ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

KATEDRA MECHANIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Kmitání rotorových systémů s olopatkovanými disky

Autor
Patrik VLADAŘ

Vedoucí
Prof. Dr. Ing. Jan DUPAL

2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 30. června 2020

Bc. Patrik Vladař

Poděkování

Tímto chci poděkovat všem lidem, kteří mi pomohli na akademické, či jiné půdě. Především pak Prof. Dr. Ing. Janu Dupalovi za ochotu a věnovaný čas při vedení této práce a své rodině, bez jejíž podpory by tato práce nemohla vzniknout.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Bc. Patrik VLADAŘ**
Osobní číslo:	**A18N0114P**
Studijní program:	**N3955 Počítačové modelování v inženýrství**
Studijní obor:	**Dynamika konstrukcí a mechatronika**
Téma práce:	**Kmitání rotorových systémů s olopatkovanými disky**
Zadávající katedra:	**Katedra mechaniky**

Zásady pro vypracování

1. Vytvoření modelu lopatky na bázi MKP.
2. Vytvoření modelu rotoru na bázi MKP.
3. Vytvoření celkového modelu rotoru a olopatkovaného disku.
4. Zpracování příslušného programového vybavení (SW).
5. Testování SW na konkrétním modelu včetně posouzení stability.

Rozsah diplomové práce: **40- 60 stran A4 včetně příloh**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

1. Vladař P.: Kmitání turbinové lopatky v poli odstředivých sil. Bakalářská práce, ZČU v Plzni, 2018.
2. Dupal J.: Dynamika rotorových systémů. Učební text, ZČU v Plzni, 2012.
3. Dupal J., Zajíček M: Analytical periodic solution and stability assessment of 1 DOF parametric systems with time varying stiffness. Applied Mathematics and Computation, Volume 243 (2014), pp. 138-151.

Vedoucí diplomové práce: **Prof. Dr. Ing. Jan Dupal**
Katedra mechaniky

Datum zadání diplomové práce: **1. října 2019**
Termín odevzdání diplomové práce: **29. května 2020**

Západočeská univerzita v Plzni
L.S.
Fakulta aplikovaných věd

Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
děkanka

Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 1. října 2019

Abstrakt

Tato práce spočívá v modelování turbosoustrojí. Hlavním cílem je sestavit matematický model turbosoustrojí, určit a analyzovat vlastní frekvence a vlastní tvary kmitů turbíny v rotujícím poli odstředivých sil a vyšetřit její stabilitu. Model se skládá ze dvou základních částí. Lopatkových věnců a hřídele (včetně uložení). První část spočívá v modelování hřídele, který je rozdělen na konečné prvky. K vybraným uzlům hřídele se připojí jeden nebo více lopatkových věnců. Tím se vytvoří jeden celek, na němž lze vyšetřovat vlastní frekvence, tvary kmitu a stabilitu. Práce navazuje na bakalářskou práci [3], v níž byla modelována jedna lopatka, která byla prizmatická. V modelu prizmatické lopatky byla zohledněna deplanace a tzv. membránové síly. V pohybových rovnicích lopatky se objevují průřezové parametry. Zatímco u prizmatické lopatky jsou průřezové parametry ve všech průřezech stejné, u lopatky s proměnným průřezem se spojitě mění. Vstup pro modelování lopatky je geometrie vybraných průřezů lopatky. V těchto průřezech je třeba vypočítat průřezové parametry a následně je aproximovat na prostoru mezi průřezy. Tím získáme upravený model pro neprizmatickou lopatku. Dalším krokem je kopírování modelu lopatky v rotačním smyslu za účelem vytvoření lopatkového věnce a připojení lopatek ke hřídeli. V práci bude dále srovnána turbína s lopatkovými věnci a turbína, na níž jsou lopatkové věnce nahrazeny tuhými kotouči s odpovídajícími hmotnostmi a momenty setrvačnosti. Dále budou srovnávány modely hřídele odvozené v rotujícím a stacionárním souřadnicovém systému.

Abstract

This study is focused on turbine modelling. The main goal is to create a turbine mathematical model, to identify and analyse natural frequencies and natural modes of vibration of turbine in a field of centrifugal forces and to judge stability of the system. The model has two basic parts. It is a set of turbine blades and a rotor shaft. The first part is about shaft modelling, where the shaft is divided into finite elements. Then one or more sets of blades is connected to chosen shaft points. That way is made a whole system on which we can analyse natural frequencies, natural modes of vibration and judge stability. This study follows up bachelor thesis [3], where model of prismatic blade was made. Deplanation and membrane forces were considered in this prismatic blade model. In blade equations of motion appear cross section parameters. While they are the same in all cross sections of prismatic blade, they change continuously in non-prismatic blade. The input for blade modelling is geometry of selected blade cross sections. It is necessary to identify cross section parameters in these cross sections and make an approximation of the parameters between those cross sections. That way we get non-prismatic blade model. The next step is to copy (rotate) the blade to create a whole set of blades and then connect the set of blades to the shaft. After turbine model is created, we are going to compare the model to a simplified model where sets of blades are replaced by thin rigid disc with an appropriate mass and moment of inertia. We will also compare shaft model created in rotating and stationary coordinates system.

Obsah

1 Úvod **7**

2 Matematický model hřídele **8**
2.1 Aproximace zobecněných posuvů [5] 8
2.2 Model hřídele v rotujícím souřadnicovém systému [5] 11
2.2.1 Sestavení kinetické energie 12
2.2.2 Derivace kinetické energie a sestavení matic modelu 14
2.2.3 Potenciální energie deformace a matice tuhosti [6] 16
2.2.4 Permutace pořadí 19
2.3 Model hřídele ve stacionárním souřadnicovém systému [1] 20

3 Tuhý tenký kotouč [5] **22**

4 Izotropní ložisko **25**

5 Matematický model lopatky **25**
5.1 Prizmatická lopatka 25
5.2 Lopatka s proměnným průřezem 26
5.2.1 Aproximace obecné funkce [2] 27
5.2.2 Matematický model lopatky [3] 30

6 Spojení lopatky s hřídelem **36**

7 Bandážový prvek [5] **37**

8 Praktická část **40**
8.1 Náhrada lopatkových věnců tuhými kotouči 40
8.1.1 Vlastní frekvence lopatkového věnce a tuhého kotouče 41
8.2 Modelování turbíny 44
8.2.1 Model lopatkových věnců 46
8.2.2 Uchycení turbíny 47
8.2.3 Model s lopatkovými věnci/tuhými kotouči ($\omega = 0\,[rad \cdot s^1]$) 47
8.2.4 Model s lopatkovými věnci/tuhými kotouči ($\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$) 50
8.3 Srovnání modelů hřídele ve stacionárním a nestacionárním souřadnicovém systému 55
8.3.1 Vyhodnocení výsledků ve stacionárním souřadnicovém systému 56
8.3.2 Vyhodnocení výsledků v rotujícím souřadnicovém systému [5] 56
8.3.3 Srovnání výsledků na konkrétním rotoru 56
8.4 Stabilita turbosoustrojí 58

9 Závěr **59**

1 Úvod

Motivací pro vytvoření této práce je zjištění, jak moc jsou ovlivněny vlastní frekvence turbíny náhradou poddajných turbinových lopatek za tuhé kotouče. Lopatky se většinou modelují pomocí 3D konečných prvků, čímž vznikají soustavy s mnoha stupni volnosti. Oproti tomu přístup 1D modelování lopatek, který je využit v této práci, významně snižuje počet stupňů volnosti a tím umožňuje modelovat celé lopatkové věnce a model turbíny tím přibližovat realitě. V praktické části bude porovnán model s lopatkovými věnci a tuhými kotouči a zjištěny rozdíly mezi těmito způsoby modelování. Cíle práce jsou postupně sestavit model hřídele, model turbinové lopatky, spojení obou modelů, zpracování programového vybavení a konečně provedení modální analýzy, vyhodnocení vlastních frekvencí a tvarů kmitu a posouzení stability na konkrétní turbíně. Také bude odvozen model izotropních ložisek a tuhého kotouče. Práce se skládá z částí vytvoření matematického modelu turbosoustrojí a jeho následného zkoumání z hlediska vlastních frekvencí, tvarů kmitu a stability. Je třeba se zamyslet nad nejefektivnějším způsobem modelování. Celý rotor se pohybuje rotačním pohybem okolo osy hřídele konstantní úhlovou rychlostí ω. To znamená, že lopatky, hřídel a tuhé přídavné kotouče mají v čase stejný úhel natočení vzhledem k libovolnému stacionárnímu souřadnicovému systému. Naproti tomu ložiska rotoru se vůči ostatním součástem natáčí o úhel $-\omega t$. Nabízí se dvě možnosti. První je zvolit pro modelování souřadnicový systém rotující společně se všemi rotujícími částmi úhlovou rychlostí ω. Vůči tomuto systému jsou rotující části relativně v klidu a ložiska relativně v pohybu. Druhou možností je volit stacionární souřadnicový systém, v němž jsou naopak ložiska relativně v klidu a rotující části se pohybují úhlovou rychlostí ω. Vzhledem k faktu, že více částí modelu rotuje (vůči podložce, na které je turbína postavena) a navíc mají tyto části složitější matematické modely, je vhodnější volit první možnost. Je tomu tak proto, že dílčí části modelu je třeba transformovat o úhel ωt a čím méně částí se bude transformovat, tím lépe. Zvolen byl tedy systém, vůči kterému jsou v pohybu pouze ložiska. A to ještě pouze v případě, že jsou anizotropní. V případě izotropních ložisek, tzn. majících stejné vlastnosti ve všech směrech kolmých na osu rotoru, není důvod zkoumat jejich aktuální natočení v čase.

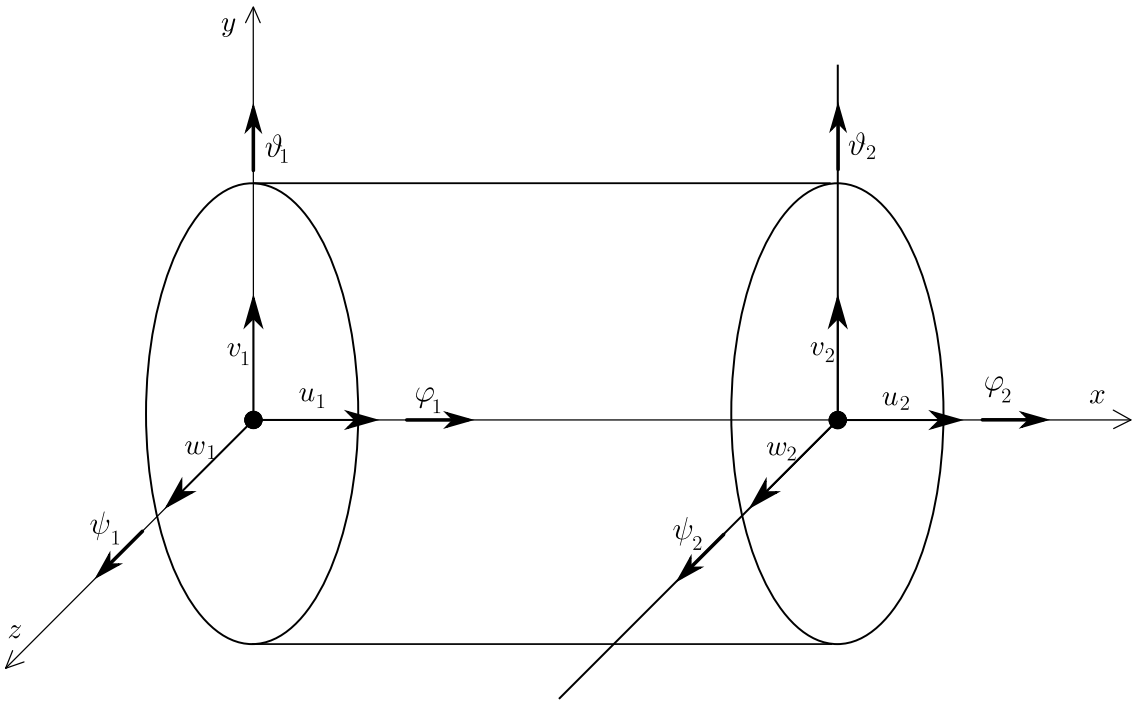
2 Matematický model hřídele

Model celé turbíny obsahuje několik částí spojených do jednoho celku. Jsou jimi hřídel, lopatkový věnec, tuhý kotouč s danou hmotností a momentem setrvačnosti a ložiska. Matematické modely všech těchto částí kromě ložisek jsou odvozeny v rotujícím souřadnicovém systému, rotujícím úhlovou rychlostí ω odpovídající úhlové rychlosti otáčení turbíny. První částí modelování turbíny je vytvoření modelu hřídele. Předpokládá se, že hřídelové prvky turbíny mají kruhový nebo mezikruhový průřez, tím pádem jsou rotačně symetrické. Dalším předpokladem je homogenita a izotropie materiálu jednotlivých částí, ze kterých je hřídel složen (konečné prvky). To znamená stejné vlastnosti materiálu ve všech místech a ve všech směrech. Pro odvození matematického modelu obecného hřídelového prvku s mezikruhovým průřezem jsou využity Lagrangeovy rovnice II. druhu, jenž mají obecný tvar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{pd}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.1}$$

kde n je počet stupňů volnosti, E_k je kinetická energie prvku, E_{pd} potenciální energie deformace prvku, q_i je zobecněná souřadnice a Q_i je zobecněná síla pro *i*-tou zobecněnou souřadnici.

Počet stupňů volnosti jednoho prvku je 12. Jeden prvek má dva uzly na krajích, z nichž každý má 6 stupňů volnosti. Jsou jimi tři natočení a tři posuvy ve směrech souřadnicových os x, y, z. Lagrangeovy rovnice pro jeden hřídelový prvek tudíž poskytnou 12 pohybových rovnic.



Obr. 1. Hřídelový prvek a jeho posuvy

2.1 Aproximace zobecněných posuvů [5]

Na obr. 1 je znázorněn jeden hřídelový prvek, na němž je znázorněno 12 možných zobecněných posuvů, které určují počet stupňů volnosti prvku v trojrozměrném prostoru. Posuvy uzlů u_1 a u_2 ve směru osy x vznikají tahovou deformací. Posuvy v_1 a v_2, resp. w_1 a w_2 ve směru

souřadnicových os y, resp. z vznikají ohybovou deformací, stejně jako natočení ψ_1, ψ_2, ϑ_1, ϑ_2. Natočení φ_1 a φ_2 reprezentují natočení vzniklé kroutivým namáháním. Pro další práci je nutné jistým způsobem aproximovat hodnoty deformací po celé délce hřídelového prvku. Aproximované posuvy ve směrech souřadnicových os jsou značeny pruhem, což značí, že se posuv vztahuje ke střednici hřídele. Vycházíme z faktu, že všechny zobecněné posuvy na krajích jsou známé. Za předpokladu malých posuvů (pohyb v lineární oblasti) lze uvažovat

$$\psi = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \tag{2.2}$$

$$\vartheta = -\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}. \tag{2.3}$$

Ohyb v rovině *'xy'*

Začněme aproximací posuvů $\bar{v}$ a ψ, popisujících ohyb v rovině *xy*. Vhodnou aproximací ohybu je využití kubického polynomu v následujícím tvaru

$$\bar{v}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3, \tag{2.4}$$

kde c_i jsou zatím neznámé konstanty. Maticový zápis je

$$\bar{v}(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{c}_1, \tag{2.5}$$

kde

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Pokud zderivujeme (2.4) za uvažování (2.2) dostaneme

$$\psi(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2. \tag{2.7}$$

Maticově zapsáno

$$\psi(x) = \mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{c}_1, \tag{2.8}$$

kde $'$ značí parciální derivaci funkce podle x. Do rovnice (2.4) dosadíme známe hodnoty posuvů v_1 a v_2 na krajích a do (2.7) hodnoty natočení ψ_1, ψ_2 a dostaneme

$$v_1 = \bar{v}(0) = c_0, \tag{2.9}$$

$$\psi_1 = \psi(0) = c_1, \tag{2.10}$$

$$v_2 = \bar{v}(l) = c_0 + c_1 l + c_2 l^2 + c_3 l^3, \tag{2.11}$$

$$\psi_2 = \psi(l) = c_1 + 2c_2 l + 3c_3 l^2. \tag{2.12}$$

Tyto 4 rovnice lze maticově zapsat

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ \psi_1 \\ v_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_1 \mathbf{c}_1. \tag{2.13}$$

Parametr l je známá délka prvku. Jedinou neznámou zbývá vektor konstant $\mathbf{c}_1$, který lze vyjádřit vynásobením rovnice (2.13) maticí $\mathbf{S}_1^{-1}$, tedy invertovanou maticí $\mathbf{S}_1$. Výsledkem je

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1. \tag{2.14}$$

Pokud tento výraz dosadíme do (2.5), resp. do (2.8) dostaneme funkci průhybu $\bar{v}$, resp. funkci natočení ψ závislé na poloze x

$$\bar{v}(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1, \tag{2.15}$$
$$\psi(x) = \mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1. \tag{2.16}$$

Ohyb v rovině *'xz'*

Podobným způsobem lze odvodit také funkci popisující průhyb $\bar{w}$ a natočení ϑ v rovině *xz*. Opět začneme aproximací průhybu kubickým polynomem

$$\bar{w}(x) = c_4 + c_5 x + c_6 x^2 + c_7 x^3 = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{c}_2, \tag{2.17}$$

kterou lze s přihlédnutím k (2.3) zderivovat podle x

$$\vartheta(x) = -c_5 - 2c_6 x - 3c_7 x^2 = -\mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{c}_2, \tag{2.18}$$

Do rovnic (2.17) dosadíme známé posuvy na krajích prvku w_1 a w_2 a do (2.18) dosadíme známé natočení ϑ_1 a ϑ_2 a tím pádem dostaneme čtyři rovnice

$$w_1 = \bar{w}(0) = c_4, \tag{2.19}$$
$$\vartheta_1 = \vartheta(0) = -c_5, \tag{2.20}$$
$$w_2 = \bar{w}(l) = c_4 + c_5 l + c_6 l^2 + c_7 l^3, \tag{2.21}$$
$$\vartheta_2 = \vartheta(l) = -c_5 - 2c_6 l - 3c_7 l^2. \tag{2.22}$$

Maticově zapsáno

$$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_2\mathbf{c}_2. \tag{2.23}$$

Opět lze vyjádřit vektor konstant $\mathbf{c}_2$ jako

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2. \tag{2.24}$$

a dosadit jej do (2.17) a (2.18). Dostaneme funkce průhybu a natočení závislé na x a krajních hodnotách zobecněných posuvů

$$\bar{w}(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2, \tag{2.25}$$
$$\vartheta(x) = -\mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2. \tag{2.26}$$

Tah

Dalším krokem je provést aproximaci posuvů $\bar{u}$ reprezentujících tah. Tyto deformace lze popsat lineárním polynomem

$$\bar{u}(x) = c_8 + c_9 x = \mathbf{\Psi}\mathbf{c}_3, \tag{2.27}$$

kde

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \qquad a \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} c_8 \\ c_9 \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Do (2.27) dosadíme krajní hodnoty posuvů u_1 a u_2 a dostaneme dvě rovnice

$$u_1 = \bar{u}(0) = c_8, \tag{2.29}$$
$$u_2 = \bar{u}(l) = c_8 + c_9 l. \tag{2.30}$$

Maticově

$$\mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_8 \\ c_9 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_3 \mathbf{c}_3. \tag{2.31}$$

Přenásobením $\mathbf{S}_3^{-1}$ zleva dostaneme vektor konstant

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3, \tag{2.32}$$

který dosadíme do (2.27) a dostaneme funkci popisující posuv $\bar{u}$ od tahového zatížení na celém prvku

$$\bar{u}(x) = \mathbf{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3. \tag{2.33}$$

Krut

Zbývá aproximovat natočení φ podél prvku, vznikající namáháním na krut. Podobně jako u aproximace tahových posuvů $\bar{u}$ budeme aproximovat lineární funkcí ve tvaru

$$\varphi(x) = c_{10} + c_{11} x = \mathbf{\Psi} \mathbf{c}_4, \tag{2.34}$$

Dosazením krajních hodnot dostaneme

$$\varphi_1 = \varphi(0) = c_{10}, \tag{2.35}$$
$$\varphi_2 = \varphi(l) = c_{10} + c_{11} l. \tag{2.36}$$

Maticový zápis těchto dvou rovnic je

$$\mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_3 \mathbf{c}_4. \tag{2.37}$$

Vyjádříme

$$\mathbf{c}_4 = \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 \tag{2.38}$$

a dosadíme do (2.34). Dostaneme výslednou aproximaci pro natočení φ podél hřídelového prvku

$$\varphi(x) = \mathbf{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4. \tag{2.39}$$

2.2 Model hřídele v rotujícím souřadnicovém systému [5]

Jak již bylo řečeno, modelování celé turbíny probíhá v souřadnicovém systému, který rotuje společně s rotorem úhlovou rychlostí ω. Sestavení matematického modelu proběhne na následujících stranách.

