ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

LIMITNÍ VĚTY- HISTORIE VČETNĚ DŮKAZŮ A ZPŮSOBŮ POUŽITÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Dominik Chejlava

Matematická studia

Vedoucí práce: RNDr. Václav Kohout, Ph.D.

Plzeň 2020

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 30. června 2020

....
vlastnoruční podpis

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu této práce, RNDr. Václavu Kohoutovi, Ph. D. za jeho cenné rady, připomínky, za jeho ochotu a čas, který mi věnoval.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

ÚVOD

Ve své bakalářské práci se věnuji limitním větám, především jejich definování, historii a důkazům.

Cílem této bakalářské práce je na základě prostudování odborné literatury popsat nejen historii centrální limitní věty, ale i centrální limitní větu a další limitní věty jako takové. A především pak nastínit způsob jejich dokazování.

Práce je strukturována přehledně a systematicky. Je rozdělena do dvou základních částí – části teoretické a praktické. První část práce, teoretická část, obsahuje právě výše zmírněnou historickou podkapitolu, ve které je zahrnuta biografie osobností, jež se nejvíce zasloužily o rozvoj limitních vět a teorie pravděpodobnosti – Abraham de Moivre, Pierre Simon de Laplace a Pafnutij Lvovic Čebyšev. V historické části je dále popsáno objevení a vývoj centrální limitní věty. Neméně důležitou součástí teoretické části je i podkapitola základních pojmů, která představuje výčet základních a nejdůležitějších pojmů z oblasti limitních vět a pojmů, které s tématem práce souvisí a dále definice a vysvětlení těchto pojmů. Tato podkapitola je důležitá proto, že vysvětluje veškeré pojmy nezbytné pro práci s limitními větami. S podporou teoretické základny z první části je pak možné uskutečnit praktické řešení příkladů.

Druhá, praktická část je tedy věnována samotným příkladům na výpočet pravděpodobnosti a jejich řešení pomocí limitních vět. Ke každému příkladu je pak sepsáno dvojí řešení. Jedno je klasické pomocí limitních vět a to druhé díky simulaci ve specializovaném programu.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 HISTORICKÁ ČÁST

V této kapitole se budeme věnovat historii centrální limitní věty. Na samotném začátku budou uvedeni významní matematici, kteří měli veliké přínosy v teorii pravděpodobnosti.

1.1.1 VÝZNAMNÉ OSOBNOSTI

ABRAHAM DE MOIVRE

Abraham de Moivre se narodil 26. května 1667 poblíž Paříže ve Vintry-le-Francios. De Moivreova rodina nebyla příliš bohatá, přestože se jeho otec živil jako chirurg. Jeho rodina byla protestantská, ale i tak navštěvoval de Moivre nejprve katolickou školu Křesťanských bratrů ve Vintry, která byla velmi tolerantní, přestože v této době už panovalo ve Francii velké náboženské napětí. V jedenácti letech byl de Moivre poslán na protestantskou akademii do Sedanu, kde strávil čtyři roky studiem řečtiny.

Edikt nantský zaručoval od roku 1598 ve Francii svobodu bohoslužby, ale i přesto bylo šíření protestantského smýšlení znemožněno. Římskokatoličtí duchovní měli velmi nesnášenlivý postoj vůči protestantské víře. Navzdory ediktu byla akademie, na které studoval de Moivre, uzavřena v roce 1682, a tak musel de Moivre přejít na akademii jinou. Rozhodl se pro studium logiky na akademii v Saumuru, kde byl až do roku 1684. Vestudijním kursu, který de Moivre navštěvoval, nebyla obsažená matematika, o kterou de Moivre jevil zájem tím, že matematické texty četl ve svém volném čase. Intenzivně se věnoval hlavně pojednání o hazardních hrách *De ratiociniis in ludo aleae*, které sepsal Christiaan Huygens. V této době odešli de Moivreovi rodiče do Paříže, takže on samozřejmě odešel s nimi. Jeho studium tak pokračovalo na Collège de Harcourt, kde navštěvoval kurzy fyziky a poprvé absolvoval soukromou lekci matematiky od Jacquesa Ozanama.

V roce 1685 byl eidkt nanský Ludvíkem XIV. zrušen, takže započalo pronásledování protestantů. V této době byl de Moivre kvůli svému náboženskému přesvědčení uvězněn. Dosud není jasné, jak dlouho byl vlastně vězněn. Když se dostal na svobodu, odcestoval do Anglie. Po příjezdu do Londýna se stal soukromým učitelem matematiky. Během pobytu v Londýně byl již de Moivre matematikem s velmi dobrými znalostmi, které záskal ze zásadních, důležitých matematických spisů. Velmi ho zaujal především Newton svým dílem *Principia*. De Moivre si ihned uvědomil, o jak mistrovské dílo jde a že je velmi důležité celé dílo prostudovat a porozumět mu. Díky svému nadání zvládl de Moivre práci pochopit velice rychle.

De Moivre zároveň doufal, že se v Anglii stane předsedou matematiků. Ale cizinci byli v Anglii výrazně znevýhodněni. Přesto že tedy nebyl de Moivre pronásledován kvůli své víře, byl stále diskriminován, právě proto, že byl Francouz. V roce 1692 se seznámil s astronomem Edmondem Halleyem, který spočítal oběžnou dráhu komety, jež se nazývá Halleyho kometa, a který byl současně také členem Královské společnosti. Brzy na to se de Moivre spřátelil i s Isaacem Newtonem.

První de Moivreův matematický spis *Method of fluxions* vycházel z Newtonova *Principia* a byl byl právě díky Halleymu přednesen Královské společnosti. Roku 1697 se stal de Moivre také členem Královské společnosti. V roce 1710 byl zvolen do komise, která měla přezkoumat, jestli byl kalkulus objevien Newtonem, nebo Leibnizem. Protože Královská společnost věděla, jakou chce odpověď, zvolili do komise právě de Moivrea, protože věděli o jeho přátelství s Newtonem. Přestože byl nyní de Moivre členem komise Královské společnosti, bylo pro něj nemožné získat místo na jakékoliv univerzitě.

Abraham de Moivre razil cestu rozvoje analytické geometrie a teorie pravděpodobnosti. Publikoval *The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play*, kde pojednával o výpočtech pravděpodobností ve hrách. Později se kvůli této práci dostal do sporu s Montmortem, protože v ní napadl některá Montmortova a Huygensova tvrzení. Toto dílo obsahovalo také definici statistické nezávislosti a dále několik problému s kostkami a dalšími hrami. Bylo to tak významné dílo, že v průběhu let připisoval de Moivre další a další vydání. Konkrétně ve vydání z roku 1756 se objevil nejvýznamnější příspěvek od de Moivrea v této oblasti. Ten se týkal aproximace binomického rozdělení normálním rozdělením.

Abraham de Moivre patří mezi největší průkopníky v teorii pravděpodobnosti. Ale i přes své veliké objevy se živil pouze jako soukromý učitel, takže žil celý život v chudobě. (O'Connor, Robertson, 2004)

PIERRE SIMON DE LAPLACE

Pierre Simon de Lapace se narodil 23. 3. 1749 v Beaumont-en-Auge ve Francii. Přestože pocházel ze zemědělské rodiny, nelze říci, že by žil v chudobě. Od svých sedmi let navštěvoval Laplce benediktýnskou církevní školu. V šestnácti letech odešel na universitu v Caen, kde studoval teologii. Ihned na začátku studia se u Laplace neprojevil pouze talent na matematiku, ale i láska k ní. Jakmile se rozhodl, že matematika je oblastí, které se chce věnovat, zanechal školy a odešel do Paříže k d'Alembertovi. Traduje se několik verzí událostí, které předcházely tomu, než začal d'Alembert pracovat s Laplaceovým nadáním. D'Alambert zároveň pomohl Laplaceovi najít zaměstnání, a jelikož byl Laplace opravdu nadaný, stal se brzy profesorem matematiky. V roce 1771 dostal nabídku, aby se stal členem Francouzské akademie věd.

Laplace byl společně s Bertholletem, Biotem a Poissonem členem vědecké skupiny Arcueilská společnost. V roce 1806 Královská švédská akademie věd zvolila Laplace jako zahraničního člena. On i Berthollet byli přátelé s Napoleonem, takže mohli ve velké míře působit na chod vědy ve Francii.

Koutný [online] píše, že Laplace udělal veliké objevy v astronomii. Zkoumal Saturnovy prstence a přišel s tvrzením nutnosti rotace těchto prstenců. Objasnil i rozdíl mezi Newtonovou teorii rychlosti šíření zvuku a reálnou rychlostí. Ve fyzice udělal za celý svůj život ještě mnoho zajímavých a důležitých objevů. V matematice se věnoval teorii pravděpodobnosti a roku 1819 vydal dílo *Théorie analytique des probabilités*, kde pojednával o teorii pravděpodobnosti jako samostatné matematické disciplíně a uvedl základní definice důležitých pojmů např. nezávislosti pokusů.

Pierre Simon de Laplace byl velmi významnou osobností na poli vědy. Udal základy i směr několika vědním disciplínám. Z jeho poznatků se těžilo velmi dlouho jak v matematice, tak i ve fyzice. Po Laplaceově smrti byl jeho mozek převezen do anatomického musea v Británii.

PAFNUTIJ LVOVIC ČEBYŠEV

Pafnutij Lvovic Čebyšev se narodil 16. května 1821 v Okatovo v Rusku. První vzdělání mu bylo poskytnuto doma jeho matkou a sestřenicí. Matka ho naučila číst a psát, zatímco sestřenice Sucharevna mu dala základy aritmetiky a francouzského jazyka. *Časopis pro pěstování matematiky* [online] uvádí, že to byla nejspíše Sucharevna, kdo měl největší zásluhy na výchově budoucího nadějného matematika. V roce 1832 se Čebyšev i se svojí rodinou přestěhoval do Moskvy, aby mohl společně se svým bratrem nastoupit na Moskevskou universitu. Už po roce na universitě získal Čebyšev stříbrnou medaili za svoji matematickou práci.

Ve svých dvaceti letech ukončil Čebyšev studium a již za dva roky vydal svoji první vědeckou práci. Obratem začal vydávat spoustu pozoruhodných prací, takže velmi rychle upoutal pozornost celého vědeckého světa. Po vydání disertační práce na téma počtu pravděpodobností získal profesorskou pozici na universitě v Petrohradě. Brzy získal v Petrohradě také titul doktora díky vydané knize *Theorie kongruencí*. V roce 1874 byl dokonce zvolen zahraničním členem Akademie věd v Paříži.

Čebyšev nebyl nikdy vědcem, který by uveřejnil jednu či dvě práce z nějakého oboru a ten pak opustil. Jistými otázkami se zaobíral celý svůj život, ale nejvíce se zaměřoval na teorie integrace, aproximace funkcí pomocí polynomů, teorie čísel, počet pravděpodobností, nauku o mechanismech a mnoho dalšího. Během práce v nauce o mechanismech přišel na zdokonalení Wattova parního motoru. Pomocí teorie funkcí, které se nejméně odchylují od nuly, dokázal vyřešit problém přiblížení se k přímočarému pohybu pomocí libovolného stupně aproximace tohoto pohybu. Pro dějiny matematiky je velmi důležité, že je Čebyšev považován za zakladatele nového odvětví matematiky, a to teorie aproximace funkce pomocí polynomů. Jeho práce v teorii pravděpodobnosti nabyla takových rozměrů, že jeho myšlenky a výsledky zařídily veliký rozvoj tohoto oboru. Zákon velkých čísel a teorie limitních vět jsou dvě důležité části teorie pravděpodobnosti. To, jak jsou dnes chápány, má svůj počátek u Čebyševa.

