

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
**Šíření napěťových vln v tenkých
viskoelastických tyčích**

Autor: Jakub Šulda
Vedoucí: Ing. Vítězslav Adámek, Ph.D.

Červen 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 30. 6. 2020

Jakub Šulda

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval především Ing. Vítězslavu Adámkovi, Ph.D. za odborné vedení práce, za podporu a trpělivost při jejím vytváření a za veškerý čas, který mi věnoval při řešení dané problematiky.

Poděkování patří i Ing. Romanu Kroftovi za provedení experimentu, jehož výsledky napomohly ke splnění cílů této práce. Dále děkuji Bc. Ondřeji Kábovi za poskytnutí naměřených dat z jeho bakalářské práce.

Nakonec bych chtěl poděkovat svým rodičům a blízkým za motivaci a podporu při mém studiu.

V Plzni dne 30. 6. 2020

Jakub Šulda

Abstrakt

Tato práce pojednává o šíření vln v tenkých viskoelastických tyčích. Je zde provedeno odvození pohybové rovnice pro vybraný viskoelastický model a nalezeno její řešení v Laplaceově oblasti. Získané vztahy pro Laplaceovy obrazy základních mechanických veličin jsou následně pomocí numerické zpětné Laplaceovy transformace vyčísleny v časoprostorové oblasti za pomoci programu vytvořeného v prostředí Matlab. Toto řešení je následně použito k validaci numerického řešení úlohy získaného pomocí konečnoprvkového softwaru MSC.Marc/Mentat. V další části práce je popsán vliv viskoelastivity na šíření vln a jsou diskutovány disperzní a tlumivé vlastnosti materiálu. V práci jsou dále uvedeny výsledky provedeného experimentálního měření, pomocí nichž je ověřena správnost analytického a numerického řešení. Tyto výsledky byly v poslední části práce dále využity k řešení inverzní úlohy identifikace materiálových parametrů pro vybrané diskrétní viskoelastické modely.

Abstract

This bachelor thesis deals with wave propagation in thin viscoelastic rods. The derivation of the equation of motion for the selected viscoelastic model is performed and its solution is found in the Laplace domain. The relations for the Laplace transforms of basic mechanical quantities are presented and their inversion back to the time domain is performed using an in-house Matlab code based on the numerical inverse Laplace transform. Furthermore, this solution is then used to validate the numerical solution of the problem obtained using the finite element software MSC.Marc/Mentat. The next part of the work describes the effect of viscoelasticity on wave propagation and discusses the dispersion and damping properties of the material. The work presents the results of experimental measurements, which are used to verify the accuracy of analytical and numerical solutions and which served for solving the inverse problems of material parameters identification for selected discrete viscoelastic models in the last part of this work.

Obsah

1	Úvod	5
2	Problematika šíření napěťových vln ve viskoelastickém prostředí	6
3	Nestacionární vlnění v tenké viskoelastické tyči	8
3.1	Popis úlohy	8
3.2	Odvození pohybové rovnice pro model standardního viskoelastického tělesa	8
3.3	Řešení rovnice v Laplaceově oblasti	11
3.4	Zobecnění úlohy pro obecný model standardního viskoelastického tělesa . .	14
3.5	Provedení zpětné Laplaceovy transformace	17
4	Vyčíslení analytického řešení a porovnání výsledků s výsledky numerických simulací	18
4.1	Popis vyčíslení analytického řešení	18
4.2	Numerické řešení pomocí metody konečných prvků	19
5	Vliv viskoelasticity na šíření vln v tenké tyči	25
5.1	Porovnání šíření vln v elastickém a viskoelastickém materiálu	25
5.2	Disperze a tlumení vln ve viskoelastickém 1D prostředí	26
6	Identifikace materiálových vlastností na základě experimentálních dat	29
6.1	Popis experimentu a výsledky měření	29
6.2	Porovnání naměřené a vypočtené odezvy tyče	30
6.3	Formulace úlohy identifikace a její řešení	32
6.4	Identifikované materiálové parametry	35
7	Závěr	39
	Příloha A Materiálový list POM-C	42
	Příloha B Materiálový list PC 1000	43
	Příloha C Produktový list rázového kladívka	44
	Příloha D Produktový list akcelerometru	46
	Příloha E Porovnání naměřených a vypočtených odezev pro jednotlivé materiály	47

1 Úvod

Cílem této práce je řešení nestacionární odezvy jednorozměrného viskoelastického prostředí pomocí zvolené analytické, numerické a experimentální metody a využití získaných výsledků pro identifikaci materiálových parametrů.

V první části práce je diskutován vliv viskoelasticity při statických a dynamických dějích. Dále jsou v souvislosti se specifickými vlastnostmi viskoelastických materiálů zmíněny některé jejich praktické aplikace. V následující kapitole je formulována úloha nestacionárního vlnění v tenké viskoelastické tyči konečné délky, je odvozena pohybová rovnice pro model standardního viskoelastického tělesa a je popsán postup řešení této rovnice pro konkrétní okrajové a počáteční podmínky. Odvození vztahů a rovnic vedoucích k nalezení odezvy tyče přitom bylo provedeno v prostředí symbolického softwaru Maple 18. Po uvedení výsledných vztahů popisujících Laplaceovy obrazy vybraných mechanických veličin je diskutováno chování použitého viskoelastického modelu v limitních případech. V další kapitole je pak popsán nástroj vytvořený v prostředí Matlab R2018a, který umožňuje rychlé a jednoduché vyčíslení odezvy volné nebo vetknuté tyče na libovolný typ vnějšího zatížení. Zároveň je v této kapitole uvedeno numerické řešení získané pomocí konečnoprvkového programu MSC.Marc2014 a je provedena analýza vlivu parametrů numerického modelu na přesnost řešení. Kapitola 5 uvádí porovnání vlivu elastického a viskoelastického prostředí na odezvu budicího signálu. Dále je zde diskutována závislost rychlosti šíření vlny a tlumení na úhlové frekvenci buzení. V poslední části práce je popsáno provedení experimentálního vyšetřování nestacionárního vlnění v tenké tyči pro vybrané materiály. Po popisu použité aparatury a analýze naměřených dat je experimentálně stanovená odezva tyče porovnána s analytickým řešením. Dále se v této kapitole pojednává o řešení inverzní úlohy vedoucí k nalezení materiálových parametrů na základě naměřených dat. Tyto parametry jsou pak pro všechny studované materiály a různé materiálové modely shrnuty v tabulkách na konci poslední kapitoly.

2 Problematika šíření napěťových vln ve viskoelastickém prostředí

Viskoelastické prostředí vykazuje při statickém i dynamickém zatížení jiné chování než prostředí elastické. Při statickém zatížení skokovou změnou deformace dochází k jevu, který je označován jako relaxace napětí. Při tomto ději dochází s rostoucím časem k poklesu napětí. Doba, za kterou napětí klesne na hodnotu $1/e$, se nazývá relaxační čas [1]. Výrazná relaxace nastává i při dynamickém zatěžování, a to v případě, že odezvu prostředí studujeme v časech řádově srovnatelných s relaxačním časem. Důsledkem toho dochází k disipaci energie, nebo-li k tlumení [2]. Tohoto faktu se využívá v řadě praktických aplikací, například k tlumení seismických vibrací [3] nebo k tlumení hluku v dopravních prostředcích [4]. K popisu viskoelastického chování materiálů jsou nejčastěji využívány diskrétní materiálové modely. Na rozdíl od modelů spojitých, které jsou obecnější, je jejich aplikace na reálné úlohy jednodušší. V těchto modelech se využívá sériového či paralelního zapojení elastických prvků (pružin) a vazkých členů (tlumičů), nebo jejich libovolné kombinace (viz [1]). V paralelním zapojení pružiny a tlumiče (tzv. Voigtův-Kelvinův model) se celkové napětí získá superpozicí napětí na jednotlivých členech a celková deformace je totožná s prodloužením elastického či vazkého prvku. V limitním případě, kdy se vazkost tlumiče blíží k nekonečnu, vykazuje Voigtův-Kelvinův model chování dokonale tuhého tělesa. Druhým nejjednodušším viskoelastickým modelem je tzv. Maxwellův model [1]. V tomto případě se jedná o sériové zapojení pružiny a tlumiče, takže výsledná deformace je superpozicí dílčích deformací a celkové napětí je stejné jako napětí na elastickém nebo vazkém členu modelu. Stejným limitním přechodem jako ve Voigtově-Kelvinově modelu se stane těleso ideálně elastickým. Ne však všechny modely jsou vhodné pro popis viskoelastického chování materiálu v úlohách elastodynamiky. Voigtův-Kelvinův model je například nevhodný pro vyšetřování odezvy prostředí na vysokofrekvenční buzení. Při skokovém zatížení nebo při zatížení obdélníkovým pulsem totiž rychlost vlny vzroste nade všechny meze [5], neboť se vazký člen modelu stane dokonale tuhým. K obecnějšímu popisu chování viskoelastických materiálů se velmi často používá model tzv. standardního viskoelastického tělesa. Tento model, stejně jako dva výše zmíněné, má pouze jeden relaxační čas. Skutečný viskoelastický materiál má však spojitě spektrum relaxačních časů. Proto se zavádí model tzv. obecného standardního viskoelastického tělesa, který je tvořen paralelním spojením standardního modelu a libovolného počtu Maxwellových modelů [1].

Pro vytvoření dostatečně přesného modelu reálné úlohy je nutné znát materiálové vlastnosti zkoumaného prostředí. V případě řešení úloh elastodynamiky je nutné si uvědomit, že některé z materiálových parametrů (např. mez kluzu) závisí i na rychlosti deformace [2]. Proto nelze k určení materiálových parametrů použít pouze klasickou tahovou zkoušku, při které je vzorek zatěžován staticky. Z tohoto důvodu je velmi často využíván SHPB test (split Hopkinson pressure bar), taktéž označován jako Kolsky bar test [6]. V této metodě se ke stanovení materiálových parametrů při dynamickém zatížení využívá poznatků z teorie šíření vln v tenkých tyčích (viz [7, 8]). Tuto metodu navrhl v roce 1914 B. Hopkinson a byla zmodifikovaná Davisem a Kolskym [6, 9].

Při modelování vlnových jevů ve viskoelastických tělesech pomocí metody konečných

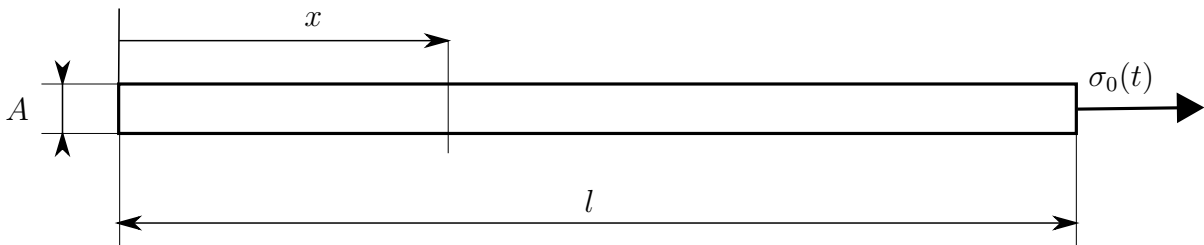
prvků (MKP) se setkáváme se třemi různými typy disperzního chování. Prvním typem, typickým pro viskoelastické materiály, je tzv. materiálová disperze, která souvisí s dissipativními účinky tohoto prostředí. Dalšími typy disperze, se kterými se setkáváme i u elastického prostředí, je disperze geometrická, způsobená konečnými rozměry studovaných těles, a disperze vyvolaná prostorovou diskretizací konečnými prvky. Charakter této disperze závisí zejména na volbě bazových funkcí konečných prvků a na velikosti prvků, kterou je nutné volit s ohledem na frekvenční spektrum šířícího se signálu. Kromě prostorové diskretizace je nutné v případě úlohy elastodynamiky provést i diskretizaci v časové oblasti. To následně vyžaduje aplikaci vhodné explicitní nebo implicitní integrační metody. V případě metod explicitních, které jsou podmíněně stabilní, je nutné volit integrační krok s ohledem na zvolenou velikost prvků. Nepodmíněně stabilní implicitní metody naproti tomu umožňují volit integrační krok libovolné velikosti. Nevhodná volba kroku však může mít za následek významné zkreslení numerických výsledků.

3 Nestacionární vlnění v tenké viskoelastické tyči

V této kapitole je ukázáno, jak nalézt odezvu tenké viskoelastické tyče konečné délky na libovolné buzení. V první části této kapitoly je sestavena pohybová rovnice pro diferenciálně malý element tyče. Dále je tato rovnice řešena pomocí Laplaceovy transformace v čase a jsou uvedeny Laplaceovy obrazy osového posuvu, rychlosti, zrychlení a napětí pro volnou i vetknutou tyč. Poté je řešení úlohy zobecněno pro obecný model standardního viskoelastického tělesa a nakonec jsou diskutovány možnosti provedení zpětné Laplaceovy transformace.

3.1 Popis úlohy

V následujícím textu je uvažována tenká homogenní prizmatická tyč délky l , průřezu A a hustoty ρ , která má viskoelastické materiálové vlastnosti. Levý konec tyče je umístěn do počátku souřadnicového systému a pravý konec nacházející se v místě $x = l$ je buzen libovolnou funkcí napětí $\sigma_0(t)$ (viz obr. 1). Řešení této úlohy je hledáno pro dva typy okrajových podmínek v místě $x = 0$, v prvním případě je tento konec vetknutý a ve druhém volný.



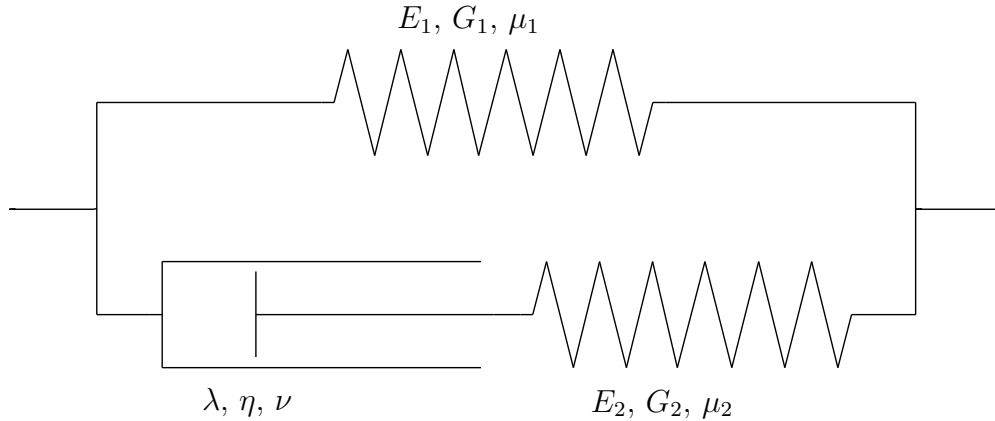
Obrázek 1: Schéma řešené úlohy

Relaxační vlastnosti materiálu jsou reprezentovány Zenerovým modelem standardního viskoelastického tělesa. Na obr. 2 je znázorněn tento model a uvedeny materiálové parametry jednotlivých jeho členů. Konstanty E_i , G_i a μ_i pro $i = 1, 2$ postupně odpovídají modulu pružnosti v tahu, ve smyku a Poissonově číslu elastických prvků. Vlastnosti vazkého tlumiče obsaženého v modelu jsou popsány konstantami λ , η a ν , které postupně označují normálovou viskozitu, součinitel smykové viskozity a Poissonovo číslo tohoto vazkého prvku.

3.2 Odvození pohybové rovnice pro model standardního viskoelastického tělesa

Na obr. 3 jsou znázorněny všechny silové účinky působící na element tyče délky dx . Na základě toho lze snadno odvodit diferenciální podmínku rovnováhy, která po jednoduché úpravě představuje pohybovou rovnici v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$



Obrázek 2: Zenerův model standardního viskoelastického materiálu

kde funkce $\sigma(x, t)$ a $u(x, t)$ značí osově napětí a posuv v závislosti na poloze x a času t . Tato rovnice je shodná s rovnicí odvozenou v [11] pro elastický případ.

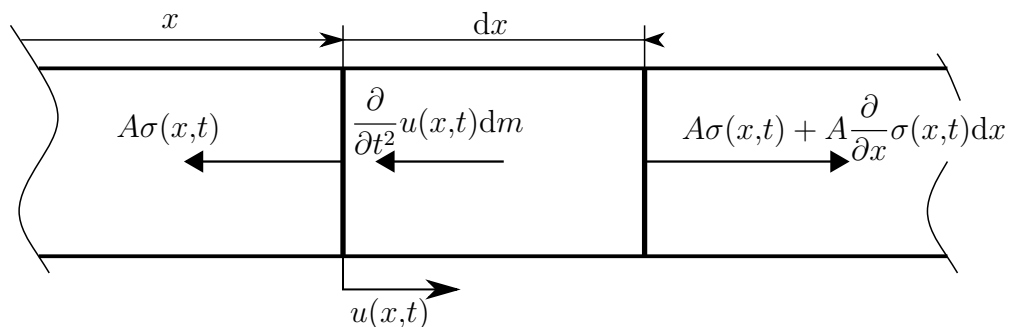
Výsledný tvar pohybové rovnice řešené úlohy lze získat s využitím geometricko-deformačních a fyzikálních rovnic. Geometricko-deformační rovnice vyjadřují vztah mezi deformacemi a posuvy. S ohledem na to, že jedinou nenulovou složkou posuvu je právě osový posuv $u(x, t)$, lze deformaci $\varepsilon(x, t)$ v axiálním směru při uvažování malých deformací napsat jako

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (3.2)$$

Pro sestavení fyzikální rovnice, která obecně popisuje vztah mezi napětím a deformací (popřípadě její rychlostí), bude využito principu superpozice posuvu a napětí u paralelně a sériově řazených prvků použitého viskoelastického modelu (obr. 2). Napětí na samostatně stojící pružině s modulem pružnosti v tahu E_1 lze pomocí Hookeova zákona vyjádřit jako

$$\sigma_E(x, t) = E_1 \varepsilon(x, t). \quad (3.3)$$

Napětí na Maxwellově prvku charakterizovaného modulem pružnosti v tahu E_2 a normálovou viskozitou λ odpovídá řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu, kterou lze



Obrázek 3: Síly působící na element tyče

odvodit zderivováním vztahu popisujícího celkovou deformaci jako součet deformací jednotlivých členů modelu a na základě znalosti, že napětí na elastickém členu $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$ a vazkém prvku $\sigma(t) = \lambda \, d\varepsilon/dt$ jsou si rovny (viz [1])

$$\sigma_M(x, t) = E_2\varepsilon(x, t) - \frac{E_2^2}{\lambda} \int_0^t \varepsilon(x, \tau) e^{-\frac{E_2}{\lambda}(\tau-t)} \, d\tau. \quad (3.4)$$

Díky tomu, že je použitý materiálový model lineární, lze využít princip superpozice, tj. výsledné napětí na Zenerově modelu $\sigma(x, t)$ je součtem (3.3) a (3.4)

$$\sigma(x, t) = \sigma_E(x, t) + \sigma_M(x, t) = (E_1 + E_2)\varepsilon(x, t) - \frac{E_2^2}{\lambda} \int_0^t \varepsilon(x, \tau) e^{-\frac{E_2}{\lambda}(\tau-t)} \, d\tau. \quad (3.5)$$

Dosazením (3.5) a (3.2) do (3.1) a po zavedení konstant $c_{0,1} = \sqrt{E_1/\rho}$, $c_{0,2} = \sqrt{E_2/\rho}$, které odpovídají rychlostem podélných vln v elastickém 1D prostředí s moduly E_1 a E_2 , bude mít výsledná pohybová rovnice tvar

$$(c_{0,1}^2 + c_{0,2}^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - c_{0,2}^2 \frac{E_2}{\lambda} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, \tau) e^{-\frac{E_2}{\lambda}(\tau-t)} \, d\tau = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t). \quad (3.6)$$

Rovnice (3.6) je integrodiferenciální rovnice druhého řádu jejíž druhý člen, člen s časovým integrálem, odpovídá viskoelastickému chování. Obsahuje relaxační čas $t_R = \lambda/E_2$, který souvisí s disipací energie a je charakteristický pro kontinua, jejichž chování je popsáno modelem obsahujícím Maxwellův člen. Za zmínku stojí uvést, že při limitní volbě normálové viskozity tlumiče $\lambda = 0$ bude napětí v Maxwellově větvi zrelaxováno v nulovém čase. Jinými slovy, v této větvi bude vždy nulové napětí a materiál bude elastický s modulem pružnosti v tahu $E = E_1$. Na druhou stranu limitním přechodem $\lambda \rightarrow \infty$ se tlumič stane nedeformovatelným, neboť k relaxaci dojde v nekonečném čase. Tím se materiál stane elastickým s $E = E_1 + E_2$.

Posledním krokem pro úplnou formulaci úlohy je definování počátečních a okrajových podmínek. Pro jednoduchost budeme předpokládat nulové počáteční podmínky

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Jak už bylo zmíněno, tyč bude v počátku $x = 0$ uvažována v prvním případě s volným koncem, tedy osové napětí na tomto konci bude nulové

$$\sigma(0, t) = 0, \quad (3.8)$$

a ve druhém případě bude tento konec vetknutý. Jelikož předpokládáme jediný možný posuv ve směru osy x , bude tato podmínka vyjadřovat nulový posuv, tj.

$$u(0, t) = 0. \quad (3.9)$$

Opačný konec tyče v místě $x = l$ bude buzen osovým napětím $\sigma_0(t)$

$$\sigma(l, t) = \sigma_0(t), \quad (3.10)$$

jak bylo zmíněno v popisu úlohy v části 3.1.

