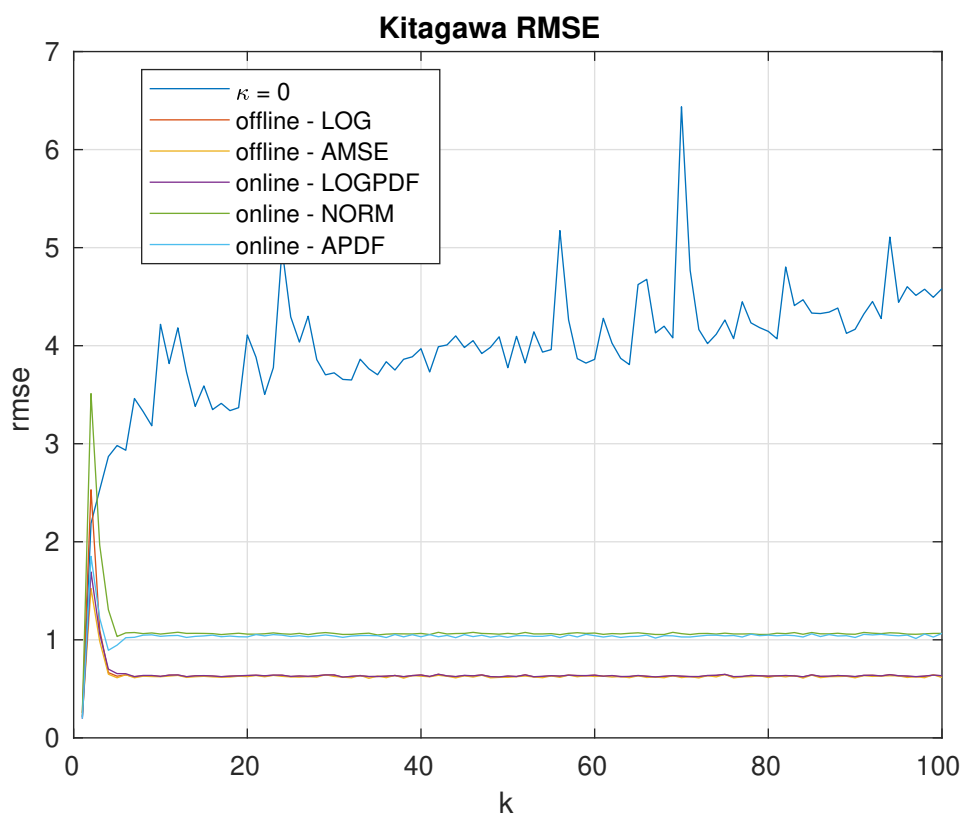
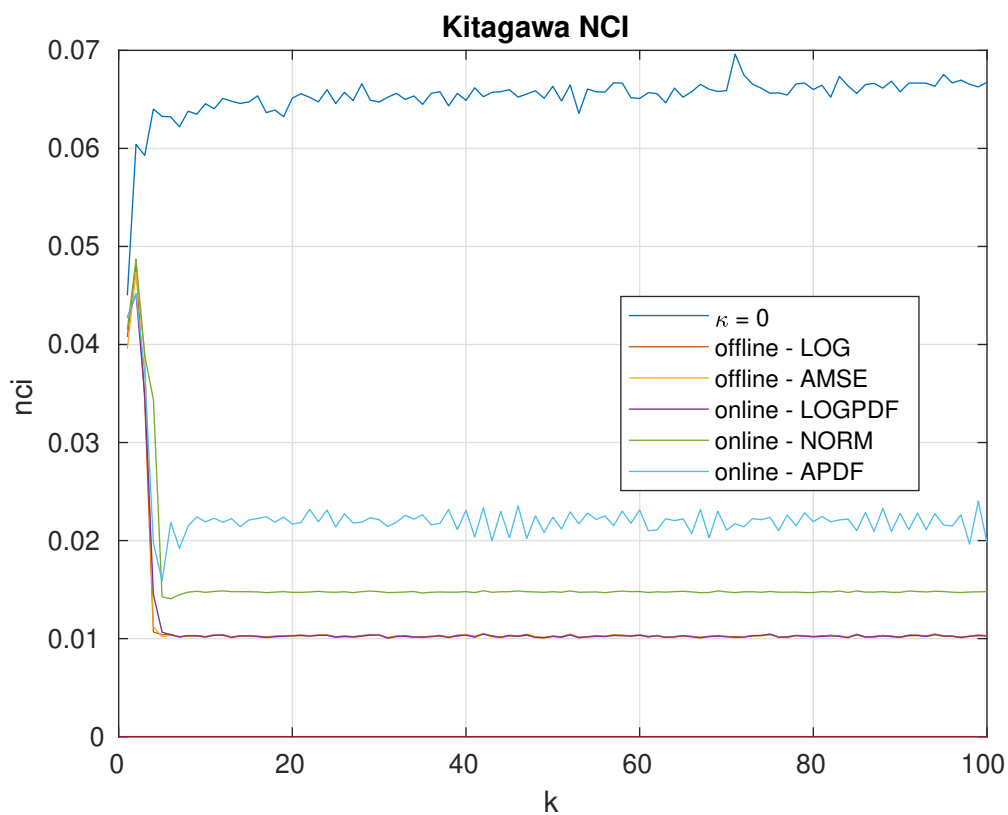
Tabulka 6.5: Porovnání adaptivních filtrů pro model *sledování*