Pafnutij Lvovic Čebyšev byl tak významným matematikem, že vzbudil o teorii pravděpodobnosti široký zájem a vytvořil školu pro svoje následovníky. Zasloužil se tedy o rozvoj teorie pravděpodobnosti jako samostatné vědecké disciplíny.

1.1.2 HISTORIE CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTY

Centrální limitní věta je jednou z nejdůležitějších vět ve statistice a teorii pravděpodobnosti. Používá se téměř všude v aplikované statistice. Samotná centrální limitní věta se vyvíjela v průběhu let, během kterých ji každý matematik vyložil nějak jinak nebo ji něčím obohatil.

Historie centrální limitní věty začíná u matematika Pierra Simona de Lapace na konci 18. století. První spis, kde byla zmíněna centrální limitní věta, vydal Laplace v roce 1810. Již v roce 1776 vyšel spis, kde se snažil o výpočet pravděpodobnostního rozdělení součtu úhlů sklonu meteoru. Čelil problémům, které byly způsobeny pozorovacími chybami, a zároveň kvůli velkému množství nebeských těles nemohl provést přesný výpočet. Uvědomil si, že potřebuje nějakou aproximaci. V tomto procesu, kdy hledal tu správnou aproximaci, se propracoval k jistému závěru, ve kterém vytvořil jednu z prvních verzí centrální limitní věty. Jedním z důležitých nástrojů, díky kterým se povedlo Laplaceovi vytvořit centrální limitní větu, byla charakteristická funkce, kterou též zavedl Laplace již v roce 1785 (vysvětlení tohoto pojmu je v následující kapitole). Laplace se svými výpočty propracoval k následující formuli $\mathrm{P}\,(\mathrm{s_n} = 0) \approx \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{m} \cdot (\mathrm{m}+1)}}$, kde s_n je suma všech n možných chyb a m jsou hodnoty, kterých mohou chyby nabývat. Tímto výsledkem se dostal velmi blízko k obecnému výsledku. Do dnes je záhadou, proč to neudělal. Ke svým výsledkům se však vrátil, ale až v roce 1810, kdy udělal svůj předchozí výsledek všeobecně platný a zároveň ho i dokázal. Ve článku z roku 1820 začal dokazovat centrální limitní větu pro některá další speciální rozdělení v teorii pravděpodobnosti.

Ze všech příspěvků v 19. století, které se týkaly centrální limitní věty, byly nejpřínosnější ty od Siméona Denise Poissona, který publikoval dva články, v nichž diskutoval o centrální limitní větě. Uvažoval, že všechny procesy ve fyzice se řídí různými matematickými zákony, proto se pokusil o přesnější matematickou analýzu Laplaceovy věty. Do historie centrální limitní věty se zapsal Poisson tak, že roku 1824 a dále v roce 1829 vylepšil důkaz pro spojité náhodné veličiny. Zároveň tím položil základy konceptu náhodné veličiny. Poisson zároveň předložil i několik protipříkladů, kdy právě vylepšený důkaz pro spojité náhodné veličiny neplatí.

Koncem 19. století se začala matematika proměňovat. Neustále probíhala abstrakce matematiky a matematické diskuze se stále více měnily z výpočetní matematiky na klasickou základní analýzu neboli „čistou“ matematiku. To mělo veliký dopad na vývoj teorie pravděpodobnosti, protože do této doby nebyla považována za přesnou matematickou teorii. Nebylo třeba přesných důkazů, jak tomu bylo u Laplaceovy první verze centrální limitní věty. Stačilo, že věta fungovala v praxi. Proto do ní nebylo třeba přinášet pravou matematiku. Jenže v této době se mnoho změnilo a bylo provedeno několik pokusů o přesnější důkazy centrální limitní věty. Mezi nejdůležitější matematiky, kteří přišli s těmito důkazy, patří Bessel, Dirichlet, Cauchy a Ellis.

Dirichlet a Bessel většinou pokračovali v Laplaceových a Poissonových stopách u důkazů. Rozdílem ale bylo, že do svých vlastních důkazů zavedli „faktor nespojitosti“. Pomocí tohoto faktoru dokázali Poissonův vzorec pro libovolnou hodnotu n, kterou sám Poisson nedokázal. Dirichlet i Bessel šli různými cestami k dokázání Poissonova vzorce, ale princip zůstal zachován. Samotný Bessel zdůraznil, že Poisson to ve skutečnosti udělal stejným způsobem, s tím že dokázal svůj vzorec pro n rovno 1.

Dalším matematikem byl Cauchy. Řadí se k prvním matematikům, kteří uvažovali o teorii pravděpodobnosti jako o „čisté“ matematice. Měl veliké přínosy v různých oborech matematiky a zároveň přišel s novým způsobem, jak dokázat centrální limitní větu. Cauchy přišel s důkazem pro nezávislé veličiny s identickým rozdělením. Dále uvedl, že v této době má centrální limitní věta stále nedostatky. Jedním z největších nedostatků byla především absence jasně stanovených podmínek, za kterých konvergence k normálnímu rozdělení platí. Cauchyho důkazem skončila doba, která se nazývá první období centrální limitní věty. Období se datuje od roku 1810 do roku 1853.

Problémy centrální limitní věty byly vyřešeny zejména ruskými matematiky mezi roky 1870 a 1910. Největší zásluhy jsou připisovány třem matematikům, kteří se především věnovali teorii pravděpodobnosti, a jsou to Čebyšev, Markov a Ljapunov. Samozřejmě s nimi spolupracovali i jiní, ale tito tři se považují za nejvíce přispívající ohledně centrální limitní věty. Čebyševův spis z roku 1887 je obecně považován za počátek přesných důkazů pro centrální limitní větu. Čebyševův důkaz byl neúplný, proto ho později dokončil a zjednodušil Markov. V roce 1901 provedl Ljapunov důkaz centrální limitní věty pomocí charakteristických funkcí. Následně Markov pracoval na důkazu, který by měl stejnou úroveň obecnosti jako ten Ljapunův, ale chtěl toho docílit pomocí metody momentů. Svého cíle Markov dosáhl až v roce 1913. I přesto byl Ljapunův důkaz považován za první „skutečný“ důkaz centrální limitní věty. Jeho důkaz obsahoval základní lemma. Další matematici, kteří přispěli nějakým způsobem do centrální limitní věty, byli Linderberg a Lévy. Oba dva použili stejné lemma ve svých vylepšeních centrální limitní věty.

Třetí a poslední období historie centrální limitní věty se datuje mezi roky 1920 a 1937. Toto období začíná Linderbergovým důkazem, Lévyho a Fellerovým důkazem. V roce 1922 zveřejnil Lindenberg svůj důkaz o centrální limitní větě. Důkaz je platný i pro náhodné vektory. Tento důkaz se stal i základem pro Fellerovu a Lévyho práci. Fellerův spis z roku 1935 poskytl nezbytné a dostatečné předpoklady pro centrální limitní větu. Uvedl několik předpokladů pro nezávislé náhodné veličiny, ale protože pracoval s jistým omezením, nelze jeho řešení považovat za konečnou centrální limitní větu, jelikož pracoval s normovanými součty. Fellerova věta bývá často nazývána jako Linderberg-Fellerova věta, protože Feller použil Linderbergův předpoklad. Lévy dokázal Linderbergův předpoklad v roce 1925 pomocí charakteristických funkcí. Nicméně Linderbergův důkaz je jednodušší. Mezi lety 1925 a 1930 publikoval Lévy několik článků s tematikou centrální limitní věty. V roce 1935 vydal Lévy spis, ve kterém nepoužíval charakteristické funkce, stejně jako Feller. Oba popřeli, že by spolu nějakým způsobem spolupracovali. V tomto spisu Lévy dokázal několik věcí týkajících se centrální limitní věty.

Jak Lévyho, tak i Fellerův důkaz se opíral o lemma, které v roce 1936 dokázal Cramér. Díky jeho důkazu se oba vrátili ke své práci a vylepšili své důkazy o centrální limitní větě. Tímto byly dokázány nutné a postačující předpoklady. (Mether, 2003)

1.2 ZÁKLADNÍ POJMY

V další kapitole se budeme zabývat limitními větami, proto zde bude uvedeno několik důležitých pojmů, které se využívají v teorii pravděpodobnosti.

1.2.1 NÁHODNÝ JEV

Definice náhodného jevu: „Náhodným jevem budeme rozumět libovolný výrok (tvrzení) o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze po provedení náhodného pokusu prohlásit, zda je či není pravdivé.“ (Kohout, *Přednášky*)

Náhodný pokus je proces, který dává při opakování za stejných podmínek rozdílné výsledky.

1.2.2 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ PROSTOR

Pravděpodobnostní prostor je trojice (Ω, A, P), kde Ω je neprázdná a konečná množina, A je množina všech náhodných jevů, P je množinová funkce, která se nazývá pravděpodobností náhodného jevu.

Definice pravděpodobnostního prostoru: Nechť Ω je základní množina, A je σ - algebra založená na množině Ω. Potom pravděpodobností na množině Ω nazveme zobrazení

$$\mathrm{P}\colon \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{R}_1.$$

Takovéto zobrazení má určité vlastnosti. Alespoň jeden prvek musí být nenulový, to je jeho první vlastnost.

Druhá vlastnost nám říká, že pravděpodobnost je omezená a platí

$$0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1.$$

Poslední vlastnost se týká sjednocování neslučitelných náhodných jevů, to znamená, že průnikem dvou různých prvků systému A je prázdná množina. Pokud sjednotíme neslučitelné náhodné jevy a zjistíme pravděpodobnost celého sjednocení, tak ta se rovná součtu jednotlivých pravděpodobností:

$$\mathrm{P}(\cup_{\mathrm{i}} \mathrm{A_i}) = \textstyle\sum_{\mathrm{i}} \mathrm{P}(\mathrm{A_i}).$$

Za zmínění ještě stojí σ-algebra. A je systém podmnožin množiny Ω a ten nazýváme σ-algebrou, pokud obsahuje prázdnou množinu, je uzavřený na spočetně sjednocení a obsahuje doplněk. (Kohout*, Přednášky*)

1.2.3 NÁHODNÁ VELIČINA

Definice náhodné veličiny: „Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor. Zobrazení $X\colon \Omega \rightarrow R_1$ nazveme náhodnou veličinou $\Leftrightarrow \forall\, c \in R\colon X^{-1}(-\infty, c) \in A.$“ (Kohout, *Přednášky*)

1.2.4 DISTRIBUČNÍ FUNKCE A HUSTOTA PRAVDĚPODOBNOSTI

Distribuční funkce je taková funkce, díky které máme lepší popis náhodné veličiny. Může být popsána více způsoby, proto uvádím definici podle Nagyho a podle Kohouta.