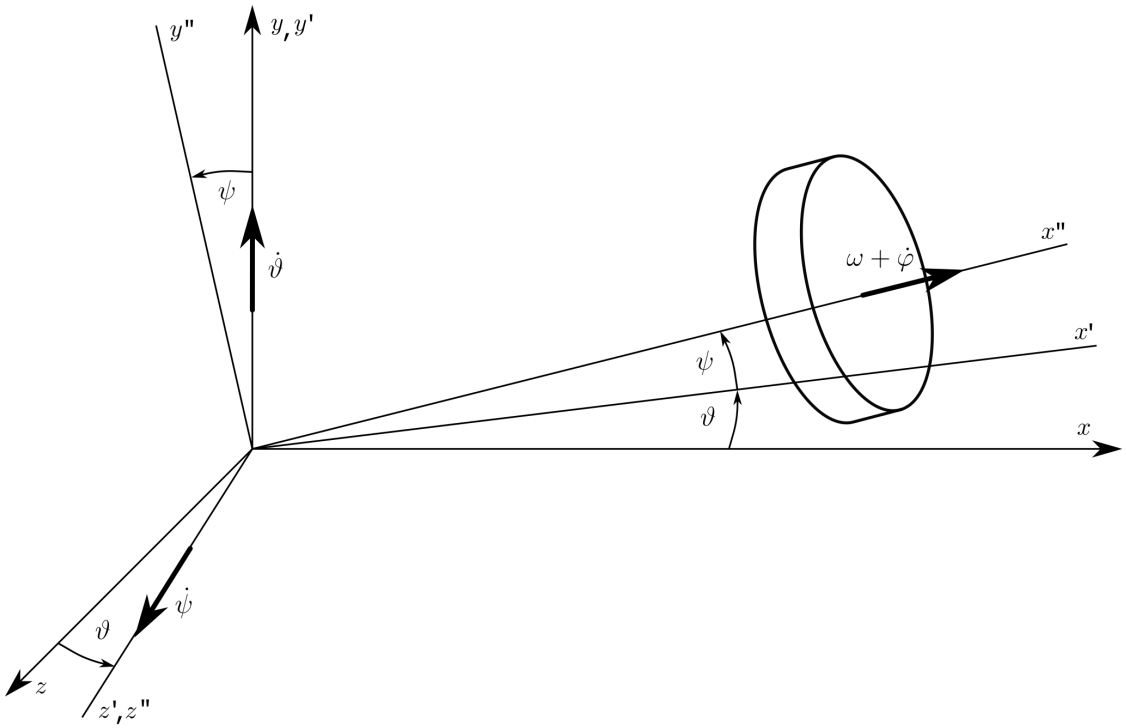
2.2.1 Sestavení kinetické energie

Kinematika, na jejímž základě je odvozena kinetická energie je následující. Pohyb hřídele se skládá z unášivého, posuvného pohybu a sekundárního sférického pohybu. Druhotný sférický pohyb natáčí element po prvotním posuvu $\mathbf{u}$. Nejdříve je prvek natočen o úhel precese ϑ, poté o úhel nutace ψ. Natočení o úhel vlastní rotace φ se přičítá k rotaci úhlovou rychlostí ω. Takto popsaným sférickým pohybem znázorněným na obr. 2 vzniká vektor úhlových rychlostí

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\sin\psi \\ \dot{\vartheta}\cos\psi\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\varphi - \dot{\vartheta}\cos\psi\sin\varphi \end{bmatrix}, \tag{2.40}$$

který lze při uvažování malých úhlů zjednodušit ($\sin\alpha \approx \alpha,\ \cos\alpha \approx 1$)

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\psi \\ \dot{\vartheta} + \dot{\psi}\varphi \\ \dot{\psi} - \dot{\vartheta}\varphi \end{bmatrix}. \tag{2.41}$$



Obr. 2. Natočení diferenciálně malého hřídelového prvku

Vektor posůvů unášivého posuvného pohybu bodu na střednici v souřadnicovém systému xyz je

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix}. \tag{2.42}$$

Jeho absolutní derivací vůči stacionárnímu prostoru získáme vektor rychlosti

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \tag{2.43}$$

kam dosadíme $\boldsymbol{\omega}$ bez členů, které jsou součinem dvou zobecněných posuvů, nebo jejich derivací, kvůli jejich zanedbatelné velikosti. Rozepsáním dostaneme

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{w}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega + \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{u}} + \dot{\vartheta}\bar{w} + \dot{\psi}\bar{v} \\ \dot{\bar{v}} + \dot{\psi}\bar{u} + \omega\bar{w} \\ \dot{\bar{w}} + \omega\bar{v} - \bar{u}\dot{\vartheta} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{v}} - \omega\bar{w} \\ \dot{\bar{w}} + \omega\bar{v} \end{bmatrix}. \tag{2.44}$$

Ve vektoru rychlosti bylo zanedbáno několik členů, protože byly oproti ostatním velmi malé. Kinetická energie jednoho hřídelového prvku je obecně

$$E_k = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{v}^T\mathbf{v}\rho dV + \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\omega}^T d\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \tag{2.45}$$

kde V je objem elementu, ρ je hustota materiálu elementu a

$$d\mathbf{I} = \begin{bmatrix} J_o & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \rho dx = \mathbf{J}\rho dx \tag{2.46}$$

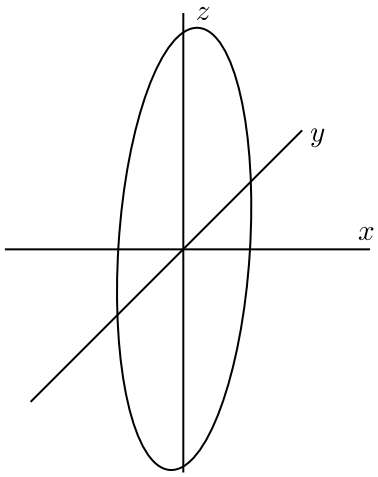
je diferenciální matice momentů setrvačnosti k osám $x,\ y,\ z$. Vypočítáme kvadratické momenty průřezu k jednotlivým osám objevující se ve vztahu (2.46). Obecně může mít hřídel mezikruhový průřez o vnitřním průměru d a vnějším průměru D. Jeho kvadratické momenty k osám x, y, z jsou

$$J_x = J_o = \int_A (y^2 + z^2)dA, \qquad J_y = J = \int_A z^2 dA, \qquad J_z = J = \int_A y^2 dA, \tag{2.47}$$

kde A je plocha průřezu hřídele. Pro pozdější využití jsme označili kvadratický moment $J_x = J_o$ a momenty $J_y = J_z = J$. Při srovnání výše uvedených vztahů a obr. 3 je vidět, že kvadratické momenty k osám y, z jsou stejné. Navíc platí, že polární, osový moment $J_o = 2J$. Mimodiagonální členy v matici **J** jsou deviační momenty k osám. Za předpokladu, že osy y, z symetricky dělí průřez, jsou nulové. Kvadratické momenty lze pro mezikruhové průřezy ekvivalentně vyjádřit

$$J = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}, \tag{2.48}$$

$$J_o = 2J = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}. \tag{2.49}$$



Obr. 3. Zobrazení průřezu hřídelového prvku

Po dosazení (2.46) do (2.45) a úpravách dostane kinetická energie tvar

$$E_k = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(A\mathbf{v}^T\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})dx. \tag{2.50}$$

Kinetická energie je skalární veličina. Po provedení skalárních součinů na pravé straně rovnice (2.50) také vznikne skalární hodnota. Proveďme nyní toto skalární násobení, tedy přepis vztahu (2.50)

$$\begin{aligned} E_k = &\frac{1}{2}\int_0^l \rho[A(\dot{\bar{u}}^2 + \dot{\bar{v}}^2 - 2\omega\dot{\bar{v}}\bar{w} + \omega^2\bar{w}^2 + \dot{\bar{w}}^2 + 2\omega\dot{\bar{w}}\bar{v} + \omega^2\bar{v}^2) + \\ &J_o(\dot{\varphi}^2 + \omega^2 + \cancel{\dot{\vartheta}^2\psi^2} + \cancel{2\dot{\varphi}\omega} + \cancel{2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\psi} + 2\omega\dot{\vartheta}\psi) + J(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2)]dx. \end{aligned} \tag{2.51}$$

V roznásobené podobě kinetické energie hřídelového prvku bylo zkráceno několik členů z toho důvodu, že byly oproti ostatním členům zanedbatelně malé, nebo se jednalo o členy obsahující lineárně zobecněné rychlosti (v Lagrangeových rovnicích se tyto členy po prvním derivování podle rychlosti stávají konstantními a další totální derivace podle času je vynuluje). Dalším krokem k získání matematického modelu je dosazení aproximačních vztahů odvozených výše. Konkrétně po dosazení vztahů (2.15), (2.16), (2.25), (2.26), (2.33) a (2.39) do (2.51) je kinetická energie ve tvaru

$$\begin{aligned} E_k = \frac{1}{2}\int_0^l [&\rho A(\dot{\mathbf{q}}_3^T\mathbf{S}_3^{-T}\boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\psi}\mathbf{S}_3^{-1}\dot{\mathbf{q}}_3 + \dot{\mathbf{q}}_1^T\mathbf{S}_1^{-T}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_1^{-1}\dot{\mathbf{q}}_1 - 2\omega\dot{\mathbf{q}}_1^T\mathbf{S}_1^{-T}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2 + \\ &\omega^2\mathbf{q}_2^T\mathbf{S}_2^{-T}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2 + \dot{\mathbf{q}}_2^T\mathbf{S}_2^{-T}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_2^{-1}\dot{\mathbf{q}}_2 + 2\omega\dot{\mathbf{q}}_2^T\mathbf{S}_2^{-T}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1 + \\ &\omega^2\mathbf{q}_1^T\mathbf{S}_1^{-T}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1) + \\ &\rho J_o(\dot{\mathbf{q}}_4^T\mathbf{S}_3^{-T}\boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\psi}\mathbf{S}_3^{-1}\dot{\mathbf{q}}_4 + \omega^2 - 2\omega\dot{\mathbf{q}}_2^T\mathbf{S}_2^{-T}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1) + \\ &\rho J(\dot{\mathbf{q}}_2^T\mathbf{S}_2^{-T}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_2^{-1}\dot{\mathbf{q}}_2 + \dot{\mathbf{q}}_1^T\mathbf{S}_1^{-T}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_1^{-1}\dot{\mathbf{q}}_1)]dx. \end{aligned} \tag{2.52}$$

2.2.2 Derivace kinetické energie a sestavení matic modelu

Pro sestavení matematického modelu hřídelového prvku je třeba derivavat kinetickou energii podle $\mathbf{q}_i$, $\dot{\mathbf{q}}_i$ a času (viz Lagrangeovy rovnice II. druhu). Než tyto derivace provedeme, zavedeme jisté symboly, které usnadní zápis výsledků

$$\mathbf{I}_{00}^{11} = \int_0^l \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\psi}dx, \tag{2.53}$$

$$\mathbf{I}_{00}^{33} = \int_0^l \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}dx, \tag{2.54}$$

$$\mathbf{I}_{11}^{33} = \int_0^l \boldsymbol{\Phi}'^T\boldsymbol{\Phi}'dx. \tag{2.55}$$

Indexy i, j v matici $\mathbf{I}_{ij}^{kl}$ značí řády derivací aproximačních matic a k, l označují nejvyšší mocniny x, které se v aproximačních maticích objevují. Nyní můžeme přejít k derivování

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1}\right) &= \rho A \mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_1^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_1 - \rho A\omega \mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_2^{-1}\dot{\mathbf{q}}_2 + \rho J \mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_1^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_1,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2}\right) &= \rho A \mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_2^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_2 + \rho A\omega \mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_1^{-1}\dot{\mathbf{q}}_1 - \rho J_o\omega \mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_1^{-1}\dot{\mathbf{q}}_1 + \rho J \mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_2^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_2,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_3}\right) &= \rho A \mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\mathbf{S}_3^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_3,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_4}\right) &= \rho J_0 \mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\mathbf{S}_3^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}_1} &= -\rho A\omega \mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_2^{-1}\dot{\mathbf{q}}_2 - \rho A\omega^2 \mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1 + \rho J_o\omega \mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_2^{-1}\dot{\mathbf{q}}_2,\\
-\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}_2} &= \rho A\omega \mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_1^{-1}\dot{\mathbf{q}}_1 - \rho A\omega^2 \mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2,\\
-\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}_3} &= \mathbf{0},\\
-\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}_4} &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Obecně lze uvažovat, že z Lagrangeových rovnic vznikne pro jeden konečný hřídelový prvek soustava rovnic

$$\widetilde{\mathbf{M}}_e\ddot{\widetilde{\mathbf{q}}}_e + \widetilde{\mathbf{B}}_e\dot{\widetilde{\mathbf{q}}}_e + \omega\widetilde{\mathbf{G}}_e\dot{\widetilde{\mathbf{q}}}_e + \omega^2\widetilde{\mathbf{M}}_{De}\widetilde{\mathbf{q}}_e + \widetilde{\mathbf{K}}_e\widetilde{\mathbf{q}}_e = \widetilde{\mathbf{f}}_e, \tag{2.56}$$

kde $\widetilde{\mathbf{M}}_e$ je matice hmotnosti, $\widetilde{\mathbf{B}}_e$ matice tlumení, $\widetilde{\mathbf{G}}_e$ antisymetrická matice gyroskopických účinků, $\widetilde{\mathbf{K}}_{De} = \omega^2\widetilde{\mathbf{M}}_{De}$ matice cirkulační tuhosti a $\widetilde{\mathbf{f}}_e$ vektor pravých stran elementu. Z členů získaných derivacemi kinetické energie jsme pro matematický model schopni sestavit matice $\widetilde{\mathbf{M}}_e$, $\widetilde{\mathbf{G}}_e$, $\widetilde{\mathbf{K}}_{de}$. V Lagrangeových rovnicích II. druhu figurují ještě členy parciálních derivací potenciální energie deformace podle zobecněných souřadnic. Tyto členy přispějí do celkového matematického modelu maticí tuhosti $\widetilde{\mathbf{K}}_e$. Matice tlumení je uvažována jako lineární kombinace matice hmotnosti a tuhosti. Sestavení potenciální energie a odvození matice tuhosti bude věnována další kapitola. Nyní sestavme příslušné matice vzniklé derivacemi E_k. První z nich je matice hmotnosti, kterou tvoří všechny členy, které stojí před druhými časovými derivacemi $\widetilde{\mathbf{q}}_e$

$$\widetilde{\mathbf{M}}_e = \rho\begin{bmatrix}
A\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_1^{-1} + J\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & A\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_2^{-1} + J\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & A\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & J_o\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\mathbf{S}_3^{-1}
\end{bmatrix}, \tag{2.57}$$

Další je antisymetrická gyroskopická matice, která je tvořena členy, které jsou násobeny úhlovou rychlostí rotoru ω

$$\omega\widetilde{\mathbf{G}}_e = \rho\omega \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \begin{matrix} J_o\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_2^{-1} - \\ 2A\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_2^{-1} \end{matrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \begin{matrix} -J_o\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_1^{-1} + \\ 2A\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_1^{-1} \end{matrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.58}$$

Matice cirkulační tuhosti vzniká z členů, které jsou násobeny kvadrátem úhlové rychlosti otáčení rotoru ω^2

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{De} = \omega^2\widetilde{\mathbf{M}}_{De} = \rho\omega^2 \begin{bmatrix} -A\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -A\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.59}$$

Všechny tři vzniklé matice jsou čtvercové o velikost 12x12.

2.2.3 Potenciální energie deformace a matice tuhosti [6]

V Lagrangeových rovnicích, pomocí nichž sestavujeme matematický model hřídele, vystupuje derivace potenciální energie deformace podle zobecněných souřadnic. Poznamenejme, že tato energie v sobě zahrnuje pouze malé deformace, nikoliv pohyb hřídele jako tuhého tělesa. Jako výchozí bod k sestavení potenciální energie deformace využijeme vztah mezi prvky tenzoru napětí a deformace tělesa, který má obecný tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \tag{2.60}$$

Nenulové složky napětí v hřídelovém prvku jsou σ_x, τ_{xz}, τ_{xy}. Zapišme pouze první tři rovnice vztahu (2.60)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{2.61}$$

Odečtením 2. a 3. rovnice ze vztahu (2.61) získáme rovnost poměrných deformací

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z. \tag{2.62}$$

Zpětným dosazením do 2. rovnice získáme vztah mezi poměrnou deformací ve směru osy x a ostatních dvou os

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \tag{2.63}$$

a následně získáme z 1. rovnice vztah

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \tag{2.64}$$

Z posledních třech rovnic vztahu (2.60) plyne

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= 0, && (2.65)\\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}, && (2.66)\\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, && (2.67) \end{aligned}$$

kde

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.68}$$

je modul pružnosti ve smyku. Zapišme získané složky tenzoru napětí a deformace do vektorů

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}, \tag{2.69}$$

které lze uplatnit v obecném vztahu pro potenciální enegrii deformace prvku

$$E_{pd} = \frac{1}{2}\int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV_e. \tag{2.70}$$

Po provedení skalárního součinu dostaneme vztah pro potenciální energii deformace ve tvaru

$$E_{pd} = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\varepsilon_x^2 + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2) dV_e. \tag{2.71}$$

Posuvy $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, jejichž aproximace byly sestavovány v podkapitole 2.1 jsou posuvy bodů, ležících na střednici hřídele. Nyní zaveďme posuvy obecného bodu L, který má souřadnice $[x, y, z]$. Posuv bodu L má tři složky ve směrech tří souřadnicových os.

$$\begin{aligned} u_L &= \bar{u} - y\psi + z\vartheta, && (2.72)\\ v_L &= \bar{v} - z\varphi, && (2.73)\\ w_L &= \bar{w} + y\varphi. && (2.74) \end{aligned}$$

Vyjádřeme nyná poměrné deformace, které se objevují ve vztahu (2.71). Čárka značí parciální derivaci podle souřadnice x.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_L}{\partial x} = \bar{u}' - y\psi' + z\vartheta', && (2.75)\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_L}{\partial y} + \frac{\partial v_L}{\partial x} = -\psi + \bar{v}' - z\varphi' = -z\varphi', && (2.76)\\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_L}{\partial z} + \frac{\partial w_L}{\partial x} = \vartheta + \bar{w}' + y\varphi' = y\varphi'. && (2.77) \end{aligned}$$

Po dosazení vztahů pro poměrné deformace (2.75), (2.76), (2.77) do (2.71) získáme tvar

$$E_{pd} = \frac{1}{2}\int_{V_e}[E(u'^2 - \cancel{2u'y\psi'} + y^2\psi'^2 + \cancel{2u'z\psi'} - \cancel{2yz\psi'\vartheta'} + z^2\vartheta'^2) + G(z^2\varphi'^2 + y^2\varphi'^2)]dV_e. \quad (2.78)$$

Tři členy v posledním zápisu potenciální energie deformace jsou vyškrtnuty, protože jsou nulové. Důvodem toho je, že první dva vyškrtnuté členy jsou statické momenty plochy a třetí vyškrtnutý člen je deviační moment plochy. Osy y a z jsou osami symetrie průřezu. Deviační i statické momenty k osám symetrie průřezu jsou vždy nulové. Odvozené potenciální energii deformace je ekvivalentní zápis

$$E_{pd} = \frac{1}{2}\int_0^l [E(Au'^2 + J_z\psi'^2 + J_y\vartheta'^2) + GJ_o\varphi'^2]dx, \quad (2.79)$$

kde J_y je kvadratický moment k ose y, J_z je kvadratický moment k ose z a J_o je polární osový moment k ose průřezu. V případě kruhového, nebo mezikruhového průřezu platí $J_y = J_z = J$. Do odvozeného vztahu potenciální energie deformace dosad'me aproximační vztahy (2.33), (2.16), (2.26) pro vyjádření energie v závislosti na krajních hodnotách zobecněných posuvů

$$\begin{aligned} E_{pd} = \frac{1}{2}\int_0^l [E(A\mathbf{q}_3^T\mathbf{S}_3^{-T}\boldsymbol{\Psi}'^T\boldsymbol{\Psi}'\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_3 + J\mathbf{q}_1^T\mathbf{S}_1^{-T}\boldsymbol{\Phi}''^T\boldsymbol{\Phi}''\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1 + \\ J\mathbf{q}_2^T\mathbf{S}_2^{-T}\boldsymbol{\Phi}''^T\boldsymbol{\Phi}''\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2) + GJ_o\mathbf{q}_4^T\mathbf{S}_3^{-T}\boldsymbol{\Psi}'\boldsymbol{\Psi}'\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_4]dx. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Pro vytvoření úplného matematického modelu je třeba potenciální energii deformace zderivovat podle zobecněných vektorů

$$\frac{\partial E_{pd}}{\partial \mathbf{q}_1} = EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{22}^{33}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial E_{pd}}{\partial \mathbf{q}_2} = EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{22}^{33}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2, \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial E_{pd}}{\partial \mathbf{q}_3} = EA\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{11}^{11}\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_3, \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial E_{pd}}{\partial \mathbf{q}_4} = EJ_o\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{11}^{11}\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_4. \quad (2.84)$$

V rovnicích se objevily dvě nové matice zjednodušující zápis, jejichž indexy vznikly ve stejném smyslu jako u kinetické energie.

$$\mathbf{I}_{22}^{33} = \int_0^l \boldsymbol{\Phi}''^T\boldsymbol{\Phi}''dx, \quad (2.85)$$

$$\mathbf{I}_{11}^{11} = \int_0^l \boldsymbol{\psi}'^T\boldsymbol{\psi}'dx. \quad (2.86)$$

Nyní již můžeme sestavit matici tuhosti elementu hřídele

$$\widetilde{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{22}^{33}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{22}^{33}\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & EA\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{11}^{11}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & EJ_o\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{11}^{11}\mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

Všechny matice potřebné pro popis hřídelového prvku v rotujícím souřadnicovém systému jsou sestaveny.