3.3 Řešení rovnice v Laplaceově oblasti

Pro nalezení řešení pohybové rovnice (3.6) s výše uvedenými počátečními a okrajovými podmínkami (3.7) - (3.10) bude nejprve využita Laplaceova transformace a následně bude provedeno řešení získané obyčejné diferenciální rovnice v komplexní oblasti. Na základě definice Laplaceovy transformace (viz [10]), lze obraz $U(x, p)$ hledaného posuvu $u(x, t)$ vyjádřit jako

$$U(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt, \quad (3.11)$$

kde $p \in \mathbb{C}$ je nová komplexní proměnná. Po provedení Laplaceovy transformace rovnice (3.6) a dosazení nulových počátečních podmínek (3.7) do členů, které vyplynuly z Laplaceovy transformace druhé časové derivace funkce $u(x, t)$, bude mít pohybová rovnice v komplexní oblasti tvar

$$(c_{0,1}^2 + c_{0,2}^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, p) - c_{0,2}^2 \frac{E_2}{\lambda \left(p + \frac{E_2}{\lambda} \right)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, p) = p^2 U(x, p). \quad (3.12)$$

Rovnici (3.12) je možné upravit tak, aby v komplexní oblasti formálně odpovídala pohybové rovnici v elastickém případě [11]. Za tímto účelem bude zavedena nová veličina $\alpha = E_2/\lambda$, která odpovídá převrácené hodnotě relaxačního času t_R celého modelu. Po vytknutí parciálních derivací obrazu $U(x, p)$ a zavedením nové komplexní funkce $C_0(p)$ vztahem

$$C_0(p) = \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{p + \alpha} \right) c_{0,2}^2 + c_{0,1}^2}, \quad (3.13)$$

lze pohybovou rovnici (3.12) v Laplaceově oblasti přepsat do výsledného tvaru

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, p) - \frac{p^2 U(x, p)}{C_0^2(p)} = 0. \quad (3.14)$$

Tato rovnice představuje obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou $U(x, p)$ v proměnné x . Její obecné řešení lze předpokládat ve tvaru

$$U(x, p) = B_1(p) e^{\lambda_1(p)x} + B_2(p) e^{\lambda_2(p)x}, \quad (3.15)$$

kde B_1, B_2 jsou prozatím neznámé funkce a λ_1, λ_2 jsou kořeny tzv. charakteristické rovnice odpovídající rovnici (3.14) a mající v tomto případě tvar

$$\lambda^2(p) - \frac{p^2}{C_0^2(p)} = 0. \quad (3.16)$$

Je zřejmé, že kořeny této rovnice jsou

$$\lambda_1(p) = \frac{p}{C_0(p)}, \quad \lambda_2(p) = -\frac{p}{C_0(p)}. \quad (3.17)$$

Dosazením (3.17) do (3.15) dostaneme obecné řešení pro libovolné okrajové podmínky

$$U(x, p) = B_1(p)e^{\frac{px}{C_0(p)}} + B_2(p)e^{-\frac{px}{C_0(p)}}. \quad (3.18)$$

Vyjádříme-li exponenciální funkce v (3.18) pomocí funkcí hyperbolických, tj.

$$\begin{aligned} e^{\frac{px}{C_0(p)}} &= \sinh \frac{px}{C_0(p)} + \cosh \frac{px}{C_0(p)}, \\ e^{-\frac{px}{C_0(p)}} &= \cosh \frac{px}{C_0(p)} - \sinh \frac{px}{C_0(p)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

lze po dosazení (3.19) do (3.15) obecné řešení přepsat jako

$$U(x, p) = (B_1(p) - B_2(p)) \sinh \frac{px}{C_0(p)} + (B_1(p) + B_2(p)) \cosh \frac{px}{C_0(p)}. \quad (3.20)$$

Zavedením nových komplexních funkcí $D_1(p) = (B_1(p) - B_2(p))$ a $D_2(p) = (B_1(p) + B_2(p))$ se rovnice (3.20) zjednoduší na tvar

$$U(x, p) = D_1(p) \sinh \frac{px}{C_0(p)} + D_2(p) \cosh \frac{px}{C_0(p)}. \quad (3.21)$$

Obecné řešení v komplexní oblasti (3.21) je formálně podobné obecnému řešení pohybové rovnice v elastickém prostředí po Laplaceově transformaci (viz [11])

$$U(x, p) = C_1(p) \sinh \frac{px}{c_0} + C_2(p) \cosh \frac{px}{c_0}, \quad (3.22)$$

kde C_1, C_2 formálně odpovídají neznámým komplexním funkcím D_1, D_2 ve vztahu (3.21) a konstanta c_0 značí rychlost v elastickém prostředí, která na rozdíl od viskoelastického případu nezávisí na komplexní proměnné p .

V další fázi je nutné najít podobu komplexních funkcí D_1 a D_2 pro konkrétní okrajové podmínky (3.8) až (3.10). Pro Laplaceovy obrazy těchto okrajových podmínek platí

$$\Sigma(l, p) = \Sigma_0(p), \quad U(0, p) = 0, \quad \Sigma(0, p) = 0, \quad (3.23)$$

přičemž funkce $\Sigma(x, p)$ představuje obraz funkce osového napětí a $\Sigma_0(p)$ je obraz budící funkce $\sigma_0(t)$. Okrajové podmínky jsou definované jak pro obraz osového posuvu $U(x, p)$, tak i pro obraz osového napětí $\Sigma(x, p)$. Proto je potřeba vyjádřit vztah pro Laplaceův

obraz tohoto napětí. K tomu bude využita fyzikální rovnice (3.5), jejíž Laplaceův obraz je tvaru

$$\Sigma(x, p) = \Phi(x, p) \left(E_1 + E_2 - \frac{E_2^2}{\lambda \left(p + \frac{E_2}{\lambda} \right)} \right), \quad (3.24)$$

kde $\Phi(x, p)$ je Laplaceův obraz deformace $\varepsilon(x, t)$. Tato rovnice se dá ekvivalentně přepsat do tvaru

$$\Sigma(x, p) = \Phi(x, p) \cdot E^*(p), \quad (3.25)$$

kde funkce $E^*(p)$ je definována vztahem

$$E^*(p) = E_1 + E_2 - \frac{E_2^2}{\lambda \left(p + \frac{E_2}{\lambda} \right)} \quad (3.26)$$

a představuje komplexní modul pružnosti. Vztah (3.25) je potom jakousi komplexní obdobou Hookeova zákona pro elastický případ. Dosazením vztahu (3.25) a transformované geometricko-deformační rovnice (3.2) v podobě $\Phi(x, p) = \partial U(x, p) / \partial x$ do rovnice (3.21), dostaneme obecný vztah pro Laplaceův obraz osového napětí

$$\Sigma(x, p) = \frac{E^*(p) p}{C_0(p)} \left(D_1(p) \cosh \frac{px}{C_0(p)} + D_2(p) \sinh \frac{px}{C_0(p)} \right). \quad (3.27)$$

Pro transformované okrajové podmínky (3.23), které odpovídají volné tyči, lze na základě vztahů (3.21) a (3.25) nalézt odpovídající tvar neznámých funkcí $D_1(p)$ a $D_2(p)$

$$D_1(p) = 0, \quad D_2(p) = \frac{\Sigma_0(p) C_0(p)}{E^*(p) p \sinh \frac{pl}{C_0(p)}}. \quad (3.28)$$

Po dosazení a úpravě (3.28) do rovnic (3.21) a (3.27) jsou výsledné vztahy pro Laplaceovy obrazy osového posuvu $U(x, p)$ a napětí $\Sigma(x, p)$ volné tyče postupně dány vztahy

$$U(x, p) = \frac{\Sigma_0(p) C_0(p) \cosh \frac{px}{C_0(p)}}{E^*(p) p \sinh \frac{pl}{C_0(p)}}, \quad \Sigma(x, p) = \frac{\Sigma_0(p) \sinh \frac{px}{C_0(p)}}{\sinh \frac{pl}{C_0(p)}}. \quad (3.29)$$

V případě tyče s volným koncem lze při odvozování vztahů pro $U(x, p)$ a $\Sigma(x, p)$ postupovat zcela analogicky. Neznámé funkce D_1 a D_2 mají na základě okrajových podmínek odpovídajících vetknuté tyči (3.23) a vztahů (3.21), (3.25) tvar

$$D_1(p) = \frac{\Sigma_0(p) C_0(p)}{E^*(p) p \cosh \frac{pl}{C_0(p)}}, \quad D_2(p) = 0. \quad (3.30)$$

Provedením formálně stejných úprav jako v případě volné tyče, dostaneme výsledné vztahy pro $U(x, p)$ a $\Sigma(x, p)$

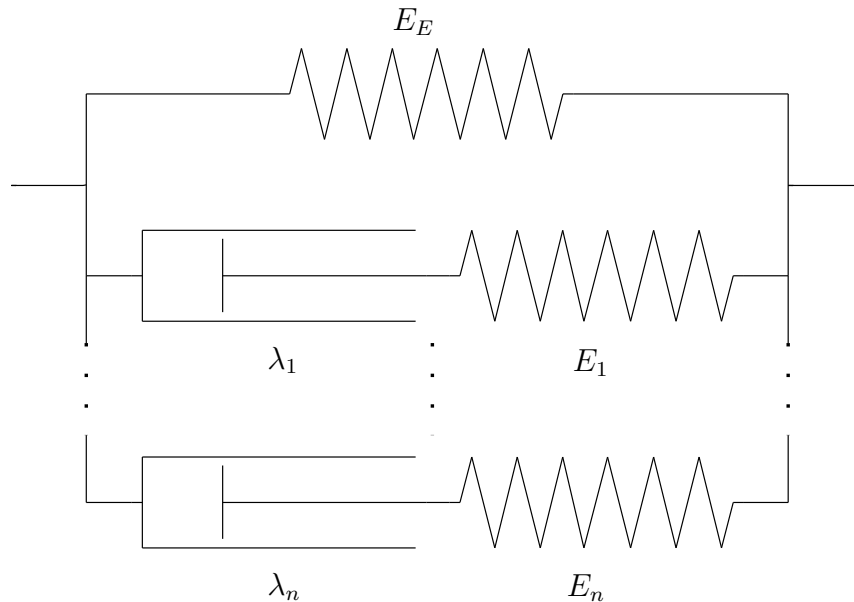
$$U(x, p) = \frac{\Sigma_0(p)C_0(p) \sinh \frac{px}{C_0(p)}}{E^*(p)p \cosh \frac{pl}{C_0(p)}}, \quad \Sigma(x, p) = \frac{\Sigma_0(p) \cosh \frac{px}{C_0(p)}}{\cosh \frac{pl}{C_0(p)}}. \quad (3.31)$$

Obrazy osové rychlosti $V(x, p)$ a zrychlení $A(x, p)$, které budou využity v kapitole 6, lze snadno získat pro nulové počáteční podmínky z Laplaceovy transformace první a druhé derivace osového posuvu $u(x, t)$ jako

$$V(x, p) = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} u(x, t) \right\} = pU(x, p), \quad A(x, p) = \mathcal{L} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} u(x, t) \right\} = p^2 U(x, p), \quad (3.32)$$

přičemž Laplaceův operátor $\mathcal{L}\{f(t)\}$ provádí transformaci obecné časové funkce $f(t)$ dle vztahu (3.11).

3.4 Zobecnění úlohy pro obecný model standardního viskoelastického tělesa



Obrázek 4: Obecný model standardního viskoelastického tělesa

Model obecného standardního viskoelastického tělesa se skládá z paralelně zapojeného elastického prvku, který je charakterizován modulem pružnosti v tahu E_E , a libovolného počtu Maxwellových prvků charakterizovaných normálovými viskozitami λ_i a moduly pružnosti v tahu E_i , kde $i = 1, 2, \dots, n$ (obr. 4). Díky tomu má tento model diskrétní

spektrum relaxačních časů λ_i/E_i na rozdíl od jednoho relaxačního času v případě standardního viskoelastického tělesa.

Schéma zobecněné úlohy bude odpovídat schématu na obr. 1. Proto obecné řešení osového posuvu $u(x, t)$ a napětí $\sigma(x, t)$ bude vycházet ze stejné pohybové rovnice (3.1). Úloze bude odpovídat i stejná geometricko-deformační rovnice (3.2). Jediná změna se projeví u fyzikální rovnice. Celkové napětí na obecném standardním viskoelastickém tělese bude dáno opět superpozicí dílčích napětí na jednotlivých jeho paralelně řazených členech, tj. dílčích napětí

$$\sigma(x, t) = \sigma_E + \sum_{i=1}^n \sigma_i. \quad (3.33)$$

Napětí na samostatně stojící pružině σ_E se vypočítá pomocí vztahu (3.3) a napětí na Maxwellových prvcích se stanoví podle vztahu (3.4) s odpovídajícími parametry E_i a λ_i . Proto bude mít výsledná fyzikální rovnice tvar

$$\sigma(x, t) = E_E \varepsilon(x, t) + \sum_{i=1}^n \left(E_i \varepsilon(x, t) - \frac{E_i^2}{\lambda_i} \int_0^t \varepsilon(x, \tau) e^{-\frac{E_i}{\lambda_i}(\tau-t)} d\tau \right). \quad (3.34)$$

Po dosazení vztahu (3.34) do pohybové rovnice (3.1) a po zavedení konstant $c_{0,E}, c_{0,1}, \dots, c_{0,n}$ analogicky jako v podkapitole 3.2, bude výsledná pohybová rovnice pro tyč, jejíž materiál je popsán obecným standardním viskoelastickým tělesem, mít tvar

$$\left(c_{0,E}^2 + \sum_{i=1}^n c_{0,i}^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \sum_{i=1}^n \frac{c_{0,i}^2 E_i}{\lambda_i} \int_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, \tau) \right) e^{-\frac{E_i}{\lambda_i}(\tau-t)} d\tau = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t). \quad (3.35)$$

Počáteční a okrajové podmínky jsou shodné jako v případě úlohy pro Zenerův model. Po provedení Laplaceovy transformace rovnice (3.35) a zohlednění nulových počátečních podmínek dostaneme

$$\left(c_{0,E}^2 + \sum_{i=1}^n c_{0,i}^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, p) - \sum_{i=1}^n \frac{c_{0,i}^2 E_i}{\lambda_i \left(p + \frac{E_i}{\lambda_i} \right)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, p) = p^2 U(x, p). \quad (3.36)$$

Zavedením komplexní funkce $C_0(p)$ obdobně jako v předchozí podkapitole vztahem

$$C_0(p) = \sqrt{c_{0,E}^2 + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\alpha_i}{p + \alpha_i} \right) c_{0,i}^2}, \quad (3.37)$$

kde konstanty $\alpha_i = E_i/\lambda_i$ jsou převrácené hodnoty relaxačních časů jednotlivých Maxwellových prvků v modelu, lze výslednou pohybovou rovnici v komplexní oblasti formálně zapsat ve zcela stejném tvaru jako (3.14). Z toho vyplývá, že řešení bude až na funkce

$C_0(p)$ a $E^*(p)$ shodné se vztahy (3.29) a (3.31) odvozenými pro případ standardního viskoelastického tělesa. Komplexní modul pružnosti E^* bude mít v tomto případě tvar

$$E^*(p) = E_E + \sum_{i=1}^n \left(E_i - \frac{E_i^2}{\lambda_i \left(p + \frac{E_i}{\lambda_i} \right)} \right). \quad (3.38)$$

Nyní máme odvozené řešení pro případ volné a vetknuté tyče pro obecný diskretní model viskoelastického tělesa, což umožňuje zjistit odezvu tenké tyče, jejíž materiálové vlastnosti jsou popsány modely jednoduššími, např. elastický případ, Maxwellův a Voigtův-Kelvinův model. Vztahy pro odezvy jsou v těchto případech formálně stejné až na funkce $C_0(p)$ a $E^*(p)$. Pro tyto případy postačí v obecném standardním viskoelastickém tělese volba $n = 1$, což vystihuje vztahy pro Zenerův model (3.13), (3.26). Volbou $\lambda_1 \rightarrow \infty$ je zamezeno deformaci tlumivého prvku v modelu. Takovýto model vykazuje dokonale elastické chování, které lze vyjádřit limitním přechodem

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} E^*(p) = E_E + E_1, \quad \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} C_0(p) = \sqrt{\frac{E_E + E_1}{\rho}}. \quad (3.39)$$

Pokud bude uvažován nulový modul pružnosti E_1 , Maxwellova větev tohoto modelu bude libovolně deformovatelná bez vyvolaného napětí, pak

$$\lim_{E_1 \rightarrow 0} E^*(p) = E_E. \quad (3.40)$$

Takový materiál je taktéž dokonale elastický s modulem pružnosti E_E a rychlostí šíření vlny

$$\lim_{E_1 \rightarrow 0} C_0(p) = \sqrt{\frac{E_E}{\rho}}. \quad (3.41)$$

Abychom dostali vztahy vyjadřující $E^*(p)$ a $C_0(p)$ charakteristické pro Maxwellův model, je potřeba zajistit nulový přírůstek napětí na samostatně stojící pružině Zenerova modelu. V takovém případě je nutné volit $E_E \rightarrow 0$ a požadované funkce $E^*(p)$ a $C_0(p)$ mají tvar

$$\lim_{E_E \rightarrow 0} E^*(p) = \frac{E_1 \lambda_1 p}{\lambda_1 p + E_1}, \quad \lim_{E_E \rightarrow 0} C_0(p) = \sqrt{\frac{E_1 \lambda_1 p}{p \lambda_1 \rho + \rho E_1}}. \quad (3.42)$$

Při sledování odezvy na puls s vysokofrekvenčními složky dojde k tomu, že se tlumič nestačí prodloužit a bude se chovat jako tuhý. V tom případě

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \frac{E_1 \lambda_1 p}{\lambda_1 p + E_1} = E_1, \quad \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{E_1 \lambda_1 p}{p \lambda_1 \rho + \rho E_1}} = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}. \quad (3.43)$$

Voigtův-Kelvinův model obsahuje paralelní zapojení vazkého a elastického prvku. Je tedy potřebné volit tuhost členu $E_1 \rightarrow \infty$, aby prodloužení Maxwellova prvku záviselo

pouze na vazkém členu. V tomto případě platí

$$\lim_{E_1 \rightarrow \infty} E^*(p) = \lambda_1 p + E_1, \quad \lim_{E_1 \rightarrow \infty} C_0(p) = \sqrt{\frac{\lambda_1 p + E_E}{\rho}}. \quad (3.44)$$

Stejně jako u odvozování vztahů pro Maxwellův model bude i pro Voigtův-Kelvinův model zjištěno jeho chování pro pulsy s vysokými frekvencemi. Jelikož tlumič není schopen reagovat na takové pulsy, chová se stejně jako v předchozím případě, tj. jako tuhé těleso. Z odvozených vztahů vyplývá, že modul pružnosti a rychlost šíření vlny v takovém případě budou nabývat nekonečných hodnot

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \lambda_1 p + E_1 = \infty, \quad \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\lambda_1 p + E_E}{\rho}} = \infty. \quad (3.45)$$

Díky této vlastnosti není Voigtův-Kelvinův model vhodný pro modelování rázových jevů.

3.5 Provedení zpětné Laplaceovy transformace

Zpětná Laplaceova transformace, která je nutná pro nalezení řešení odezvy napětí a posuvu v časové oblasti, je definována pomocí Bromwich-Wagnerova integrálu [10]. Pomocí něj lze např. hledanou funkci osového posuvu $u(x, t)$ formálně vyjádřit jako

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} U(x, p) e^{pt} dp. \quad (3.46)$$

Integrační cesta je v tomto případě reprezentována přímkou rovnoběžnou s imaginární osou v Gaussově komplexní rovině, mající od této osy vzdálenost c .

V literatuře lze najít několik způsobů vyčíslení Bromwichova integrálu. V práci [12] např. autor za tímto účelem využívá větu o Laplaceově obrazu konvoluce dvou funkcí [10] a rozvoje jedné z nich v Laurentovu řadu. Její obraz pak určuje na základě reziduové věty. Podobný postup je použit v práci [5], kde autor problém převádí na úlohu numerického vyčíslení Duhamelových integrálů.

Pro potřeby této bakalářské práce bude využito numerického postupu vyčíslení integrálu ve vztahu (3.46). Konkrétně se bude jednat o algoritmus numerické zpětné Laplaceovy transformace (NILT) založený na rychlé Fourierově transformaci (FFT) a tzv. ε -algoritmu pro urychlení konvergence nekonečných řad. Tento postup je převzatý z práce [13] zabývající se problematikou šíření vln v elektrických obvodech. Vhodnost použití tohoto algoritmu na řešení úloh elastodynamiky je podrobně diskutována v práci [14]. Implementace tohoto NILT algoritmu je provedena v softwarovém prostředí Matlab, viz podkapitola 4.1.

4 Vyčíslení analytického řešení a porovnání výsledků s výsledky numerických simulací

V této kapitole je provedeno vyčíslení vztahů (3.29) - (3.31) odvozených v kapitole 3 a dále prezentováno numerické řešení úlohy získané pomocí metody konečných prvků. Nejprve je popsán program umožňující vyčíslení analytických vztahů z minulé kapitoly, který byl vytvořen v prostředí Matlab. Následně je uveden popis sestavení konečnoprvkového modelu řešené úlohy v systému MSC.Marc2014 a provedeno porovnání analytických výsledků s výsledky numerických simulací.

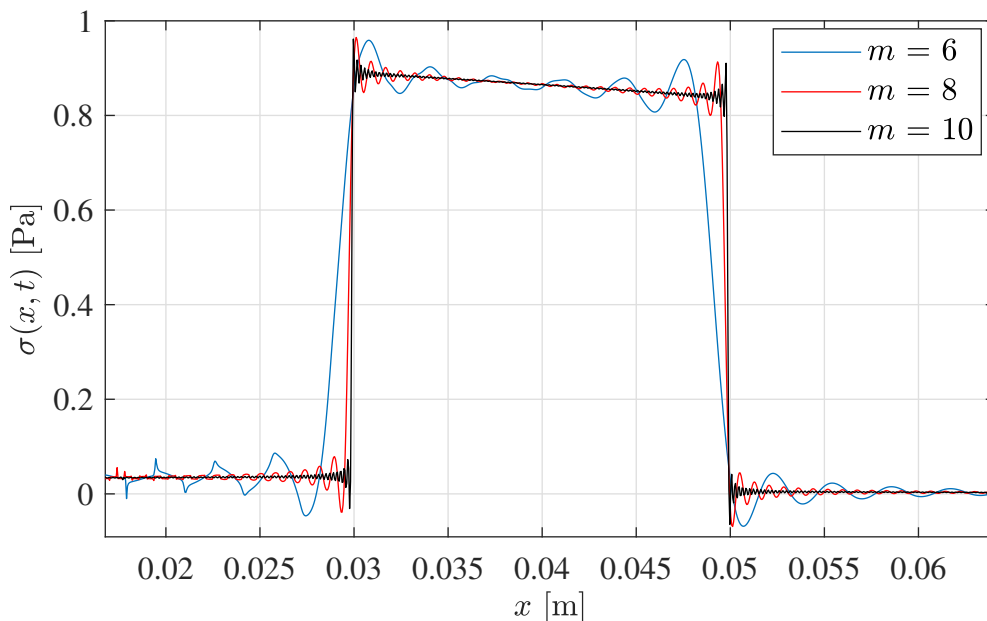
4.1 Popis vyčíslení analytického řešení

Pro vytvoření zmiňovaného nástroje bylo zvoleno programovací prostředí Matlab, protože je to robustní nástroj pro maticové počty s velkým množstvím implementovaných matematických funkcí. Vytvořený program provádí vyčíslení odezvy vetknuté i volné tyče. Toto vyčíslení probíhá ve dvou fázích. Program v první fázi využívá nalezené vztahy pro Laplaceovy obrazy hledaných veličin v komplexní oblasti uvedené v kapitole 3 a pro zadané materiálové parametry vyčíslí tyto obrazy v požadovaných komplexních bodech p pro všechna x . Ve druhé fázi aplikuje NILT algoritmus na výše zmíněné vyčíslené obrazy požadovaných veličin a dopočítá tak odezvu v časové oblasti.

