

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
KATEDRA MECHANIKY

# **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Plzeň, 2020

Karel Liška

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
KATEDRA MECHANIKY

# **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

ANALÝZA DYNAMICKÉHO CHOVÁNÍ ROTORŮ  
S KLUZNÝMI LOŽISKY

Plzeň, 2020

Karel Liška

# PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně na základě konzultací s vedoucím práce a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

V Plzni dne 30. června 2020

.....  
podpis

## PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce Ing. Miroslavu Byrtusovi, Ph.D. za čas strávený konzultacemi, pečlivým revidováním práce, trpělivost a dodáváním motivace.

Chtěl bych též poděkovat fakultě, díky níž jsem měl možnost studovat v zahraničí v rámci mého magisterského i bakalářského studia. Dále bych chtěl poděkovat celé mé rodině za velikou podporu v průběhu mých školních let.

## ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zabývá analýzou dynamického chování rotorů s kluznými ložisky. Na začátku práce jsou popsány metody, pomocí kterých lze modelovat síly přenášené olejovými vazbami u kluzných ložisek včetně kluzných ložisek s plovoucími pouzdry. V kapitole 3 je odvozen matematický model rotorového systému pomocí metody konečných prvků. V kapitole 4 jsou popsány základní postupy, kterými se vyšetřuje kmitání mechanických soustav. V této kapitole je popsán problém vlastních hodnot, převedení do stavového prostoru, metoda modální kondenzace, linearizace v okolí rovnovážné polohy a převedení do frekvenční oblasti. Všechny metody byly implementovány do vlastního programového vybavení vytvořeného v systému MATLAB. V kapitole 5 jsou zkoumány dynamické projevy kluzných ložisek na Lavalovu rotoru. V kapitole 6 je provedena analýza dynamických vlastností na reálném rotoru turbodmychadla.

**Klíčová slova:** kluzné ložisko, plovoucí kroužek, metoda konečných prvků, modální kondenzace, Lavalův rotor, turbodmychadlo.

## ABSTRACT

This master thesis deals with the analysis of the dynamic behaviour of rotors with fluid bearings. Methods for describing forces transmitted by oil films inside the journal bearings including the journal bearings with floating rings are introduced at the beginning of the work. In Chapter 3, a mathematical model of the rotor system is derived using the finite elements method. Chapter 4 describes the basic procedures which are commonly used for investigation of vibration of mechanical systems. This chapter describes the problem of eigenvalues, conversion to state space, modal condensation method, linearization at an equilibrium position and conversion signal from the time domain to the frequency domain. All methods and models were implemented in software created in MATLAB by author. Chapter 5 investigates the dynamic behaviour of journal bearings of the Laval rotor. In Chapter 6, an analysis of the dynamic behaviour of the real turbocharger rotor is performed.

**Klíčová slova:** journal bearing, floating ring, finite element method, modal reduction, Laval rotor, turbocharger.

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>5</b>
1.1 Stručný úvod do dynamiky rotorů . . . . .	5
1.2 Cíle práce . . . . .	8
<b>2 Základní modely hydrodynamických ložisek a jejich dynamické projevy</b>	<b>9</b>
2.1 Reynoldsova rovnice a její tvar pro krátké a dlouhé ložisko . . . . .	9
2.2 Hydrodynamické síly pro model krátkého a dlouhého ložiska . . . . .	12
2.3 Model kluzného ložiska s plovoucím kroužkem . . . . .	13
<b>3 Matematické modelování rotorů</b>	<b>17</b>
3.1 Modelování hřídelů . . . . .	18
3.2 Modelování kotoučů . . . . .	27
3.3 Model rotoru . . . . .	28
3.3.1 Doplnění modelu o kluzná ložiska s plovoucími pouzdry . . . . .	29
<b>4 Metody pro vyšetřování kmitání rotorových soustav</b>	<b>32</b>
4.1 Převod modelu do stavového prostoru . . . . .	32
4.2 Modální analýza - problém vl. hodnot a vl. vektorů . . . . .	33
4.3 Kondenzace modelu pomocí modální redukce . . . . .	34
4.4 Linearizace nelineárních ložiskových sil v okolí rovnovážné polohy . . . . .	37
4.5 Analýza ustálené dynamické odezvy ve frekvenční oblasti . . . . .	40
<b>5 Nejjednodušší modely rotorů s kluznými ložisky</b>	<b>41</b>
5.1 Lavalův rotor uložený na kluzných ložiskách . . . . .	41
5.2 Lavalův rotor uložený na kluzných ložiskách s plovoucím pouzdrům . . . . .	45
<b>6 Aplikace na turbodmychadlo</b>	<b>50</b>
6.1 Geometrické a materiálové parametry turbodmychadla . . . . .	50
6.2 Analýza kritických otáček . . . . .	51
6.3 Simulace v časové oblasti . . . . .	53
<b>7 Závěr</b>	<b>58</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Analýza dynamického chování rotačních strojů je důležitou úlohou aplikované mechaniky. Zasahuje do mnoha odvětví, např. automobilového či leteckého průmyslu, energetiky nebo strojírenství.

Jedním z míst, kde se dynamická analýza uplatňuje, je při vývoji nového výrobku. Již při návrhu konstrukce rotoru totiž dochází k vytvoření virtuálního modelu pomocí specializovaných CAD<sup>1</sup> softwarů. Tento model je mimo jiné podroben pevnostním a dynamickým analýzám, díky nimž je možné následně vyhodnotit kritická místa výrobku, či kritické provozní zatížení. Z těchto analýz pak lze dále optimalizovat parametry daného výrobku, čímž se stává výrobek konkurenceschopnějším. Tento proces vyústí ve výrobu prototypu, který je dále podroben zkouškám pro provozní stavy daného výrobku. Tím, že budeme znát dynamické vlastnosti výrobku již před výrobou prototypu lze významně zrychlit vývojovou část produktu a ušetřit ekonomické náklady.

Další aplikací může být diagnostika vibračních strojů. Pomocí různých typů snímačů lze měřit vibrace strojů a porovnáním s virtuálním modelem lze určit, o jaký typ vibrací se jedná. Díky znalosti příčiny vibrací je dále možno řešit odstranění těchto nežádoucích vibrací.