2.2.4 Permutace pořadí

Všechny sestavené matice a vektory matematického modelu jsou označeny tildou. Je tomu tak z důvodu, že je potřeba je permutovat (přehodit pořadí řádků a sloupců). Vektor posuvů

$$\widetilde{\mathbf{q}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \psi_1 \\ v_2 \\ \psi_2 \\ w_1 \\ \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

má nevyhovují pořadí. Pro modelování hřídele je využívána metoda konečných prvků. Konkrétně zde pracujeme s konečnými prvky typu nosník přenášejícími namáhání ohybem ve dvou rovinách, tahem a krutem. Tyto konečné prvky mají dva uzly, ve kterých se vyhodnocují posuvy. Pro použití MKP je vhodnější, aby se vektor $\widetilde{\mathbf{q}}_e$ transformoval následovně. Všechny posuvy příslušící uzlu 1 (posuvy s indexem $_1$) přemístíme na prvních 6 míst. Posuvy příslušící uzlu 2 (posuvy s indexem $_2$) budou umístěny na zbylá místa (7-12). Tuto permutaci lze provést za využití permutační matice

$$\widetilde{\mathbf{q}}_e = \begin{bmatrix} v_1 \\ \psi_1 \\ v_2 \\ \psi_2 \\ w_1 \\ \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{q}_e. \tag{2.89}$$

Když dosadíme vztah (2.89) do pohybové rovnice (2.56) a vynásobíme maticí $\mathbf{P}^T$ celý výraz zleva, vznikne

$$\mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{M}}_e\mathbf{P}\ddot{\mathbf{q}}_e + \omega\mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{G}}_e\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{B}}_e\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{K}}_e\mathbf{P} + \omega^2\mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{M}}_{De}\mathbf{P})\mathbf{q}_e = \mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{f}}_e. \tag{2.90}$$

Z posledního vztahu lze vyčíst, jak permutovat jednotlivé matice. Získáme matice, jejichž řádky a sloupce odpovídají požadovanému pořadí, které je dáno vektorem $\mathbf{q}_e$. Tyto matice mají tvar

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_e &= \mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{M}}_e\mathbf{P}, && (2.91)\\
\mathbf{G}_e &= \mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{G}}_e\mathbf{P}, && (2.92)\\
\mathbf{B}_e &= \mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{B}}_e\mathbf{P}, && (2.93)\\
\mathbf{K}_e &= \mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{K}}_e\mathbf{P}, && (2.94)\\
\mathbf{M}_{De} &= \mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{M}}_{De}\mathbf{P}, && (2.95)\\
\mathbf{f}_e &= \mathbf{P}^T\widetilde{\mathbf{f}}_e. && (2.96)
\end{aligned}$$

Vztahy (2.91)-(2.96) dosadíme do (2.90), získáme tak finální tvar pohybových rovnic elementu, který použijeme pro sestavení pohybových rovnic celého rotoru

$$\mathbf{M}_e\ddot{\mathbf{q}}_e + \omega\mathbf{G}_e\dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{B}_e\dot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{K}_e + \omega^2\mathbf{M}_{De})\mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e. \quad (2.97)$$

Matice popisující hřídelový prvek přispívají do celkových matic, popisujících celý dynamický systém, který mimo hřídelových prvků zahrnuje ještě tuhé kotouče, ložiska a lopatkové věnce. Tento systém je popsán rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \omega^2\mathbf{M}_D)\mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (2.98)$$

Příspěvek od jednotlivých elementů probíhá ve smyslu MKP. To znamená přiřazením kódových čísel každému zobecněnému posuvu a přičtením matic elementu na pozice v celkových maticích určené kódovými čísly.

2.3 Model hřídele ve stacionárním souřadnicovém systému [1]

Kromě modelování hřídele v rotujícím systému zde nyní odvodíme ještě matematický model ve stacionárním systému. Tento matematický model je na rozdíl od modelu v rotujícím souřadnicovém systému používaný běžněji. Modelování hřídele ve stacionárním systému provádíme kvůli praktické části. V ní budou oba způsoby porovnány a popsány jisté rozdíly ve vyhodnocování výsledků. Matice tuhosti v rotujícím a stacionárním systému se od sebe neliší. Tudíž v této kapitole bude sestavena pouze kinetická energie a z ní následně sestaveny matice hmotnosti $\mathbf{M}_e$ a gyroskopických účinků $\mathbf{G}_e$. Kinematika posuvů hřídelového infinitesimálního prvku je popsána dvěma pohyby. Prvním pohybem je unášivý pohyb posuvný a druhým druhotný sférický pohyb, popsaný na obr. 2. Sférický pohyb je popsán stejně jako u rotujícího souřadnicového systému. Unášivý posuvný pohyb je reprezentován vektorem v souřadnicovém systému xyz o třech složkách. Pruh značí, že se jedná o posuv bodu, ležícího na střednici (ose hřídele)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

Pro sestavení kinetické energie je potřeba tento vektor zderivovat podle času a tím získat vektor rychlosti posuvů

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{w}} \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Vektor úhlové rychlosti má stejný tvar, který byl odvozen pro rotující souřadnicový systém, tzn. (2.41). Nyní je popsána kinematika posuvů a jsou známé vektory posuvné a úhlové rychlosti. Můžeme sestavit kinetickou energii stejně jako u modelu v rotujícím prostoru

$$E_k = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{v}^T\mathbf{v}\rho dV + \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\omega}^T d\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}. \tag{2.101}$$

Dosazením vektoru rychlostí $\mathbf{v}$, vektoru úhlových rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ a zanedbáním malých členů dostane kinetická energie tvar

$$E_k = \frac{1}{2}\int_0^l A(\dot{\bar{u}}^2+\dot{\bar{v}}^2+\dot{\bar{w}}^2)\rho dx+\frac{1}{2}\int_0^l [J_o(\dot{\varphi}^2+\omega^2+2\dot{\varphi}\omega+2\omega\dot{\vartheta}\psi)+J\dot{\vartheta}^2+J\dot{\psi}^2]\rho dx. \tag{2.102}$$

Dosazením aproximačních vztahů pro zobecněné posuvy (2.15), (2.16), (2.25), (2.26), (2.33) a (2.39) do (2.102) dostává kinetická energie tvar

$$\begin{aligned} E_k = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A(&\dot{\mathbf{q}}_3^T\mathbf{S}_3^{-T}\boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\psi}\mathbf{S}_3^{-1}\dot{\mathbf{q}}_3 + \dot{\mathbf{q}}_1^T\mathbf{S}_1^{-T}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_1^{-1}\dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2^T\mathbf{S}_2^{-T}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}_2^{-1}\dot{\mathbf{q}}_2) \\ &+ [J_o(\dot{\mathbf{q}}_4^T\mathbf{S}_3^{-T}\boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\psi}\mathbf{S}_3^{-1}\dot{\mathbf{q}}_4 + \omega^2 + 2\omega\boldsymbol{\psi}\mathbf{S}_3^{-1}\dot{\mathbf{q}}_4 - 2\omega\dot{\mathbf{q}}_2^T\mathbf{S}_2^{-T}\boldsymbol{\Phi}'^T\boldsymbol{\Phi}'\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1) \\ &+ J(\dot{\mathbf{q}}_2^T\mathbf{S}_2^{-T}\boldsymbol{\Phi}'^T\boldsymbol{\Phi}'\mathbf{S}_2^{-1}\dot{\mathbf{q}}_2 + \dot{\mathbf{q}}_1^T\mathbf{S}_1^{-T}\boldsymbol{\Phi}'^T\boldsymbol{\Phi}'\mathbf{S}_1^{-1}\dot{\mathbf{q}}_1)]\rho dx. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Pro sestavení matematického modelu hřídelového prvku jsou využity Lagrangeovy rovnice II. druhu. Tím pádem je potřeba derivovat kinetickou energii podle zobecněných souřadnic $\mathbf{q}_i$ a $\dot{\mathbf{q}}_i$ a času. Pro snažší zápis jednotlivých derivací opět použijeme označení pro dílčí integrály $\mathbf{I}_{00}^{11}$, $\mathbf{I}_{00}^{33}$, $\mathbf{I}_{11}^{33}$ definované ve vztazích (2.53), (2.54), (2.55). Potřebné derivace jsou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\mathbf{q}}_1}\right) &= \rho A\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_1^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \rho J\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_1^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_1, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\mathbf{q}}_2}\right) &= \rho A\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_2^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_2 - \rho J_o\omega\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_1^{-1}\dot{\mathbf{q}}_1 + \rho J\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_2^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_2, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\mathbf{q}}_3}\right) &= \rho A\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\mathbf{S}_3^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_3, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\mathbf{q}}_4}\right) &= \rho J_0\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\mathbf{S}_3^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_k}{\partial\mathbf{q}_1} &= \rho J_o\omega\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_2^{-1}\dot{\mathbf{q}}_2, \\ -\frac{\partial E_k}{\partial\mathbf{q}_2} &= \mathbf{0}, \\ -\frac{\partial E_k}{\partial\mathbf{q}_3} &= \mathbf{0}, \\ -\frac{\partial E_k}{\partial\mathbf{q}_4} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Pokud výše vzniklé vztahy srovnáme se vztahy, které vznikly derivací v rotujícím prostoru, lze pozorovat, že nyní žádný z členů neobsahuje kvadrát úhlové rychlosti otáčení ω^2. Důsledkem toho je, že zde na rozdíl od modelu v rotujícím prostoru nevzniká cirkulační matice tuhosti elementu $\mathbf{K}_{de}$. Ze zderivované kinetické energie ve stacionárním prostoru vzniknou pouze matice

hmotnosti

$$\widetilde{\mathbf{M}}_e = \rho \begin{bmatrix} A\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_1^{-1} + \\ J\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_2^{-1} + \\ & J\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & J_o\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \tag{2.104}$$

do které přispěly všechny členy, které jsou násobeny druhými časovými derivacemi zobecněných vektorů $\ddot{\mathbf{q}}_i$ a antisymetrická matice gyroskopických účinků

$$\omega\widetilde{\mathbf{G}}_e = \rho\omega \begin{bmatrix} \mathbf{0} & J_o\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -J_o\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.105}$$

Při srovnání systémových matic matematických modelů v rotujícím a stacionárním souřadnicovém systému zjistíme, že matice hmotnosti jsou totožné. Kdežto matice gyroskopických účinků ve stacionárním systému má méně členů. Sestavené matice $\widetilde{\mathbf{M}}_e$ a $\widetilde{\mathbf{G}}_e$ jsou označené tildou, protože je potřeba je permutovat stejně jako matice odvozené v rotujícím souřadnicovém systému a tím získat požadované pořadí zobecněných souřadnic.

3 Tuhý tenký kotouč [5]

V uzlech hřídele mohou být do soustavy přidány určité prvky. Tyto prvky mají danou hmotnost a moment setrvačnosti. Také můžou nahradit lopatkové kotouče za účelem šetření výpočetní paměti. Matematické modely lopatek, či celých lopatkových kotoučů přidávají do soustavy další stupně volnosti a tím zvětšují rozměry systémových matic. Zatímco přídavný moment setrvačnosti a přídavná hmotnost v uzlu hřídele nepřidávají stupně volnosti a tím pádem nezvyšují nároky na výpočetní paměť. Pouze mění matici hmotnosti, cirkulační matici tuhosti a matici gyroskopických účinků a tím ovlivňují chování systému. Nahrazení lopatkového věnce tuhým kotoučem přináší sice úsporu výpočetní paměti, ale zhoršuje přesnost a kvalitu výsledků. Jedná se o zjednodušení. Sestavme nyní tři potřebné matice z kinetické energie tuhého kotouče. Sestavení proběhne v rotujícím prostoru pomocí Lagrangeových rovnic, přičemž potenciální energie deformace je pro tuhý kotouč pochopitelně nulová. Vektor rychlosti referenčního bodu, středu hmotnosti, je sestaven stejně jako vektor rychlosti bodu na střednici hřídelového prvku v rotujícím prostoru (2.44)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} - \omega w \\ \dot{w} + \omega v \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

a vektor úhlové rychlosti otáčení je po zanedbání malých členů stejný jako vektor úhlové rychlosti hřídelového prvku v rotujícím prostoru

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\psi \\ \dot{\vartheta} + \dot{\psi}\varphi \\ \dot{\psi} - \dot{\vartheta}\varphi \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Kinetická energie pro tenký tuhý kotouč je

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}. \tag{3.3}$$

kde m je hmotnost kotouče a

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_o & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

matice setrvačnosti, kde I je moment setrvačnosti kotouče k ose y_k a z_k a $I_o = 2I$ je moment setrvačnosti kotouče k ose x_k. Se zanedbáním malých členů (členy, kde se násobí tři a více zobecněných posuvů, nebo jejich časových derivací) dostane kinetická energie tvar

$$E_k = \frac{1}{2} m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 - 2\omega\dot{v}w + \omega^2 w^2 + \dot{w}^2 + 2\omega\dot{w}v + \omega^2 v^2) + \frac{1}{2} I_o(\dot{\varphi}^2 + \omega^2 + 2\omega\dot{\vartheta}\psi) + \frac{1}{2} I(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2). \tag{3.5}$$

Členy potřebné pro dosazení do Lagrangeových rovnic II. druhu jsou

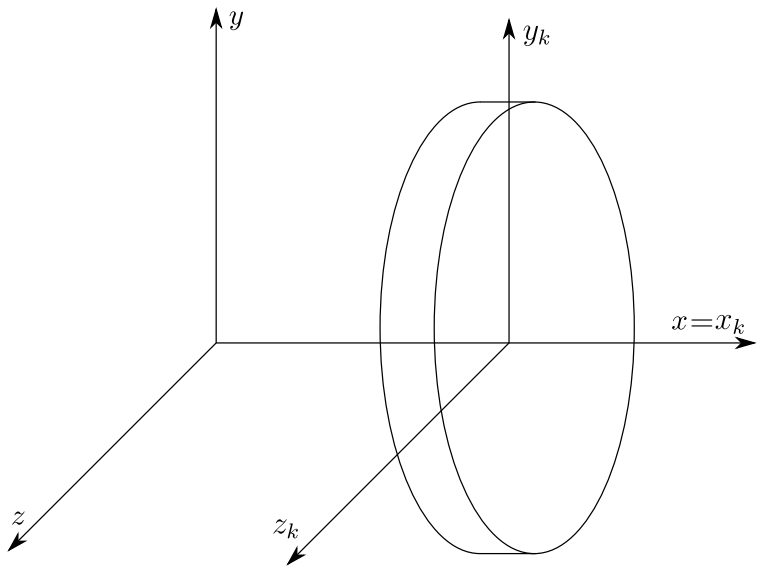
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{u}}\right) &= m\ddot{u}, & -\frac{\partial E_k}{\partial u} &= 0, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{v}}\right) &= m(\ddot{v} - \omega\dot{w}), & -\frac{\partial E_k}{\partial v} &= -m\omega\dot{w} - m\omega^2 v, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{w}}\right) &= m(\ddot{w} + \omega\dot{v}), & -\frac{\partial E_k}{\partial w} &= m\omega\dot{v} - m\omega^2 w, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= I_o\ddot{\varphi}, & -\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} &= 0, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\vartheta}}\right) &= I_o\omega\dot{\psi} + I\ddot{\vartheta}\,, & -\frac{\partial E_k}{\partial \vartheta} &= 0, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}}\right) &= I\ddot{\psi}, & -\frac{\partial E_k}{\partial \psi} &= -I_o\omega\dot{\vartheta}.
\end{aligned}$$

Dosazením odvozených členů do Lagrangeových rovnic II. druhu lze vytvořit matematický model kotouče, který lze zapsat následující maticovou formou

$$\mathbf{M}_k\ddot{\mathbf{q}}_k + \omega\mathbf{G}_k\dot{\mathbf{q}}_k + \omega^2\mathbf{M}_{dk}\mathbf{q}_k = \mathbf{0}, \tag{3.6}$$

kde vektor zobecněných posuvů má členy

$$\mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} u & v & w & \varphi & \vartheta & \psi \end{bmatrix}^T. \tag{3.7}$$



Obr. 4. Tuhý kotouč

$\mathbf{M}_k, \mathbf{G}_k, \mathbf{K}_{dk} = \omega^2 \mathbf{M}_{dk}$ jsou matice hmotnosti, gyroskopický účinků a cirkulační tuhosti tuhého kotouče odvozené v rotujícím souřadnicovém systému kotouče

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

$$\omega\mathbf{G}_k = \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_o & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{K}_{dk} = \omega^2 \mathbf{M}_{dk} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Tuhý kotouč je připojován k uzlu spojujícímu dva hřídelové prvky. Prakticky to znamená, že na příslušné místo celkových matic hmotnosti, gyroskopických účinků a cirkulační tuhosti soustavy přičteme odvozené matice tuhého kotouče ve smyslu MKP. Pro přidání kotouče stačí znát hodnoty m, I a kódová čísla uzlu, k němuž chceme tuhý kotouč připojit.

4 Izotropní ložisko

Nejjednodušším způsobem modelování uložení rotoru je izotropní ložisko. Toto ložisko má stejné vlastnosti ve všech směrech v rovině yz. Lze si jej představit jako dvě pružiny připojené k uzlu hřídele. Jedna pružina je orientovaná ve směru osy y a druhá ve směru osy z. Izotropní ložisko velmi zjednoduší celý model oproti neizotropnímu. Celá turbína je modelována v souřadnicovém systému xyz, který společně s rotorem rotuje úhlovou rychlostí ω. Ložiska se pak vůči tomuto souřadnicovému systému pohybují úhlovou rychlostí $-\omega$. Pokud by jejich vlastnosti ve směrech na sebe kolmých v rovině yz nebyly stejné, při otáčení by se jejich příspěvek ve směru y a z měnil v závislosti na poloze rotoru a tím pádem na čase. To však není náš případ. Jednoduchá izotropní ložiska bez tlumení lze do modelu zahrnout pomocí matice tuhosti

$$K_{IL} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

kde k je tuhost ložisek. Ve skutečnosti mají ložiska v různých směrech různé vlastnosti a obsahují vrstvu oleje, která působí na systém tlumivými účinky. Samotné modelování ložisek je rozsáhlé téma, které se nedá vyřešit jako vedlejší část této práce. Je to však jedna z možností rozšíření modelu.

5 Matematický model lopatky

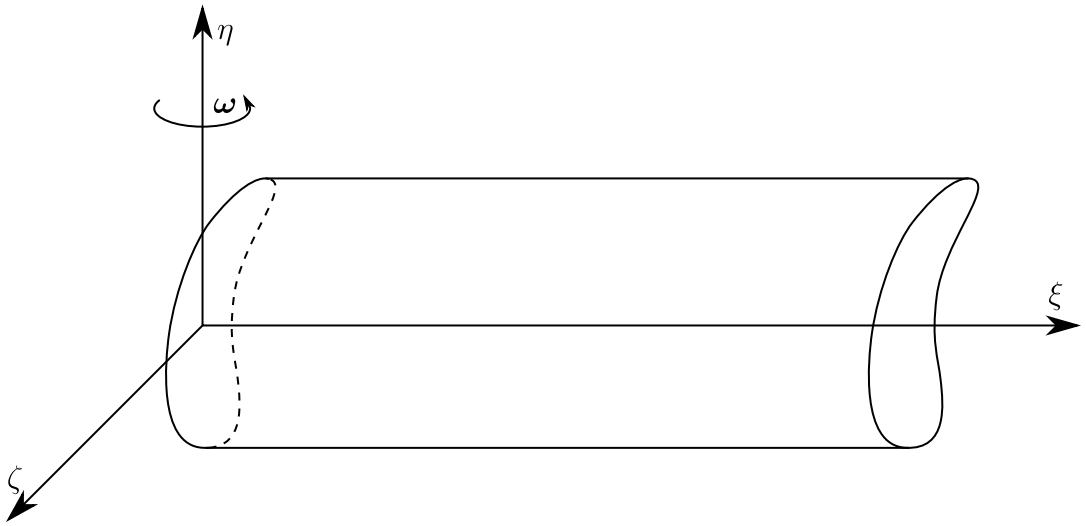
5.1 Prizmatická lopatka

V bakalářské práci [3] je detailně rozebíráno sestavení matematického modelu prizmatické lopatky (neměnný průřez). Vše zde zopakujeme v míře potřebné pro pochopení navazující problematiky.

Lopatka je modelována v souřadnicovém systém $\xi\eta\zeta$. Tento souřadnicový systém rotuje společně s rotorem úhlovou rychlostí otáčení rototu ω. Osa ξ prochází lopatkou v podélném směru. Na ose η leží vektor úhlové rychlosti otáčení $\boldsymbol{\omega}$, který má v souřadnicovém systému $\xi\eta\zeta$ složky

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Osa ζ je orientována tak, aby byl souřadnicový systém pravotočivý .



Obr. 5. Prizmatická lopatka

Lopatka je rozdělena na určitý počet prvků, které jsou pomocí MKP spojeny v jeden systém a tím je vytvořen matematický model celé lopatky. Vytváření matematického modelu probíhá podobně jako u matematického modelu hřídele výše. Prvním krokem je sestavení pohybových rovnic jednoho prvku pomocí Lagrangeových rovnic II. druhu. K tomu je potřeba nejdříve sestavit kinetickou a potenciální energii elementu a následně je zderivovat podle vektorů zobecněných souřadnic a času. U lopatky oproti hřídeli uvažujeme v každém uzlu navíc zobecněné posuvy poměrného prodloužení u' a poměrného zkroucení φ'. Jeden uzel má tím pádem 8 stupňů volnosti. Toto rozšíření oproti standardní reprezentaci pohybu uzlu třemi posuvy a třemi natočeními se zavádí kvůli možnosti deplanace vrstev lopatky. Deplanace je taková deformace lopatky, kdy se body rovinného průřezu v důsledku zkroucení posouvají ve směru kolmém na rovinu průřezu. Tento jev je přímo úměrný poměrnému zkroucení φ'. Deplanací se z rovinného průřezu stane nerovinný, odtud vzniká i název tohoto jevu.