Pro provedení první fáze je do programu potřeba zadat geometrii úlohy a následně definovat materiál a buzení. Geometrie úlohy je určena zadanou délkou tyče l a počtem bodů x_{dim} , které ekvidistantně rozdělují tyč v podélném směru a ve kterých se vyčíslí požadované veličiny. Pro definování materiálu program vyžaduje zadat hustotu materiálu ρ a vektory hodnot modulů pružnosti v tahu E a koeficientů normálových viskozit λ . Prvky těchto vektorů postupně odpovídají členům obecného standardního viskoelastického tělesa (viz obr. 4). Nakonec je potřeba zadat budící napěťovou funkci $\sigma_0(t)$. V programu jsou přednastaveny některé funkce, u kterých je znám předpis pro jejich Laplaceův obraz. Pokud žádná z těchto funkcí uživateli nevyhovuje, je možné zadat vlastní funkci v podobě matice dimenze $n \times 2$, ve které je každý z n bodů popsán časem a odpovídající velikostí napětí. Laplaceův obraz takto zadané funkce je pak nalezen numerickým vyčíslením definičního integrálu Laplaceovy transformace [10] pomocí Simpsonova pravidla [15]. Pro kontrolu správného zadání budící funkce software umožňuje také její grafický náhled v časové oblasti.

Ve druhé fázi je na vyčíslené obrazy požadovaných veličin aplikován NILT algoritmus převzatý z práce [13], který byl zmíněn v podkapitole 3.5. V uživatelském rozhraní vytvořeného programu je možné také změnit parametry ovlivňující přesnost NILT algoritmu. Mimo jiné to je i parametr m , který udává počet časových kroků 2^m , na které je dělen interval $\langle 0, t_{max} \rangle$ (viz [13]). Přesnost řešení v závislosti na tomto parametru je jasně patrná z obr. 5. Je zde zobrazeno porovnání přesnosti vyčíslení odezvy pro vetknutou tyč buzenou jednotkovým obdélníkovým pulsem

$$\sigma_0(t) = H(t) - H(t - t_0), \tag{4.1}$$



Obrázek 5: Porovnání vlivu změny parametru m na odezvu napětí v tyči délky $l = 0,1$ m na jednotkový obdélníkový puls délky $t_0 = 10 \mu\text{s}$

pro různé hodnoty parametru m . Puls je na obrázku zachycen po prvním odrazu od vetknutého konce v místě $x = 0$, tj. postupuje zpět k místu buzení v $x = l$. Z obrázku je patrné, že se odezva napětí skládá z harmonických průběhů různých frekvencí. Při bližším pohledu na obrázek lze zjistit, že při zvětšování m využívá FFT při inverzi harmonické funkce s vyššími frekvencemi. To má za důsledek přibližování jednotlivých částí grafu lineárnímu průběhu a zvýšení výpočetní přesnosti. Na koncích strmých čel dochází k výrazným výkmitům, které jsou nechtěným jevem při nahrazování nespojitostí spojitými funkcemi. Tento jev se nazývá Gibsonův jev a výška vzniklých výkmitů dosahuje kolem 9% velikosti nespojitosti.

Po ukončení druhé fáze vyčíslení jsou výsledky provedeného výpočtu automaticky uloženy v podobě matic dimenze $2^m \times x_{dim}$ do souboru formátu *mat*. Tyto soubory slouží jako zdroj dat pro následnou časovou animaci šíření podélných vln ve studované tyči. V naprogramovaném softwaru lze pak zvolit rychlost této animace či její opětovné spuštění a zároveň software disponuje posuvným ovladačem, který umožňuje rychlou navigaci v časové oblasti. V uživatelském prostředí je taktéž možné vykreslit vyčíslené řešení v časoprostorové oblasti.

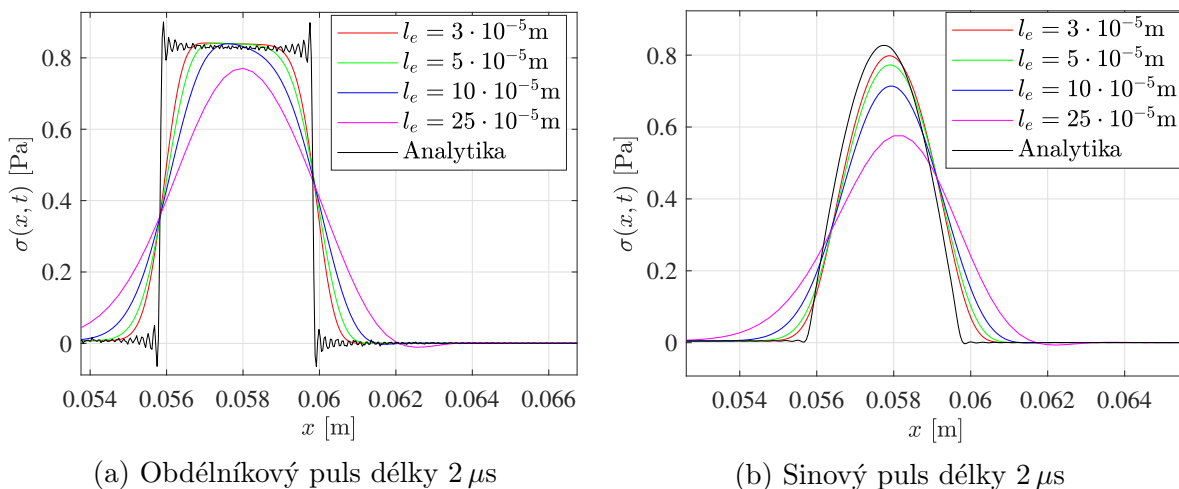
4.2 Numerické řešení pomocí metody konečných prvků

Za účelem verifikace analyticky odvozených vztahů a jejich správné implementace v naprogramovaném softwaru byla úloha také řešena pomocí metody konečných prvků v programu MSC.Marc2014. Tenká tyč délky $l = 0,1$ m byla modelována pomocí prutových prvků (v použitém SW označených jako typ 9) s jednotkovým obsahem průřezu a s lineárními bázovými funkcemi. Všechny simulace a následná porovnání zmíněná v nás-

ledujícím textu byly provedeny pro materiálové parametry, které přibližně odpovídají polyamidu PA6. Konkrétně to jsou: hustota $\rho = 1100 \text{ kg/m}^3$, Youngův modul pružnosti $E = 4,395 \text{ GPa}$, Poissonovo číslo $\nu = 0,4$. Při zadávání viskoelastických vlastností materiálu je potřeba do softwaru zadat relaxační čas $t_R = \lambda_M/E_M$, kde modulu pružnosti E_M a normálová viskozita λ_M odpovídají Maxwellovu modelu popisující materiál. Pro modelování Zenerova modelu, stačí v softwaru zadat pouze jeden relaxační čas $t_R = 36,8932 \mu\text{s}$ a modul pružnosti ve smyku $G = 282,786 \text{ MPa}$ (viz [16]).

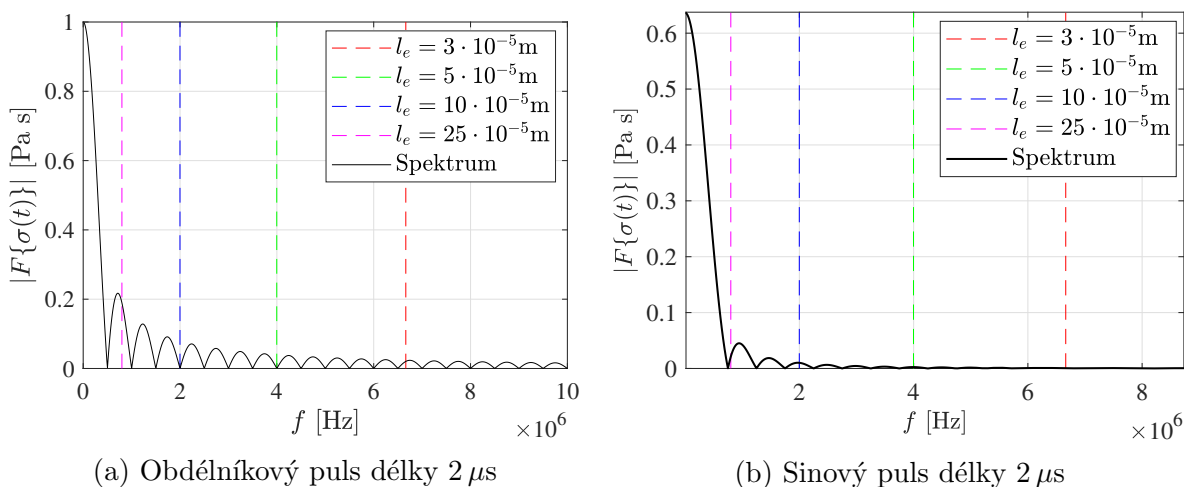
V počátku souřadnicového systému byla tyč vetknuta, což v této úloze, kdy má každý uzel pouze jeden stupeň volnosti, znamená, že bodu $x = 0$ stačí předepsat nulový posuv ve směru x . Na druhém konci tyče v místě $x = l$ bylo předepsáno budící napětí $\sigma_0(t)$ časově závislou tabulkou. Výpočet byl ukončen v čase $t_{max} = 80 \mu\text{s}$, kdy se vlna nacházela po prvním odrazu přibližně v polovině délky tyče a šířila se zpět k buzenému konci.

Přesnost výsledků numerických simulací závisí hned na několika faktorech, zejména na velikosti prvků l_e , na volbě integrační metody v časové oblasti a na velikosti integračního kroku Δt . Pokud nebude v následujícím textu uvedeno jinak, budou numerické výpočty prováděny s Newmarkovou integrační metodou a s integračním krokem, který je roven stabilnímu kroku metody centrálních diferencí.



Obrázek 6: Vliv velikosti prvků na přesnost řešení

Při volbě velikosti prvku se dá předpokládat, že se zmenšováním l_e bude růst přesnost řešení. Tento předpoklad potvrzuje obr. 6a, kde je buzení $\sigma_0(t)$ uvažováno ve tvaru obdélníkového pulsu (4.1) o délce $t_0 = 2 \mu\text{s}$. Model s menšími prvky dokáže lépe kopírovat očekávané strmé okraje šířícího se pulsu. Kdežto model s prvky $l_e = 0,25 \text{ mm}$ nedosahuje ani požadované amplitudy. Je zřejmé, že řešení získané pomocí konečnoprvkových modelů nedokáže vystihnout ostré hrany analyticky vypočtené odezvy. Proto bude numericky řešena úloha pro hladší budící puls. Na obr. 6b lze pro tento případ vidět, že modely lépe kopírují průběh pulsu než v prvním případě. Je to způsobené tím, že prvek s určitou velikostí je schopen podchytit frekvence jen do mezní hodnoty. Toto tvrzení souvisí s amplitudovými spektry obou pulsů. Na obr. 7 je zobrazeno amplitudové spektrum



Obrázek 7: Amplitudová spektra pulsů

obdélníkového pulsu (4.1) a sinového pulsu daného předpisem

$$\sigma_0(t) = \sin\left(\pi \frac{t}{t_0}\right) (H(t) - H(t - t_0)). \quad (4.2)$$

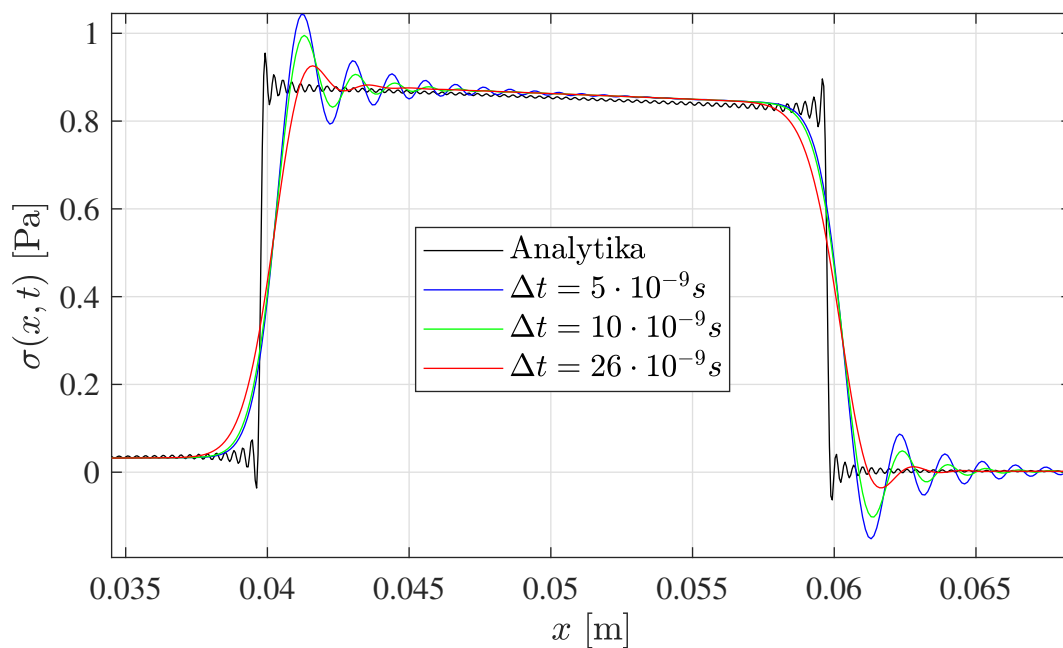
Obdélníkový puls má amplitudové spektrum, ve kterém se více uplatňují vyšší frekvence oproti sinovému pulsu se stejnou délkou t_0 . Vyznačené vertikální přímky znázorňují maximální možnou frekvenci, kterou je prvek schopen podchytit. Tato hodnota mezní frekvence byla vypočítána ze znalosti, že by velikost prvku měla nabývat hodnoty alespoň jedné desetiny vlnové délky odpovídající nejvyšší frekvenci v šířícím se signálu, kterou má model ještě podchytit (viz [17]). Rychlost šíření vlny s vysokofrekvenčními složkami přitom přibližně odpovídá rychlosti šíření vlny v elastickém prostředí s modulem pružnosti E .

Dále bude diskutován vliv velikosti integračního kroku Δt explicitní metody centrálních diferencí a implicitní Newmarkovy a Houboltovy metody na přesnost stanovení odezvy na obdélníkový puls délky $t_0 = 10 \mu\text{s}$. Vzhledem k tomu, že je puls pětikrát delší než při předchozí analýze, a vzhledem k provedené analýze amplitudového spektra, budou pro následující analýzu použity prvky o velikosti $l_e = 0,1 \text{ mm}$.

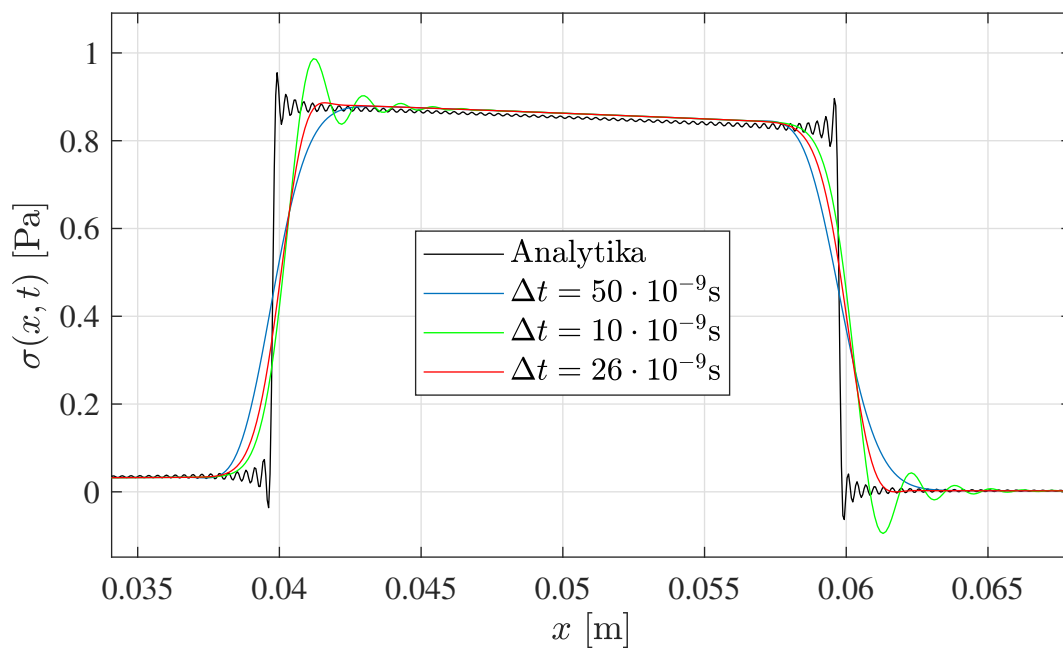
Nejprve bylo provedeno porovnání vlivu Δt pro metodu centrálních diferencí. Na obr. 8 jsou znázorněny výsledky pro model s integračním krokem, který odpovídá stabilnímu kroku metody centrálních diferencí $26 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ vypočítaným softwarem pro zvolenou délku prvku, a dále s krokem $10 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ a $5 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Je zřejmé, že při zmenšování Δt dochází sice k nárůstu strmosti čel pulsu, ale zároveň i k rozkmitávání numerického řešení před nimi.

Implicitní metody na rozdíl od explicitních dovolují nastavit i větší krok než je stabilní krok metody centrálních diferencí. Proto je analýza zbylých metod provedena pro časové kroky $\Delta t = \{10; 26; 50\} \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Na obr. 9 je zobrazen vliv změny Δt pro Newmarkovu metodu. Při zmenšení Δt se metoda chová obdobně jako předchozí explicitní metoda. Řešení odpovídající menšímu kroku dokáže lépe vystihnout strmost čel, ale na druhou stranu dochází k větším výkmitům před nimi. Naopak při zvětšení Δt dojde k urychlení

4 VYČÍSLENÍ ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ A POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ S VÝSLEDKY NUMERICKÝCH SIMULACÍ



Obrázek 8: Vliv velikosti integračního kroku metody centrálních diferencí pro $l_e = 0,1$ mm



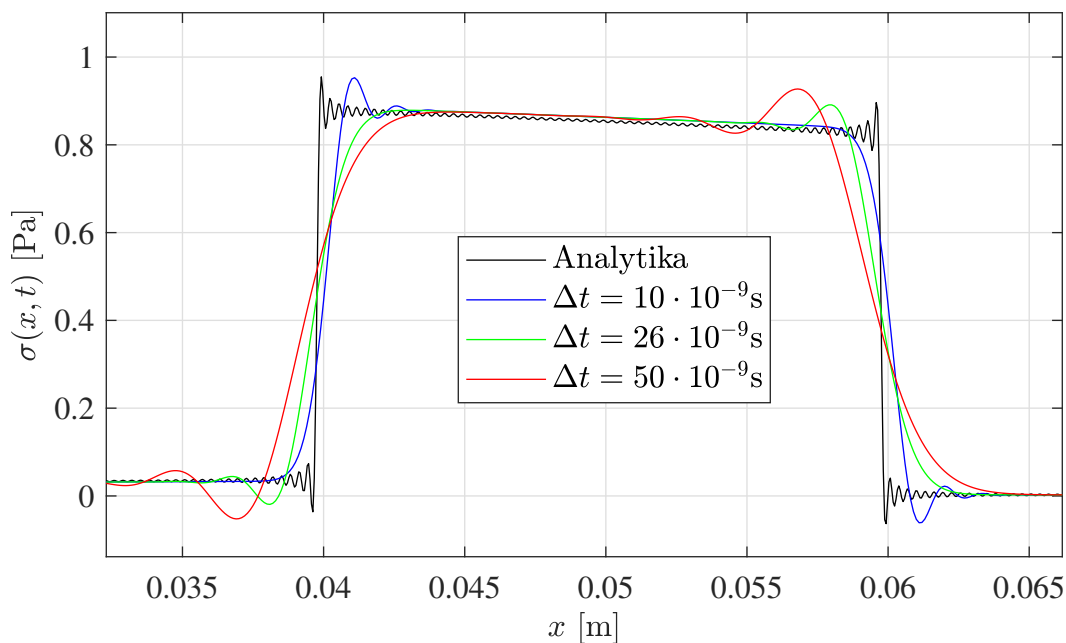
Obrázek 9: Vliv velikosti integračního kroku Newmarkovy metody pro $l_e = 0,1$ mm

výpočetního času, ale výrazně se sníží přesnost řešení v oblasti čel. Z obr. 9 je tedy zřejmé, že nejpřesnějších výsledků bylo dosaženo pro krok Δt shodný s maximálním stabilním krokem metody centrálních diferencí.

Při snižování Δt u Houboltovy metody, viz obr. 10, dochází k mírnému zpřesnění výsledků nárůstem strmosti čel, ale zároveň k oscilacím před čelem vlny. Naopak při zvětšení Δt se tvoří výkmity za čely.