### 1.1 Stručný úvod do dynamiky rotorů

O historii dynamiky rotorů bylo psáno v bakalářské práci [2] a podrobněji je zpracována např. v [1] nebo [8]. Z těchto zdrojů byla sestrojena časová osa, kterou lze najít na Obr. 1.1 a která slouží pro stručný přehled významných jmen v dynamice rotorů a jejich letopočtů. Jak lze z časové osy vyčíst, počátky dynamiky rotorů sahají již do období průmyslové revoluce druhé poloviny 19. století.

V podobné době začínalo také zkoumání fyzikálních jevů kluzných ložisek. O důležité objevy v této oblasti se zprvu zasloužili pánové B. Tower, N. P. Petroff a O. Reynolds. B. Tower experimentálně popsal vytváření tlaku v olejovém filmu. O pár let později N. P. Petroff popsal analytické řešení ztrát v kluzném ložisku [9]. Ve stejné době O. Reynolds publikuje rovnici popisující tlakové rozložení v tenkém olejovém filmu [8]. Matematicky se jedná o parciální diferenciální rovnici druhého řádu, která byla na počest pana Reynoldse pojmenována jeho jménem. Reynoldsova rovnice se stala důležitou pro určování tlaků

---

<sup>1</sup>CAD neboli Computer Aided Design je druh softwaru, v němž lze vytvořit 2D nebo 3D model na základě výkresu.

ve všech typech kluzných ložisek. Tuto diferenciální rovnici lze pro speciální případy kluzných ložisek za určitých předpokladů řešit analyticky. Analytické řešení bylo nejdříve odvozeno A. Sommerfeldem pro případ nekonečně dlouhého ložiska. Pro případ krátkého ložiska bylo analytické řešení formulováno později N. Newkirkem.



Obrázek 1.1: Časová osa historie dynamiky rotorů a současný stav

Prudký rozvoj výpočetní techniky v 70. a 80. letech minulého století přinesl s sebou nové možnosti numerických výpočtů v analýze rotujících soustav. Zdaleka nejrozšířenějším nástrojem pro matematické modelování rotujících soustav se tak stala metoda konečných prvků (MKP<sup>2</sup>), která byla představena už ve 40. letech minulého století. Princip této metody spočívá v diskretizaci spojitého kontinua do konečného počtu prvků. V dnešní době existuje nespočet komerčních programových prostředků využívajících MKP. Spoléhat se pouze na numerické výstupy z těchto programů však s sebou nese jistá úskalí v podobě svádění k povrchnějšímu pohledu na výsledky bez snahy proniknout do fyzikální podstaty problému.

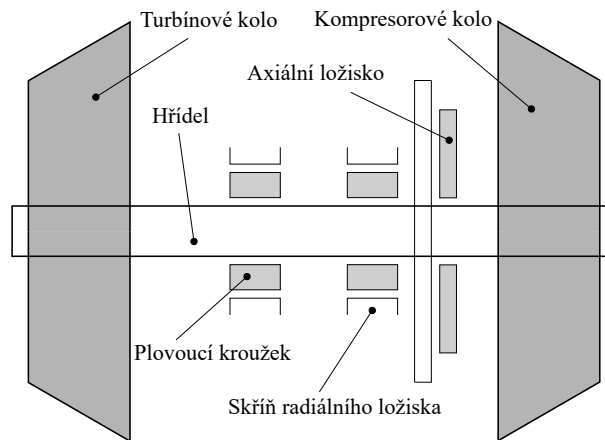
Každá rotorová soustava se skládá z několika komponent odlišné struktury. Mezi základní prvky rotorových soustav bezpochyby patří hřídel a kotouče. Existují další elementy např. ozubená kola, stator, lopatky olopatkovaných disků, kterými se však tato práce nezabývá. Mezi těmito jednotlivými prvky je vždy důležité zadefinovat vzájemnou vazbu, která může být ložisková, zubová, kloubová, spojková nebo kontaktní s prokluzem. Mo-

<sup>2</sup>MKP, anglicky Finite Element Method (FEM).



delováním těchto prvků a vazeb se zabývá kniha [3], která slouží jako inspirace pro další kapitoly.

Tato práce se zabývá pouze ložiskovými vazbami. Ložiskové vazby mohou být lineární či nelineární. V případě kluzných ložisek, která jsou v této práci podrobněji zkoumány, se jedná o vazby nelineární. Ložiskové silové vazby jsou popsány Reynoldsovou rovnicí, která má, jak už bylo zmíněno, aproximativní analytické řešení pro jisté speciální případy ložisek. V praxi se tak využívají pro válcová ložiska modely (nekonečně) krátkého a (nekonečně) dlouhého ložiska, které jsou představeny v kapitole 2. V článku [6] autoři uvádějí ještě korekci těchto modelů pomocí polynomiálních funkcí v závislosti na poměrech délky a průměru ložiska a relativní excentricitě. Tyto aproximace však nelze určit pro všechny typy ložisek. Pro obecný tvar ložisek je tedy nutné řešit původní Reynoldsovou rovnici pomocí numerických metod (např. pomocí metody konečných diferencí) [10].



Obrázek 1.2: Typická konstrukce turbodmychadla uloženého na kluzných ložiskách s plovoucím pouzdrem

Výše zmíněné metody jsou využity k dynamické analýze turbodmychadla. O obecném principu fungování turbodmychadel se pak lze dočíst např. v [2]. Typické turbodmychadlo se skládá z hřídele, turbínového kola, kompresorového kola, dvou radiálních ložisek a jednoho axiálního ložiska (viz Obr. 1.2). Radiální ložiska mohou být různého typu, nejčastěji se jedná o ložiska kuličková nebo kluzná. V případě turbodmychadel se používají většinou kluzná ložiska s plovoucím pouzdrem se dvěma olejovými filmy. První vrstva se nachází mezi hřídelem a kroužkem a druhá mezi kroužkem a ložiskovou skříní. Tato ložiska mají výborné tlumící vlastnosti ve srovnání s obvyklými kluznými nebo kuličkovými ložisky. Jejich nevýhodou jsou však nelineární efekty, které se v souvislosti se dvěma vrstvami olejových filmů vyskytují [6]. Rotor s těmito ložisky by neměl být provozován po překročení kritických otáček, kde se začnou projevovat nestability způsobené nelinearitami. Provoz v těchto otáčkách by mohl vést k poškození ložiska, čemuž je nutno se vyvarovat.