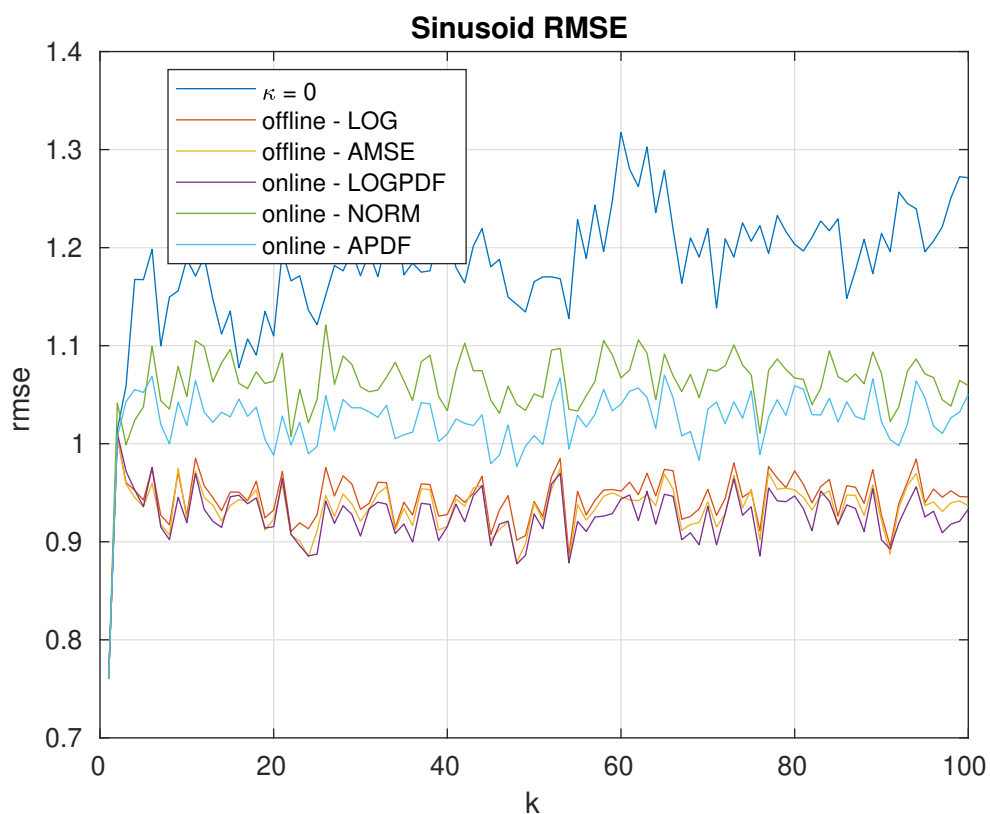
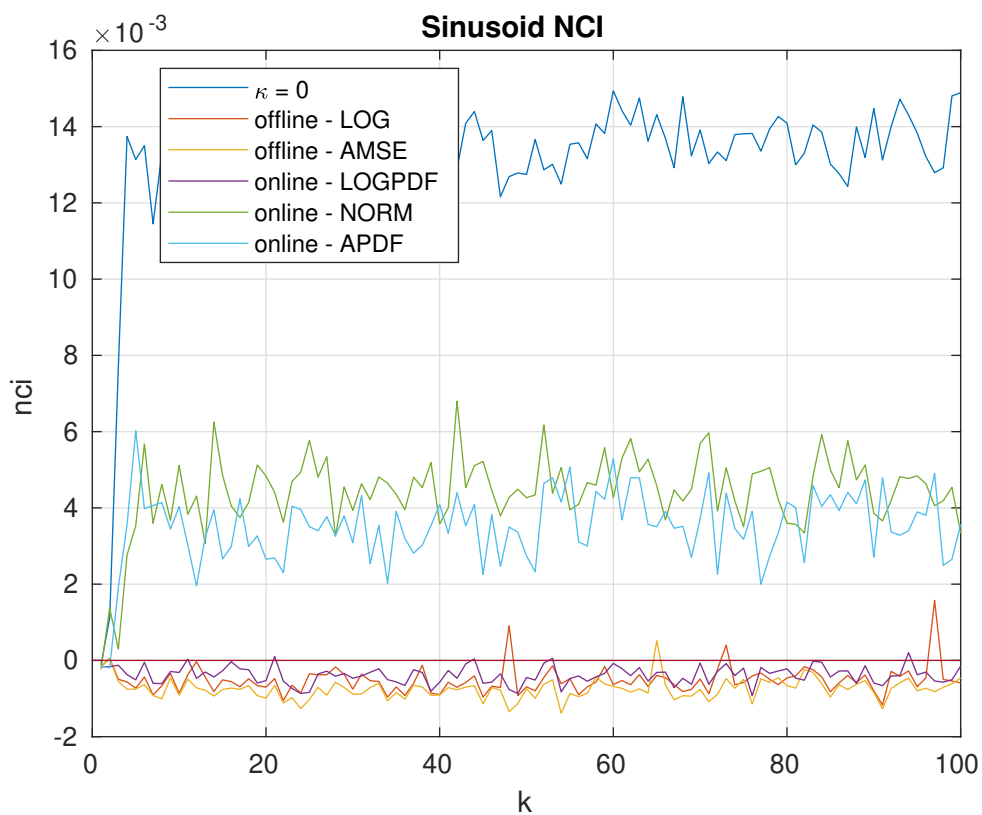
Z tabulek je jasně vidět, že estimace pro standardní nastavení škálovacího parametru vychází nejhůře ve smyslu kvality odhadu, jak bylo předpokládáno. Na druhou stranu se ale jedná o metodu s nejnižší výpočetní náročností.