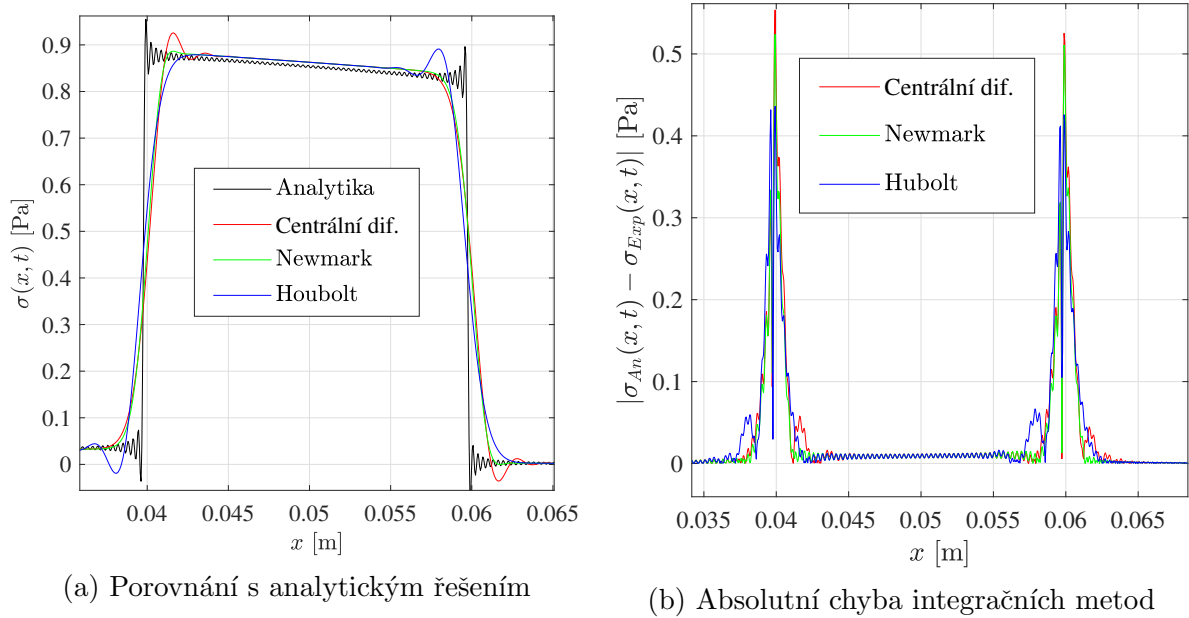
Souhrnné porovnání přesnosti jednotlivých testovaných integračních metod pro výše uvedené buzení a stejný integrační krok $\Delta t = 26 \cdot 10^{-9}$ s je i s absolutní chybou provedeno v čase $t_{max} = 80 \mu s$ na obr. 11. Na obr. 11b je dále zobrazen průběh absolutní odchylky jednotlivých numerických řešení od výsledků získaných vyčíslením analytických vztahů. Z uvedených obrázků je zřejmé, že metoda centrálních diferencí dává velmi přesné výsledky, které jsou ale rozkmitané před strmými čely širícího se pulsu. Aplikací Houboltovy metody získáme při stejném integračním kroku výsledky s nižší přesností, čela nejsou tak strmá a k rozkmitání řešení dochází za nimi. Nejlepší shody s analytickým řešením bylo pro tento případ dosaženo pomocí Newmarkovy integrační metody. Tato metoda bude proto použita i při dalších numerických simulacích uvedených v této práci.

Z provedených analýz vyplývá, že při výběru velikosti prvku modelu platí, že přesnější výsledky obdržíme s menšími prvky. Na druhou stranu se výpočetní čas modelu s malými prvky prodlouží. Proto je vhodné před diskretizací 1D úlohy provést analýzu amplitudového spektra buzení a pomocí něj najít dostatečnou velikost prvku pro daný budící puls. Co se týče volby integračního kroku, bylo u 3 integračních metod potvrzeno, že se požadovanému řešení nejvíce přibližují modely s Δt rovno stabilnímu integračnímu času metody centrálních diferencí. Výpočet lze urychlit volbou většího kroku u implicitních integračních metod, ale za cenu vnesení větší nepřesnosti do numerických výsledků. Pro



Obrázek 10: Vliv velikosti integračního kroku Houboltovy metody pro $l_e = 0,1$ mm

4 VYČÍSLENÍ ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ A POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ S VÝSLEDKY NUMERICKÝCH SIMULACÍ



Obrázek 11: Porovnání integračních metod pro $l_e = 0,1 \text{ mm}$ a $\Delta t = 26 \cdot 10^{-9} \text{ s}$

výpočet odezvy byla jako nejpřesnější integrační metoda vyhodnocena Newmarkova metoda.

5 Vliv viskoelastivity na šíření vln v tenké tyči

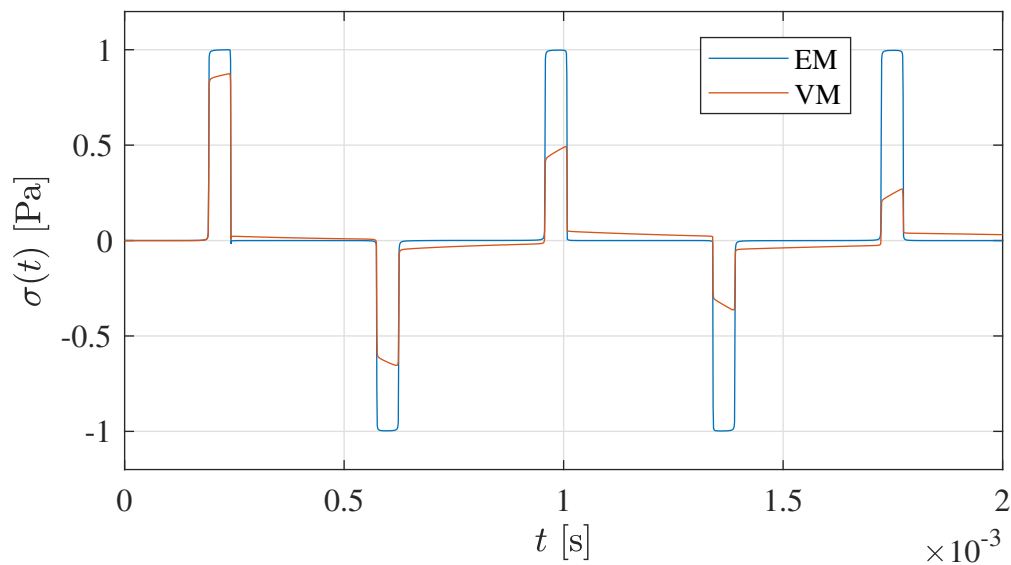
V následujícím textu je provedeno porovnání chování viskoelastického materiálu s elastickým v souvislosti se šířením vln a následně jsou diskutovány disperzní a tlumicí vlastnosti 1D tenké viskoelastické tyče.

5.1 Porovnání šíření vln v elastickém a viskoelastickém materiálu

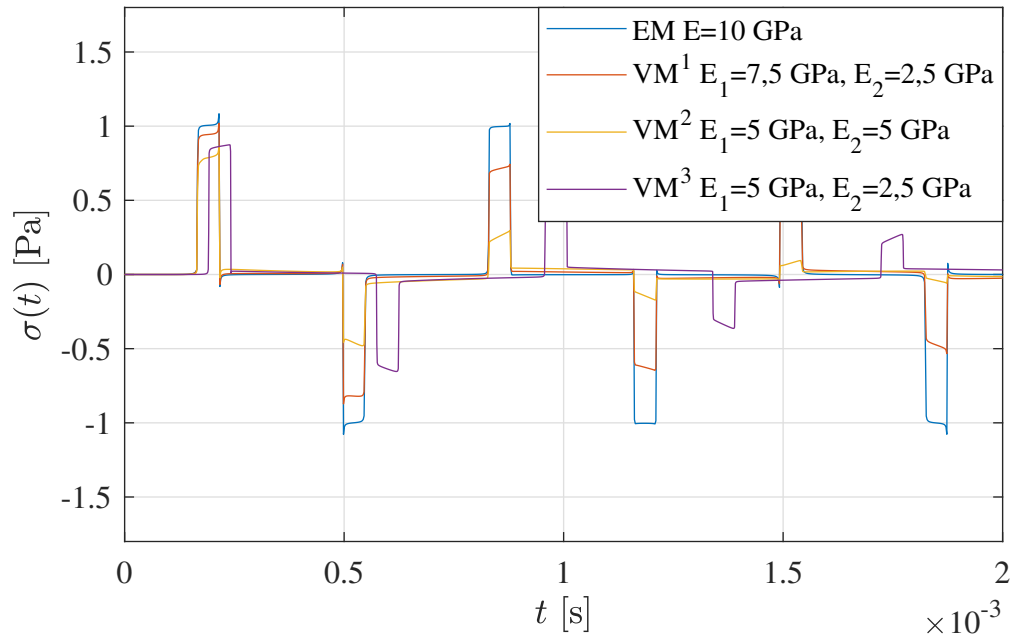
V následujícím textu jsou uvažovány dvě tenké tyče délky $l = 1$ m s hustotou materiálu $\rho = 1100$ kg/m³. Materiálové vlastnosti jedné tyče jsou charakterizovány standardním viskoelastickým tělesem v Zenerově konfiguraci s moduly pružnosti $E_1 = 5$ GPa, $E_2 = 2,5$ GPa a s normálovou viskozitou $\lambda = 750$ kPa s. Značení těchto veličin odpovídá značení použitému na obr. 2. Materiál druhé tyče je uvažován dokonale elastický s modulem pružnosti v tahu $E = E_1 + E_2 = 7,5$ GPa. Pro jednoduchost bude dále v této kapitole zavedeno označení VM pro viskoelastický materiál a EM pro elastický.

U obou volně uložených tyčí je současně sledována odezva napětí na jednotkový obdélníkový puls daným vztahem (4.1) délky $t_0 = 50$ μ s. Porovnání těchto odezev je zobrazeno na obr. 12, kde je vykreslena velikost osového napětí uprostřed tyče v závislosti na čase. Lze vidět, že u VM došlo v průběhu času k významnému poklesu amplitudy napětí a ke změně tvaru pulsu, tzn. dochází zde k disipaci energie. Ta se ve skutečném materiálu mění na teplo. Zároveň je možné z obr. 12 pozorovat, že po průchodu pulsu sledovaným bodem zde zůstává nenulové napětí. Jedná se o tzv. paměťový efekt materiálu, který vzniká rozdílným průběhem odlehčení oproti průběhu zatížení.

Při zkoumání vlivu změny hodnot modulů E_1 a E_2 na obr. 13, tak aby u EM platilo



Obrázek 12: Porovnání odezvy EM a VM v polovině tyče na jednotkový obdélníkový puls délky $t_0 = 50$ μ s



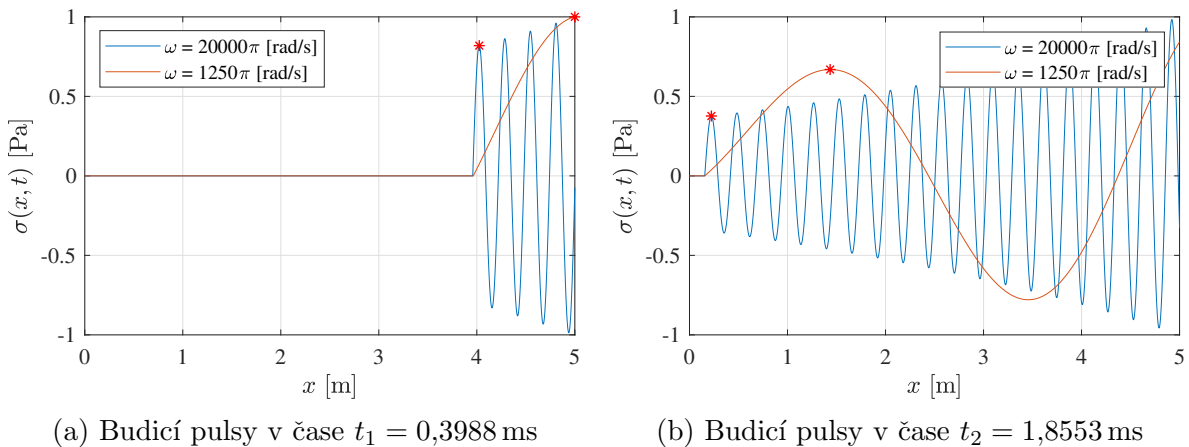
Obrázek 13: Vliv změny E_1 a E_2 při konstantní hodnotě $\lambda = 750$ kPa s na odezvu napětí VM

$E = E_1 + E_2$, je zřejmé, že se pulsy ve VM a EM pohybují stejnou rychlostí. Pokud je součet jednotlivých modulů pružnosti rozdílný, tak se vlna šíří prostředím odlišnou rychlostí (viz křivka VM³). Změnou parametru E_2 při konstantní hodnotě λ dojde ke změně relaxačního času a amplituda napětí těchto odezev je rozdílně tlumena (křivky VM¹ a VM²).

5.2 Disperze a tlumení vln ve viskoelastickém 1D prostředí

Z výsledků předchozí úlohy je zřejmé, že při šíření podélné vlny v tenké viskoelastické tyči, dochází (na rozdíl od tyče elastické) k distorzi a útlumu šířícího se pulsu. Toto je důsledek tzv. disperze a tlumení, které souvisí se šířením harmonických vln v takovémto prostředí. Uvažujme například, že je tyč buzena dvěma frekvenčně významně rozdílnými budícími signály s předpisem $\sigma(t) = \sin \omega t$. Na obr. 14 je zobrazena odezva těchto pulsů v čase $t_1 = 0,3988$ ms a v čase $t_2 = 1,8553$ ms pro viskoelastický materiál se stejnými parametry jako v předchozí podkapitole (tj. $E_1 = 5$ GPa, $E_2 = 2,5$ GPa, $\lambda = 750$ kPa s). Porovnáním polohy vyznačených bodů v obr. 14a a v obr. 14b lze dojít k závěru, že se tyto harmonické vlny šíří různou rychlostí. Dochází zde ke zpoždování sinového signálu s úhlovou frekvencí 1250π rad/s (S1) za sinovým pulsem s úhlovou frekvencí 20000π rad/s (S2). Ze známých vzdáleností, kterou urazila první čtvrtina periody obou budících signálů $\Delta x_{S1} = 3,560$ m, $\Delta x_{S2} = 3,802$ m lze vypočítat přibližnou rychlost šíření jednotlivých vln dle vztahu $v = \Delta x / (t_2 - t_1)$. Rychlost šíření S1 v tomto prostředí odpovídá hodnotě $v_{S1} \doteq 2444,22$ m/s a rychlost S2 je $v_{S2} \doteq 2610,27$ m/s.

Tento jev, kdy fázová rychlost vlny je závislá na frekvenci budícího signálu se nazývá



Obrázek 14: Porovnání rychlosti šíření sinových pulsů s rozdílnou úhlovou frekvence ω ve viskoelastickém prostředí

disperze. Pro odvození disperzní a tlumicí křivky (viz [6, 5]), tj. odvození závislosti fázové rychlosti vlny c a součinitele útlumu η na úhlové frekvenci ω , je uvažováno řešení posuvu $u(x, t)$ ve tvaru obecné harmonické vlny s předpisem

$$u(x, t) = A e^{i[\omega t - (\xi + i\eta)x]}, \quad (5.1)$$

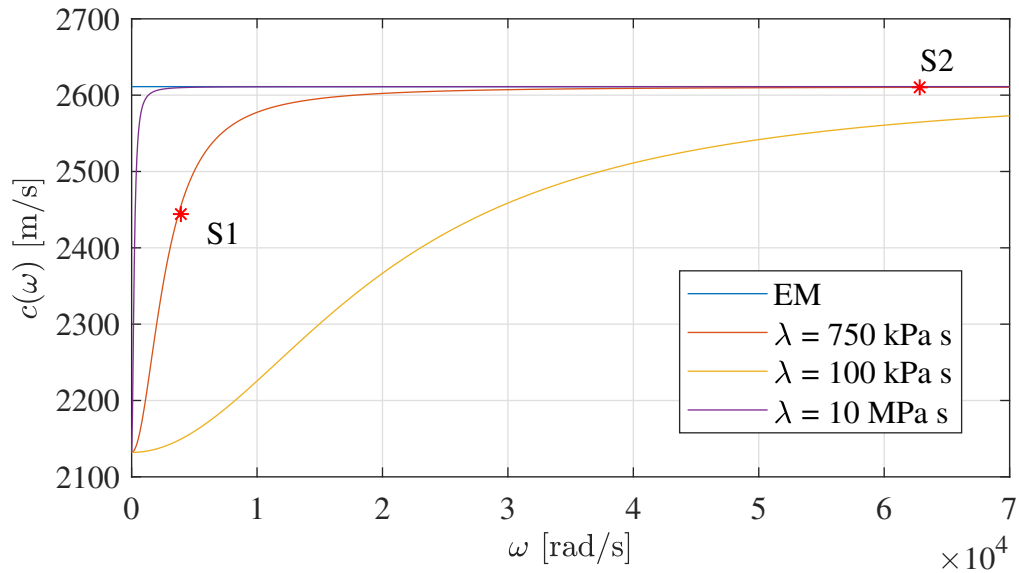
kde A amplituda harmonické vlny a ξ je vlnové číslo, pro které platí $\xi = \omega/c$. Součin η a polohy x popisuje exponenciální útlum amplitudy výchylky $u(x, t)$ [6]. Po dosazení (5.1) do pohybové rovnice (3.6) dostaneme podmínku, při jejímž splnění se může harmonická vlna (5.1) šířit daným prostředím. Postupným anulováním imaginární a reálné části této komplexní podmínky lze odvodit výsledné vztahy popisující disperzní a tlumicí závislosti uvažovaného 1D viskoelastického prostředí. Tyto vztahy mají dle [6] tvar

$$\xi^2 = \omega^2 \frac{\rho}{2E_1} \left\{ \left[\frac{1 + \omega^2 t_R^2}{1 + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)^2 \omega^2 t_R^2} \right]^{1/2} + \frac{1 + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \omega^2 t_R^2}{1 + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)^2 \omega^2 t_R^2} \right\}, \quad (5.2)$$

$$\eta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{2E_1} \left\{ \left[\frac{1 + \omega^2 t_R^2}{1 + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)^2 \omega^2 t_R^2} \right]^{1/2} - \frac{1 + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \omega^2 t_R^2}{1 + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)^2 \omega^2 t_R^2} \right\},$$

kde t_R je relaxační čas standardního viskoelastického tělesa.

Podle vztahu $c = \omega/\xi$ je pak dopočítána výsledná disperzní závislost znázorněná na obr. 15 pro různé hodnoty koeficientu viskozity λ . Z těchto disperzních křivek je možné pozorovat, že s narůstající úhlovou frekvencí se rychlost vlny ve VM blíží rychlosti vlny



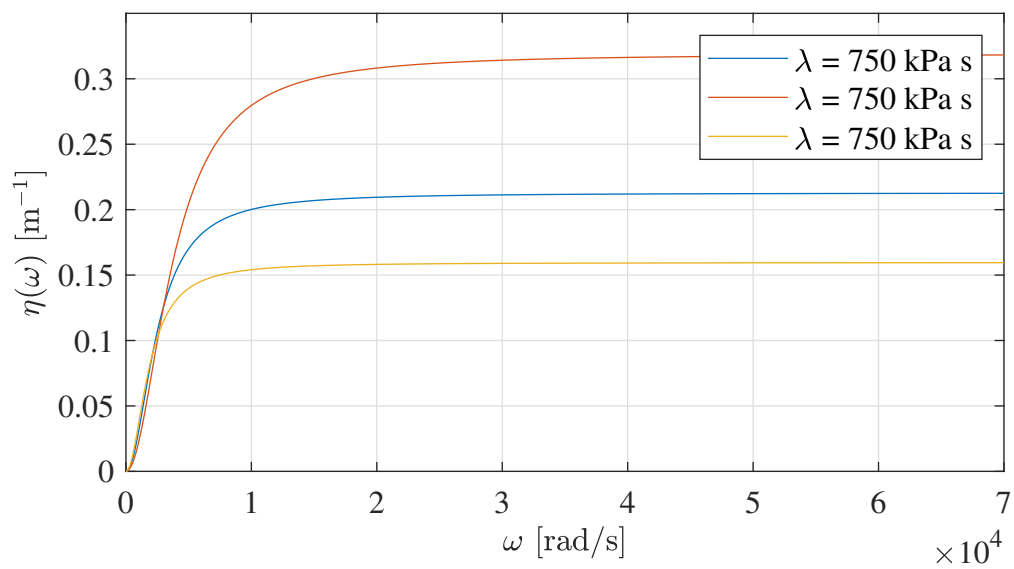
Obrázek 15: Disperzní křivky pro 1D elastické prostředí a 1D viskoelastické prostředí popsané Zenerovým modelem s různými hodnotami λ

v EM. Pro harmonickou vlnu s nekonečnou frekvencí $\omega \rightarrow \infty$ konverguje (5.2)₁ ke vztahu

$$\xi^2 \approx \omega^2 \frac{\rho}{E_1 + E_2}. \quad (5.3)$$

Z tohoto uvedeného limitního přechodu zároveň i vyplývá rychlost vlny v elastickém prostředí $c_E = \sqrt{(E_1 + E_2)/\rho}$ (viz [6, 5]). Na disperzní křivce na obr. 15 jsou vyznačeny body odpovídající vypočteným přibližným hodnotám rychlostí signálů S1 a S2.

Součinitele tlumení η můžeme podobně jako rychlost c vykreslit v závislosti na ω , viz obr. 16. Z tohoto obrázku je zjevné, že budící signál s vysokou úhlovou frekvencí je tlumen více než signál s nízkým ω . Tento fakt potvrzuje i průběh odezev napětí na obr. 14.



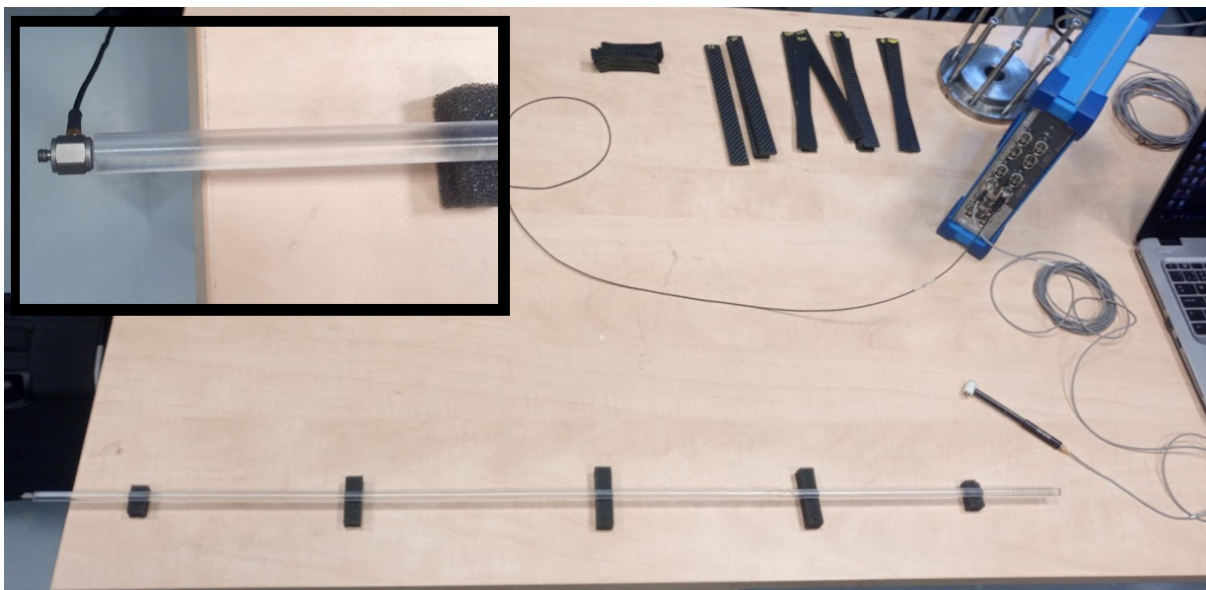
Obrázek 16: Křivky tlumení pro 1D viskoelastické prostředí popsané Zenerovým modelem s různými hodnotami lambda.

