

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Katedra mechaniky

# **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Plzeň, 2020

Martin Hrabačka



Fakulta aplikovaných věd

Katedra mechaniky

# **Modelování a řízení jízdních manévrů silničního vozidla**

Bakalářská práce

Autor práce: Martin Hrabačka  
Vedoucí práce: Ing. Radek Bulín, Ph.D.

Plzeň, 2020

# ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd  
Akademický rok: 2019/2020

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE (projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Martin HRABAČKA**  
Osobní číslo: **A17B0600P**  
Studijní program: **B3947 Počítačové modelování v technice**  
Studijní obor: **Počítačové modelování**  
Téma práce: **Modelování a řízení jízdních manévrů silničního vozidla**  
Zadávací katedra: **Katedra mechaniky**

### Zásady pro vypracování

1. Seznámení se s konstrukčními prvky vozidel s ohledem na jejich možný vliv na jízdní manévry.
2. Přehled přístupů pro modelování dynamiky vozidel a jejich řízení.
3. Vytvoření výpočtového modelu konkrétního vozidla a implementace vhodného algoritmu řízení.
4. Simulace jízdních manévrů a parametrické analýzy.

Rozsah bakalářské práce: **20 – 40 stran A4 včetně příloh**  
Rozsah grafických prací:  
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

1. SLAVÍK, Jaromír, Vladimír STEJSKAL a Vladimír ZEMAN. Základy dynamiky strojů. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01622-6.
2. BLUNDELL, Mike a Damian HARTY. The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics. Elsevier, Oxford, 2004. ISBN 0-7680-1496-4.
3. VLK, František. Dynamika motorových vozidel. Nakladatelství a vydavatelství VLK, Brno, 2000. ISBN 80-238-5273-6.
4. RAJAMANI, Rajesh. Vehicle Dynamics and Control. Springer, Boston, MA, 2006. ISBN 978-1-4614-1432-2

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Radek Bulín, Ph.D.**  
Nové technologie pro informační společnost

Konzultant bakalářské práce: **Doc. Ing. Michal Hajžman, Ph.D.**  
Katedra mechaniky

Datum zadání bakalářské práce: **1. října 2019**  
Termín odevzdání bakalářské práce: **29. května 2020**

*Radová*

**Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová**  
děkanka



*Jan Vimmer*

**Doc. Ing. Jan Vimmer, Ph.D.**  
vedoucí katedry

# Prohlášení

Předkládám k posouzení tuto bakalářskou práci. Prohlašuji, že jsem ji zpracoval samostatně a využil jen uvedených pramenů a literatury.

V Plzni, 30. června 2020

Martin Hrabačka

# Poděkování

Rád bych poděkoval Ing. Radku Bulínovi, Ph.D., za příkladné vedení bakalářské práce, odborné konzultace, připomínky, ochotu a trpělivost. Také děkuji týmu *UWB Racing Pilsen* a Ing. Janu Rendlovi za poskytnutá data týkající se studentské formule *UWB04*.

Martin Hračka

# Abstrakt

## Modelování a řízení jízdních manévrů silničního vozidla

Tato bakalářská práce se zabývá vývojem matematického modelu silničního vozidla, které je schopné rovinných jízdních manévrů. Jsou představeny tři různé matematické modely, dva z nich slouží k nastínění možných přístupů k modelování silničního vozidla. Nejkomplexnější model je dále rozšířen o algoritmy automatického řízení natočení volantu a řízení pohonu a brzdění. Výsledný matematický model je implementován v programovém prostředí MATLAB a nastaven dle parametrů a technické dokumentace studentské formule *UWB04* týmu *UWB Racing Pilsen*. Následně je počítačový model otestován na virtuálním závodním okruhu a je provedena analýza výsledků s parametrickými studiemi. Vybrané výsledky jsou porovnány s daty získanými během reálné jízdy studentské formule po závodním okruhu.

**Klíčová slova:** dynamika, počítačové modelování, rovinný model silničního vozidla, Formule Student, řízení natočení volantu, řízení pohonu a brzdění

# Abstract

## Modelling and control of road vehicle driving maneuvers

This bachelor thesis deals with the development of a mathematical model of a road vehicle that is capable of planar driving maneuvers. Three different mathematical models are presented, two of which show other possible approaches to road vehicle modelling. The most complex model is extended by automatic steering wheel control and automatic drive and braking control algorithms. The resulting mathematical model is implemented in the MATLAB computing environment and set according to the parameters and technical documentation of the student formula *UWB04* of the *UWB Racing Team Pilsen*. Subsequently, the computer model is tested on a virtual racing circuit, results are analyzed and parametric studies are performed. Selected results are compared with data obtained from real student formula race circuit driving.

**Key words:** dynamics, computer modelling, planar model of road vehicle, Formula SAE, steering wheel control, drive and braking control

# Obsah

Zadání

Prohlášení

Poděkování

Abstrakt

Obsah

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Úvod</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1. Cíle práce . . . . .   | 2         |
| <b>2. Matematický model vozidla</b>                                       | <b>3</b>  |
| 2.1. Modelování kontaktu pneumatiky s vozovkou . . . . .                  | 3         |
| 2.1.1. Boční vodící síla, vratný moment a směrová úchylnka kola . . . . . | 4         |
| 2.1.2. Průběh hnací síly a boční vodící síly . . . . .                    | 5         |
| 2.1.3. Dugoffův model pneumatiky . . . . .                                | 6         |
| 2.2. Přehled rovinných modelů . . . . .                                   | 11        |
| 2.2.1. Jednostopý kinematický model . . . . .                             | 11        |
| 2.2.2. Jednostopý dynamický model se třemi stupni volnosti . . . . .      | 14        |
| 2.2.3. Dvoustopý dynamický model se sedmi stupni volnosti . . . . .       | 17        |
| 2.3. Mechanismus směrového řízení . . . . .                               | 22        |
| 2.3.1. Ackermannova podmínka . . . . .                                    | 23        |
| 2.3.2. Čtyřkloubový mechanismus . . . . .                                 | 24        |
| 2.3.3. Volba parametrů čtyřkloubového mechanismu . . . . .                | 25        |
| 2.4. Pohon vozidla . . . . .  | 27        |
| 2.4.1. Charakteristika spalovacího motoru . . . . .                       | 27        |
| 2.4.2. Převody . . . . .  | 29        |
| 2.4.3. Řazení . . . . .   | 29        |
| 2.4.4. Točivý moment na zadních kolech . . . . .                          | 31        |
| <b>3. Modely řízení vozidla</b>   | <b>32</b> |
| 3.1. Řízení natočení volantu . . . . .                                    | 32        |
| 3.1.1. Definování požadované trasy . . . . .                              | 32        |
| 3.1.2. Hledání <i>GP</i> . . . . .  | 32        |
| 3.1.3. Volba vzdálenosti $l_a$ . . . . .                                  | 35        |
| 3.1.4. Regulační algoritmy . . . . .                                      | 35        |
| 3.2. Řízení hnacího momentu . . . . .                                     | 40        |
| 3.2.1. Výpočet míry sešlápnutí pedálů . . . . .                           | 41        |
| 3.2.2. Výpočet křivosti v uzlu . . . . .                                  | 43        |



---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4. Simulace jízdních manévrů</b>                                      | <b>44</b> |
| 4.1. Výchozí nastavení modelu . . . . .                                  | 44        |
| 4.2. Testovací trasa . . . . .   | 46        |
| 4.3. Výsledky simulace . . . . .   | 46        |
| 4.3.1. Rychlost v průběhu okruhu . . . . .                               | 47        |
| 4.3.2. Úsek <i>I.</i> . . . . .  | 47        |
| 4.3.3. Úsek <i>II.</i> . . . . .   | 49        |
| 4.3.4. Úsek <i>III.</i> . . . . .  | 51        |
| 4.3.5. Srovnání s reálnou jízdou . . . . .                               | 53        |
| 4.4. Parametrické studie . . . . .                                       | 54        |
| 4.4.1. Vliv konstanty $K$ řízení hnacího momentu . . . . .               | 54        |
| 4.4.2. Vliv parametru $a_{b_{max}}$ . . . . .                            | 55        |
| 4.4.3. Vliv parametru $a_{y_{max}}$ . . . . .                            | 56        |
| 4.4.4. Vliv vzdálenosti $l_a$ . . . . .                                  | 57        |
| 4.4.5. Vliv algoritmu řízení natočení volantu . . . . .                  | 58        |
| <b>5. Závěr</b>  | <b>59</b> |
| <b>Literatura</b>  | <b>60</b> |
| <b>A. Přílohy</b>  | <b>61</b> |
| A.1. Přehled důležitých rovnic odvozených matematických modelů . . . . . | 61        |
| A.1.1. Jednostopý kinematický model . . . . .                            | 61        |
| A.1.2. Jednostopý dynamický model se třemi stupni volnosti . . . . .     | 61        |
| A.1.3. Dvoustopý dynamický model se sedmi stupni volnosti . . . . .      | 62        |
| A.2. Algoritmus hledání $GP$ . . . . .                                   | 64        |

# 1. Úvod

Žijeme v 21. století a digitalizace nabírá stále závratnější tempo napříč všemi oblastmi lidského působení. V průmyslu se v současnosti často skloňují pojmy jako *Průmysl 4.0*, jehož hlavním trendem je právě digitalizace a automatizace, nebo *Digitální dvojče* (angl. *Digital Twin*), jež je jednou z klíčových technologií Průmyslu 4.0. Digitální dvojče představuje virtuální kopii reálného zařízení, jímž může být výrobek nebo i výrobní závod. Toto dvojče umožňuje výrobcům vyladit všechny detaily a odstranit případné chyby daného zařízení ještě před jeho uvedením do provozu a to bez rizika časové a finanční ztráty [10]. Například automobilu trvá několik let, než projde všemi fázemi vývoje a testování, a proto se v automobilovém průmyslu věnuje velké úsilí vývoji technologie digitálního dvojčete, které dokáže nejen snížit náklady spojené s návrhem a testováním, ale také zkrátit dobu zavádění skutečného automobilu na trh, což ušetří další nemalé finanční prostředky.

Celý automobil lze z pohledu matematického modelování chápat jako vázanou mechanickou soustavu, jež se skládá z dalších dílčích vázaných mechanických podsoustav, které jsou často velmi sofistikované a jejichž matematický model je komplexní. K takovým komponentám se řadí například motor, převodovka, diferenciál, pneumatiky, odpružení nebo brzdy. Digitální dvojče představuje implementaci kompletního matematického modelu automobilu ve vhodném počítačovém vývojovém prostředí (například MATLAB).

Pokud je digitální dvojče automobilu vytvořené, je dále nutné je doplnit o další prvky. Například pokud je zkoumána pasivní bezpečnost posádky automobilu, pak je nezbytné opatřit model vozidla také modelem lidského těla. Nebo pokud je cílem testů zjistit, jaká je odezva automobilu při různých jízdních manévrech, pak je nutné vytvořit algoritmy, které nahradí reálné chování řidiče a zajistí tak autonomní jízdu vozidla po vytyčené trase.

Stěžejním cílem této bakalářské práce je vyvinout matematický model silničního vozidla, který dokáže popsat jeho chování při různých rovinných manévrech. Proto je v kapitole 2 v rámci odvození kompletního modelu kladen důraz na modelování kontaktu pneumatiky a vozovky, odvození rovnic popisujících mechanismus směrového řízení, který ovládá natočení předních kol vozidla, a také popsání pohonu a jeho převodu na zadní kola. Dále je pak v kapitole 3 řešena problematika autonomního řízení natočení volantu, pohonu a brzdění vozidla na základě znalosti části trasy, která je před vozidlem.

Za účelem simulace jízdy, jež je tématem kapitoly 4, jsou odvozený model a algoritmy řízení implementovány v programovém prostředí MATLAB. Model je nastaven tak, aby jeho parametry odpovídaly parametrům studentské formule *UWB04* týmu *UWB Racing Pilsen* Západočeské univerzity v Plzni. Následně je vytvořen virtuální závodní okruh, na kterém je tento model testován. Nakonec jsou prezentovány výsledky simulace a také parametrické studie. Vybrané výsledky jsou porovnány s daty získanými během reálné jízdy studentské formule po závodním okruhu.

## 1.1. Cíle práce

Cíle práce lze shrnout do následujících bodů:

- Ukázat různé přístupy při odvozování matematického modelu silničního vozidla.
- Odvodit rovinný matematický model silničního vozidla, který bude schopen popsat chování vozidla při různých jízdách manévrech.
- Odvodit algoritmy řízení natočení volantu a hnacího momentu.
- Nastavit parametry modelu tak, aby odpovídaly parametrům studentské formule *UWB04*.
- Otestovat matematický model a algoritmy řízení na předem definované trase, která model prověří při různých jízdách manévrech, zhodnotit výsledky a provést různé parametrické studie.

## 2. Matematický model vozidla

Kapitola 2 obsahuje kompletní odvození tří matematických modelů vozidla, kterým je studentská formule *UWB04* týmu *UWB Racing Pilsen* Západočeské univerzity v Plzni. Modely mají tyto nejdůležitější předpoklady a vlastnosti:

- rovinné modely
- schopnost pouze dopředné jízdy
- rovinná trasa bez nerovností a změn povrchu vozovky
- rovnoměrné rozložení hmotnosti na všechna kola
- bez zavedení odporových sil (vzdušný odpor, valivý odpor)
- bez modelování dynamiky rotujících součástí pohonné soustavy

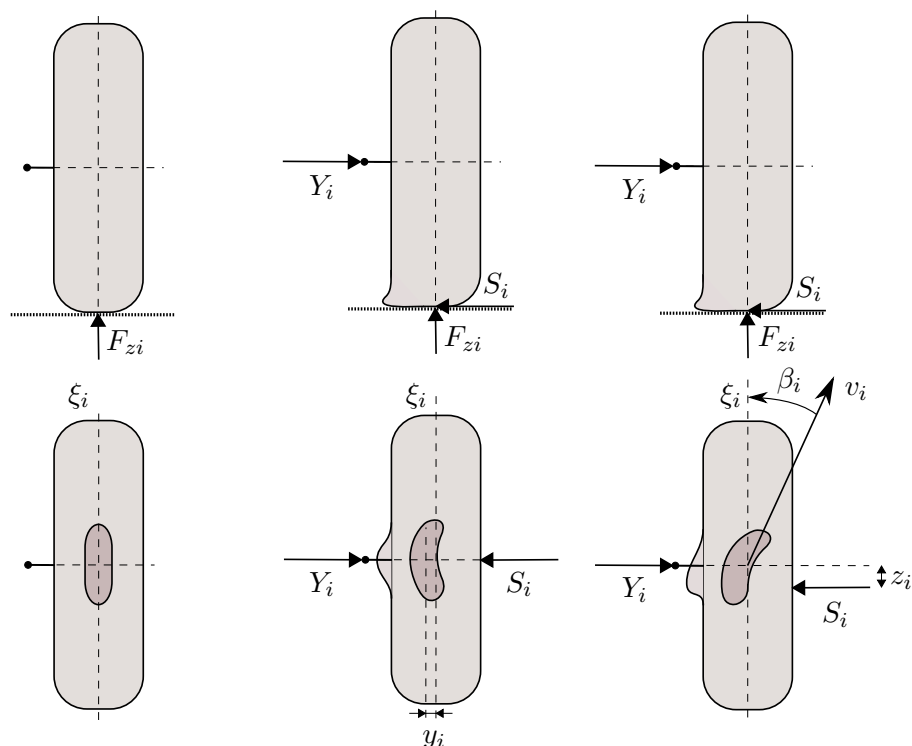
V podkapitolách 2.2.1 a 2.2.2 jsou představeny dva jednodušší modely – jednostopý kinematický a jednostopý dynamický model. Těžiště kapitoly však spočívá v odvození dvoustopého dynamického modelu, kterému jsou věnovány ostatní části této kapitoly. V podkapitole 2.2.3 jsou odvozeny pohybové rovnice modelu, které však obsahují neznámé veličiny, proto lze v této kapitole nalézt také podkapitolu 2.1, která se zabývá modelováním kontaktu pneumatiky s vozovkou, dále podkapitolu 2.3 se zaměřením na mechanismus směrového řízení a v neposlední řadě je v části 2.4 rozebírán pohon modelovaného vozidla.

Důvodem, proč je první část této kapitoly věnována kontaktu pneumatiky a vozovky, což se může na první pohled zdát nelogické, je to, že jde o oblast, která je stěžejní pro kompletní odvození dynamického modelu vozidla a která definuje různé pojmy, jež se často vyskytují v dalším textu.

### 2.1. Modelování kontaktu pneumatiky s vozovkou

Oblast kontaktu mezi pneumatikou a vozovkou představuje rozhraní mezi vozidlem a jízdním prostředím. Síly a momenty sil, které se zde generují, určují pohyb celého vozidla, a proto tuto oblast lze chápat jako médium, které transformuje záměry řidiče ve skutečné manévry vozidla. Tyto silové účinky jsou tvořeny třením pláště pneumatiky a vozovky, závisí na mnoha faktorech (např. tuhost pneumatiky, stav vozovky, aktuální skluz kola, charakter pohybu vozidla nebo svislé zatížení) a jejich průběhy jsou velice nelineární. Z těchto a také dalších důvodů představuje modelování kontaktu pneumatiky s vozovkou samostatnou disciplínu, která hraje velkou roli při modelování silničních vozidel.

V pneumatice  $i$ -tého kola vozidla se v důsledku kontaktu s vozovkou v průběhu pohybu vozidla generují tři hlavní silové účinky – hnací síla  $H_i$ , boční vodící síla  $S_i$  a vratný moment  $M_{S_i}$ . Následující text uvádí, jak lze tyto silové účinky modelovat.



(a) Bez zatížení boční silou. (b) Zatížení boční silou,  $v_i = 0$ . (c) Zatížení boční silou,  $v_i \neq 0$ .

Obrázek 2.1.: Nárys a půdorys kola.

### 2.1.1. Boční vodící síla, vratný moment a směrová úchylnka kola

Jelikož se vozidlo pohybuje v rovině volně, působí na něj setrvačné síly, které prostřednictvím uchycení kol působí také na kola a pneumatiky vozidla. Složka síly, která působí na kolo v příčném směru (boční síla  $Y_i$ ), způsobí podle principu akce a reakce v pneumatice stejně velkou boční vodící sílu  $S_i$  opačně orientovanou vůči  $Y_i$  (viz např. [15]), díky které je vozidlo schopné zatačení. Toto silové působení je znázorněno v případě stojícího kola ( $v_i = 0$ ) na obr. 2.1b, respektive na obr. 2.1c v případě valícího se kola ( $v_i \neq 0$ ).

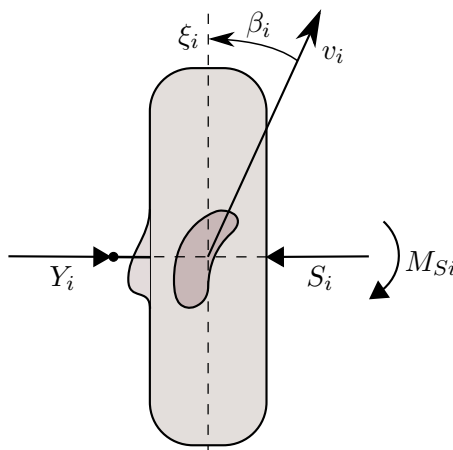
Nepůsobí-li na kolo žádná boční síla  $Y_i$  jako na obr. 2.1a, boční vodící síla  $S_i$  je nulová a střední rovina kola obsahuje podélnou osu stopy (styková plocha kola s vozovkou, v obr. 2.1 značeno tmavě šedou oblastí). Pokud však v ose otáčení působí boční síla, jejímž důsledkem je boční vodící síla, pneumatika se zdeformuje a osa stopy se vychýlí mimo střední rovinu kola o hodnotu  $y_i$  (obr. 2.1b). Pokud se navíc kolo otáčí, pak jsou elementární plošky pneumatiky, které přicházejí do kontaktu s vozovkou, oproti elementům, které již v kontaktu jsou, vysunuty proti boční vodící síle a toto vybočení stopy v přední části je charakterizováno úhlem  $\beta_i$  nazývaným směrová úchylnka (obr. 2.1c).

Pokud se kolo valí s nenulovým úhlem směrové úchylnky (je porušena symetrie) jako na obr. 2.1c, elementární síly v pneumatice, jejichž výslednicí je boční vodící síla, nezatažují pneumatiku symetricky po celé délce stopy, tudíž ani boční vodící síla nepůsobí v rovině<sup>1</sup> osy kola jako boční

<sup>1</sup>Rovinou osy kola je myšlena taková rovina symetrie kola, která je tvořena jeho příčnou a svislou osou.

síla, ale je vychýlena o vzdálenost  $z_i$  (závlek). Toto způsobí vratný moment  $M_{S_i}$ , který má tendenci natáčet kolo do směru rychlosti  $v_i$ , jak je vidět na obr. 2.2. Zde je znázorněna náhrada síly  $S_i$  z obr. 2.1c silou  $S_i$  posunutou do roviny osy kola a dvojitým momentem

$$M_{S_i} = z_i S_i. \quad (2.1)$$



Obrázek 2.2.: Půdorys kola s posunutou silou  $S_i$  a dvojitým momentem  $M_{S_i}$ .

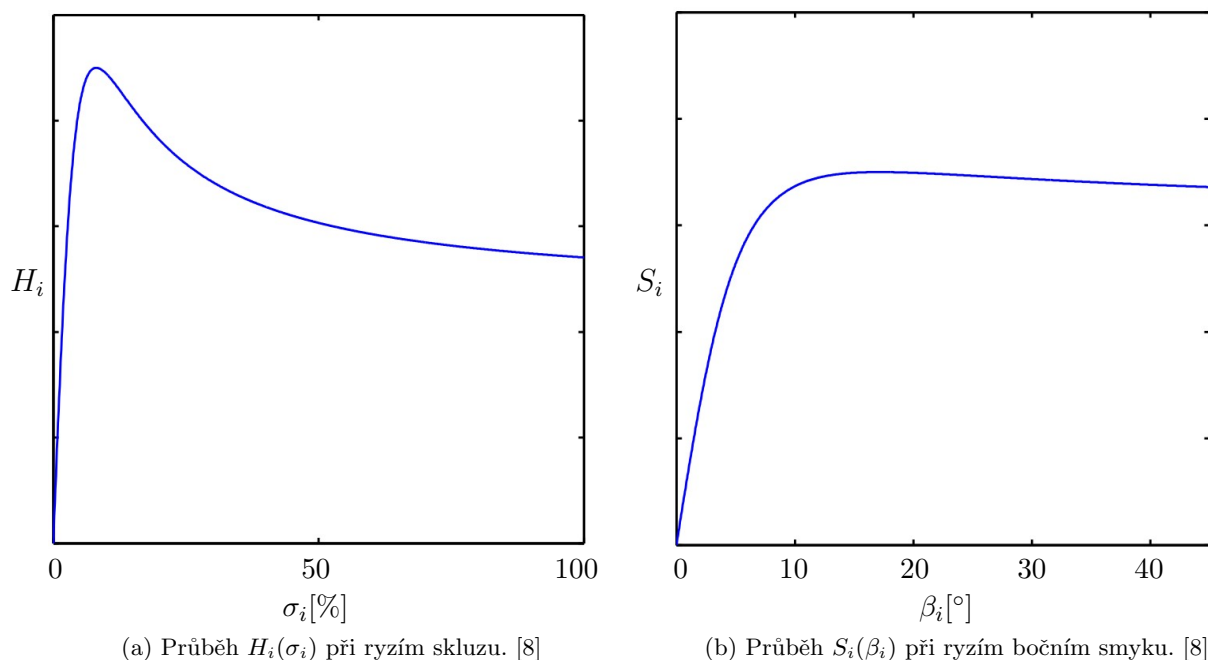
Závislosti mezi boční vodící silou  $S_i$ , vratným momentem  $M_{S_i}$ , směrovou úchytkou  $\beta_i$ , velikostí svislého zatížení a dalšími relevantními veličinami jsou zjišťovány experimentálně a diagramy vytvořené z těchto závislostí a dalších parametrů se nazývají směrové charakteristiky pneumatik. K nejdůležitějším charakteristikám patří  $S_i = f(\beta_i)$  nebo  $M_{S_i} = g(\beta_i)$  v závislosti na konkrétním svislém zatížení  $F_{z_i}$ .

### 2.1.2. Průběh hnací síly a boční vodící síly

V praxi se pro modelování styku pneumatiky s vozovkou velmi hojně používá Pacejkův model pneumatiky (*Pacejka Magic Formula*). Jak zmiňuje [9], jde o semi-empirický model (získaný kombinací analytických vztahů a experimentálních dat), jenž při správném použití velmi věrně popisuje silové působení v pneumatice. Správným použitím je zde myšleno správné zvolení parametrů modelu, kterých je celá řada. Jedná se o optimalizační úlohu, kdy jsou tyto parametry laděny tak, aby výsledný model odpovídal experimentálním datům.

V této práci Pacejkova magická formule přímo implementována není, ale je použita k porovnání využitého modelu tření. Na obr. 2.3a lze spatřit závislost hnací síly  $H_i$  na podélném skluzu<sup>2</sup>  $\sigma_i$  při ryzím skluzu kola (směrová úchytko  $\beta_i = 0$ ). Obr. 2.3b informuje o tom, jak se mění boční vodící síla  $S_i$  v závislosti na proměnné  $\beta_i$  při ryzím smyku (podélný skluz  $\sigma_i = 0$ ). U obou závislostí platí, že se jedná pouze o ilustrativní případ, jehož účelem v tomto textu je upozornit na obecné tvary daných křivek (tyto tvary lze pak porovnat s křivkami implementovaného modelu), proto nejsou uvedeny žádné konkrétní hodnoty sil  $H_i$  a  $S_i$ .

<sup>2</sup>Podélný skluz  $\sigma_i$  kola bude definován v kapitole 2.1.3.

Obrázek 2.3.: Průběhy sil  $H_i$  a  $S_i$ .

Z obr. 2.3b lze mimo jiné vyčíst, že pro malé hodnoty směrové úchytky  $\beta_i$  lze boční vodicí sílu  $S_i$  aproximovat lineární funkcí, která má podle [15] tvar

$$S_i = C_\beta \beta_i, \quad (2.2)$$

kde se koeficient  $C_\beta$  označuje jako směrová tuhost pneumatiky.

Následně lze také vratný moment  $M_{S_i}$  vyjádřit lineárním vztahem

$$M_{S_i} = C_{M\beta} \beta_i, \quad (2.3)$$

kde konstanta  $C_{M\beta}$  je vratná tuhost pneumatiky.

### 2.1.3. Dugoffův model pneumatiky

Jedním z modelů, který představuje určitý kompromis mezi množstvím (a kvalitou) získaných informací a složitostí matematického modelu, je Dugoffův model pneumatiky, který je v této práci prakticky využitý. Tento model podle [13] předpokládá rovnoměrné rozložení svislého zatížení po celé stykové ploše pneumatiky s vozovkou. Oproti tomu Pacejkův model pneumatiky předpokládá parabolický průběh tohoto zatížení, jenž je skutečnosti blíže. Hlavní výhoda Dugoffova modelu spočívá v tom, že jeho výstupní veličiny, hnací síla  $H_i$  a boční vodicí síla  $S_i$ , jsou na sobě naprosto nezávislé. Tato vlastnost nachází největší uplatnění v případech, kdy se směrová tuhost  $C_\beta$  pneumatiky velmi liší od podélné tuhosti  $C_\sigma$  pneumatiky.

Samotný model je dle [13] matematicky popsán dvěma vztahy pro výpočet sil  $H_i$  (podélná) a  $S_i$  (příčná), a sice

$$H_i = C_\sigma \frac{\sigma_i}{1 + \sigma_i} f(\lambda) \quad (2.4)$$

a

$$S_i = C_\beta \frac{\operatorname{tg}\beta_i}{1 + \sigma_i} f(\lambda), \quad (2.5)$$

ve kterých figuruje funkce  $f(\lambda)$  určená jako

$$f(\lambda) = \begin{cases} (2 - \lambda)\lambda & \text{pro } \lambda < 1, \\ 1 & \text{pro } \lambda \geq 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

kde proměnná  $\lambda$  splňuje rovnici

$$\lambda = \frac{f F_{zi}(1 + \sigma_i)}{2\sqrt{(C_\sigma \sigma_i)^2 + (C_\beta \operatorname{tg}\beta_i)^2}}. \quad (2.7)$$

V těchto vztazích figurují kromě směrové tuhosti  $C_\beta$ , podélné tuhosti  $C_\sigma$ , součinitele tření  $f$  a svislého zatížení  $F_{zi}$  pneumatiky také směrová úchylka  $\beta_i$  a podélný skluz  $\sigma_i$  kola. Předpis pro určení směrové úchylky závisí na typu a parametrech daného modelu vozidla (bude definována pro každý model vozidla zvlášť v kapitolách 2.2.2 a 2.2.3), pro podélný skluz podle [6] platí

$$\sigma_i = \frac{r_w \dot{\varphi}_i - \dot{\xi}_i}{\max(|r_w \dot{\varphi}_i|, |\dot{\xi}_i|)}, \quad (2.8)$$

kde  $\dot{\varphi}_i$  je úhlová rychlost  $i$ -tého kola,  $r_w$  je poloměr kola a  $\dot{\xi}_i$  je průmět rychlosti  $v_i$  pohybu středu kola do podélné osy kola (osa  $\xi_i$  je vyznačena v obr. 2.1 a 2.2).

Funkční hodnoty  $\sigma_i$  obvykle nabývají hodnot v rozmezí  $\langle -1, 1 \rangle$ , pokud však nastane situace, kdy rychlosti  $\dot{\xi}_i$  a  $\dot{\varphi}_i$  mají opačné znaménko, potom  $|\sigma_i| > 1$ .

Interpretovat takovýto model bez jakýchkoli matematických úprav vztahů (2.4) až (2.7) není jednoduché, proto se model převádí do jiné, ale ekvivalentní podoby, kterou uvádí [4]. Zavede-li se síla  $F_{xi}$  a  $F_{yi}$  jako

$$F_{xi} = C_\sigma \frac{\sigma_i}{1 + \sigma_i}, \quad (2.9)$$

$$F_{yi} = C_\beta \frac{\operatorname{tg}\beta_i}{1 + \sigma_i} \quad (2.10)$$

a dle těchto vztahů se definuje  $\lambda$  jako

$$\lambda = \frac{\frac{f F_{zi}}{2}}{\sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2}}, \quad (2.11)$$

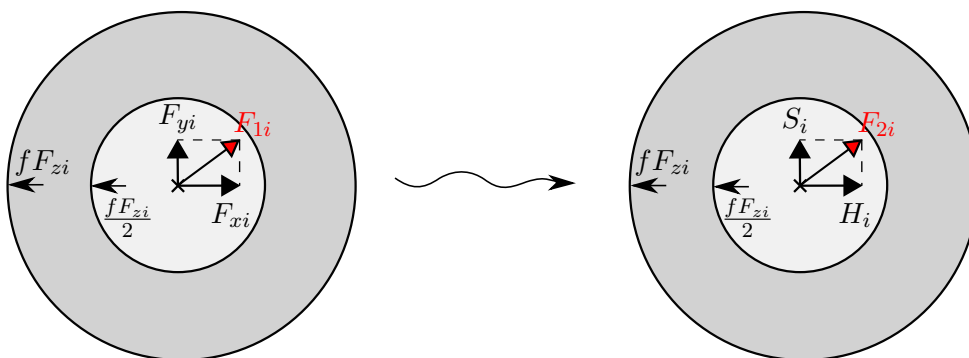
potom platí, že

$$H_i = \begin{cases} F_{xi} \cdot 1, & \text{pokud } \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} \leq \frac{f F_{zi}}{2}, \\ F_{xi} \cdot (2\lambda - \lambda^2), & \text{pokud } \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} > \frac{f F_{zi}}{2} \end{cases} \quad (2.12)$$

a analogicky

$$S_i = \begin{cases} F_{yi} \cdot 1, & \text{pokud } \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} \leq \frac{f F_{zi}}{2}, \\ F_{yi} \cdot (2\lambda - \lambda^2), & \text{pokud } \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} > \frac{f F_{zi}}{2}. \end{cases} \quad (2.13)$$

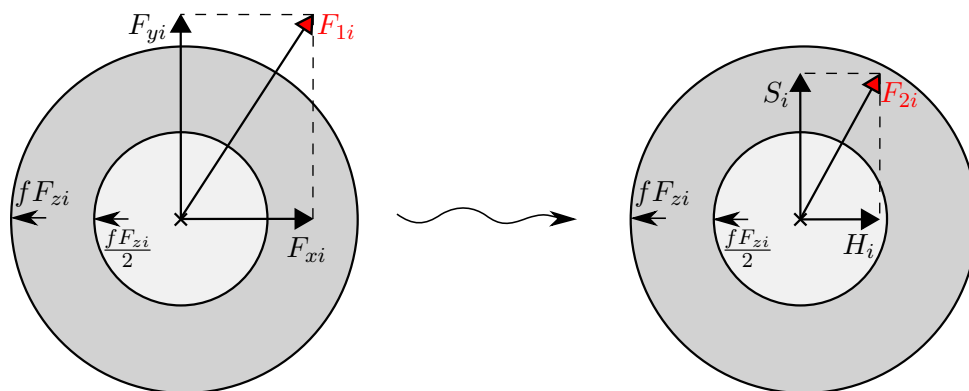




Obrázek 2.4.: Výslednice uvnitř kružnice o poloměru  $\frac{fF_{zi}}{2}$ .