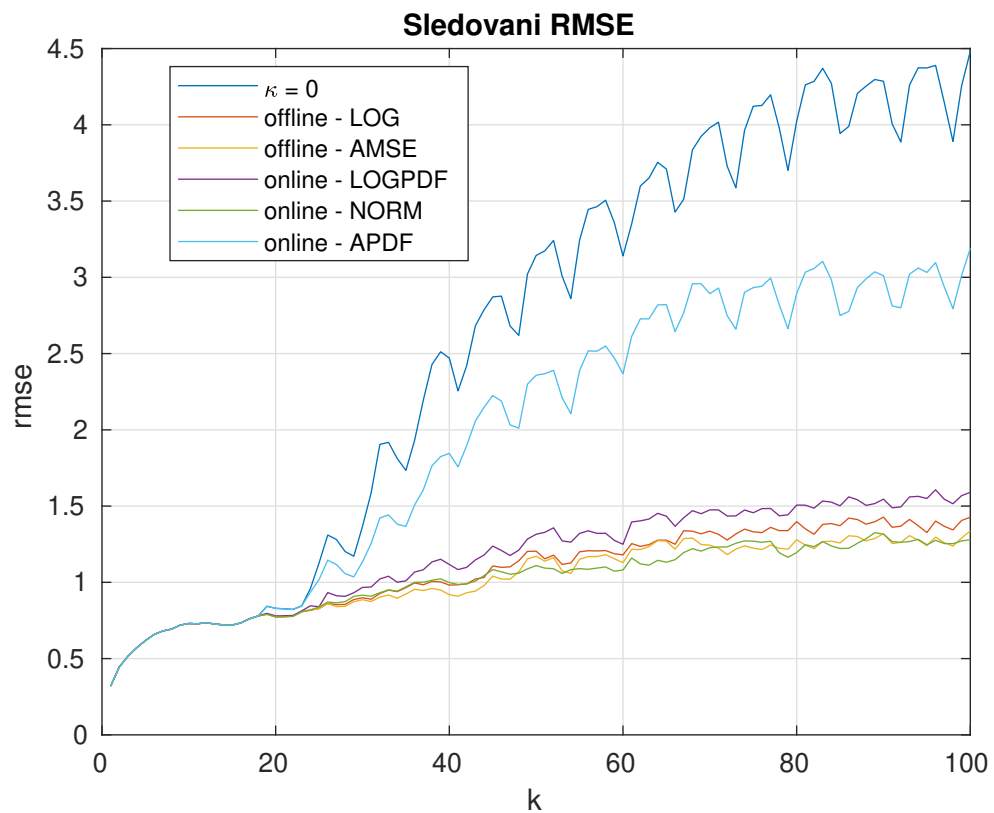
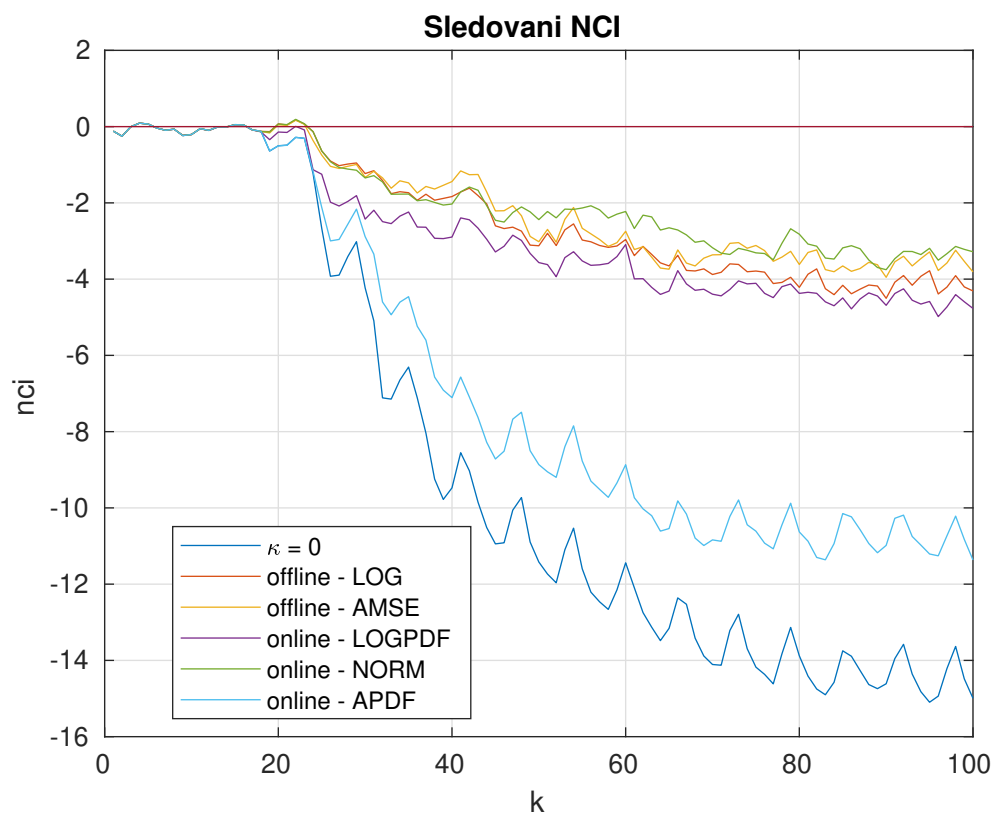
Nejlepší výkon pro model *Kitagawa* podává offline adaptace AMSE. Pro model *Sinusoid* to je online adaptace LOGPDF, která je dokonce i nejméně výpočetně náročná. A pro model *sledování* se výsledky mezi kritérii poněkud liší, tedy dle kritéria RMSE poskytuje nejkvalitnější odhad online adaptace NORM, ale podle kritéria MAE to je offline adaptace AMSE.