Definice distribuční funkce:

„Distribuční funkce F (x) je definována předpisem

$F_X(x) = P\ (X \ \leq x),$

kde X je náhodná veličina, x je realizace náhodné veličiny. Distribuční funkce poskytuje úplný popis náhodné veličiny." (Nagy, 2002, s. 43)

Definice distribuční funkce:

„Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, nechť dále je X náhodná veličina. Distribuční funkcí této náhodné veličiny budeme rozumět zobrazení $F\colon R \ \rightarrow R$, definované vztahem

$F\colon x \rightarrow P(\{\omega; X(\omega)\ < x\})$.*"* (Kohout, *Přednášky*)

V matematické statistice existuje mnoho jiných předpisů, které definují distribuční funkci, jak bylo zmíněno již výše. Další důležitější definice říká: Nechť existuje nezáporná funkce $\mathrm{f(x)}$ taková, že platí

$\mathrm{F(x)} = \int_{-\infty}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)dt},$

potom náhodná veličina se nazývá spojitá a $\mathrm{F(X)}$ je její distribuční funkce. „Podle definice je spojitá náhodná veličina charakterizována tím, že její obor hodnot je celý reálný interval I."(Kohout, *Přednášky*)

Pro takhle definovanou distribuční funkci dále platí, že je absolutně spojitá, to znamená, že absolutní hodnota rozdílu dvou funkčních hodnot se nachází v nějakém pásu. Šířku tohoto pásu nám udává $\varepsilon\ > 0$.

Jak bylo zmíněno výše, $\mathrm{f(x)}$ je nezáporná a nazývá se hustotou pravděpodobnosti. Pokud hustotu $\mathrm{f\ (x)}$ zintegrujeme, získáme distribuční funkci.

Zmíněné spojité rozdělení je jeden typ náhodné veličiny. Existuje ještě druhý typ. Rozdělení takového druhu se nazývá diskrétní. Distribuční funkce tohoto rozdělení není spojitá na celém svém oboru. Není důležité se více diskrétním rozdělením zabývat, ale přesto uvedu jedno konkrétní diskrétní rozdělení a to binomické.

1.2.5 BINOMICKÉ ROZDĚLENÍ

Binomické rozdělení popisuje situaci, ve které se n-krát opakuje nějaký pokus. Pravděpodobnost, že daný pokus bude úspěšný, je p. Takže náhodná veličina X je definovaná pro k počet úspěchů, kde k = 0, 1, …, n. Hustota pravděpodobnosti je daná předpisem

$$f(x) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Uvádí se důležitý parametr $E\,(X)$. Nazývá se střední hodnota, existuje pokud řada $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i \cdot P\,(X_i = x_i)$ je abolutně konvergentní[1]. Dalším parametrem je rozptyl a značí se $VAR\,(X)$. Získáme jej jako $VAR\,(X) = E\,\big(X - E\,(X)\big)^2$. Speciálně pro binomické rozdělení je střední hodnota dána vztahem $E\,(X) = n \cdot p$ a rozptyl

$$VAR\,(X) = n \cdot p \cdot (1-p).$$

Vzhledem k zaměření mé práce není nutné se více věnovat tomuto rozdělení. K mému tématu je důležitější rozdělení následující – normální.

1.2.6 NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Nechť existují konstanty μ a σ, kde μ je z množiny všech reálných čísel a σ je větší než nula. Rozdělení nazveme normálním rozdělením, popřípadě Gaussovým rozdělením, a pro hustotu normálního rozdělení platí:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Takové rozdělení označujeme $X \sim N\,(\mu, \sigma^2)$. Protože se jedná o spojitou náhodnou veličinu, musí pro jeho první moment neboli střední hodnotu existovat integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f\,(x) dx$. Pro normální rozdělení speciálně platí $E(X) = \mu$ a pro jeho druhý moment neboli rozptyl platí $VAR(X) = \sigma^2$. Pokud vezmeme σ^2 a odmocníme, tak získáme číslo σ a to je směrodatná odchylka.

Funkci náhodné veličiny, kterou získáme ze vztahu

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx$$

[1] Více o absolutní konvergenci: http://home.zcu.cz/~pnecesal/MA1/PDF/MA1-prednasky-3-rady.pdf

nazýváme charakteristickou funkcí. U normálního rozdělení nabývá charakteristická funkce tohoto tvaru:

$\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$.

Normální rozdělení je velice důležitým pojmem nejen v matematické statistice, ale také v teorii pravděpodobnosti a jejích aplikacích. Toto rozdělení je zároveň specifické v tom, že je velice často normováno. Po znormování dostáváme další velice známý pojem a tím je normální normované rozdělení. Normování se zrealizuje velmi jednoduchou transformací $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

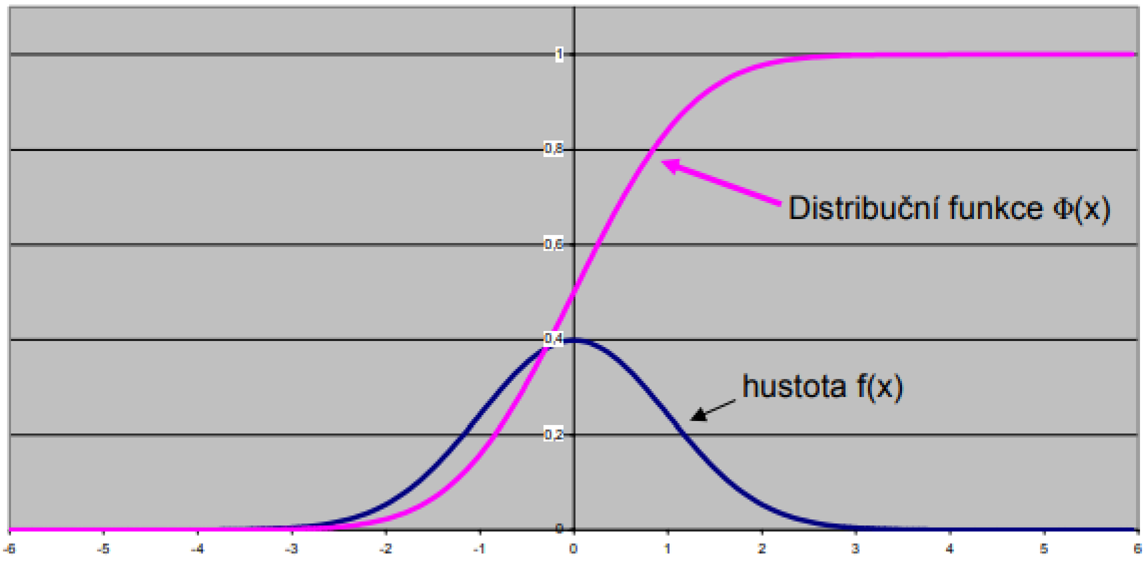
Pokud $N(\mu, \sigma^2)$ je normální rozdělení, tak po transformaci

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

získáme $N(0,1)$, což je označení pro náhodnou veličinu, která je normované normální rozdělení.

Pro normální normované rozdělení platí, že jeho první moment je roven nule a jeho druhý moment roven jedné. Je to tak důležitý pojem v teorii pravděpodobnosti, že jeho distribuční funkce $F(X)$ má svůj vlastní specifický symbol. Značíme ji $\Phi(X)$. Pro hustotu normovaného normálního rozdělení platí:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.



Obrázek 1: $\phi(X)$ a $f(x)$ normovaného normálního rozdělení

Na předchozím Obrázku 1 je znázorněna distribuční funkce a hustota normovaného normálního rozdělení. Můžeme si všimnout, že hustota N (0, 1) je osově souměrná podle osy y a distribuční funkce je středově souměrná podle bodu 0,5 na ose y.

1.2.7 KONVERGENCE NÁHODNÝCH VELIČIN

KONVERGENCE SKORO JISTĚ

Můžeme říci, že na pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P) konverguje posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ skoro jistě, pokud existuje množina Y ∈ A a má pravděpodobnost P (A) = 1 a zároveň existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$$

pro ω ∈ A. Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ konverguje skoro jistě k náhodné veličině X, jestliže platí

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

pro ω ∈ A. Značí se $X_n \to X$ s. j.

KONVERGENCE V PRAVDĚPODOBNOSTI

„Buďte $\{X_n\} \in (\Omega, A, P), X \in (\Omega, A, P)$. Řekneme, že posloupnost $\{X_n\}$ konverguje k X podle pravděpodobnosti, resp., že posloupnost $\{X_n\}$ je Cauchyovská podle pravděpodobnosti, jestliže pro každé ε> 0 je

$\lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0, \text{resp.} \lim_{n\to\infty} P[|X_n - X_m| \geq \varepsilon] = 0.$“ (Štěpán, 1987, s.182)

Značíme ji $X_n \xrightarrow{P} X$. Pro konvergenci podle pravděpodobnosti také platí, že má nejvýše jednu limitu, to však platí pro každou konvergenci na množině reálných čísel. V definici byla zmíněna Cauchyovská posloupnost. To je taková posloupnost, pro kterou platí, že absolutní hodnota z rozdílu dvou členů leží v pásu o nějaké šířce. Šířku tohoto pásu nám udává $\varepsilon > 0$. Pro tuto posloupnost také platí, že je konvergentní.

Anděl (1978, s. 180) uvádí ve své práci lemma s dalšími vlastnostmi této konvergence. Vlastní lemma je rozdělena na tři body. První bod nám říká, že X_n konverguje k X jen tehdy, pokud ke každému ε, kde$\varepsilon > 0$, a každému δ, kde$\delta > 0$, existuje n_0 právě takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$P\{|X_n - X| > \varepsilon\} < \delta \, .$$

V dalším bodě je zmiňováno, že X_n konverguje v pravděpodobnosti k X pouze tehdy, pokud ke každému k, kde $k \in N$, a ke každému δ, kde $\delta > 0$, existuje n_0 právě takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$P\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\right\} < \delta .$$

V následujícím a posledním bodě popisuje Anděl (1978) konvergenci X_n k X podle pravděpodobnosti tak, že pro každé ε, kde $\varepsilon > 0$, platí vztah

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \to 0.$$

KONVERGENCE V DISTRIBUCI

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor {Ω, A, P}. Pokud máme náhodné veličiny X, X_1, X_2, …, X_n, které mají náležité distribuční funkce F, F_1, F_2, …, F_n. Abychom mohli říci, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ konverguje k náhodné veličině X v distribuci, tak musí platit

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x) .$$

Podmínka je, aby funkce byla spojitá ve všech bodech x. Konvergenci v distribuci

značíme $X_n \xrightarrow{D} X$.

1.2.8 ČEBYŠEVOVA NEROVNOST

Čebyševova nerovnost je velmi silný a důležitý nástroj v teorii pravděpodobnosti. Velikou roli hraje hlavně při dokazování centrálních limitních vět a zákonu velkých čísel. Můžeme se setkat s několika možnými zápisy. Prvně uvedeme obecně platný zápis nerovnosti a dále jakou cestou jsme se dostali od obecného předpisu ke dvěma nejznámějším zápisům. Někdy se můžeme setkat s tím, že jeden zápis je nazýván Čebyševova nerovnost prvního typu a analogicky je druhý zápis nazýván druhým typem.

Obecně musí platit, že X je náhodná veličina. Dále existuje $\varepsilon > 0$, $\alpha \geq 0$ a $E(|X|^{\alpha})$. Pak platí

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X|^{\alpha})}{\varepsilon^{\alpha}} .$$

Speciálně pro případ, kdy dosadíme $\alpha = 1$, dostáváme

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon} .$$

Nerovnost v takovémto tvaru se nazývá prvním typem a může se někdy vyskytovat v literaturách pod názvem Markovova nerovnost.