Podmínky ve vztazích (2.12) a (2.13) určují, ve které části frikční kružnice, jejíž poloměr má velikost  $fF_{zi}$ , se nachází výslednice sil  $F_{xi}$  a  $F_{yi}$ .

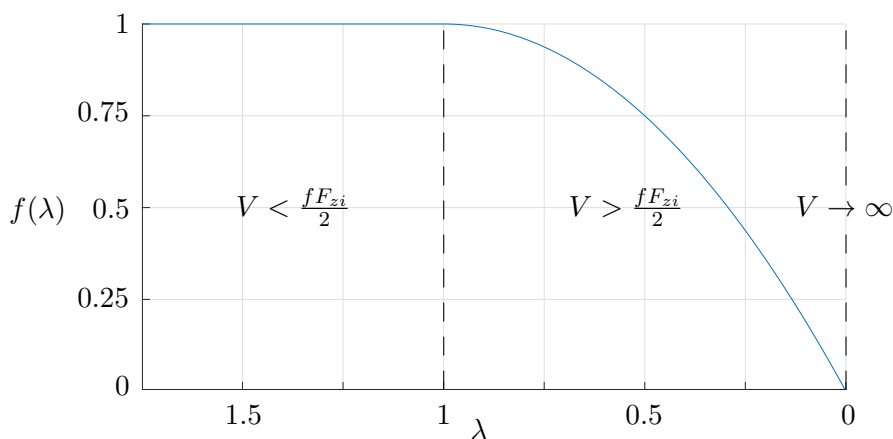
První podmínka ve zmíněných vztazích ( $\sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} \leq \frac{fF_{zi}}{2}$ ) říká, že výslednice se nachází uvnitř kružnice o poloměru  $\frac{fF_{zi}}{2}$ . V takovém případě síly  $F_{xi}$  a  $F_{yi}$  nejsou nijak modifikovány (koeficient 1). Toto tvrzení je znázorněno na obr. 2.4.



Obrázek 2.5.: Výslednice vně kružnice o poloměru  $\frac{fF_{zi}}{2}$ .

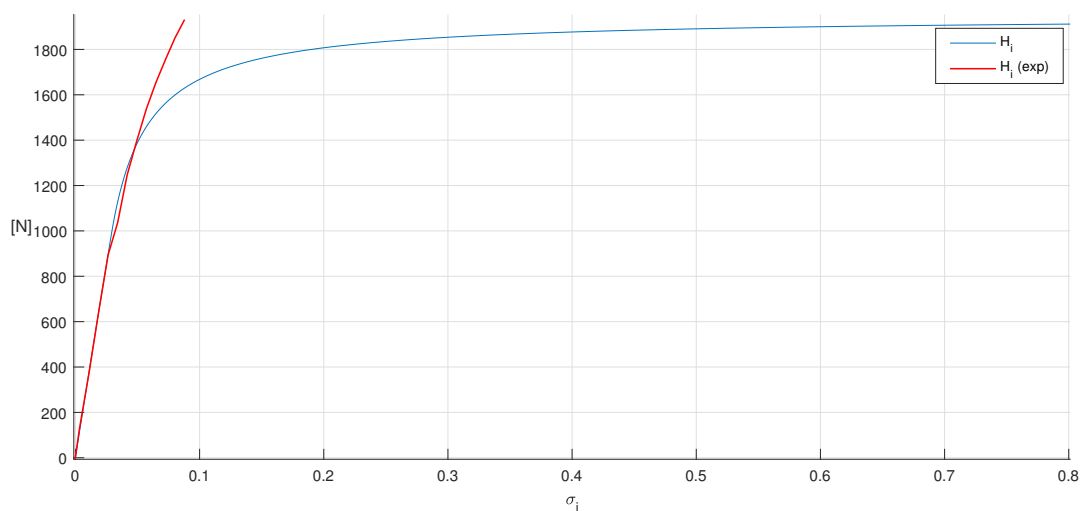
Druhá podmínka ( $\sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} > \frac{fF_{zi}}{2}$ ) poukazuje na to, že výslednice sil leží vně zmíněné kružnice o poloměru  $\frac{fF_{zi}}{2}$  a síly  $F_{xi}$  a  $F_{yi}$  se pak zmenší v důsledku jejich přenásobení koeficientem o velikosti  $(2\lambda - \lambda^2)$  – tento koeficient na dosažitelném definičním intervalu nabývá hodnot z intervalu  $(0, 1)$ . Pro úplnost – druhý případ nespecifikuje, zda se ještě výslednice nachází uvnitř frikční kružnice a nebo vně, vhodně zvolený koeficient však tuto výslednici umenší natolik, že konečná výslednice sil  $H_i$  a  $S_i$  vždy náleží vnitřní oblasti frikční kružnice. Znázornění tohoto případu je provedeno v obr. 2.5.

Aby bylo možné vytvořit si dobrou představu o tom, jak se mění koeficient, jímž jsou přenásobovány síly  $F_{xi}$  a  $F_{yi}$  (vztah (2.6) jej označuje jako  $f(\lambda)$ ), je pro všechna možná  $\lambda$  v obr. 2.6 vytvořen graf  $f(\lambda)$ . V obrázku je uvažováno označení velikosti výslednice sil jako  $V := \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2}$ .



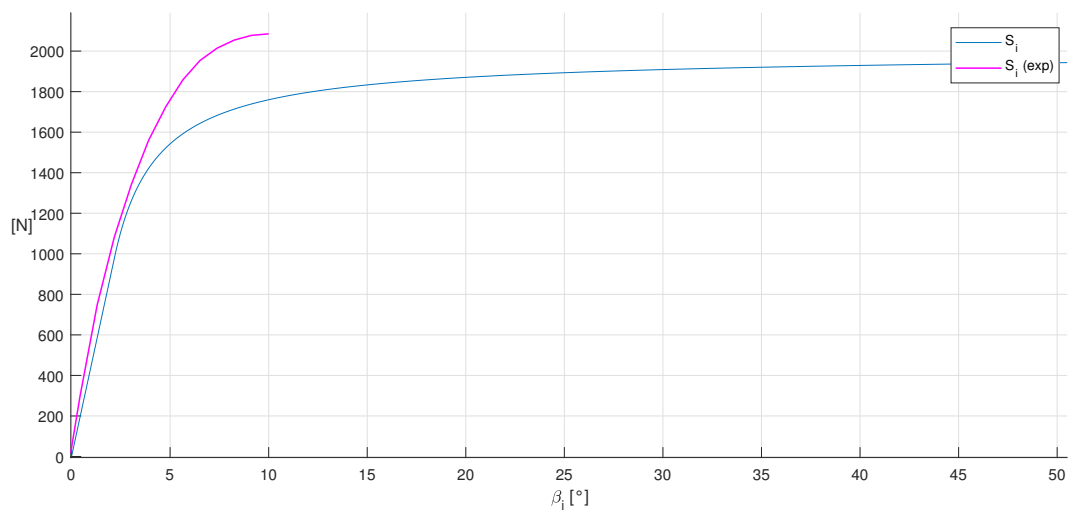
Obrázek 2.6.: Graf závislosti  $f(\lambda)$ .

Závislosti velikostí sil  $H_i$  a  $S_i$  na proměnných  $\sigma_i$  a  $\beta_i$  jsou vykresleny na obr. 2.7 až 2.9. V obrázcích jsou dále zobrazeny křivky, které jsou výsledkem experimentálního měření na pneumatice, která je využita na modelovaném vozidle. Pro výsledky na obr. 2.7 až 2.10 platí nastavení parametrů, které je též využito při simulaci jízdy celého vozidla:  $C_\sigma = 3,5 \cdot 10^4$  N,  $C_\beta = 450$  N/deg,  $f = 2,3$  a  $F_{zi} \doteq 858$  N.

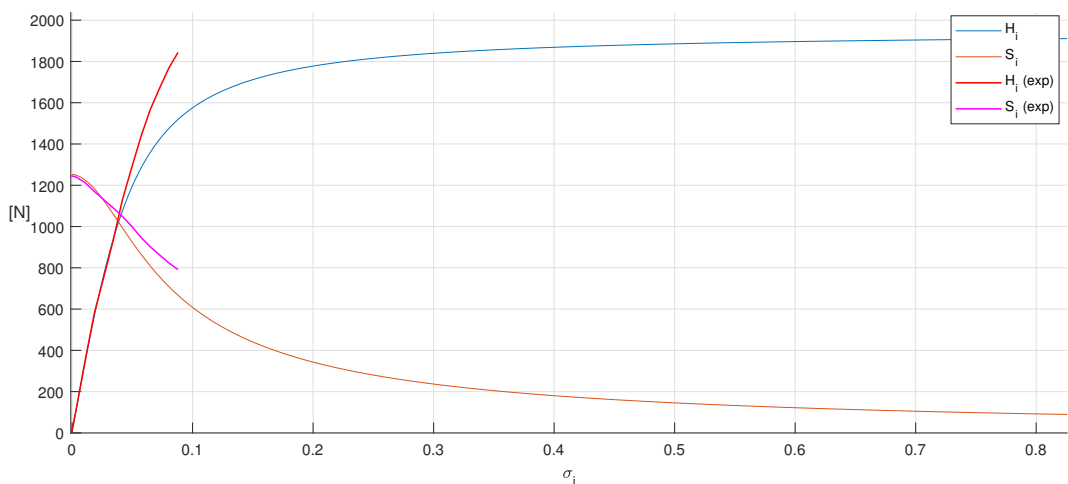


Obrázek 2.7.: Závislost  $H_i(\sigma_i)$  při ryzím skluzu.

Na obr. 2.7 lze spatřit grafy závislostí  $H_i$  na podélném skluzu  $\sigma_i$  při ryzím skluzu ( $\beta_i = 0$ ) pro Dugoffův model a pro experimentální data. Obr. 2.8 pak zobrazuje grafy závislostí  $S_i$  na směrové úhlyce  $\beta_i$  při ryzím smyku ( $\sigma_i = 0$ ) opět pro Dugoffův model a experimentální data.



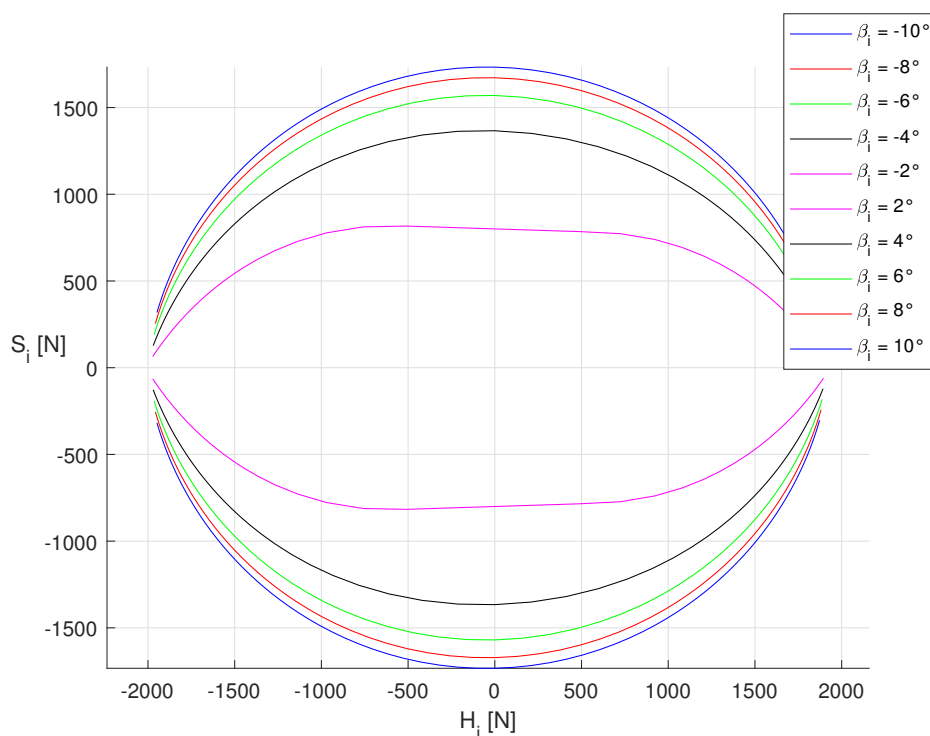
Obrázek 2.8.: Závislost  $S_i(\beta_i)$  při ryzím smyku.



Obrázek 2.9.: Závislost  $H_i(\sigma_i)$  a  $S_i(\sigma_i)$  při kombinovaném skluzu ( $\beta_i = 3^\circ$ ).

Obr. 2.9 obsahuje grafy závislostí  $H_i(\sigma_i)$  a  $S_i(\sigma_i)$  při kombinovaném skluzu – pro pevnou hodnotu  $\beta_i = 3^\circ$  a proměnnou hodnotu  $\sigma_i$ . Jsou zde opět vyobrazena data z Dugoffova modelu a experimentální data.

Na obr. 2.10 jsou vykresleny závislosti  $S_i(H_i)$  (kombinovaný skluz pro pevná různě volená  $\beta_i$ ). Pro tyto závislosti nejsou k dispozici experimentální data.

Obrázek 2.10.: Závislosti  $H_i$ – $S_i$  při kombinovaném skluzu.

Jednou z nevýhod základní podoby Dugoffova modelu je to, že neposkytuje informaci o vratném momentu  $M_{S_i}$ . Proto je v této práci vypočítáván na základě definičního vztahu (2.1) s využitím znalosti hodnoty závleku  $z_i$  z experimentálního měření.

## 2.2. Přehled rovinných modelů

V této kapitole budou postupně uvedeny tři rovinné modely vozidla. Každý z nich nachází uplatnění, ale tato uplatnění se od sebe liší zejména kvůli předpokladům, za kterých bylo provedeno odvození modelů. Matematický popis modelů v této kapitole vychází z literatury [2, 7, 13, 14, 15].

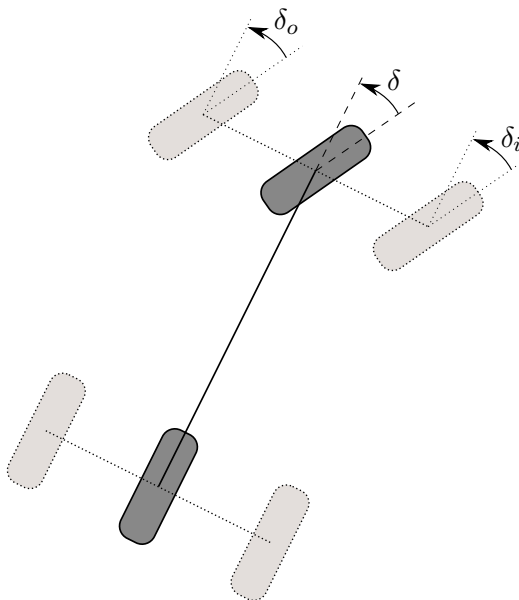
### 2.2.1. Jednostopý kinematický model

V úvodu modelování vozidla je prvním důležitým krokem zamyšlení se nad tím, jak si daný model vůbec představit. Jednou z možných variant sestavování pohybových rovnic je jednostopý model (angl. *Bicycle model*). Jak již napovídá název, vozidlo na vozovce zanechává při přímočarém pohybu jedinou stopu, obě přední kola jsou tedy ve stejném místě a obě zadní kola taktéž (nulový rozchod kol na obou nápravách) – jinými slovy nejsou uvažovány příčné rozměry vozidla.

Součástí převodu dvoustopého modelu vozidla na jednostopý je konverze úhlu natočení kol. Jelikož je uvažováno vozidlo s možností ovládnutí natočení kol pouze na přední nápravě, transformace úhlu natočení na zadní nápravě je triviální, podstatná je konverze na předních kolech. Úhly na obou předních kolech se obecně při malých natočeních neliší o velkou hodnotu, ale jejich

rozdíl není nezanedbatelný. V jednostopém modelu lze uvažovat úhel natočení  $\delta$  jako průměr natočení vnitřního kola  $\delta_i$  a vnějšího kola  $\delta_o$ , tedy

$$\delta = \frac{\delta_i + \delta_o}{2}. \quad (2.14)$$



Obrázek 2.11.: Převod dvoustopého modelu na jednostopý.

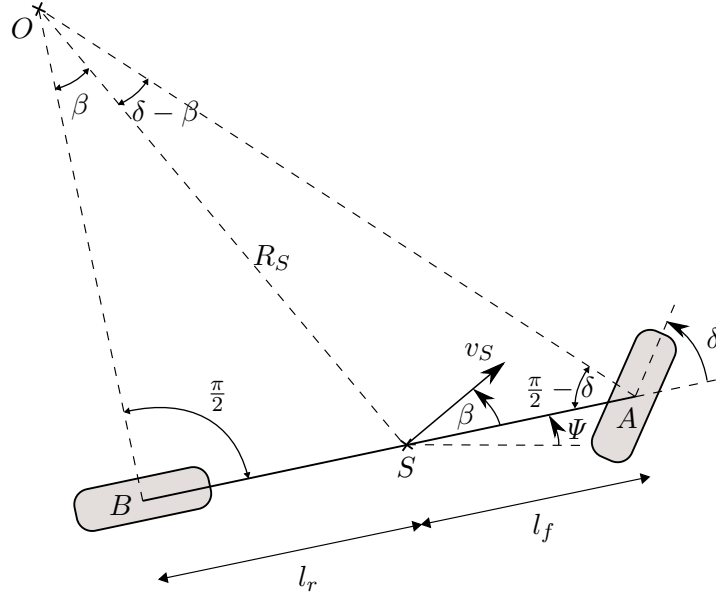
Velmi jednoduchým modelem, jakým se dá simulovat jízda vozidla, je kinematický model. Obecný princip kinematických modelů spočívá v tom, že jsou založeny pouze na geometrických vztazích, dynamika není vůbec implementována. Jeden z rozdílů v chování kinematického a dynamického modelu je patrný z následujícího příkladu: pokud vozidlo v podobě kin. modelu opíše nějakou trajektorii při určité rychlosti, je schopno tuto trajektorii opsat při kterékoliv jiné rychlosti (samozřejmě se shodným znaménkem, uvažuje se pouze dopředná jízda). Jediné, co se změní, je celková doba jízdy. V dynamickém modelu (a reálném vozidle) ale figurují síly, které jsou závislé na rychlosti vozidla, proto i trajektorie budou při různých rychlostech různé.

### Předpoklady

Kinematický model s sebou přináší určité předpoklady, které musí být při jeho aplikaci splněny. Nejdůležitějším z nich je požadavek nízké rychlosti jízdy [13]. Pokud je toto zajištěno na reálném vozidle, boční vodící síla v pneumatice bude malá, a způsobí tak pouze malou směrovou úchylku kola. V kinematickém modelu, kde žádná boční vodící síla definována není (a nezpůsobí tak žádnou směrovou úchylku), vektor rychlosti v místě kola leží vždy v jeho střední rovině. Nízká hodnota rychlosti u reálného vozidla též způsobí malou odstředivou sílu působící na vozidlo, opět tedy lze využít jen kinematické vztahy bez ohledu na dynamické síly. Dalším předpokladem jsou malé úhly natočení předních kol, kdy u skutečného vozidla nehrozí velká boční vodící síla v pneumatice. Při splnění těchto dvou požadavků lze navíc v odvození modelu užít různé aproximace, které vedou k dalšímu zjednodušení modelu.

Je zde celá řada dalších předpokladů souvisejících se samotnou ideou tohoto modelu. Pokud je užita aproximace kinematickým modelem, pak je například předpokládáno, že reálné vozidlo

se pohybuje po suché vozovce s ideálními vlastnostmi pro kontakt s pneumatikou nebo že řídicí ústrojí je dokonale tuhé. Takovýto výčet by byl velmi obsáhlý a nutnost splnění jeho položek by byla evidentní. Více o předpokladech tohoto modelu lze nalézt v [13].



Obrázek 2.12.: Geometrický rozbor kinematického modelu.

### Odvození

Jsou-li všechny požadavky na kinematický model splněny, lze podle [13] odvodit jednostopý kinematický model. Jeho polohu popisují tři souřadnice, poloha střediska hmotnosti  $[X, Y]$  v globálním souřadnicovém systému a úhel natočení  $\Psi$  podélné osy vozidla vůči ose  $X$ .

Rychlost vozidla ve středu hmotnosti  $v_S$  svírá s osou vozidla úhel  $\beta$ , takový úhel se nazývá směrová úchylna, a osa předního kola svírá s osou vozidla úhel natočení  $\delta$ . Veličiny  $v_S$  a  $\delta$  jsou pro tento model chápány jako vstupy.

Z pravoúhlého trojúhelníku, který je v obr. 2.12 označen jako  $BSO$  (bod  $O$  je pól otáčení vozidla), lze získat vztah

$$\sin \beta = \frac{l_r}{R_S}. \quad (2.15)$$

Na trojúhelník  $SAO$  je aplikována sinová věta

$$\frac{\sin(\delta - \beta)}{l_f} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \delta)}{R_S}. \quad (2.16)$$

Tato rovnice je následně upravena do tvaru

$$\frac{\sin \delta \cos \beta - \sin \beta \cos \delta}{l_f} = \frac{\cos \delta}{R_S} \quad (2.17)$$

a po vynásobení výrazem  $\frac{l_f}{\cos \delta}$  platí, že

$$\operatorname{tg} \delta \cos \beta - \sin \beta = \frac{l_f}{R_S}. \quad (2.18)$$

Směrovou úchylku  $\beta$  je možné vyjádřit tak, že se rovnice (2.15) vynásobí  $l_f$ , rovnice (2.18) se vynásobí  $l_r$ , následně se tyto nové rovnice odečtou a vznikne

$$l_f \sin \beta + l_r \sin \beta - l_r \operatorname{tg} \delta \cos \beta = 0, \quad (2.19)$$

která může být upravena do tvaru

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{l_r \operatorname{tg} \delta}{l_r + l_f}, \quad (2.20)$$

a proto pro  $\beta$  platí

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{l_r \operatorname{tg} \delta}{l_r + l_f}. \quad (2.21)$$

Využijí-li se opět rovnice (2.15) a (2.18) ve smyslu jejich součtu, získá se vztah

$$\operatorname{tg} \delta \cos \beta = \frac{l_f + l_r}{R_S}. \quad (2.22)$$

Protože rychlost vozidla je nízká, lze podle [13] předpokládat, že i poloměr zatáčení se mění velmi pomalu, a tedy že rychlost změny orientace vozidla  $\dot{\Psi}$  je rovna jeho úhlové rychlosti  $\frac{v_S}{R_S}$  (kolem bodu  $O$ ). Platí tedy

$$\dot{\Psi} \doteq \frac{v_S}{R_S}. \quad (2.23)$$

Kombinací vztahů (2.22) a (2.23) lze eliminovat  $R_S$ , tudíž

$$\dot{\Psi} = \frac{v_S \cos \beta}{l_f + l_r} \operatorname{tg} \delta. \quad (2.24)$$

Pro změnu globálních souřadnic středu hmotnosti vozidla lze rovnou psát

$$\dot{X} = v_S \cos(\Psi + \beta) \quad (2.25)$$

a

$$\dot{Y} = v_S \sin(\Psi + \beta). \quad (2.26)$$

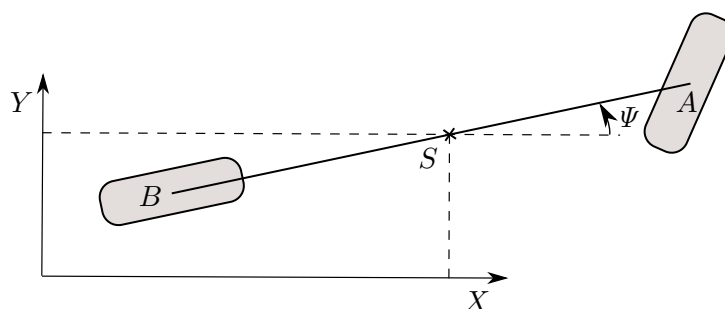
Rovnice (2.24), (2.25) a (2.26) jsou diferenciální rovnice 1. řádu, které po dosazení vztahu (2.21) popisují pohyb tohoto modelu.

Shrnutí důležitých rovnic tohoto modelu je k dispozici v příloze A.1.1.

### 2.2.2. Jednostopý dynamický model se třemi stupni volnosti

Pokud se vozidlo pohybuje vyšší rychlostí, nelze už dynamické síly zanedbat a je nutné sestavit odpovídající model.

Jedním z dynamických modelů, kterým lze nasimulovat průjezd zatáčkou, je jednostopý model se třemi stupni volnosti jako na obr. 2.13. Jeho poloha je jednoznačně určena souřadnicemi polohy středu hmotnosti vozidla  $X$  a  $Y$  a úhlem natočení  $\Psi$  podélné osy vozidla vzhledem k ose  $X$ .

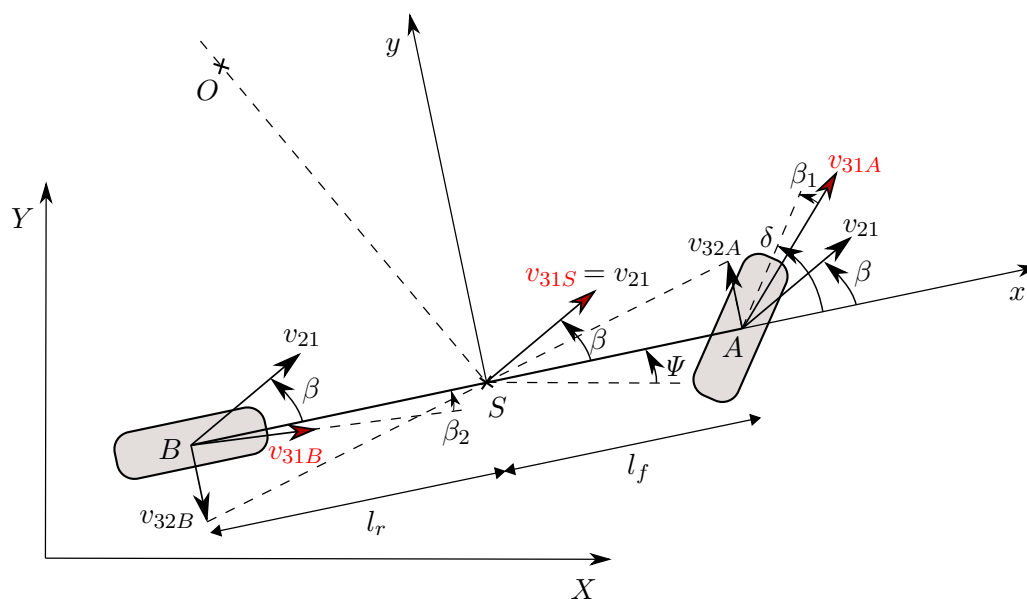


Obrázek 2.13.: Globální souřadnicový systém pro dynamický model vozidla.

### Stanovení směrových úchylek

Jelikož má model pouze tři stupně volnosti, ke kterým nepatří natočení jednotlivých kol, nelze využít Dugoffova modelu tření uvedeného v kapitole 2.1.3 a získat z něj informaci o hnacích silách  $H_i$ , bočních vodicích silách  $S_i$  a vratných momentech  $M_{S_i}$  v pneumatice.

Na model je podle [13] kladen takový předpoklad, že úhel  $\delta$  natočení předních kol je v každém okamžiku jízdy malý. Potom totiž jsou také směrové úchylky  $\beta_i$  kol malé, díky čemuž, jak bylo zmíněno v kapitole 2.1.2, lze považovat lineární vztahy (2.2) a (2.3) pro  $S_i$  a  $M_{S_i}$  za platné. K jejich použití je však nutné zjistit směrové úchylky  $\beta_i$  kol. K tomuto účelu je na obr. 2.14 vyobrazeno pole rychlostí na vozidle.



Obrázek 2.14.: Základní rozklad rychlostí v bodech A, B, S pro jednotopý dynamický model.

Těleso (vozidlo) koná obecný rovinný pohyb, který lze rozložit dle základního rozkladu na relativní pohyb rotační (pohyb 32) kolem středu hmotnosti  $S$  a na unášivý pohyb posuvný (pohyb 21), při kterém se referenční bod  $S$  pohybuje po kružnici kolem okamžitého středu křivosti  $O$ . Rychlost  $v_{21}$  pohybu 21 je ve všech bodech tělesa stejná a pro její velikost platí

$$v_{21} = v_S = \sqrt{v_{SX}^2 + v_{SY}^2} = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}, \quad (2.27)$$



kde  $v_{SX} = \dot{X}$  a  $v_{SY} = \dot{Y}$  jsou složky rychlosti středu hmotnosti vozidla v globálním souřadnicovém systému  $XY$ .

Velikost rychlosti  $v_{32}$  pohybu 32 v určitém bodě tělesa lze vypočítat ze vztahu

$$v_{32} = \omega_{32}r = \dot{\Psi}r, \quad (2.28)$$

kde  $r$  je vzdálenost bodu od středu hmotnosti  $S$ . Pro relativní rychlosti v bodech  $A$  a  $B$  platí

$$v_{32A} = \dot{\Psi}l_f \quad (2.29)$$

a

$$v_{32B} = \dot{\Psi}l_r. \quad (2.30)$$

S využitím rozkladu rychlostí na obr. 2.14 lze směrové úchytky  $\beta_1$  a  $\beta_2$  vyjádřit jako

$$\beta_1 = \delta - \arctg\left(\frac{v_{31Ay}}{v_{31Ax}}\right) = \delta - \arctg\left(\frac{v_{32A} + v_{21y}}{v_{21x}}\right) = \delta - \arctg\left(\frac{\dot{\Psi}l_f + v_S \sin \beta}{v_S \cos \beta}\right), \quad (2.31)$$

$$\beta_2 = -\arctg\left(\frac{v_{31By}}{v_{31Bx}}\right) = -\arctg\left(\frac{-v_{32B} + v_{21y}}{v_{21x}}\right) = -\arctg\left(\frac{-\dot{\Psi}l_r + v_S \sin \beta}{v_S \cos \beta}\right), \quad (2.32)$$

kde indexy  $x$  a  $y$  u rychlostí znamenají, že se jedná o složky rychlosti v lokálním souřadnicovém systému  $xy$ , který je také vyznačen v obr. 2.14.