Při vytváření matematických modelů rotorů a zkoumání jejich chování se často pro první seznámení využívá nejjednodušší model rotoru - Lavalův rotor. Proto pro seznámení se s chováním ložisek s plovoucími pouzdry poslouží výborně právě tento model rotoru. Z analýzy tohoto modelu lze jednoduše pozorovat různé druhy nelineárních projevů a zkoumat vliv parametrů ložiska na dynamickou odezvu.

## 1.2 Cíle práce

Předkládaná práce navazuje na bakalářskou práci [2], v níž byla pozornost soustředěna na lineární modely rotorů turbodmychadel a na jejich dynamickou analýzu. Zde je cílem popsat a analyzovat nelineární chování rotorů na kluzných ložiskách s plovoucím pouzdrem. Cíle diplomové práce lze shrnout do několika bodů

- shrnout současný stav modelování rotorů na kluzných ložiskách,
- představit základní modely hydrodynamických ložisek a jejich projevy,
- formulovat matematické modely kmitání rotorů uložených na ložiskách s plovoucími pouzdry,
- popsat metody vyšetřování kmitání odvozených soustav,
- vytvořit výpočtový model rotoru turbodmychadla výrobce ČZ, a.s.
- provést výpočtovou analýzu rotoru turbodmychadla pro dané provozní parametry

## Kapitola 2

# Základní modely hydrodynamických ložisek a jejich dynamické projevy

Tato kapitola je věnována matematickému popisu radiálních kluzných ložisek. V první části této kapitoly je představena Reynoldsova rovnice, její předpoklady a následně je ukázáno její řešení v uzavřeném tvaru pro model krátkých a dlouhých ložisek. Dále jsou představeny pro tyto modely ložisek analytické vztahy hydrodynamických sil v nerotujícím kartézském souřadnicovém systému.

### 2.1 Reynoldsova rovnice a její tvar pro krátké a dlouhé ložisko

Reynoldsova rovnice popisuje rozložení tlaku v tenkém olejovém filmu mezi rotujícím čepem hřídele a pánví ložiska. K popsání chování kluzného ložiska je nejprve nezbytné definovat jeho geometrické parametry. Na Obr. 2.1 je možné vidět příčný a podélný řez kluzným ložiskem v kartézském souřadnicovém systému  $xyz$ . Uvažujme hřídel kruhového průřezu o poloměru  $R$  a ložiskového pouzdra též kruhového průřezu. Mezi ložiskovým pouzdem a hřídelem se nachází olejová vrstva, jejíž tloušťku v libovolném místě  $\theta$  můžeme popsat následovně

$$h = R + c - \overline{AB}, \quad (2.1)$$

kde  $c$  určuje velikost ložiskové mezery pro nevychýlený čep hřídele. Velikost úsečky  $\overline{AB}$  v libovolném místě ložiskové mezery vyjádřeným úhlovou souřadnicí  $\theta$  a v závislosti na excentricitě středu čepu hřídele a úhlu k excentricitě lze po úpravě vyjádřit jako

$$\overline{AB} = e \cos(\theta - \phi) + R \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R}\right)^2 \sin^2(\theta - \phi)}, \quad (2.2)$$

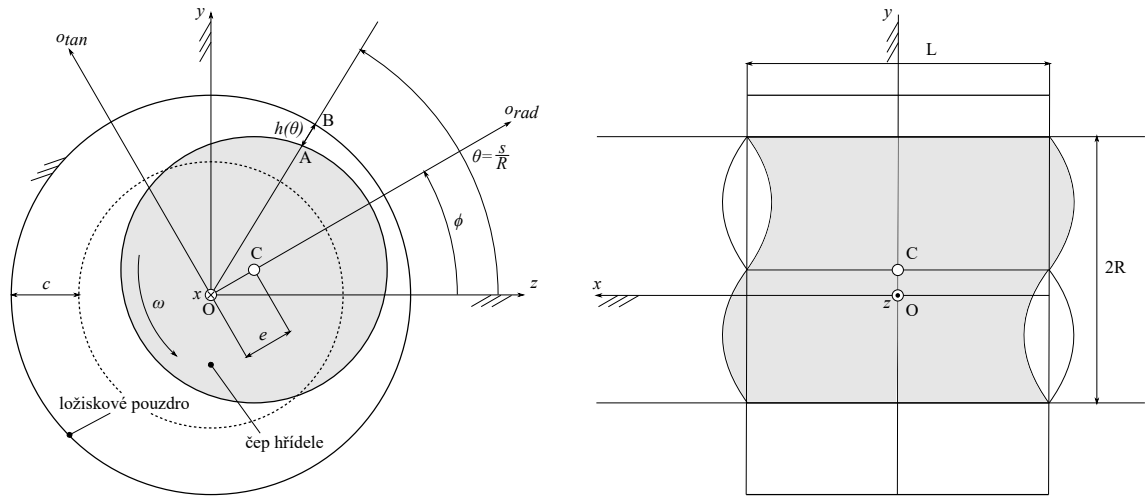
kde  $e$  značí excentricitu výchylky středu čepu hřídele a  $\phi$  úhel k excentricitě. Excentricitu je možné vyjádřit jako odmocninu kvadrátu příčných výchylek středu čepu hřídele

$$e = \sqrt{(z^2 + y^2)} \quad (2.3)$$

a úhel k excentricitě jako

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{z}{y}. \quad (2.4)$$

## 2. ZÁKLADNÍ MODELHY HYDRODYNAMICKÝCH LOŽISEK A JEJICH DYNAMICKÉ PROJEVY



Obrázek 2.1: Schéma kluzného ložiska

Je účelné zavést také relativní excentricitu, která vyjadřuje velikost excentricity vzhledem k ložiskové mezeře. Takto zavedená excentricita  $\varepsilon$  nabývá hodnot  $\varepsilon \in (0, 1)$  a může být vyjádřena tímto způsobem

$$\varepsilon = \frac{e}{c}. \quad (2.5)$$

Za předpokladu, že excentricita  $e$  bývá řádově menší než poloměr čepu hřídele  $R$  ( $e \ll R$ ), lze po zanedbání výrazu pod odmocninou ve výrazu (2.2) upravit vztah (2.1) na

$$h = c - e \cos(\theta - \phi) = c \left[ 1 - \varepsilon \cos\left(\frac{s}{R} - \phi\right) \right], \quad (2.6)$$

kde úhlová souřadnice  $\theta$  byla transformována na obvodovou souřadnici  $s$  jako podíl délky oblouku  $s$  a poloměru  $R$  (Obr. 2.1). Dále je k odvození výsledných hydrodynamických sil potřeba provést časové derivace relativní excentricity a úhlu k excentricitě. Po provedení příslušných derivací dostaneme vztahy

$$\dot{e} = \frac{z\dot{z} + y\dot{y}}{\sqrt{(z^2 + y^2)}}, \quad (2.7)$$

$$\dot{\phi} = \frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{z^2 + y^2}. \quad (2.8)$$