Pokud použijeme dosazení $\alpha = 2$, pak po úpravě získáme

$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X|^2)}{\varepsilon^2}$.

Teď provedeme úpravu, tak, že na každé straně nerovnice budeme místo X uvažovat

$X - E(X)$.Získáme

$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X-E(X)|^2)}{\varepsilon^2}$.

Nyní je důležité použít definici pro rozptyl náhodné veličiny, která má v matematické podobě tvar $VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. Na první pohled není předchozí vzorec očividný, proto se musí použit důkaz věty o vlastnostech rozptylu. Vyjde se ze vztahu $E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$, který se začne následně upravovat.

„$E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) = E(X^2) - E\big(2XE(X)\big) + E\left(\left(E(X)\right)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + \big(E(X)\big)^2 = E(X^2) - 2\big(E(X)\big)^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = VAR(X)$“

(Kohout, *Přednášky*)

Nyní je zřejmé, že nerovnost bude ve tvaru

$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{VAR(X)}{\varepsilon^2}$.

Tato forma zápisu se nazývá Čebyševova nerovnost druhého typu.

Na závěr provedeme důkaz podle Anděla (2007, s. 330). Pro jasnost je uveddeno, že Anděl označil $E(X)$ jako μ a $VAR(X)$ jako σ^2.

Důkaz. „Máme

$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) = \int_{|X-\mu| \geq \varepsilon} dP \leq \varepsilon^{-2} \int_{|X-\mu| \geq \varepsilon} (X - \mu)^2 dP \leq \varepsilon^{-2} \int (X - \mu)^2 dP = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.“

1.2.9 ZÁKONY VELKÝCH ČÍSEL

Pokud začneme v teoretické rovině pracovat s nějakou náhodnou veličinou, mohou nám po určitých aplikacích vznikat výsledky našeho měření. Tato měření jsou samozřejmě vystavována určitým náhodným chybám. Již dříve bylo zjištěno, že vzniklé výsledky jednotlivých měření se mohou kvůli dříve zmiňovaným náhodným chybám lišit. Na druhou stranu bylo také stanoveno, že i přes jednotlivé odchylování dochází k tomu, že pokud vypočítáváme aritmetické průměry jednotlivých měření, získáme mnohem vyšší stabilitu výsledků. Anděl (1978, s. 182) uvádí, že jakmile navyšujeme počet pokusů, tak díky tomuto rostoucímu rozsahu našeho výběru získáme aritmetický průměr, který se začne blížit ke střední hodnotě pro libovolné, právě zkoumané rozdělení. Vše, co bylo dříve zmíněno, lze samozřejmě zformulovat matematicky. Právě tato matematická formule se nazývá zákon velkých čísel.

Pro ujasnění a lepší představení, o čem nám konkrétně zákon velkých čísel vypovídá, uvedu zde konkrétní příklad, který se týká házení klasickou herní kostkou. „Házíme šestistěnnou kostkou a zkoumáme, v kolika případech padne např. 6. V té to situaci budeme předpokládat, že hody jsou vzájemně nezávislé a pravděpodobnost toho, že padne nějaké číslo, je stejná pro všechna čísla na kostce. Za této situace bychom asi předpokládali, že šestka padne zhruba v jedné šestině případů. Samozřejmě bychom asi také řekli, že čím více hodů provedeme, tím více se bude podíl hodů, v nichž padla šestka, a všech hodů blížit jedné šestině.“ (Bejda, 2006, s. 5)

Jak Bejda (2006) uvádí ve své práci, tak předchozí příklad nás přivádí k jistému pojmu, a tím je slabý zákon velkých čísel. Konkrétnější popis uvedeme níže. Slabý zákon velkých čísel již byl zmíněn, zbývá ještě definovant silný zákon velkých čísel.

SLABÝ ZÁKON VELKÝCH ČÍSEL

Nechť máme posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$. Pokud existují střední hodnoty $E(X_n)$, říkáme, že pro posloupnost $\{X_n\}$ platí slabý zákon velkých čísel, pokud platí

$s_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ a

$s_n \xrightarrow{P} 0.$

Protože se jedná o jeden z důležitých pojmů, tak provedeme důkaz.

Důkaz: Důkaz je velmi jednoduchý, protože vyjdeme pouze z Čebyševovy nerovnosti. Než se začne provádět samotný důkaz, bylo by vhodné zmínit, že je důležité, aby kromě středních hodnot $\mathrm{E}(\mathrm{X_n})$ existovaly rozptyly $\mathrm{VAR}(\mathrm{X_n})$ a $\varepsilon > 0$. Z Čebyševovy nerovnosti získáme,

$$\mathrm{P}(|\mathrm{X_n} - \mathrm{E}(\mathrm{X_n})| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{VAR(X)}}{\mathrm{n} \cdot \varepsilon^2} .$$

Pokud nám jde n nade všechny meze, $\mathrm{n} \to +\infty$, vidíme, že jmenovatel na pravé straně nerovnosti se limitně blíží do nekonečna, takže celý zlom konverguje k 0. Tímto máme dokázanou platnost slabého zákona velkých čísel.

CHINČINOVA VĚTA

Chinčinova věta patří do kategorie vět, které nám říkají určité vlastnosti pro náhodné veličiny, díky kterým můžeme říci, že se též jedná o splnění podmínek, aby platil slabý zákon velkých čísel.

Znění samotné věty uvádím podle Anděla (2007, s. 330):

„Nechť X_1, X_2,… jsou nezávislé náhodné veličiny, které mají stejné rozdělení s konečnou střední hodnotou μ. Jestliže $\mathrm{n} \to +\infty$, pak $\mathrm{X_n} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu$..“ Samozřejmě tím $\mathrm{X_n}$ se myslí posloupnost náhodných veličin.

Na závěr můžeme zmínit i to, jak uvádí Kohout (*Přednášky)*, že u slabého zákonu velkých čísel nám nejde zcela úplně o limitní chování náhodných veličin, ale jedná se o limitní chování pravděpodobností v okolí některého bodu. Jinými slovy můžeme říci, že ve větách popisujících slabý zákon velkých čísel se jedná o konvergenci podle pravděpodobnosti. Samozřejmě existují věty, které se zabývají konvergencí skoro jistě. V takovýchto se však už mluví o silném zákonu velkých čísel.

SILNÝ ZÁKON VELKÝCH ČÍSEL

Nežli bude zde uvedena věta, která se týká silného zákonu velkých čísel, uvedeme zde ještě dvě věty, které budeme potřebovat, abychom mohli silný zákon velkých čísel dokázat.

První věta se nazývá Kroneckerovo lemma. Nechť $\{x_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, takových, že $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$ a zároveň $0 < b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \to +\infty$. Potom

$\frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot b_k \to 0$ když $n \to +\infty$.

Důkaz bude proveden podle Štěpána (1987, s. 258).

Prvně položme

$r_n = \sum_{n+1}^{+\infty} x_k$ pro $n \geq 0$.

Platí

$\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot (r_{k-1} - r_k) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot r_k - \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot r_k = \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) + b_1 \cdot r_0 - b_n \cdot r_n$

tj.

$|\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \cdot |r_k| + b_1 \cdot |r_0| + b_n \cdot |r_n|$.

A protože r_n konverguje k nule, jestliže n konverguje do nekonečna, pak existuje libovolné $\varepsilon > 0$. Pokud máme přirozené číslo N, tak platí, že $|r_n| \leq \varepsilon$ pokud $k \geq N$.

Položme $R = \max_{n \geq 0} |r_n|$, pak platí

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \cdot |r_k| \leq \sum_{k=1}^{N-1} (b_{k+1} - b_k) \cdot |r_k| + \varepsilon \cdot \sum_{N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \leq$$

$\leq R \cdot (b_N - b_1) + \varepsilon \cdot (b_n - b_N)$ pro $n > N - 1$.

Z nerovnosti $|\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \cdot |r_k| + b_1 \cdot |r_0| + b_n \cdot |r_n|$ pak vyplývá

$\overline{\lim}_n \left| \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k \right| \leq \varepsilon$.

Následující věta nám zajistí konvergenci řady skoro jistě. Samotnou větu i její důkaz uvedu podle Kohouta (*Přednášky*).

„Nechť X_n jsou nezávislé náhodné veličiny, takové, že $\sum_{i=1}^{+\infty} VAR(X_i) < +\infty$, potom řada $\sum_{i=1}^{+\infty} (X_i - E(X_i))$ konverguje skoro jistě.“

Důkaz: Při zavedení označení $S_j = \sum_{j=1}^{n}\left(X_j - E(X_j)\right)$ získáme pro $k \in N$ pomocí Kolmogorovi nerovnosti následující vztah.

$$P\left(\bigcup_{j=k}^{+\infty}\left[\left|S_k - S_j\right| > \varepsilon\right]\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left[\max_{k \le i \le n}|S_i - S_k| > \varepsilon\right] \le \lim_{n \to +\infty}\frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sum_{i=k}^{+\infty} VAR(X_i).$$

Z předchozího vztahu dostaneme $P\left(\bigcup_{j=k}^{+\infty}\left[\left|S_k - S_j\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$. Zde již Kohout (Přednášky) uvádí, že naše posloupnost je cauchyovská skoro jistě, takže z tohoto tvrzení vyplývá platnost věty.

Nyní už můžeme přejít k samotnému Kolmogorově silném zákonu velkých čísel.

Budiž $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s konečným rozptylem, $0 < b_n \uparrow +\infty$ jsou reálná čísla taková, že

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{VAR(X_n)}{b_n^2} < +\infty$, pak

$$\frac{1}{b_n} \cdot \sum_{n=1}^{n}\left(X_k - E(X_k)\right) \overset{s.j.}{\to} 0.$$

Důkaz: Pokud $\frac{X_n - E(X_n)}{b_n}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, o kterých díky vlastnostem rozptylu platí

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{X_n - E(X_n)}{b_n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{VAR(X_n)}{b_n^2} < +\infty.$$

Podle předchozí věty je $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{X_n - E(X_n)}{b_n}$ konvergentní skoro jistě, takže stačí ještě použít Kroneckerovo lémma, ve kterém substituujeme $x_n = \frac{X_n - E(X_n)}{b_n}$. Zjistíme, že hodnota posloupnosti bn bude nezměněna.

1.3 LIMITNÍ VĚTY

V této kapitole se budeme zabývat tématem limitních vět. Uvedeme zde některé věty, které byly vybrány, protože patří mezi nejznámější. U všech limitních vět uvedeme i jejich důkaz. Hlavním důvodem, proč se zavádějí limitní věty, je to, že udávají popis vlastností posloupností náhodných veličin X_n, když n konverguje do plus nekonečna. Nežli se pustíme do znění samotných vět, je dobré říci, že limitní věty lze zapisovat jak pomocí klasického popisu ($\lim_{n \to +\infty}$), tak pomocí konvergencí (např. $X_n \xrightarrow{D} X$).

1.3.1 CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA PRO STEJNĚ ROZDĚLENÉ NÁHODNÉ VELIČINY

Budiž $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením mající střední hodnotu $E(X_n) = \mu$ a rozptyl $VAR(X_n) = \sigma^2$. Dále platí označení $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Potom pro všechna $x \in R$ platí:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \Phi(x).$$

Důkaz: Ještě před samotným provedením důkazu je nezbytné uvést některé věty, které jsou k tomu potřebné.