Je také vhodné doplnit směrovou úchytku  $\beta$  v bodě  $S$ , kterou lze získat z poměru složek rychlosti  $v_S$  v tomto bodě:

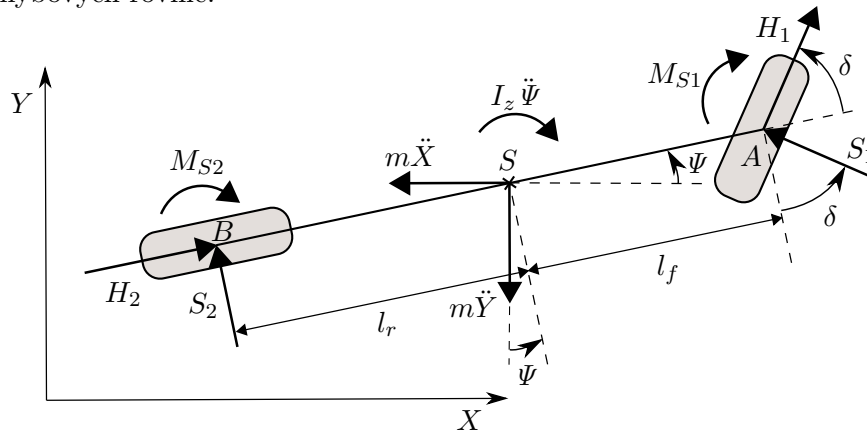
$$\operatorname{tg}(\beta + \Psi) = \frac{v_{SY}}{v_{SX}} = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}}, \quad (2.33)$$

a tudíž

$$\beta = \arctg\left(\frac{\dot{Y}}{\dot{X}}\right) - \Psi. \quad (2.34)$$

### Odvození pohybových rovnic

Všechna relevantní silová působení jsou zakreslena v obr. 2.15. Lze tedy přistoupit k odvození vlastních pohybových rovnic.



Obrázek 2.15.: Relevantní silová působení v jednostopém dynamickém modelu.

S využitím schématu na obr. 2.15 je možné psát tři rovnice silové rovnováhy: dvě složkové podmínky ve směru os  $X$  a  $Y$  a jednu momentovou podmínku rovnováhy ve středu hmotnosti vozidla  $S$ , tedy

$$-m\ddot{X} - S_1 \sin(\Psi + \delta) - S_2 \sin \Psi + H_1 \cos(\Psi + \delta) + H_2 \cos \Psi = 0, \quad (2.35)$$

$$-m\ddot{Y} + S_1 \cos(\Psi + \delta) + S_2 \cos \Psi + H_1 \sin(\Psi + \delta) + H_2 \sin \Psi = 0 \quad (2.36)$$

a

$$-I_z \ddot{\Psi} - M_{S1} - M_{S2} + S_1 l_f \cos \delta - S_2 l_r + H_1 l_f \sin \delta = 0. \quad (2.37)$$

Se znalostí směrových úchylek  $\beta_1$  a  $\beta_2$  z rovnic (2.31) a (2.32) lze dosadit do vztahů (2.2) a (2.3) a vyjádřit tak boční vodící síly  $S_i$  a vratné momenty  $M_{S_i}$ :

$$S_1 = 2C_\beta \beta_1 = 2C_\beta \left[ \delta - \arctg \left( \frac{\dot{\Psi} l_f}{v_S \cos \beta} + \operatorname{tg} \beta \right) \right] \quad (2.38)$$

$$S_2 = 2C_\beta \beta_2 = -2C_\beta \arctg \left( -\frac{\dot{\Psi} l_r}{v_S \cos \beta} + \operatorname{tg} \beta \right) \quad (2.39)$$

$$M_{S1} = 2C_{M\beta} \beta_1 = 2C_{M\beta} \left[ \delta - \arctg \left( \frac{\dot{\Psi} l_f}{v_S \cos \beta} + \operatorname{tg} \beta \right) \right] \quad (2.40)$$

$$M_{S2} = 2C_{M\beta} \beta_2 = -2C_{M\beta} \arctg \left( -\frac{\dot{\Psi} l_r}{v_S \cos \beta} + \operatorname{tg} \beta \right) \quad (2.41)$$

Ve vztazích (2.38) až (2.41) se nachází konstanta 2, protože jde o odvození jednostopého modelu, který sice může navozovat dojem dvoukolového vozidla, ale jak již bylo zmíněno v sekci 2.2.1, v místech  $A$  a  $B$  jsou kola dvě.

Jedinými neznámými veličinami v rovnicích (2.35), (2.36) a (2.37), které je nutné zjistit pro sestavení pohybových rovnic, jsou hnací síly  $H_1$  a  $H_2$ . Ty nelze z aktuálního modelu získat, proto jsou uvažovány jako další vstup do modelu.

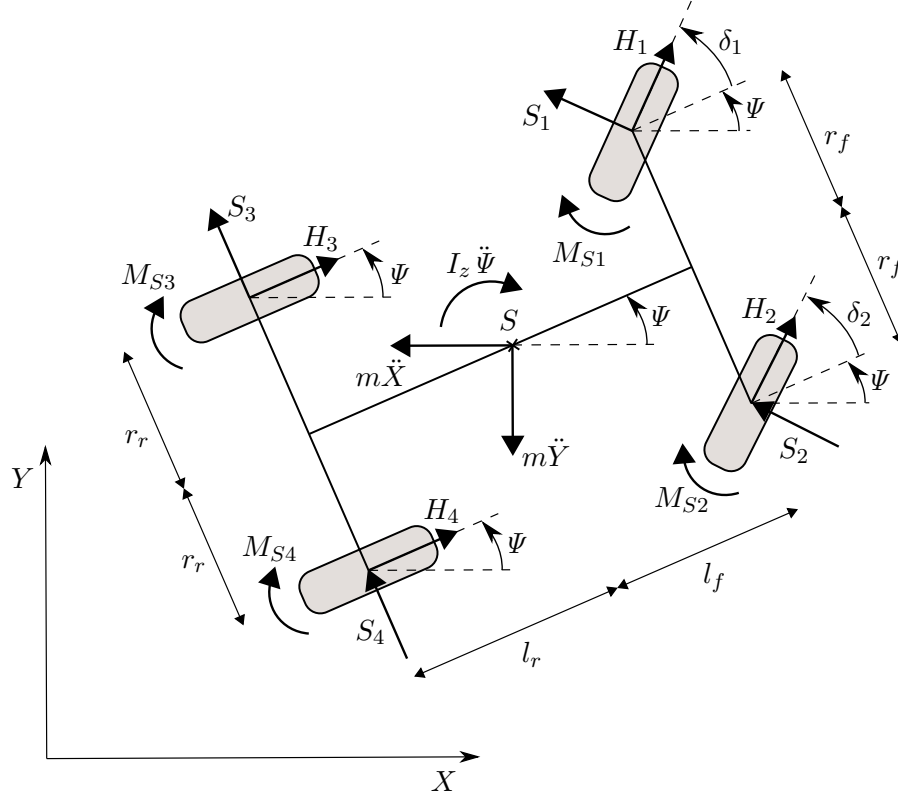
Přehled důležitých rovnic tohoto modelu je k dispozici v příloze A.1.2.

### 2.2.3. Dvoustopý dynamický model se sedmi stupni volnosti

Další možností, jak modelovat vozidlo, je rozšířit výše zmíněný model o příčný rozměr. Vznikne tak model dvoustopý, který je odvozen také v [15]. Jeho výhodou je fakt, že model má možnost podat informaci o jeho chování na obou stranách vozidla (bráno ve smyslu podélné osy), které může být při průjezdu zatáčkou odlišné. Nevýhodou je složitější matematický model. Pokud jsou také zavedeny další stupně volnosti pro natočení jednotlivých kol, je tím odstraněna nevýhoda předchozího modelu – hnací síly  $H_i$  je možné získat z Dugoffova modelu tření a také nemusí platit požadavek na malé směrové úchyly  $\beta_i$  kol.

**Silové působení**

Jak již bylo uvedeno, model, který zde bude odvozen, je podobný jednostopému modelu z kapitoly 2.2.2, je pouze rozšířen o příčný rozměr, proto i postup jeho odvození je obdobný. Podobnost lze snadno spatřit při porovnávání obr. 2.15 s obr. 2.16, na kterých je zobrazeno silové působení v obou modelech.



Obrázek 2.16.: Relevantní silová působení ve dvoustopém dynamickém modelu. [15]

Z obr. 2.16 lze vyjádřit tři rovnice silové rovnováhy – složkovou podmínku ve směru osy  $X$ , složkovou podmínku ve směru osy  $Y$  a momentovou podmínku ve středu hmotnosti  $S$ :

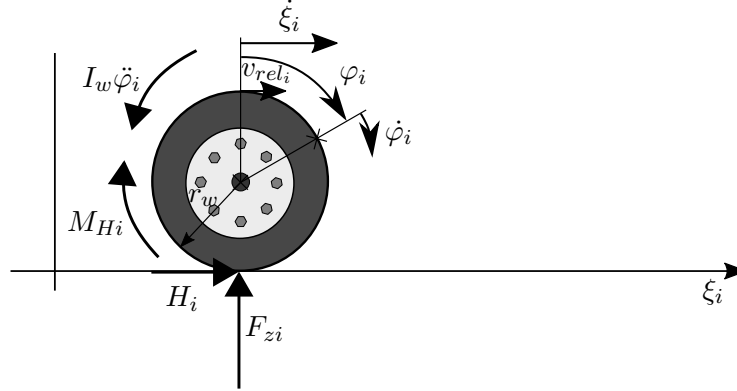
$$-m\ddot{X} - S_1 \sin(\Psi + \delta_1) - S_2 \sin(\Psi + \delta_2) - S_3 \sin \Psi - S_4 \sin \Psi + H_1 \cos(\Psi + \delta_1) + H_2 \cos(\Psi + \delta_2) + H_3 \cos \Psi + H_4 \cos \Psi = 0 \quad (2.42)$$

$$-m\ddot{Y} + S_1 \cos(\Psi + \delta_1) + S_2 \cos(\Psi + \delta_2) + S_3 \cos \Psi + S_4 \cos \Psi + H_1 \sin(\Psi + \delta_1) + H_2 \sin(\Psi + \delta_2) + H_3 \sin \Psi + H_4 \sin \Psi = 0 \quad (2.43)$$

$$I_z \ddot{\Psi} + M_{S1} + M_{S2} + M_{S3} + M_{S4} - S_1 r_f \sin \delta_1 - S_1 l_f \cos \delta_1 + S_2 r_f \sin \delta_2 - S_2 l_f \cos \delta_2 + S_3 l_r + S_4 l_r + H_1 r_f \cos \delta_1 - H_1 l_f \sin \delta_1 - H_2 r_f \cos \delta_2 - H_2 l_f \sin \delta_2 + H_3 r_r - H_4 r_r = 0 \quad (2.44)$$

Tyto tři rovnice představují tři ze sedmi vlastních pohybových rovnic vozidla.

Další čtyři vlastní pohybové rovnice náležejí jednotlivým kolům vozidla, k jejich odvození je využít obr. 2.17, ve kterém je znázorněn řez střední rovinou  $i$ -tého kola vozidla. Osa  $\xi_i$  je vodorovnou osou, která leží ve střední rovině kola (a je též znázorněna v obr. 2.1 a 2.2).



Obrázek 2.17.: Tření pneumatiky kola s vozovkou.

Jelikož valivý odpor kol v tomto modelu není uvažován, síla  $F_{zi}$  působí na pneumatiku na svislé nositelce procházející středem kola. Tato síla je způsobena zatížením pneumatiky, a jelikož je předpokládáno rovnoměrné rozložení hmotnosti  $m$  vozidla na všechna čtyři kola, tak velikost  $F_{zi}$  pro každé kolo je

$$F_{zi} = \frac{mg}{4}. \quad (2.45)$$

Dalšími relevantními veličinami jsou poloměr kola  $r_w$ , úhel natočení kola  $\varphi_i$ , úhlová rychlost kola  $\dot{\varphi}_i$ , rychlost  $\dot{\xi}_i$  pohybu kola ve směru osy  $\xi_i$ , hnací moment  $M_{Hi}$ , setrvačný moment  $I_w \dot{\varphi}_i$ , kde  $I_w$  je moment setrvačnosti kola ke své ose otáčení, a hnací síla  $H_i$ . Veličina  $v_{rel_i}$  označuje relativní rychlost pláště pneumatiky vůči „pohybu“ vozovky a platí pro ni vztah

$$v_{rel_i} = r_w \dot{\varphi}_i - \dot{\xi}_i. \quad (2.46)$$

Tato rychlost figuruje v čitateli výrazu (2.8) pro výpočet podélného skluzu  $\sigma_i$  a objasňuje tak podstatu tohoto vztahu z kapitoly 2.1.3.

Pro rovnováhu momentů sil ke středu kola musí platit podmínka

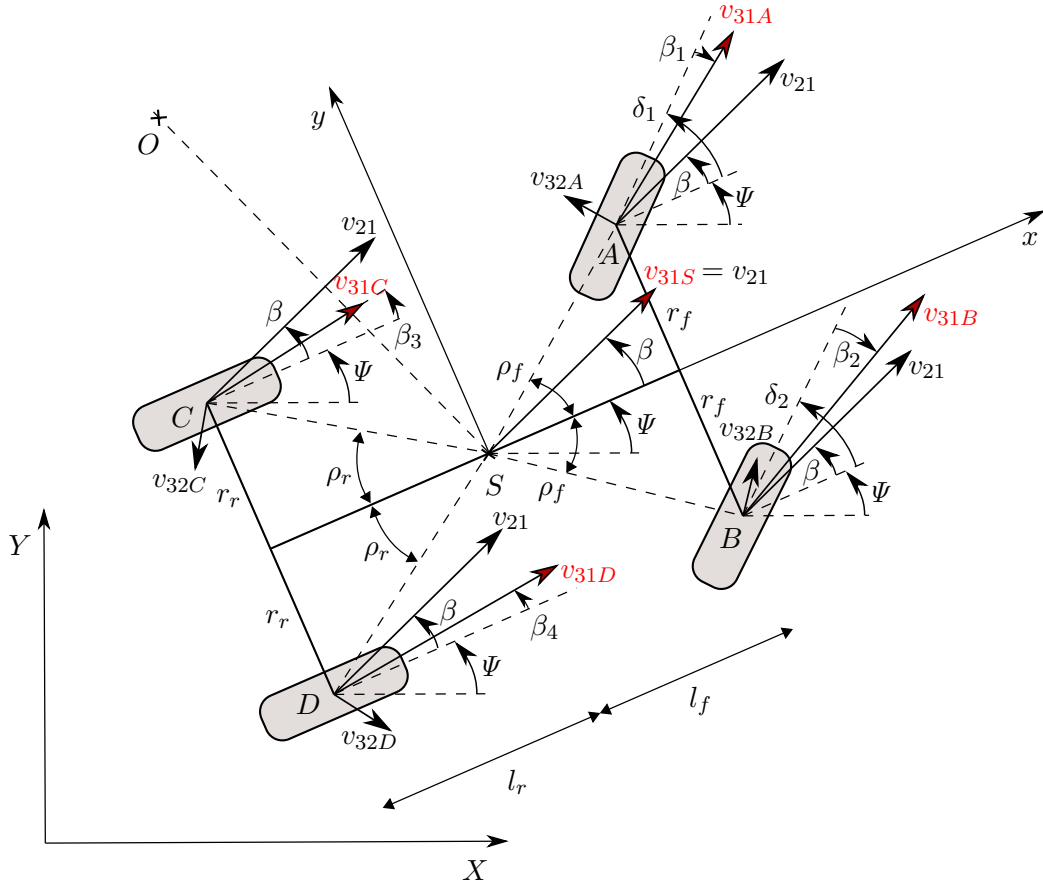
$$M_{Hi} - r_w H_i - I_w \ddot{\varphi}_i = 0, \quad (2.47)$$

která pro  $i = 1, 2, 3, 4$  představuje zbývající čtyři vlastní pohybové rovnice modelu.

V rovnicích figurují zatím neznámá natočení  $\delta_{1,2}$  jednotlivých předních kol a také hnací momenty  $M_{Hi}$ . Ty budou vyjádřeny v kapitolách 2.3 a 2.4. Dále se v rovnicích vyskytují neznámé boční vodící síly  $S_i$ , vratné momenty  $M_{Si}$  a hnací síly  $H_i$ . Síly  $S_i$  a  $H_i$  lze vyjádřit pomocí Dugoffova modelu tření v kapitole 2.1.3, tedy pomocí rovnic (2.4) až (2.8). Je zapotřebí vyjádřit rychlosti  $\dot{\xi}_i$  posuvného pohybu kol ve směru jejich osy a stejně jako u jednostopého dynamického modelu je i v tomto modelu nutné vypočítat směrové úchytky  $\beta_i$  kol.

### Směrové úchytky a rychlosti

Směrové úchytky lze získat rozkladem rychlostí na jednotlivých kolech, díky němuž je možno užít stejného postupu jako v kapitole 2.2.2. Rozklad rychlostí je proveden v obr. 2.18.



Obrázek 2.18.: Základní rozklad rychlostí v bodech A, B, C, D, S pro dvoustopý dyn. model.

Obecný rovinný pohyb vozidla (symbolicky označen jako pohyb 31) je rozložen na absolutní pohyb posuvný (pohyb 21), který je určen pohybem bodu  $S$  po kružnici s okamžitým středem  $O$ , a na relativní pohyb rotační (pohyb 32) kolem bodu  $S$ . Pohyb je tedy rozložen stejně jako v případě jednostopého vozidla, proto je možné využít i zmíněné rovnice (2.27), (2.28) a (2.34). Dosazením do (2.28) lze získat velikosti relativních rychlostí v bodech A, B, C, D jako

$$v_{32A} = \dot{\Psi} t_f, \quad (2.48)$$

$$v_{32B} = \dot{\Psi} t_f, \quad (2.49)$$

$$v_{32C} = \dot{\Psi} t_r, \quad (2.50)$$

$$v_{32D} = \dot{\Psi} t_r, \quad (2.51)$$

kde

$$t_f = |SA| = |SB| = \sqrt{r_f^2 + l_f^2}, \quad (2.52)$$

$$t_r = |SC| = |SD| = \sqrt{r_r^2 + l_r^2}. \quad (2.53)$$

Rychlost  $v_{21}$  je vhodné rozložit do os  $x$  a  $y$  lokálního souřadnicového systému jako

$$v_{21x} = v_{21} \cos \beta, \quad (2.54)$$

$$v_{21y} = v_{21} \sin \beta, \quad (2.55)$$

kde pro rychlost  $v_{21}$  a směrovou úchylku  $\beta$  platí stejné vztahy jako v jednostopém modelu, tedy rovnice (2.27) a (2.34).

To samé lze udělat s rychlostmi  $v_{32i}$  relativního pohybu (směry těchto rychlostí v souř. systému  $xy$  jsou respektovány v podobě znamének):

$$v_{32Ax} = -v_{32A} \sin \rho_f \quad (2.56)$$

$$v_{32Ay} = v_{32A} \cos \rho_f \quad (2.57)$$

$$v_{32Bx} = v_{32B} \sin \rho_f \quad (2.58)$$

$$v_{32By} = v_{32B} \cos \rho_f \quad (2.59)$$

$$v_{32Cx} = -v_{32C} \sin \rho_r \quad (2.60)$$

$$v_{32Cy} = -v_{32C} \cos \rho_r \quad (2.61)$$

$$v_{32Dx} = v_{32D} \sin \rho_r \quad (2.62)$$

$$v_{32Dy} = -v_{32D} \cos \rho_r \quad (2.63)$$

Ve výše uvedených vztazích figurují úhly  $\rho_f$  a  $\rho_r$ , které je možné zapsat jako

$$\rho_f = \operatorname{arctg} \frac{r_f}{l_f} \quad (2.64)$$

a

$$\rho_r = \operatorname{arctg} \frac{r_r}{l_r}. \quad (2.65)$$

Směrové úchylky  $\beta_i$  na jednotlivých kolech je možné psát jako

$$\beta_j = \delta - \operatorname{arctg} \left( \frac{v_{31my}}{v_{31mx}} \right) = \delta - \operatorname{arctg} \left( \frac{v_{21y} + v_{32my}}{v_{21x} + v_{32mx}} \right), \quad j = 1, 2, \quad m = A, B, \quad (2.66)$$

$$\beta_k = -\operatorname{arctg} \left( \frac{v_{31ny}}{v_{31nx}} \right) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{v_{21y} + v_{32ny}}{v_{21x} + v_{32nx}} \right), \quad k = 3, 4, \quad n = C, D, \quad (2.67)$$

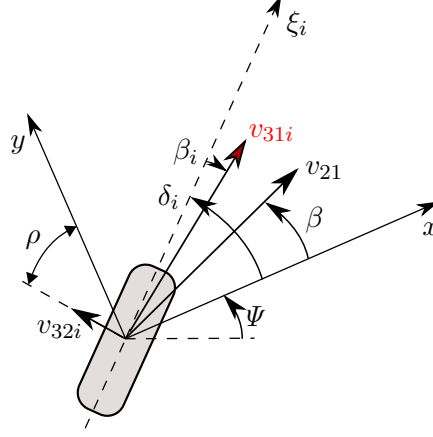
konkrétně

$$\beta_1 = \delta - \operatorname{arctg} \left( \frac{v_{21} \sin \beta + v_{32A} \cos \rho_f}{v_{21} \cos \beta - v_{32A} \sin \rho_f} \right) = \delta - \operatorname{arctg} \left( \frac{v_S \sin \beta + \dot{\Psi} t_f \cos \rho_f}{v_S \cos \beta - \dot{\Psi} t_f \sin \rho_f} \right), \quad (2.68)$$

$$\beta_2 = \delta - \operatorname{arctg} \left( \frac{v_{21} \sin \beta + v_{32B} \cos \rho_f}{v_{21} \cos \beta + v_{32B} \sin \rho_f} \right) = \delta - \operatorname{arctg} \left( \frac{v_S \sin \beta + \dot{\Psi} t_f \cos \rho_f}{v_S \cos \beta + \dot{\Psi} t_f \sin \rho_f} \right), \quad (2.69)$$

$$\beta_3 = -\operatorname{arctg} \left( \frac{v_{21} \sin \beta - v_{32C} \cos \rho_r}{v_{21} \cos \beta - v_{32C} \sin \rho_r} \right) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{v_S \sin \beta - \dot{\Psi} t_r \cos \rho_r}{v_S \cos \beta - \dot{\Psi} t_r \sin \rho_r} \right), \quad (2.70)$$

$$\beta_4 = -\arctg \left( \frac{v_{21} \sin \beta - v_{32D} \cos \rho_r}{v_{21} \cos \beta + v_{32D} \sin \rho_r} \right) = -\arctg \left( \frac{v_S \sin \beta - \dot{\Psi} t_r \cos \rho_r}{v_S \cos \beta + \dot{\Psi} t_r \sin \rho_r} \right). \quad (2.71)$$



Obrázek 2.19.: Rozklad rychlosti na jediném kole.

Aby bylo možné vypočítat podélný skluz  $\sigma_i$  jednotlivých kol podle vztahu (2.8), je nutné vyjádřit rychlost  $\dot{\xi}_i$  na každém kole. Rychlost  $\dot{\xi}_i$  je průmětem celkové rychlosti  $v_{31i}$  vozidla v místě  $i$ -tého kola. Jelikož je tato rychlost rozložena na rychlosti  $v_{21}$  a  $v_{32i}$ , lze využít alternativní postup jejího výpočtu než pomocí průmětu rychlosti  $v_{31i}$  – přímo ze zmíněných složek  $v_{21}$  a  $v_{32i}$ , k čemuž je využít obr. 2.19:

$$\dot{\xi}_i = v_{31ix} \cos \delta_i + v_{31iy} \sin \delta_i = (v_{21x} + v_{32ix}) \cos \delta_i + (v_{21y} + v_{32iy}) \sin \delta_i \quad (2.72)$$

Po dosazení vztahů (2.48) až (2.51), (2.54) až (2.63) a symbolického vztahu  $v_{21} = v_S$  lze obdržet formule pro jednotlivá kola jako

$$\dot{\xi}_1 = (v_S \cos \beta - \dot{\Psi} d_f \sin \rho_f) \cos \delta + (v_S \sin \beta + \dot{\Psi} t_f \cos \rho_f) \sin \delta, \quad (2.73)$$

$$\dot{\xi}_2 = (v_S \cos \beta + \dot{\Psi} d_f \sin \rho_f) \cos \delta + (v_S \sin \beta + \dot{\Psi} t_f \cos \rho_f) \sin \delta, \quad (2.74)$$

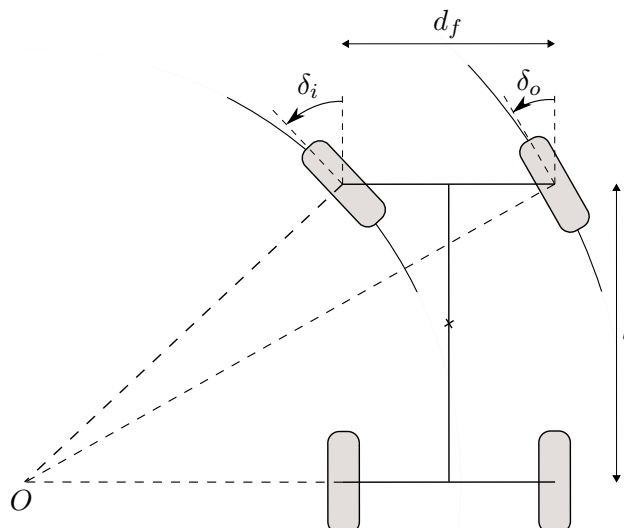
$$\dot{\xi}_3 = v_S \cos \beta - \dot{\Psi} t_r \sin \rho_r, \quad (2.75)$$

$$\dot{\xi}_4 = v_S \cos \beta + \dot{\Psi} t_r \sin \rho_r, \quad (2.76)$$

kde veličiny  $v_S$ ,  $\beta$ ,  $t_f$ ,  $t_r$ ,  $\rho_f$  a  $\rho_r$  byly již vyjádřeny dříve.

### 2.3. Mechanismus směrového řízení

Nedílnou součástí modelu silničního vozidla, které má být schopno směrových manévrů, je mechanismus zatáčení. Tento mechanismus bude využit pouze ve dvoustopém modelu, protože z podstaty modelu jej v jednostopém modelu (ať už kinematickém nebo dynamickém) není potřeba. Tento mechanismus má za úkol převést povely řidiče z volantu na obě přední kola (v této práci je uvažováno pouze řízení zatáčení předních kol).



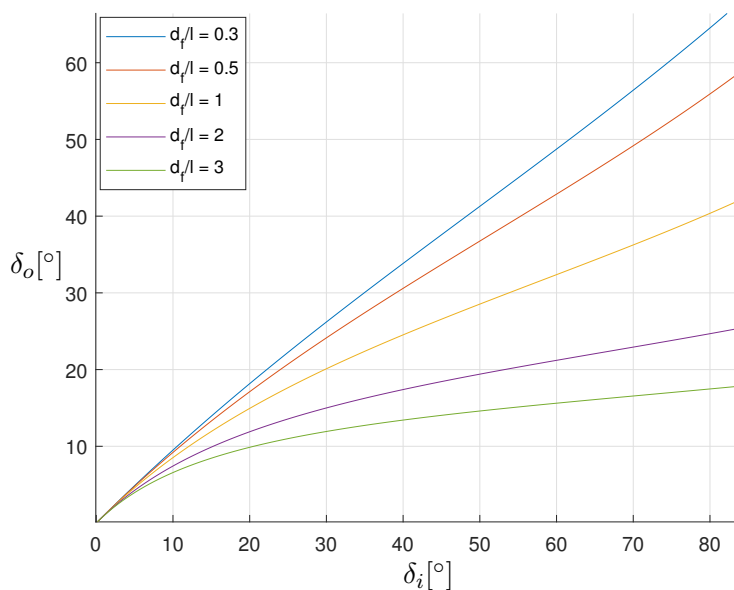
Obrázek 2.20.: Ackermannova podmínka.

### 2.3.1. Ackermannova podmínka

Na rozdíl od jednostopého modelu vozidla, kde byla obě přední kola ve stejném místě, dvoustopý model uvažuje nenulový rozchod kol. Proto také při průjezdu zatáčkou opisují přední kola části dvou soustředných kružnic s různými poloměry. Aby se obě kola po kružnicích odvalovala, musí mezi nimi např. podle [7] platit závislost

$$\cotg \delta_o - \cotg \delta_i = \frac{d_f}{l}, \quad (2.77)$$

kde  $\delta_i$  (resp.  $\delta_o$ ) je úhel natočení vnitřního (resp. vnějšího) předního kola,  $d_f$  je rozchod předních kol a  $l$  je rozvor náprav. Jak je uvedeno v [7], tato kinematická podmínka valení se nazývá Ackermannova podmínka.

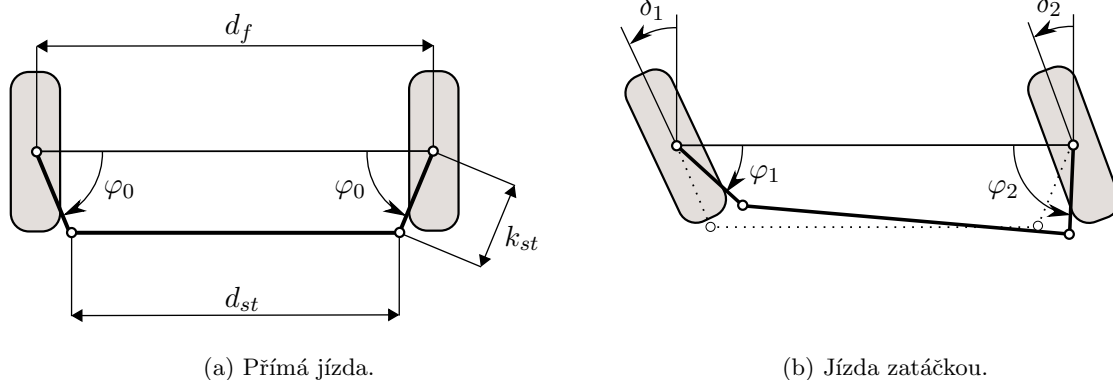
Obrázek 2.21.: Závislost  $\delta_o(\delta_i)$  při splnění Ackermannově podmínce pro různá  $\frac{d_f}{l}$ .



Vyjádří-li se úhel  $\delta_o$  v závislosti na  $\delta_i$  jako

$$\delta_o = \operatorname{arccotg} \left( \frac{d_f}{l} + \cotg \delta_i \right), \quad (2.78)$$

lze vykreslit tuto závislost pro různé hodnoty parametru  $\frac{d_f}{l}$ , jako je tomu na obr. 2.21.



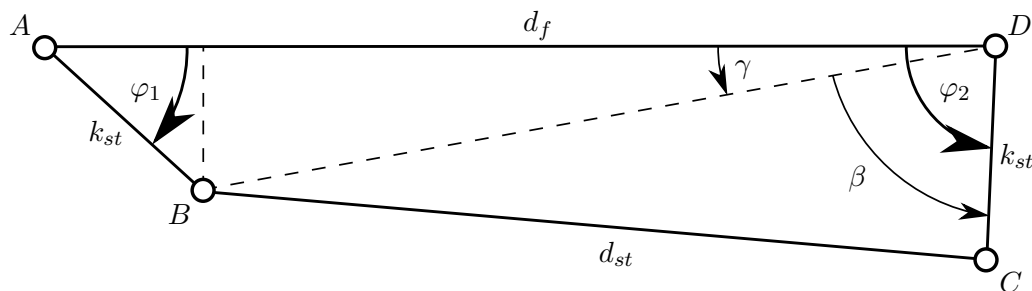
(a) Přímá jízda.