Pro rychlost relativní excentricity pak platí jednoduchý vztah

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{e}}{c}, \quad (2.9)$$

Tímto byly odvozeny základní geometrické a kinematické závislosti radiálního kluzného ložiska. Pro sestavení Reynoldsovy rovnice je dále potřeba přijmout několik předpokladů, jelikož proudění maziva v ložiskové mezeře u kluzných ložisek je specifické tím, že velikost ložiskové mezery  $c$  je řádově menší než velikost poloměru čepu hřídele  $R$ . Soubor těchto předpokladů se nazývá předpoklady klasické teorie hydrodynamického mazání [8] a vede ke zjednodušení při stanovení tlakového a rychlostního pole v ložiskové mezeře

- čep hřídele a ložiskové pouzdro jsou absolutně tuhé a jejich povrchy absolutně hladké,

- čep hřídele je válcový, rotačně symetrický a kruhového průřezu,
- příčný průřez otvoru v ložiskové mezeře je obecného tvaru,
- tvar ložiskové mezery je v axiálním tvaru konstantní,
- šířka ložiskové mezery je velmi malá vzhledem k poloměru hřídele ( $c \ll R$ ),
- mazivo je Newtonovská kapalina,
- proudění maziva v ložiskové mezeře je laminární a isotermické,
- tlak maziva se v radiálním směru nemění,
- zanedbají se setrvačné účinky maziva a vliv zakřivení olejového filmu.

Reynoldsova rovnice pro případ, kdy se navíc ložisko nepohybuje v axiálním směru, nabývá tvaru níže. Může být odvozena buď z Navier-Stokesových rovnic nebo z rovnic statické rovnováhy elementárního prvku vyjmutého z vrstvičky maziva a má následující tvar [8]

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \rho h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial}{\partial \theta} (h\rho) + 12\mu \frac{\partial}{\partial t} (h\rho), \quad (2.10)$$

kde  $x$  představuje axiální souřadnici dle Obr. 2.1,  $\theta$  úhlovou souřadnici,  $\mu$  viskozitu oleje v ložiskové mezeře,  $\omega$  úhlovou rychlost,  $R$  poloměr hřídele,  $\rho$  hustotu maziva a  $t$  značí čas. Rovnice (2.10). Pro případ, kdy je mazivo považováno za nestlačitelnou kapalinu ( $\rho = \text{konst.}$ ), se předchozí rovnice zjednoduší do tvaru

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Tato rovnice platí pro všechny typy ložisek s předpoklady klasické dynamické teorie hydrodynamického mazání. Jedná se o nelineární parciální diferenciální rovnici 2. řádu, která se dá řešit pomocí numerických metod, např. metodou konečných diferencí. K ušetření výpočtového času a zjednodušení matematického modelu se však často používají již zmíněné modely pro krátké a dlouhé ložisko. Zavedme poměr délky ložiska  $\eta = L/D$ , jehož limitní hodnoty slouží k vytvoření daných modelů ložisek.

Za dlouhé ložisko se považuje takové, jehož poměr  $\eta \rightarrow \infty$  nebo takové, které je na svých čelech dobře těsněno. U tohoto typu ložiska značně převládá proudění v obvodovém směru nad prouděním ve směru axiálním [8]. Protože ložiskové povrchy se v axiálním směru nepohybují a je možné předpokládat, že průtok je v tomto směru nulový, je nulový i tlakový spád. Proto lze (2.11) přepsat do tvaru Reynoldsovy rovnice pro dlouhé ložisko jako

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Naproti tomu se za krátké ložisko považuje takové, jehož poměr  $\eta \rightarrow 0$ , a které není na čelech těsněno nebo jehož těsnění je málo účinné. Průtok je tedy v obvodovém směru

nulový, tedy  $\partial p / \partial \theta \cong 0$ . Vynecháním tohoto členu přepíšeme Reynoldsovu rovnici (2.11) pro krátké ložisko do tvaru [14]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Pro Reynoldsovy rovnice (2.12) a (2.13) lze v těchto speciálních případech najít řešení v uzavřeném tvaru pomocí integrace a zvolením okrajových podmínek za předpokladu, že tlak oleje v místech jeho přívodu do ložiska ovlivňuje tlakové rozložení v olejovém filmu pouze nevýznamně [8]. Tím dostaneme analytické vyjádření rozložení tlaku v ložiskové mezeře.

## 2.2 Hydrodynamické síly pro model krátkého a dlouhého ložiska

Pro implementaci do matematického modelu rotoru je zapotřebí vyjádřit ložiskové síly ve směrech  $y$  a  $z$ , viz Obr. 2.1. Síly je možné nejprve vyjádřit do dvou vzájemně na sebe kolmých sil ve směru radiálním a tečném (=tangenciálním) ( $o_{rad}$  a  $o_{tan}$  na Obr. 2.1). V případě, že dojde v ložisku ke kavitaci<sup>3</sup> v rozsahu jedné poloviny obvodu za nejužším místem mezery ( $\pi$  filmová ložiska), jsou obecně síly v těchto směrech řešením integrálů [8]

$$F^{rad} = -2R \int_0^{L/2} \int_{\phi+\pi}^{\phi+2\pi} p \cos(\theta - \phi) d\theta dx \quad (2.14)$$

$$F^{tan} = -2R \int_0^{L/2} \int_{\phi+\pi}^{\phi+2\pi} p \sin(\theta - \phi) d\theta dx \quad (2.15)$$

díky analytickému řešení Reynoldsovy rovnice pro krátké a dlouhé ložisko po provedení příslušných integrací dostáváme výsledné předpisy pro jednotlivé hydrodynamické síly v radiálním a tečném směru pro model dlouhého ložiska [6]

$$F_{HD,rad}^{(IL)} = -6\mu RL \left( \frac{R}{c} \right)^2 \left[ |\omega - 2\dot{\phi}| \frac{2\varepsilon^2}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} + \frac{\pi\dot{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right], \quad (2.16)$$

$$F_{HD,tan}^{(IL)} = 6\mu RL \left( \frac{R}{c} \right)^2 \left[ (\omega - 2\dot{\phi}) \frac{\pi\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} + \frac{4\dot{\varepsilon}}{(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)} \right]. \quad (2.17)$$