5.2 Lopatka s proměnným průřezem

Navázáním na bakalářskou práci je rozšíření modelu prizmatické lopatky na neprizmatickou. Při uvažování prizmatické lopatky je vstupem pro úlohu zadaný průřez. Přesněji řečeno je zadána množina bodů se souřadnicemi $[\eta, \zeta]$, které vytváří obrys průřezu lopatky. Tento průřez je diskretizován na konečné trojúhelníkové 2D prvky. Poté lze na takto diskretizované oblasti určit průřezové parametry, které jsou součástí pohybových rovnic elementů lopatky. Jedná se například o plochu, kvadratické a deviační momenty k osám procházejícím středem krutu či těžištěm průřezu a jiné. Pro prizmatickou lopatku stačí tyto parametry určit pouze jednou, protože se průřez po délce lopatky nemění.

Pro neprizmatickou lopatku je ovšem zadáno více průřezů lopatky množinou bodů $[\xi, \eta, \zeta]$, kde body se stejnou hodnotou ξ popisují jeden průřez. V každém průřezu se stejným způsobem jako u lopatky prizmatické vypočítají průřezové parametry. V pohybové rovnici, potažmo maticích popisujících prvek, se objevují tyto průřezové parametry uvnitř integrálu přes délku prvku. Hodnoty průřezových parametrů jsou známé pouze v uzlech prvku, ale pro integraci je nutné je znát ve všech bodech prvku. Abychom získali tyto hodnoty, je nutné provést aproximaci pomocí uzlových hodnot.

5.2.1 Aproximace obecné funkce [2]

Sestavení aproximační funkce pro průřezové parametry předchází krátká poznámka. Odvození, které bude následovat využívá souřadnice x a ξ. Tyto souřadnice jsou v práci použité jako osy kartézských souřadnicových systémů, přičemž x je osa procházející podélně středem hřídele a ξ je osa procházející středem lopatky. Toto označení nemá s touto kapitolou nic společného.
Nyní obecně popíšeme aproximaci diskrétních hodnot funkcí $y(x)$, která je kubickým polynomem. Tato aproximace pak bude aplikována na všechny průřezové parametry. Turbinová lopatka nemá žádné hrany, nebo ostré přechody, tudíž se žádný z parametrů nemění skokově. Na funkci $y(x)$ je tudíž kladen požadavek spojitosti a diferencovatelnosti. Ze zadaných obrysových bodů průřezů lopatky a vzdáleností obrysů od patky lopatky získáme diskrétní hodnoty průřezových parametrů. Předpokládejme, že zadané průřezy tvoří uzly lopatky a mezi nimi jsou prvky lopatky. Pokud je počet prvků lopatky n, počet zadaných průřezů je $n + 1$. Vstup pro aproximaci je následující. Ve vzdálenostech od patky lopatky

$$x_i,\ i = 0, 1, ..., n \tag{5.2}$$

známe funkční hodnoty

$$y_i,\ i = 0, 1, ..., n. \tag{5.3}$$

Pomocí těchto hodnot bude sestavena aproximační funkce $y(x)$. Kubická aproximace na jednom elementu bude navíc tvořena pomocí dvou druhých derivací funkčních hodnot. Pro i-tý interval seřadíme tyto hodnoty do vektoru

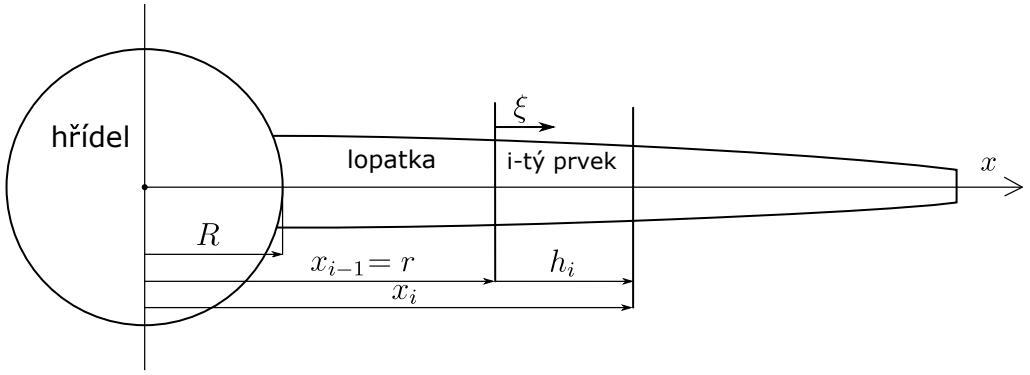
$$\mathbf{q}^{(i)} = \begin{bmatrix} y_{i-1} & y''_{i-1} & y_i & y''_i \end{bmatrix}^T. \tag{5.4}$$

Kubická aproximační funkce má obecně tvar

$$y^{(i)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \tag{5.5}$$

kde x je vzdálenost od začátku prvku. Druhá derivace funkce $y^{(i)}$ podle x má tvar

$$y''^{(i)} = 2a_2 + 6a_3 x. \tag{5.6}$$



Obr. 6. Lopatka s vyznačeným konečným prvkem

Dosazením souřadnic $i-1$-ního a i-tého bodu do rovnic (5.5) a (5.6) získáme soustavu čtyř rovnic maticově zapsanou

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 & x_{i-1}^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_{i-1} \\ 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ y_i \\ y''_i \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Tuto soustavu řešíme pro neznámé konstanty a_0, a_1, a_2, a_3. Získané konstanty dosadíme do původního aproximačního vztahu (5.5) a získáme průběh funkce na i-tém prvku lopatky

$$y^{(i)}(x) = \frac{y_{i-1}}{h_i}(x_i - x) + \frac{y_i}{h_i}(x - x_{i-1}) + \frac{y''_{i-1}}{6h_i}[(x_i - x)^3 - h_i^2(x_i - x)] + \frac{y''_i}{6h_i}[(x - x_{i-1})^3 - h_i^2(x - x_{i-1})] \tag{5.8}$$

Tuto funkci lze zapsat maticově

$$y^{(i)}(x) = \mathbf{N}_i(x)\mathbf{q}^{(i)}, \tag{5.9}$$

kde matice

$$\mathbf{N}_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_i}(x_i - x) \\ \frac{1}{h_i}(x - x_{i-1}) \\ \frac{1}{6h_i}[(x_i - x)^3 - h_i^2(x_i - x)] \\ \frac{1}{6h_i}[(x - x_{i-1})^3 - h_i^2(x - x_{i-1})] \end{bmatrix}^T. \tag{5.10}$$

V získané aproximaci se vyskytují druhé derivace y'', které nejsou zatím známé. Známé jsou pouze funkční hodnoty (5.3). Pro získání druhých derivací využijeme požadavku na hladký průběh funkce mezi jednotlivými intervaly. Tento požadavek vyjadřuje diferencovatelnost v bodě, což lze matematicky zapsat

$$y'^{(i)}(x_i) = y'^{(i+1)}(x_i), \tag{5.11}$$

neboli

$$\mathbf{N}'_i(x_i)\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{N}'_{i+1}(x_i)\mathbf{q}^{(i+1)} \quad i = 1, 2, ..., n-1. \tag{5.12}$$

Jinými slovy tato podmínka zajišťuje diferencovatelnost funkcí po celé délce lopatky. Tato podmínka poskytla $n-1$ rovnic. Úloha má ale $n+1$ neznámých. Pro řešitelnost je třeba dodat další 2 rovnice. Ty získáme tak, že zvolíme křivost na krajích

$$y''_0 = y''_n = 0. \tag{5.13}$$

Rovnice (5.12) zapíšeme maticově

$$\mathbf{A}\mathbf{y}'' = \mathbf{b}, \tag{5.14}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \dots & 0 \\ 0 & h_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{bmatrix}, \tag{5.15}$$

$$\mathbf{y}'' = \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ \vdots \\ y_{n-1}'' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6\left(\frac{y_2-y_1}{h_2} - \frac{y_1-y_0}{h_1}\right) \\ 6\left(\frac{y_3-y_2}{h_3} - \frac{y_2-y_1}{h_2}\right) \\ \vdots \\ 6\left(\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-1}}\right) \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

Po vyřešení této soustavy získáme hodnoty druhých derivací $y_0'', y_1'', ..., y_n''$. Po dosazení těchto hodnot do rovnice (5.8) již můžeme vypočítat koeficienty pro definitivní popis aproximační kubické funkce pro všechny intervaly. Dosazením $x = r + \xi$ (r je počátek *i*-tého konečného prvku) do výše zmíněné rovnice navíc získáme popis aproximační funkce závislý na hodnotě ξ, která je podle obr. 6 lokální souřadnicí konečného prvku lopatky. Rovnice (5.8) dostane tvar

$$\begin{aligned} y^{(i)}(\xi) = {} & \frac{y_{i-1}}{h_i}(x_i - r - \xi) + \frac{y_i}{h_i}(r + \xi - x_{i-1}) + \frac{y_{i-1}''}{6h_i}[(x_i - r - \xi)^3 - h_i^2(x_i - r - \xi)] \\ & + \frac{y_i''}{6h_i}[(r + \xi - x_{i-1})^3 - h_i^2(r + \xi - x_{i-1})]. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Z posledního vztahu po nutných úpravách vyjádříme všechny členy násobící mocniny ξ^0, ξ^1, ξ^2, ξ^3. Tím získáme přímo koeficienty pro aproximační funkci.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{y_i}{h_i}(r - x_{i-1}) - \frac{y_{i-1}}{h_i}(r - x_i) + \frac{y_{i-1}''}{6h_i}[h_i^2(r - x_i) - (r - x_i)^3] \\ &\quad - \frac{y_i''}{6h_i}[h_i^2(r - x_{i-1}) - (r - x_{i-1})^3], \\ a_1 &= \frac{y_i}{h_i} - \frac{y_{i-1}}{h_i} + \frac{y_{i-1}''}{6h_i}[h_i^2 - 3(x_i - r)^2] - \frac{y_i''}{6h_i}[h_i^2 - 3(r - x_{i-1})^2], \\ a_2 &= \frac{y_{i-1}''}{2h_i}(x_i - r) - \frac{y_i''}{2h_i}(x_{i-1} - r), \\ a_3 &= \frac{y_i''}{6h_i}(y_i'' - y_{i-1}''). \end{aligned}$$

Koeficienty dosadíme do (5.5) se změnou, že funkce bude závislá na ξ

$$y^{(i)}(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \tag{5.18}$$

Tímto je aproximace teoreticky provedena a lze ji aplikovat na všechny průřezové parametry a tedy znát jejich hodnotu nejen v uzlech, ale po celé délce lopatky.

5.2.2 Matematický model lopatky [3]

Matematický model reálné lopatky s proměnným průřezem je odvozen stejně jako u prizmatické lopatky. Přes sestavení kinetické, potenciální energie a Lagrangeovy rovnice II. druhu získáme soustavu rovnic popisující jeden prvek lopatky

$$\widetilde{\mathbf{M}}_e\ddot{\widetilde{\mathbf{q}}}_e + \omega\widetilde{\mathbf{G}}_e\dot{\widetilde{\mathbf{q}}}_e + (\widetilde{\mathbf{K}}_e + \omega^2\widetilde{\mathbf{M}}_{De})\widetilde{\mathbf{q}}_e = \widetilde{\mathbf{f}}_{De} + \widetilde{\mathbf{f}}_M. \tag{5.19}$$

Jednotlivé členy vystupující ve vztahu (5.19) jsou

$\widetilde{\mathbf{M}}_e$ ..... matice hmotnosti elementu,
$\widetilde{\mathbf{G}}_e$ ..... matice gyroskopických účinků elementu,
$\widetilde{\mathbf{K}}_e$ ..... matice tuhosti elementu,
$\widetilde{\mathbf{K}}_{De} = \omega^2\widetilde{\mathbf{M}}_{De}$ ..... cirkulační matice elementu,
$\widetilde{\mathbf{f}}_{De}$ ..... vektor cirkulačních sil elementu,
$\widetilde{\mathbf{f}}_M$ ..... vektor membránových sil elementu.

Index e značí, že se jedná o matice popisující element. Symbol ~ označuje, že matice a vektory mají nevyhovující pořadí a musí být provedena permutace, aby bylo dosaženo vyhovujícího řazení. Prvek lopatky má dva uzly, z nichž každému přísluší 8 zobecněných posuvů. Posuvy obou uzlů jsou však ve vektoru posuvů $\widetilde{q}_e$ promíchány do sebe. Permutací docílíme toho, že všechny posuvy jednoho uzlu budou na prvních osmi místech a posuvy druhého uzlu na 9. až 16. místě. Tím se stane model přehlednějším a snáze se budou elementy spojovat pomocí metody konečných prvků.

Vektor zobecněných posuvů elementu lopatky před permutací je

$$\widetilde{\mathbf{q}}_e = \begin{bmatrix}\mathbf{q}_1\\ \mathbf{q}_2\\ \mathbf{q}_3\\ \mathbf{q}_4\end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix}v(0)\\ \psi(0)\\ v(l)\\ \psi(l)\end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix}w(0)\\ \vartheta(0)\\ w(l)\\ \vartheta(l)\end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix}u(0)\\ u'(0)\\ u(l)\\ u'(l)\end{bmatrix}, \mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix}\varphi(0)\\ \varphi'(0)\\ \varphi(l)\\ \varphi'(l)\end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

přičemž l je délka elementu, u, v, w jsou posuvy ve směrech os ξ, η, ζ. Úhly φ, ϑ, ψ jsou natočení, jejichž vektory leží na osách ξ, η, ζ.

Pro průřezové parametry figurující v systémových maticích, pro které byla vytvořena kubická aproximace v podkap. 5.2.1, je použito následující značení. Každému parametru přísluší pro každý element čtyři konstanty. Souřadnice ξ zde nereprezentuje souřadnicovou osu, ale kótuje pozici v daném prvku od jeho počátku (viz obr 6). Průřezové parametry obsažené v matematic-

kém modelu lopatkového prvku jsou

Plocha $$A(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i1}$$

Statický moment k ose η $$S_\eta(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i2}$$

Statický moment k ose η^* $$S^*_\eta(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i3}$$

Statický moment k ose ζ^* $$S^*_\zeta(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i4}$$

Kvadratický moment k ose η $$I_\eta(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i5}$$

Kvadratický moment k ose ζ $$I_\zeta(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i6}$$

Kvadratický moment k ose $\bar{\eta}$ $$I_{\bar{\eta}}(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i7}$$

Kvadratický moment k ose $\bar{\zeta}$ $$I_{\bar{\zeta}}(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i8}$$

Deplanační kvadratický moment $$I_\varphi(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i9}$$

Modul odporu v krutu $$I_K(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i10}$$

Deviační moment k osám $\bar{\eta}, \bar{\zeta}$ $$D_{\bar{\eta}\bar{\zeta}}(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i11}$$

Deviační moment k osám η^*, ζ $$D_{\eta^*\zeta}(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i12}$$

Kvadratický moment k ose η^* $$I_{\eta^*}(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i13}$$

Kvadratický moment k ose ζ^* $$I_{\zeta^*}(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i14}$$

Statický moment k ose ζ^* krát ζ_T (vzdálenost os η a $\bar{\eta}$) $$S_{\zeta^*\zeta_T}(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i15}$$

Statický moment k ose η^* krát ζ_T $$S_{\eta^*\zeta_T}(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i16}$$

η^* - vzdálenost os ζ a ζ^* $$A(\eta^{*2} - 2\eta^*\eta_T + \zeta^*\zeta_T)(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \xi^i a_{i17}$$

Osy η^* a ζ^* jsou rovnoběžné s osami $\eta,\ \zeta$ procházející středem krutu. Osy $\bar{\eta}$ a $\bar{\zeta}$ jsou rovnoběžné s osami $\eta,\ \zeta$ procházející těžištěm. Matice a vektor popisující element lopatky v rovnici (5.19) mají při uvážení kubické aproximace průřezových charakteristik tvar

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{De} = \rho\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}\mathbf{S}^{-T} \sum a_{i2}\mathbf{i}_0^i \\ \mathbf{S}^{-T} \sum a_{i1}(r\mathbf{i}_0^i + \mathbf{i}_0^{i+1}) \\ \mathbf{S}^{-T} \sum a_{i12}\mathbf{i}_0^i \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}_e = \rho \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i1}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1}+ \\ \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i8}\mathbf{I}_{11}^i\mathbf{S}^{-1} & \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i11}\mathbf{I}_{11}^i\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & -\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i3}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i11}\mathbf{I}_{11}^i\mathbf{S}^{-1} & \mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i1}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}+ \\ \mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i7}\mathbf{I}_{11}^i\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i4}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i1}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i3}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1} & \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i4}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i9}\mathbf{I}_{11}^i\mathbf{S}^{-1}+ \\ & & & \mathbf{S}^{-T}\sum(a_{i5}+a_{i6}+a_{i17})\mathbf{I}_{00}\mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} E\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i8}\mathbf{I}_{22}^i\mathbf{S}^{-1} & E\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i11}\mathbf{I}_{22}^i\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ E\mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i11}\mathbf{I}_{22}^i\mathbf{S}^{-1} & E\mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i7}\mathbf{I}_{22}^i\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i1}\mathbf{I}_{11}^i\mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i9}\mathbf{I}_{22}^i\mathbf{S}^{-1}+ \\ & & & G\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i10}\mathbf{I}_{11}^i\mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\omega\widetilde{\mathbf{G}}_e = 2\rho\omega \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i8}\mathbf{I}_{10}^i\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i1}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1} & -\mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i11}\mathbf{I}_{10}^i\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i1}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i3}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i8}\mathbf{I}_{01}^i\mathbf{S}^{-1} & \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i11}\mathbf{I}_{01}^i\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & -\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i3}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{De} = \omega^2\widetilde{\mathbf{M}}_{De} = \rho\omega^2 \begin{bmatrix} -\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i8}\mathbf{I}_{11}^i\mathbf{S}^{-1} & -\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i15}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i3}(r\mathbf{I}_{10}^i + \mathbf{I}_{10}^{i+1})\mathbf{S}^{-1} \\ -\mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i15}\mathbf{I}_{11}^i\mathbf{S}^{-1} & \begin{array}{c}-\mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i1}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}- \\ -\mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i16}\mathbf{I}_{11}^i\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}\end{array} & \mathbf{0} & -\mathbf{P}\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i4}(r\mathbf{I}_{10}^i + \mathbf{I}_{10}^{i+1} - \mathbf{I}_{00}^i)\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i1}\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^{-T}\sum a_{i3}(r\mathbf{I}_{01}^i + \mathbf{I}_{01}^{i+1})\mathbf{S}^{-1} & \begin{array}{c}-\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i4}(r\mathbf{I}_{01}^i + \\ \mathbf{I}_{01}^{i+1} - \mathbf{I}_{00}^i)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}\end{array} & \mathbf{0} & \begin{array}{c}-\mathbf{S}^{-T}\sum a_{i9}\mathbf{I}_{11}^i\mathbf{S}^{-1}+ \\ \mathbf{S}^{-T}\sum(a_{i5} - a_{i6} - a_{i17})\mathbf{I}_{00}^i\mathbf{S}^{-1}\end{array} \end{bmatrix}.$$

Členy $\mathbf{I}_{ab}$, $\mathbf{I}^c_{ab}$ jsou matice řádu 4 a $\mathbf{i}^c_a$ je vektor rozměru 4×1. Tyto matice byly zavedeny pro zpřehlednění a znamenají

$$\mathbf{I}_{ab} = \int_0^l \mathbf{\Phi}^{(a)T}(\xi)\mathbf{\Phi}^{(b)}(\xi)d\xi, \tag{5.21}$$

$$\mathbf{I}^c_{ab} = \int_0^l \xi^c \mathbf{\Phi}^{(a)T}(\xi)\mathbf{\Phi}^{(b)}(\xi)d\xi, \tag{5.22}$$

$$\mathbf{i}^c_a = \int_0^l \xi^c \mathbf{\Phi}^{(a)T}(\xi)d\xi. \tag{5.23}$$

Posledním krokem je výše zmíněná permutace matic, kterou se zobecněné posuvy přiřadí k levému a pravému uzlu. Permutační matice se získá následovně

$$\widetilde{\mathbf{q}}_e = \begin{bmatrix} v(0) \\ \psi(0) \\ v(l) \\ \psi(l) \\ w(0) \\ \vartheta(0) \\ w(l) \\ \vartheta(l) \\ u(0) \\ u'(0) \\ u(l) \\ u'(l) \\ \varphi(0) \\ \varphi'(0) \\ \varphi(l) \\ \varphi'(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \\ \varphi(0) \\ \vartheta(0) \\ \psi(0) \\ u'(0) \\ \varphi'(0) \\ u(l) \\ v(l) \\ w(l) \\ \varphi(l) \\ \vartheta(l) \\ \psi(l) \\ u'(l) \\ \varphi'(l) \end{bmatrix} = \mathbf{J}\mathbf{q}_e. \tag{5.24}$$

Vztah (5.24) dosadíme do pohybové rovnice (5.19) a vynásobíme obě strany výrazu transponovanou permutační maticí $\mathbf{J}^T$ zleva. Tím vzniknou permutované matice