(b) Jízda zatáčkou.

Obrázek 2.22.: Čtyřkloubový mechanismus.

### 2.3.2. Čtyřkloubový mechanismus

Bohužel zatím nebyl sestrojen žádný mechanismus směrového řízení, který by vyhovoval Ackermannově podmínce v celém rozsahu úhlů. Jak je uvedeno v [7], již přes 100 let se v dopravě využívá čtyřkloubový mechanismus ve tvaru rovnoramenného lichoběžníku, jenž je znázorněn na obr. 2.22 ve fázi přímé jízdy a ve fázi zatáčení. Takový řídicí mechanismus má tři základní parametry: rozchod kol  $d_f$ , délku řídicí tyče  $d_{st}$ , délku páky  $k_{st}$ .



Obrázek 2.23.: Čtyřkloubový mechanismus v obecné poloze.

Pro odhalení zdvihové funkce  $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$  je s pomocí obr. 2.23 aplikována trigonometrická metoda.

- $\triangle ABD$ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{k_{st} \sin \varphi_1}{d_f - k_{st} \cos \varphi_1}$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{k_{st} \sin \varphi_1}{d_f - k_{st} \cos \varphi_1} \quad (2.79)$$

$$|BD|^2 = k_{st}^2 + d_f^2 - 2k_{st}d_f \cos \varphi_1 \quad (2.80)$$

- $\triangle BCD$ :

$$\begin{aligned} d_{st}^2 &= |BD|^2 + k_{st}^2 - 2|BD|k_{st} \cos \beta \\ \cos \beta &= \frac{|BD|^2 + k_{st}^2 - d_{st}^2}{2|BD|k_{st}} \\ \beta &= \arccos \frac{|BD|^2 + k_{st}^2 - d_{st}^2}{2|BD|k_{st}} \end{aligned} \quad (2.81)$$

Kombinací vztahů (2.79), (2.80) a (2.81) lze získat  $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$  jako

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \gamma + \beta = \\ &= \arctg \frac{k_{st} \sin \varphi_1}{d_f - k_{st} \cos \varphi_1} + \arccos \frac{2k_{st}^2 + d_f^2 - 2k_{st}d_f \cos \varphi_1 - d_{st}^2}{2k_{st} \sqrt{k_{st}^2 + d_f^2 - 2k_{st}d_f \cos \varphi_1}}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

V jednostopém modelu vozidla v kapitole 2.2 bylo uvažováno, že úhel  $\delta$  natočení předních kol byl průměrem natočení vnitřního kola  $\delta_i$  a vnějšího kola  $\delta_o$ . U dvoustopého modelu lze obdobně stanovit, že vstupní úhel  $\delta$  do mechanismu řízení bude vždy průměrem úhlu natočení  $\delta_1$  levého kola a  $\delta_2$  pravého kola:

$$\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \quad (2.83)$$

Jelikož v této práci není implementován převod natočení úhlu volantu na vstupní úhel  $\delta$  čtyřkloubového mechanismu (jinak řečeno, je uvažována dokonale tuhá převodovka řízení s poměrem úhlu natočení volantu a úhlu  $\delta$  rovným 1), lze říci, že se tento vstupní úhel  $\delta$  bude označovat jako úhel natočení volantu.

Z obr. 2.22b lze vyčíst, že platí rovnice

$$\delta_1 = \varphi_0 - \varphi_1, \quad (2.84)$$

$$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_0. \quad (2.85)$$

Dosazením těchto vztahů do rovnice (2.83) vznikne rovnost

$$\delta = \frac{\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_0}{2} \quad (2.86)$$

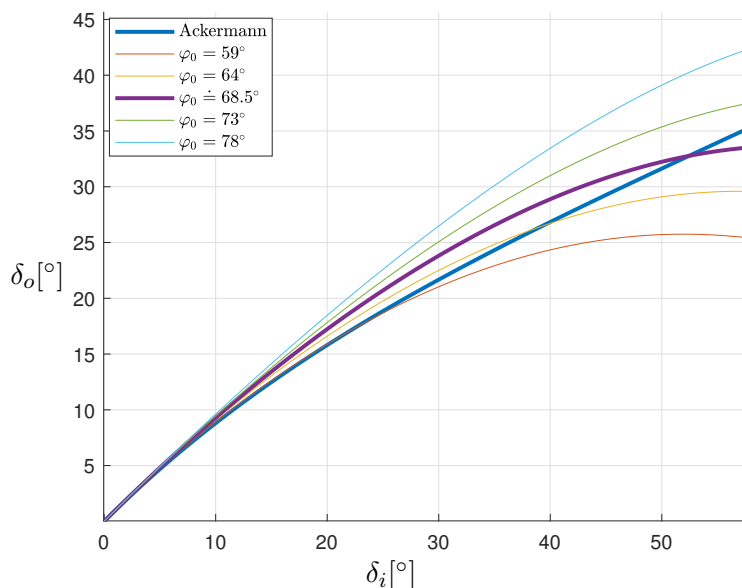
a její úpravou je obdržen implicitní předpis pro výpočet úhlu  $\varphi_1$

$$\varphi_2(\varphi_1) - \varphi_1 - 2\delta = 0, \quad (2.87)$$

kde  $\varphi_2(\varphi_1)$  je již vyjádřená zdvihová funkce (2.82).

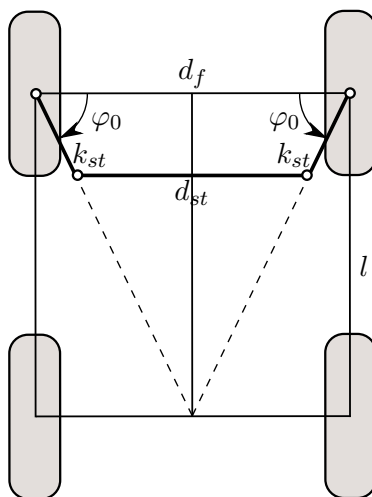
### 2.3.3. Volba parametrů čtyřkloubového mechanismu

Jak již bylo zmíněno dříve, neexistuje žádný mechanismus zajišťující Ackermannovo řízení (řízení splňující Ackermannovu podmínku v celém rozsahu úhlů), viz např. [7]. Na obr. 2.24 jsou vykresleny závislosti  $\delta_o(\delta_i)$  pro konkrétní  $\frac{d_f}{l} \doteq 0,785$ ,  $k_{st} = 0,15$  m. Různé křivky odpovídají různým volbám úhlu  $\varphi_0$  a všechny lze porovnat s Ackermannovým řízením.



Obrázek 2.24.: Závislost  $\delta_o(\delta_i)$  pro různé volby  $\varphi_0$  a konkrétní  $\frac{d_f}{l}$  a  $k_{st}$ .

Jak je vidět, optimalizací by bylo možné najít parametry čtyřkloubového mechanismu tak, aby celková odchylna od Ackermannova řízení byla ve smyslu nějakého kritéria (např. metoda nejmenších čtverců) nejmenší. V sériové výrobě automobilů se ale design mechanismu odhaduje tak, že průsečík prodloužení pák mechanismu leží ve středu zadní nápravy (obr. 2.25). Celková odchylna takového směrového řízení od Ackermannova řízení je potom dostatečně malá (viz porovnání na obr. 2.24 – křivka pro  $\varphi_0 \doteq 68.5^\circ$  a pro Ackermannovo řízení).<sup>3</sup>



Obrázek 2.25.: Design čtyřkloubového mechanismu.

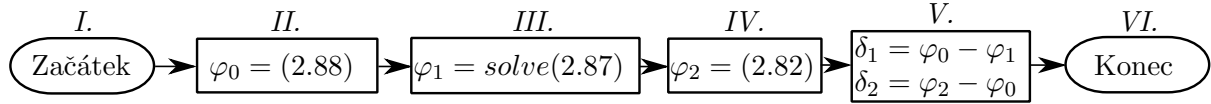
Z obr. 2.25 lze snadno odvodit, že pro velikost úhlu  $\varphi_0$  a délku řídicí tyče  $d_{st}$  platí

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{2l}{d_f}, \quad (2.88)$$

<sup>3</sup>Hodnota  $\varphi_0 \doteq 68.5^\circ$  vypočítána na základě vztahu (2.88).

$$d_{st} = d_f - 2k_{st} \cos \varphi_0. \quad (2.89)$$

Aby byl zřetelný postup výpočtu natočení obou kol  $\delta_1$  a  $\delta_2$ , na obr. 2.26 je uveden krátký vývojový diagram.



Obrázek 2.26.: Vývojový diagram výpočtu natočení kol.

Poznámky k jednotlivým krokům ve vývojovém diagramu v obr. 2.26:

- I. Začátek: Načtení parametrů čtyřkloubového mechanismu a aktuálního úhlu  $\delta$  natočení volantu.
- II. Výpočet  $\varphi_0$  – dosazení do rovnice (2.88).
- III. Výpočet  $\varphi_1$  – vyřešení rovnice (2.87) pro konkrétní  $\delta$ .
- IV. Výpočet  $\varphi_2$  – dosazení do (2.82).
- V. Výpočet  $\delta_1$  a  $\delta_2$  – dosazení do (2.84) a (2.85).
- VI. Konec: Výstupem jsou hodnoty úhlů  $\delta_1$  a  $\delta_2$ .

## 2.4. Pohon vozidla

Následující část pojednává o konkrétní implementaci pohonu modelovaného vozidla a následně jeho převodu a rozvodu na kola vozidla.

### 2.4.1. Charakteristika spalovacího motoru

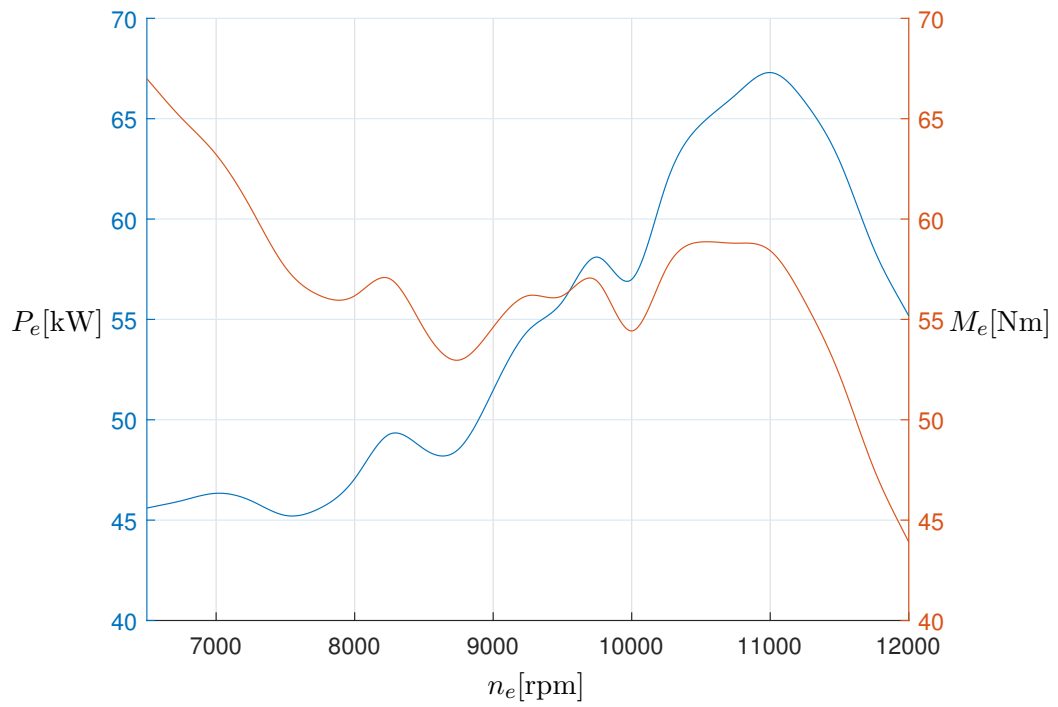
Uvažuje-li se reálný spalovací motor, pak takový motor generuje proměnlivý točivý moment a výkon závislý na aktuálních otáčkách motoru. Z tohoto důvodu se sestavují závislosti točivého momentu či výkonu na otáčkách motoru a takové závislosti se nazývají otáčkové charakteristiky. Charakteristik motoru existuje celá řada, tento text však pracuje pouze s otáčkovými charakteristikami.

Na obr. 2.27 je na základě [12] zachycena výkonová a momentová otáčková charakteristika motoru aplikovaná na dvoustupý dynamický model, kde  $n_e$  značí otáčky motoru,  $P_e$  výkon motoru a  $M_e$  výstupní točivý moment. Mezi veličinami platí závislost

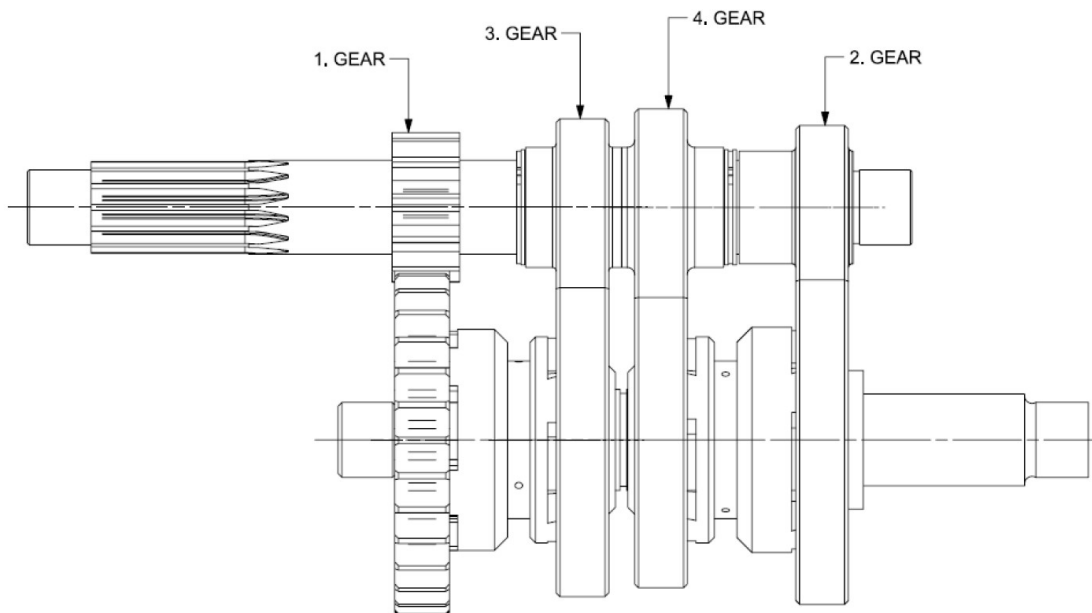
$$P_e = \omega_e M_e, \quad (2.90)$$

kde  $\omega_e$  je úhlová rychlost otáček motoru a lze ji získat z otáček motoru jako

$$\omega_e = \frac{\pi}{30} n_e. \quad (2.91)$$



Obrázek 2.27.: Využitá otáčková charakteristika spalovacího motoru.



Obrázek 2.28.: Převodovka vozidla. [12]

### 2.4.2. Převody

Je uvažováno, že otáčky motoru jsou v každém okamžiku kinematicky svázány s otáčkami kol (spojka a poddajnost celého hnacího ústrojí nejsou uvažovány). Aby bylo možné s měnící se rychlostí jízdy vozidla (tedy také s měnícími se otáčkami kol) udržet otáčky motoru v efektivním pracovním rozmezí, je nutné, aby ve vozidle byla instalována převodová soustava, jež bude schopná při určité změně rychlosti měnit poměr otáček motoru a kol.

Prvním převodem, který se nachází mezi motorem a převodovkou, je statický převod  $s_t$ , jehož převodový poměr činí

$$s_t = 2,073. \quad (2.92)$$

Na obr. 2.28 je zobrazen náčrt převodovky, jejíž převodové stupně jsou využity při vývoji modelu v této práci. Jednotlivé převodové poměry vstupních a výstupních otáček  $g_k$  mají tyto hodnoty:

$$\begin{aligned} g_1 &= 2,583 \\ g_2 &= 2,153 \\ g_3 &= 1,866 \\ g_4 &= 1,563 \end{aligned} \quad (2.93)$$

Následně je mezi převodovkou a zadními koly ještě finální převod, jehož převodový poměr má hodnotu

$$f_d = 2,92. \quad (2.94)$$

### 2.4.3. Řazení

Řazení převodového stupně je obecně složitý rozhodovací proces, ve kterém hrají roli různé faktory (rychlost vozidla, otáčky motoru, sklon vozovky, agresivita jízdy atd.), a má jej na starosti buď samotný řidič vozidla, nebo komplexní algoritmy softwaru automatické převodovky. V této části je uveden postup jak implementovat jednoduché řazení, které mění rychlostní stupně na základě jediného faktoru – rychlosti vozidla.

Jak již bylo zmíněno, otáčky kol vozidla a otáčky motoru jsou provázány, existuje mezi nimi pouze převodový poměr. Dá se tedy určit závislost mezi vstupními otáčkami (otáčky motoru  $n_e$ ) a výstupními otáčkami (otáčky kol  $n_w$ ). Tato závislost je zavedena ve tvaru  $n_e = n_e(n_w)$ , tedy jako

$$n_e = n_w s_t g_k f_d, \quad (2.95)$$

kde  $s_t$  je statický převod,  $g_k$  je aktuální převodový poměr v převodovce a  $f_d$  je finální převod.

Otáčky  $n_w$  zadních kol je vhodné převést na úhlovou rychlost  $\omega_w$  otáčení zadních kol pomocí vztahu analogického s (2.91), tedy jako

$$\omega_w = \frac{\pi}{30} n_w. \quad (2.96)$$

Jelikož však úhlové rychlosti jednotlivých zadních kol  $\dot{\varphi}_3$  a  $\dot{\varphi}_4$  nejsou vždy stejné, úhlová rychlost  $\omega_w$  je za účelem zjednodušení uvažována jako jejich průměr, tedy

$$\omega_w = \frac{\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4}{2}. \quad (2.97)$$

Kombinací vztahů (2.95), (2.96) a (2.97) lze získat závislost mezi úhlovou rychlostí  $\dot{\varphi}_i$  obou zadních kol a otáčkami motoru  $n_e$  jako

$$n_e = \frac{30}{\pi} s_{tgkfd} \omega_w = \frac{15}{\pi} s_{tgkfd} (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4). \quad (2.98)$$

Zavede-li se omezení, že vozidlo jede po přímé dráze a kola se po vozovce odvalují, pak úhlová rychlost  $\omega_w$  a rychlost pohybu vozidla  $v$  jsou spolu kinematicky svázány vztahem

$$v = \omega_w r_w, \quad (2.99)$$

kde  $r_w$  je poloměr kola.

V takovém případě lze vyjádřit závislost mezi otáčkami motoru  $n_e$  a rychlostí  $v$  pohybu vozidla, jež je získána kombinací (2.98) a (2.99), jako

$$n_e = \frac{30}{\pi} s_{tgkfd} \frac{v}{r_w}, \quad (2.100)$$

respektive

$$v = \frac{\pi}{30} \frac{r_w}{s_{tgkfd}} n_e. \quad (2.101)$$

Jelikož kolo má možnost prokluzu a pohybuje se po zakřivené trajektorii, vztahy (2.99), (2.100) a (2.101) obecně neplatí. Je však možné je využít k určení fiktivních<sup>4</sup> otáček motoru  $n_{ef}$ , které jsou vyjádřeny stejným vztahem jako (2.100), tedy

$$n_{ef} = \frac{30}{\pi} s_{tgkfd} \frac{v}{r_w} \quad (2.102)$$

a pro rychlost platí obdobný vztah jako (2.100), tedy

$$v = \frac{\pi}{30} \frac{r_w}{s_{tgkfd}} n_{ef}. \quad (2.103)$$

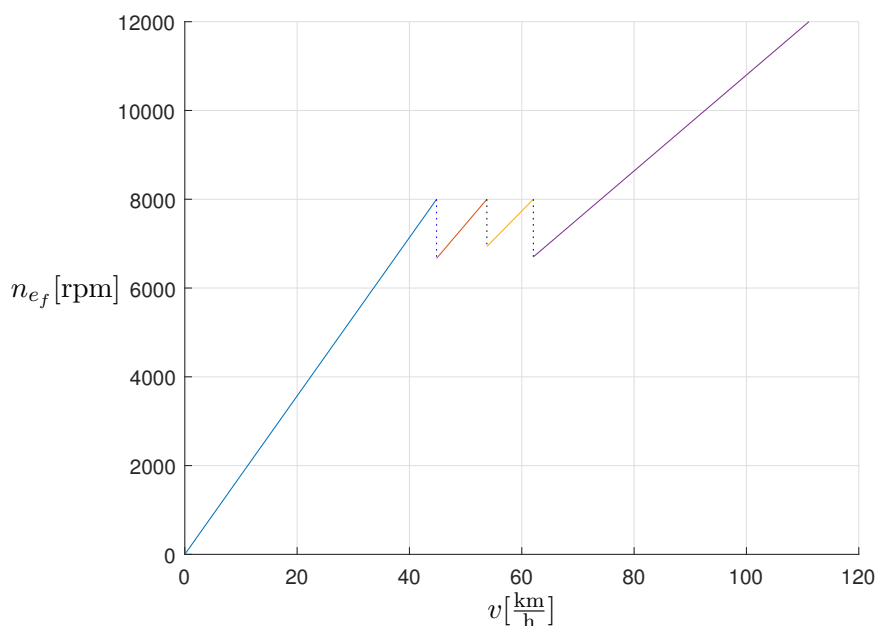
Pokud je následně zvolena hranice  $N_e$  fiktivních otáček  $n_{ef}$  motoru například  $N_e = 8000$  rpm, při kterých vozidlo řadí vyšší rychlostní stupeň, lze na základě vztahu (2.100) graficky znázornit závislost fiktivních otáček  $n_{ef}$  motoru na rychlosti  $v$ , jako je tomu na obr. 2.29.

Důvodem, proč bylo provedeno toto odvození, je zjištění hranic  $V_k$  rychlosti  $v$ , při jejichž překročení se řadí vyšší rychlostní stupeň. Pro uvedené převodové poměry a řazení na hranici fiktivních otáček motoru  $N_e = 8000$  rpm jsou pak jednotlivé  $V_k$  dopočítány na základě vztahu (2.103) jako

$$\begin{aligned} V_1 &\doteq 44,830 \text{ km/h,} \\ V_2 &\doteq 53,784 \text{ km/h,} \\ V_3 &\doteq 62,056 \text{ km/h.} \end{aligned} \quad (2.104)$$

---

<sup>4</sup>Fiktivních, jelikož otáčky jsou vypočítány za předpokladu uvedeném výše. Reálné otáčky motoru mohou být odlišné. Pro účel použití je však takové zjednodušení dostačující.


 Obrázek 2.29.: Závislost  $n_{ef}(v)$ .

#### 2.4.4. Točivý moment na zadních kolech

Výkon  $P_e(n_e)$  a točivý moment  $M_e(n_e)$  motoru se řídí charakteristikou na obr. 2.27, kde otáčky motoru  $n_e$  jsou dopočítány na základě vztahu (2.98). Dále je uvažováno, že ve vozidle je instalován otevřený diferenciál. Točivý moment  $M_{dif}$  vstupující do diferenciálu je tak rovnoměrně rozdělen na obě zadní kola. Proto platí, že maximální<sup>5</sup> točivé momenty  $M_{3,max}$  a  $M_{4,max}$ , které jsou v daném okamžiku dostupné na obou zadních kolech, mají stejnou hodnotu, a to

$$M_{i,max} = M_{A,max} = \frac{M_{dif}}{2}, \quad i = 3, 4, \quad (2.105)$$

kde  $M_{A,max}$  je maximální točivý moment dostupný na každém ze zadních kol a  $M_{dif}$  je točivý moment vstupující do diferenciálu, který se vypočítá na základě vztahu

$$M_{dif} = \frac{P_e(n_e)}{\omega_{dif}}, \quad (2.106)$$

kde  $\omega_{dif}$  je úhlová rychlost na diferenciálu. Tuto úhlovou rychlost je možné určit v závislosti na úhlové rychlosti  $\omega_e$  otáček motoru a převodech mezi motorem a diferenciálem jako

$$\omega_{dif} = \frac{\omega_e}{stgkfd} \quad (2.107)$$

nebo lépe jako závislost na otáčkách motoru  $n_e$  jako

$$\omega_{dif} = \frac{\frac{\pi}{30}n_e}{stgkfd}. \quad (2.108)$$

Pokud se dosadí vztahy (2.106) a (2.108) do (2.105), vznikne vztah pro výpočet maximálního točivého momentu  $M_{A,max}$  na každém zadním kole jako

$$M_{A,max} = \frac{15}{\pi} \frac{P_e(n_e)stgkfd}{n_e}. \quad (2.109)$$

<sup>5</sup>Skutečné hodnoty hnacích momentů  $M_{Hi}$  podléhají algoritmu řídicímu hnací moment. Více viz kapitola 3.2.



## 3. Modely řízení vozidla

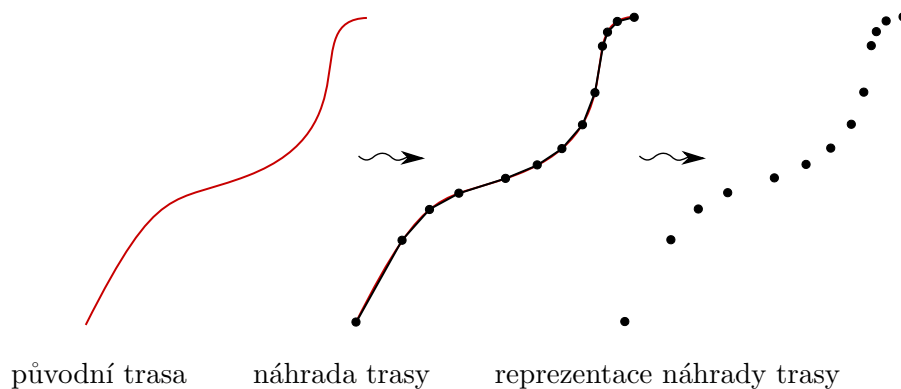
### 3.1. Řízení natočení volantu

Existuje mnoho algoritmů, od triviálních až po velmi sofistikované, které jsou vyvíjeny za účelem automatického řízení zatáčení vozidla. Také idea, jak různé systémy řízení přistupují k problému, může být různá. Jedním z možných přístupů je využití nějakého referenčního bodu na trase (v této práci je označován zkratkou *GP* z anglického *Goal Point*), který poté vozidlo „sleduje“.

Tato práce je zaměřena na implementaci dvou algoritmů řízení natočení volantu, které pracují právě na základně znalosti *GP*. Hledání vhodného *GP* vyžaduje samostatný algoritmus, který je následně aplikován v obou implementovaných algoritmech řízení.

#### 3.1.1. Definování požadované trasy

Jednoduchou reprezentací požadované trasy, jaká je také využita v této práci, je bodová reprezentace [3]. Původní (reálnou) trasu je možné libovolně osázet určitým množstvím bodů. Následně lze spojit sousední body úsečkami. Tyto úsečky pak tvoří náhradu původní trasy. Kvalita této náhrady se odvíjí od množství použitých uzlových bodů (čím více, tím lépe) a také od jejich rozmístění (vhodná je větší hustota v úseku trasy s větší křivostí).



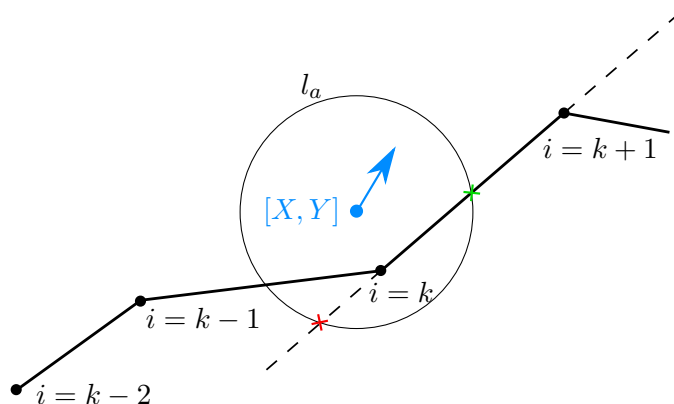
Obrázek 3.1.: Reprezentace požadované trasy.

Pro získání informace o tom, jak vypadá náhrada trasy (od tohoto bodu se tato náhrada bude označovat pouze jako trasa), postačuje pouze znalost jednotlivých uzlových bodů, protože libovolná úsečka je plně definována právě dvěma body. Na obr. 3.1 je vizualizován proces tvorby bodové reprezentace dráhy.

#### 3.1.2. Hledání *GP*

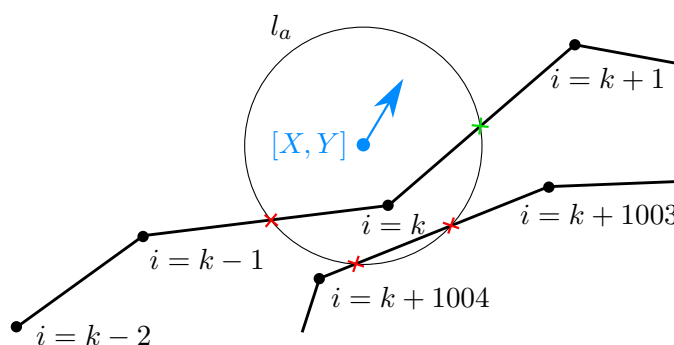
Pro hledání vhodného *GP* je podle [3] důležité vědět, jak daleko je daný uzlový bod od startu. Proto se každému uzlu přiřadí index  $i$ , který ve startovním uzlu nabývá hodnoty  $i = 1$ ,

ve druhém uzlu  $i = 2$  atd. až do posledního uzlu, který má index  $i = N$ , kde  $N$  je počet bodů, jimiž je trasa definována.



Obrázek 3.2.: Hledání bodu ve vzdálenosti  $l_a$  na jednom úseku trasy.

Na  $GP$  je kladena hlavní podmínka taková, že, pokud je to možné, musí být dál na trase než  $GP$  z minulého cyklu a ve vzdálenosti  $l_a$  (z anglického *look-ahead*) od určitého<sup>6</sup> bodu vozidla, který má souřadnice  $[X, Y]$  v globálním souř. systému. Je tedy nutné umět najít průsečík kružnice o poloměru  $l_a$  s úsečkou, jejíž krajní body jsou určeny uzly s indexy  $i = k$  a  $i = k + 1$ , kde  $k \in \{1, \dots, N - 1\}$  (viz obr. 3.2). Pokud je nalezeno takových průsečíků více, vybere se ten, který je na trase nejdál, ale maximálně ve vzdálenosti  $d_{max}$ .

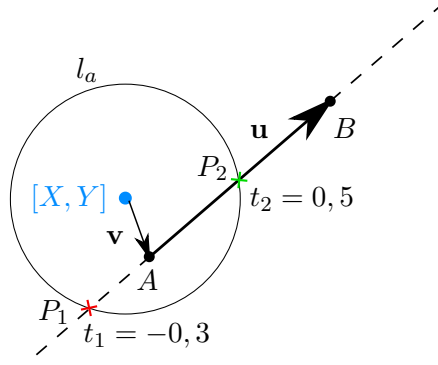


Obrázek 3.3.: Příliš vzdálený průsečík kružnice  $l_a$  a trasy.

Parametr  $d_{max}$  označuje maximální vzdálenost od původního  $GP$ , ve které se maximálně může nacházet nový  $GP$ . Pokud by dvě různé části trasy ležely blízko sebe, toto opatření zabraňuje tomu, že by algoritmus mohl najít průsečík na vzdáleném úseku trasy a zkrátit tak vozidlu trasu o nepatřičně velkou část. Situace je znázorněna na obr. 3.3 (to, že jsou úseky trasy od sebe hodně vzdáleny, reprezentuje index uzlů  $i$ ).