Co se týče NCI pro model *Kitagawa*, jsou všechny kovariance chyb nepatrně optimističtější, tedy menší než je jejich skutečná chyba. Pro model *Sinusoid* jsou kovarianční matice chyb filtrů využívajících adaptace LOG, AMSE a LOGPDF téměř zanedbatelně pesimistické, dalo by se tedy říci, že odpovídaly skutečnosti. Zbylé metody adaptací jsou optimistické a rozdíl mezi skutečnou a odhadnutou chybou byl o něco větší. Ovšem pro model *sledování* podávají všechny adaptivní filtry velmi pesimistické výsledky, tedy filtry samotné svůj odhad pokládají za podstatně méně přesný, než ve skutečnosti je.

Nyní následuje porovnání chyb pomocí grafického znázornění, tedy grafů.

Obrázek 6.31: Porovnání RMSE všech adaptací pro model *Kitagawa*Obrázek 6.32: Porovnání NCI všech adaptací pro model *Kitagawa*

Obrázek 6.33: Porovnání RMSE všech adaptací pro model *Sinusoid*Obrázek 6.34: Porovnání NCI všech adaptací pro model *Sinusoid*

Obrázek 6.35: Porovnání RMSE všech adaptací pro model *sledování*Obrázek 6.36: Porovnání NCI všech adaptací pro model *sledování*

Grafy jen potvrzují, co již bylo řečeno výše při rozboru tabulek. Ve všech grafech je velmi

dobře vidět, že standardní volba škálovacího parametru $\kappa = 0$ podává nejslabší výsledky, ať co se týče RMSE v grafech na obrázcích 6.31, 6.33, 6.35 nebo nekvalitního odhadu kovarianční matice chyby v grafech na obrázcích 6.32, 6.34 a 6.36. Příliš dobré výsledky nepodává ani adaptivní metoda APDF. Napříč všemi modely překvapivě vykazují nejlepší výsledky offline metody LOG a AMSE. Nejrozporuplnější se zdá být adaptace NORM, která má pro model *Sinusoid* na obrázku 6.33 druhou největší chybu hned po $\kappa = 0$, ale pro model *sledování* na obrázku 6.35 nabývá chyby naopak nejmenší.

6.7 Zhodnocení simulací

Díky simulacím byly získány překvapivé výsledky. Například byl vyvrácen předpoklad nižší výpočetní náročnosti offline adaptací oproti online adaptacím. Nicméně toto tvrzení platí, pouze pokud je započítáván i čas trénování škálovacího parametru. Pro již získaný optimální parametr κ by se průměrný čas offline adaptací nelišil od času pro filtr s parametrem $\kappa = 0$. Byl také vyvrácen předpoklad, že online adaptace poskytnou kvalitnější odhady, což bylo logicky usuzováno z faktu, že je škálovací parametr κ adaptován v každém časovém okamžiku. Naopak ale bylo potvrzeno, že standardní volba škálovacího parametru $\kappa = 0$ skutečně nepodává optimální výsledky. Nicméně ale stále platí, že má nejnižší výpočetní náročnost.