Označení IL značí dlouhé ložisko (z angličtiny IL = infinitely long). Obdobně získáme hydrodynamické síly pro model krátkého ložiska

$$F_{HD,rad}^{(IS)} = -\mu RL \left( \frac{L}{c} \right)^2 \left[ |\omega - 2\dot{\phi}| \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} + \frac{\pi(1 + 2\varepsilon^2)\dot{\varepsilon}}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right], \quad (2.18)$$

<sup>3</sup>**Kavitace** je jev, kdy v olejovém filmu vznikají bubliny vzduchu důsledkem poklesu tlaku v prostoru ložiskové mezery [11].

$$F_{HD,tan}^{(IS)} = \mu RL \left( \frac{L}{c} \right)^2 \left[ (\omega - 2\dot{\phi}) \frac{\pi \varepsilon}{4(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} + \frac{2\varepsilon \dot{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right]. \quad (2.19)$$

Stejně jako v předchozím případě IS značí model krátkého ložiska (z angličtiny IS = infinitely short). Pro transformaci do směru  $z$  a  $y$  použijeme následující transformační vztahy

$$\begin{bmatrix} F_{HD,z}^{(X)} \\ F_{HD,y}^{(X)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{HD,rad}^{(X)} \\ F_{HD,tan}^{(X)} \end{bmatrix}, \quad X = IL, IS, \quad (2.20)$$

kde goniometrické funkce pro úhel  $\phi$  lze vyjádřit

$$\cos \phi = \frac{z}{e}, \quad \sin \phi = \frac{y}{e}. \quad (2.21)$$

Odvozené hydrodynamické síly pro model krátkého a dlouhého ložiska se v praxi používají pro [6]

- $\eta < 0,5$  pro model krátkého ložiska,
- $\eta > 2$  pro model dlouhé ložiska.

V ostatních případech, kdy  $\eta \in (0,5;2)$  mohou výsledky z těchto modelů poskytnout aspoň přibližnou informaci o vlivu hydrodynamických sil na chování rotoru. V praxi se pak používají pro tento rozsah poměru délky a průměru ložiska používají korekce modelů dlouhého a krátkého ložiska [6],[7].

### 2.3 Model kluzného ložiska s plovoucím kroužkem

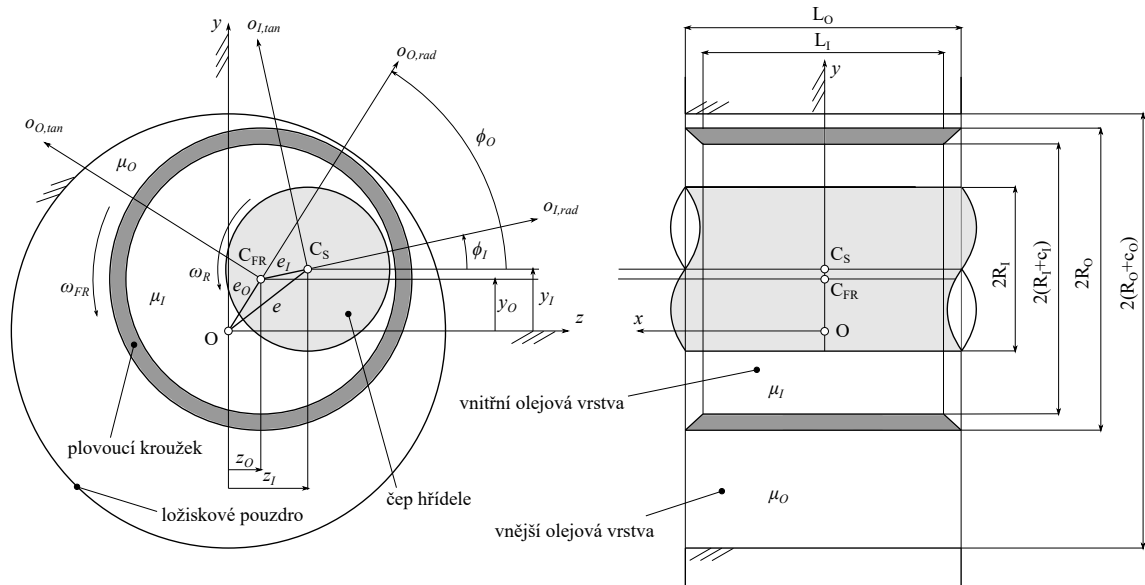
Nyní uvažujme kluzné radiální ložisko s plovoucím kroužkem (pouzdrém). Řez tímto typem ložiska je znázorněn na Obr. 2.2. V ložisku se nyní vyskytují 2 olejové vrstvy: jedna mezi hřídelem a kroužkem a druhá mezi kroužkem a ložiskovým pouzdrém. Bod  $C_S$  značí střed čepu hřídele a bod  $C_{FR}$  střed plovoucího kroužku. Indexy  $O$ , resp.  $I$  na Obr. 2.2 označují souřadnice a parametry plovoucího kroužku, resp. středu čepu hřídele.