Pokud není nalezen bod, který by splňoval všechny zmíněné podmínky, je za nový  $GP$  považován  $GP$  z minulého cyklu.

<sup>6</sup>Nejčastěji se využívá střed zadní nápravy nebo střed hmotnosti vozidla, který je k tomuto účelu využit také v této práci.



Obrázek 3.4.: Hledání průsečíku kružnice a úsečky.

Jak již bylo zmíněno, algoritmus v každém cyklu simulace jízdy musí být schopen určit průsečík kružnice a přímky. Označí-li se dle obr. 3.4 úsečka s počátečním bodem  $A$  a koncovým bodem  $B$  jako vektor  $\mathbf{u}$  a úsečka tvořená středem kružnice  $[X, Y]$  a uzlem  $A$  jako vektor  $\mathbf{v}$ , potom lze zapsat rovnici přímky  $\overleftrightarrow{AB}$  v parametrickém tvaru jako

$$\begin{aligned} P_x &= A_x + u_x t, \\ P_y &= A_y + u_y t, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Pro libovolný bod  $P$  kružnice se středem v  $[X, Y]$  a poloměrem  $l_a$  platí, že

$$(P_x - X)^2 + (P_y - Y)^2 = l_a^2. \quad (3.2)$$

Aby byl bod průsečíkem přímky a kružnice, musí takový bod splňovat obě podmínky (3.1) a (3.2). Je tedy možné zkombinovat oba předpisy a s využitím definice vektoru  $\mathbf{v}$  lze vzniklou algebraickou rovnicí dále upravit:

$$\begin{aligned} (A_x + u_x t - X)^2 + (A_y + u_y t - Y)^2 &= l_a^2 \\ (v_x + u_x t)^2 + (v_y + u_y t)^2 &= l_a^2 \\ v_x^2 + 2v_x u_x t + u_x^2 t^2 + v_y^2 + 2v_y u_y t + u_y^2 t^2 &= l_a^2 \\ (u_x^2 + u_y^2) t^2 + 2(u_x v_x + u_y v_y) t + (v_x^2 + v_y^2) - l_a^2 &= 0 \\ t^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - l_a^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Označí-li se

$$\begin{aligned} a &:= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \\ b &:= 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \\ c &:= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - l_a^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

potom dvě řešení kvadratické rovnice (3.3) lze zapsat ve tvaru

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (3.5)$$

kde  $t_{1,2}$  představují kořeny kvadratické rovnice, které zároveň dle (3.1) a (3.2) definují průsečíky kružnice a přímky, jíž náleží daná úsečka.

Hodnoty  $t_{1,2}$ , pro které vždy platí  $t_1 \leq t_2$ , určují, v jaké části úsečky se daný průsečík nachází. Na obr. 3.4 je zachycen příklad, kde  $t_1 = -0,3$  a  $t_2 = 0,5$ , což znamená, že první průsečík s přímkou leží ve vzdálenosti 0,3 délky úsečky od bodu  $A$  na opačnou stranu než je bod  $B$ . Z ukázky je jasné, že, pokud  $t_{1,2} \in \langle 0, 1 \rangle$ , průsečík kružnice a přímky leží na dané úsečce.

Celý algoritmus hledání  $GP$ , který byl inspirován algoritmem v publikaci [3] a dále jej rozvádí, je vyjádřen pomocí vývojového diagramu v příloze A.2.

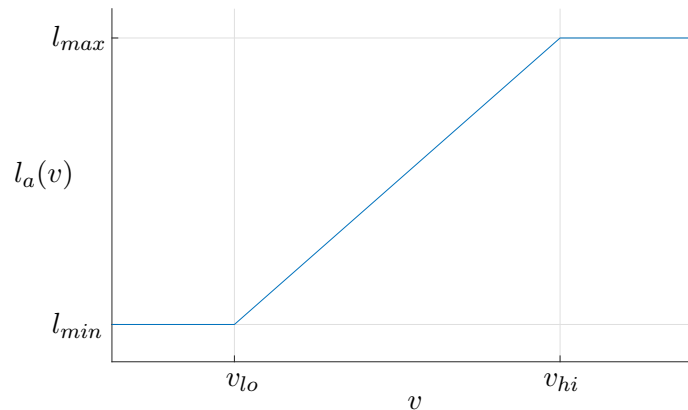
### 3.1.3. Volba vzdálenosti $l_a$

V nejzákladnější formě lze vzdálenost  $l_a$  bodu na vozidle a  $GP$  volit jako konstantu. Jak však uvádí například [11], lepším řešením je tuto vzdálenost určovat na základě aktuální rychlosti  $v$  vozidla. Toto tvrzení vychází také z logické úvahy: pokud jede řidič například po dálnici (vysoká rychlost), nesleduje vozovku těsně před vozidlem, ale hledí více do dálky, aby měl čas na případné korekce řízení. Pokud naopak řidič parkuje (nízká rychlost), oblast, kterou sleduje, není nikterak velká. Převeďte-li se tato myšlenka do matematické podoby, jednou z možností je definovat vzdálenost  $l_a(v)$  následovně:

$$l_a(v) = \begin{cases} l_{min} & \text{pro } v \leq v_{lo}, \\ l_{min} \frac{v_{hi}-v}{v_{hi}-v_{lo}} + l_{max} \frac{v-v_{lo}}{v_{hi}-v_{lo}} & \text{pro } v \in (v_{lo}, v_{hi}), \\ l_{max} & \text{pro } v \geq v_{hi} \end{cases} \quad (3.6)$$

Parametry této po částech definované funkce jsou  $l_{min}$  (resp.  $l_{max}$ ) – dolní (resp. horní) hranice vzdálenosti  $l_a$  a  $v_{lo}$  (resp.  $v_{hi}$ ) – mezní hranice rychlosti.

Takováto závislost je vykreslena na obr. 3.5.



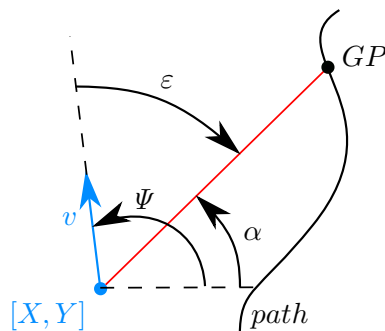
Obrázek 3.5.: Graf závislosti vzdálenosti  $l_a$  na aktuální rychlosti  $v$ .

### 3.1.4. Regulační algoritmy

Pokud je nalezen bod  $GP$ , který bude pro vozidlo bodem, jež má sledovat, je dále nutné nadefinovat, jakou trajektorii se vozidlo bude do tohoto bodu snažit dostat. To je úkol řídicího algoritmu, jehož výstupem je požadované natočení  $\delta$  volantu. Všechny řídicí modely lze podle [1] například rozřítit do tří skupin: geometrické, kinematické a dynamické. Geometrické regulační algoritmy berou v potaz pouze geometrii vozidla, kinematické rozšiřují geometrické o regulaci s ohledem na rychlost a zrychlení vozidla a dynamické řídicí systémy jsou nejkompexnější, kromě zmíněných aspektů uvažují také síly působící na vozidlo a energie relevantních pohybů.

Každý ze tří typů algoritmů má své výhody a nevýhody. Hlavní výhodou geometrických modelů je jejich nenáročnost na výpočetní výkon a s tím spojená rychlost, která je v oboru regulace obecně velmi cennou vlastností. Kinematické algoritmy představují kompromis mezi rychlostí výpočtu a množstvím faktorů ovlivňujících řízení zatáčení. Výhoda dynamického řídicího systému je zřejmá, jeho nevýhoda spočívá v tom, v čem je naopak velmi silný geometrický kontroler – výpočet je kvůli komplexitě modelu výpočetně náročný.

V praxi se nejvíce používá geometrický nebo kinematický systém právě z důvodu jejich jednoduchosti (rychlosti) a stability. V této práci jsou implementovány dva geometrické řídicí algoritmy – *Follow the Carrot* a *Pure Pursuit*.



Obrázek 3.6.: Vizuální reprezentace algoritmu *Follow the Carrot*.

### ***Follow the Carrot* algoritmus**

Nezákladnějším algoritmem výpočtu úhlu natočení volantu je podle článku [1] algoritmus *Follow the Carrot* (lze doslovně přeložit jako „Následuj mrkev“). Toto označení naprosto vystihuje podstatu algoritmu. V duchu názvu lze vozidlo považovat za osla, který sleduje mrkev na tyčce (ve skutečnosti jde o aktuální *GP*) – ať se mrkev pohne kamkoli, osel vždy míří za ní. Převede-li se tato úvaha na aktuální problém, úhel  $\delta$  natočení volantu je přímo závislý na úhlu  $\varepsilon$ , který svírá směr rychlosti vozidla se spojnicí vozidla a aktuálního *GP* (viz obr. 3.6). Úhel  $\delta$  může být buď přímo roven  $\varepsilon$ , nebo úhel  $\varepsilon$  může být přenásoben libovolnou reálnou kladnou konstantou  $C$ . Toto je vyjádřeno rovnicí

$$\delta = C \varepsilon, \quad C > 0, \quad (3.7)$$

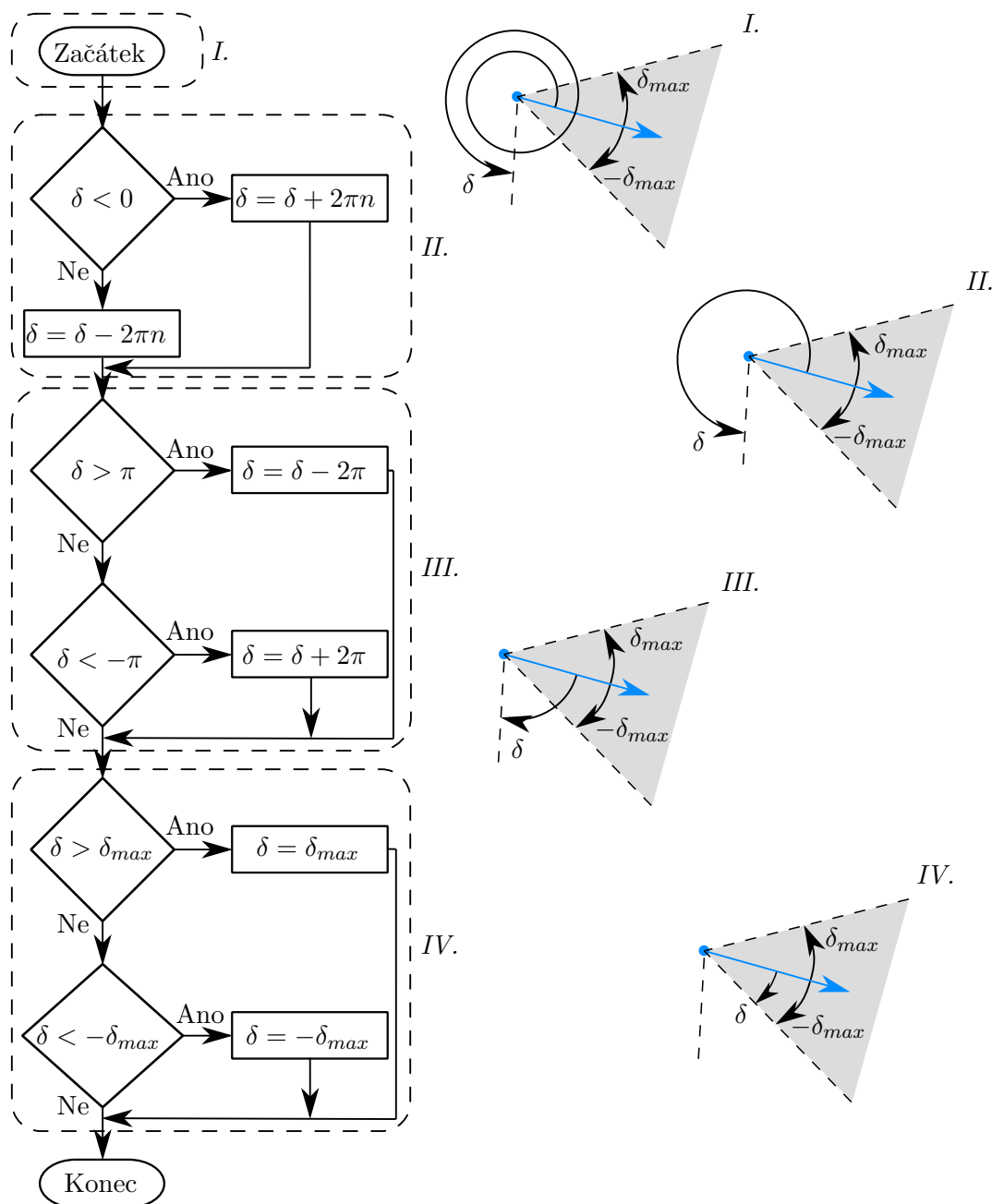
kde pro úhel  $\varepsilon$  platí, že

$$\varepsilon = \alpha - \Psi. \quad (3.8)$$

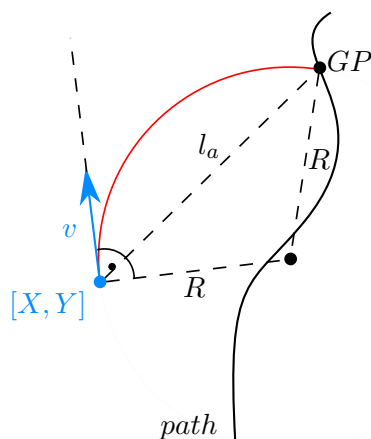
Úhel  $\Psi$  (resp. úhel  $\alpha$ ) je úhel natočení podélné osy vozidla (resp. spojnice bodů  $[X, Y]$  a *GP*) vůči globálnímu systému souřadnic  $XY$ . Úhel  $\alpha$  nabývá hodnot z intervalu  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ . Úhel  $\Psi$  je však zároveň jednou z nezávislých souřadnic matematického modelu vozidla a může nabývat hodnot  $\Psi \in \mathbf{R}$ . Aby tudíž úhel  $\delta$  nabýval přípustných hodnot (maximální rozsah natočení předních kol je  $\delta \in \langle -\delta_{max}, \delta_{max} \rangle$ ), musí být úhel  $\delta$  dále upravován.

Na obr. 3.7 je znázorněn vývojový diagram úprav úhlu  $\delta$ . K němu je připojeno postupné řešení jedné modelové situace dle algoritmu. Situace: modelované vozidlo se v průběhu simulace  $n$ -krát otočilo kolem své osy (osou je myšlena svislá osa středem hmotnosti vozidla, ve které působí tíhová síla). Navíc *GP*, do kterého by vozidlo mělo směřovat, je mimo „zorný úhel“,

který představuje výseč o velikosti  $2\delta_{max}$  ( $\delta_{max}$  na obě strany od vektoru rychlosti vozidla). Úhel  $\delta$  vypočítaný dle (3.7) má proto zcela nesprávnou hodnotu.



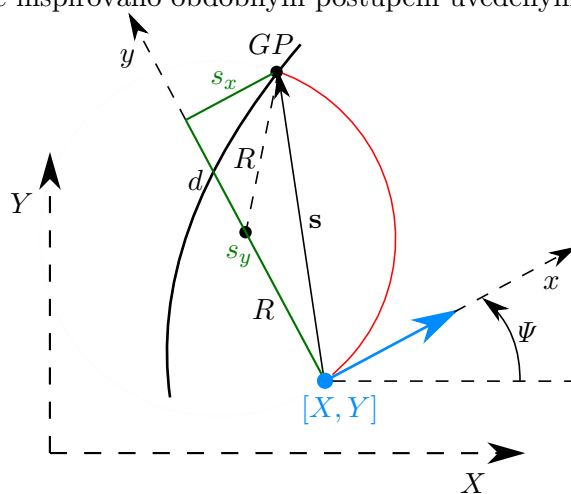
Obrázek 3.7.: Vývojový diagram úprav úhlu  $\delta$  s modelovou situací.

Obrázek 3.8.: Vizuální reprezentace algoritmu *Pure Pursuit*.

### *Pure Pursuit* algoritmus

Algoritmus *Pure Pursuit* (doslovně přeloženo jako „Ryzí pronásledování“) je podle [1] nejvyužívanějším geometrickým algoritmem pro určování natočení úhlu volantu vůbec. Jeho základ vychází z algoritmu *Follow the Carrot*, tedy že vozidlo sleduje určitý bod trasy. Tento algoritmus je rozšířený o myšlenku, že ne vždy je nejkratší trajektorie ta nejlepší. Úsečka spojující bod vozidla a aktuální *GP* je nahrazena částí kružnice, která je vyobrazena na obr. 3.8.

V obr. 3.9 je proveden geometrický rozbor obecné situace, podle které lze odvodit poloměr kružnice  $R$ . Odvození je inspirováno obdobným postupem uvedeným v [11].

Obrázek 3.9.: Rozbor geometrie algoritmu *Pure Pursuit*.

Bude-li se nejprve pracovat pouze s lokálním souřadnicovým systémem  $xy$  (při označení vektoru  $s$  jako na obr. 3.9), pak pro výpočet poloměru  $R$  je možné zapsat 3 rovnice v těchto tvarech:

$$s_y - R = d \quad (3.9)$$

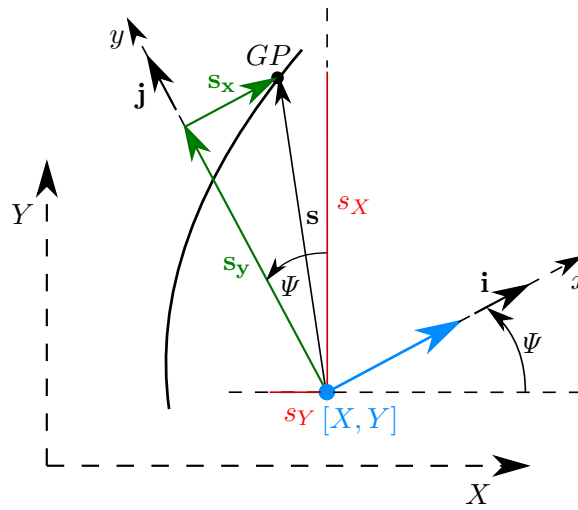
$$s_x^2 + d^2 = R^2 \quad (3.10)$$

$$s_x^2 + s_y^2 = l_a^2 \quad (3.11)$$

Tyto rovnice lze dále upravovat:

$$\begin{aligned}
 s_x^2 + (s_y - R)^2 &= R^2 \\
 s_x^2 + s_y^2 - 2s_y R + R^2 &= R^2 \\
 s_x^2 + s_y^2 &= 2s_y R \\
 R &= \frac{l_a^2}{2s_y}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

V rovnici (3.12), která vyjadřuje poloměr  $R$ , se kromě vzdálenosti  $l_a$  vyskytuje také složka  $s_y$  vektoru  $\mathbf{s}$  v lokálním souřadnicovém systému  $xy$ , jejíž hodnota není známá. Proto je nutné tuto souřadnici vypočítat pomocí souřadnic  $s_X, s_Y$  stejného vektoru  $\mathbf{s}$  v globálním souř. systému  $XY$  a úhlu pootočení  $\Psi$  lokálního systému vůči globálnímu systému. K odvození dopomůže obr. 3.10.



Obrázek 3.10.: Vektor  $\mathbf{s}$  v lokálním a globálním systému souřadnic.

Pokud by se zavedly vektory  $\mathbf{s}_x$  a  $\mathbf{s}_y$  jako

$$\mathbf{s}_x = s_x \mathbf{i}, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{s}_y = s_y \mathbf{j}, \tag{3.14}$$

kde  $\mathbf{i}$  je jednotkový vektor ve směru osy  $x$  lok. souř. systému a  $\mathbf{j}$  je jednotkový vektor ve směru osy  $y$  lok. souř. systému, pak lze zavést také složky těchto vektorů v globální soustavě souřadnic značené jako  $(s_x)_X, (s_x)_Y$  a  $(s_y)_X, (s_y)_Y$ . Při respektování tohoto označení lze psát

$$s_X = (s_x)_X + (s_y)_X, \tag{3.15}$$

$$s_Y = (s_x)_Y + (s_y)_Y. \tag{3.16}$$

Dále platí

$$(s_x)_X = s_x \cos \Psi, \tag{3.17}$$

$$(s_x)_Y = s_x \sin \Psi, \tag{3.18}$$



$$(s_y)_X = -s_y \sin \Psi, \quad (3.19)$$

$$(s_y)_Y = s_y \cos \Psi. \quad (3.20)$$

Po dosazení vznikají rovnice, jež vyjadřují transformaci vektoru  $s$  z lokálního systému souřadnic do globálního systému souřadnic:

$$s_X = s_x \cos \Psi - s_y \sin \Psi \quad (3.21)$$

$$s_Y = s_x \sin \Psi + s_y \cos \Psi \quad (3.22)$$

Kombinací vztahů (3.21) a (3.22) lze psát vztah pro složku  $s_y$  jako

$$s_y = s_Y \cos \Psi - s_X \sin \Psi. \quad (3.23)$$

Pro finální výpočet úhlu  $\delta$  je třeba se vrátit k obr. 2.12, ve kterém byl proveden geometrický rozbor kinematického modelu. Lze z něj vyčíst, že platí rovnost

$$\delta = \arctg \frac{l_f + l_r}{R}. \quad (3.24)$$

Následně lze do tohoto vztahu dosadit rovnici (3.12) zkombinovanou s rovnicí (3.23) a vznikne vztah

$$\delta = \arctg \frac{2(s_Y \cos \Psi - s_X \sin \Psi)(l_f + l_r)}{l_a^2}, \quad (3.25)$$

který je výchozím vztahem pro algoritmus *Pure Pursuit*.

### 3.2. Řízení hnacího momentu

V kapitole 2.4.4 byl již definován maximální točivý moment  $M_{A_{max}}$  dostupný na každém zadním kole. Hodnota skutečného hnacího momentu na kolech je v reálném vozidle určována na základě  $M_{A_{max}}$  a také polohy plynového pedálu, který ovládá řidič. Tato poloha může být interpretována veličinou  $e$ , jež nabývá hodnot  $e \in \langle 0, 1 \rangle$ . Pokud  $e = 0$ , pak je plynový pedál uvolněný, pokud  $e = 1$ , pak je plynový pedál sešlápnutý na 100 %. Naopak pokud chce řidič zpomalit, sešlápne brzdový pedál. Jeho poloha lze opět vyjádřit pomocí veličiny  $e$  s oborem hodnot  $e \in \langle -1, 0 \rangle$ . Pokud  $e = 0$ , pak je brzdový pedál uvolněný, pokud  $e = -1$ , pak je brzdový pedál sešlápnutý na 100 %. Polohu obou pedálů je možné vyjádřit pouze pomocí jedné veličiny  $e$ , protože při obvyklých jízdách manévrech řidič nesešlapuje oba pedály současně. Primární regulovanou veličinou při řízení hnacích momentů na kolech je proto veličina  $e$ , která bude označována jako míra sešlápnutí pedálů.

Pokud  $e \in \langle 0, 1 \rangle$ , potom hnací momenty  $M_{Hi}$  na obou zadních kolech lze určit jako

$$M_{Hi} = eM_{A_{max}}, \quad i = 3, 4 \quad (3.26)$$

a pro přední kola v takovém případě platí

$$M_{Hi} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.27)$$

protože nejsou hnaná.

Pokud  $e \in \langle -1, 0 \rangle$ , potom hnací momenty  $M_{Hi}$  na všech kolech jsou určeny jako

$$M_{Hi} = eM_{B_{max}} \operatorname{tgh} \left( \frac{\pi \dot{\varphi}_i}{\omega_p} \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.28)$$

kde  $M_{B_{max}}$  je maximální hodnota brzdného momentu, která je v případě této práce volena jako konstanta,  $\dot{\varphi}_i$  je úhlová rychlost otáčení kola a  $\omega_p$  je malá přechodová rychlost, která je též konstantní.

### 3.2.1. Výpočet míry sešlápnutí pedálů

Pokud na trati nejsou překážky, jiná vozidla, změny povrchu atd., pak řidič obvykle vyhodnocuje sešlápnutí pedálů na základě aktuální rychlosti vozidla a také toho, jak zakřivená je část trasy před vozidlem. Snaží se tak dosáhnout určité rychlosti, která je vhodná k projetí následujícího úseku trasy. Tato rychlost musí být co nejvyšší (je modelován závodní vůz), ale zároveň ne příliš vysoká, aby odstředivé síly působící na vozidlo překonaly třecí síly mezi vozovkou a pneumatikou. Je tedy označena jako cílová rychlost  $v_{max}$ .

Cílovou rychlost  $v_{max}$  lze odvodit na základě vztahu pro výpočet dostředivého zrychlení

$$a_y = kv^2, \quad (3.29)$$

kde  $k$  je křivost trajektorie a  $v$  je aktuální rychlost vozidla. Tento vztah lze přepsat do tvaru vyjadřující rychlost vozidla jako

$$v = \sqrt{\frac{a_y}{k}}. \quad (3.30)$$

Podle [5] lze určit cílovou rychlost  $v_{max}$  pro určitý úsek trasy jako

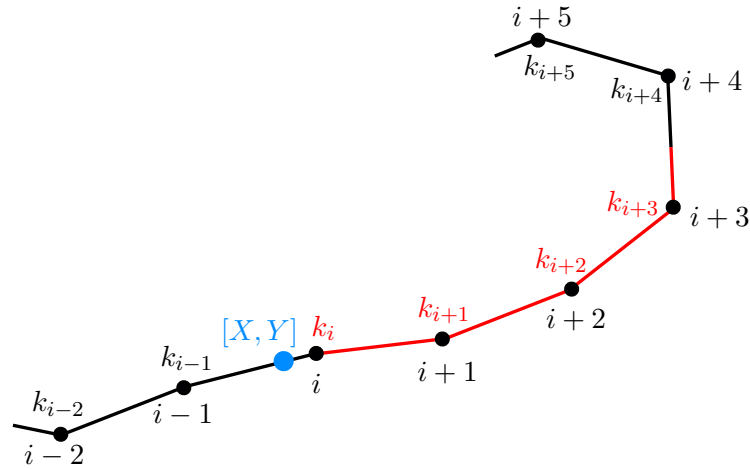
$$v_{max} = \sqrt{\frac{a_{y_{max}} f}{|k_{max}|}}, \quad (3.31)$$

kde  $f$  je koeficient tření,  $a_{y_{max}}$  je charakteristický parametr vozidla, který vyjadřuje, jak dobře vozidlo zužitkuje maximální boční vodící síly v pneumatikách, a  $k_{max}$  je maximální křivost trasy na určitém úseku.

Jelikož vozidlo potřebuje jistý čas k tomu, aby bylo schopné před zatáčkou snížit svoji rychlost  $v$  na úroveň cílové rychlosti  $v_{max}$ , v článku [5] je odvozena vzdálenost  $s_p$ , ve které se hledá případná zatáčka, jako

$$s_p = \frac{v^2}{2a_{b_{max}} f}, \quad (3.32)$$

kde  $a_{b_{max}}$  je další charakteristický parametr, který obdobně jako parametr  $a_{y_{max}}$  vyjadřuje schopnost zužitkování maximální hnací/brzdné síly v pneumatikách.



Obrázek 3.11.: Hledání maximální křivosti  $k_{max}$ .

Je-li známa vzdálenost  $s_p$ , pak je možné určit nezápornou maximální křivost  $|k_{max}|$ , která je hledána do vzdálenosti  $s_p$  od uzlu trasy, který je nejbližší vozidlu. Hledání  $|k_{max}|$  je znázorněno na obr. 3.11, kde poloha vozidla je zaznamenána jako  $[X, Y]$  a  $\{i - 2, \dots, i + 5\}$  označují uzly definované trasy, jimž náleží křivosti  $\{k_{i-2}, \dots, k_{i+5}\}$ . Část trasy před vozidlem do vzdálenosti  $s_p$  od vozidla je znázorněna červenou barvou. V případě ilustrovaném na obr. 3.11 platí, že  $|k_{max}| = \max\{|k_i|, |k_{i+1}|, |k_{i+2}|, |k_{i+3}|\}$ .

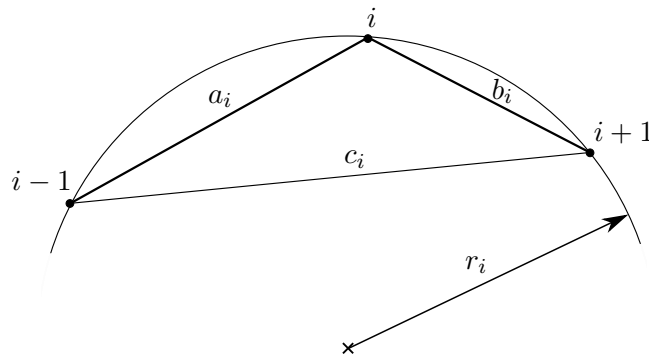
Nakonec lze podle [5] vyjádřit míru sešlápnutí pedálů  $e$  jako

$$e = K(v_{max} - v), \tag{3.33}$$

kde  $K$  je koeficient, jež může nabývat všech hodnot  $K > 0$  a vyjadřuje styl (agresivitu) jízdy řidiče. Pro vyšší hodnoty  $K$  je jízda agresivnější.

Jak bylo zmíněno výše, pokud  $e \in (-1, 0)$ , pak je sešlápnutý brzdový pedál, pokud  $e \in (0, 1)$ , pak je sešlápnutý plynový pedál, pokud  $e = 0$ , pak není sešlápnutý ani jeden pedál. Vztah (3.33) však umožňuje, aby  $e$  nabývalo teoreticky všech hodnot z oboru  $\mathbf{R}$ . Je tedy nutné výpočet  $e$  dle (3.33) upravit na tvar

$$e = \begin{cases} -1 & \text{pro } K(v_{max} - v) < -1, \\ K(v_{max} - v) & \text{pro } K(v_{max} - v) \in (-1, 1), \\ 1 & \text{pro } K(v_{max} - v) > 1. \end{cases} \tag{3.34}$$



Obrázek 3.12.: Výpočet křivosti  $k_i$  trasy v  $i$ -tém uzlu.

### 3.2.2. Výpočet křivosti v uzlu

Křivost v každém uzlu trasy, který není počáteční ( $i = 0$ ) nebo koncový ( $i = N$ ), je definována jako křivost kružnice opsané daným uzlem a jeho sousedními uzly. Toto tvrzení je ilustrováno v obr. 3.12, kde je hledána křivost  $k_i$  uzlu  $i$ . Jestliže souřadnice vyznačených uzlů v globálním souřadnicovém systému  $XY$  jsou  $[X_{i-1}, Y_{i-1}]$ ,  $[X_i, Y_i]$  a  $[X_{i+1}, Y_{i+1}]$ , potom délky stran trojúhelníka, jež je tvořen zmíněnými uzly, mají velikosti

$$\begin{aligned} a_i &= \sqrt{(X_i - X_{i-1})^2 + (Y_i - Y_{i-1})^2}, \\ b_i &= \sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2}, \\ c_i &= \sqrt{(X_{i+1} - X_{i-1})^2 + (Y_{i+1} - Y_{i-1})^2}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dále pak obsah trojúhelníku lze zapsat pomocí souřadnic jednotlivých uzlů jako

$$S_i = \frac{1}{2} |X_{i-1}(Y_i - Y_{i+1}) + X_i(Y_{i+1} - Y_{i-1}) + X_{i+1}(Y_{i-1} - Y_i)|. \tag{3.36}$$

Pro poloměr  $r_i$  opsané kružnice platí

$$r_i = \frac{a_i b_i c_i}{4S_i}, \tag{3.37}$$

tudíž křivost  $k_i$  této kružnice má tvar

$$k_i = \frac{1}{r_i} = \frac{4S_i}{a_i b_i c_i}. \tag{3.38}$$

## 4. Simulace jízdních manévrů

Tato kapitola se zabývá aplikací odvozeného dvoustopého dynamického modelu se sedmi stupni volnosti, který využívá Dugoffův model tření pro kontakt mezi pneumatikou a vozovkou, mechanismus směrového řízení v podobě čtyřkloubového mechanismu a pohonnou soustavu, jež byla představena v kapitole 2.4. Jeho součástí je také řízení natočení volantu a hnacího momentu.