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= \mathbf{J}^T\widetilde{\mathbf{M}}_e\mathbf{J}, \\ \mathbf{G}_e &= \mathbf{J}^T\widetilde{\mathbf{G}}_e\mathbf{J}, \\ \mathbf{K}_e &= \mathbf{J}^T\widetilde{\mathbf{K}}_e\mathbf{J}, \\ \mathbf{M}_{De} &= \mathbf{J}^T\widetilde{\mathbf{M}}_{De}\mathbf{J}, \\ \mathbf{M}^M_e &= \mathbf{J}^T\widetilde{\mathbf{M}}^M_e\mathbf{J}, \\ \mathbf{f}_{De} &= \mathbf{J}^T\widetilde{\mathbf{f}}_{De}, \end{aligned}$$

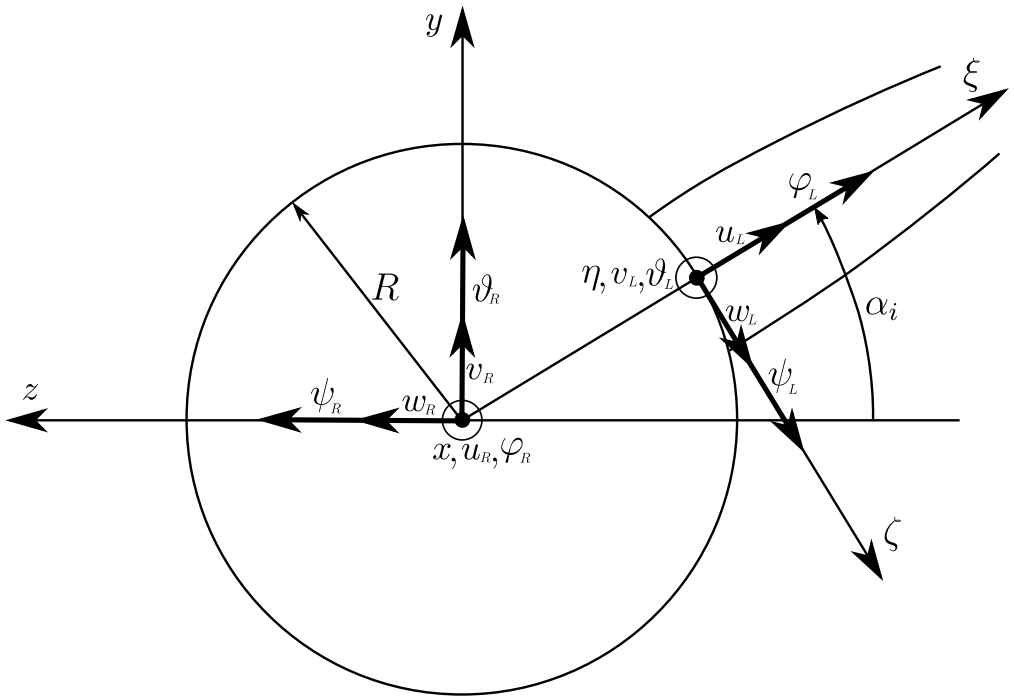
kde $\widetilde{\mathbf{M}}^M_e$ je matice membránových sil, která vznikla převedením vektoru membránových sil $\widetilde{\mathbf{f}}_M$ na levou stranu pohybových rovnic (odvození matice membránových sil je blíže popsáno v [3]). Permutovaný systém pohybových rovnic je

$$\mathbf{M}_e\ddot{\mathbf{q}}_e + \omega\mathbf{G}_e\dot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{K}_e + \omega^2\mathbf{M}_{De} + \mathbf{M}^M_e)\mathbf{q}_e = \mathbf{f}_{De}. \tag{5.25}$$

Pak lze již snadno řadit elementy lopatky za sebe pomocí MKP a tím vytvořit matematický model celé lopatky.

6 Spojení lopatky s hřídelem

Pro vytvoření matematického modelu celé turbíny je potřeba spojit modely hřídele a lopatky dohromady v jeden celek. Toto spojení bude provedeno v uzlu hřídele. Při modelování turbíny je třeba při dělení hřídele na konečné prvky umístit jeden z uzlů hřídele na místo, kde je připojen lopatkový kotouč. S uzlem hřídele je spojeno šest zobecněných posuvů, přičemž tři z nich jsou posuvy ve směrech souřadnicových os x, y, z a tři z nich jsou natočení okolo týchž os. Zatímco s uzlem lopatky je spojeno osm zobecněných posuvů. Jsou jimi tři posuvy ve směrech os ξ, η, ζ, tři natočení okolo týchž os a navíc poměrné prodloužení u' a poměrné zkroucení φ'. V místě spojení lopatky s hřídelem dochází k vytvoření nového společného uzlu, který má osm stupňů volnosti. Příspěvky ke zobecněným posuvům uzlu od lopatky budou transformovány tak, aby se směry třech posuvů a třech natočení shodovaly se směry posuvů hřídele. Čili prvních šest zobecněných posuvů prvního konečného prvku připojené lopatky bude transformováno do souřadnicového systému hřídele. Problém spojení hřídele a lopatky je naznačen na obr. 7



Obr. 7. Spojení prvního lopatkového uzlu *i*-té lopatky a hřídelového uzlu

Důležitý parametr, který od sebe odlišuje lopatky, které jsou připojeny ve stejném uzlu hřídele v rámci jednoho lopatkového věnce, je úhel natočení *i*-té lopatky α_i. Tento úhel je závislý na celkovém počtu lopatek věnce m

$$\alpha_i = \frac{2\pi}{m} i, \tag{6.1}$$

přičemž se předpokládá, že lopatky jsou okolo hřídele rozloženy rovnoměrně z hlediska úhlů, které spolu jednotlivé lopatky svírají. Transformace šesti zobecněných posuvů pro *i*-tou lopatku

vychází z následujících vztahů, které lze vypozorovat z obr. 7. R ve vztazích je poloměr rotoru v místě připojení lopatkového věnce.

$$\begin{aligned} u_L &= v_R \sin\alpha_i - w_R \cos\alpha_i, \\ v_L &= u_R - \vartheta_R R\cos\alpha_i - \psi_R R \sin\alpha_i, \\ w_L &= -v_R\cos\alpha_i - w_R\sin\alpha_i - \varphi_R R, \\ \varphi_L &= \vartheta_R \sin\alpha_i - \psi_R\cos\alpha_i, \\ \vartheta_L &= \varphi_R, \\ \psi_L &= -\vartheta_R\cos\alpha_i - \psi_R\sin\alpha_i. \end{aligned}$$

Celkově lze těchto šest transformačních rovnic zapsat maticově a tím získat transformační submatici $\widetilde{\mathbf{T}}_i$

$$\begin{bmatrix} u_L \\ v_L \\ w_L \\ \varphi_L \\ \vartheta_L \\ \psi_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \sin\alpha_i & -\cos\alpha_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -R\cos\alpha_i & -R\sin\alpha_i \\ 0 & -\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_i & -\cos\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \end{bmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{T}}_i} \begin{bmatrix} u_R \\ v_R \\ w_R \\ \varphi_R \\ \vartheta_R \\ \psi_R \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Pro sestavení modelu celé turbíny je potřeba zařadit jednotlivé systémové matice elementů lopatek a hřídele do celkových systémových matic. Matice popisující dynamické chování jednoho lopatkového prvku jsou rozměru (16,16). Transformační matice $\widetilde{\mathbf{T}}_i$, vzniklá transformací zobecněných souřadnic (6.2), je rozměru (6,6). Transformační matice pro celý element musí být rozměru (16,16)

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{T}}_i & \mathbf{0}_{6,10} \\ \mathbf{0}_{10,6} & \mathbf{E}_{10,10} \end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

kde $\mathbf{E}_{10,10}$ je identická matice řádu 10. Transformační matice v podobě (6.3) mění pouze prvních šest prvků a ostatní nechává nezměněné. Stejně jako všechny ostatní i první prvek lopatky je permutován maticí $\mathbf{J}$ ze vztahu (5.24). Celková podoba matice prvního prvku $\mathbf{X}_e$, která je přidána ve smyslu MKP do celkové matice $\mathbf{X}$ je

$$\mathbf{X}_e = \mathbf{T}_i^T \mathbf{J}^T \widetilde{\mathbf{X}_e} \mathbf{J} \mathbf{T}_i, \tag{6.4}$$

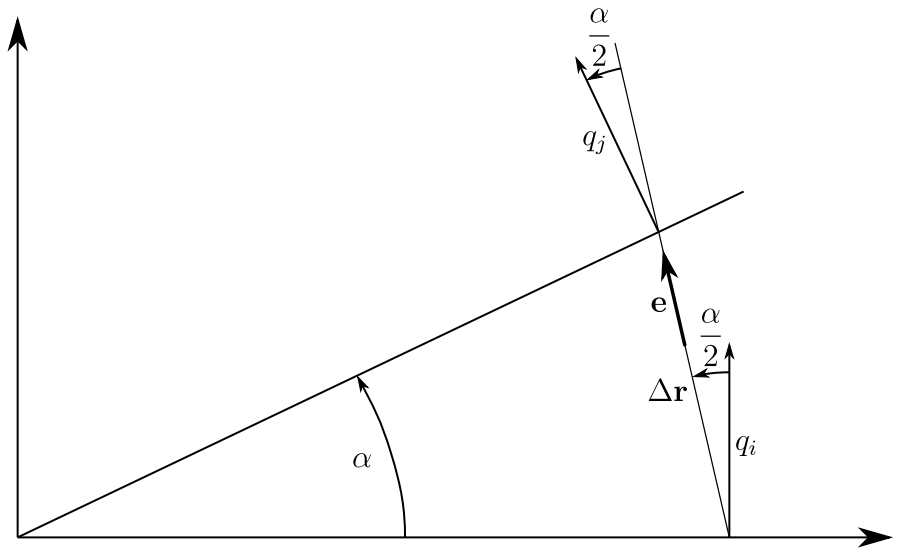
kde $\mathbf{X} = \mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}, \mathbf{G}, \mathbf{K}_d, \mathbf{M}^M$ a vektor cirkulačních sil $\mathbf{f}_{De}$ je

$$\mathbf{f}_{De} = \mathbf{T}^T \mathbf{J}^T \mathbf{f}_{De}. \tag{6.5}$$

7 Bandážový prvek [5]

V některých lopatkových věncích můžou být mezi jednotlivé lopatky přidány bandáže. Jedná se o obloukové spoje mezi lopatkami, které postupně dokola spojí všechny lopatky věnce. Toto spojení může být v libovolné vzdálenosti od rotoru. Bylo by možné vytvořit $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}$ model těchto spojů, ale vystačíme si pouze s nahrazením dvěma pružinami. Jedna působí mezi uzly dvou sousedních lopatek ve směru axiálním z hlediska orientace hřídele. Druhá působí ve směru tangenciálním. Odvozena zde bude matice tuhosti bandáže reprezentované dvěma pružinami,

která nebude mít za důsledek zvětšení celkového modelu, ale pouze se přičte na určená místa celkové matice tuhosti soustavy. Tato místa jsou dána umístěním bandáže mezi konkrétní lopatky, resp. jejich uzly, resp. přímo zobecněné posuvy těchto uzlů.



Obr. 8. Výchozí schéma pro výpočet tangenciální tuhosti bandáže

Pro zahrnutí axiální tuhosti bandáže do modelu je nutné pouze správně určit, ke kterým zobecněným posuvům se váže. Jedná se o posuv v dvou sousedních lopatek v uzlech, které bandáž spojuje. Posuvy by na obr. 8 mířily směrem kolmo na nákresnu. Po určení správných kódových čísel stačí pouze na příslušné místo celkové matice tuhosti umístit matici axiální tuhosti

$$\mathbf{K}_{ax} = k_{ax} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

kde k_{ax} je axiální tuhost bandáže z hlediska hřídele.

Výpočet tangenciální matice je složitější, protože posuvy v uzlech sousedních lopatek q_i a q_j neleží na jedné přímce, ale jsou vůči sobě natočené o úhel α.
Zaveďme vektory

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ q_i \end{bmatrix}, \tag{7.2}$$

$$\mathbf{r}_j = \begin{bmatrix} -q_j \sin\alpha \\ q_j \cos\alpha \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

A jejich odečtením vytvořme vektor

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, \tag{7.4}$$

Promítnutím vektoru $\Delta\mathbf{r}$ do směru spojnice dvou uzlů, v němž působí tangenciální tuhost k_{tan} získáme relativní posuv v tomto směru. Promítnutí docílíme skalárním součinem s jednotkovým vektorem v požadovaném směru (viz obr. 8)

$$\delta = \Delta\mathbf{r}^T\mathbf{e}, \tag{7.5}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}. \tag{7.6}$$

Výsledkem skalárního součinu (7.5) je

$$\delta = q_j \sin\alpha \sin\frac{\alpha}{2} + q_j \cos\alpha \cos\frac{\alpha}{2} - q_i \cos\frac{\alpha}{2}, \tag{7.7}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} -\cos\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}, \tag{7.8}$$

$$\delta = \mathbf{e}_2^T \mathbf{q}. \tag{7.9}$$

Nyní známe relativní posuv mezi uzly sousedních lopatek ve směru jejich spojnice. Pro sestavení matice tangenciální tuhosti vyjdeme z potenciální energie deformace, která bude následně zderivována. Potenciální energie má tvar

$$E_p = \frac{1}{2} k_{tan} \delta^2 = \frac{1}{2} k_{tan} \mathbf{q}^T \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \mathbf{q}. \tag{7.10}$$

Zderivováním potenciální energie podle $\mathbf{q}$ získáme

$$\frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} = k_{tan} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \mathbf{q}. \tag{7.11}$$

Touto derivací jsme získali rozměr síly. Pokud osamostatníme členy, které stojí před $\mathbf{q}$, získáme tangenciální matici tuhosti

$$\mathbf{K}_{tan} = k_{tan} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T,$$

$$\mathbf{K}_{tan} = k_{tan} \begin{bmatrix} -\cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{tan} = k_{tan} \begin{bmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} & -\cos\frac{\alpha}{2}(\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}) \\ -\cos\frac{\alpha}{2}(\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}) & (\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2})^2 \end{bmatrix}.$$

Za využití goniometrického součtového vzorce

$$\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} = \cos(\alpha - \frac{\alpha}{2}) = \cos\frac{\alpha}{2} \tag{7.12}$$

dostane matice tangenciální tuhosti bandáže tvar

$$\mathbf{K}_{tan} = k_{tan} \cos^2\frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.13}$$

Pomocí kódových čísel příslušných posuvů uzlů, které jsou bandáží spojeny, přičteme tuta matice k celkové matici tuhosti turbíny $\mathbf{K}$ ve smyslu MKP. Tuto operaci zpravidla provedeme okolo celého lopatkového věnce, tzn. bandáž bude spojovat všechny lopatky věnce dokola. Axiální a tangenciální tuhost bandáže bude vyztužovat celou soustavu a omezí kmitání jednotlivých lopatek.

8 Praktická část

V praktické části budeme porovnávat různé způsoby modelování a vyhodnocovat nejvhodnější způsob. Také zde bude modelována konkrétní turbína, která zahrnuje všechny typy soustav, které byly v diplomové práci teoreticky odvozeny, kromě bandáží.

8.1 Náhrada lopatkových věnců tuhými kotouči

První srovnání, kterým se budeme zabývat je srovnání modelu lopatkového věnce s modelem, v němž je věnec nahrazen tuhým kotoučem a odpovídající hmotnosti a momentu setrvačnosti. Pro náhradu tuhým kotoučem je potřeba nejdříve zjistit celkovou hmotnost lopatkového věnce a jeho celkový moment setrvačnosti. Hmotnost určíme jako

$$m = k \sum_{i=1}^{n} m_{ei}, \tag{8.1}$$

kde n je celkový počet elementů lopatky a k je celkový počet lopatek. Hmotnost jednoho konečného prvku získáme jako součin jeho objemu a hustoty

$$m_e = V_e \rho. \tag{8.2}$$

Tento vztah lze za předpokladu homogenního materiálu rozepsat

$$m_e = \rho \int_0^l A(x) dx, \tag{8.3}$$

kde l je délka lopatkového prvku. Za plochu průřezu $A(x)$ ve vzdálenosti x od počátku prvku dosadíme aproximační vztah (kubickou funkci) odvozenou v podkap. 5.2.1

$$A(x) = \sum_{i=0}^{3} x^i a_{i1}. \tag{8.4}$$

Druhý index u koeficientů kubické aproximace značí, který průřezový parametr je aproximován. Pro zpřehlednění jej zde vynecháme, jelikož pracujeme pouze s aproximací plochy průřezu. Po dosazení aproximace dostane (8.3) tvar

$$m_e = \rho \int_0^l (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx. \tag{8.5}$$

Provedeme integraci a tím získáme hmotnost jednoho konečného prvku

$$m_e = \rho \left(a_0 l + \frac{a_1 l^2}{2} + \frac{a_2 l^3}{3} + \frac{a_3 l^4}{4} \right). \tag{8.6}$$

Stejným způsobem provedeme výpočet hmotnosti všech konečných prvků. Při každém výpočtu budou použity jiné aproximační koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3, protože každý element je aproximován jinou funkcí. Za využití (8.1) získáme celkovou hmotnost lopatkového věnce, kterou využijeme pro popis tuhého kotouče.

Druhou veličinou, kterou potřebujeme k nahrazení lopatkového věnce je polární moment setrvačnosti k ose rotoru x

$$I_x = I_o = k \sum_{i=1}^{n} I_{oei}. \tag{8.7}$$

Polární moment setrvačnosti se také označuje jako osový (proto I_o). Poslední vztah vyjadřuje součet momentů setrvačnosti všech prvků jedné lopatky vynásobený počtem lopatek k v lopatkovém věnci. Dílčím výpočtem je moment setrvačnosti jednoho konečného prvku

$$I_{oe} = \int_{m_e} r^2 dm, \tag{8.8}$$

kde r je vzdálenost bodu od osy x. Zde je nutné poznamenat, že zavádíme zjednodušení. Při integraci dosazujeme pro všechny body jednoho průřezu stejnou hodnotu $r = \xi$. Ve skutečnosti bychom měli dosazovat hodnotu $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, přičemž $[\xi, \eta, \zeta]$ jsou souřadnice konkrétních bodů lopatky. Vztah (8.8) lze při uvažování homogenního materiálu lopatek upravit

$$I_{oe} = \rho \int_{V_e} r^2 dV. \tag{8.9}$$

Pokud označíme l_0 vzdálenost počátku konečného prvku od osy x vztah pro moment setrvačnosti k této ose je

$$I_{oe} = \rho \int_0^l A(x)(l_0 + x)^2 dx. \tag{8.10}$$

Dosazením aproximační funkce $A(x)$ za stejné úmluvy značení jako při výpočtu hmotnosti dostane vztah tvar

$$I_{oe} = \rho \int_0^l (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)(l_0 + x)^2 dx. \tag{8.11}$$

Úpravami získáme

$$\begin{aligned} I_{oe} = \rho \int_0^l [a_0 l_0^2 + (2a_0 l_0 + a_1 l_0^2)x + (a_0 + 2a_1 l_0 + a_2 l_0^2)x^2 + \\ (a_1 + 2a_2 l_0 + a_3 l_0^2)x^3 + (a_2 + 2a_3 l_0)x^4 + a_3 x^5] dx. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Po zintegrování získáme konečný tvar pro moment setrvačnosti k ose x jednoho lopatkového prvku

$$\begin{aligned} I_{oe} = \rho \Bigg[a_0 l_0^2 l + (2a_0 l_0 + a_1 l_0^2)\frac{l^2}{2} + (a_0 + 2a_1 l_0 + a_2 l_0^2)\frac{l^2}{2} + \\ (a_1 + 2a_2 l_0 + a_3 l_0^2)\frac{l^3}{3} + (a_2 + 2a_3 l_0)\frac{l^4}{4} + a_3 \frac{l^5}{5} \Bigg]. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Postupným vyjádřením momentu setrvačnosti všech elementů a sečtením ve vztahu (8.7) dostaneme konečnou hodnotu momentu setrvačnosti tuhého kotouče, kterým nahradíme celý věnec.