Je zřejmé, že hřídel koná relativní pohyb uvnitř kroužku. Je tedy potřeba vyjádřit relativní souřadnice středu čepu hřídele vůči středu kroužku, protože tloušťka olejové vrstvy mezi kroužkem a hřídelem závisí na jejich vzájemné poloze. Zavedme tyto relativní souřadnice jako

$$z_{rel} = z_I - z_O, \quad (2.22)$$

$$y_{rel} = y_I - y_O, \quad (2.23)$$

kde  $y_I, y_O$ , resp.  $z_I, z_O$  vyjadřují výchylky středu čepu hřídele a plovoucího kroužku ve směru horizontálním, resp. vertikálním. Takto zavedené souřadnice mají tu výhodu, že pro ně platí stejné veškeré odvozené geometrické závislosti jako pro obyčejné kluzné ložisko. Ty také platí pro geometrický střed plovoucího kroužku. Pro úplnost a přehlednost jsou



Obrázek 2.2: Schéma kluzného ložiska s plovoucím kroužkem

zde všechny tyto závislosti uvedeny. Excentricita čepu středu hřídele může být vyjádřena následovně

$$e_I = \sqrt{z_{rel}^2 + y_{rel}^2}. \quad (2.24)$$

Excentricitu středu kroužku je možné vyjádřit na základě příčných výchylek v souřadnicovém systému  $xyz$  se středem v geometrickém středu ložiskového pouzdra

$$e_O = \sqrt{z_O^2 + y_O^2}. \quad (2.25)$$

Jejich relativní excentricity nabývají tvaru

$$\varepsilon_I = \frac{e_I}{c_I}, \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_O = \frac{e_O}{c_O}. \quad (2.27)$$

Pro časovou derivaci excentricity středu čepu hřídele platí

$$\dot{e}_I = \frac{z_{rel}\dot{z}_{rel} + y_{rel}\dot{y}_{rel}}{e_I}, \quad (2.28)$$

kde  $\dot{z}_{rel}$  a  $\dot{y}_{rel}$  jsou časové derivace relativních výchylek

$$\dot{z}_{rel} = \dot{z}_I - \dot{z}_O, \quad (2.29)$$

$$\dot{y}_{rel} = \dot{y}_I - \dot{y}_O. \quad (2.30)$$

Pro časovou derivaci excentricity středu plovoucího kroužku platí

$$\dot{e}_O = \frac{z_O\dot{z}_O + y_O\dot{y}_O}{e_O}. \quad (2.31)$$



Časové derivace relativních excentricit můžeme psát ve tvaru

$$\dot{\varepsilon}_I = \frac{\dot{e}_I}{c_I}, \quad (2.32)$$

$$\dot{\varepsilon}_O = \frac{\dot{e}_O}{c_O}. \quad (2.33)$$

Úhly k excentricitám jsou

$$\phi_I = \arctg \frac{z_{rel}}{y_{rel}}, \quad (2.34)$$

$$\phi_O = \arctg \frac{z_O}{y_O}. \quad (2.35)$$

a jejich časové derivace

$$\dot{\phi}_I = \frac{y_{rel}\dot{z}_{rel} - z_{rel}\dot{y}_{rel}}{z_{rel}^2 + y_{rel}^2}. \quad (2.36)$$

$$\dot{\phi}_O = \frac{y_O\dot{z}_O - z_O\dot{y}_O}{z_O^2 + y_O^2}. \quad (2.37)$$

Hydrodynamické síly pro model dlouhého a krátkého ložiska v radiálním a tečném směru jsou formálně ve stejném tvaru jako dříve odvozené vztahy (2.16) - (2.19). V případě ložiska s plovoucím pouzdem se však velikost hydrodynamických sil liší z důvodu odlišných parametrů olejových filmů a rozdílných rychlostí olejového filmu na vnitřní a vnější straně ložiska. Rozepíšeme znovu hydrodynamické síly v radiálním a tečném směru tentokrát pro vnější a vnitřní ložisko

$$F_{X,rad}^{(IL)} = -6\mu_X R_X L_X \left( \frac{R_X}{c_X} \right)^2 \left[ |\omega_X - 2\dot{\phi}_X| \frac{2\varepsilon_X^2}{(2 + \varepsilon_X^2)(1 - \varepsilon_X^2)} + \frac{\pi\dot{\varepsilon}_X}{(1 - \varepsilon_X^2)^{3/2}} \right], \quad (2.38)$$

$$F_{X,tan}^{(IL)} = 6\mu_X R_X L_X \left( \frac{R_X}{c_X} \right)^2 \left[ (\omega_X - 2\dot{\phi}_X) \frac{\pi\varepsilon_X}{(2 + \varepsilon_X^2)(1 - \varepsilon_X^2)^{1/2}} + \frac{4\dot{\varepsilon}_X}{(1 + \varepsilon_X)(1 - \varepsilon_X^2)} \right], \quad (2.39)$$

$$F_{X,rad}^{(IS)} = -\mu_X R_X L_X \left( \frac{L_X}{c_X} \right)^2 \left[ |\omega_X - 2\dot{\phi}_X| \frac{\varepsilon_X^2}{(1 - \varepsilon_X^2)^2} + \frac{\pi(1 + 2\varepsilon_X^2)\dot{\varepsilon}_X}{2(1 - \varepsilon_X^2)^{5/2}} \right], \quad (2.40)$$

$$F_{X,tan}^{(IS)} = \mu_X R_X L_X \left( \frac{L_X}{c_X} \right)^2 \left[ (\omega_X - 2\dot{\phi}_X) \frac{\pi\varepsilon_X}{4(1 - \varepsilon_X^2)^{3/2}} + \frac{2\varepsilon_X\dot{\varepsilon}_X}{(1 - \varepsilon_X^2)^2} \right], \quad (2.41)$$

kde  $X = I, O$  označuje parametry pro vnitřní ( $I$ ), resp. vnější ( $O$ ) olejovou vrstvu. Radiální směr ( $o_{O,rad}$  a  $o_{I,rad}$ ) stejně jako tečný směr ( $o_{O,tan}$  a  $o_{I,tan}$ ) lze vyčíst z Obr. 2.2.

## 2. ZÁKLADNÍ MODELY HYDRODYNAMICKÝCH LOŽISEK A JEJICH DYNAMICKÉ PROJEVY

---

Rychlost na vnitřním (efektivní rychlost  $\omega_I$ ) a vnějším povrchu kroužku ( $\omega_O$ ), která je potřebná pro dosazení do hydrodynamických sil je vyjádřena [6]

$$\omega_I = \omega_R + \omega_{FR}, \quad \omega_O = \omega_{FR}, \quad (2.42)$$

kde  $\omega_R$  je rychlost otáčení rotoru a  $\omega_{FR}$  rychlost otáčení kroužku, pro kterou platí  $\omega_{FR} = \dot{\varphi}_{FR}$ . Rotační pohyb kroužku řeší pohybová rovnice [6]

$$I_{FR}\ddot{\varphi}_{FR} = M_I + M_O. \quad (2.43)$$

$M_I$ , resp.  $M_O$  jsou momenty od třecích sil, které působí na vnitřní, resp. vnější straně plovoucího kroužku ve tvaru [6]

$$M_I = \frac{2\pi\mu_I R_I^3 L_I (\omega_R - \dot{\varphi}_{FR})}{c_I \sqrt{1 - \varepsilon_I^2}} + \frac{y_{rel} F_{I,z}^{(Y)} - z_{rel} F_{I,y}^{(Y)}}{2}, \quad (2.44)$$

$$M_O = \frac{-2\pi\mu_O R_O^3 L_O \dot{\varphi}_{FR}}{c_O \sqrt{1 - \varepsilon_O^2}} + \frac{y_O F_{O,z}^{(Y)} - z_O F_{O,y}^{(Y)}}{2}. \quad (2.45)$$