Jednostopý kinematický a jednostopý dynamický model se třemi stupni volnosti byly v kapitole 2.2 odvozeny za účelem ukázky různých přístupů k modelování silničního vozidla, v této kapitole však dále zkoumány nebudou.

Veškerá implementace je provedena programovém prostředí MATLAB a kromě numerického řešiče diferenciálních rovnic *ode23t*, který je při simulaci využit, je veškerá implementace vlastní.

### 4.1. Výchozí nastavení modelu

V této podkapitole je k dispozici základní nastavení všech parametrů (viz tabulka 4.2), které využívá dvoustopý dynamický model a jeho komponenty a také nastavení počátečních podmínek simulace (viz tabulka 4.1). Dále pro řízení natočení volantu existuje možnost zvolit si řízení na základě algoritmu *Follow the Carrot*, nebo na základě algoritmu *Pure Pursuit*, jenž je zvolen jako výchozí.

| Zobecněná souřadnice                              | Hodnota          | Jednotky |
|---|------------------|----------|
| Poloha $X(0)$                                     | 0                | m        |
| Poloha $Y(0)$                                     | 0                | m        |
| Úhel $\Psi(0)$                                    | $\frac{5}{4}\pi$ | rad      |
| Úhel $\varphi_i(0)$ , $i = 1, 2, 3, 4$            | 0                | rad      |
| Rychlost $\dot{X}(0)$                             | -0,1             | m/s      |
| Rychlost $\dot{Y}(0)$                             | -0,1             | m/s      |
| Úhlová rychlost $\dot{\Psi}(0)$                   | 0                | rad/s    |
| Úhlová rychlost $\dot{\varphi}_i(0)$ , $i = 1, 2$ | 0,1              | rad/s    |
| Úhlová rychlost $\dot{\varphi}_i(0)$ , $i = 3, 4$ | 30               | rad/s    |

Tabulka 4.1.: Výchozí počáteční podmínky simulace.

Počáteční poloha  $[X(0), Y(0)]$  středu hmotnosti vozidla je volena tak, aby se vozidlo nacházelo na začátku trati. Počáteční úhel  $\Psi(0)$  natočení vozidla vůči globálnímu souř. systému je volen tak, aby bylo vozidlo souhlasně natočeno přibližně do osy trasy. Počáteční úhly  $\varphi_i(0)$  natočení všech kol jsou voleny jako nulové (jejich hodnota nijak neovlivňuje simulaci).

Vektor počáteční rychlosti  $[\dot{X}(0), \dot{Y}(0)]$  vozidla v globálním souř. systému je volen tak, aby byl malý, nenulový (rychlost vozidla v průběhu simulace nesmí být nikdy nulová) a směřoval ve směru osy vozidla. Počáteční úhlová rychlost  $\dot{\Psi}(0)$  otáčení vozidla je volena nulová, protože vozidlo při zahájení simulace nezatáčí (ani není ve smyku). Počáteční úhlová rychlost  $\dot{\varphi}_i(0)$

#### 4. Simulace jízdních manévřů

otáčení předních kol je volena jako malá a nenulová (rychlost otáčení kol v průběhu simulace nesmí být nikdy nulová). Počáteční úhlová rychlost  $\dot{\varphi}_i(0)$  otáčení zadních kol je volena poměrně vysoká, protože je uvažován prokluz kol v počátku simulace.

| Typ parametru                         | Název parametru, označení                              | Hodnota | Jednotky          |
|---------------------------------------|--|---------|-------------------|
| Hmota a rozměry                       | Hmotnost, $m$  | 350     | kg                |
|                                       | Moment setrvačnosti k ose $z$ <sup>7</sup> , $I_z$     | 85      | kg m <sup>2</sup> |
|                                       | Vzdálenost př. nápravy a bodu $S$ <sup>8</sup> , $l_f$ | 0,85525 | m                 |
|                                       | Vzdálenost zad. nápravy a bodu $S$ , $l_r$             | 0,69975 | m                 |
|                                       | Rozchod př. kol, $d_f$                                 | 1,22    | m                 |
|                                       | Rozchod zad. kol, $d_r$                                | 1,15    | m                 |
|                                       | Moment setrvačnosti kola, $I_w$                        | 0,2372  | kg m <sup>2</sup> |
| Pneumatika<br>a<br>kontakt s vozovkou | Poloměr kola, $r_w$                                    | 0,23241 | m                 |
|                                       | Podélná tuhost pneumatiky, $C_\sigma$                  | 35000   | N                 |
|                                       | Směrová tuhost pneumatiky, $C_\beta$                   | 450     | N/deg             |
|                                       | Závlek pneumatiky, $z_i$                               | 0,025   | m                 |
| Čtyřkloubový mech.                    | Součinitel tření mezi pneu. a vozovkou, $f$            | 2,3     | –                 |
|                                       | Délka páky, $k_{st}$                                   | 0,15    | m                 |
| Řízení<br>natočení volantu            | Koeficient pro alg. <i>Follow the Carrot</i> , $C$     | 1       | –                 |
|                                       | Dolní hranice vzdálenosti $l_a$ , $l_{min}$            | 3       | m                 |
|                                       | Horní hranice vzdálenosti $l_a$ , $l_{max}$            | 10      | m                 |
|                                       | Dolní hranice rychlosti, $v_{lo}$                      | 8       | m/s               |
|                                       | Horní hranice rychlosti, $v_{hi}$                      | 20      | m/s               |
|                                       | Max. vzdálenost po sobě jdoucích <i>GP</i> , $d_{max}$ | 15      | m                 |
|                                       | Max. úhel natočení volantu, $\delta_{max}$             | 30      | deg               |
| Pohon a jeho řízení                   | Mez fiktivních otáček motoru pro řazení, $N_e$         | 8000    | rpm               |
|                                       | Statický převod, $s_{st}$                              | 2,073   | –                 |
|                                       | 1. převodový poměr, $g_1$                              | 2,583   | –                 |
|                                       | 2. převodový poměr, $g_2$                              | 2,153   | –                 |
|                                       | 3. převodový poměr, $g_3$                              | 1,866   | –                 |
|                                       | 4. převodový poměr, $g_4$                              | 1,563   | –                 |
|                                       | Finální převod, $f_d$                                  | 2,92    | –                 |
|                                       | Koeficient řízení hnacího momentu, $K$                 | 0,3     | –                 |
|                                       | Maximální brzdňý moment, $M_{Bmax}$                    | 100     | Nm                |
|                                       | Maximální dostředivé zrychlení, $a_{ymax}$             | 6       | m/s <sup>2</sup>  |
|                                       | Maximální zpomalení při brzdění, $a_{bmax}$            | 3       | m/s <sup>2</sup>  |
| Přechodová rychlost, $\omega_p$       | 0,5  | rad/s   |                   |
| Ostatní                               | Tíhové zrychlení, $g$                                  | 9,81    | m/s <sup>2</sup>  |
|                                       | Šířka tratě (pouze pro vizualizaci tratě), $w_t$       | 4       | m                 |

Tabulka 4.2.: Výchozí hodnoty parametrů modelu.

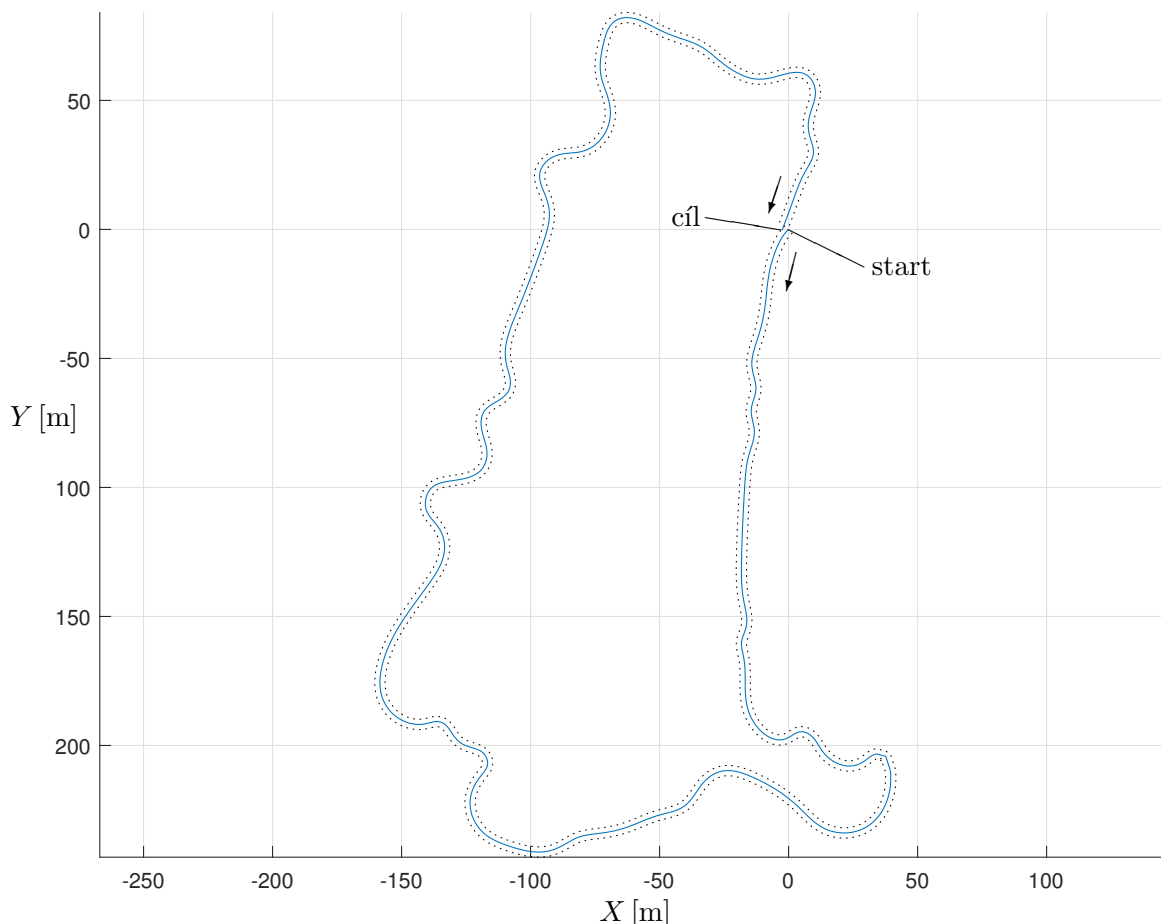
Většina konstrukčních parametrů vozidla je převzata přímo z parametrů studentské formule *UWB04*, jež jsou uvedeny buď v [12], nebo byly poskytnuty členy týmu *Racing Team Pilsen* (na základě technické dokumentace vozidla).

<sup>7</sup>Osa  $z$  je svislá osa procházející středem hmotnosti vozidla  $S$ .

<sup>8</sup>Bod  $S$  označuje střed hmotnosti vozidla.

## 4.2. Testovací trasa

K testování je využit závodní okruh Formule Student v Mostu. Simulační trasa není však naprosto totožná s tímto závodním okruhem. K vytvoření virtuálního okruhu byla využita trajektorie závodníka při absolvování jednoho okruhu v podobě GPS dat ze závodu Formule Student 2019 v Mostu.



Obrázek 4.1.: Testovací trasa.

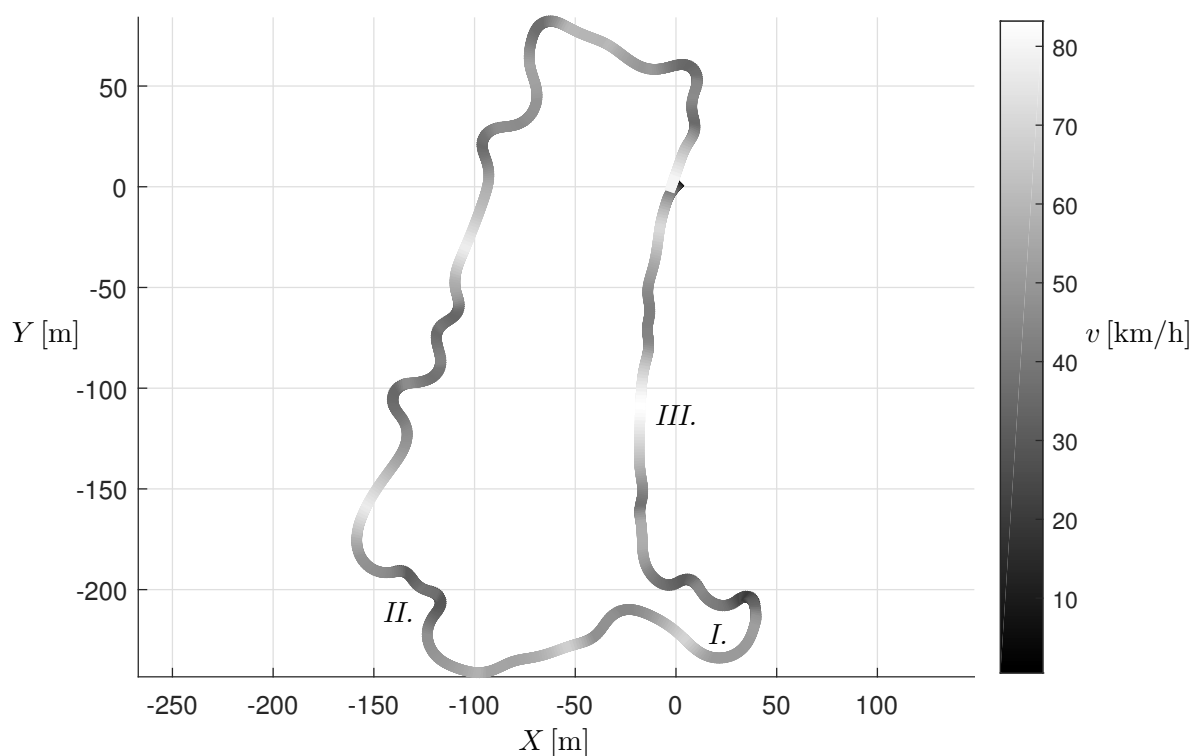
## 4.3. Výsledky simulace

Tato část prezentuje některé výsledky simulace průjezdu studentské formule závodním okruhem definovaným v předchozí kapitole 4.2. Taková komplexní trasa dokáže prověřit odvozený model v mnoha odlišných jízdních situacích, proto je k otestování modelu využita pouze tato jediná trasa. Nejdříve je zobrazena celá trajektorie pohybu vozidla (podkapitola 4.3.1) a následně jsou v podkapitolách 4.3.2 až 4.3.4 detailněji zkoumány tři úseky trasy. Na každém takovém úseku se studují pouze některé podstatné veličiny vypočítané v průběhu simulace. V podkapitole 4.3.5 je potom k dispozici porovnání vybraných veličin vypočítaných při simulaci s daty naměřenými při reálné jízdě formule po okruhu v Mostu.

### 4.3.1. Rychlost v průběhu okruhu

Na obr. 4.2 je vykreslena trajektorie<sup>9</sup> vozidla, která je obarvena dle jeho aktuální rychlosti. Z tohoto obrázku je patrné, že se vozidlo během celé jízdy nedostalo do výrazných potíží (opuštění trasy, minutí zatáčky atd.) a v pořádku absolvovalo celou trasu. Algoritmy řídicí natočení volantu a hnací moment pracují korektně – dochází k dodržování směru pohybu dle definované trasy, vozidlo mění rychlost podle charakteru daného úseku (na rovinkách zrychluje, před zatáčkami zpomaluje). Efektivita průjezdu zatáčkou z pohledu řízení natočení volantu se z celkového pohledu na trajektorii určit nedá, ale efektivita řízení hnacího momentu se zdá na první pohled velmi dobrá (na rovinkách dosahuje rychlosti kolem 80 km/h).

Detailnější závěry lze učinit až po hlubší analýze výsledků z různých částí trasy. K tomuto účelu byly vybrány tři úseky, které jsou označeny v obr. 4.2.



Obrázek 4.2.: Trajektorie a rychlost vozidla.

### 4.3.2. Úsek I.

První úsek, který bude detailněji zkoumán, je značně zakřivený. Na rozdíl od obr. 4.2 lze z obr. 4.3 již usoudit, že algoritmus řízení natočení volantu pracuje efektivně – trajektorie vozidla je vždy nachýlena k vnitřní straně zatáčky, ale stále se celkově dodržuje jízda po ose dráhy. V prvním grafu na obr. 4.4 lze mimo jiné spatřit, jak se mění úhel  $\delta$  natočení volantu při průjezdu úsekem dráhy.

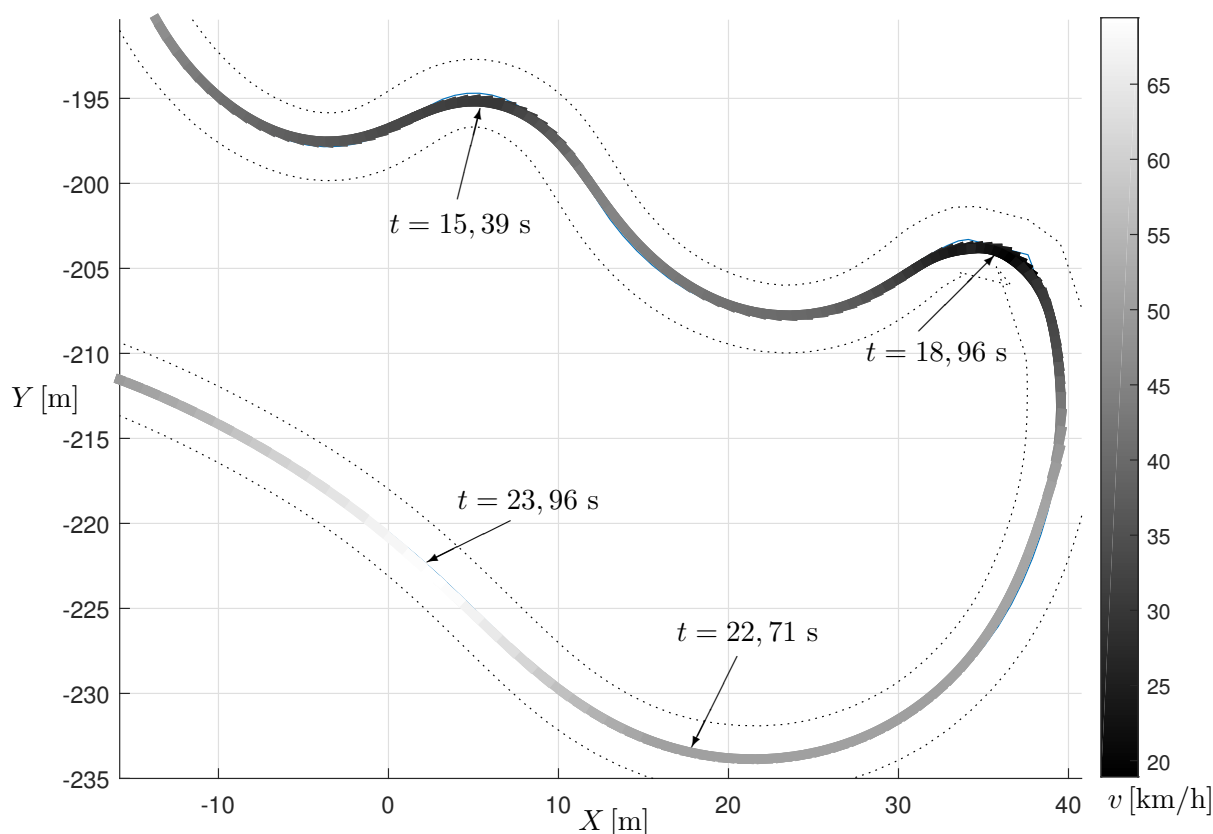
<sup>9</sup>Ve skutečnosti je vykreslována osa vozidla v jednotlivých časových okamžicích obarvená podle rychlosti, aby byly patrné případné smyky vozidla.



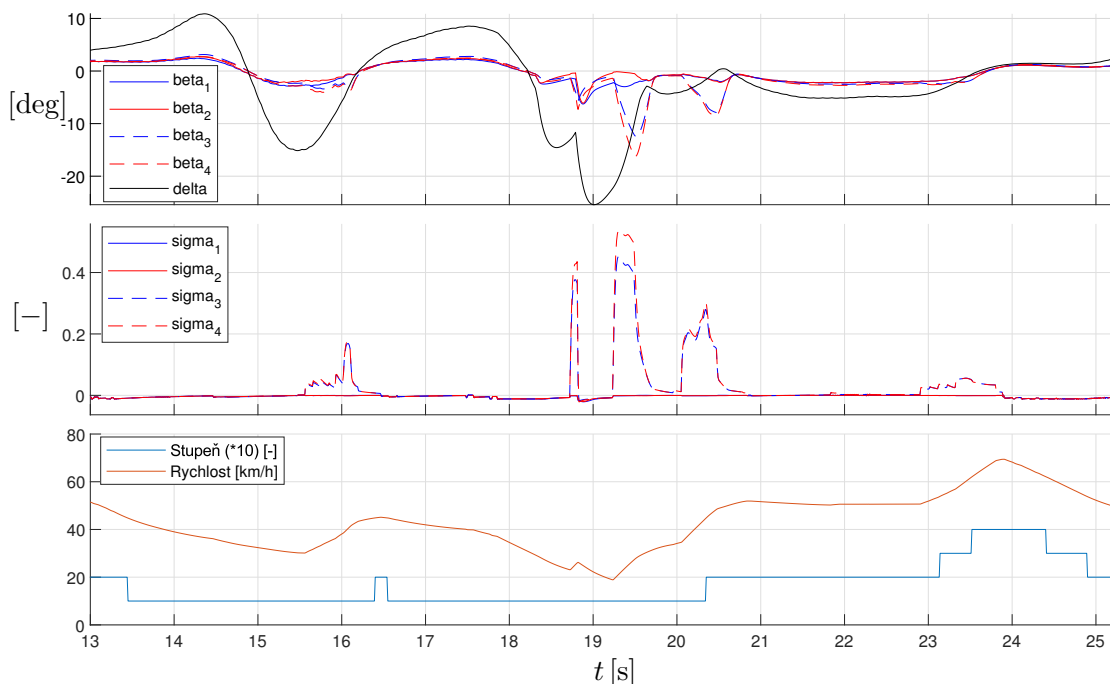
Další veličinou zobrazenou v prvním grafu je směrová úchylka  $\beta_i$  na jednotlivých kolech. Průběh úchylek na první pohled fyzikálně odpovídá skutečnosti – úchylky mají stejný smysl jako úhel natočení  $\delta$ . Jejich amplitudy jsou mimo jiné ovlivněny velikostí úhlu  $\delta$ , což je patrné z grafu, a pokud se velikosti  $\beta_i$  zvětšují, tak je to známkou toho, že se vozidlo dostává do smyku.

Velmi zajímavá je analýza podélného prokluzu  $\sigma_i$  jednotlivých kol, který je pro daný úsek zaznamenán v druhém grafu na obr. 4.4. V grafu je patrných pět výrazných maxim. Vždy se jedná o časový okamžik, kdy vozidlo zrychlovalo (viz průběh rychlosti v třetím grafu). Je vidět, že vozidlo má hnaná pouze zadní kola, protože právě prokluzu  $\sigma_3$  a  $\sigma_4$  na zadních kolech tvoří výrazné extrémy v druhém grafu. Přední kola se otáčejí pouze díky ubíhání vozovky, proto je jejich prokluz  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  při zrychlování minimální. Při třetím extrému (čas simulace přibližně  $t \in (19; 20$  s)) je zřejmé, že hodnoty prokluzů na jednotlivých zadních kolech jsou odlišné, protože vozidlo zrychluje při průjezdu zatáčkou. Hodnoty  $\sigma_i$  při zpomalování budou rozebrány při situaci, kdy je brzdění výraznější.

Posledním grafem v obr. 4.4 je graf průběhu rychlosti vozidla a aktuálně zařazeného rychlostního stupně. Lze potvrdit správnost implementace zařazování rychlostního stupně tak, jak bylo odvozeno – vozidlo řadí na vyšší či nižší stupeň při určité hodnotě rychlosti (nezávisle na ostatních faktorech), a proto řadí např. z 3 na 4 při stejné rychlosti jako při řazení z 4 na 3.



Obrázek 4.3.: Trajektorie a rychlost vozidla v úseku I.



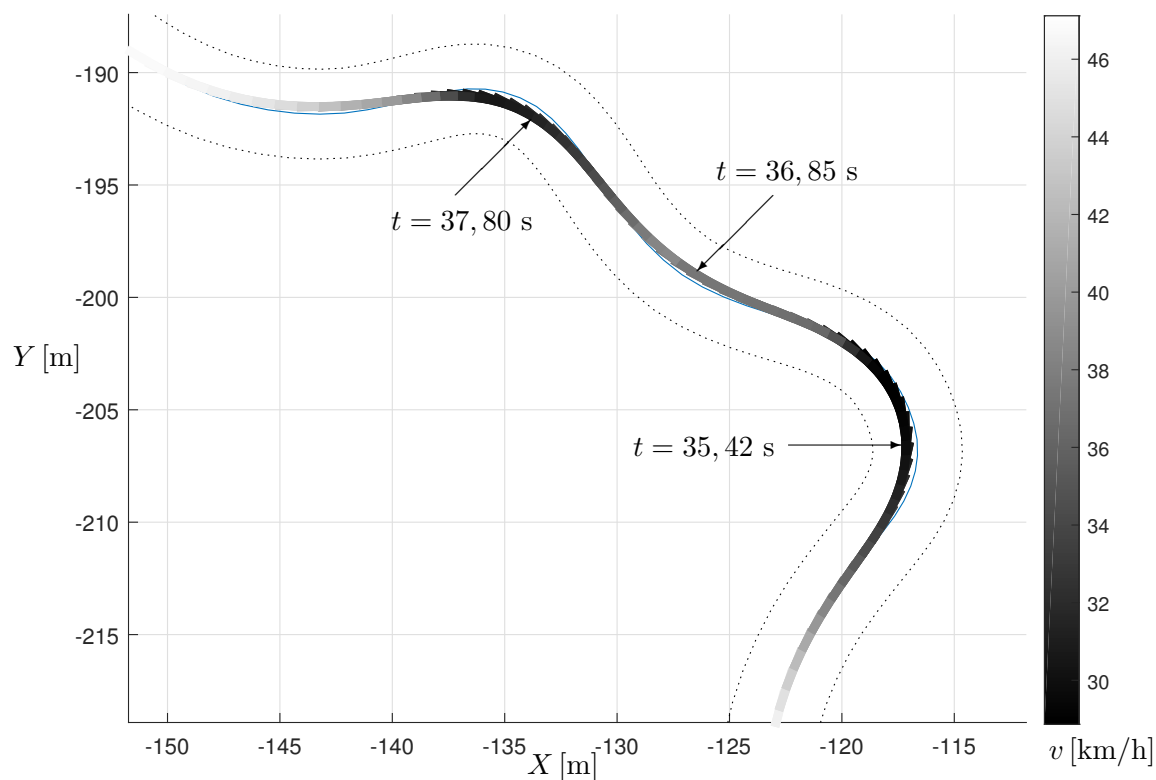
Obrázek 4.4.: Průběhy směrových úchylek, natočení volantu, podélných skluzů, zařazeného rychl. stupně a rychlosti vozidla při průjezdu úsekem I.

### 4.3.3. Úsek II.

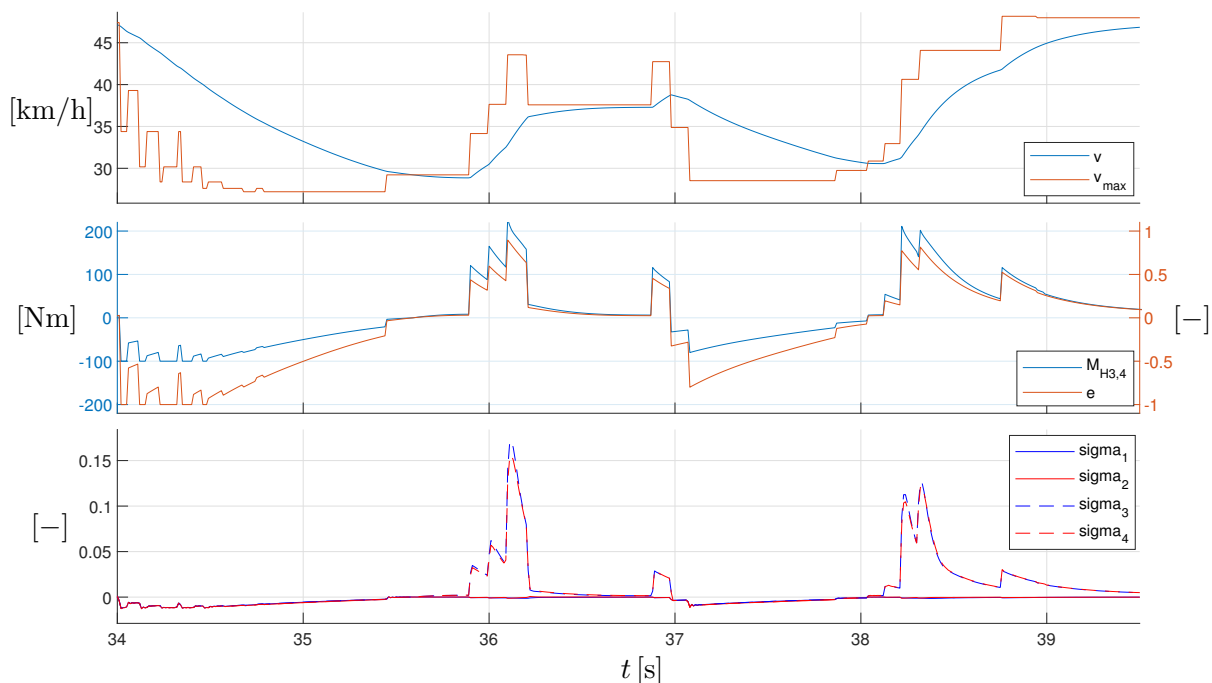
Další úsek, na který je zaměřena tato část, se nachází zhruba v polovině okruhu a jsou zde pozorovány zejména veličiny, které souvisí s řízením hnacího momentu. V prvním grafu na obr. 4.6 jsou vykreslené průběhy rychlosti vozidla a cílové rychlosti  $v_{max}$  při průjezdu daným segmentem trati zobrazeným na obr. 4.5. Průběh  $v_{max}$  se mění skokově, což je způsobeno tím, že trasa je složená z úseček, křivost je koncentrována do uzlů trasy, a algoritmus proto nalézá uzly s největší křivostí nárazově (při hladké trase by se maximální křivost měnila spojitě).

S tím, jak se mění rozdíl rychlosti vozidla a cílové rychlosti, je přímo spojen průběh veličiny  $e$  (míra sešlápnutí pedálů), jež je vyobrazen v druhém grafu na obr. 4.6. Pokud je  $v > v_{max}$ , pak je  $e < 0$  a pokud je  $v < v_{max}$ , pak je  $e > 0$ . Skokové změny  $v_{max}$  se promítají také do skokových změn  $e$ . Veličina  $e$  následně přímo ovlivňuje hnací moment  $M_{Hi}$  na všech kolech. Úzká vazba mezi těmito dvěma veličinami je patrná z druhého grafu.