Pro model *Kitagawa* dosáhla nejnižší hodnoty chyby RMSE i MAE adaptace AMSE, její výpočetní náročnost ale nepatří mezi nejnižší, přestože se jedná o offline adaptaci. Podobně vysoké chyby vykazují i adaptace LOG a LOGPDF, které ale také patří do skupiny s vyšší výpočetní náročností. Kvalitativně jsou na tom o poznání hůře adaptace NORM a APDF. Nej- hůře vychází standardní volba, jejíž chyba je oproti ostatním adaptacím o celé jednotky vyšší. Z hlediska výpočetní náročnosti jsou na tom řádově velmi podobně standardní volba, adaptace NORM a APDF. Ostatní adaptace jsou na tom o jeden řád hůře, ale mezi sebou se příliš neliší. Shrnutí těchto výsledků je k nahlédnutí v tabulce 6.6, ve které je sepsáno umístění jednotlivých adaptací v rámci daného kritéria, kdy 1 znamená nejlepší výsledek a 6 nejhorší.

	RMSE	MAE	průměrný čas
offline - LOG	3	2	5
offline - AMSE	1	1	4
online - LOGPDF	2	3	6
online - NORM	5	5	2
online - APDF	4	4	3
$\kappa = 0$	6	6	1

Tabulka 6.6: Umístění adaptací dle kritérií pro model *Kitagawa*

Pro model *Sinusoid*, jehož základ tvoří harmonický signál, vykazují chyby obecně vyšší hodnoty. Pro tento model poskytla nejlepší odhad stavu z hlediska kritérií RMSE a MAE adaptace LOGPDF. Co se ale týče výpočetní náročnosti vyšla tato adaptace opět nejhůře. Odhady stavu získané offline adaptacemi vykazují o něco vyšší chyby, ale výpočetně jsou na tom lépe. Online adaptace NORM a APDF vykazují největší chyby, zanedbá-li se standardní volba, ale jejich výpočetní nároky jsou nejnižší. Přesné umístění adaptací ve smyslu chyb a výpočetní náročnosti je shrnuto v tabulce 6.7.

	RMSE	MAE	průměrný čas
offline - LOG	3	3	5
offline - AMSE	2	2	4
online - LOGPDF	1	1	6
online - NORM	5	5	2
online - APDF	4	4	3
$\kappa = 0$	6	6	1

Tabulka 6.7: Umístění adaptací dle kritérií pro model *Sinusoid*

Nejlepší odhad stavu modelu *sledování* z hlediska kritéria RMSE překvapivě poskytla adaptace NORM. Co se týče výpočetní náročnosti, byla hned v závěsu za standardní volbou. Pro kritérium MAE už byl její odhad stavu ale průměrný. Nadprůměrných výsledků pro RMSE a MAE dosáhly offline adaptace a podprůměrných online adaptace LOGPDF a APDF. Nejhůře vyšla opět standardní volba. V rámci výpočetní náročnosti na tom ale byla opět nejlépe. Nadprůměrně na tom byly adaptace NORM a APDF, průměrně si vedla LOGPDF a podprůměrně LOG a AMSE. Umístění z hlediska daných kritérií je shrnuto v tabulce 6.8.