6 Identifikace materiálových vlastností na základě experimentálních dat

V této kapitole je uveden popis provedeného experimentálního měření odezvy tenkých tyčí a porovnání získaných výsledků s analytickým řešením. V její druhé části je pak formulována a řešena inverzní úloha vedoucí k identifikaci materiálových parametrů viskoelastických modelů popisujících chování čtyř vybraných materiálů.

6.1 Popis experimentu a výsledky měření

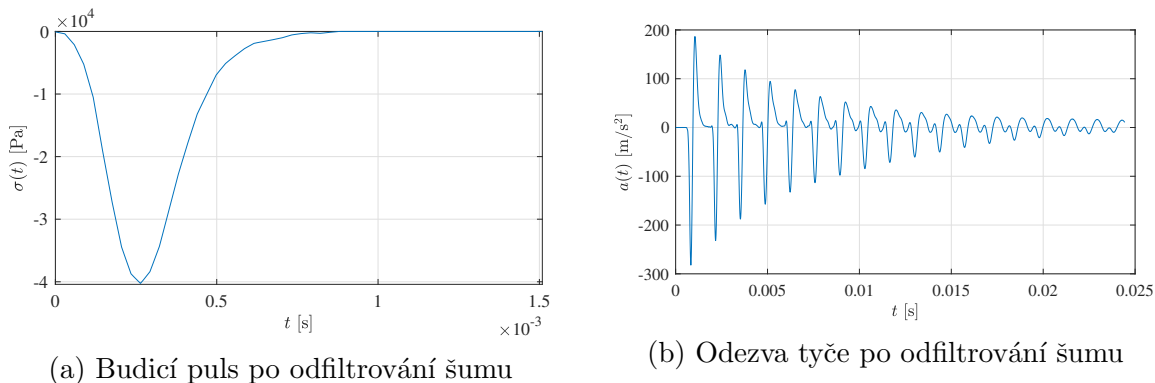
V rámci této práce bylo provedeno měření nestacionární odezvy na dvou viskoelastických tyčích. Konkrétně byly vybrány tyče vyrobené z acetalového kopolymeru označovaného jako POM-C a z polykarbonátu PC 1000. Materiálové listy těchto materiálů jsou uvedeny v přílohách A a B. V případě materiálu POM-C bylo měření provedeno na tyči délky $l = 1,006$ m o průměru $d = 5,3$ mm s hmotností $m = 31,63$ g. Těmto parametrům odpovídá hustota tyče $\rho = 1425$ kg/m³. Druhé měření bylo provedeno na tyči z materiálu PC 1000 délky $l = 1,001$ m o průměru $d = 8$ mm s hmotností $m = 64$ g a s odpovídající materiálovou hustotou $\rho = 1272$ kg/m³. Aby docházelo k co nejmenší interakci s okolím, byla tyč podložena kousky molitanu.



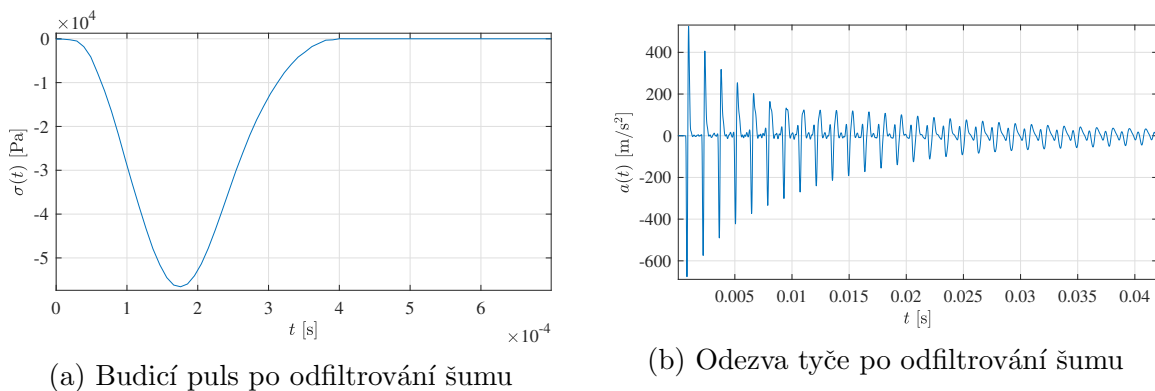
Obrázek 17: Měřicí aparatura, uložení tenké tyče a detail upevnění akcelerometru

V obou případech byly tyče na jednom konci buzeny rázovým kladívkem *Brüel & Kjær Miniature Impact Hammer - Type 8204* bez přidané hmoty. Parametry tohoto kladívka včetně popisu jsou uvedeny v produktovém listu výrobce v příloze C. Při buzení tyče z materiálu POM-C byl kladívkem vybuděn puls přibližné délky 0,6 ms a pro tyč z materiálu PC 1000 se podařilo vybudit puls s přibližnou délkou 0,4 ms. Tvar i délku pulsů lze

vidět na obr. 18 a obr. 19. Z naměřených budicích sil byla následně vypočítána odpovídající napětí, ze kterých byl odfiltrován šum. Vliv této změny je diskutován dále v této kapitole. Na opačném konci obou tyčí byl přilepen vteřinovým lepidlem akcelerometr *Brüel & Kjær Miniature DeltaTron[®] Accelerometer - Type 4519*, jehož parametry jsou uvedeny v příloze D. Signál z tohoto akcelerometru byl zpracován osmikanálovým analyzátozem *OROS OR35*. Uložení tyče a zapojení měřicí aparatury je zobrazeno na obr. 17.



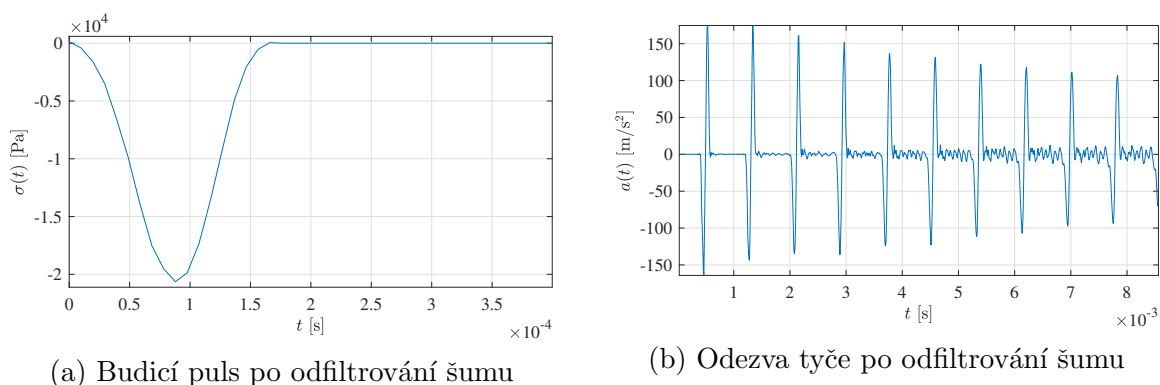
Obrázek 18: Experimentálně naměřená data pro tyč z materiál typu POM-C



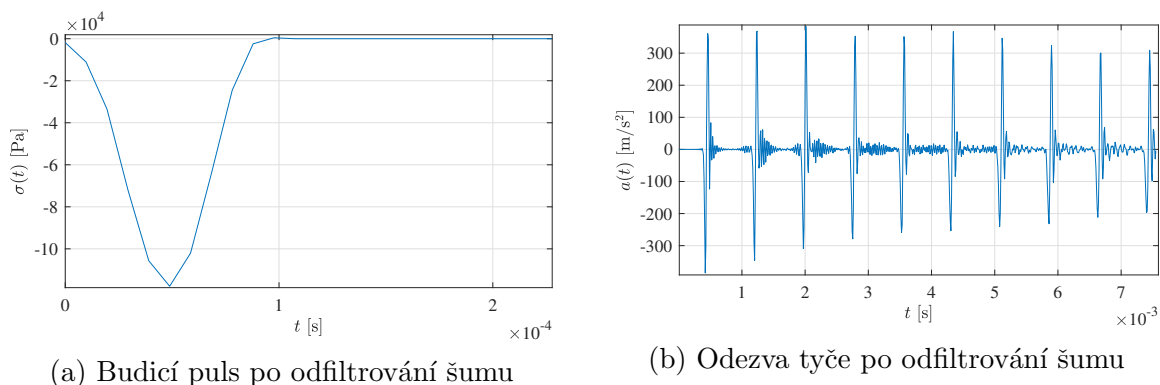
Obrázek 19: Experimentálně naměřená data pro tyč z materiál typu PC 1000

Kromě experimentálních dat získaných výše popsaným způsobem byly v této práci využity i výsledky naměřené v rámci práce [11] pro ocelovou a hliníkovou tyč, obě délek 2 m. Hliníková tyč měla průměr 6 mm a hmotnost 152 g a tyč vyrobená z oceli byla průměru 5,965 mm a hmotnosti 440 g. Při měření odezev těchto tyčí byla použita stejná aparatura. Naměřený budicí signál s naměřenou odezvou zrychlení lze vidět na obr. 20 a obr. 21.

Charakter odezvy u viskoelastických tyčí je podobný jako u elastických. U viskoelastických tyčí však dochází na první pohled k výraznějšímu útlumu na rozdíl od elastických.



Obrázek 20: Experimentálně naměřená data pro tyč z hliníku



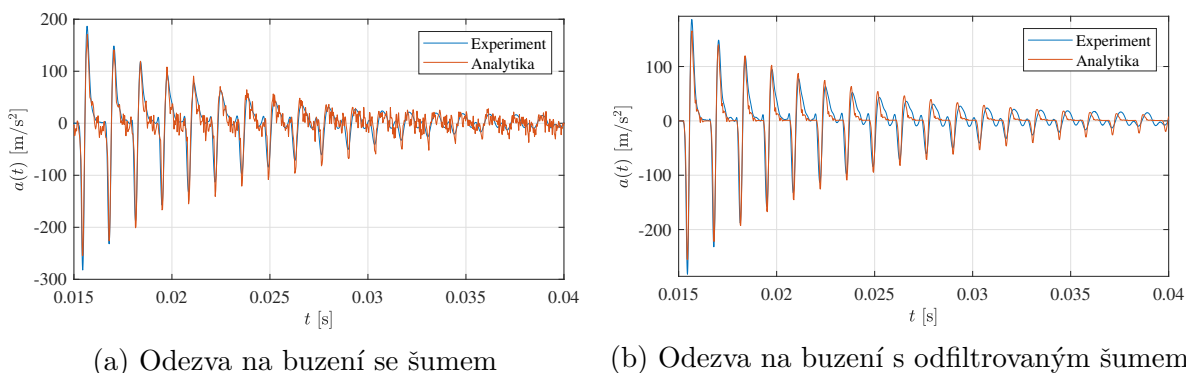
Obrázek 21: Experimentálně naměřená data pro tyč z oceli

6.2 Porovnání naměřené a vypočtené odezvy tyče

Na základě získaných experimentálních výsledků lze nyní ověřit, jak dobře aproximuje řešení odvozené v kapitole 3.2 skutečné vlnové děje, ke kterým ve viskoelastické tyči dochází. Provedme toto ověření např. pro tyč vyrobenou z POM-C, jejíž vlastnosti budou pro jednoduchost aproximovány Maxwellovým modelem popsaným parametry E a λ . Velikost modulu E lze odhadnout pomocí statické hodnoty $E = 3,1 \text{ GPa}$ uvedené v materiálovém listu v příloze A. Hodnotu normálové viskozity λ lze odhadnout tak, aby se relaxace napětí a s ním i souvisejícího zrychlení zřetelně projevila do konečného času měření $0,132 \text{ s}$. Pro jednoduchost je uvažována hodnota $\lambda = 20 \text{ MPas}$, které odpovídá relaxační čas přibližně $t_R \doteq 6,45 \text{ ms}$.

Na obr. 22 je zobrazeno porovnání experimentálně změřené odezvy zrychlení a odezvy vypočtené analyticky pro odhadnuté materiály. V obr. 22a je vykreslen analyticky zjištěný průběh zrychlení pro případ budicího signálu naměřeného přímo na rázovém kladívku, na obr. 22b pak pro buzení zbavené šumu. Z porovnání těchto průběhů je zřejmé, že je nutné budicí signál zbavit nejprve šumu a teprve pak jej použít k vyčíslení odezvy. Všechny následující výpočty tedy budou prováděny v souladu s tímto zjištěním.

Z obr. 22 je dále patrné, že se čelo vlny v analytickém řešení s rostoucím časem zpoužďuje za změřenou odezvou. To je způsobeno nepřesnou volbou E , která zapříčinila



Obrázek 22: Odezva tyče z POM-C modelované pomocí Maxwellova modelu s odhadnutými parametry

menší rychlost šířící se vlny. Zároveň je vidět, že amplituda zrychlení v experimentálně naměřené odezvě relaxuje za kratší dobu. Je tedy nutné volit pro tento případ nižší hodnotu normálové viskozity λ . Na druhou stranu má vypočtené zrychlení formálně stejný průběh jako zrychlení experimentálně změřené, což ověřuje korektnost odvození a vyčíslení analytických vztahů. Pro dosažení lepší shody vypočtené a naměřené odezvy je nutné reprezentovat chování materiálu modelem s více relaxačními časy a pomocí experimentálních dat identifikovat jeho materiálové parametry.

6.3 Formulace úlohy identifikace a její řešení

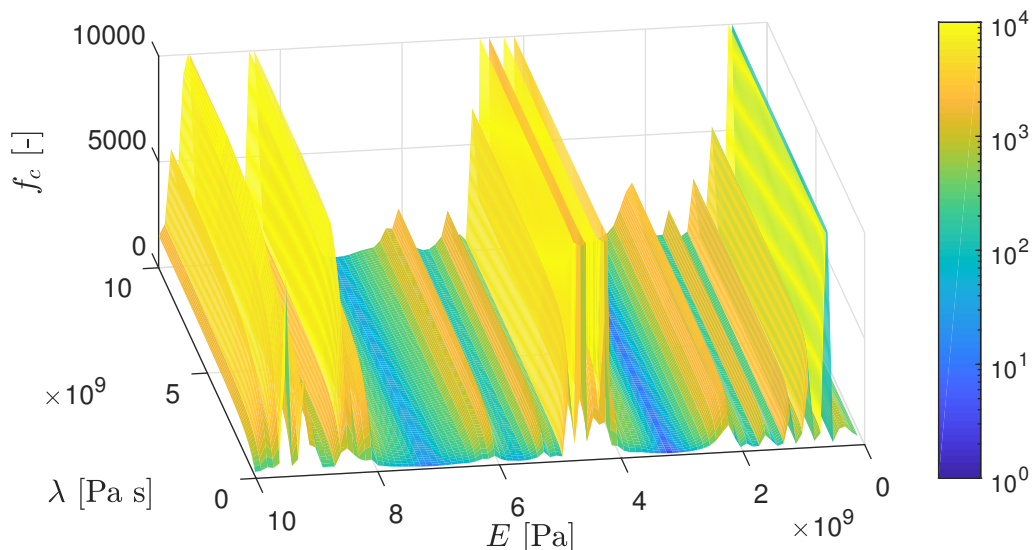
Úloha identifikace materiálových parametrů byla pro materiály zmíněné v podkapitole 6.1 řešena v systému Matlab. Jedná se o inverzní úlohu, kdy jsou na základě naměřených odezev hledány materiálové parametry zvolených viskoelastických modelů. Tento problém parametrické optimalizace byl řešen pomocí standardní funkce *fmincon* implementované v prostředí Matlab. Cílová funkce f_c vyjadřující normovanou odchylku od naměřeného zrychlení byla volena ve tvaru

$$f_c = \left| \frac{(\mathbf{a}_E - \mathbf{a}_A)\mathbf{W}(\mathbf{a}_E - \mathbf{a}_A)^T}{\mathbf{a}_E\mathbf{W}\mathbf{a}_A^T} \right|, \quad (6.1)$$

kde \mathbf{a}_E a \mathbf{a}_A postupně představují experimentálně a analyticky stanovený vektor zrychlení a \mathbf{W} je diagonální váhová matice umožňující přiřadit různou váhu jednotlivým hodnotám v daném časovém okamžiku. Vliv volby jednotlivých vah na její diagonále je diskutován dále v této kapitole. Vektor hodnot zrychlení \mathbf{a}_A se vypočítá pomocí nástroje popsaného v podkapitole 4.1 s tím rozdílem, že je odezva vypočtena pouze v bodě $x = 0$ m a pro Laplaceův obraz zrychlení je použit vztah (3.32)₂.

Analýza citlivosti cílové funkce pro Maxwellův model (dále jen MX) na parametry E a λ ukázala, že hodnota f_c je citlivá zejména na modul pružnosti v tahu E , viz obr. 23. Dále je z tohoto obrázku patrné, že cílová funkce má řadu lokálních minim. To se u počátečních výpočtů pomocí funkce *fmincon* ukázalo jako problém, neboť použitá funkce není schopna nalézt globální minimum bez známých přibližných hodnot hledaných parametrů, které

by sloužily jako počáteční parametry optimalizační metody. Proto je v programu využit objekt *GlobalSearch* prostředí Matlab, který hledá přibližnou polohu globálního minima v zadaném rozmezí hodnot materiálových parametrů. Navíc je program rozdělen do dvou fází, které urychlí celý optimalizační proces.



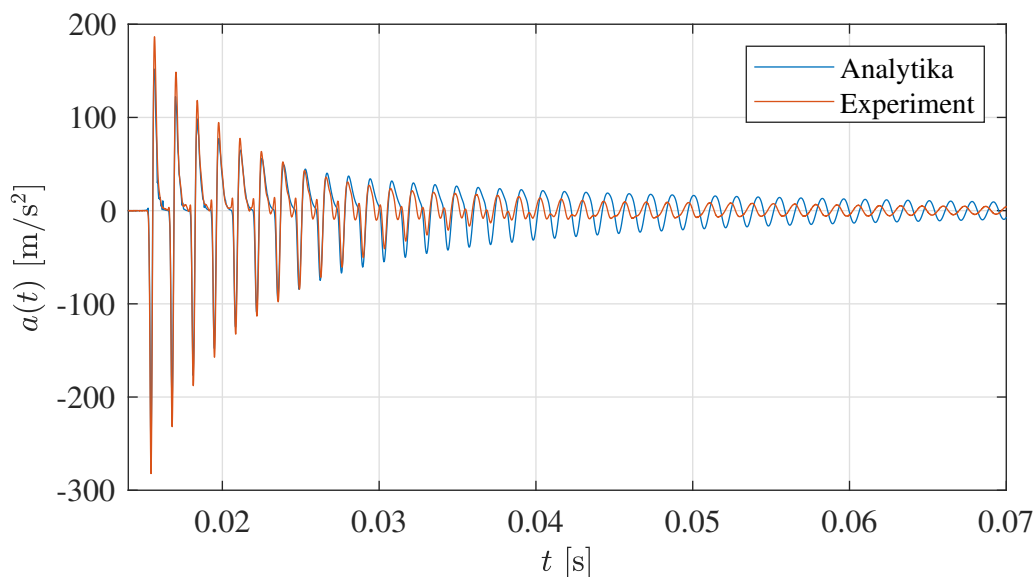
Obrázek 23: Cílová funkce f_c v uvažovaném prostoru optimalizovaných parametrů

V první fázi programu jsou vytvořeny objekt *GlobalSearch* a problémová struktura *createOptimProblem* definující optimalizační úlohu pomocí metody *fmincon*, které jako předané parametry ve funkci *run* spustí algoritmus pro nalezení globálního minima na zadaném intervalu. Interval o velikosti $\langle 0; 10^{10} \rangle$ je zadán pro parametry charakterizující moduly pružnosti v tahu E_E , E_k a interval pro normálové viskozity λ_k je zadán jako $\langle 1; 10^7 \rangle$, kde $k \in \mathbb{N}$ značí počet MX větví. Velikost intervalu je ze zkušenosti volena tak, aby jednotlivé hodnoty parametrů nalezené v následující podkapitole byly zaručeně uvnitř intervalu. Následně jsou tyto intervaly pro E , E_k a λ_k znormovány na velikost $\langle 0; 1 \rangle$, aby náročnost na prohledání jednotlivých intervalů byla stejná. Jednotlivá minima vyhodnocená objektem *GlobalSearch* jsou hledána pomocí funkce *fmincon* tak, jak to bylo nastaveno v problémové struktuře, s mírnějšími zastavovacími podmínkami $TolFun = 10^{-1}$ a $TolX = 10^{-4}$. To zaručí relativně rychlé nalezení polohy globálního minima s přesností na MPa pro E , E_k a s přesností na kPa s pro λ . Zároveň je nastaven parametr $MaxTime = 3600$ omezující celkový optimalizační čas na 1 hodinu. Algoritmus navrátí po splnění zastavovacích podmínek nalezené parametry ve vektoru φ .