Aby byla představa o změnách veličin, které hrají velkou roli při akceleraci a deceleraci vozidla, kompletní, tak jsou v třetím grafu opět zobrazené průběhy podélných prokluzů  $\sigma_i$  kol. Skokové změny hnacího momentu na zadních kolech se promítají do skokových změn prokluzů  $\sigma_3$  a  $\sigma_4$  zadních kol. Dále lze tvrdit, že při vyšších hodnotách hnacího momentu dochází k většímu prokluzu na zadních kolech, což odpovídá logické představě.



Obrázek 4.5.: Trajektorie a rychlost vozidla v úseku II.



Obrázek 4.6.: Průběhy rychlosti vozidla, cílové rychlosti, hnacích momentů na zadních kolech, míry sešlápnutí pedálů a podélných skluzů při průjezdu úsekem II.

#### 4.3.4. Úsek III.

Posledním úsekem, který je detailněji studován, je rovný úsek blízko startovní pozice a je zobrazen na obr. 4.7. Na takovém úseku lze dobře zkoumat chování vozidla při maximálním zrychlování a zpomalování. Ve chvíli, kdy vozidlo vjede na rovný úsek trati, algoritmus neznamenává žádnou významnou křivost trasy, proto je veličina  $e$  nastavena na  $e = 1$  (maximální sešlápnutí plynového pedálu) a v takovém módu setrvává i v průběhu akcelerace. V čase simulace přibližně  $t = 8$  s vozidlo zaregistruje křivost trasy za rovným úsekem, nastaví  $e = -1$  a začíná tak prudce brzdit.

V prvním grafu na obr. 4.8 jsou uvedeny průběhy veličiny  $e$  a také hnacích momentů  $M_{H3,4}$  na zadních kolech. V časovém rozmezí přibližně  $t \in \langle 6, 3; 6, 6 \text{ s} \rangle$  dochází ke skokovým navyšováním  $e$ ,  $M_{H3,4}$  a následně také prokluzu  $\sigma_3$  a  $\sigma_4$  (poslední graf). Jednotlivé skoky ale nejsou příliš velké a je jich více, proto je změna rychlosti vozidla poměrně hladká.

V časovém rozmezí přibližně  $t \in \langle 6, 6; 7, 9 \text{ s} \rangle$  je  $e = 1$ , hnací momenty  $M_{H3,4}$  však nejsou konstantní – jejich proměnlivost je způsobena danou charakteristikou motoru, která je závislá na aktuálních otáčkách motoru, jež jsou vykresleny v druhém grafu. Dále jsou v tomto časovém úseku v průběhu  $M_{H3,4}$  patrné dva malé skoky, což je způsobeno přeražením na vyšší rychlostní stupeň (druhý graf).

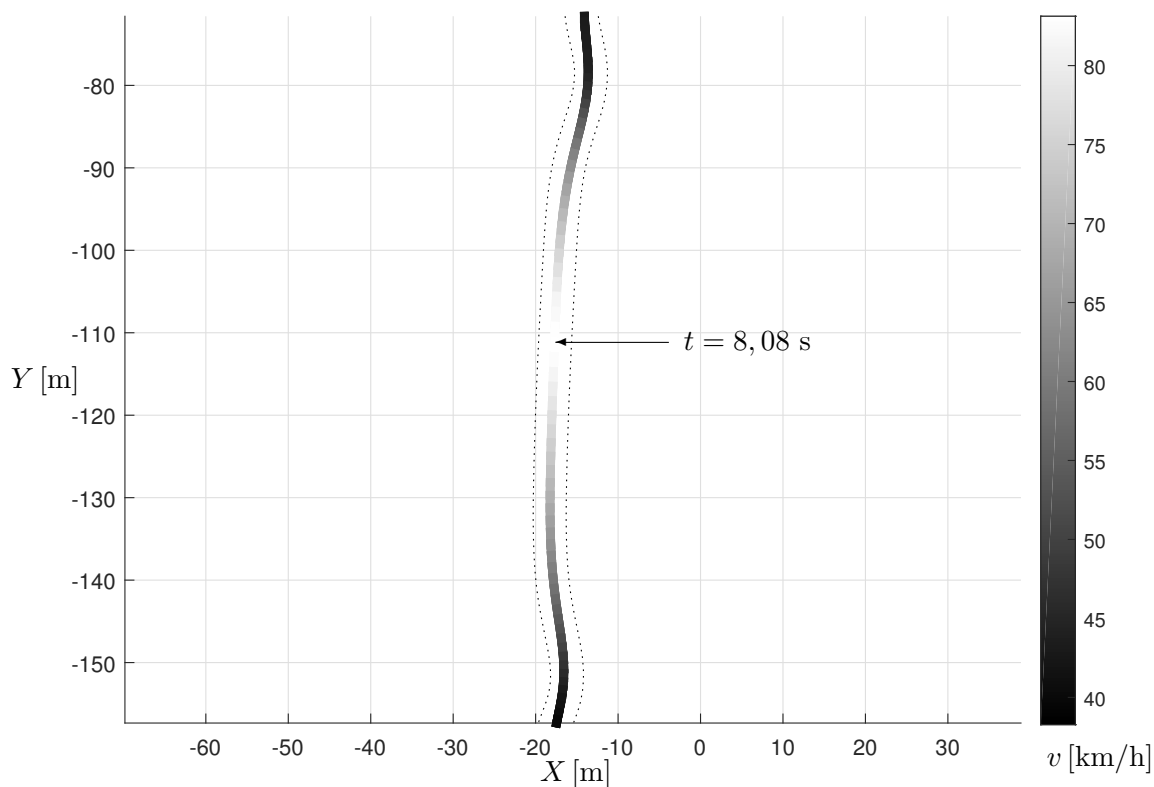
Jak bylo slíbeno dříve, budou rozebrány podélné prokluzu  $\sigma_i$  kol v případě brzdění. Ve chvíli, kdy vozidlo dosáhne času simulace přibližně  $t = 8, 1$  s, začíná vozidlo brzdit na maximum (hnací momenty na všech kolech jsou nastaveny na konstantní hodnotu  $M_{Hi} = -100 \text{ Nm}$ ). To způsobí výrazný záporný prokluz  $\sigma_i$  na všech kolech (na rozdíl od zrychlování, kdy jsou dominantní prokluzu pouze na zadních kolech), který je přibližně konstantní po celou dobu maximálního brzdění. V důsledku toho rovnoměrně klesá rychlost a také otáčky motoru.

Obecně lze v celém průběhu podélných skluzů a hnacích momentů pozorovat úzkou spojitost (profily křivek jsou obdobné).

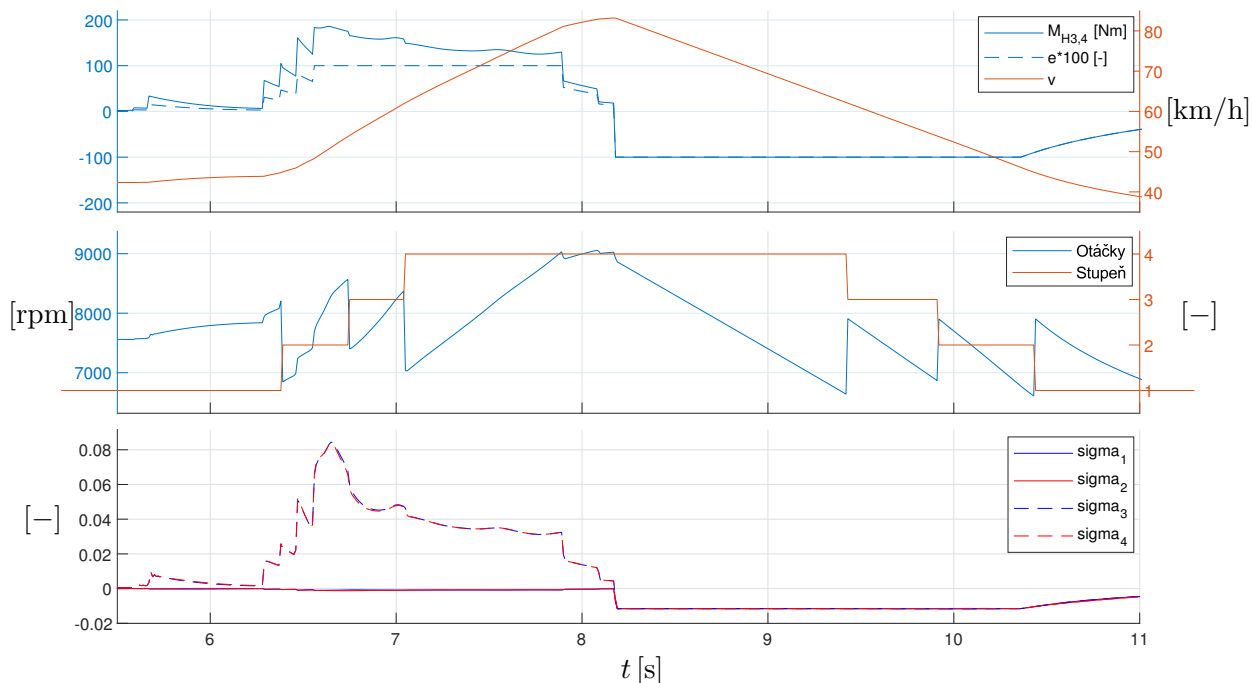
Zajímavý je také rozbor souvislosti mezi skutečnými otáčkami  $n_e$  motoru a řazením rychlostních stupňů (druhý graf). Při zařazení vyššího rychlostního stupně otáčky skokově klesají, naopak při zařazení nižšího rychlostního stupně otáčky skokově vzrostou. Jedním z parametrů simulace je hranice fiktivních otáček motoru  $N_e$ , kdy se řadí vyšší rychlostní stupeň, a je nastavena na hodnotu  $N_e = 8000 \text{ rpm}$ . V grafu lze vypožorovat, že se řazení skutečně koná v blízkosti této hodnoty, ne však zcela přesně při této hodnotě. To je také důvodem, proč se  $N_e$  označují jako otáčky fiktivní. Při řazení na vyšší rychlostní stupeň se řadí při vyšších otáčkách než 8000 rpm, protože hodnota prokluzu  $\sigma_3$  a  $\sigma_4$  je kladná (navíc platí, že čím je vyšší hodnota prokluzu, tím je vyšší hodnota otáček, při kterých se řadí – viz řazení z 2 na 3). Naopak při podřazování hodnota otáček skokově vzroste pod úroveň 8000 rpm, protože prokluz  $\sigma_3$  a  $\sigma_4$  je záporný. Jak plyne z odvození řazení v kapitole 2.4.3, pokud by se kola dokonale odvalovala po vozovce (nulový podélný skluz  $\sigma_i$ ), pak by vozidlo řadilo přesně při otáčkách motoru rovným 8000 rpm.

Podobných analýz, jaké byly provedeny v částech 4.3.2 až 4.3.4 lze učinit velké množství. Zde byly zmíněny zejména ty, jež jsou z pohledu celého modelu velmi významné nebo zajímavé. Další rozbory by se mohly týkat například silových účinků způsobených třením pneumatiky a vozovky, jež jsou z pohledu chování modelu neméně důležité.

Jak bylo naznačeno v provedených analýzách, matematický model sestavený v této práci je systém, kde většina komponent a veličin je spolu úzce spjata a také se navzájem velmi ovlivňují. Proto není možné (nebo spíše vhodné) zaměřit se pouze na jedinou veličinu a studovat ji izolovaně od ostatních.



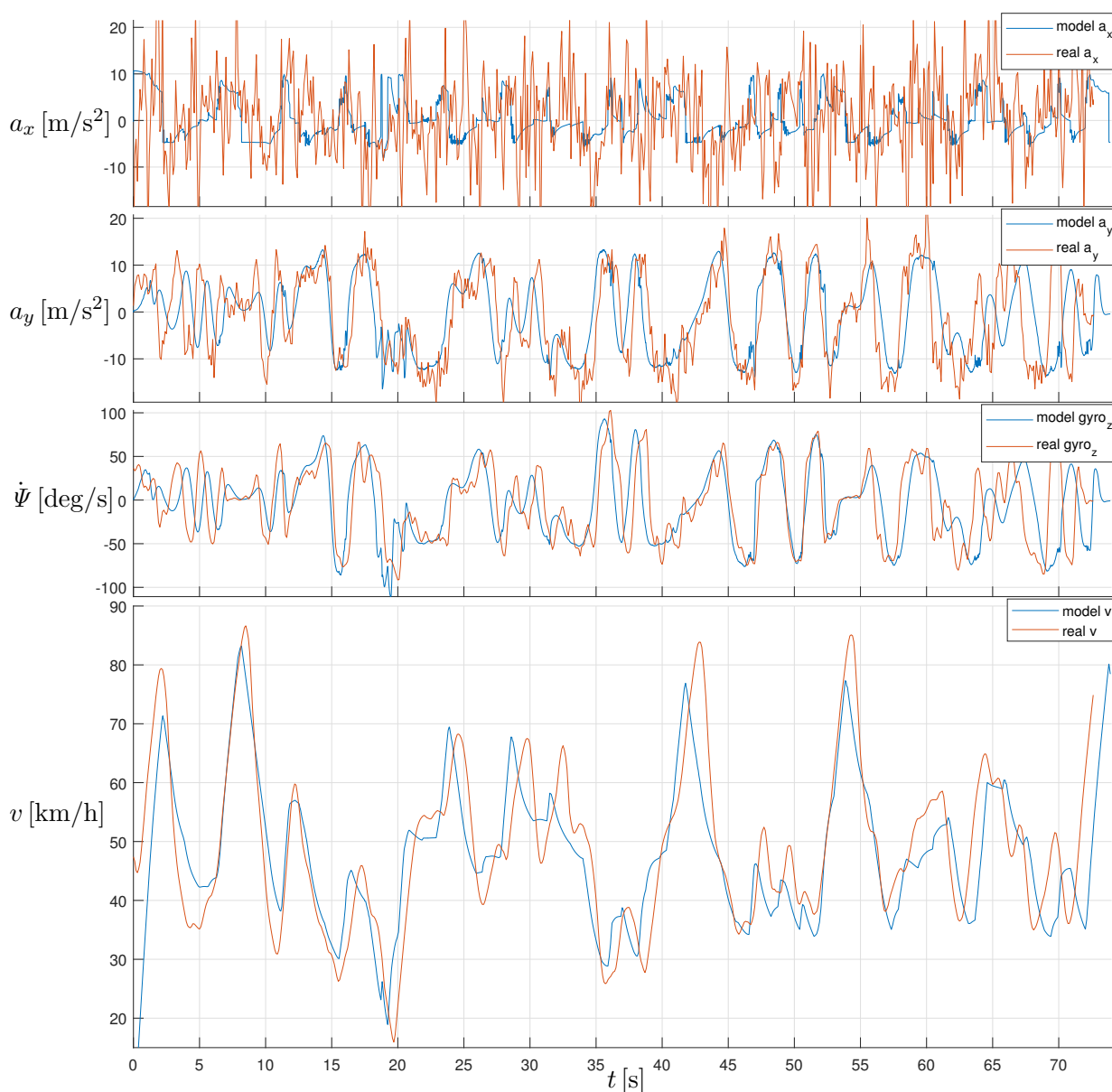
Obrázek 4.7.: Trajektorie a rychlost vozidla v úseku III.



Obrázek 4.8.: Průběhy otáček motoru, zařazeného rychl. stupně, hnacích momentů na zadních kolech, míry sešlápnutí pedálů, rychlosti vozidla a podélných skluzů při průjezdu úsekem III.

### 4.3.5. Srovnání s reálnou jízdou

V této části je možné nalézt obr. 4.9, ve kterém jsou porovnány čtyři veličiny vypočítané při simulaci s daty naměřenými při závodu Formule Student v Mostu. Konkrétně se jedná o porovnání podélného a příčného zrychlení  $a_x$  a  $a_y$  (lokální souř. systém), úhlové rychlosti otáčení vozidla kolem svislé osy  $z$  procházející středem hmotnosti vozidla a rychlosti vozidla. Hodnoty reálného zrychlení a úhlové rychlosti byly naměřeny pomocí akcelerometru a gyroskopu umístěného ve vozidle, hodnoty rychlosti byly vypočítány na základě znalosti polohy vozidla dle GPS.



Obrázek 4.9.: Porovnání vypočítaných hodnot s naměřenými daty.

Kromě prvního grafu, kde jsou znázorněna podélná zrychlení modelu a skutečné formule, došlo ve zbylých třech porovnáních k výborné shodě. Profily jsou si v těchto třech případech velmi podobné, což potvrzuje správnost použitých modelů, algoritmů a parametrů. Mezi příčným zrychlením a úhlovou rychlostí otáčení vozidla lze spatřit také významnou podobnost, což je důsledkem toho, že se vozidlo nijak výrazně bočně nesmýká. (Pokud by se vozidlo dostalo do smyku a přestalo zatáčet, tak by jeho příčné zrychlení mohlo být nenulové, ale úhlová rychlost by byla nulová.)

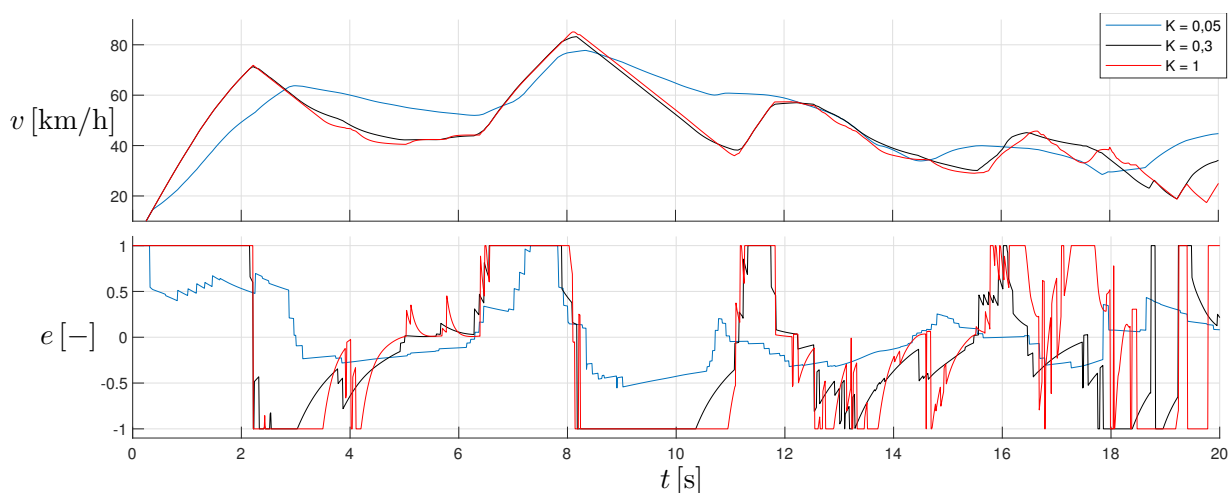
V porovnání podélného zrychlení lze sice také najít jistou podobnost, ale to bohužel s velkými obtížemi. S ohledem na dobrou shodu ve zbylých třech grafech lze však soudit, že podélné zrychlení vypočítané při simulaci jízdy má reálné hodnoty a naopak zrychlení  $a_x$  naměřené ve skutečném vozidle je zatíženo chybou (pravděpodobně způsobeno rušením v podobě chvění konstrukce formule v místě, kde byl umístěn akcelerometr).

## 4.4. Parametrické studie

Simulace, jež byla zkoumána a hodnocena výše, využívá nastavení uvedeného v kapitole 4.1. Tato kapitola se zabývá tím, jaký vliv má změna určitých parametrů na průběh a výsledky simulace. Při každé simulaci dochází ke změně jiného parametru nebo změně algoritmu. Průběhy veličin, které jsou změnou daného parametru ovlivněny primárně, jsou vyneseny do grafů, které jsou však podobně jako v předchozí kapitole vykresleny pouze pro určitý časový úsek (nyní vždy  $t \in \langle 0; 20 \text{ s} \rangle$ ). Pokud je ovlivněna primárně trajektorie vozidla, pak je zobrazeno porovnání trajektorií na určitém úseku tratě.

### 4.4.1. Vliv konstanty $K$ řízení hnacího momentu

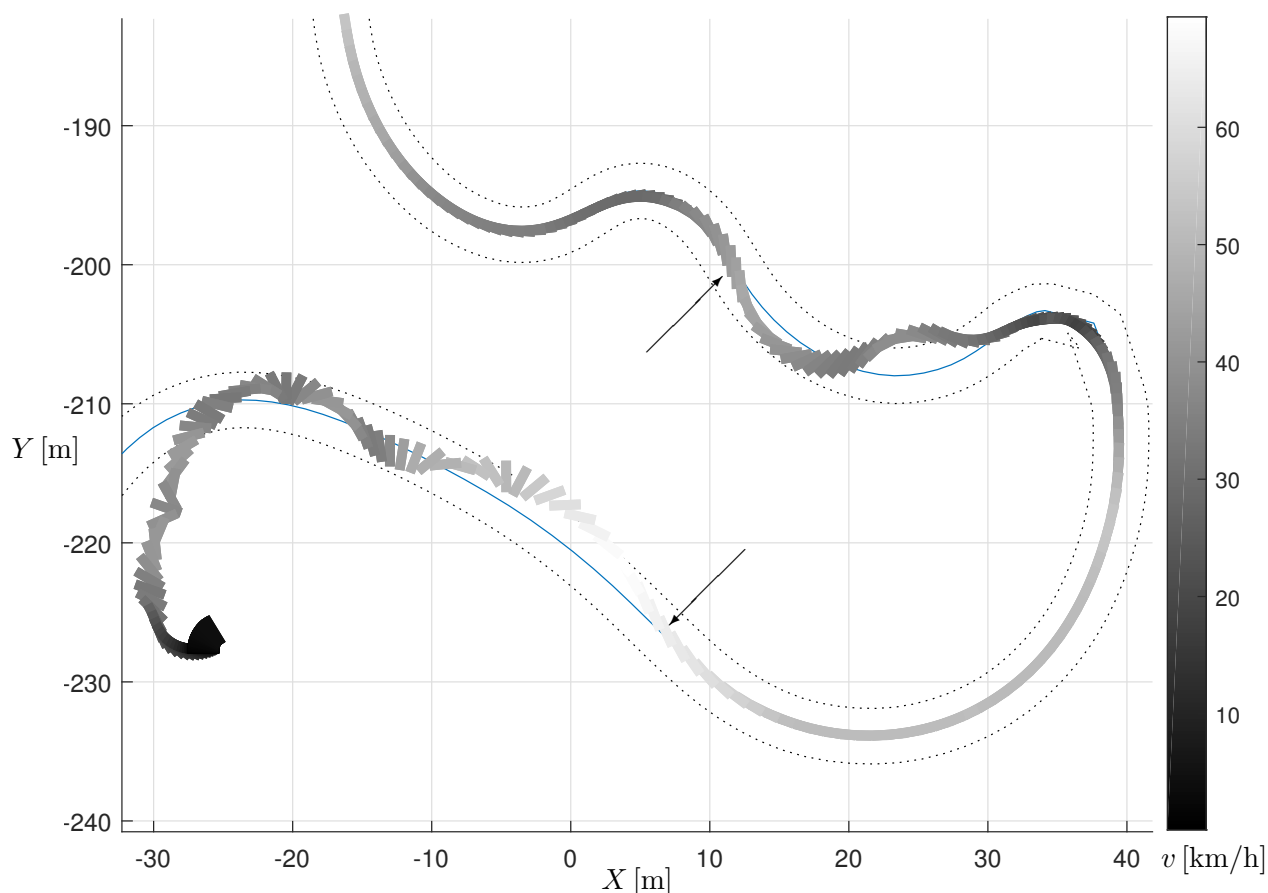
Jak bylo zmíněno v kapitole 3.2.1, konstanta  $K$  v algoritmu řízení hnacího momentu vyjadřuje styl (agresivitu) jízdy a může nabývat všech hodnot  $K > 0$ . Na obr. 4.10 je možné pozorovat, jak je ovlivněn průběh rychlosti vozidla a veličiny  $e$  při změně parametru  $K$ .



Obrázek 4.10.: Porovnání rychlosti vozidla a veličiny  $e$  pro různá  $K$ .

Pokud je  $K$  malé ( $K = 0,05$ ), potom vozidlo i na rovném úseku trati nabírá rychlost pomalu a naopak i při očekávání ostré zatáčky brzdí jen mírně. To může následně způsobit problémy při dodržování trasy jízdy.

Pokud je  $K$  velké ( $K = 1$ ), pak řízení hnacího momentu reaguje na každou změnu křivosti trasy velmi prudce, v grafu průběhu veličiny  $e$  vyjadřující míru sešlápnutí pedálů na obr. 4.10 tak lze pozorovat časté výkyvy hodnot. Průběh rychlosti se sice příliš neliší od průběhu rychlosti vozidla při výchozím nastavení parametru  $K$  ( $K = 0.3$ ), prudké přidávání plynu nebo brzdění však může v zatáčkách způsobit významnou destabilizaci jízdy, což je patrné z obr. 4.11, kde je vykreslena osa vozidla v jednotlivých časových okamžicích simulace. V obou případech vyznačených šipkou v obr. 4.11 došlo ke ztrátě stability kvůli prudkému přidání plynu při dokončování zatáčky. V prvním případě se ještě podařilo algoritmu řídicímu natočení volantu vyrovnat vzniklou nestabilitu, ale v druhém případě již vozidlo nebylo schopné se stabilizovat na požadované trase a pokračovat v jízdě.



Obrázek 4.11.: Ztráta stability při nevhodně zvoleném  $K = 1$ .

#### 4.4.2. Vliv parametru $a_{b_{max}}$

Dalším parametrem, který hraje významnou roli a který je použitý v algoritmu řízení hnacího momentu, je maximální zpomalení  $a_{b_{max}}$  při brzdění. Velikost, jež je přímo ovlivněna parametrem  $a_{b_{max}}$ , je vzdálenost  $s_p$ , ve které se hledá maximální křivost trasy, a průběh této veličiny je zobrazen v druhém grafu na obr. 4.12.

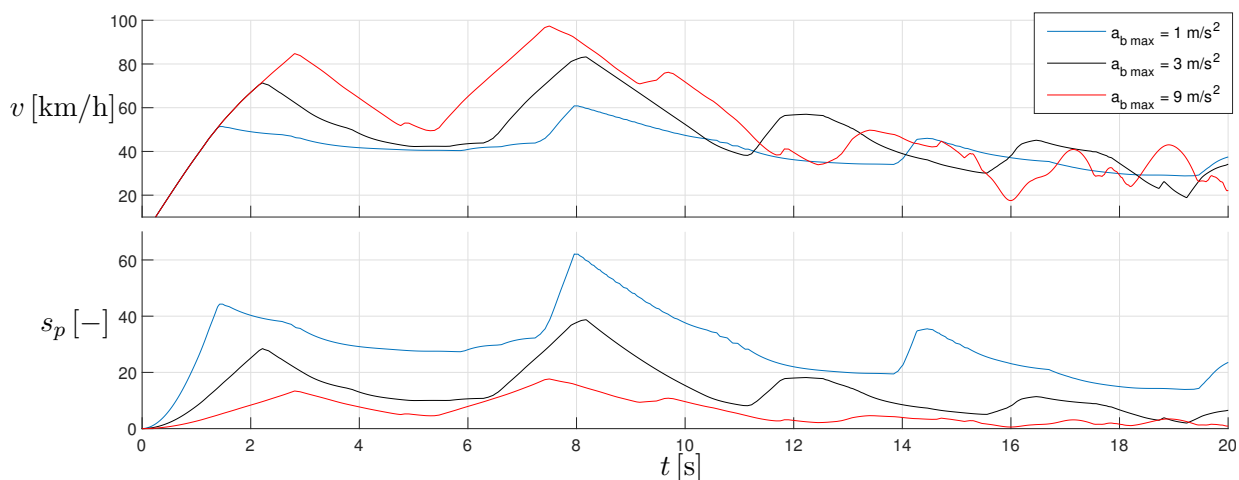
Jak je patrné z grafu, čím menší je  $a_{b_{max}}$ , tím větší je vzdálenost  $s_p$ , ve které se hledá maximální křivost. Proto pokud je  $a_{b_{max}}$  nastaveno na malou hodnotu ( $a_{b_{max}} = 1 \text{ m/s}^2$ ), pak vozidlo brzdí dříve než při volbě větší hodnoty  $a_{b_{max}}$ . Nebo je také možné, že vozidlo vůbec



nezačne zrychlovat ani na začátku rovného úseku tratě, protože algoritmus zpozoruje větší křivost trasy, která je za rovinkou.

Naopak, pokud je  $a_{b_{max}}$  příliš velké ( $a_{b_{max}} = 9 \text{ m/s}^2$ ), vozidlo nemusí včas zpomalit na požadovanou hodnotu rychlosti a vjede do nerovného úseku příliš rychle.

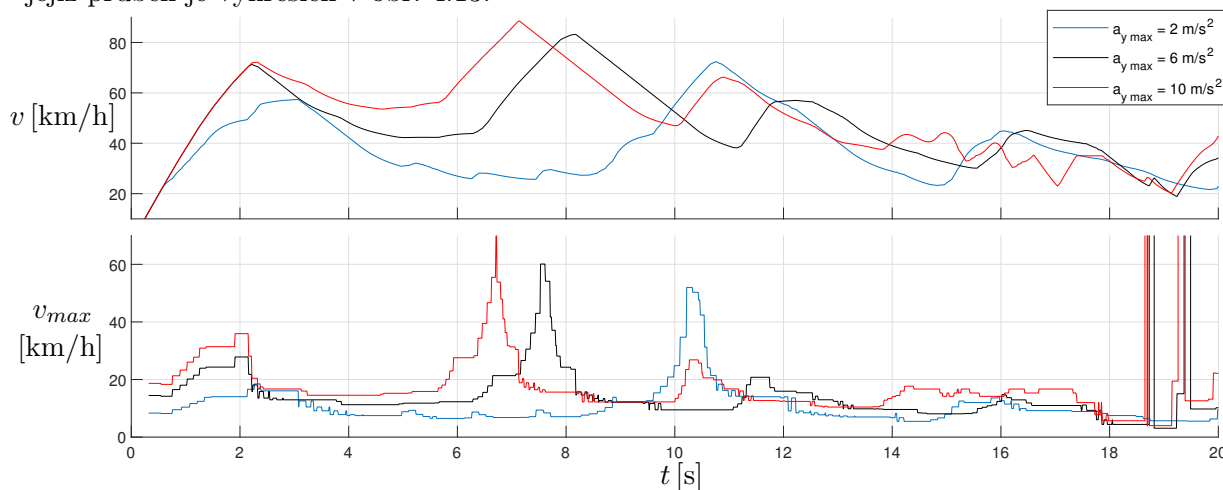
Zajímavá je analýza průběhu rychlosti pro různá  $a_{b_{max}}$  zejména při zaměření se na časový úsek přibližně  $t \in \langle 0; 5 \text{ s} \rangle$ . Pro nižší  $a_{b_{max}}$  algoritmus brzy zaregistruje nerovný úsek za rovinkou, po které jede, ale jelikož vozidlo ještě nedosáhlo příliš vysoké rychlosti, tak mu stačí pouze mírná regulace rychlosti, aby dosáhlo cílové rychlosti. Naopak pro větší  $a_{b_{max}}$  vozidlo zaregistruje zatáčku za rovinkou daleko později než v předchozím případě, má proto čas dál zrychlovat a ve chvíli, kdy algoritmus zjistí významnější křivost, vozidlo již jede vysokou rychlostí. Aby se následně dostalo na požadovanou cílovou rychlost, musí brzdit daleko intenzivněji. Cílová rychlost je však v obou případech totožná.



Obrázek 4.12.: Porovnání rychlosti vozidla a vzdálenosti  $s_p$  pro různá  $a_{b_{max}}$ .

#### 4.4.3. Vliv parametru $a_{y_{max}}$

Podobně významným parametrem, jako je maximální zpomalení  $a_{b_{max}}$  při brzdění, je maximální dostředivé zrychlení  $a_{y_{max}}$ . Hodnota tohoto zrychlení má zásadní vliv na cílovou rychlost  $v_{max}$ , jejíž průběh je vykreslen v obr. 4.13.