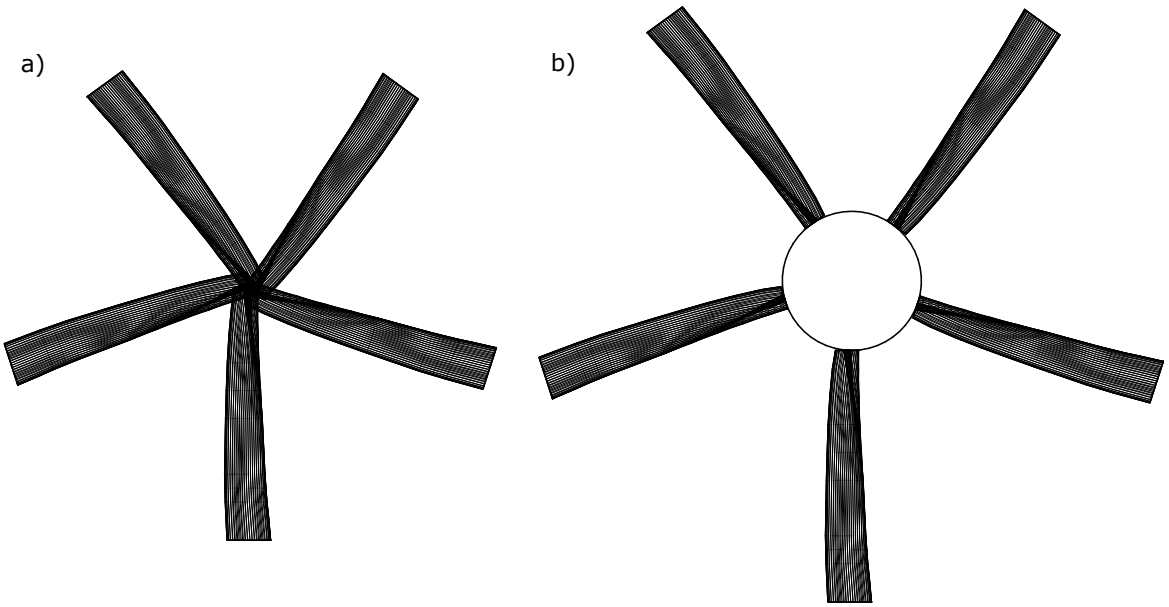
8.1.1 Vlastní frekvence lopatkového věnce a tuhého kotouče

První konkrétní systém, na kterém jsou porovnávány vlastní frekvence obou modelů je model bez hřídele. Jedná se pouze o lopatkový věnec s pěti lopatkami zavěšený na pěti pružinách

s tuhostmi

$$\begin{aligned} k_x &= 10^6, \\ k_y &= 10^6, \\ k_z &= 10^6, \\ k_\psi &= 10^5, \\ k_\vartheta &= 10^5. \end{aligned}$$

Srovnání provedeme dvakrát. První srovnání bude provedeno na lopatkovém věnci zobrazeném na obr. 9 a). Všechny lopatky mají společný počáteční bod. Prakticky je toto uspořádání neproveditelné, protože se lopatky v prostoru překrývají. Druhé srovnání je provedeno na lopatkovém věnci 9 b). V tomto uspořádání jsou lopatky pravidelně uchyceny na kružnici o poloměru $0,3\,[m]$, která simuluje hřídel, na který by mohl být věnec připojen.



Obr. 9. Zobrazení dvou vyšetřovaných lopatkových věnců

Podle postupu 8.1 vypočítame hmotnosti a momenty setrvačnosti odpovídající lopatkovým věncům. Hmotnosti obou věnců jsou stejné. Věnec b) má však větší moment setrvačnosti. Na popsaných modelech a na odpovídajících modelech, kde byly lopatky nahrazeny tuhým kotoučem, byla provedena modální analýza za nulových otáček, která poskytla výsledky v podobě vlastních frekvencí systému a) zapsané v následujících tabulkách

Lopatkový věnec	
Pořadí vl. čísla	Vlastní frekvence [rad.s^{-1}]
1	95,3
2	95,3
3	103,0
4	103,8
5	103,8
6	240,7
7	240,7
8	300,6
9	336,1
10	336,1
11	557,2
12	557,2

Tuhý kotouč	
Pořadí vl. čísla	Vlastní frekvence [rad.s^{-1}]
1	100,1
2	100,1
3	104,5
4	104,5
5	104,5

Obr. 10. Vlastní frekvence lopatkového věnce a) a odpovídajícího tuhého kotouče

Při vyhodnocování výsledků modální analýzy modelu s tuhým kotoučem byla vynechána nulová vlastní frekvence, která vznikla z důvodu nulové tuhosti k_φ. První dvě vlastní frekvence zavěšeného kotouče na pružinách odpovídají torznímu kmitání, další tři pak kmitání ve směrech x, y, z. Těmto pěti vlastním frekvencím odpovídá v levé tabulce rovněž pět prvních vlastních frekvencí. Tyto vlastní frekvence jsou u modelu s lopatkovým věncem nižší, než u modelu s tuhým kotoučem. Toto zjištění lze vysvětlit tím, že model s lopatkami má nižší tuhost, než model s tuhým kotoučem a systémy s nižší tuhostí obecně kmitají pomaleji. Systém 9 b) má vlastní frekvence

Lopatkový věnec	
Pořadí vl. čísla	Vlastní frekvence [rad.s^{-1}]
1	63,2
2	63,2
3	103,0
4	103,7
5	103,7
6	240,7
7	240,7
8	291,4
9	303,3
10	303,3
11	557,2
12	557,2

Tuhý kotouč	
Pořadí vl. čísla	Vlastní frekvence [rad.s^{-1}]
1	64,2
2	64,2
3	104,5
4	104,5
5	104,5

Obr. 11. Vlastní frekvence lopatkového věnce b) a odpovídajícího tuhého kotouče

Při srovnání modelů a) a b) lze pozorovat, že vlastní frekvence kmitání ve směrech x, y, z jsou shodné, protože oba systémy mají shodnou hmotnost. První dvě vlastní frekvence, odpovídající natáčení kolem os y, z se již liší. Systém s větším momentem setrvačnosti má nižší vlastní frekvence, což je z mechanického hlediska správně. U obou systémů s lopatkovými věnci bylo zde vypsáno pouze prvních 12 vlastních frekvencí, protože provozní otáčky turbín jsou většinou

$50\,[Hz] \sim 314[rad \cdot s^{-1}]$, tudíž nemá smysl uvádět vyšší vlastní frekvence, které teoreticky nemůžou být vybuzeny.

8.2 Modelování turbíny

Pomocí matematických modelů sestavených v teoretické částí nyní můžeme modelovat konkrétní turbosoustrojí. Z matematických modelů lopatkového, hřídelového prvku, ložisek, či bandáže lze pomocí metody konečných prvků sestavit libovolné turbosoustrojí. Vytvořme konkrétní turbínu s hřídelovými prvky, jejichž rozměry jsou popsané v tab. 1. Hřídel modelované turbíny má po délce proměnný vnitřní a vnější průměr. Nadílkování na konečné prvky bylo provedeno tak, aby v místech, kde se stýkají dvě části hřídele s rozdílnými průměry, ležel uzel. V několika místech jsou však vedle sebe dva prvky se stejnými rozměry. Je tomu tak z důvodu, že je mezi nimi umístěn tuhý kotouč, lopatkový věnec, či ložisko. Tyto tři prvky musí být připojeny k uzlu hřídele, nikoliv doprostřed prvku. Jinými slovy pokud je na reálném rotoru umístěn tuhý kotouč, lopatkový věnec, nebo ložisko uprostřed části hřídele o délce l, je potřeba tuto část modelovat jako dva konečné prvky o délce $\frac{l}{2}$ a mezi ně následně napojit kotouč, věnec, nebo ložisko. Uzly vzniklé z důvodu připojení tuhého kotouče do soustavy jsou v tabulce znázorněny jako vodorovné čáry. Uzly vzniklé z důvodu připojení ložiska do soustavy jsou v tabulce znázorněny jako dvojité vodorovné čáry. V tabulce jsou také vyznačeny uzly, v nichž jsou umístěny lopatkové věnce. Tato místa jsou v tabulce popsána jako *Lopatkový věnec 1, Lopatkový věnec 2*. Celý hřídel má délku $11,45\,[m]$. V tabulce je 45 prvků, tím pádem má hřídel 46 uzlů. Každý uzel přidává do soustavy šest stupňů volnosti. Dohromady přidá hřídel do matematického modelu turbíny 276 stupňů volnosti ($46 \cdot 6 = 276$).

Délka prvku [m]	**vnější průměr [m]**	**vnitřní průměr [m]**
0.400	0.560	0
0.400	0.560	0
0.100	0.6672	0
0.100	0.6672	0
0.130	0.6985	0
0.130	0.6985	0
0.415	0.560	0
0.330	0.750	0
0.330	0.750	0
0.412	0.900	0
0.412	0.900	0
0.209	1.36395	0
	Lopatkový věnec 1	
0.209	1.36395	0
0.1195	1.250	1.050
0.1195	1.250	1.050
0.2015	1.26995	0
0.2015	1.26995	0
0.1055	1.250	1.050
0.1055	1.250	1.050
0.200	1.250	0
0.200	1.250	0
0.125	1.250	1.050
0.250	1.250	1.050
0.125	1.250	1.050
0.200	1.250	0
0.200	1.250	0
0.1055	1.250	1.050
0.1055	1.250	1.050
0.2015	1.26995	0
0.2015	1.26995	0
0.1195	1.250	1.050
0.1195	1.250	1.050
0.209	1.36395	0
	Lopatkový věnec 2	
0.209	1.36395	0
0.412	0.900	0
0.412	0.900	0
0.330	0.750	0
0.330	0.750	0
0.465	0.700	0
0.75	0.640	0
0.75	0.640	0
0.400	0.560	0
0.400	0.560	0
0.100	0.667	0
0.100	0.667	0

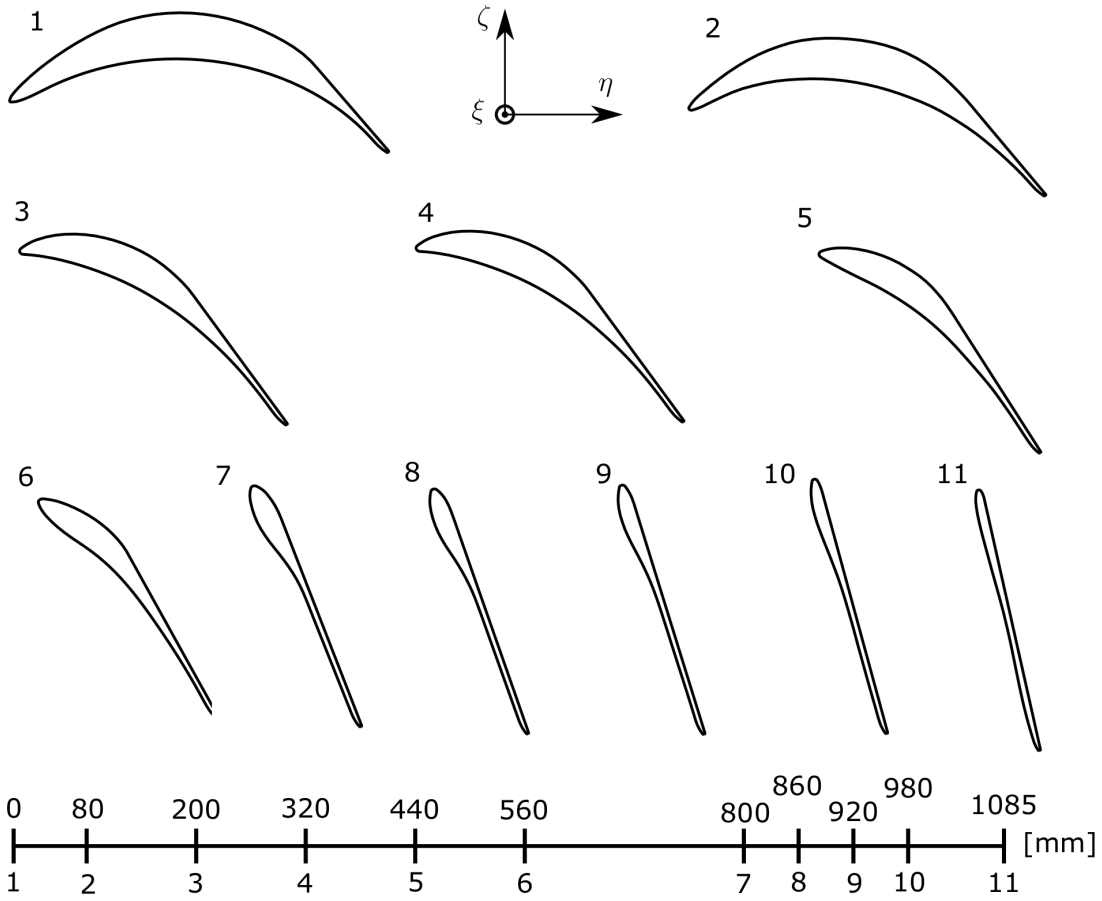
Tabulka 1: Rozměry hřídelových prvků

8.2.1 Model lopatkových věnců

Model turbíny obsahuje dva lopatkové věnce. Každý z nich obsahuje 68 lopatek, rovnoměrně rozložených po obvodu hřídele. Celková délka lopatky je $1085\,[mm]$. Lopatkové věnce jsou na hřídeli na místech, které jsou vyznačeny v tabulce 1.

Lopatka

Každá lopatka je modelována deseti konečnými prvky. Geometrie je tvořena tak, že je dokumentací [4] zadáno 11 průřezů svými obrysovými body. Tyto průřezy a jejich rozložení po délce lopatky jsou znázorněny na obr. 12



Obr. 12. Průřezy lopatky a jejich umístění na lopatce

Průřezy jsou očíslovány čísly od 1 do 11 podle pořadí ve kterém po sobě následují od uchycení lopatky. Tato čísla průřezů jsou také napsána u osy lopatky dole na obrázku. Na ose je vidět vzdálenost všech průřezů od uchycení lopatky k hřídeli. Všechny lopatky ve věncích jsou stejné.

Lopatkové věnce

Modelovány jsou dva lopatkové věnce, z nichž každý má 68 lopatek. Každá lopatka má 10 prvků, tím pádem 11 uzlů. Každý uzel má 8 stupňů volnosti. Při zjišťování počtu stupňů volnosti, které přidávají lopatky do modelu je třeba si uvědomit, že první uzel lopatky přidává do soustavy pouze 2 stupně volnosti, protože šest zobecněných posuvů (tři posuvy a tři natočení)

jsou pouze transformovaná natočení uzlu hřídele, na nějž je lopatkový věnec připojen. Každá lopatka tedy přidává do soustavy 82 stupňů volnosti. Dva lopatkové věnce potom přidávají 11 152 stupňů volnosti ($2 \cdot 68 \cdot 82$). Každá lopatka obou věnců je připojena k modelu zvlášť po elementech. První element lopatky je vždy připojen pomocí transformačních vztahů odvozených v kapitole 6, přičemž poloměr hřídele v místě napojení obou věnců je $R = 0,682\,[m]$. K lopatkovým věncům nejsou u této konkrétní turbíny připojeny bandáže.

8.2.2 Uchycení turbíny

Celá turbína je uchycena na dvou místech (viz dvojité vodorovné čáry v tab. 1). Podle kap. 4 se na příslušná místa v matici tuhosti přičtou matice tuhosti ložisek s tuhostí

$$k = 3,78 \cdot 10^9\,[N \cdot m^{-1}]. \tag{8.14}$$

Navíc je do celkové matice přidána diskrétní tuhost

$$k_u = 1 \cdot 10^9\,[N \cdot m^{-1}] \tag{8.15}$$

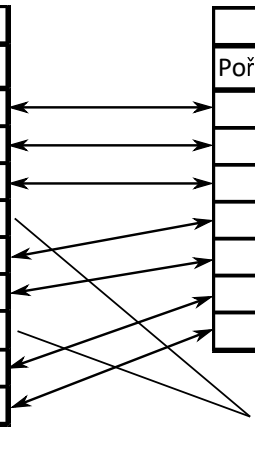
ve směru osy x resp. posuvu u. Je umístěna do stejného uzlu, ke kterému je připojeno první ze dvou ložisek.

8.2.3 Model s lopatkovými věnci/tuhými kotouči ($\omega = 0\,[rad \cdot s^1]$)

Cílem této části je porovnat dva modely turbíny. Prvním modelem je přímo turbína popsaná v tabulce 1. Druhým, srovnávacím modelem je model, kde jsou dva lopatkové kotouče nahrazeny dvěma tuhými kotouči. Na obou modelech byla provedena modální analýza, pomocí níž byly zjištěny vlastní frekvence a vlastní tvary kmitů. Při prvním srovnání byla provedena modální analýza za nulových otáček ($\omega = 0$) a s nulovým proporcionálním tlumením. To znamená, že porovnávány jsou pouze matice hmotnosti $\mathbf{M}$ a tuhosti $\mathbf{K}$ obou soustav. Celá turbína byla zhotovena z homogenní, konstrukční oceli s materiálovými parametry $E = 2,1 \cdot 10^{11}[Pa]$ a $G = 8 \cdot 10^{10}[Pa]$. Takto nastavené podmínky poskytly výsledky zapsané v tabulkách na obr. 13.

Turbína s lopatkovými věnci	
Pořadí vl. čísla	Vlastní frekvence [rad.s^{-1}]
1	80
2	80
3	115
4-139	240-243
140	283
141	283
142-277	549-568
278	720
279	720

Turbína s tuhými kotouči	
Pořadí vl. čísla	Vlastní frekvence [rad.s^{-1}]
1	80
2	80
3	115
4	282
5	282
6	719
7	719



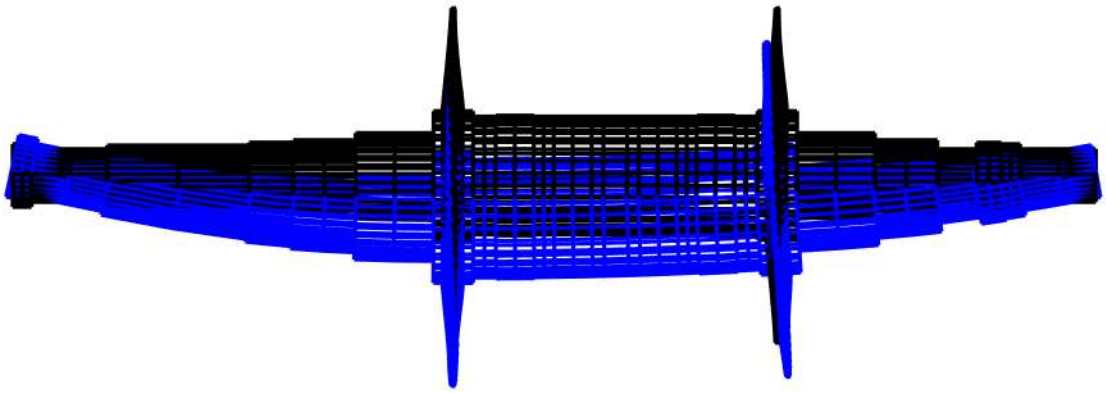
Obr. 13. Srovnání vl. frekvencí turbíny s lopatkovými věnci a tuhými kotouči ($\omega = 0\,[rad \cdot s^1]$)

Vzhledem k tomu, že provozní otáčky turbíny jsou standardně $50\,[Hz] \sim 314[rad \cdot s^{-1}]$, do tabulky byly zaznamenány pouze vlastní frekvence, které má smysl vyšetřovat, tzn. všechny nižší

frekvence a nejbližší vyšší frekvence. V tabulce s vlastními frekvencemi modelu s poddajnými lopatkovými věnci se objevují množiny vlastních frekvencí, jejichž vlastní tvary kmitu popisují kmitání lopatek. Tomu i odpovídá velikost těchto množin. Model obsahuje dva lopatkové věnce, každý o 68 lopatkách. Vzhledem k tomu je počet těchto po sobě jdoucích, téměř stejně velkých vlastních frekvencí 136. Pokud nyní odhlédneme od těchto množin vlastních frekvencí, týkajících se kmitání lopatek, můžeme porovnat chování modelu s lopatkovými věnci s modelem s tuhými kotouči. Vlastní frekvence obou modelů jsou si velmi podobné. Odpovídající vlastní frekvence obou modelů jsou na obr. 13 spojeny dvojšipkami.

1. a 2. tvar kmitu

Prvním dvěma vlastním frekvencím odpovídá podle předpokladu ohybový tvar kmitu, kdy střednice rotoru (s věnci i kotouči) kmitá v jedné rovině. Pro představu jsou tyto tvary vykresleny v jedné ze svých fází na obr. 14 i s lopatkovými věnci. Lze je připodobnit k průběhu půlperiody funkce sinus. Oba tvary kmitu probíhají podobně, turbína však těmito dvěma tvary kmitá v na sebe kolmých rovinách, což je vzhledem k symetrii úlohy včetně izotropních ložisek správně.

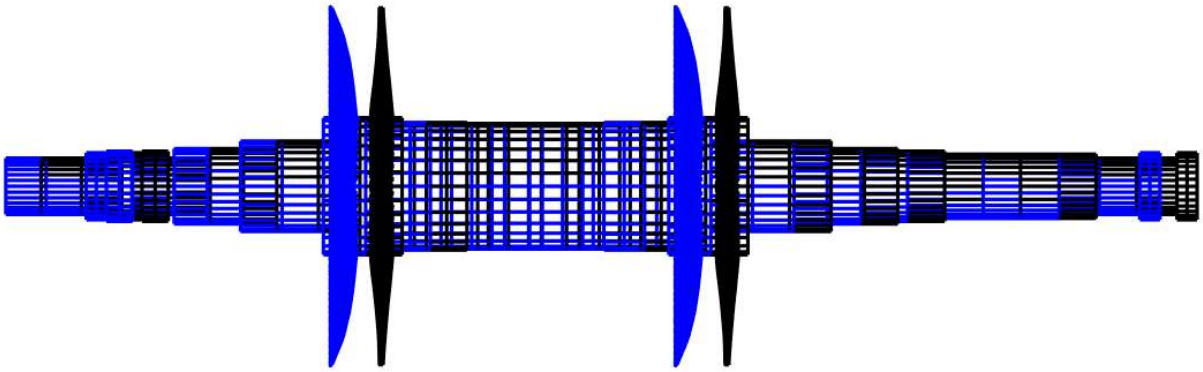


Obr. 14. První a druhý tvar kmitu turbíny

V tabulkách porovnávajících modely s lopatkovými věnci a tuhými kotouči na obr. 13 jsou pro přehlednost zapsány zaokrouhlené hodnoty vlastních frekvencí. První dvě vlastní frekvence byly však zanedbatelně nižší u poddajného modelu (přibližně o $0,1\,[rad \cdot s^{-1}]$). Na obr. 14 je vidět, že lopatkové věnce se natáčí společně s rotorem. Proto oproti tuhému kotouči zanedbatelně snižují tuhost soustavy a tím snižují vlastní frekvence.