Vztahy (2.44) a (2.45) lze ještě aproximovat dle [17] vynecháním druhých sčítanců na

$$M_I = \frac{2\pi\mu_I R_I^3 L_I (\omega_R - \dot{\varphi}_{FR})}{c_I \sqrt{1 - \varepsilon_I^2}}, \quad (2.46)$$

$$M_O = \frac{-2\pi\mu_O R_O^3 L_O \dot{\varphi}_{FR}}{c_O \sqrt{1 - \varepsilon_O^2}}. \quad (2.47)$$

Síly  $F_{I,z}^{(Y)}$ ,  $F_{I,y}^{(Y)}$ ,  $F_{O,z}^{(Y)}$ ,  $F_{O,y}^{(Y)}$  v (2.44) a (2.45) jsou hydrodynamické síly transformované do směru os  $z$  a  $y$ . Ty je možné vyjádřit obdobně jako u (2.21). Tedy

$$\begin{bmatrix} F_{I,z}^{(Y)} \\ F_{I,y}^{(Y)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_I & -\sin \phi_I \\ \sin \phi_I & \cos \phi_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{I,rad}^{(Y)} \\ F_{I,tan}^{(Y)} \end{bmatrix}, \quad Y = IL, IS, \quad (2.48)$$

$$\begin{bmatrix} F_{O,z}^{(Y)} \\ F_{O,y}^{(Y)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_O & -\sin \phi_O \\ \sin \phi_O & \cos \phi_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{O,rad}^{(Y)} \\ F_{O,tan}^{(Y)} \end{bmatrix}, \quad Y = IL, IS. \quad (2.49)$$

Goniometrické funkce v předchozích výrazech mohou být vyjádřeny jako

$$\cos \phi_I = \frac{z_{rel}}{e_I}, \quad \sin \phi_I = \frac{y_{rel}}{e_I}, \quad (2.50)$$

$$\cos \phi_O = \frac{z_O}{e_O}, \quad \sin \phi_O = \frac{y_O}{e_O}. \quad (2.51)$$

Při analýze rotoru s plovoucími kroužky bývá předmětem zkoumání také rychlost otáčení kroužku. Zavádí se proto „poměr rychlosti kroužku“<sup>4</sup> jako poměr mezi rychlostí otáčení kroužku a rychlostí otáčení rotoru

$$RSR(t) = \frac{\omega_{FR}(t)}{\omega_R}. \quad (2.52)$$

Pro dané otáčky rotoru  $\omega_R$  se pak v praxi vezme nějaký časový úsek v ustáleném stavu  $\omega_{FR}$  se v tomto časovém úseku zprůměruje, čímž dostaneme hodnotu  $RSR$  pro dané otáčky rotoru.

---

<sup>4</sup>Ring speed ratio = RSR [6]

# Kapitola 3

## Matematické modelování rotorů

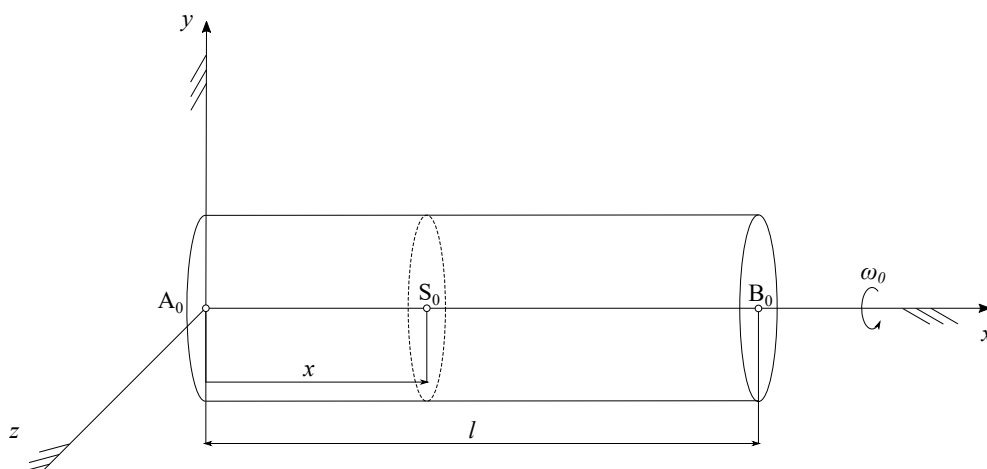
V této kapitole jsou odvozeny matematické modely hřídelů, tuhých kotoučů a ložiskových vazeb. Těmito prvky lze totiž modelovat celou řadu rotorů. Smyslem matematického modelování jednotlivých prvků rotoru je vytvořit takový model, který věrně vystihuje chování rotoru v reálném světě a přitom je dostatečně jednoduchý.

V první části je odvozen matematický model hřídele, který je základním stavebním kamenem každého rotoru. Hřídel lze uvažovat jako 1D kontinuum z toho důvodu, že jeho podélný rozměr je mnohem větší než rozměr příčný. Diskretizace kontinua je provedena pomocí metody konečných prvků.

V další části je odvozen model tuhého kotouče. Uvažování kotouče jako tuhého tělesa vede ke snazší tvorbě celkového modelu a pro zkoumání dynamických vlastností celého rotoru je toto zjednodušení uspokojivé. Kotouče, mezi které patří ozubená kola, spojky, ventilátory, disky olopatkovaných kol apod. lze modelovat také jako poddajná tělesa. V tomto případě by musela být použita opět metoda konečných prvků pro provedení diskretizace daného kotouče.