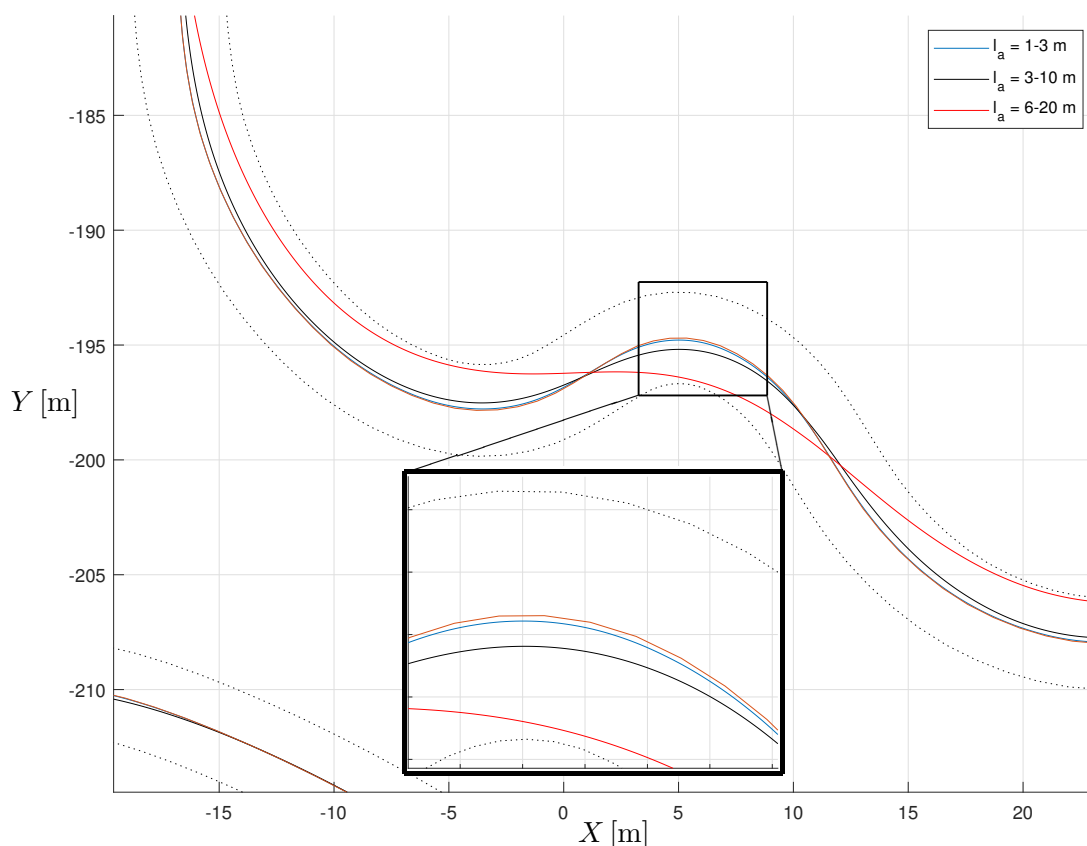
Obrázek 4.13.: Porovnání rychlosti vozidla a cílové rychlosti  $v_{max}$  pro různá  $a_{y_{max}}$ .

Pokud je parametr  $a_{y_{max}}$  velký ( $a_{y_{max}} = 10 \text{ m/s}^2$ ), pak se od vozidla očekává, že dokáže projet poměrně ostrou zatáčkou v poměrně vysoké rychlosti, aniž by se dostalo do smyku, nebo by vyjelo z trasy. Pokud je parametr  $a_{y_{max}}$  naopak malý ( $a_{y_{max}} = 2 \text{ m/s}^2$ ), potom vozidlo projíždí i mírnější zatáčky relativně nízkou rychlostí.

#### 4.4.4. Vliv vzdálenosti $l_a$

Na trajektorii pohybu vozidla má nesporně velký vliv vzdálenost  $l_a$ , ve které se hledá  $GP$ . Ta je určena (viz vztah (3.6)) na základě rychlosti vozidla a několika parametrů, ke kterým patří minimální vzdálenost  $l_{min}$  a maximální vzdálenost  $l_{max}$ . Právě změna těchto dvou parametrů je zkoumána v této části.

Je-li vzdálenost  $l_a$  obecně malá ( $l_{min} = 1 \text{ m}$  a  $l_{max} = 3 \text{ m}$ ), potom vozidlo následuje střední linii trasy téměř dokonale (na obr. 4.14 téměř nelze rozeznat střední linii vozovky a trajektorii vozidla). Naopak čím je  $l_a$  větší, tím se vozidlo odchýlí od střednice vozovky snáze (zejména v zatáčce). Tento jev lze pozorovat při volbě  $l_{min} = 6 \text{ m}$  a  $l_{max} = 20 \text{ m}$  na obr. 4.14, kde je zobrazena pasáž trati s několika zatáčkami za sebou. Je vidět, že v takovém případě si vozidlo velmi zkrátí svoji trasu. Takové chování je do jisté míry užitečné – zajišťuje efektivnější průjezd definovanou trasou.



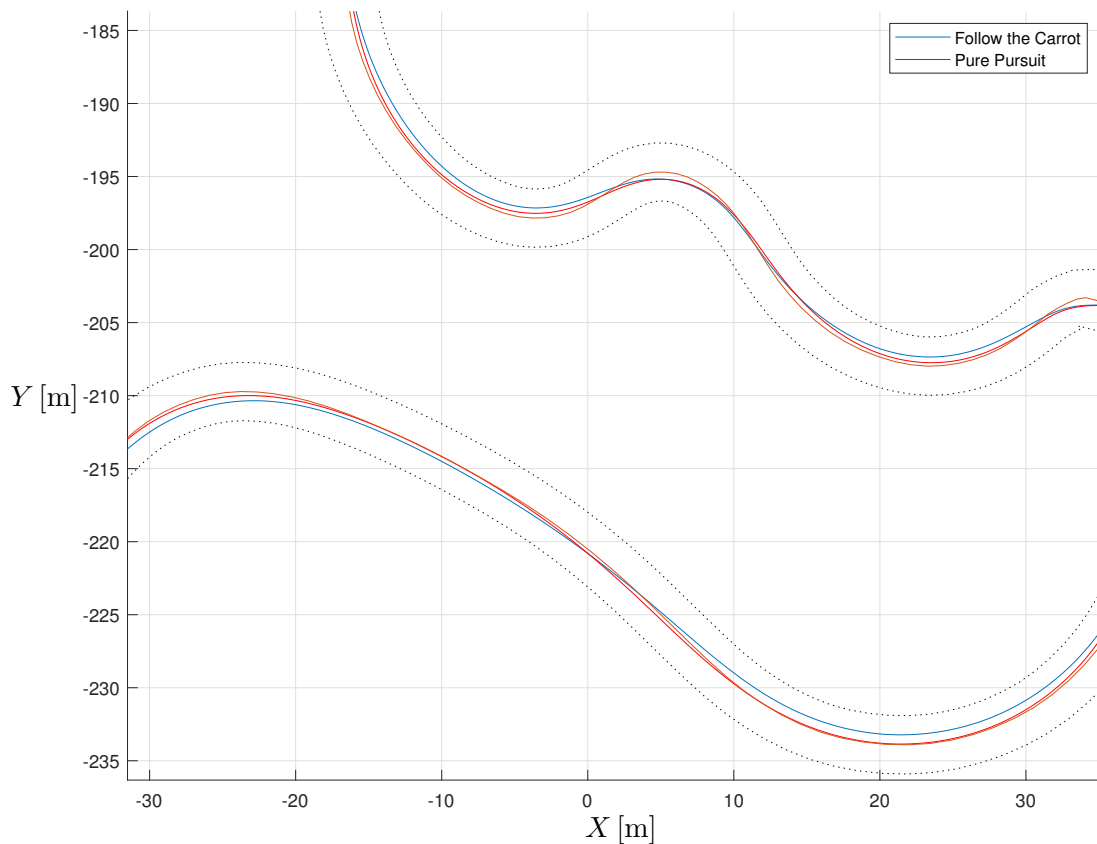
Obrázek 4.14.: Porovnání trajektorie vozidla pro různé vzdálenosti  $l_a$ .

#### 4.4.5. Vliv algoritmu řízení natočení volantu

Poslední analýza vlivu určité změny v nastavení modelu na výsledky simulace se týká změny algoritmu výpočtu úhlu  $\delta$  natočení volantu. Simulace je spuštěna se stejnými parametry nejdříve s využitím algoritmu *Follow the Carrot* a poté s využitím algoritmu *Pure Pursuit*.

Jak je patrné z obr. 4.15, na kterém je zachycen úsek trati podobný úseku v obr. 4.14, algoritmus *Follow the Carrot* má obdobný vliv jako volba větší vzdálenosti  $l_a$  (viz předchozí část 4.4.4).

Pokud je zvolen algoritmus *Pure Pursuit*, pak se vozidlo lépe přizpůsobuje křivostem trasy a při stejné vzdálenosti  $l_a$  sleduje definovanou trasu lépe než algoritmus *Follow the Carrot*.



Obrázek 4.15.: Porovnání trajektorie vozidla pro různé algoritmy řízení natočení volantu.

## 5. Závěr

V předkládané bakalářské práci jsou nastíněny různé přístupy k tvorbě matematického modelu silničního vozidla. Pro ilustraci možných přístupů jsou v kapitole 2 odvozeny jednostopý kinematický model a jednostopý dynamický model se třemi stupni volnosti. Dominantním modelem, který byl v práci vytvořen a je možné jej zhlédnout v kapitole 2, je dvoustopý dynamický model se sedmi stupni volnosti. Součástí tohoto modelu je Dugoffův model tření pneumatiky a vozovky, mechanismus směrového řízení v podobě čtyřkloubového mechanismu, pohon vycházející ze znalosti výkonové charakteristiky spalovacího motoru nebo zjednodušené řazení rychlostních stupňů. Dále jsou na tento matematický model v kapitole 3 aplikovány algoritmy automatického řízení natočení volantu a řízení pohonu a brzdění, které pracují na základě znalosti části trasy nacházející se před vozidlem.

Počítačový model vozidla s parametry studentské formule *UWB04* byl otestován na virtuálním závodním okruhu, jenž jej prověřil při mnoha jízdách situacích. Analýza výsledků v kapitole 4 ukazuje, že se vozidlo chová ze všech zkoumaných aspektů podle očekávání a logických představ. Algoritmy řízení pracují korektně a ve většině případů také efektivně – v zatáčkách je vozidlo nachýleno vždy k vnitřní straně oblouku, rychlost na rovných úsecích trati dosahuje rychlosti přes 70 km/h a v nejprudší zatáčce zpomalí vozidlo až na rychlost přibližně 20 km/h. Navíc bylo zjištěno, že počítačový model spolu s regulačními algoritmy velmi dobře modelují pohyb skutečného vozidla, protože shoda naměřených dat z reálné jízdy studentské formule po závodním okruhu s daty vypočítanými při simulaci jízdy je na velmi vysoké úrovni.

Jak částečně ukazují parametrické studie v kapitole 4, výhodou modelu je vysoká míra parametrizovatelnosti zejména řídicích algoritmů. Vhodným nastavením lze dosáhnout velmi rozdílného chování vozidla při různých manévrech. Model lze nastavit například tak, aby se choval jako závodní vozidlo jak z pohledu řízení pohonu a brzdění, tak z pohledu zatáčení (takové je také výchozí nastavení pro simulace v této práci). Naopak je také možné zajistit jistou a bezpečnou jízdu, jež je preferována většinou řidičů v běžném silničním provozu. K nevýhodám modelu lze zařadit především jeho vlastnosti a předpoklady uvedené v úvodu kapitoly 2 – zejména to, že se jedná o rovinný model, který je schopný pouze dopředné jízdy po trase bez nerovností, není zaveden vzdušný ani valivý odpor a není modelována dynamika rotujících součástí pohonné soustavy.

Uvedený matematický model s řídicími algoritmy má mnoho potenciálu, aby byl dále rozvíjen. K dalšímu zpřesnění modelu, který je pouze rovinný, by přispělo jeho rozšíření o další dimenzi, čímž by se naskytl možnost modelovat naklápění či houpání vozidla nebo jízdu po výraznějších nerovnostech. Velkou roli při jízdě studentské formule hrají její křídla, jež způsobují přítláčnou sílu a zlepšují tak traktaci vozidla. Proto by dalším budoucím cílem mohlo být namodelování těchto křídel, s čímž je spojené zahrnutí odporu vzduchu, jehož zvýšení je jakousi daní právě při použití křídel. Ve formuli *UWB04* je též instalován samosvorný diferenciál, v modelu vytvořeném v této práci je však uvažován pouze otevřený diferenciál, tudíž i tato problematika má potenciál možného rozvoje výpočtového modelu.

## Literatura

- [1] AMER, N. H., ZAMZURI, H., HUDHA, K., KADIR, Z. A.: Modelling and Control Strategies in Path Tracking Control for Autonomous Ground Vehicles: A Review of State of the Art and Challenges, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, pp. 225-254, 2016, DOI 10.1007/s10846-016-0442-0.
- [2] BLUNDELL, M., HARTY, D.: *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*, Elsevier, Oxford, Velká Británie, 2004, ISBN 0-7680-1496-4.
- [3] CAMPBELL, S. F.: *Steering Control of an Autonomous Ground Vehicle with Application to the DARPA Urban Challenge*, Master's Thesis, MIT, Boston, USA, 2007.
- [4] ERDOGAN, G.: *Tire Modeling: Lateral and Longitudinal Tire Forces*, Lecture material, University of Minnesota, Minneapolis, USA, 2009.
- [5] CHATZIKOMIS, C. I., SPENTZAS, K.: A path-following driver model with longitudinal and lateral control of vehicle's motion, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, pp. 257-266, 2009, DOI: 10.1007/s10010-009-0112-5.
- [6] JASANSKÝ, M.: *Návrh dynamických modelů pro řízení trakce experimentálního vozidla*, diplomová práce, VUT, Brno, 2010.
- [7] JAZAR, R. N.: *Vehicle Dynamics: Theory and Application*, Springer, New York, USA, 2017. ISBN 978-3-319-53441-1.
- [8] MARKDAHL, J.: *Traction Control for Off-road Articulated Vehicles*, Master's Thesis, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Švédsko, 2010.
- [9] MENCLOVÁ, E.: *Počítačové modelování jízdních vlastností formule Student*, diplomová práce, ZČU, Plzeň, 2017.
- [10] *Narodní centrum průmyslu 4.0* [online]. Praha: Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky, ©2020 [cit. 20. 6. 2020]. Dostupné z: <https://www.ncp40.cz/>
- [11] OHTA, H., AKAI, N., TAKEUCHI, E., KATO, S., EDAHIRO, M.: Pure Pursuit Revisited: Field Testing of Autonomous Vehicles in Urban Areas, *2016 IEEE 4th International Conference on Cyber-Physical Systems, Networks, and Applications*, pp. 7-12, 2016, DOI 10.1109/CPSNA.2016.10.
- [12] RACING TEAM PILSEN: *Brožura UWB04*, ZČU, Plzeň, 2017.
- [13] RAJAMANI, R.: *Vehicle Dynamics and Control*, Springer, Boston, USA, 2006, ISBN 978-1-4614-1432-2.
- [14] SLAVÍK, J., STEJSKAL, V., ZEMAN, V.: *Základy dynamiky strojů*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997, ISBN 80-01-01622-6.
- [15] VLK, F.: *Dynamika motorových vozidel*, Nakladatelství a vydavatelství VLK, Brno, 2000, ISBN 80-238-5273-6.

# A. Přílohy

## A.1. Přehled důležitých rovnic odvozených matematických modelů

### A.1.1. Jednostopý kinematický model

$$\dot{X} = v_S \cos(\Psi + \beta) \quad (2.25)$$

$$\dot{Y} = v_S \sin(\Psi + \beta) \quad (2.26)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{v_S \cos \beta}{l_f + l_r} \operatorname{tg} \delta \quad (2.24)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{l_r \operatorname{tg} \delta}{l_r + l_f} \quad (2.21)$$

Vstupy modelu:  $v_S, \delta$ .

Parametry modelu:  $l_f, l_r$ .

### A.1.2. Jednostopý dynamický model se třemi stupni volnosti

$$-m\ddot{X} - S_1 \sin(\Psi + \delta) - S_2 \sin \Psi + H_1 \cos(\Psi + \delta) + H_2 \cos \Psi = 0 \quad (2.35)$$

$$-m\ddot{Y} + S_1 \cos(\Psi + \delta) + S_2 \cos \Psi + H_1 \sin(\Psi + \delta) + H_2 \sin \Psi = 0 \quad (2.36)$$

$$-I_z \ddot{\Psi} - M_{S1} - M_{S2} + S_1 l_f \cos \delta - S_2 l_r + H_1 l_f \sin \delta = 0 \quad (2.37)$$

$$S_1 = 2C_\beta \beta_1 = 2C_\beta \left[ \delta - \operatorname{arctg} \left( \frac{\dot{\Psi} l_f}{v_S \cos \beta} + \operatorname{tg} \beta \right) \right] \quad (2.38)$$

$$S_2 = 2C_\beta \beta_2 = -2C_\beta \operatorname{arctg} \left( -\frac{\dot{\Psi} l_r}{v_S \cos \beta} + \operatorname{tg} \beta \right) \quad (2.39)$$

$$M_{S1} = 2C_{M\beta} \beta_1 = 2C_{M\beta} \left[ \delta - \operatorname{arctg} \left( \frac{\dot{\Psi} l_f}{v_S \cos \beta} + \operatorname{tg} \beta \right) \right] \quad (2.40)$$

$$M_{S2} = 2C_{M\beta} \beta_2 = -2C_{M\beta} \operatorname{arctg} \left( -\frac{\dot{\Psi} l_r}{v_S \cos \beta} + \operatorname{tg} \beta \right) \quad (2.41)$$

$$v_S = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2} \quad (2.27)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{\dot{Y}}{\dot{X}} \right) - \Psi \quad (2.34)$$

Vstupy modelu:  $H_{1,2}, \delta$ .

Parametry modelu:  $m, I_z, l_f, l_r, C_\beta, C_{M\beta}$ .

### A.1.3. Dvoustopý dynamický model se sedmi stupni volnosti

Tento přehled obsahuje pouze rovnice matematického modelu odvozeného v kapitole 2. Rovnice regulačních algoritmů z kapitoly 3 zde uvedeny nejsou.

$$-m\ddot{X} - S_1 \sin(\Psi + \delta_1) - S_2 \sin(\Psi + \delta_2) - S_3 \sin \Psi - S_4 \sin \Psi + \\ + H_1 \cos(\Psi + \delta_1) + H_2 \cos(\Psi + \delta_2) + H_3 \cos \Psi + H_4 \cos \Psi = 0 \quad (2.42)$$

$$-m\ddot{Y} + S_1 \cos(\Psi + \delta_1) + S_2 \cos(\Psi + \delta_2) + S_3 \cos \Psi + S_4 \cos \Psi + \\ + H_1 \sin(\Psi + \delta_1) + H_2 \sin(\Psi + \delta_2) + H_3 \sin \Psi + H_4 \sin \Psi = 0 \quad (2.43)$$

$$I_z \ddot{\Psi} + M_{S1} + M_{S2} + M_{S3} + M_{S4} - S_1 r_f \sin \delta_1 - S_1 l_f \cos \delta_1 + S_2 r_f \sin \delta_2 - S_2 l_f \cos \delta_2 + \\ + S_3 l_r + S_4 l_r + H_1 r_f \cos \delta_1 - H_1 l_f \sin \delta_1 - H_2 r_f \cos \delta_2 - H_2 l_f \sin \delta_2 + H_3 r_r - H_4 r_r = 0 \quad (2.44)$$

$$M_{Hi} - r_w H_i - I_w \ddot{\varphi}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.47)$$

$$H_i = C_\sigma \frac{\sigma_i}{1 + \sigma_i} f(\lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.4)$$

$$S_i = C_\beta \frac{\text{tg} \beta_i}{1 + \sigma_i} f(\lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.5)$$

$$M_{Si} = z_i S_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.1)$$

$$f(\lambda) = \begin{cases} (2 - \lambda)\lambda & \text{pro } \lambda < 1, \\ 1 & \text{pro } \lambda \geq 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\lambda = \frac{f F_{zi}(1 + \sigma_i)}{2\sqrt{(C_\sigma \sigma_i)^2 + (C_\beta \text{tg} \beta_i)^2}}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.7)$$

$$\sigma_i = \frac{r_w \dot{\varphi}_i - \dot{\xi}_i}{\max(|r_w \dot{\varphi}_i|, |\dot{\xi}_i|)}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.8)$$

$$F_{zi} = \frac{mg}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.45)$$

$$t_f = \sqrt{r_f^2 + l_f^2} \quad (2.52)$$

$$t_r = \sqrt{r_r^2 + l_r^2} \quad (2.53)$$

$$\rho_f = \text{arctg} \frac{r_f}{l_f} \quad (2.64)$$

$$\rho_r = \text{arctg} \frac{r_r}{l_r} \quad (2.65)$$

$$\beta_1 = \delta - \text{arctg} \left( \frac{v_S \sin \beta + \dot{\Psi} t_f \cos \rho_f}{v_S \cos \beta - \dot{\Psi} t_f \sin \rho_f} \right) \quad (2.68)$$

$$\beta_2 = \delta - \text{arctg} \left( \frac{v_S \sin \beta + \dot{\Psi} t_f \cos \rho_f}{v_S \cos \beta + \dot{\Psi} t_f \sin \rho_f} \right) \quad (2.69)$$

$$\beta_3 = -\text{arctg} \left( \frac{v_S \sin \beta - \dot{\Psi} t_r \cos \rho_r}{v_S \cos \beta - \dot{\Psi} t_r \sin \rho_r} \right) \quad (2.70)$$

$$\beta_4 = -\operatorname{arctg} \left( \frac{v_S \sin \beta - \dot{\Psi} t_r \cos \rho_r}{v_S \cos \beta + \dot{\Psi} t_r \sin \rho_r} \right) \quad (2.71)$$

$$\dot{\xi}_1 = (v_S \cos \beta - \dot{\Psi} d_f \sin \rho_f) \cos \delta + (v_S \sin \beta + \dot{\Psi} t_f \cos \rho_f) \sin \delta \quad (2.73)$$

$$\dot{\xi}_2 = (v_S \cos \beta + \dot{\Psi} d_f \sin \rho_f) \cos \delta + (v_S \sin \beta + \dot{\Psi} t_f \cos \rho_f) \sin \delta \quad (2.74)$$

$$\dot{\xi}_3 = v_S \cos \beta - \dot{\Psi} t_r \sin \rho_r \quad (2.75)$$

$$\dot{\xi}_4 = v_S \cos \beta + \dot{\Psi} t_r \sin \rho_r \quad (2.76)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{\dot{Y}}{\dot{X}} \right) - \Psi \quad (2.34)$$

$$v_S = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2} \quad (2.27)$$

$$\varphi_2(\varphi_1) - \varphi_1 - 2\delta = 0 \quad (2.87)$$

$$\varphi_2(\varphi_1) = \operatorname{arctg} \frac{k_{st} \sin \varphi_1}{d_f - k_{st} \cos \varphi_1} + \arccos \frac{2k_{st}^2 + d_f^2 - 2k_{st}d_f \cos \varphi_1 - d_{st}^2}{2k_{st} \sqrt{k_{st}^2 + d_f^2 - 2k_{st}d_f \cos \varphi_1}} \quad (2.82)$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{2l}{d_f} \quad (2.88)$$

$$d_{st} = d_f - 2k_{st} \cos \varphi_0 \quad (2.89)$$

$$n_e = \frac{15}{\pi} stg_k f d (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4) \quad (2.98)$$

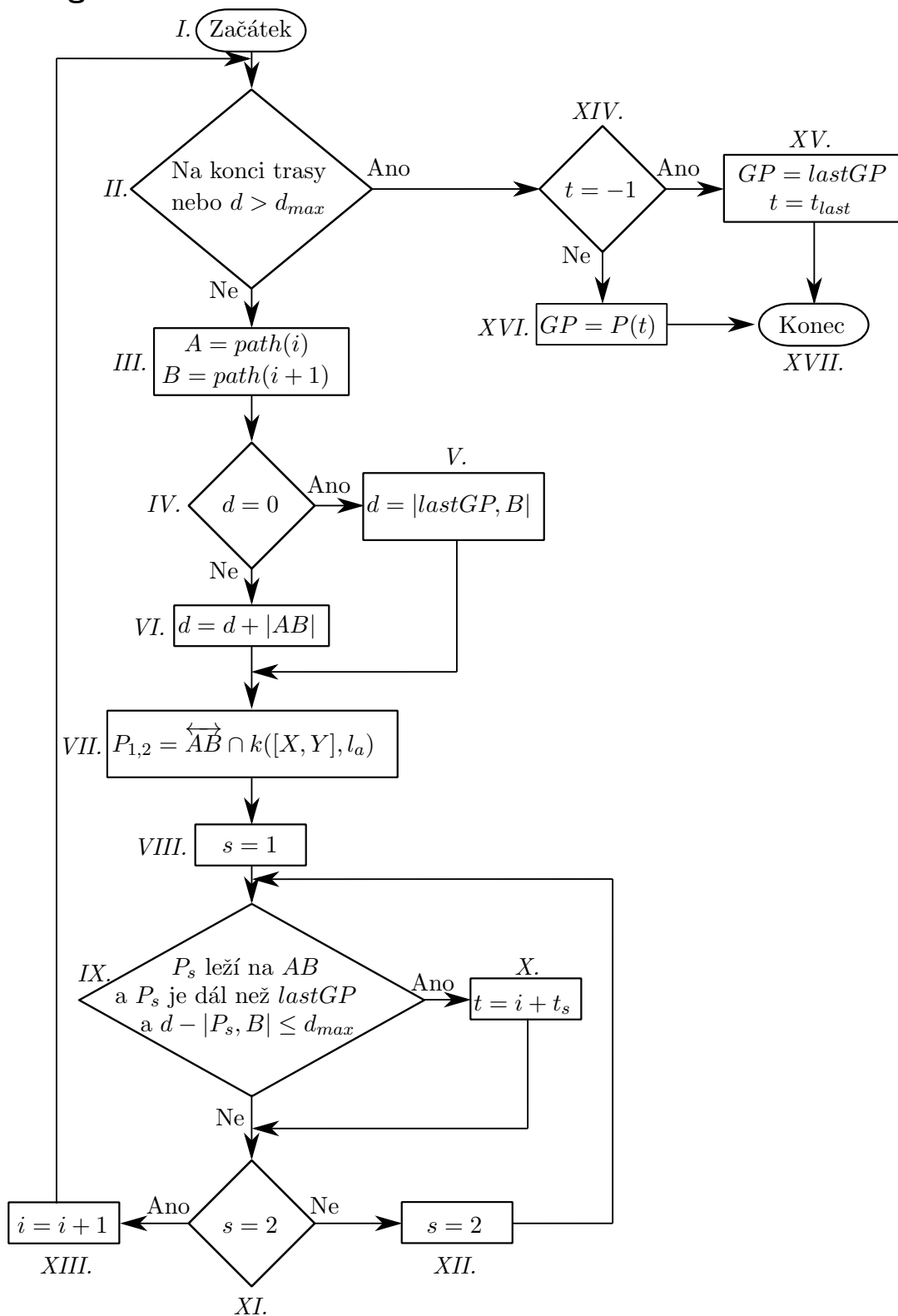
$$M_{A_{max}} = \frac{15}{\pi} \frac{P_e(n_e) stg_k f d}{n_e} \quad (2.109)$$

Vstupy modelu (z regulačních algoritmů):  $\delta, M_{Hi}(M_{A_{max}}, M_{B_{max}})$ .

Parametry modelu:  $m, I_z, g, f, l_f, l_r, d_f = 2r_f, d_r = 2r_r, r_w, I_w, C_\sigma, C_\beta, z_{1,2,3,4}, k_{st}, s_t, g_{1,2,3,4}, f_d, P_e(n_e), M_{B_{max}}$ .



## A.2. Algoritmus hledání GP



Obrázek A.1.: Vývojový diagram algoritmu hledání GP.

Poznámky k jednotlivým krokům<sup>1</sup> ve vývojovém diagramu A.1:

- I. Začátek: Načtení parametrů – *path* (bodově určená trasa),  $l_a$  (požadovaná vzdálenost bodu na vozidle  $[X, Y]$  a nového *GP*),  $d_{max}$  (maximální vzdálenost *GP* z minulého cyklu označovaného jako *lastGP* a nového *GP*),  $t_{last}$  (index *lastGP*).  
Vytvoření a inicializace proměnných –  $t = -1$  (aktuálně nejvhodnější *GP*),  $d = 0$  (aktuální vzdálenost uzlu  $B$ <sup>2</sup> od *lastGP*),  $i = t_{last}/1$  (aktuální index uzlu  $A$ <sup>2</sup>,  $t_{last}/1$  označuje celočíselné dělení číslem 1).
- II. Ukončovací podmínka cyklu: úsečka *AB* pro další cyklus by již byla za posledním bodem trasy *path* nebo vzdálenost  $d > d_{max}$ , kde  $d = |lastGP, B|$  a *B* je koncový bod úsečky předchozího cyklu.
- III. Načtení počátečního bodu *A* a koncového bodu *B* nově aktivované (*i*-té) úsečky *AB*.
- IV. Jedná se o první běh cyklu?
- V. Uložení vzdálenosti  $|lastGP, B|$  do proměnné *d*.
- VI. Přičtení vzdálenosti  $|A, B|$  do proměnné *d*.
- VII. Nalezení obou průsečíků  $P_{1,2}$  (jejich indexů  $t_{1,2}$ ) přímky  $\overleftrightarrow{AB}$  a kružnice *k* se středem v  $[X, Y]$  a poloměrem  $l_a$  dle vztahů (3.4) a (3.5).
- VIII. Zavedení proměnné *s* a inicializace  $s = 1$  (určuje, o kolikátý průsečík se jedná).
- IX. Požadavky kladené na nový vhodný *GP* (popsané výše v kapitole 3.1.2): Leží  $P_s$  uvnitř úsečky *AB*, zároveň nachází se  $P_s$  dále než *GP* z minulého cyklu *lastGP* a zároveň je vzdálenost  $|lastGP, P_s| \leq d_{max}$ ?
- X. Protože průsečík  $P_s$  splňuje požadavky na nový *GP*, jeho index je z globálního pohledu celé trasy uložen do proměnné *t* jako  $t = i + t$ , kde *i* označuje index počátečního bodu *A* aktivované úsečky *AB*.
- XI. Platí, že  $s = 2$  (byly otestovány oba průsečíky)?
- XII.  $s = 2$  – testování 2. průsečíku.
- XIII.  $i = i + 1$  – posunutí o jeden úsek trasy *path* dále (aktivace nového úseku).
- XIV. Platí, že  $t = -1$  (nebyl nalezen žádný nový *GP*, který by splňoval všechny podmínky v IX.)?
- XV. Protože nebyl nalezen žádný nový vhodný *GP*, je jako nový *GP* považován ten z minulého cyklu ( $GP = lastGP$ ) i s jeho indexem ( $t = t_{last}$ ).
- XVI. Uložení nového *GP* jako bodu na trase *path*, kterému náleží index *t*.
- XVII. Konec: Výstupem algoritmu je nový *GP* a jeho index *t*.

<sup>1</sup>Nejedná se o chronologické body, proto pro porozumění algoritmu je nutné sledovat také vývojový diagram na obr. A.1.

<sup>2</sup>Uzly *A* a *B* označují počáteční a koncový bod aktivované (*i*-té) úsečky, se kterou se právě hledá průsečík.