Věta:

Nechť X je náhodná veličina a φ_i je její charakteristické funkce. Dále jsou reálná čísla a, b. Potom $Y = a \cdot X + b$ je náhodná veličina, která má charakteristickou funkci udávanou následujícím vztahem $\varphi_Y(t) = e^{itb} \cdot \varphi(a \cdot t)$.

Věta:

Buďte φ_i charakteristické funkce nezávislých náhodných veličin X_i, kde $i = 1, 2, \dots, n$. Nechť dále $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ má charakteristickou funkci φ, potom $\varphi(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{i\,(t)}$.

Věta:

Nechť X je náhodná veličina, $E(X) = 0$ a $VAR(X) = \sigma^2$, $\sigma^2 > 0$. Nechť dále je φ charakteristická funkce náhodné veličiny X. Potom označme $r(t) = \varphi(t) - 1 + \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}$.

(Kohout, *Přednášky*)

Nyní se přistoupí k samotnému důkazu. Budeme se opírat o vlastnosti charakteristických funkcí. Důkaz je proveden podle Kohouta (*Přednášky*), který na začátek označil náhodnou veličinu symbolem H_n, kde $H_n = \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}}$. Dále zmiňuje to, že pokud máme takto zavedené náhodné veličiny, tak to znamená, že střední hodnota bude rovna nule a rozptyl roven jedné. Cílem je, aby bylo ukázáno, že posloupnost charakteristických funkcí náhodných veličin H_n konverguje k charakteristické funkci normovaného normálního rozdělení. To znamená, pokud $\lim \varphi_{H_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, důkaz bude hotový. Následně se zavedla náhodná veličina G_n, kde $G_n = X_n - \mu$. Tato náhodná veličina má charakteristickou funkci φ_{G_n}. Samozřejmě se předpokládá, že náhodné veličiny X_n jsou nezávislé. Z předchozí věty vyplývá, že i náhodné veličiny G_n jsou nezávislé a zároveň platí, že mají i stejné rozdělení. Pomocí první a druhé věty uvedené na začátku důkazu lze zjistit, jakou má charakteristickou funkci náhodná veličina H_n.

$$\varphi_{H_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{G_n}\left(\frac{t}{\sigma \cdot \sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{G_1}\left(\frac{t}{\sigma \cdot \sqrt{n}}\right)\right)$$

Kohout (Přednášky) dále uvádí, že před výpočtem charakteristické funkce G_1 se ověří prvně předpoklady, že $E(G_1) = 0$ a $VAR(G_1) = \sigma^2$. Nyní pomocí třetí věty můžeme zapsat charakteristickou funkci φ_{G_1}.

$$\varphi_{G_1}\left(\frac{t}{\sigma \cdot \sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2 \cdot \sigma^2 \cdot n} + r \cdot \left(\frac{t}{\sigma \cdot \sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{-\frac{t^2}{2} + n \cdot \cdot r \cdot \left(\frac{t}{\sigma \cdot \sqrt{n}}\right)}{n}$$

Nyní použijeme hodnotu φ_{G_1} a dosadíme ji do předpisu pro φ_{H_n}, čímž získáme vztah

$$\varphi_{G_n}(t) = \left(1 + \frac{-\frac{t^2}{2} + n \cdot r \cdot \left(\frac{t}{\sigma \cdot \sqrt{n}}\right)}{n}\right)^n$$

Zdroj nadále uvádí, že limita výrazu $-\frac{t^2}{2} + n \cdot r \cdot \left(\frac{t}{\sigma \cdot \sqrt{n}}\right)$ pro pevné t je rovna $-\frac{t^2}{2}$. Za použití klasické limity $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^{\lim a_n}$, pokud předpokládáme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje.

V tomto okamžiku jsme se dostali na závěr důkazu. Máme tedy charakteristickou funkci φ_{H_n}, pro kterou platí $\varphi_{H_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Tímto se dokázalo, že posloupnost distribučních funkcí náhodných veličin H_n konverguje k distribuční funkci normovaného normálního rozdělení. Naše výsledná distribuční funkce Φ je spojitá ve všech reálných číslech, takže platí konvergence pro libovolná reálná čísla.

Můžeme ještě doplnit drobnou poznámku, a to že předchozí věta platí i pro binomické rozdělení. Stačí pouze, aby bylo znormováno $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

1.3.2 LINDERBERGOVA VĚTA

Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin nestejným rozdělením, která má střední hodnotu $E(X_n) = \mu$ a rozptyl $VAR\,(X_n) = \sigma^2$. Dále označme $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Potom Y_n, kde $Y_n = \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n}}$ platí, že pro n jdoucí do plus nekonečna, Y_n konverguje v distribuci k rozdělení $N\,(0, \sigma^2)$.

Důkaz: Opět na začátek důkazu musíme uvést větu o charakteristické funkci náhodné veličiny, protože je potřebná k důkazu.

Věta:

Existuje-li prvních n momentů $\mu_1', \dots, \mu_n'$ náhodné veličiny X a jsou-li tyto momenty konečné, pak její charakteristická funkce Ψ (t) má prvních n derivací a platí

$\Psi^{(k)}\,(0) = i^k \cdot \mu_k'$, k = 1, …, n.

Dále platí

$\Psi\,(t) = \sum_{k=0}^{n} \mu_k' \cdot \frac{(i \cdot t)^k}{k!} + o\,(t^n),\, t \to 0.$

(Anděl, 1978, str. 16)

Na začátek důkazu položme $H_k = X_k - \mu$, kde k = 1, 2, …

Náhodné veličiny H_k jsou nezávislé a všechny mají stejné rozdělení se střední hodnotou $E\,(H_k) = 0$, rozptylem $VAR\,(H_k) = \sigma^2$ a charakteristickou funkci $\Psi\,(t)$. Z věty plyne, že

$\Psi\,(t) = 1 - \sigma^2 \cdot \frac{t^2}{2} + o\,(t^2) = 1 - \sigma^2 \cdot \frac{t^2}{2} + R\,(t)$, kde

$\frac{R\,(t)}{t^2} \to 0$ jestliže $t \to 0$. Nyní se přichází k charakteristické funkci každé náhodné veličiny $\frac{H_k}{\sqrt{n}}$, která je

$E\left(i \cdot t \cdot \frac{H_k}{\sqrt{n}}\right) = E\left(i \cdot H_k \cdot \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \Psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \sigma^2 \cdot \frac{t^2}{2 \cdot n} + R\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$

Protože veličina $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{\sqrt{n}}$ má charakteristickou funkci $\Psi_n\,(t) = \left(1 - \sigma^2 \cdot \frac{t^2}{2 \cdot n} + R\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$

Protože pro všechna pevné t při n jdoucí do plus nekonečna platí

$n \cdot R\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = t^2 \cdot \frac{R\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{t^2}{n}} \rightarrow 0$ a protože

$\Psi_n(t) = \left(1 - \sigma^2 \cdot \frac{t^2}{2 \cdot n} + \frac{n \cdot R\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{n}\right)^n$, odtud získáme $\Psi_n(t) \rightarrow e^{-\sigma^2 \frac{t^2}{2}}$.

Tato charakteristická funkce $e^{-\sigma^2 \cdot \frac{t^2}{2}}$ je charakteristickou funkcí rozdělení $N(0, \sigma^2)$, takže bylo dokázáno tvrzení Linderbergovi věty.

Linderbergovu větu lze samozřejmě zobecnit i na mnohorozměrný případ. Jak to vypadá, nám řekne následující věta.

1.3.3 MNOHOROZMĚRNÁ CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA

Nežli bude věta vyslovena, je důležité si prvně říci něco o pojmech náhodný vektor a varianční matice, protože na nich je postaveno dané tvrzení.

Náhodný vektor:

Nechť {Ω, A, P} je pravděpodobnostní proctor, n – rozměrným náhodným vektorem

$X = (X_1, \dots, X_n)$ nazveme takové zobrazení $X : \Omega \rightarrow R_n$, pro něž pro libovolný prvek

$c = (c_1, \dots, c_n) \in R$ platí

$\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega;\ X_i(\omega) < c_i\} \in A.$

(Kohout, *Přednášky*)

Varianční matice:

Matici $VAR(X) = \left(cov\left(X_i, X_j\right)\right)$, kde i se nerovná j, která je typu $n \times n$, nazýváme varianční maticí vektoru X.

Ještě by bylo dobré zmínit, že $cov\left(X_i, X_j\right)$ je kovariance náhodných veličin X_i a X_j, která je definovaná vztahem $cov\left(X_i, X_j\right) = E\left(X_i, X_j\right) - E(X_i) \cdot E\left(X_j\right)$.

Nyní by mělo být uvedeno vše potřebné, takže bude uvedeno znění mnohorozměrné centrální limitní věty.

„Nechť X_1, X_2,… jsou nezávislé náhodné k – rozměrné vektory se stejným rozdělením, které má střední hodnotu $E(X_n) = \mu$ a varianční matici V (s konečnými prvky). Označme

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_n - \mu}{\sqrt{n}}$. Pak platí, že pro n jdoucí nade všechny meze konverguje S_n v distribuci k N_k (0, V).“

(Anděl, 1978, str. 185)

Důkaz: Na úvod bude uvedena věta potřebná k důkazu.

Věta:

„Budiž dána posloupnost distribučních funkcí $F_1(x)$, $F_2(x)$, … a jim odpovídající posloupnost charakteristických funkcí $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, …. K tomu, aby posloupnost $\{F_n(x)\}$ konvergovala k nějaké distribuční funkci F (x) ve všech bodech spojitosti této funkce, je nutné a stačí, aby posloupnost $\{\Psi_n (t)\}$ konvergovala v každém bodě k nějaké funkci $\Psi(t)$, která je spojitá v bodě $t = 0$. Je-li tato podmínka splněna, pak $\Psi(t)$ je charakteristická funkce odpovídající distribuční funkci F (x) a posloupnost $\{\Psi_n(t)\}$ konverguje k $\Psi(t)$ stejnoměrně v každém konečném intervalu.“ (Anděl, 1978, str. 17)

Nyní se přistupuje k samotnému důkazu.

Nechť v je pevně daný k – rozměrný vektor. Jsou dány náhodné veličiny $v \cdot X_n$, které mají střední hodnotu $E\,(v \cdot X_n) = v \cdot \mu$ a rozptyl $VAR\,(v \cdot X_n) = v \cdot V$, se stejným rozdělením a zároveň jsou nezávislé. Z Linderbergovi věty a předchozí věty vyplývá, že charakteristická funkce náhodné veličiny $v \cdot S_n$ konverguje k charakteristické funkci rozdělení $N\,(0, v \cdot V)$. Tento význam lze matematicky zapsat $E\left(e^{i \cdot t \cdot v \cdot S_n}\right) \to e^{-t^2 \cdot \frac{v \cdot S_n}{2}}$. Pokud substituujeme za $i \cdot t = x$, získáme

$E\left(e^{i \cdot x \cdot S_n}\right) \to e^{-x \cdot \frac{V}{2}}$. Z předchozího vztahu je vidět, že charakteristické funkce náhodných vektorů konvergují k charakteristické funkci rozdělení $N_k(0, V)$.

Nyní zde uvedeme dvě věty, které byly zformulovány pomocí binomického rozdělení.