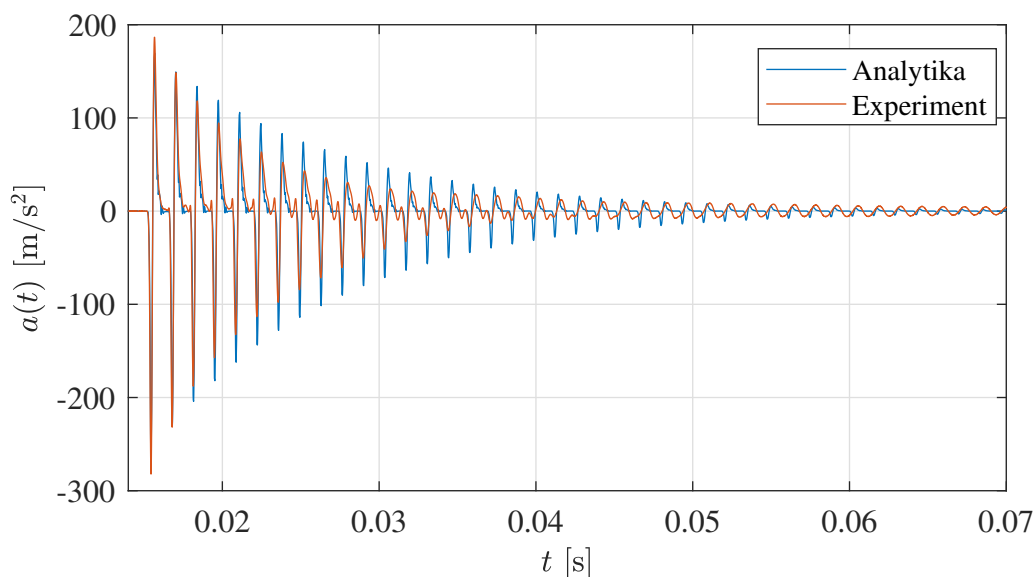
Cílem druhé fáze je nalézt co nejpřesnější parametry, při kterých je cílová funkce minimální. Proto je spuštěna samotná funkce *fmincon* se startovacími parametry nalezenými v první fázi φ na intervalu $\langle \varphi_n - \varphi_n/2; \varphi_n + \varphi_n/2 \rangle$, kde φ_n jsou jednotlivé prvky vektoru φ na pozici $n = \{1, 2, \dots, 2k + 1\}$ značící počet členů modelu. Zároveň jsou nastaveny přísnější zastavovací podmínky $TolFun$ a $TolX$ na hodnotu 10^{-12} .

Jak bylo zmíněno dříve, v cílové funkci definované vztahem (6.1) je zahrnuta i váhová matice, kterou lze ovlivnit běh optimalizačního procesu. Analýza vlivu této matice na shodu

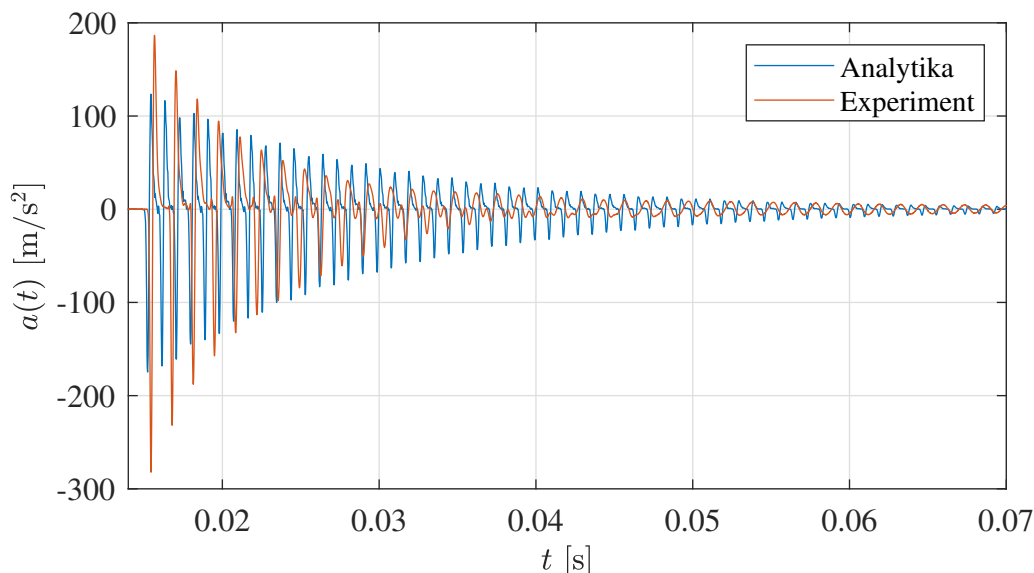
analytického řešení se skutečnou odezvou tyče byla provedena pro materiál POM-C aproximovaný modelem standardního viskoelastického tělesa (dále jen SVT). Na obr. 24 je provedeno porovnání experimentálně a analyticky zjištěné odezvy pro jednotkovou matici \mathbf{W} , tj. naměřené odezvě je v každém časovém okamžiku přiřazena stejná váha. Nalezené optimální parametry tak vystihují materiálové tlumení, případně i nežádoucí tlumení od uložení, které se projeví více v delším čase. Vypočtené řešení tak poměrně dobře kopíruje průběh experimentálně naměřené odezvy na celém časovém úseku.



Obrázek 24: Porovnání zrychlení pro SVT při jednotkové \mathbf{W}



Obrázek 25: Porovnání zrychlení pro SVT s \mathbf{W} přiřazující 100 krát větší váhu časové oblasti $t \in \langle 53,71; 68,35 \rangle$ ms



Obrázek 26: Odezva zrychlení pro SVT s \mathbf{W} přiřazující váhu 10^6 prvkům v časové oblasti $t \in \langle 53,71; 68,35 \rangle$ ms

Dále je uvedeno porovnání mezi jednotlivými odezvami pro \mathbf{W} , přiřazující větší váhu prvkům v $t \in \langle 53,71; 68,35 \rangle$ ms. Na obr. 25 mají prvky v tomto čase t ve výpočtu 100 krát větší váhu, a proto je shoda s naměřenou odezvou na začátku o poznání horší než v předchozím případě. Ke konci časového intervalu jsou naopak průběhy téměř identické. Velikost vybraných prvků na diagonále matice \mathbf{W} však nelze volit příliš rozdílně od ostatních. Identifikované parametry by neodpovídaly skutečným materiálovým parametrům a průběh vypočtené odezvy by byl velmi odlišný. Tento případ je znázorněn na obr. 26, kdy stejnému časovému úseku byla přidělena váha 10^6 .

6.4 Identifikované materiálové parametry

Inverzní úloha byla řešena pro všechny zmíněné materiály, tj. POM-C, PC 1000, hliník i ocel. Jejich materiálové vlastnosti přitom byly aproximovány MX modelem, modelem SVT a obecným standardním viskoelastickým tělesem (dále v textu OSVT) pro různý počet paralelních Maxwellových větví, konkrétně pro $k = 2, 4, 10$. Celkem tak bylo provedeno 20 optimalizací a nalezeno 160 materiálových parametrů. Všechny identifikované parametry jsou pro jednotlivé materiály postupně shrnuté v tabulkách 1-4.

V tabulce 1 pro materiál typu POM-C si lze povšimnout, že nalezený modul pružnosti pro MX model odpovídá i globálnímu minimu v obr. 23. Zároveň je tato hodnota přibližně stejná jako hodnota změřená tahovou zkouškou použitá pro výpočty v podkapitole 6.2. Tomuto E odpovídá i součet dílčích modulů pružností $E = E_E + \sum_k E_k$ pro všechny uvedené viskoelastické modely. Z hodnot odpovídajících MX modelu a SVT lze zjistit, že dominantní vliv bude mít relaxační čas v řádech jednotek ms. Alespoň jeden relaxační čas podobné velikosti obsahují i zbylé viskoelastické modely. Konkrétně pro OSVT s $k = 10$ je vypočteno diskrétní spektrum relaxačních časů (řazeno sestupně): $t_R \in \{5,88 \text{ s}; 3,98 \text{ s};$

3,26 s; 2,25 s; 0,89 s; 0,69 s; 0,27 s; 11,04 ms; 3,33 ms; 46,35 μ s}. Můžeme z něj pozorovat, že je zde několik relaxačních časů se stejným řádem. Po zredukování těchto "duplicitních" časů na jeden, lze dojít k závěru, že k velice přesnému popisu odezvy pro tento materiál postačí 4 relaxační časy. Tuto domněnku potvrzuje i porovnání odezvy pro OSVT $k = 4$ a odezvy pro OSVT $k = 10$ (obr. 27). Průběhy vypočtené odezvy na buzení jsou téměř shodné pro oba zmíněné modely. Veškeré výsledné odezvy z optimalizace jsou v porovnání s naměřenými hodnotami v příloze E.

		k	E_k [Pa]	λ_k [Pa.s]	E_E [Pa]	
POM-C	MX	1	$3,1376 \cdot 10^9$	$1,4643 \cdot 10^7$	-	
	SVT	1	$1,1427 \cdot 10^9$	$1,9078 \cdot 10^6$	$2,0000 \cdot 10^9$	
	OSVT $k = 2$	1	1	$1,5897 \cdot 10^9$	$9,0451 \cdot 10^6$	$1,5191 \cdot 10^9$
		2	2	$1,0189 \cdot 10^8$	$4,7575 \cdot 10^3$	
	OSVT $k = 4$	1	1	$7,9810 \cdot 10^8$	$2,4449 \cdot 10^8$	$5,2503 \cdot 10^8$
		2	2	$1,0140 \cdot 10^8$	$4,7108 \cdot 10^3$	
		3	3	$6,7475 \cdot 10^8$	$2,1969 \cdot 10^6$	
		4	4	$1,1115 \cdot 10^9$	$1,1714 \cdot 10^7$	
	OSVT $k = 10$	1	1	$3,8165 \cdot 10^8$	$4,2145 \cdot 10^6$	$1,5587 \cdot 10^9$
		2	2	$2,4843 \cdot 10^8$	$6,5877 \cdot 10^7$	
		3	3	$1,1898 \cdot 10^8$	$4,7336 \cdot 10^8$	
		4	4	$7,5716 \cdot 10^7$	$4,4534 \cdot 10^8$	
		5	5	$5,0428 \cdot 10^8$	$4,4991 \cdot 10^8$	
		6	6	$5,2480 \cdot 10^8$	$3,6066 \cdot 10^8$	
7		7	$1,0119 \cdot 10^8$	$4,6904 \cdot 10^3$		
8		8	$1,6541 \cdot 10^8$	$3,7223 \cdot 10^8$		
9		9	$8,1942 \cdot 10^8$	$2,7316 \cdot 10^6$		
10		10	$1,1503 \cdot 10^8$	$3,7537 \cdot 10^8$		

Tabulka 1: Identifikované parametry materiálu POM-C pro různé materiálové modely

Z výsledků uvedených v tabulce 2 pro materiál PC 1000 je zřejmé, že i v tomto případě stejně jako u POM-C platí, že součet dílčích E a E_k odpovídá modulu pružnosti pro MX model. Stejně tak i identifikovaná hodnota E přibližně odpovídá tabulkové hodnotě, tj. $E = 2,4$ GPa (viz příloha B). Z hodnot uvedených v tabulce 2 lze snadno zjistit, že diskrétní relaxační spektrum tohoto materiálu pro OSVT s $k = 10$ obsahuje časy $t_R \in \{49,60$ s; 5,73 s; 4,31 s; 3,49 s; 2,69 s; 1,79 s; 80,66 ms; 47,57 ms; 7,20 ms; 46,12 μ s}. Větev s největším relaxačním časem 49,60 s nemá na útlum amplitudy v tomto krátkém časovém záznamu vliv a příslušná MX větev se pak chová jako elastická. Vypočtené odezvy jsou v porovnání s naměřenými odezvami pro uvedené viskoelastické modely na obr. 28 v příloze E.

Identifikace materiálových parametrů je provedena i pro 2 elastické materiály (hliník a ocel), jejichž odezva na reálné buzení byla naměřena v práci [11]. Jejich chování při tomto jevu popisuje autor zmíněné práce elastickým materiálem. Použití viskoelastických modelů k popisu chování takových materiálů ukázalo lepší shodu s naměřenými daty,

		k	E_k [Pa]	λ_k [Pas]	E_E [Pa]	
PC 1000	MX	1	$2,3266 \cdot 10^9$	$1,2582 \cdot 10^7$	-	
	SVT	1	$6,4369 \cdot 10^7$	$3,3239 \cdot 10^3$	$2,2957 \cdot 10^9$	
	OSVT $k = 2$	1	1	$1,7813 \cdot 10^9$	$9,5539 \cdot 10^7$	$5,1757 \cdot 10^8$
		2	2	$6,1287 \cdot 10^7$	$2,8456 \cdot 10^3$	
	OSVT $k = 4$	1	1	$6,1127 \cdot 10^7$	$2,8153 \cdot 10^3$	$9,8610 \cdot 10^8$
		2	2	$9,4263 \cdot 10^8$	$9,7250 \cdot 10^8$	
		3	3	$1,7318 \cdot 10^8$	$4,3448 \cdot 10^8$	
		4	4	$1,9711 \cdot 10^8$	$1,1633 \cdot 10^6$	
	OSVT $k = 10$	1	1	$2,4852 \cdot 10^8$	$2,0047 \cdot 10^7$	$3,4105 \cdot 10^8$
		2	2	$1,1451 \cdot 10^8$	$6,5608 \cdot 10^8$	
		3	3	$6,1018 \cdot 10^7$	$2,8138 \cdot 10^3$	
		4	4	$8,5992 \cdot 10^7$	$3,7086 \cdot 10^8$	
		5	5	$4,3415 \cdot 10^8$	$7,7778 \cdot 10^8$	
		6	6	$1,8550 \cdot 10^7$	$9,2005 \cdot 10^8$	
		7	7	$3,5116 \cdot 10^8$	$1,6705 \cdot 10^7$	
		8	8	$2,7881 \cdot 10^8$	$9,7428 \cdot 10^8$	
9		9	$2,5527 \cdot 10^8$	$6,8640 \cdot 10^8$		
10		10	$1,7108 \cdot 10^8$	$1,2326 \cdot 10^6$		

Tabulka 2: Identifikované parametry materiálu PC 1000 pro různé materiálové modely

zejména pak v delších časech. Při prvním pohledu na materiálové parametry MX modelu u obou materiálů (viz tabulka 3 a 4), je zřejmé, že nalezené E odpovídá tabulkovým hodnotám modulu pružnosti. Relaxační časy těchto materiálů jsou z větší části v řádu sekund či desítek sekund. K velice přesným výsledkům postačují 1 až 2 relaxační časy pro hliník i ocel. Zlepšení mezi experimentálně naměřenou odezvou a vypočtenou odezvou je při použití obecnějšího viskoelastického modelu nepatrné s ohledem na nevýrazné viskoelastické vlastnosti hliníku a oceli. Proto jsou v příloze E uvedena jen porovnání pro MX a ryze elastický model.

6 IDENTIFIKACE MATERIÁLOVÝCH VLASTNOSTÍ NA ZÁKLADĚ
EXPERIMENTÁLNÍCH DAT

		k	E_k [Pa]	λ_k [Pa s]	E_E [Pa]
Hliník	MX	1	$6,5485 \cdot 10^{10}$	$5,6457 \cdot 10^8$	-
	SVT	1	$4,1663 \cdot 10^{10}$	$2,2888 \cdot 10^8$	$2,3765 \cdot 10^{10}$
	OSVT $k = 2$	1	$4,8650 \cdot 10^{10}$	$5,3525 \cdot 10^8$	$1,6786 \cdot 10^{10}$
		2	$1,0934 \cdot 10^9$	$2,0518 \cdot 10^3$	
	OSVT $k = 4$	1	$1,2484 \cdot 10^9$	$1,9736 \cdot 10^5$	$8,1532 \cdot 10^8$
		2	$3,7093 \cdot 10^{10}$	$4,9872 \cdot 10^{10}$	
		3	$2,5452 \cdot 10^{10}$	$3,2498 \cdot 10^{10}$	
		4	$8,7781 \cdot 10^8$	$8,5975 \cdot 10^{10}$	
	OSVT $k = 10$	1	$9,7277 \cdot 10^9$	$7,9546 \cdot 10^{10}$	$5,6501 \cdot 10^9$
		2	$7,1654 \cdot 10^9$	$3,7401 \cdot 10^{10}$	
		3	$6,6753 \cdot 10^9$	$4,5648 \cdot 10^{10}$	
		4	$6,5755 \cdot 10^9$	$8,0559 \cdot 10^{10}$	
		5	$4,4818 \cdot 10^9$	$2,8711 \cdot 10^{10}$	
		6	$1,1670 \cdot 10^9$	$1,7177 \cdot 10^5$	
		7	$3,5467 \cdot 10^9$	$4,8326 \cdot 10^{10}$	
8		$5,2715 \cdot 10^9$	$8,3197 \cdot 10^8$		
9		$9,4238 \cdot 10^9$	$3,2223 \cdot 10^{10}$		
10		$5,8013 \cdot 10^9$	$6,4478 \cdot 10^{10}$		

Tabulka 3: Identifikované parametry hliníku pro různé materiálové modely

		k	E_k [Pa]	λ_k [Pa s]	E_E [Pa]
Ocel	MX	1	$2,0859 \cdot 10^{11}$	$3,364 \cdot 10^9$	-
	SVT	1	$1,8328 \cdot 10^{11}$	$2,5960 \cdot 10^9$	$2,5313 \cdot 10^{10}$
	OSVT $k = 2$	1	$1,1956 \cdot 10^{11}$	$1,1118 \cdot 10^9$	$4,0807 \cdot 10^{10}$
		2	$4,8222 \cdot 10^{10}$	$3,1230 \cdot 10^{10}$	
	OSVT $k = 4$	1	$3,2003 \cdot 10^{10}$	$2,6693 \cdot 10^{10}$	$3,2496 \cdot 10^{10}$
		2	$3,4398 \cdot 10^{10}$	$2,9217 \cdot 10^{10}$	
		3	$7,3731 \cdot 10^{10}$	$4,2817 \cdot 10^8$	
		4	$3,5962 \cdot 10^{10}$	$8,1148 \cdot 10^9$	
	OSVT $k = 10$	1	$1,8723 \cdot 10^{10}$	$2,6148 \cdot 10^{10}$	$1,1453 \cdot 10^{10}$
		2	$2,2661 \cdot 10^{10}$	$2,2879 \cdot 10^{10}$	
		3	$1,9191 \cdot 10^{10}$	$2,7202 \cdot 10^{10}$	
		4	$1,3667 \cdot 10^{10}$	$2,1541 \cdot 10^{10}$	
		5	$2,2359 \cdot 10^{10}$	$2,2988 \cdot 10^{10}$	
		6	$2,0162 \cdot 10^{10}$	$3,1261 \cdot 10^{10}$	
		7	$2,0065 \cdot 10^{10}$	$2,7688 \cdot 10^{10}$	
8		$1,8166 \cdot 10^{10}$	$2,5122 \cdot 10^{10}$		
9		$1,3504 \cdot 10^{10}$	$2,3898 \cdot 10^{10}$		
10		$2,8638 \cdot 10^{10}$	$6,4257 \cdot 10^7$		

Tabulka 4: Identifikované parametry oceli pro různé materiálové modely

7 Závěr

V této práci byly odvozeny vztahy pro základní mechanické veličiny popisující odezvu tenké viskoelastické tyče konečné délky na libovolné osově nestacionární zatížení. Řešení v Laplaceově oblasti bylo primárně odvozeno pro model standardního viskoelastického tělesa. Následně byla úloha zobecněna pro případ modelu obecného viskoelastického tělesa a pomocí limitních přechodů byla diskutována řešení i pro elementární viskoelastické modely. V jedné z kapitol práce byla také provedena diskuse disperzních a tlumících vlastností tenké tyče modelované pomocí standardního viskoelastického tělesa.

Součástí práce byl program vytvořený v prostředí Matlab R2018a, který pomocí numerické zpětné Laplaceovy transformace provádí vyčíslení odvozených vztahů v časoprostorové oblasti. Tento program s uživatelským rozhraním umožňuje efektivní řešení a analýzu odezvy tenké viskoelastické tyče na libovolný typ zatížení. Zároveň byla úloha modelována v konečnoprvkovém programu MSC.Marc2014 a bylo provedeno porovnání analytického řešení s výsledky numerických simulací. Díky existenci analytického řešení byl dále analyzován vliv jednotlivých parametrů konečnoprvkového modelu na přesnost numerických výsledků.

Dále bylo v práci provedeno experimentální měření pro dvě plastové tyče vyrobené z materiálu POM-C a PC 1000 s typicky viskoelastickými vlastnostmi. Pomocí naměřených dat byla nejprve ověřena vhodnost aproximace reálné odezvy viskoelastického materiálu pomocí odvozeného analytického řešení. Následně bylo využito jádro z vytvořeného programu k řešení inverzní úlohy za účelem identifikace materiálových parametrů měřených tyčí. Vytvořený optimalizační algoritmus je efektivní a umožňuje velmi přesnou identifikaci parametrů pro výše zmíněné materiálové modely. Dále bylo ukázáno, že pomocí navrženého postupu lze popsat viskoelastické chování jinak elastických materiálů, jako jsou hliník a ocel, tak, že shoda změřené a vypočítané odezvy je lepší, než při aproximaci těchto materiálů čistě elastickým modelem, zejména pak v delších časech sledování.

Na základě zobecnění prezentovaného analytického řešení lze v budoucnu tuto práci rozšířit na řešení vrstevnatého 1D viskoelastického prostředí a použít jej jako aproximaci funkčně gradovaného prostředí. Zároveň lze uvedený postup po mírné modifikaci použít k identifikaci frekvenčně závislých materiálových parametrů, které jsou typické pro chování reálných viskoelastických materiálů.