3. tvar kmitu

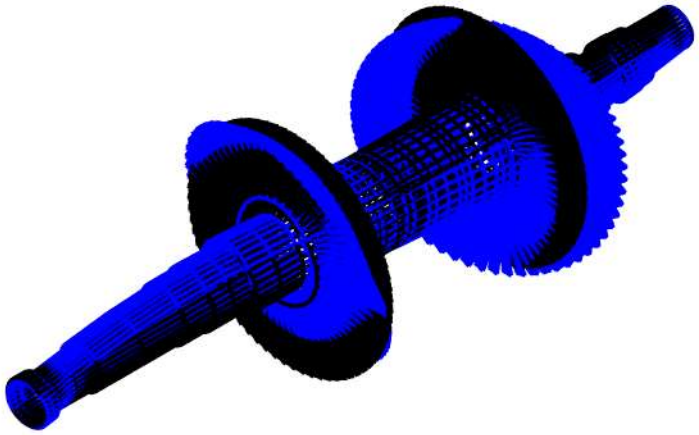
Třetí vlastní frekvenci obou modelů odpovídá tahový tvar kmitu. To znamená že soustava kmitá dominantně ve směru osy hřídele (x). V tabulce jsou opět pro oba modely vlastní frekvence shodné. Avšak stejně jako v případě první a druhé vlastní frekvence je vlastní frekvence modelu s lopatkovými kotouči mírně nižší. Lopatky opět snižují tuhost soustavy. Oba lopatkové věnce kmitají tvarem kmitu připomínající deštník. Lopatkové věnce kmitají ve fázi s hřídelem tak, že se ohýbají stejným směrem jako se posouvá hřídel. To má za důsledek snížení vlastní frekvence. Tento tvar kmitu je zobrazen v jedné ze svých fází na obr. 15



Obr. 15. Třetí tvar kmitu turbíny

4. a 5. tvar kmitu

Přestože pro model s lopatkovým věncem se jedná o 140. a 141. vlastní frekvenci, budeme mluvit o 4. a 5. frekvenci (resp. tvaru kmitu), protože tvarem kmitu odpovídá čtvrtému a pátému tvaru kmitu modelu s tuhými kotouči. Rozdíl v číslování je způsoben 136 vlastními frekvencemi o hodnotě $240 - 243\,[rad \cdot s^1]$ odpovídajícími kmitání lopatek. Tyto vlastní frekvence byly při seřazení podle velikosti umístěny mezi 3. a 4. vlastní frekvenci celku. Čtvrtý a pátý tvar kmitu lze nazvat druhé ohybové tvary kmitu. Tvary jsou zobrazeny na obr. 16, lze je připodobnit k průběhu jedné periody funkce sinus. Stejně jako v případě prvního a druhého tvaru kmitu mají čtvrtý a pátý tvar podobný průběh, ale kmitají v na sebe kolmých rovinách.

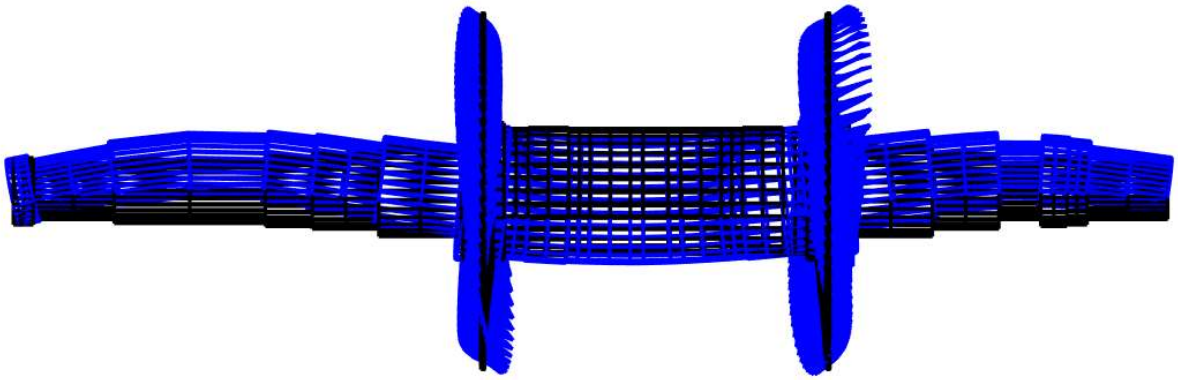


Obr. 16. Čtvrtý a pátý tvar kmitu turbíny

Poněkud neočekávané je srovnání vlastních frekvencí modelů s lopatkovými věnci a tuhými kotouči. Přestože tuhé kotouče dělají soustavu při prvním posouzení tužší, vlastní frekvence tohoto modelu je o $1\,[rad \cdot s^1]$ nižší. Důvod tohoto jevu je vysvětlen u popisu 6. a 7. tvaru kmitu.

6. a 7. tvar kmitu

Stejně jako u 4. a 5. vlastní frekvence i zde není pořadí vlastních frekvencí přesné. Ve skutečnosti se pro model s lopatkovými věnci jedná o 278. a 279. vlastní frekvenci.



Obr. 17. Šestý a sedmý tvar kmitu turbíny

Tento tvar je z obrázku již trochu hůř čitelný. Je to způsobeno velkým průměrem a malou délkou hřídele v oblasti mezi lopatkovými věnci, který nemá v tomto tvaru kmitu oproti ostatním částem velké výchylky. Tímto tvarem kmitu kmitá model s lopatkami na vyšší frekvenci než model s tuhými kotouči, což se na první pohled může jevit jako nesprávný výsledek. Vysvětlení, proč je zdánlivě tužší model s lopatkovými věnci, lze podložit obr. 17. Představme si osu směřující z nákresny, na níž je vynesen úhel natočení uzlů hřídele. Pro uzel, na kterém je uchycen lopatkový věnec vlevo, je úhel záporný. Lopatky se ale zřejmě ohýbají proti smyslu natáčení hřídele v místě jejich uchycení. Opačný případ nastává u lopatkového věnce vpravo, kde úhel natočení hřídele je kladný a lopatky se ohýbají na druhou stranu. Fakt, že lopatky kmitají proti směru natočení uzlu hřídele v místě uchycení věnce, přispívá k tomu, že lopatky oproti tuhým kotoučům model nezměkčují, ale vyztužují. To znamená, že celková tuhost modelu s lopatkami je pro tvary kmitu 6 a 7 vyšší a tím pádem je i vyšší vlastní frekvence.

8.2.4 Model s lopatkovými věnci/tuhými kotouči ($\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$)

Další srovnání výše popsaných systémů bylo provedeno ještě jednou. Tentokrát se turbosoustrojí otáčelo úhlovou rychlostí $\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$. Nyní se již projevuje efekt gyroskopické matice $\mathbf{G}$ a matice cirkulační tuhosti $\mathbf{K}_d$. Vlastní frekvence obou systémů při těchto otáčkách jsou zapsány v tabulkách na obr. 18

Turbína s lopatkovými věnci	
Pořadí vl. čísla	Vlastní frekvence [rad.s^{-1}]
1	22
2	115
3	238
4	384
5	438
6-141	457-464
142	514
143	634
144-279	679-713
280	875
281	951
282	959

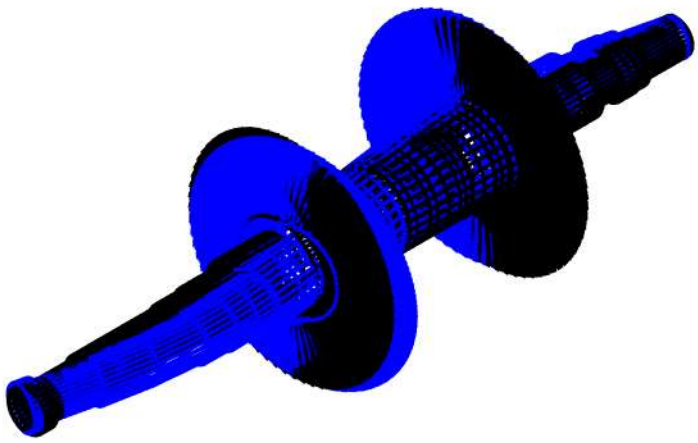
Turbína s tuhými kotouči	
Pořadí vl. čísla	Vlastní frekvence [rad.s^{-1}]
1	23
2	115
3	238
4	384
5	444
6	507
7	635
8	867
9	927
10	949

136 vlastních frekvencí
(2 věnce o 68 lopatkách)

Obr. 18. Srovnání vl. frekvencí turbíny s lop. věnci a tuhými kotouči ($\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$)

Vlastní frekvence, které odpovídají ohybovým tvarům kmitu, jsou při nulových otáčkách stejné a daný tvar kmitu se odehrává v na sobě kolmých rovinách. V rotujícím souřadnicovém systému se tyto vlastní frekvence rozcházejí v hodnotách se zvyšující se úhlovou rychlostí otáčení rotoru (viz podkapitola 8.3). Proto nyní dvojice tvarů kmitu neodpovídají stejným vlastním frekvencím a některé vyšší ohybové tvary kmitu se dostávají frekvenčně níže než tvary nižší. Uvedené tvary kmitu jsou seřazeny podle velikosti vlastních frekvencí s tím, že tvary kmitu příslušící lopatkám jsou vynechány.

1. tvar kmitu

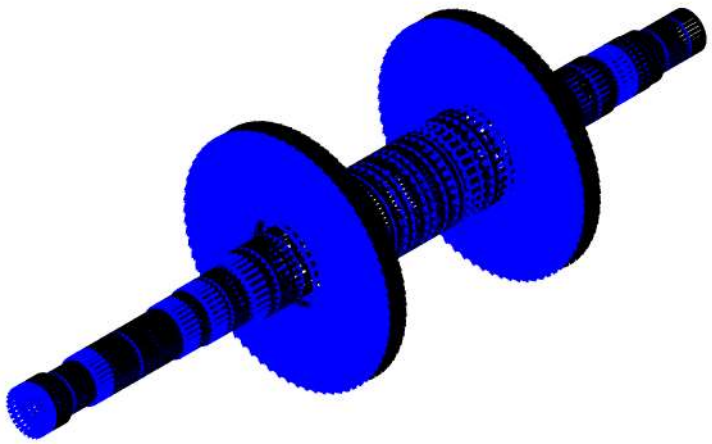


Obr. 19. První tvar kmitu ($\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$)

Tento tvar by se standartně dal označit jako druhý ohybový. Podle obr. 19 lze pozorovat, že oba lopatkové věnce kmitají ve fázi s ohybem hřídele. To má za následek snížení vlastní frekvence

oproti modelu s tuhými kotouči, protože se sníží tuhost systému.

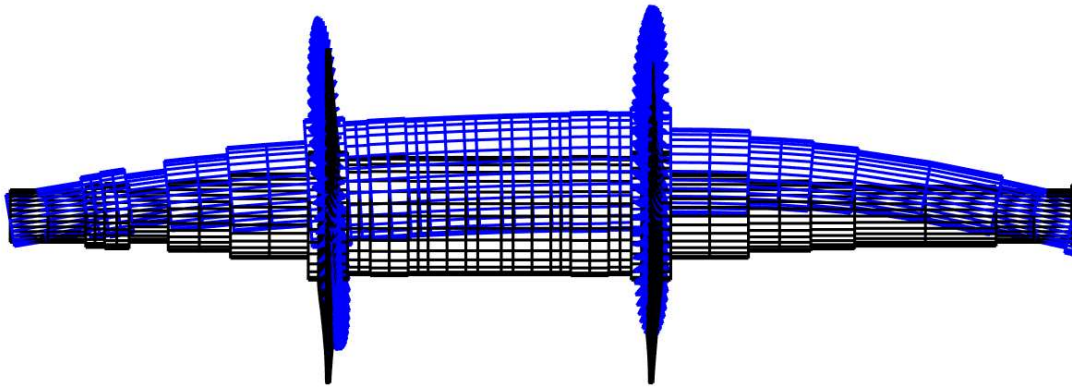
2. tvar kmitu



Obr. 20. Druhý tvar kmitu ($\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$)

Druhý tvar zůstává nezměněný v porovnání s nulovými otáčkami, pouze je řazen na druhé místo, ne třetí. Poddajné lopatky i tuhé kotouče poskytují v tomto případě téměř stejný výsledek vlastní frekvence.

3. tvar kmitu

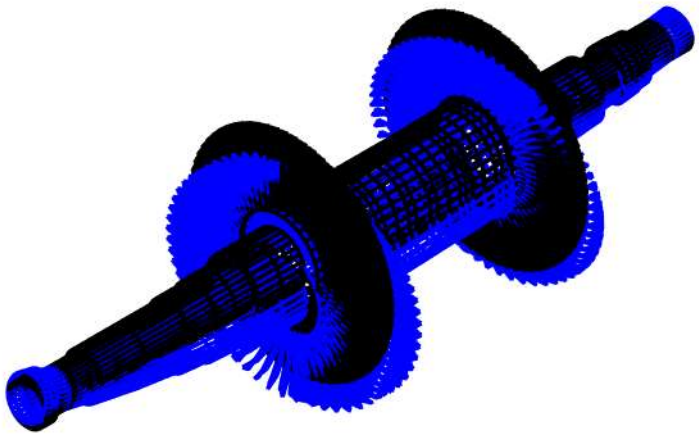


Obr. 21. Třetí tvar kmitu ($\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$)

Třetí tvar kmitu podle pořadí příslušné vlastní frekvence by se mohl označit jako první ohybový tvar. Modelování lopatkových věnců má velmi malý vliv na velikost vlastní frekvence. Přesto ji mírně oproti tuhým kotoučům snižuje, protože lopatky kmitají souhlasně s hřídelem. Rozdíl je

však v řádu desetin $[rad \cdot s^1]$, takže se zaokrouhlením v tabulkách 18 ztratil.

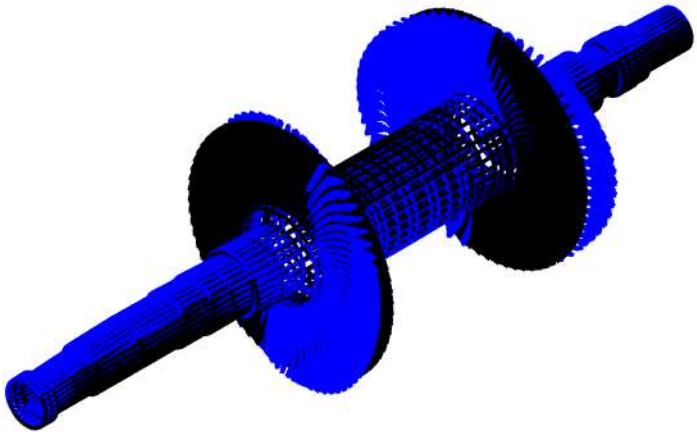
4. tvar kmitu



Obr. 22. Čtvrtý tvar kmitu ($\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$)

Čtvrtý tvar kmitu má charakter prvního ohybového kmitu. Lopatky systém změkčují, takže model s lopatkovými věncí má mírně nižší vlastní frekvenci oproti modelu s tuhými kotouči. Rozdíl je pouze $0.1\,[rad \cdot s^1]$, takže se zaokrouhlením ztratí.

5. tvar kmitu

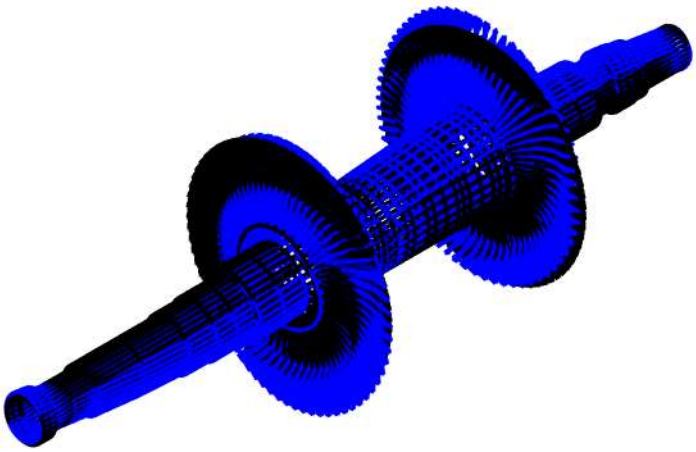


Obr. 23. Pátý tvar kmitu ($\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$)

Pátý tvar kmitu lze připodobnit k obvyklému 3. ohybovému tvaru kmitu (hřídel má 4 uzly a 3

kmitny). V tomto tvaru kmitu se poprvé projevuje větší rozdíl mezi systémem s lopatkovými věnci a tuhými kotouči. Lopatky kmitáním změkčí systém natolik, že rozdíl ve vlastních frekvencích dvou srovnávaných systémů je $6\,[rad \cdot s^1]$.

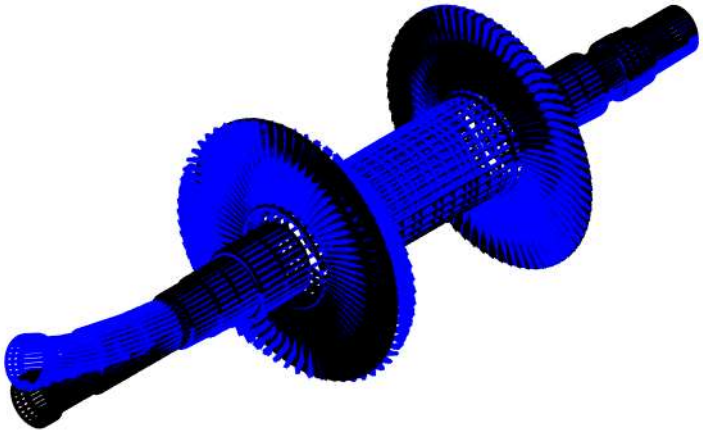
6. tvar kmitu



Obr. 24. Šestý tvar kmitu ($\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$)

Šestý tvar kmitu odpovídá podle obvyklého popisu druhému ohybovému tvaru kmitu. Na obr. 24 si lze všimnout, že lopatkové věnce se natáčí v opačném smyslu, než hřídel v místě uchycení věnců. Lopatky tím pádem hřídel jaksi předepínají a tím zvyšují tuhost a rychlost kmitání neboli vlastní frekvenci kmitání. V tomto tvaru kmitu se již jedná o značnou změnu oproti modelu s tuhými kotouči $7\,[rad \cdot s^1]$.

7. tvar kmitu



Obr. 25. Sedmý tvar kmitu ($\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$)

Sedmý tvar kmitu by podle obvyklých označení byl nazván třetí ohybový tvar kmitu. Lopatkové věnce systém mírně změkčují, to znamená snižují vlastní frekvenci oproti modelu s tuhými kotouči. Opět ale pouze v řádu desetin $[rad \cdot s^1]$.

8.3 Srovnání modelů hřídele ve stacionárním a nestacionárním souřadnicovém systému

V teoretické části práce byly odvozeny dva způsoby modelování hřídele. Pro modelování celého turbosoustrojí je využíván model hřídele v nestacionárním souřadnicovém systému, který rotuje vůči stacionárnímu systému úhlovou rychlostí ω. To znamená že je natočen v každém čase t o úhel ωt vůči stacionárnímu systému. V této části práce se budeme zabývat srovnáním výsledků modální analýzy v těchto dvou souřadnicových systémech. Konkrétně se budeme zabývat Campbellovým diagramem, což je graf představující závislost imaginární části vlastních čísel na otáčkové frekvenci ω. Úhlová rychlost otáčení rotoru hraje roli v pohybových rovnicích turbíny. Ve stacionárním prostoru je jí násobena celá matice gyroskopických účinků $\mathbf{G}$ a případně matice tlumení $\mathbf{B}$, pokud je v modelu uvažováno proporcionální nebo jiné tlumení. V rotujícím prostoru se ještě projevuje vliv jejího kvadrátu v matici cirkulační tuhosti $\mathbf{K}_D$. Nejčastějším důvodem popisování kmitání hřídelů a vyšetřování jejich vlastních frekvencí (popř. tvarů kmitu) je posouzení, zda se vlastní frekvence neshoduje s provozními otáčkami hřídele. Campbellův diagram poskytuje vizuální kontrolu nad nežádoucím jevem rezonance, slouží k určení rezonančních frekvencí. Pokud je některá z těchto frekvencí v blízkosti provozních otáček stroje, není vhodné stroj uvádět do provozu. Stroj není pro svůj účel vhodně navržen a je třeba změnit jeho materiál, uložení, rozměry atd. tak, aby se vlastní frekvence posunuly mimo provozní otáčky. Pokud je některá z rezonančních frekvencí nižší, než jsou provozní otáčky, je třeba překonat při rozběhu stroje tuto frekvenci co nejrychleji, aby se stroj příliš nerozkmital a případně nezpůsobil škody.