	RMSE	MAE	průměrný čas
offline - LOG	3	2	5
offline - AMSE	2	1	6
online - LOGPDF	4	4	4
online - NORM	1	3	2
online - APDF	5	5	3
$\kappa = 0$	6	6	1

Tabulka 6.8: Umístění adaptací dle kritérií pro model *sledovani*

Z předchozích tabulek je vidět, že některé filtry podávají lepší výsledky pro skalární modely a jiné pro vektorové. Pokud by se ale měly výsledky shrnout a určit adaptaci, která si v rámci chyb odhadu vedla obecně nejlépe, byla by to offline adaptace AMSE postavená na jednoduchém kritériu střední kvadratické chyby. To se ale dalo předpokládat, neboť k jejímu běhu je nutné znát i skutečný stav anebo mít k dispozici velmi přesná měření. O něco horší výsledky pak poskytly adaptace s kritérii postavenými na maximalizaci logaritmičkových věrohodnostních funkcí offline LOG a online LOGPDF. A kromě standardní volby si ve smyslu kvality odhadu stavu stály nejhůře adaptace používající věrohodnostní funkce založené na aproximativních hustotách pravděpodobnosti. Z pohledu výpočetní náročnosti na tom byla už klasicky nejlépe standardní volba a nejhůře LOGPDF. Umístění adaptací dle kritérií je znázorněno v tabulce 6.9.

	RMSE	MAE	průměrný čas
offline - LOG	2	2	5
offline - AMSE	1	1	4
online - LOGPDF	3	3	6
online - NORM	4	4	2
online - APDF	5	5	3
$\kappa = 0$	6	6	1

Tabulka 6.9: Umístění adaptací dle kritérií z hlediska všech modelů

Kapitola 7

Závěr

Úkolem této práce bylo seznámit se s bezderivačními lokálními estimátory stavu, založenými na unscentovaném Kalmanově filtru, které využívají adaptivních technik při návrhu škálovacího parametru κ . Pro tyto účely bylo zapotřebí nastudovat velké množství odborných článků a literatury v angličtině. Jedná se totiž o problematiku aktuální a poměrně mladou a v Čechách se jí kromě Katedry kybernetiky na Fakultě aplikovaných věd nikdo další aktivně nezabývá.

Na základě studované literatury bylo navrženo rozdělení adaptivních technik do dvou kategorií - offline a online adaptace. Offline adaptace spočívá ve výběru optimálního škálovacího parametru až po běhu unscentovaného Kalmanova filtru pro všechny časové okamžiky, kdežto online adaptace probíhá přímo za běhu UKF, tedy v každém časovém okamžiku, přesněji před krokem filtrace.

Ze všech zkoumaných výzkumných prací bylo vybráno pět zástupců, dvě offline adaptační metody a tři online. Všechny byly následně implementovány a byly pro ně provedeny simulace v prostředí MATLAB. Před započítáním simulací byly vzneseny předpoklady podložené informacemi ze studovaných výzkumných prací. Prvním předpokladem bylo, že offline adaptace budou mít obecně nižší výpočetní náročnost, ale za cenu horších odhadů stavu. Druhým předpokladem bylo, že online adaptace budou výpočetně náročnější, ale jejich odhady budou z hlediska kvalitativních kritérií dosahovat lepších výsledků. Výsledky simulací pak byly podrobně analyzovány a shrnuty v kapitole 6.

V rámci kvalitativních vlastností odhadu stavu si obecně nejlépe vedl adaptivní filtr AMSE založený na kritériu střední kvadratické chyby a v rámci výpočetní náročnosti pak filtr NORM využívající jako věrohodnostní funkci kvality odhadu aproximativní hustotu pravděpodobnosti. Dle kritérií odmocniny střední kvadratické chyby a střední absolutní chyby si vedl nejhůře filtr implementující adaptaci APDF založenou na maximalizaci podílu aproximativních hustot prav-

děpodobnosti a obecně výpočetně nejnáročnější vyšel filtr s adaptací LOGPDF, která je založena na maximalizaci logaritmu filtrační hustoty pravděpodobnosti.

V tomto porovnání není uvažován filtr se standardní volbou škálovacího parametru, neboť sloužil jen jako referenční bod dokazující, že je důležité se i nadále zabývat návrhem adaptivních technik a nespokojit se s výsledky poskytnutými filtry se škálovacím parametrem navrženým metodami, které nezohledňují vlastnosti konkrétního modelu.