Reference

- [1] Sobotka, Z., Reologie hmot a konstrukcí, Studie ČSAV, Academia, Praha, 1981.
- [2] Brepta, R., Prokopec, M., Šíření napěťových vln a rázy v tělesech, Academia, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1972.
- [3] Menga, N., Bottiglione, F., Carbone, G., The nonlinear dynamic behavior of a Rubber-Layer Roller Bearing (RLRB) for vibration isolation, *Journal of Sound and Vibration* 463, 2019, 114952.
- [4] Rao, D.M., Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes, *Journal of Sound and Vibration* 262(3), 2003, 457-474.
- [5] Brepta, R., Vlny napětí a rázové jevy v lineárně elastických a viskoelastických prostředích, *Technická univerzita v Liberci, Liberec*, 1997.
- [6] Wang, L.L., *Foundations of stress waves*, Elsevier, Kidlington, 2007.
- [7] Zhao, H., Gary, G., Klepaczko, J.R., On the use of a viscoelastic split Hopkinson pressure bar, *International Journal of Impact Engineering* 19(4), 1997, 319-330.
- [8] Panowicz, R., Janiszewski, J., Kochanowski, K., Influence of pulse shaper geometry on wave pulses in SHPB experiments, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 56(4), 2018, 1217-1221.
- [9] Kolsky, H., *Stress waves in solids*, Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [10] Pírko Z., Veit J., *Laplaceova transformace*, SNTL/ALFA, Bratislava, 1972.
- [11] Kába O., Šíření elastických vln v jednorozměrných homogenních a heterogenních prostředích, *Bakalářská práce, ZČU v Plzni, Plzeň*, 2018.
- [12] Graff K. F., *Wave motion in elastic solids*, Dover Publications, Inc., New York, 1991.
- [13] Brančík L., Programs for fast numerical inversion of Laplace transforms in matlab language environment. In: *Proceedings of 7th MATLAB Conference*, 1999, 27-39.
- [14] Adámek V., Valeš F., Červ J., Numerical Laplace inversion in problems of elastodynamics: Comparison of four algorithms, *Advances in Engineering Software* 113, 2017, 120–129.
- [15] Rektorys K., *Přehled užití matematiky I*, Prometheus, Praha, 1995.
- [16] MSC.Marc: *User's guide volume B*, MSC Software HmbH, Mnichov, 2016.
- [17] Brepta R., Okrouhlík M., Valeš F., *Vlnové a rázové děje v pevných tělesech a metody jejich řešení*, Studie ČSAV, Academia, Praha, 1985.

- [18] ERTACETAL[®] C Polyoximetylen (POM-C), EPP Plasty, 5. 6. 2020.
URL: https://www.eppplasty.cz/pdf/POM_C.pdf
- [19] PC 1000 Polykarbonát (PC), EPP Plasty, 5. 6. 2020.
URL: https://www.eppplasty.cz/pdf/PC_1000.pdf
- [20] Miniature Impact Hammer - Type 8204 product data, Brüel & Kjær, 20. 6. 2020.
URL: <https://www.bksv.com/-/media/literature/Product-Data/bp2077.ashx>
- [21] Piezoelectric Accelerometer Miniature DeltaTron[®] Accelerometers - Types 4519, 4519-001, 4519-002 and 4519-003 product data, Brüel & Kjær, 20. 6. 2020.
URL: <https://www.bksv.com/-/media/literature/Product-Data/bp2071.ashx>

A Materiálový list POM-C [18]

ERTACETAL C POLYOXIMETYLEN (POM-C)

EPP Plasty a.s.
Václavská 99, Brno 639 00
tel.: 702 166 076
www.eppplasty.cz

Jedná se o čistý acetalový kopolymer (POM-C). ERTACETAL C je odolnější proti hydrolyze, působení silných zásad a tepelněoxidační degradaci než POM-H. ERTACETAL C se velmi dobře obrábí a je velmi vhodný pro výrobu přesných mechanických součástí.

ISO 9001

Fyzikální vlastnosti (indikativní hodnoty ▶)

VLASTNOSTI	Zkoušeno: ISO / IEC	Jednotky	Hodnoty	
Barva	—	—	bílá černá	
Hustota	1183	g/cm ³	1,41	
Nasákavost vodou:				
- po 24/96 hod, ponoření ve vodě 23°C (1)	62	mg	20 / 37	
	62	%	0,24 / 0,45	
- na vzduchu při 23°C a 50% relativní vlhkosti	—	%	0,20	
- při ponoření ve vodě 23°C	—	%	0,85	
Tepelné vlastnosti (2)				
Teplota tání	—	°C	165	
Teplota zesknutí (3)	—	°C	—	
Tepelná vodivost při 23°C	—	W / (K.m)	0,31	
Koeficient lineární tepelné roztažnosti:				
- průměrná hodnota mezi 23 - 60°C	—	m/(m.K)	110.10 ⁻⁶	
- průměrná hodnota mezi 23 - 100°C	—	m/(m.K)	125.10 ⁻⁶	
Teplota deformace při zatížení:				
- metoda A: 1,8 MPa	+	75	°C	105
Maximální provozní teplota na vzduchu:				
- krátkodobá (4)	—	°C	140	
- trvalá: po dobu 5000 / 20000 h (5)	—	°C	115 / 100	
Minimální provozní teplota (6)	—	°C	- 50	
Hořlavost (7)				
- "kyslíkový index"	4589	%	15	
- UL 94 (tloušťka vzorku 1,6 mm)	—	—	HB / HB	
Mechanické vlastnosti při 23°C (8)				
Zkouška tahem (9):				
- mez kluzu / napětí při přetržení (10)	+	527	MPa	68 / -
	++	527	MPa	68 / -
- deformace při přetržení (10)	+	527	%	35
	++	527	%	35
- modul pružnosti (11)	+	527	MPa	3100
	++	527	MPa	3100
Zkouška tlakem (12):				
- tlak, jenž způsobí 1/2 / 5 % deformaci (11) +	+	604	MPa	19/35 / 67
Zkouška odolnosti proti tečení v tlaku (9):				
- tlak, jenž způsobí 1% deformaci za 1000 hod, ($\sigma_{1/1000}$)	+	899	MPa	13
	++	899	MPa	13
Rázová houževnatost - Charpy (13)	+	179/1eU	kJ/m ²	≥ 150
Vrbová houževnatost - Charpy	+	179/1eA	kJ/m ²	7
Vrbová houževnatost - Izod	+	180/2A	kJ/m ²	7
	++	180/2A	kJ/m ²	7
Tvrdość (metoda kuličkou) (14)		2039-1	N/mm ²	140
Tvrdość podle Rockwella (14)		2039-2	—	M 84
Elektrické vlastnosti při 23°C				
Elektrická pevnost (15)	+	(60243)	kV/mm	20
	++	(60243)	kV/mm	20
Vnitřní odpor	+	(60093)	Ω .cm	> 10 ¹⁴
	++	(60093)	Ω .cm	> 10 ¹⁴
Povrchový odpor	+	(60093)	Ω	> 10 ¹³
	++	(60093)	Ω	> 10 ¹³
Relativní permitivita ϵ_r - při 100 Hz	+	(60250)	—	3,8
	++	(60250)	—	3,8
Relativní permitivita ϵ_r - při 1 Hz	+	(60250)	—	3,8
	++	(60250)	—	3,8
Disipační činitel tan δ : - při 100 Hz	+	(60250)	—	0,003
	++	(60250)	—	0,003
Disipační činitel tan δ : - při 1 Hz	+	(60250)	—	0,008
	++	(60250)	—	0,008
Odolnost proti plazivým proudům (CTI)	+	(60112)	—	600
	++	(60112)	—	600

Výrobní program:

Týče: Ø 3 - 320 mm - Fólie/Desky: tloušťka 0,5 - 120 mm - Trubky: 20 až 350 mm

Poznámky:

- + : měřeno na suchých vzorcích
 ++: měřeno na vzorcích v rovnováze se standardní atmosférou: 23°C, rel. vlhkost 50% (většinou odvozeno z literatury)
 (1) Podle metody 1 normy ISO 62 a provedeno na discích Ø 50 x 3 mm.
 (2) Uvedené hodnoty pro tyto vlastnosti jsou většinou odvozeny z údajů uváděných výrobcí surovin nebo jiné literatury.
 (3) Hodnoty pro tuto vlastnost jsou uváděny pouze u amorfních materiálů. Nejsou uváděny u materiálů semi-krytalických.
 (4) Pouze pro krátkodobé zatížení (několik hodin) v situacích, kdy materiál je zatížen jen velmi málo nebo vůbec.
 (5) Po uplynutí této doby dochází ke snížení tahové pevnosti asi na 50% původní hodnoty. Uvedené teploty vycházejí z probíhající tepelné oxidační degradace, která způsobuje změnu vlastností. Stejně jako u všech ostatních termoplastů závisí maximální přípustná provozní teplota v mnoha případech zejména na době trvání a rozsahu hodnot mechanických napětí (hlavně rázů), jímž je materiál vystaven.
 (6) Rázová houževnatost klesá se snižující se provozní teplotou. Minimální přípustná provozní teplota je určena prakticky rozsahem, v němž je materiál vystaven rázům. Uvedené hodnoty vycházejí z nepříznivých rázových podmínek a v důsledku toho nemusí být pokládány za absolutní použitelné limity.
 (7) Tyto odhadované hodnoty jsou většinou odvozeny z údajů uváděných dodavateli surovin. Nemají vyjadřovat rizika, která hrozí ve skutečných podmínkách požárního ohrožení. Pro tyto materiály neexistují "žluté karty" dle specifikace UL 94.
 (8) Hodnoty uvedené pro tyto vlastnosti suchých materiálů (+) jsou většinou průměrné hodnoty odvozené ze zkoušek provedených na vzorcích obrobeků z tyčí o Ø 40 - 60 mm. U materiálů ERTACETAL, ERTALYTE a PC 1000 můžeme vzhledem k jejich velmi nízké absorpci vody uvažovat, že hodnoty pro suché materiály (+) jsou stejné jako pro nasycené materiály (++)
 (9) Zkušební vzorky: Typ 1 B.
 (10) Zkušební rychlost: 20 mm/min. (5mm/min pro ERTALON 66-GF30, ERTACETAL H-TF a ERTALYTE TX).
 (11) Zkušební rychlost: 1 mm/min.
 (12) Zkušební vzorky: válečky Ø 12 x 30 mm.
 (13) Použité kyvadlo : 15 J.
 (14) Zkušební vzorky tloušťky 10 mm.
 (15) Elektrody : 25/75 koaxiální válečkové, v transformátorovém oleji podle IEC 60296, zkušební vzorky o síle 1 mm, přírodní (bílé) materiál. Je důležité si uvědomit, že dielektrická pevnost černých materiálů (ERTALON 6SA, ERTALON 66 SA, ERTACETAL a ERTALYTE) může dosahovat pouze 50% hodnoty naměřené u přírodních (bílých) materiálů.
 (16) Uvedené hodnoty neplatí pro filie ERTALYTE.

▶ Hodnoty uvedené v tabulce slouží jako pomůcka pro volbu materiálu, popisují běžný rozsah vlastností materiálů, nejsou garantovány a neměly by být použity ke stanovení limitů materiálů nebo použity samostatně jako základ konstruktérského návrhu. ERTALON 66-GF30 je anizotropní materiál, a proto se jeho vlastnosti liší ve směru rovnoběžném se skelnými vlákny od směru kolmého na vlákna.

B Materiálový list PC 1000 [19]

PC 1000
POLYKARBONÁT (PC)

EPP Plasty a.s.
Václavská 99, Brno 639 00
tel.: 702 166 076
www.eppplasty.cz

Tento polymer je čistý, UV – nestabilizovaný polykarbonátový produkt na trhu uváděný pod obchodním názvem PC 1000. Jedná se o „neoptickou“ průmyslovou kvalitu. Tzn., že průsvitnost není stejně číroší jako např. skla, nýbrž materiál je "jakoby" zakalený.

ISO 9001

Fyzikální vlastnosti (indikativní hodnoty ▶)

VLASTNOSTI	Zkoušeno: ISO / IEC	Jednotky	Hodnoty
Barva	—	—	průhledný
Hustota	1183	g/cm ³	1,20
Nasákavost vodou:			
- po 24/96 hod, ponoření ve vodě 23°C (1)	62	mg	13 / 23
	62	%	0,18 / 0,33
- na vzduchu při 23°C a 50% relativní vlhkosti	—	%	0,15
- při ponoření ve vodě 23°C	—	%	0,35
Tepelné vlastnosti (2)			
Teplota tání	—	°C	—
Teplota zeskenění (3)	—	°C	150
Tepelná vodivost při 23°C	—	W / (K.m)	0,21
Koeficient lineární tepelné roztažnosti:			
- průměrná hodnota mezi 23 - 60°C	—	m/(m.K)	65.10 ⁻⁶
- průměrná hodnota mezi 23 - 100°C	—	m/(m.K)	65.10 ⁻⁶
Teplota deformace při zatížení:			
- metoda A: 1,8 MPa +	75	°C	130
Maximální provozní teplota na vzduchu:			
- krátkodobá (4)	—	°C	135
- trvalá: po dobu 5000 / 20000 h (5)	—	°C	125 / 115
Minimální provozní teplota (6)	—	°C	- 60
Hořlavost (7)			
- "kyslíkový index"	4589	%	25
- UL 94 (tloušťka vzorku 1,6 mm)	—	—	HB / HB
Mechanické vlastnosti při 23°C (8)			
Zkouška tahem (9):			
- mez kluzu / napětí při přetržení (10) +	527	MPa	70 / -
	527	MPa	70 / -
- deformace při přetržení (10) +	527	%	> 50
	527	%	> 50
- modul pružnosti (11) +	527	MPa	2400
	527	MPa	2400
Zkouška tlakem (12):			
- tlak, jenž způsobí 1 / 2 / 5 % deformaci (11) +	604	MPa	18 / 35 / 72
Zkouška odolnosti proti tečení v tlaku (9):			
- tlak, jenž způsobí 1% deformaci za 1000 hod, ($\sigma_{1/1000}$) ++	899	MPa	17
	899	MPa	17
Rázová houževnatost - Charpy (13) +	179/1eU	kJ/m ²	bez lomu
Vrubová houževnatost - Charpy +	179/1eA	kJ/m ²	9
Vrubová houževnatost - Izod +	180/2A	kJ/m ²	9
	180/2A	kJ/m ²	9
Tvrdość (metoda kuličkou) (14)	2039-1	N/mm ²	120
Tvrdość podle Rockwella (14)	2039-2	—	M 75
Elektrické vlastnosti při 23°C			
Elektrická pevnost (15) +	(60243)	kV/mm	28
	(60243)	kV/mm	28
Vnitřní odpor +	(60093)	$\Omega \cdot \text{cm}$	> 10 ¹⁵
	(60093)	$\Omega \cdot \text{cm}$	> 10 ¹⁵
Povrchový odpor ++	(60093)	Ω	> 10 ¹⁵
	(60093)	Ω	> 10 ¹⁵
Relativní permitivita ϵ_r - při 100 Hz +	(60250)	—	3
	(60250)	—	3
Relativní permitivita ϵ_r - při 1 MHz ++	(60250)	—	3
	(60250)	—	3
Disipační činitel tan δ : - při 100 Hz +	(60250)	—	0,001
	(60250)	—	0,001
Disipační činitel tan δ : - při 1 MHz +	(60250)	—	0,008
	(60250)	—	0,008
Odolnost proti plazivým proudům (CTI) +	(60112)	—	350 (225)
	(60112)	—	350 (225)

Výrobní program:

Týče: Ø 6 - 200 mm - Fólie/Desky: tloušťka 15 - 50 mm

Poznámky:

- + : měřeno na suchých vzorcích
 ++: měřeno na vzorcích v rovnováze se standardní atmosférou: 23°C, rel. vlhkost 50% (většinou odvozeno z literatury)
 (1) Podle metody 1 normy ISO 62 a provedeno na discích Ø 50 x 3 mm.
 (2) Uvedené hodnoty pro tyto vlastnosti jsou většinou odvozeny z údajů uváděných výroci surovin nebo jiné literatury.
 (3) Hodnoty pro tuto vlastnost jsou uváděny pouze u amorfních materiálů. Nejsou uváděny u materiálů semi-kryštalických.
 (4) Pouze pro krátkodobé zatížení (několik hodin) v situacích, kdy materiál je zatížen jen velmi málo nebo vůbec.
 (5) Po uplynutí této doby dochází ke snížení tahové pevnosti asi na 50% původní hodnoty. Uvedené teploty vycházejí z probíhající teplotní oxidační degradace, která způsobuje změnu vlastností. Stejně jako u všech ostatních termoplastů závisí maximální přípustná provozní teplota v mnoha případech zejména na době trvání a rozsahu hodnot mechanických napětí (hlavně rázů), jímž je materiál vystaven.
 (6) Rázová houževnatost klesá se snižující se provozní teplotou. Minimální přípustná provozní teplota je určena prakticky rozsahem, v němž je materiál vystaven rázům. Uvedené hodnoty vycházejí z nepříznivých rázových podmínek a v důsledku toho nemusí být pokládány za absolutní použitelné limity.
 (7) Tyto odhadované hodnoty jsou většinou odvozeny z údajů uváděných dodavateli surovin. Nemají vyjadřovat rizika, která hrozí ve skutečných podmínkách požárního ohrožení. Pro tyto materiály neexistují "žluté karty" dle specifikace UL 94.
 (8) Hodnoty uvedené pro tyto vlastnosti suchých materiálů (+) jsou většinou průměrné hodnoty odvozené ze zkoušek provedených na vzorcích obrobekých z tyčí o Ø 40 - 60 mm. U materiálů ERTACETAL, ERTALYTE a PC 1000 můžeme vzhledem k jejich velmi nízké absorpci vody uvažovat, že hodnoty pro suché materiály (+) jsou stejné jako pro nasycené materiály (++)
 (9) Zkušební vzorky: Typ 1 B.
 (10) Zkušební rychlost: 20 mm/min.
 (5mm/min pro ERTALON 66-GF30, ERTACETAL H-TF a ERTALYTE TX).
 (11) Zkušební rychlost: 1 mm/min.
 (12) Zkušební vzorky: válečky Ø 12 x 30 mm.
 (13) Použité kyvadlo : 15 J.
 (14) Zkušební vzorky tloušťky 10 mm.
 (15) Elektrody : 25/75 koaxiální válečkové, v transformátorovém oleji podle IEC 60296, zkušební vzorky o síle 1 mm, přírodní (bílé) materiál. Je důležité si uvědomit, že dielektrická pevnost černých materiálů (ERTALON 6SA, ERTALON 66 SA, ERTACETAL a ERTALYTE) může dosahovat pouze 50% hodnoty naměřené u přírodních (bílých) materiálů.
 (16) Uvedené hodnoty neplatí pro fólie ERTALYTE.

▶ Hodnoty uvedené v tabulce slouží jako pomůcka pro volbu materiálů, popisují běžný rozsah vlastností materiálů, nejsou garantovány a neměly by být použity ke stanovení limitů materiálů nebo použity samostatně jako základ konstruktérského návrhu. ERTALON 66-GF30 je anizotropní materiál, a proto se jeho vlastnosti liší ve směru rovnoběžném se skelnými vláknami od směru kolmého na vlákna.

C Produktový list rázového kladívka [20]

Miniature Impact Hammer — Type 8204

USES

- Impact-force measurements on small structures
- Measurement of frequency response functions using impact excitation techniques
- As part of a dynamic structural testing system for modal analysis and the prediction of structural response

FEATURES

- Compact size and low weight
- Negligible changes to dynamic properties of test structure
- Aluminium shaft to reduce occurrence of double impacts
- DeltaTron® (low-impedance) output

Description

The piezoelectric force transducer is designed to excite and measure impact forces on small structures such as disc-drive heads, circuit boards, turbine blades and similar small structures. An accelerometer (or laser velocity transducer) is used to measure the response of the structure. By using a multichannel FFT analyzer, such as the PULSE™ system, the frequency response function and mode shapes of the test structure can be derived.

Characteristics

Type 8204 has built-in electronics. The sensitivity is expressed in terms of voltage per unit force (mV/N or mV/lbf).



The integral impact tip is made of stainless steel, which combined with the very low mass gives a high resonance frequency. The frequency response of the impact and decay of the impulse can be adjusted by applying tape to the impact area or using the supplied head extender.

The handle has been designed for optimal control of impact and thus reduces the risk of “double hits”.

Calibration

The transducer is supplied with an individual calibration of its sensitivity.

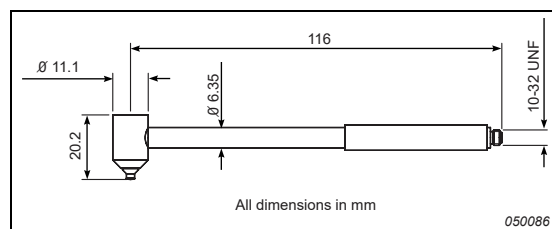
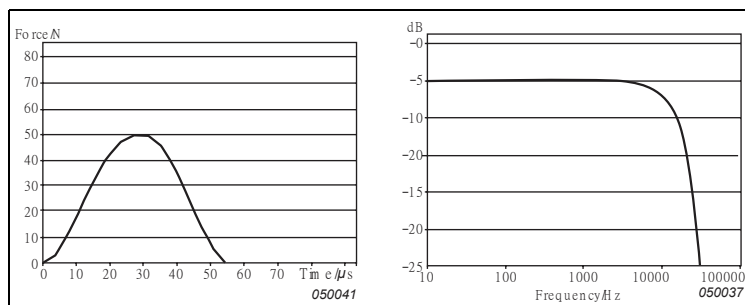


Fig. 1

Impulse shapes for the hammer tip as a function of time showing the pulse decay and peak value (left); force spectrum of an impact on an aluminium plate (right)




Specifications – Miniature Impact Hammer Type 8204

	Units	8204
Dynamic Characteristics		
Voltage Sensitivity (typical)	mV/N (mV/lbf)	22.7 (100)
Full Scale Force Range Compression	N (lbf)	220 (50)
Linear Error at Full Scale	% full scale	<±2
Electrical Characteristics		
Full Scale Output Voltage	V	±5
DC Output Bias Voltage	V	+7 to +12
Output Impedance	Ω	<100
Power Supply	mA	2 to 20
Voltage Range	V DC	+18 to +30
Environmental Characteristics		
Temperature Range	°C (°F)	-73 to +60 (-100 to +140)
Max. Force Compression	N (lbf)	890 (200)
Physical Characteristics		
Dimensions		See outline drawing
Overall Length	mm (in.)	122 (4.8)
Effective Seismic Mass without Head Extender	gram (oz.)	2 (0.07)
Effective Seismic Mass with Head Extender	gram (oz.)	5.5 (0.2)
Impact Tip Material		17-4 PH stainless steel
Connector		10-32 UNF

All values typical at 25°C (77°F) unless measurement uncertainty is specified

COMPLIANCE WITH STANDARDS

 Compliance with EMC Directive and Low Voltage Directive of the EU

Compliance with the EMC requirements of Australia and New Zealand

Ordering Information

Type 8204 includes the following accessories:

- Carrying Box
- Calibration Chart
- Head Extender, 3.5 gram (0.123 oz.)
- PVC Insulated Cable, 10-32 UNF to BNC Connector, 5 m (16.4 ft)

OPTIONAL ACCESSORIES*

- AO 0406: Double-screened Low-noise Cable, 10-32 UNF to BNC Connector via JP 0145, 5 m (16.4 ft)
- AO 0531: PVC Insulated Cable, 10-32 UNF to BNC Connector, 5 m (16.4 ft)

- AO 0463G: 70°C, Single Screen Cable, 10-32 UNF to 10-32 UNF, length 5 m (16.4 ft.)
- JP 0145: Plug Adaptor, BNC/10-32 UNF
- JJ 0032: Extension Connector 10-32 UNF
- ZZ 0245: In-line TEDS Adaptor 10-32 UNF to 10-32 UNF

* Additional accessories, cables and services are available (see www.bksv.com)

Brüel & Kjær reserves the right to change specifications and accessories without notice

HEADQUARTERS: DK-2850 Nærum · Denmark · Telephone: +45 4580 0500 · Fax: +45 4580 1405
www.bksv.com · info@bksv.com

Australia (+61) 2 9889-8888 · Austria (+43) 1 865 74 00 · Brazil (+55) 11 5188-8166 · Canada (+1) 514 695-8225
 China (+86) 10 680 29906 · Czech Republic (+420) 2 6702 1100 · Finland (+358) 9-521 300 · France (+33) 1 69 90 71 00
 Germany (+49) 421 17 87 0 · Hong Kong (+852) 2548 7486 · Hungary (+36) 1 215 83 05 · Ireland (+353) 1 807 4083
 Italy (+39) 0257 68061 · Japan (+81) 3 5715 1612 · Korea (+82) 2 3473 0605 · Netherlands (+31) 318 55 9290
 Norway (+47) 66 77 11 55 · Poland (+48) 22 816 75 56 · Portugal (+351) 21 47 11 4 53 · Singapore (+65) 377 4512
 Slovak Republic (+421) 25 443 0701 · Spain (+34) 91 659 0820 · Sweden (+46) 8 449 8600
 Switzerland (+41) 44 880 7035 · Taiwan (+886) 2 2502 7255 · United Kingdom (+44) 14 38 739 000
 USA (+1) 800 332 2040 · Local representatives and service organisations worldwide

Brüel & Kjær 

D Produktový list akcelerometru [21]

Piezoelectric Accelerometer Miniature DeltaTron[®] Accelerometers — Types 4519, 4519-001, 4519-002 and 4519-003

FEATURES AND USES

- Hermetically sealed
- Low weight
- Low-impedance output
- Measurements in confined spaces
- Measurements on delicate structures
- 360° orientation (Types 4519-002 and 4519-003)
- High frequency range (> 20 kHz)

Description

Types 4519, 4519-001, 4519-002 and 4519-003 are piezoelectric Shear accelerometers with integral electronics. The transducers feature an M3 side connector and are hermetically sealed for high resistance to harsh environments. The transducers have a high resolution, giving an excellent signal-to-noise ratio.