8.3.1 Vyhodnocení výsledků ve stacionárním souřadnicovém systému

Obvykle se hřídele modelují ve stacionárním souřadnicovém systému a vyhodnocení výstupů modální analýzy je intuitivnější. Pro určení kritických otáček je potřeba si uvědomit, že při těchto otáčkách dochází k rezonanci. Tzn., že otáčková frekvence se blíží vlastní frekvenci systému (imaginární část vlastního čísla). Geometrické místo této rovnosti je osa kvadrantu, kterou nazýváme náběhovou přímkou. Průsečíky náběhové přímky s výše zmíněnými závislostmi imaginární části vlastních čísel na ω představují kritické otáčky. V případě izotropních ložisek a rotačně symetrických hřídelů tvoří vlastní frekvence rotoru v klidu dvojice odpovídající tvarům kmitu rotoru ve dvou na sebe kolmých rovinách (pohyby v těchto rovinách nejsou provázány). S postupně se zvyšující otáčkovou frekvencí se tyto dvojice rozštěpí v důsledku provázanosti pohybů v těchto dvou rovinách (gyroskopický efekt, vnitřní tlumení - cirkulační matice u nestacionárního prostoru). První průsečík náběhové přímky s klesající větví závislosti vlastní frekvence odpovídá zpravidla tvaru kmitu, který po animaci představuje kroužení deformované střednice okolo osy úhlovou rychlostí ω, tj. rotace probíhá v obráceném smyslu než jsou otáčky rotoru. Tomuto jevu říkáme protiběžná precese. Průsečík náběhové přímky s rostoucí větví závislosti vlastní frekvence odpovídá zpravidla tvaru kmitu, který po animaci představuje kroužení střednice okolo osy úhlovou rychlostí ω, tzn., že rotace probíhá ve stejném smyslu jako otáčení rotoru. Tomu říkáme souběžná precese.

8.3.2 Vyhodnocení výsledků v rotujícím souřadnicovém systému [5]

Z důvodu snazší transformace lopatek byl v této práci modelován hřídel v rotujícím souřadnicovém systému. Při vyhodnocování výsledků modální analýzy je však nutné volit jiný přístup. Opět je využit Campbellův diagram, kam jsou vynášeny vlastní frekvence v závislosti na úhlové rychlosti otáčení. V důsledku informací uvedených v podkapitole 8.3.1 víme, že souběžná precese probíhá úhlovou rychlostí ω, která je v rotujícím systému nulová. To znamená, že v rotujícím systému budeme hledat body, které vzniknou protnutím klesajících větví závislostí imaginárních částí vlastních čísel s přímkou $Im\{\lambda_i\} = 0$. V případě protiběžné precese rotuje průhybová křivka úhlovou rychlostí $-\omega$, což představuje v rotujícím systému otáčkovou frekvenci -2ω. Vzhledem k symetrii Campbellova diagramu okolo osy $Im\{\lambda_i\} = 0$, můžeme náběhovou přímku respektovat ve tvaru $Im\{\lambda_i\} = 2\omega$, avšak jen pro rostoucí větve. Závěrem můžeme konstatovat, že kritické otáčky odpovídající souběžné precesi získáme jako průsečíky klesajících větví závislosti vlastních frekvencí s osou $Im\{\lambda_i\} = 0$. Kritické otáčky odpovídající protiběžné precesi získáme jako průsečíky rostoucích větví závislosti vlastních frekvencí s náběhovou přímkou $Im\{\lambda_i\} = 2\omega$.

8.3.3 Srovnání výsledků na konkrétním rotoru

Ukažme rozdíly ve výsledcích modální analýzy na konkrétním hřídeli. Vzhledem k tomu, že cílem této části není přímo získání vlastních frekvencí pro vyšetření stability, nebo bezpečnosti rotoru, budeme modelovat jednoduchý, souměrný hřídel bez lopatek a tuhých kotoučů uložený na dvou izotropních ložiscích. Hřídel je složen z totožných hřídelových prvků zapsaných v tab. na obr. 26.

Délka prvku [m]	Vnější průměr [m]
0.4	0.1
0.4	0.1
0.4	0.1
0.4	0.1
0.4	0.1
0.4	0.1

Obr. 26. Hřídelové prvky hřídele

Hřídel se skládá ze šesti prvků, dohromady má délku $2,4\,[m]$. Izotropní ložiska jsou umístěny na krajních uzlech hřídele a mají obě stejnou tuhost

$$k = 10^8\,[N \cdot m^{-1}]. \tag{8.16}$$

Hřídel je zhotoven z materiálu s hustotou

$$\rho = 7800\,[kg \cdot m^{-3}], \tag{8.17}$$

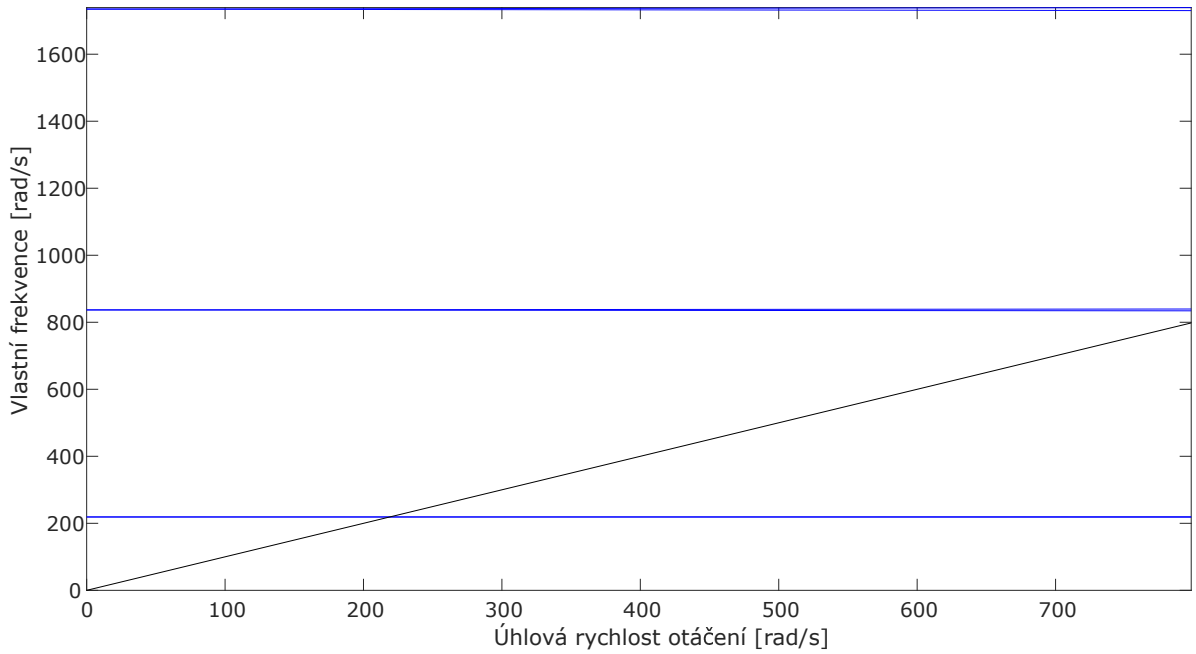
Youngovým modulem pružnosti v tahu

$$E = 210\,[GPa] \tag{8.18}$$

a modulem pružnosti ve smyku

$$G = 80\,[GPa]. \tag{8.19}$$

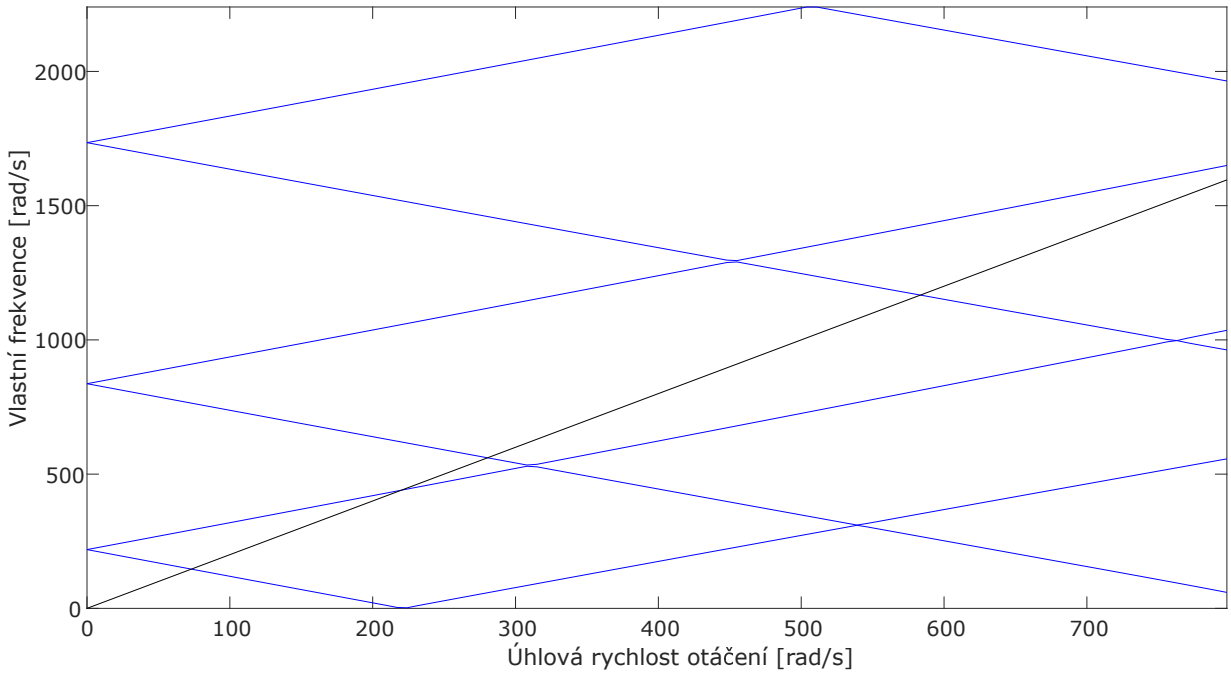
Výsledky modální analýzy jsou pro úhlové rychlosti $\omega = 0 - 800\,[rad \cdot s^1]$ zakresleny pro oba prostory (stacionární i nestacionární) v Campbellových diagramech na obr. 27 a 28.



Obr. 27. Campbellův diagram ve stacionárním souřadnicovém systému

Lze pozorovat, že první dvě vlastní frekvence ve stacionárním souřadnicovém systému protínají náběhovou přímku pro úhlové rychlost otáčení hřídele $218,7\,[rad \cdot s^1]$ a $219,2\,[rad \cdot s^1]$. Další

rezonanční hodnota již není v grafu zanesena, protože se jedná o otáčky větší než $800\,[rad \cdot s^1]$, které z provozního hlediska nejsou zajímavé.



Obr. 28. Campbellův diagram v rotujícím souřadnicovém systému

Zajímavější vyhodnocení výsledků následuje v rotujícím souřadnicovém systému. Je třeba si uvědomit, že modální analýza je prováděna v prostoru $2N$, když N je celkový počet stupňů volnosti soustavy. V takovém případě jsou vlastní čísla systému komplexně sdružená. Vlastní frekvence jsou získány jako komplexní části vlastních čísel. Pro přehlednost se do grafu vykreslují pouze kladné hodnoty tak, aby byl zaplněn první kvadrant kartézského souřadnicového systému. Na grafu si lze všimnout 1. vlastní frekvence, která se jakoby odráží od osy $Im\{\lambda_i\} = 0$. Ve skutečnosti je její správná interpretace taková, že plynule přechází ze záporných hodnot do kladných v hodnotě $220\,[rad \cdot s^1]$ a právě to je rezonanční frekvence. V podkapitole 8.3.2 bylo vysvětleno, proč se jako náběhová přímka využívá i osa $Im\{\lambda_i\} = 0$. Další vlastní frekvence protíná náběhovou přímku $Im\{\lambda_i\} = 2\omega$ také při hodnotě otáček $220\,[rad \cdot s^1]$. Další průsečíky vlastních frekvencí s touto náběhovou přímkou nejsou vyhodnoceny jako rezonanční frekvence, protože u vlastních frekvencí, které ji protínají (klesajících), hledáme průsečík s osou $Im\{\lambda_i\} = 0$.

8.4 Stabilita turbosoustrojí

Jedním z cílů práce je i posouzení stability systému. Konkrétně budeme vyšetřovat stabilitu na turbosoustrojí, které bylo modelováno v podkap. 8.2. Vzhledem k tomu, že všechny části turbíny kromě ložisek jsou modelovány v rotujícím souřadnicovém systému a ložiska jsou izotropní, jsou pohybové rovnice časově invariantní. Posouzení stability v takovém případě lze provést pouze zkoumáním reálných částí vlastních čísel systému. Přesněji musí platit

$$Re\{\lambda_i\} \leq 0, \; ... \, \forall i, \tag{8.20}$$

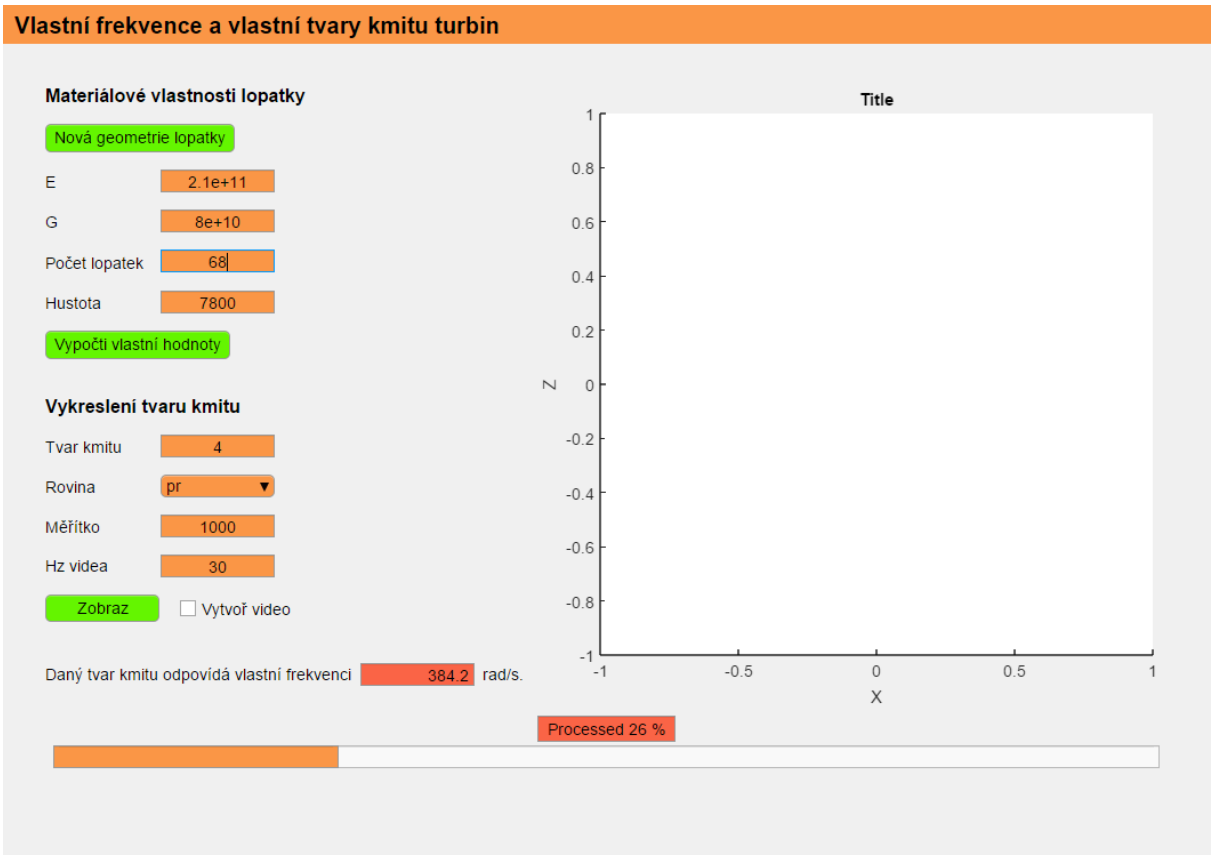
kde λ_i je i-té vlastní číslo. Stabilita bude posouzena na základě vlastních čísel systému s úhlovou rychlostí otáčení $\omega = 314\,[rad \cdot s^1]$. Největší reálná část vlastních čísel je

$$4 \cdot 10^{-5}. \tag{8.21}$$

Tuto hodnotu lze považovat za numerickou nulu. To znamená že podmínka stability 8.20 je splněna. Systém je stabilní.

9 Závěr

Všechny cíle vytyčené na začátku práce byly splněny. Byl vytvořen matematický model hřídele a neprizmatické lopatky. Tyto dva modely byly spojeny. Dále byla problematika zprogramována a následně byly vyšetřeny vlastní frekvence a vlastní tvary kmitů konkrétní turbíny při nulových a provozních otáčkách. Nakonec byla posouzena stabilita celého systému na základě vlastních čísel získaných z modální analýzy provedené při provozních otáčkách. Navíc byl vytvořen model bandáží, který ovlivňuje matici tuhosti soustavy, a model tuhého kotouče v rotujícím prostoru, který přispívá k matici hmotnosti. Pro uchycení hřídele k rámu byl odvozen model izotropních ložisek. Také bylo provedeno srovnání modelování hřídele v rotujícím a stacionárním souřadnicovém systému. Jedním z produktů programového vybavení, které bylo kompletně vytvořeno v softwaru Matlab, je i uživatelské rozhraní na obr. 29. Pomocí něj lze vypočítat vlastní frekvence konkrétní soustavy a následně vykreslit zvolený tvar kmitu ve zvoleném měřítku. Jedna z možností je také volba úhlu pohledu vykreslení. Dokonce lze vytvořit video-soubor zobrazující kmitání v čase.



Obr. 29. Uživatelské rozhraní pro výpočet vl. frekvencí a vykreslení vl. tvarů kmitu

Jedním z cílů práce bylo porovnání dvou modelů turbíny. Hřídel je modelován v obou modelech stejně. V jednom jsou lopatky modelovány pomocí 1D konečných lopatkových prvků a ve druhém jsou celé lopatkové věnce nahrazeny tuhými kotouči o odpovídající hmotnosti a momentech setrvačnosti. Jak bylo vidět v části 8.2.3, modelování poddajných lopatkových věnců nemá příliš velký vliv na výsledné chování celé soustavy. Většina rozdílů mezi vlastními frekvencemi systémů byla v řádech desetin radiánů za sekundu. V několika případech se jednalo řádově o jednotky radiánů za sekundu. Je třeba také říct, že neúměrně přesnosti výsledků roste použitím lopatkových věnců výpočetní náročnost. Model s lopatkovými věnci má $11\,428$ stupňů volnosti. Zatímco model s tuhými kotouči pouze 276. Proto je nutné vždy zvážit, jakou požadujeme od výsledku přesnost a podle toho volit způsob modelování. Pokud chceme provádět modální analýzu na modelu se dvěma lopatkovými věnci (každý o 68 lopatkách) při nenulových otáčkách, vlastní čísla a vektory jsou počítány z matice $(22\,856, 22\,856)$. Při provádění příkazu $eig()$ v Matlabu, tedy zjišťování vlastních hodnot systému, se počítač s RAM pamětí $16\,GB$ pohyboval na její hranici a výpočet trval řádově hodiny. Zatímco modální analýza systému s tuhými kotouči trvala včetně sestavení systémových matic řádově desítky sekund.

Zajímavým pozorováním při porovnávání dvou systémů bylo vmísení vlastních frekvencí lopatek mezi vlastní frekvence, při nichž kmitala celá turbína (většinou ohybově). Vždy se jednalo o 136 po sobě jdoucích vlastních frekvencí, protože systém obsahoval 136 lopatek.

Další důležité zjištění bylo, že lopatkové věnce vlastní frekvence oproti tuhým kotoučům v některých případech snižovaly a v jiných zvyšovaly. Případ snížení vlastní frekvence nastal v případě, že lopatky kmitaly v souhlasném směru s hřídelem. Naopak zvýšení vlastní frekvence nastávalo v případě protichůdného kmitání lopatek vůči kmitání hřídele. Nejjednodušším přirovnáním a vysvětlením tohoto jevu je 1D úloha závaží na pružině, zavěšené k rámu. Pro konkrétní parametry hmotnosti $m = 1\,[kg]$ a tuhosti $k = 100\,[N \cdot m^{-1}]$ je vlastní frekvence $\Omega = 10\,[rad \cdot s^1]$. Pokud za tuto hmotu připojíme sériově další pružinu o stejné tuhosti a na ni umístíme ještě jedno kilové závaží, systém bude mít dva stupně volnosti a dvě vlastní frekvence. První vlastní frekvence $\Omega_1 = 6\,[rad \cdot s^1]$ je nižší, než frekvence původního systému a její tvar kmitu je kmitání obou závaží ve stejném směru (ve fázi). Zatímco druhá vlastní frekvence $\Omega_2 = 16\,[rad \cdot s^1]$ je vyšší, než vlastní frekvence původního systému a její tvar kmitu je kmitání závaží v protifázi. Kmitání ve fázi a protifázi je ekvivalentem ohýbání lopatek po nebo proti směru ohýbání hřídele a tím snižování nebo zvyšování vlastní frekvence.

Seznam literatury

[1] Dupal, J.: *Výpočtové metody mechaniky.* Západočeská univerzita, Plzeň 1999.
[2] Dupal, J., Zajíček, M., Lukeš, V.: *1D finite element for modelling of turbine blade vibration in the field of centrifugal forces.* Applied and Computational Mechanics 13 (2019) 107-124.
[3] Vladař, P.: *Kmitání turbinové lopatky v poli odstředivých sil.* Západočeská univerzita, Plzeň 2018.
[4] *Konstrukční dokumentace lopatky* Doosan Škoda Power s.r.o.
[5] Dupal, J.: *Osobní sdělení.* Plzeň 2020.
[6] Dupal, J., Vlas, R.: *Dynamika rotorových systémů.* Plzeň 2012.