Literatura

- [1] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall PTR, 1993.
- [2] O. Straka, “Teorie odhadu a zpracování signálů.” Soupis přednášek.
- [3] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan, *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. A Wiley-Interscience Publication John Wiley & sons, inc., 2001.
- [4] N. Devroye, “ECE 531: Detection and estimation theory.” <https://www.ece.uic.edu/~devroye/courses/ECE531/lectures/intro.pdf>, 2011. Navštíveno dne: 2019-04-19.
- [5] K. W. B. Katy Börner and, S. Milojević, and S. Morris, *Models of science dynamics - Encounters between complexity theory and information sciences*, ch. An introduction to modeling science: Basic model types, key definitions, and a general framework for the comparison of process models. Understanding Complex Systems, Springer, 2012.
- [6] D. Törnqvist, *Estimation and Detection with Applications to Navigation*. PhD thesis, Division of Automatic Control, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden, 2008. ISBN 978-91-7393-785-6.
- [7] J. Duník, *Identifikace systémů a filtrace*. Západočeská univerzita v Plzni, 2018. ISBN 978-80-261-0775-0.
- [8] J. Melichar, “Lineární systémy 1 a 2.” Katedra kybernetiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, 2011. Učební text.
- [9] A. K. Tangirala, “System identification,” 2013. Module 1, Lecture 4.
- [10] J. Duník, “Metody lokální nelineární filtrace,” Master’s thesis, Západočeská Univerzita v Plzni, 2003.

- [11] G. A. Terejanu, “Unscented Kalman filter tutorial,” tech. rep., Department of Computer Science and Engineering, University at Buffalo, Buffalo, New York, 2008.
- [12] G. A. Terejanu, “Extended Kalman filter tutorial,” tech. rep., Department of Computer Science and Engineering, University at Buffalo, Buffalo, New York, 2008.
- [13] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, “Unscented filtering and nonlinear estimation,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 92, no. 3, pp. 401–422, 2004.
- [14] M. Nørgaard, N. K. Poulsen, and O. Ravn, “New developments in state estimation for nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 36, pp. 1627–1638, Nov. 2000.
- [15] S. Julier, J. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, “A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 3, pp. 477–482, 2000.
- [16] I. Arasaratnam and S. Haykin, “Cubature Kalman filters,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 6, pp. 1254–1269, 2009.
- [17] J. Han, Q. Song, and Y. He, *Kalman Filter Recent Advances and Applications*, ch. Adaptive Unscented Kalman Filter and Its Applications in Nonlinear Control. InTech, 2009. ISBN: 978-953-307-000-1.
- [18] L. Scardua and J. Jaime da Cruz, “Complete offline tuning of the unscented Kalman filter,” *Automatica*, vol. 80, pp. 54–61, 2017.
- [19] A. Sakai and Y. Kuroda, “Discriminative parameter training of unscented Kalman filter,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 43, no. 18, pp. 677 – 682, 2010. 5th IFAC Symposium on Mechatronic Systems.
- [20] O. Straka, J. Dunik, and M. Simandl, “Scaling parameter in unscented transform: Analysis and specification,” in *2012 American Control Conference (ACC)*, pp. 5550–5555, 2012.
- [21] J. Dunik, M. Simandl, and O. Straka, “Unscented Kalman filter: Aspects and adaptive setting of scaling parameter,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 9, pp. 2411–2416, 2012.
- [22] M. S. Bahraini, “On the efficiency of SLAM using adaptive unscented Kalman filter,” *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 2018.

- [23] M. Narasimhappa, S. L. Sabat, and J. Nayak, “Adaptive sampling strong tracking scaled unscented Kalman filter for denoising the fibre optic gyroscope drift signal,” *IET Science, Measurement and Technology*, 2014.
- [24] L. Chang, B. Hu, A. Li, and F. Qin, “Unscented type Kalman filter: limitation and combination,” *IET Signal Processing*, 2013.
- [25] Y. Nie and T. Zhang, “A self-adaptive scaling parameter selection algorithm for the unscented Kalman filter,” in *2015 Chinese Automation Congress (CAC)*, pp. 86–90, 2015.
- [26] F. Si, Y. Zhao, and Y. Lin, “Adaptively tuning sampling weights of the unscented Kalman filter in starlight refraction navigation,” *Optik*, vol. 148, pp. 300 – 311, 2017.
- [27] JJ, “MAE and RMSE - Which metric is better.” <https://bit.ly/2Ic5GSG>, 2016.
Navštíveno dne: 2019-05-15.