1.3.4 LOKÁLNÍ MOIVRE – LAPLACEOVA VĚTA

Budiž $\{S_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin. Nechť tyto náhodné veličiny mají binomické rozdělení, které má parametry (n, p). Označíme si $x_{n,k} = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, kde $n \geq 1$ a

$k = 0, 1, \dots, n.$

Nechť $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n \cdot p \cdot q} \to +\infty$ a nechť je $|x_{n,k}| < A$, kde $0 < A < +\infty$. Potom

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{P\,(S=k)}{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n \cdot p \cdot q}} \cdot e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}}} = 1$$

stejnoměrně na kruhu se středem v počátku souřadnic a s poloměrem A.

(Kohout, *Přednášky*)

1.3.5 INTEGRÁLNÍ MOIVRE – LAPLACEOVA VĚTA

Budiž {S_n} je posloupnost nezávislých náhodných veličin. Nechť tyto náhodné veličiny mají binomické rozdělení, které má parametry (n, p). Nechť a $\leq$ b jsou reálná čísla, potom

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{r^2}{2}} dt = \Phi\,(b) = \Phi\,(a).$$

Důkaz: Kohout (*Přednášky*) uvádí, že jsou splněny předpoklady centrální limitní věty pro stejné náhodné veličiny, a z toho tedy vyplývá, že Integrální Moivre – Laplaceova věta je pravdivá.

Následující limitní věta řeší problémy rychlosti aproximace, pokud parametr p u binomického rozdělení se blíží buď k jedné anebo k nule.

1.3.6 POISSONOVA VĚTA

Nechť {S_n} je posloupnost nezávislých náhodných veličin s binomickým rozdělením s parametry n, pn. Nechť dále je $\lim_{n \to +\infty} E(S_n) = \lim_{n \to +\infty} n \cdot p = \lambda$, kde $\lambda > 0$. Potom pro $k \in N_0$ platí

$$\lim_{n \to +\infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-k}}{k\,!}.$$

Důkaz: Jak uvádí Kohout (*Přednášky*), tak z limity $\lim_{n \to +\infty} n \cdot p_n = \lambda$ získáme po asymptotickém zapsání takovouto hodnotu parametru pn, $p_n = \frac{\lambda}{n} + \alpha_n$, kde $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$.

Víme, že pro binomické rozdělení platí

$$P\,(S_n = k) = \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n\,!}{(n-k)\,! \cdot k!} \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k}.$$

Nežli se provede $\lim_{n \to +\infty}$ upraví se výrazy p_n^k a $(1 - p_n)^{n-k}$.

Získáme

$p_n^k = \left(\frac{\lambda}{n} + \alpha_n\right)^k = \frac{\lambda^k}{n^k} + \beta_n$, a $(1 - p_n)^{n-k} = \left(1 - \frac{\lambda}{n} - \alpha_n\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} + \gamma_n$.

Stejně tak jako funkce α_n, která jde limitně k nule, tak i funkce β_n a γ_n. Pokud přepíšeme výraz $P\ (S_n = k)$ pro binomické rozdělení tak dostáváme

$\left(\frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k}\right) \cdot \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \cdot \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right) + \delta_n.$

Teď se provedou jednotlivé limity jednotlivých závorek

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n\,!}{(n-k)\,!\, \cdot\, n^k} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda^k}{k\,!} = \frac{\lambda^k}{k\,!}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}$$

Pokud všechny tři výsledky mezi sebou vynásobíme, tak získáme požadovaný výsledek a vidíme, že platnost věty je potvrzená.

1.3.7 CRAMÉROVA – SLUCKÉHO VĚTA

Předtím než bude uvedena Cramérova – Sluckého věta je nezbytné, abychom zde uvedli dva pojmy z funkcionální analýzy.

Normovaný lineární prostor:

„Tento prostor X je lineární prostor nad tělesem skalárů K.

Nechť $\|\cdot\|$ je norma na X a $X \to R$ je funkce na X s těmito vlastnostmi:

$\|x\| \geq 0$ pro $\forall x \in X$, přičemž $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro $\forall\, \alpha \in K, \forall\, x \in X$,

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro $\forall\, x, y \in X$." (Došlý, 2012, s. 1)

Slabá konvergence:

„Nechť X je normovaný lineární prostor a $x_n \in X$. Řekneme, že posloupnost x_n konverguje slabě, jestliže $f(x_n) \to f(x)$ pro $\forall f \in X'$, kde X' je duální prostor[2]. Nechť $f_n \in X'$, řekneme, že tato posloupnost konverguje slabě k $f \in X'$, jestliže $f_n(x) \to f(x)$ pro $\forall x \in X$." (Došlý, 2012, s. 46)

Nyní přistupme ke znění samotné Cramérovo – Sluckého větě.

Nechť X_n je posloupnost náhodných veličin s příslušnými distribučními funkcemi F_n. Nechť F je distribuční funkce a c je konstanta. Nechť F_n konvergují slabě k F a nechť Y_n je taková posloupnost náhodných veličin, že $Y_n \overset{P}{\to} c$. Dále definujeme $R_n = X_n + Y_n$ a $S_n = X_n \cdot Y_n$ a $T_n = \frac{X_n}{Y_n}$. (Anděl, 2007, s. 333)

Nechť F_n^R, F_n^S, F_n^T jsou distribuční funkce veličin R_n, S_n, T_n. Pak $F_n^R(x)$ konverguje slabě k $F(x - c)$. Je-li $c > 0$, pak $F_n^S(x)$ konverguje slabě k $F\left(\frac{x}{c}\right)$ a $F_n^T(x)$ konverguje slabě k $F(c \cdot x)$.

Důkaz: Na začátek zmíníme větu, která je potřebná k důkazu.

Věta:

Nechť X_n jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením a s konečnou střední hodnotou $E(X_n) = \mu$. Jestliže n konverguje do plus nekonečna, pak X_n konverguje podle pravděpodobnosti k μ.

$\forall \varepsilon > 0:$

$$
\begin{aligned}
F_n^R = P(R_n < x) &= P(R_n < x, |Y_n - c| < \varepsilon) + P(R_n < x, |Y_n - c| \geq \varepsilon) \\
&< P(X_n + Y_n < x, c - \varepsilon < Y_n < c + \varepsilon) + P(|Y_n - c| \geq \varepsilon) \\
&\leq F_n(x - c + \varepsilon) + P(|Y_n - c| \geq \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Nyní pomocí věty získáme

[2] Více o duálním prostoru: DOŠLÝ, Ondřej. *Lineární funkcionální analýza* [online]. Brno, 2012 [cit. 2020-06-28]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1431/jaro2014/M6150/um/lfa-2013.pdf. Masarykova univerzita v Brně.

$F_n^R(x) = P(R_n < x) \geq P(R_n < x, |Y_n - c| < \varepsilon) = P(X_n + Y_n < x, c - \varepsilon < Y_n < c + \varepsilon) \geq P(X_n + c + \varepsilon < x, |Y_n - c| < \varepsilon) \geq F_n(x - c - \varepsilon) - P(|Y_n - c| \geq \varepsilon)$.

Jak uvádí Anděl (1978, s. 187), tak bod $x - c$ je bod spojitosti F, takže body $x - c + \varepsilon$ a $x - c - \varepsilon$ jsou též body spojitosti F a platí

$$F(x - c - \varepsilon) \leq \lim_{n \to +\infty} \inf F_n^R(x) \leq \lim_{n \to +\infty} \sup F_n^R(x) \leq F(x - c + \varepsilon).$$

Jelikož existuje bodu spojitosti spočetně mnoho, tak můžeme zvolit ε dostatečně malé. To znamená, že díky této spojitosti v bodě $x - c$ vyplývá, že $\lim_{n \to +\infty} F_n^R(x)$ existuje a je rovna $F(x - c)$. Tímto je dokázaná část věty. Zbytek důkazu nebudu uvádět, protože se dělá obdobně.

2 PRAKTICKÁ ČÁST

V této kapitole bude vybráno pár příkladů, ve kterých se kvůli dosažení výsledku využijí limitní věty. Každý příklad bude vypočítán standardním postupem. Na závěr bude také ten stejný příklad simulován v jazyku R, aby se ověřila správnost výsledků.

2.1 PŘÍKLAD 1

Počet tiskových chyb na straně textu je náhodná veličina se střední hodnotou $\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = 8$ a rozptylem $\mathrm{VAR}(\mathrm{X}) = 4$. Jaká je pravděpodobnost, že počet chyb na 100 stránkách nepřekročí hodnotu 750? Předpokládá se, že počty chyb na jednotlivých stránkách jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny.

2.1.1 ŘEŠENÍ

Naše náhodná veličina X nám udává počet chyb na jedné stránce textu. Víme ze zadání, že střední hodnota $\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = \mu = 8$ a rozptyl $\mathrm{VAR}\,(\mathrm{X}) = \sigma^2 = 4$. Dále nám bylo řečeno, že se má vypočítat pravděpodobnost na 100 stánkách. To však znamená, že máme zadáno n, kde $n = 100$. Takže nepočítáme pravděpodobnost naší náhodné veličiny X, ale náhodné veličiny Y, pro kterou platí $\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Jak již bylo napsáno výše kolik je n, proto můžeme dosadit do naší náhodné veličiny $\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{100} \mathrm{X}_i$. Než se pustíme do samotného výpočtu, tak se musí zjistit střední hodnota $\mathrm{E}\,(\mathrm{Y})$ a rozptyl $\mathrm{VAR}\,(\mathrm{Y})$. Na výpočet střední hodnoty použijeme vzorec $\mathrm{E}\,(\mathrm{Y}) = n \cdot \mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = n \cdot \mu$ a na výpočet rozptylu $\mathrm{VAR}\,(\mathrm{Y}) = n \cdot \mathrm{VAR}\,(\mathrm{X}) = n \cdot \sigma^2$. Po dosazení získáváme

$\mathrm{E}\,(\mathrm{Y}) = 100 \cdot 8 = 800$

$\mathrm{VAR}\,(\mathrm{Y}) = 100 \cdot 4 = 400.$

Máme-li zjistit, danou pravděpodobnost, tak na výpočet použijeme Centrální limitní větu:

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{Y} < 750) = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{Y} - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} < \frac{750 - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{U} < \frac{750 - 800}{\sqrt{400}}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(\mathrm{U} < \frac{-50}{20}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\,(\mathrm{U} < -2{,}5) = \Phi\,(-2{,}5) = 1 - \Phi\,(2{,}5) = 1 - 0{,}99379 = 0{,}00621 = 0{,}621\ \%.$$

Pomocí tohoto vztahu $\frac{\mathrm{Y} - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}}$ jsme naší náhodnou veličinu znormovali, a tím jí převedli na náhodnou veličinu U, která měla normální normované rozdělení, takže jsme naši pravděpodobnost mohli vypočítat jako hodnotu distribuční funkce N (0, 1). Mohli jsme ji rovnou vypočítat jako hodnotu v $\Phi\ (-\ 2{,}5)$, ale dle obecných pravidel jsme si mohli dovolit to převést na $1-\ \Phi\ (2{,}5)$. Po dosazení jsme zjistili, že hledaná pravděpodobnost vyšla 0,00621 neboli po vynásobení stem 0,621 %.

2.1.2 V JAZYKU R

Střední hodnota = mean = 800

Směrodatná odchylka = sd = 20

Počet chyb = 750

print (pnorm (750, mean = 800, sd = 20, log.p = FALSE))

Výsledek = 0,006209665.