Two types have been designed for mounting on the object by means of an integrated M3 threaded stud and two types for adhesive mounting with 360° freedom of orientation.

Characteristics

The piezoelectric accelerometers feature built-in preamplifiers. The sensitivity is expressed in terms of voltage per unit acceleration (mV/g).

In the Shear design, the piezoelectric element undergoes shear deformation as in the DeltaShear[®] design. Two rectangular slices of piezoelectric material are arranged on each side of a rectangular centre post. This design gives a high degree of linearity, and excellent immunity to base bending and temperature fluctuations. The signal is collected and amplified in the built-in amplifier. The housing material is titanium.

Calibration

The transducers are individually calibrated using state-of-the-art random FFT technology, providing an 800-point high-resolution calibration (magnitude and phase), ulti-

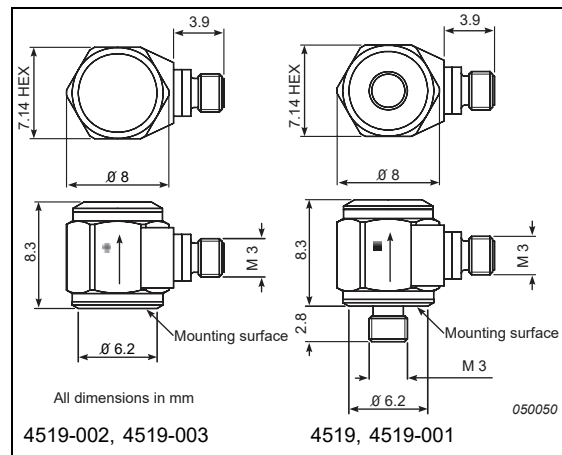


mately giving a unique characterisation and securing the integrity of the vibration measurement.

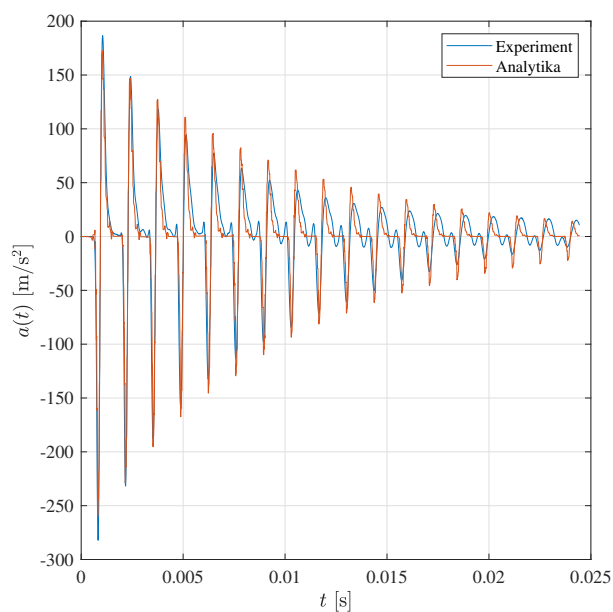
The sensitivity given on the calibration chart has been measured at 159.2 Hz with a 95% confidence level, using a coverage factor $k = 2$.

Recommended Mounting

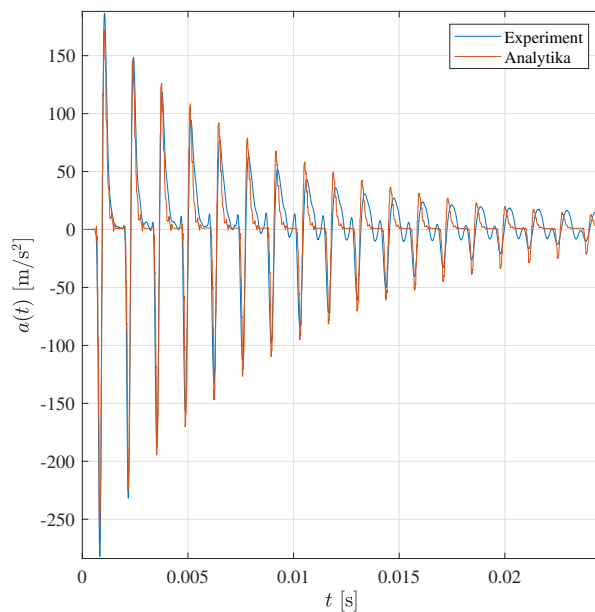
Due to the small size, careful mounting is required to ensure correct operation over the full frequency range of the accelerometer.



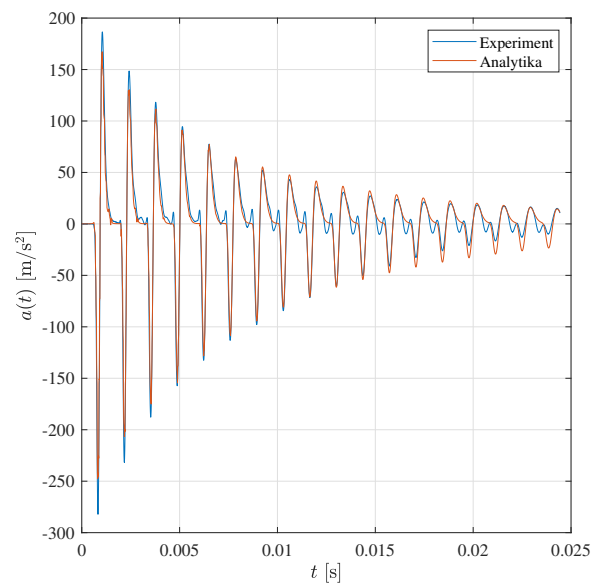
E Porovnání naměřených a vypočtených odezev pro jednotlivé materiály



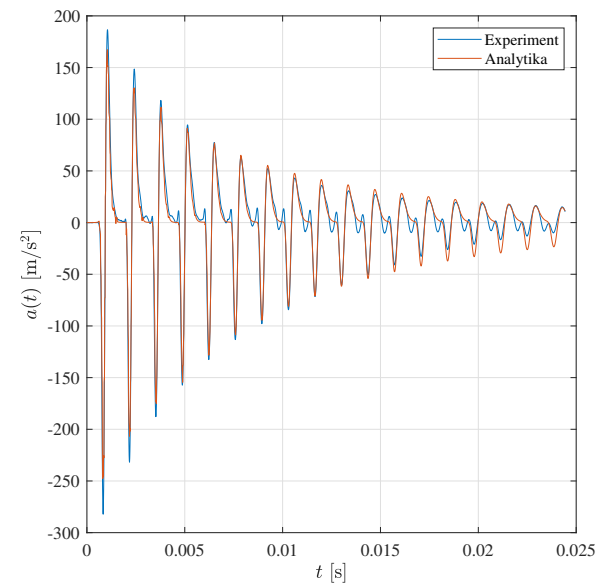
(a) Odezva pro materiál charakterizovaný MX modelem



(b) Odezva pro materiál charakterizovaný SVT modelem

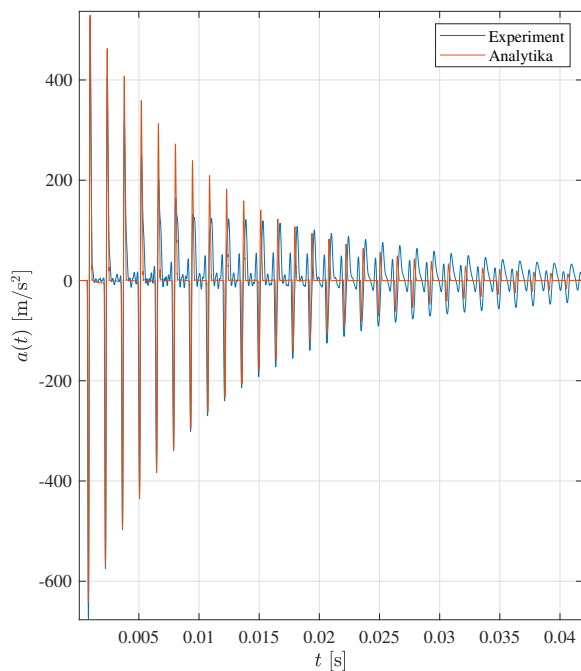


(c) Odezva pro materiál charakterizovaný OSVT s $k = 4$

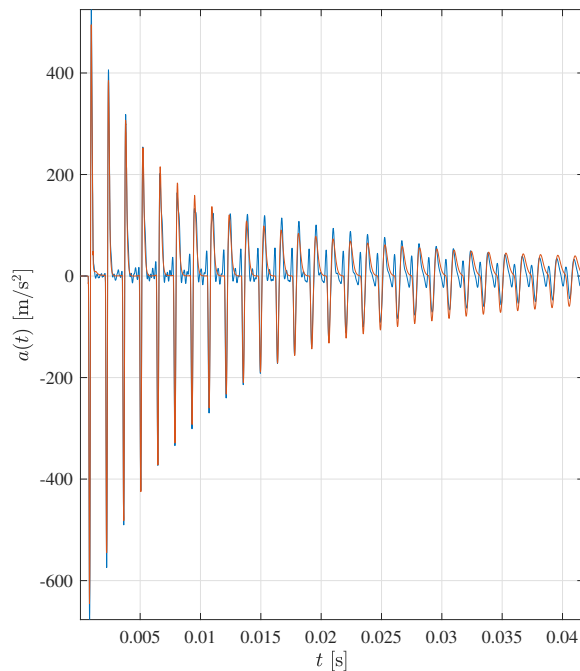


(d) Odezva pro materiál charakterizovaný OSVT s $k = 10$

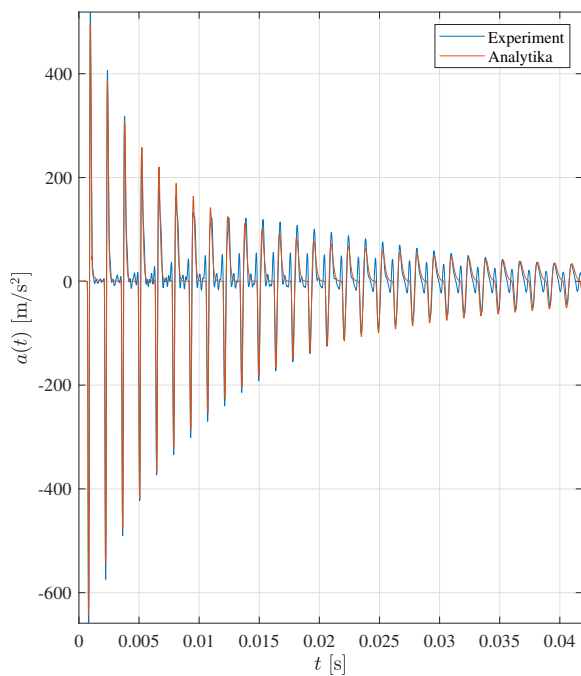
Obrázek 27: Porovnání naměřené odezvy tyče z POM-C s odezvou vypočítanou pro nalezené parametry viskoelastických modelů



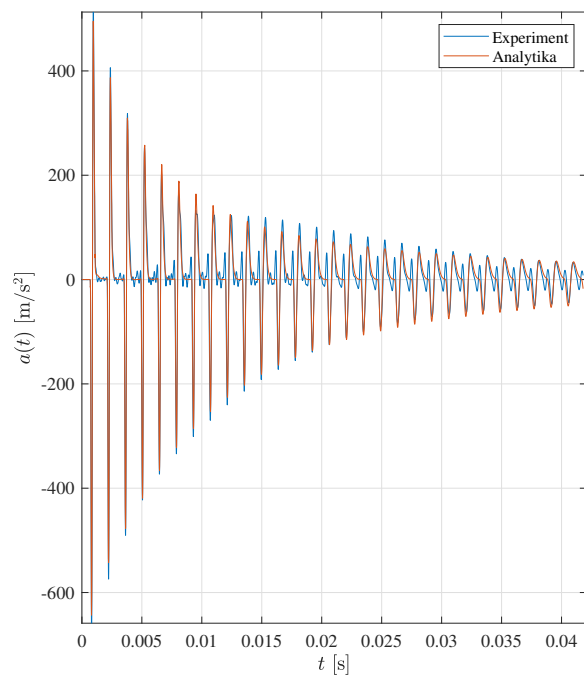
(a) Odezva pro materiál charakterizovaný MX modelem



(b) Odezva pro materiál charakterizovaný SVT

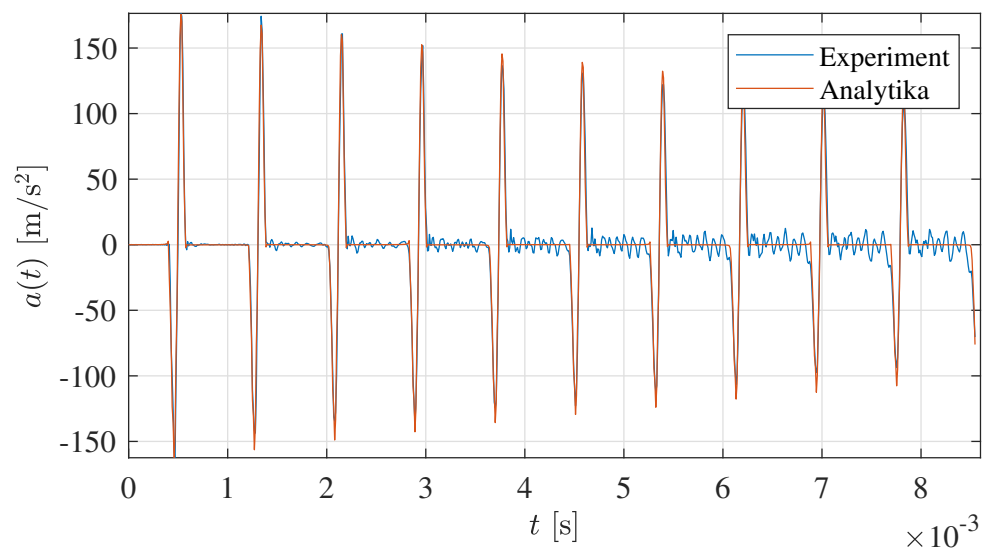


(c) Odezva pro materiál charakterizovaný OSVT s $k = 4$

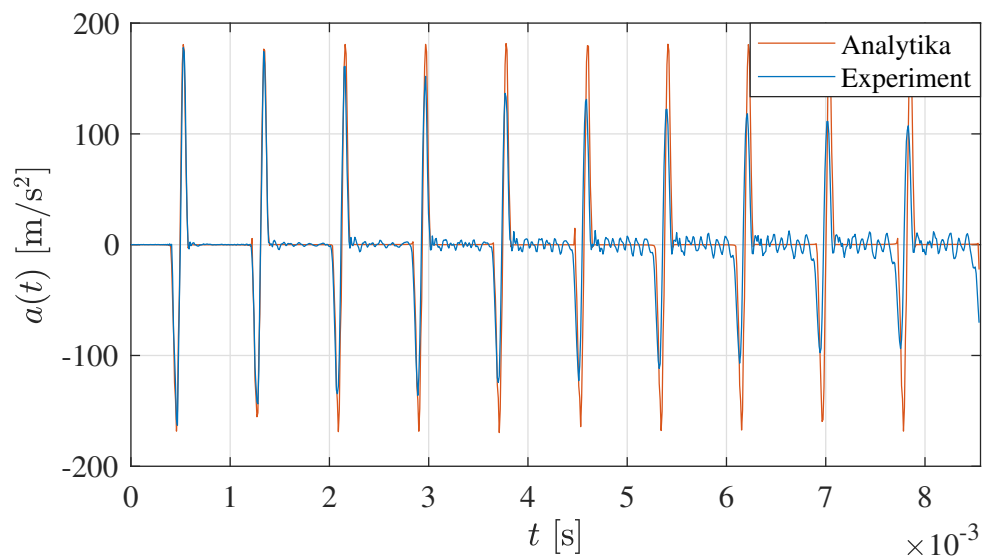


(d) Odezva pro materiál charakterizovaný OSVT s $k = 10$

Obrázek 28: Porovnání naměřené odezvy tyče z PC 1000 s odezvou vypočítanou pro nalezené parametry viskoelastických modelů

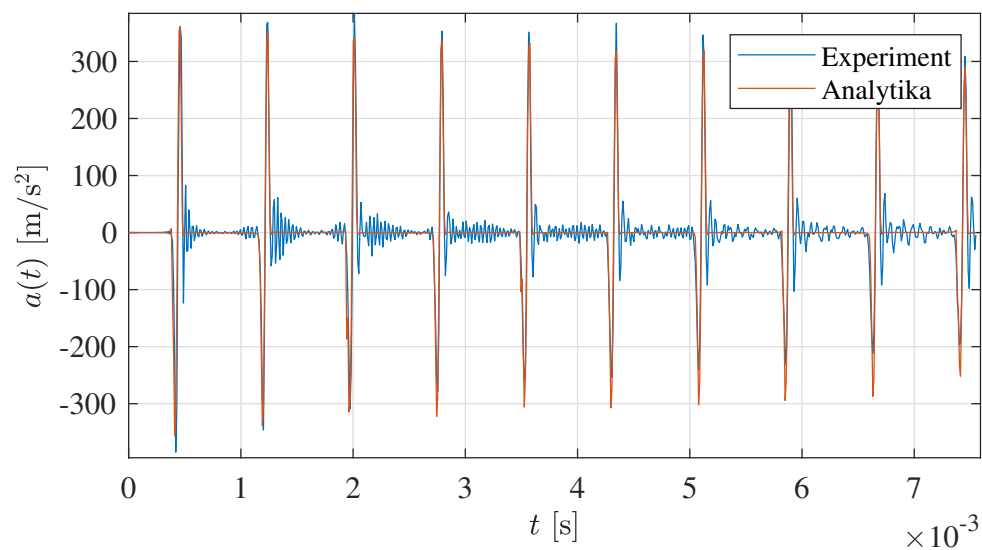


(a) Odezva pro materiál charakterizovaný MX modelem

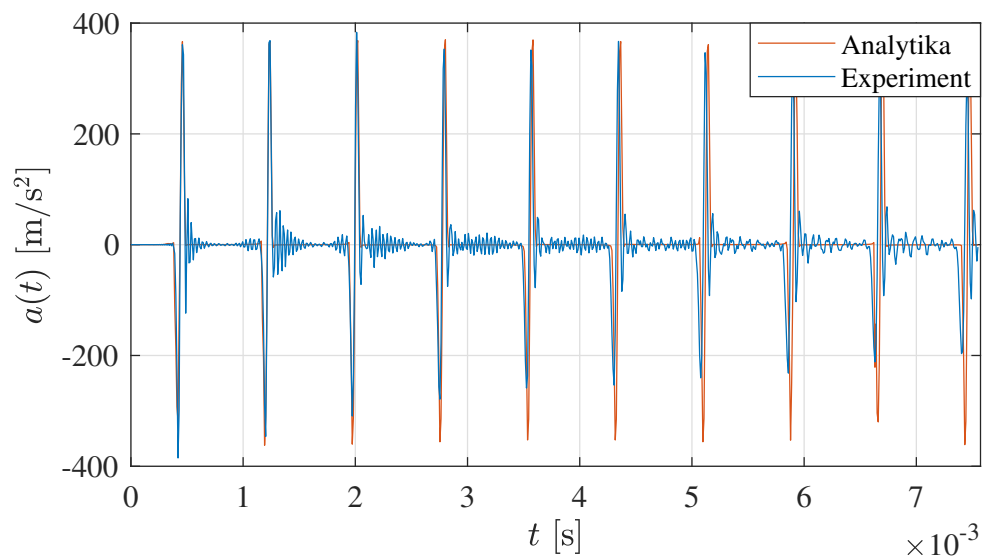


(b) Odezva pro ryze elastický materiál

Obrázek 29: Porovnání naměřené odezvy hliníkové tyče s odezvou vypočítanou pro nalezené parametry MX modelu a elastického modelu



(a) Odezva pro materiál charakterizovaný MX modelem



(b) Odezva pro ryze elastický materiál

Obrázek 30: Porovnání naměřené odezvy ocelové tyče s odezvou vypočítanou pro nalezené parametry MX modelu a elastického modelu