Seznam obrázků

2.1	Radar [1]	3
2.2	Pasivní sonar [1]	4
2.3	Rozdělení modelů [9]	5
2.4	Schéma odhadování stavu reálného objektu [2]	9
2.5	Normální rozdělení	11
4.1	Porovnání kvality odhadů	25
5.1	Model adaptivního UKF	27
5.2	Schéma adaptivního UKF použitého v této práci	29
5.3	Vývoj a histogram κ pro jednu Monte Carlo simulaci	30
6.1	Adaptace LOG pro model <i>Kitagawa</i>	39
6.2	Adaptace LOG pro model <i>Sinusoid</i>	40
6.3	Adaptace LOG pro model <i>sledování</i>	40
6.4	Adaptace AMSE pro model <i>Kitagawa</i>	41
6.5	Adaptace AMSE pro model <i>Sinusoid</i>	42
6.6	Adaptace AMSE pro model <i>sledování</i>	42
6.7	Adaptace LOGPDF pro model <i>Kitagawa</i>	43
6.8	Adaptace LOGPDF pro model <i>Sinusoid</i>	44
6.9	Adaptace LOGPDF pro model <i>sledování</i>	44
6.10	Histogram hodnot a vývoj κ adaptace LOGPDF pro model <i>Kitagawa</i>	45
6.11	Histogram hodnot a vývoj κ adaptace LOGPDF pro model <i>Sinusoid</i>	46
6.12	Histogram hodnot a vývoj κ adaptace LOGPDF pro model <i>sledování</i>	46
6.13	Adaptace NORM pro model <i>Kitagawa</i>	47
6.14	Adaptace NORM pro model <i>Sinusoid</i>	48
6.15	Adaptace NORM pro model <i>sledování</i>	48
6.16	Histogram hodnot a vývoj κ adaptace NORM pro model <i>Kitagawa</i>	49

6.17	Histogram hodnot a vývoj κ adaptace NORM pro model <i>Sinusoid</i>	50
6.18	Histogram hodnot a vývoj κ adaptace NORM pro model <i>sledování</i>	50
6.19	Adaptace APDF pro model <i>Kitagawa</i>	51
6.20	Adaptace APDF pro model <i>Sinusoid</i>	52
6.21	Adaptace APDF pro model <i>sledování</i>	52
6.22	Histogram hodnot a vývoj κ adaptace APDF pro model <i>Kitagawa</i>	53
6.23	Histogram hodnot a vývoj κ adaptace APDF pro model <i>Sinusoid</i>	54
6.24	Histogram hodnot a vývoj κ adaptace APDF pro model <i>sledování</i>	54
6.25	Standardní volba $\kappa = 0$ pro model <i>Kitagawa</i>	55
6.26	Standardní volba $\kappa = 0$ pro model <i>Sinusoid</i>	56
6.27	Standardní volba $\kappa = 0$ pro model <i>sledování</i>	56
6.28	Porovnání pravděpodobnosti vyskytů hodnot κ pro model <i>Kitagawa</i>	58
6.29	Porovnání pravděpodobnosti vyskytů hodnot κ pro model <i>Sinusoid</i>	58
6.30	Porovnání pravděpodobnosti vyskytů hodnot κ pro model <i>sledování</i>	59
6.31	Porovnání RMSE všech adaptací pro model <i>Kitagawa</i>	61
6.32	Porovnání NCI všech adaptací pro model <i>Kitagawa</i>	61
6.33	Porovnání RMSE všech adaptací pro model <i>Sinusoid</i>	62
6.34	Porovnání NCI všech adaptací pro model <i>Sinusoid</i>	62
6.35	Porovnání RMSE všech adaptací pro model <i>sledování</i>	63
6.36	Porovnání NCI všech adaptací pro model <i>sledování</i>	63

Seznam tabulek

4.1	Porovnání průměrů RMSE	25
6.1	Porovnání výskytů κ offline adaptací LOG	41
6.2	Porovnání výskytů κ offline adaptací AMSE	43
6.3	Porovnání adaptivních filtrů pro model <i>Kitagawa</i>	59
6.4	Porovnání adaptivních filtrů pro model <i>Sinusoid</i>	60
6.5	Porovnání adaptivních filtrů pro model <i>sledovani</i>	60
6.6	Umístění adaptací dle kritérií pro model <i>Kitagawa</i>	65
6.7	Umístění adaptací dle kritérií pro model <i>Sinusoid</i>	65
6.8	Umístění adaptací dle kritérií pro model <i>sledovani</i>	66
6.9	Umístění adaptací dle kritérií z hlediska všech modelů	66