Z programu R je vidět, že pokud bychom výsledek zaokrouhlili na pět desetinných míst, tak bychom dostali stejnou hodnotu jako z klasického výpočtu.

2.2 PŘÍKLAD 2

Pravděpodobnost, že zakoupený elektrospotřebič bude vyžadovat opravu během záruční doby, je rovna 0,2. Jaká je pravděpodobnost, že během záruční doby bude nutné ze 400 prodaných spotřebičů opravit více než 96?

2.2.1 ŘEŠENÍ

Máme náhodnou veličinu Xn, která nám udává počet oprav, které jsou nutné, pokud se prodá 400 kusů. Podle tohoto zadání můžeme říci, že tato náhodná veličina je dána binomickým rozdělením Bi (n, p), kde n nám udává počet a p pravděpodobnost jednoho „úspěchu“ neboli pravděpodobnost potřebné opravy u jednoho spotřebiče. Čili ze zadání je nyní jasné, že je dáno binomické rozdělení, kde $\mathrm{n}=400$ a $\mathrm{p}=0{,}2$. Prvně si určíme střední hodnotu $\mathrm{E}\ (\mathrm{X_n})$ a rozptyl $\mathrm{VAR}\ (\mathrm{X_n})$. Pro binomické rozdělení platí následující dva vztahy, ze kterých vypočítáme konkrétní hodnoty:

$\mathrm{E}\ (\mathrm{X_n})=\mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}=400\ \cdot 0{,}2=80$ (číslo)

$\mathrm{VAR}\ (\mathrm{X_n})=\mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}\ \cdot\ (1-\mathrm{p})=400\ \cdot 0{,}2\ \cdot\ (1-0{,}2)=400\ \cdot 0{,}2\ \cdot 0{,}8=64.$ (číslo)

Na výpočet hledané pravděpodobnosti využijeme Integrální Moivre-Laplaceovu větu:

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{X_n} > 96) = 1 - \mathrm{P}\,(\mathrm{X_n} \le 96) = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X_n} - \mathrm{n} \cdot \mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n} \cdot \mathrm{p} \cdot (1-\mathrm{p})}} \le \frac{96 - \mathrm{n} \cdot \mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n} \cdot \mathrm{p} \cdot (1-\mathrm{p})}}\right) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{U} \le \frac{96-80}{\sqrt{64}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{U} \le \frac{16}{8}\right) = 1 - \mathrm{P}\,(\mathrm{U} \le 2) = 1 - \Phi\,(2) =$$

$$= 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275.$$

Abychom mohli vypočítat pravděpodobnost, museli jsme použít obecně platný předpis, který nám říká $\mathrm{P}\,(\mathrm{X} > c) = 1 - \mathrm{P}\,(\mathrm{X} < c)$. Dále jsme pomocí vztahu $\frac{\mathrm{X_n} - \mathrm{n} \cdot \mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n} \cdot \mathrm{p} \cdot (1-\mathrm{p})}}$ znormovali naši náhodnou veličinu Xn na náhodnou veličinu U, která měla normované normální rozdělení, a tak jsme mohli zjistit pravděpodobnost jako hodnotu distribuční funkce $\Phi\,(2)$, kterou jsme odečetli od 1. Výsledek vyšel 0,02275 neboli 2,275 %.

2.2.2 V JAZYKU R

Počet spotřebičů = size = 400

Pravděpodobnost poruchy = prob = 0,2

print(pbinom(400, size=400, prob=0.2) - pbinom(96, size=400, prob=0.2))

Výsledek = 0,02138855

Je zřejmé, že se výsledky liší. Je to způsobeno tím, že program R nám udává výsledky přesné. Jakmile použijeme normování při klasickém výpočtu, dopouštíme se jisté aproximace, a proto jsme získali dva rozdílné výsledky.

2.3 PŘÍKLAD 3

Je-li dána pravděpodobnost 0,3 pro úspěch při náhodném pokusu, s jakou pravděpodobností můžeme říci, že ve 100 pokusech bude počet úspěchů ležet v intervalu od 20 do 40?

2.3.1 ŘEŠENÍ

Je daná náhodná veličina Xn, která udává počet úspěchů s určitou pravděpodobností. Jedná se o náhodnou veličinu s binomickým rozdělením Bi (n, p). Ze zadání je zřejmé, že n nám udává počet pokusů, takže $\mathrm{n} = 100$, a p je pravděpodobnost úspěchu, takže $\mathrm{p} = 0{,}3$. Jako v předchozích dvou příkladech si prvně určíme střední hodnotu $\mathrm{E}\,(\mathrm{X_n})$ a rozptyl $\mathrm{VAR}\,(\mathrm{X_n})$. Protože se jedná o stejné rozdělení, proto použijeme stejné vzorce a to (číslo) a (číslo), takže dostaneme

$\mathrm{E}\,(\mathrm{X_n}) = 100\ \cdot 0{,}3 = 30$

$\mathrm{VAR}\,(\mathrm{X_n}) = 100\ \cdot 0{,}3\ \cdot 0{,}7 = 21.$

Jako v předchozí úloze aplikujeme Integrální Moivre-Laplaceovu větu:

$$\mathrm{P}\,(20\ \le\ \mathrm{X_n}\ \le 40)\ \mathrm{P} = \left(\frac{20 - \mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}\ \cdot\ (1 - \mathrm{p})}} \le \frac{\mathrm{X_n} - \mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}\ \cdot\ (1 - \mathrm{p})}} \le \frac{40 - \mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}\ \cdot\ (1 - \mathrm{p})}}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{20 - 30}{\sqrt{21}} \le \mathrm{U} \le \frac{40 - 30}{\sqrt{21}}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{-10}{\sqrt{21}} \le \mathrm{U} \le \frac{10}{\sqrt{21}}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\mathrm{U} \le \frac{10}{\sqrt{21}}\right) - \mathrm{P}\left(\mathrm{U} \le \frac{-10}{\sqrt{21}}\right) = \mathrm{P}\,(\mathrm{U}\ \le 2{,}18218) - \mathrm{P}\,(\mathrm{U}\ \le\ -2{,}18218) =$$

$$= \Phi\,(2{,}18218) - \Phi\,(-\ 2{,}18218) = \Phi\,(2{,}18218) - \big(1 - \Phi\,(2{,}18218)\big) =$$

$$= \Phi\,(2{,}18218) + \Phi\,(2{,}18218) - 1 = 2\ \cdot\ \Phi\,(2{,}18218) - 1 = 2\ \cdot 0{,}9861 - 1 =$$

$= 1{,}9722 - 1 = 0{,}9722 = 97{,}22\ \%.$

Podle prvního zápisu je vidět, že jsme hledali pravděpodobnost mezi 20 a 40. Dále jsme to jako v předchozích příkladech znormovali, abychom získali náhodnou veličinu U s normovaným normálním rozdělením. Následující postup byl takový, že dle obecně platných pravidel můžeme psát

$\mathrm{P}\,(\mathrm{c}\ \le \mathrm{X}\ \le \mathrm{k}) = \mathrm{P}\,(\mathrm{X}\ \le \mathrm{k}) - \mathrm{P}\,(\mathrm{X}\ \le \mathrm{c})$. Nyní jsme mohli opět dosadit konkrétní hodnoty distribuční funkce, a pak udělat jejich rozdíl. Ještě se udělala úprava jako již dříve, a to, že záporná hodnota byla nahrazená za kladnou hodnotu, kterou jsme odečetli od jedné. Výsledná pravděpodobnost nám tedy vyšla 0,9722 čili 97,22 %.

2.3.2 V JAZYKU R

Počet pokusů = size = 100

Pravděpodobnost úspěchu = prob = 0,3

print(pbinom(40, size=100, prob=0.3) - pbinom(19, size=100, prob=0.3))

Výsledek = 0,9786144

Rozdílnost výsledku je odůvodněna stejně jako v příkladu 2.

2.4 PŘÍKLAD 4

Dvě dívky, Hana a Klára, píší závěrečný test. Test obsahuje 50 otázek. Na každou otázku jsou na výběr dvě možnosti, buď ano, nebo ne. Hana se učila na test a zná správnou odpověď na každou otázku s pravděpodobností 0,75. Klára se neučila a její odpovědi jsou čistě náhodný tip. S jakou pravděpodobností zvládnou obě dívky test, pokud na úspěšné absolvování je třeba získat alespoň 60 % správných odpovědí?

2.4.1 ŘEŠENÍ

Náhodná veličina Xn, která udává počet správných odpovědí v testu má binomické rozdělení. V zadání je udáno 50 otázek, což je naše n. Pravděpodobnosti p jsou pro každou dívku různé. Nyní se začne vypočítávat pravděpodobnost pro každou dívku zvlášť.

Hana: U Hany je náhodná veličina Xn daná binomickým rozdělením Bi (50, 0,75). Takováto náhodná veličina má střední hodnotu

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X_n}) = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p} = 50 \cdot 0{,}75 = 37{,}5$$

a rozptyl

$$\mathrm{VAR}\,(\mathrm{X_n}) = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p} \cdot (1-\mathrm{p}) = 50 \cdot 0{,}75 \cdot (1-0{,}75) = 9{,}375.$$

Na výpočet pravděpodobnosti aplikujeme Integrální Moivre-Laplaceovu větu:

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{X_n} \geq 30) = 1 - \mathrm{P}\,(\mathrm{X_n} \leq 30) = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X_n} - \mathrm{n} \cdot \mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n} \cdot \mathrm{p} \cdot (1-\mathrm{p})}} \leq \frac{30 - \mathrm{n} \cdot \mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n} \cdot \mathrm{p} \cdot (1-\mathrm{p})}}\right) = 1 -$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{U} \leq \frac{30-37{,}5}{\sqrt{9{,}375}}\right) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{U} \leq -\sqrt{6}\right) = 1 - \mathrm{P}\,(\mathrm{U} \leq -2{,}449) = 1 - \Phi\,(-\,2{,}449)$$

$$= 1 - \left(1 - \Phi\,(2{,}449)\right) =$$

$$= 1 - 1 + \Phi\,(2{,}449) = 0{,}99286 = 99{,}286\,\%.$$

Hledali jsme pravděpodobnost, kdy bude náhodná veličina větší než 30, protože 30 je 60 % z 50. Abychom mohli pokračovat dál, tak jsme museli pravděpodobnost odečíst od 1, protože umíme hledat pouze, pokud je náhodná veličina menší. Pak jsme pokračovali již známým postupem normování, kdy jsme převedli veličinu Xn na veličinu U, která má normované normální rozdělení. Po několika úpravách jsme se dostali k hodnotě distribuční funkce v bodě 2,449. V tabulce jsme našli náš výsledek 0,99286 neboli 99,286 %.

Nyní se zaměříme na výpočet pravděpodobnosti u Kláry.

Klára: Kláry náhodnou veličinu si označíme jako Yn, protože má jinou pravděpodobnost úspěchu. Jedná se také o binomické rozdělení, kde Bi (50, 0,5). Střední hodnotu a rozptyl vypočteme stejným způsobem jako výše.

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{Y_n}) = \mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p} = 50\ \cdot 0{,}5 = 25$$

$$\mathrm{VAR}\,(\mathrm{Y_n}) = \mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}\ \cdot\ (1-\mathrm{p}) = 50\ \cdot 0{,}5\ \cdot\ (1-0{,}5) = 12{,}5$$

Použijeme taktéž Integrální Moivre-Laplaceovu větu:

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{Y_n}\ \geq 30) = 1-\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{Y_n} - \mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}\ \cdot\ (1-\mathrm{p})}} \leq \frac{30-\mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n}\ \cdot \mathrm{p}\ \cdot\ (1-\mathrm{p})}}\right)$$

$$= 1-\mathrm{P}\left(\mathrm{V}\ \leq \frac{30-25}{\sqrt{12{,}5}}\right) =$$

$$= 1-\mathrm{P}\left(\mathrm{V}\ \leq\ \sqrt{2}\right) = 1-\mathrm{P}\,(\mathrm{V}\ \leq 1{,}414) = 1-\ \Phi\,(1{,}414) = 1-0{,}91924 = 0{,}08076$$
$$=$$

$$= 8{,}076\ \%.$$

Postup byl zcela analogický, akorát po znormování byla označena náhodná veličina jako V, aby nedošlo k záměně s veličinou z předchozího výpočtu. Na závěr je vidět, i přestože p obou dívek nebyly až tolik rozdílné, tak výsledky úspěchu ano.

2.4.2 V JAZYKU R: HANA

Počet otázek = size = 50

Pravděpodobnost správné odpovědi = prob = 0,75

print(pbinom(50, size=50, prob=0.75) - pbinom(29, size=50, prob=0.75))

Výsledek = 0,9937371

2.4.3 V JAZYKU R: KLÁRA

Počet otázek = size = 50

Pravděpodobnost správné odpovědi = prob = 0,5

print(pbinom(50, size=50, prob=0.5) - pbinom(29, size=50, prob=0.5))

Výsledek = 0,1013194

Zdůvodnění rozdílnosti výsledků je stále stejné.

2.5 PŘÍKLAD 5

Počítejme s tím, že pojišťovna má 10000 klientů, kteří jsou zhruba ve stejném věku. V této skupině je pravděpodobnost toho, že klient zemře v průběhu daného roku, je rovná 0,008. Každý takový klient zaplatí 12000 Kč na začátku roku. Pokud nastane úmrtí klienta, tak příbuzní dostanou 500 000 Kč. Jaká je pravděpodobnost, že společnost bude mít zisk větší než 70 000 000 Kč, ale nepřekročí 90 000 000 Kč.

2.5.1 ŘEŠENÍ

Zamyslíme-li se nad danou situací, tak si uvědomíme, že náhodná veličina X udává počet všech klientů, kteří zemřou. V tu chvíli máme nějaký počet n klientů. Nyní je jasné, že náhodná veličina Xn je dána binomickým rozdělením. Viz výše, n je počet klientů a p je pravděpodobnost úmrtí, takže veličinu Xn můžeme zapsat Bi (10000, 0,008). Jako již v předchozích příkladech si vypočteme prvně střední hodnotu $\mathrm{E}\,(\mathrm{X_n})$ a rozptyl $\mathrm{VAR}\,(\mathrm{X_n})$.

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X_n}) = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p} = 10000 \cdot 0{,}008 = 80$$

$$\mathrm{VAR}\,(\mathrm{X_n}) = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p} \cdot (1-\mathrm{p}) = 10000 \cdot 0{,}008 \cdot (1-0{,}008) = 79{,}36$$

Nyní si ale musíme uvědomit, že hledáme pravděpodobnost zisku společnosti, a ten je dán náhodnou veličinou Yn, pro kterou platí:

$$\mathrm{Y_n} = \text{příjmy} - \text{výdaje} = 10000 \cdot 12000 - 500000 \cdot \mathrm{X_n}.$$

Můžeme přejít k samotnému výpočtu, na který aplikujeme Integrální Moivre- Laplaceovu větu:

$$\mathrm{P}\,(7 \cdot 10^7 < \mathrm{Y_n} < 9 \cdot 10^7) = \mathrm{P}\,(\mathrm{Y_n} < 9 \cdot 10^7) - \mathrm{P}\,(\mathrm{Y_n} < 7 \cdot 10^7) =$$

$$\mathrm{P}\,(12 \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^5 \cdot \mathrm{X_n} < 9 \cdot 10^7) - \mathrm{P}\,(12 \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^5 \cdot \mathrm{X_n} < 7 \cdot 10^7) =$$

$$= \mathrm{P}\left(-\mathrm{X_n} < \frac{9 \cdot 10^7 - 12 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^5}\right) - \mathrm{P}\left(-\mathrm{X_n} < \frac{7 \cdot 10^7 - 12 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^5}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\,(-\mathrm{X_n} < -60) - \mathrm{P}\,(-\mathrm{X_n} < -100) = \mathrm{P}\,(\mathrm{X_n} \geq 60) - \mathrm{P}\,(\mathrm{X_n} \geq 100) =$$

$$1 - \mathrm{P}\,(\mathrm{X_n} < 60) - [1 - \mathrm{P}\,(\mathrm{X_n} < 100)] = 1 - \mathrm{P}\,(\mathrm{X_n} < 60) - 1 + \mathrm{P}\,(\mathrm{X_n} < 100) =$$

$$P\left(\frac{X_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} < \frac{100 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) - P\left(\frac{X_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} < \frac{60 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) =$$

$$P\left(U < \frac{100-80}{\sqrt{79{,}36}}\right) - P\left(U < \frac{60-80}{\sqrt{79{,}36}}\right) = P\,(U < 2{,}25) - P\,(U < -2{,}25) =$$

$$\Phi\,(2{,}25) - \Phi\,(-2{,}25) = \Phi\,(2{,}25) - [1 - \Phi\,(2{,}25)] = \Phi\,(2{,}25) + \Phi\,(2{,}25) - 1 =$$

$$= 0{,}98778 + 0{,}98778 - 1 = 0{,}97556 = 97{,}556\,\%$$

Při výpočtu jsme si nahradili veličinu Yn za Xn. Dále se jen upravovalo, aby na jedné straně byla jen veličina Xn a na druhé straně konstanta. Pak se znormovalo a získali jsme veličinu U, která měla normální normované rozdělení, takže jsme dosadili pravděpodobnosti z tabulek a vyšlo nám, že hledaná pravděpodobnost je 0,97556 neboli 97,556 %.

2.5.2 V JAZYKU R

Počet klientů = size = 10000

Pravděpodobnost úmrtí = prob = 0,008

print(pbinom(100, size=10000, prob=0.008) - pbinom(60, size=10000, prob=0.008))

Výsledek = 0,9754883

I v tomto případě je na vině rozdílnosti výsledku aproximace.

ZÁVĚR

Cílem mé bakalářské práce bylo popsání a představení limitních vět, jejich důkazů a historie za pomoci odborné literatury. V první, teoretické části byla zmapována část historie teorie pravděpodobnosti. Byly uvedeny životopisy známých a důležitých matematiků. Dalším krokem bylo přiblížení historického vývoje centrální limitní věty. Zmíněn nebyl pouze objevitel Laplace, ale i další, kteří se zasloužili o rozvoj, jako například Cauchy, Linderberg a jiní. Přínosem této části bylo také definování základních, repektive důležitých pojmů z teorie pravděpodobnosti potřebných pro práci s hlavním obsahem této práce. Na tyto poznatky bylo navázáno kapitolou limitních vět, ve které jsem vypsal několik základních vět včetně příslušných důkazů. Navíc jsem pro zajímavost textu zmínil Cramér – Sluckyho větu, ke které jsou potřebné již poznatky z funkcionální analýzy.

V závěru práce jsem se zabýval praktickým užitím limitních vět. Do této praktické části jsem vybral pět příkladů na názorné užití limitních vět. Výsledky měly být vypočtené nejen pomocí limitních vět, ale i ve specializovaném programu. Proto jsem si zvolil programovací jazyk R. Práce s tímto programem byla poměrně jednoduchá. Výsledky vypočtené klasickým způsobem se lišily oproti výsledkům z programu R, což bylo způsobeno tím, že program pracuje s přesnějšími aproximacemi.

RESUMÉ

Cílem této bakalářské práce je přiblížit problematiku limitních vět. V historické části je popsána biografie významných osobností a vývoj centrální limitní věty. Dále jsou uvedeny pojmy důležité pro následnou práci s limitními větami. U limitních vět jsou vypsány i příslušné důkazy. V druhé části práce je potom názorně ukázáno praktické využití limitních vět pro výpočet příkladů pravděpodobnosti. A řešení jsou porovnána s výsledku ze specializovaného programu R.

Klíčová slova: Pravděpodobnost, statistika, limitní věty, centrální limitní věta, Abraham de Moivre, Pierre Simon de Laplace, důkaz, Cramérova – Sluckého věta

The aim of this undergraduate thesis is to introduce the subject of the limit theorems. In its historical part the biography of significant personalities and the developement of the central limit theorem is introduced. Then the terms important for following work with the limit theorems are written and defined. There are also relevant proofs for each limit theorem. The illustrative demonstration of practical use of limit theorems is included in the next part of this thesis. It is demonstrated by calculation of probability examples. The results of those calculations are then contrasted with the results obtained from the specialized program R.

Key words: Probability, statistics, limit theorems, central limit theorem, Abraham de Moivre, Pierre Simon de Laplace, proof, Cramer – Slucky theorem

SEZNAM LITERATURY

ANDĚL, Jiří. *Matematická statistika*. Praha: SNTL, 1978. ISBN 04-017-78.

ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky*. 2., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 978-80-7378-001-2.

BUDÍKOVÁ, Marie. *Statistika a pravděpodobnost* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2016 [cit. 2020-06-28]. ISBN 978-80-210-8206-9. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/ps15/statistika/web/index.html

Časopis pro pěstování matematiky [online]. 78. 1953 [cit. 2020-06-28]. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/117069

DOŠLÝ, Ondřej. *Lineární funkcionální analýza* [online]. Brno, 2012 [cit. 2020-06-28]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1431/jaro2014/M6150/um/lfa-2013.pdf. Masarykova univerzita v Brně.

KOHOUT, Václav. *Přednášky* [online]. [cit. 2020-06-28]. Dostupné z: https://www.kohout.zcu.cz/KOHOUT/info_soubory/zimnisemestr/pravdtyd.htm

KOUTNÝ, František. *Pierre Simon de LAPLACE* [online]. Zlín [cit. 2020-06-28]. Dostupné z: https://www.zas.cz/prednasky/prednaska_koutny_laplace.pdf?fbclid=IwAR0nwN9vGnpWl2puVwXTBvM0oenc322pgUUUSz0c-zR1xhShSfMUTleAruw. Přednáška.

METHER, Max. *The history of the central limit theorem* [online]. 2003 [cit. 2020-06-28]. Dostupné z: https://pdfs.semanticscholar.org/b7c3/8a5e266e4ad5538a07b681115a1cab801fb3.pdf?_ga=2.134918129.102508106.1593367763-1452373437.1593367763

NAGY, Ivan. *Pravděpodobnost a matematická statistika: cvičení*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 80-01-02454-7.

O'CONNOR, J. J. a E. F. ROBERTSON. *Abraham de Moivre. MacTutor* [online]. 2004 [cit. 2020-06-28]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Moivre/?fbclid=IwAR38G2Tf-srEbzc9f8uBPyPNzdm7MB9QOIxXH0BSM5siLzvOaCUKC7RkYZc

ŠTĚPÁN, Josef. *Teorie pravděpodobnosti: Matematické základy*. Praha: Academia, 1987. ISBN 21-100-86.

SEZNAM OBRÁZKŮ