Ložisková vazba byla odvozena v předchozí kapitole. Zde je navíc uvedeno, jakým způsobem dojde k její implementaci do hřídelového subsystému.

V poslední části této kapitoly je ukázáno, jakým způsobem dojde k provázání všech odvozených subsystémů. Provázání subsystémů dá vzniknout globálnímu matematickému modelu rotoru, který slouží jako vstup do numerických simulací.

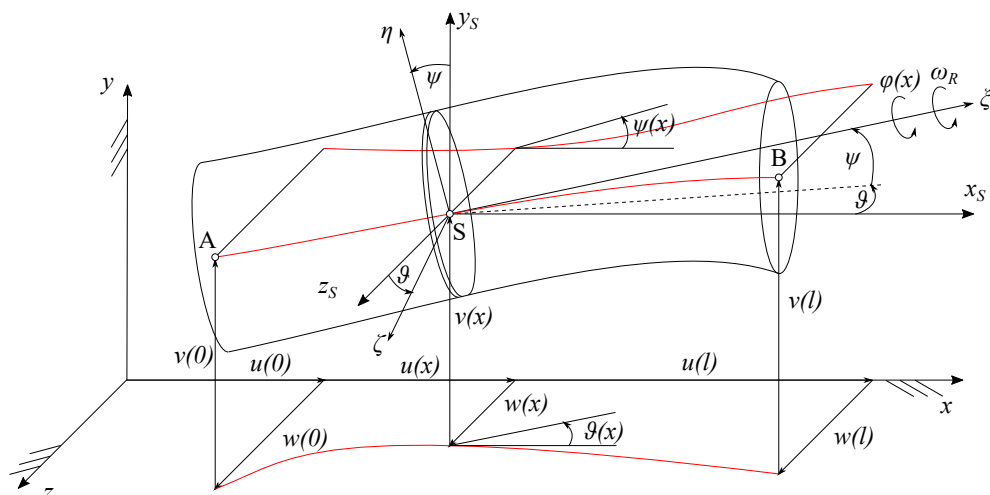


Obrázek 3.1: Počáteční konfigurace hřídelového prvku

### 3.1 Modelování hřídelů

Uvažujme prizmatický hřídelový element (=prvek) obecného průřezu  $A$  o délce  $l$  v pevném souřadnicovém systému  $xyz$ . Nechť hřídelový prvek je navíc z homogenního materiálu s hustotou  $\rho$ , Poissonovou konstantou  $\nu$  modulem pružnosti v tahu  $E$  a modulem pružnosti ve smyku  $G$ . Hřídelový element se otáčí konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_R$ , přičemž osa rotace je zvolena jako osa souřadnicového systému  $x$ . Na 3.1 lze vidět tento element v nedeformované konfiguraci. Body  $A_0$ ,  $B_0$  a  $S_0$  na tomto obrázku vyjadřují body těžišť průřezů na počátku, na konci a v obecném místě  $x$  elementu.

Vlivem působení sil dojde k deformaci tohoto hřídelového elementu, přičemž dochází k posuvu bodů  $A_0$ ,  $B_0$  a  $S_0$ . Tento stav je zobrazen na 3.2. Prvním úkolem při aplikaci metody konečných prvků je získat aproximační vztahy mezi deformacemi a posuvy. Deformaci hřídele v místě  $x$  a čase  $t$  lze popsat příčnými výchylkami  $v(x, t)$  a  $w(x, t)$  ve směrech osy  $y$  a  $z$ . Natočení v tomto místě je popsáno Eulerovými úhly  $\psi(x, t)$  a  $\vartheta(x, t)$ . Podélnou výchylku označíme jako  $u(x, t)$  a torzní natočení  $\varphi(x)$ . Těmito souřadnicemi je jednoznačně určena poloha tělesa, jež má v prostoru 6 stupňů volnosti.



Obrázek 3.2: Hřídelový prvek v deformované konfiguraci

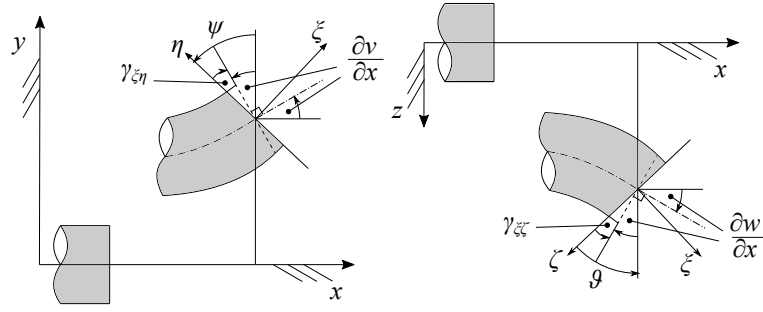
Uvažujme, že jednotlivé řezy po deformaci zůstávají rovinné. Potom můžeme vyjádřit úhly natočení v závislosti na příčných jako na Obr. 3.3 pomocí Timošenkovy teorie. Výhoda Timošenkovy teorie spočívá v tom, že je obecnější než Rayleighova, která zanedbává vliv zkosu. K Rayleighově teorii lze pak elegantně přejít z odvozených vztahů. Podle Timošenkovy teorie platí

$$\psi = \frac{\partial v}{\partial x} - \bar{\gamma}_{\xi\eta}, \quad \vartheta = -\frac{\partial w}{\partial x} + \bar{\gamma}_{\xi\zeta}, \quad (3.1)$$

kde  $\bar{\gamma}_{xy}$  a  $\bar{\gamma}_{xy}$  jsou průměrné zkosity vyvolané posouvacími silami. Tyto průměrné zkosity je možné vyjádřit jako [3]

$$\bar{\gamma}_{\xi\eta} = \frac{E J_\zeta}{k_\zeta A G} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \bar{\gamma}_{\xi\zeta} = -\frac{E J_\eta}{k_\eta A G} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (3.2)$$

kde  $E$ ,  $G$  jsou moduly pružnosti v tahu a ve smyku,  $A$  je průřezová plocha,  $J_\eta$ ,  $J_\zeta$  kvadratické momenty k příslušným osám a smykové součinitelé  $k_\eta$ ,  $k_\zeta$ , jejichž hodnoty lze od různých autorů najít na [15].



Obrázek 3.3: Úhly natočení dle Timošenkovy teorie

Jednotlivé deformace lze aproximovat bázovými funkcemi. Příčné výchylky budou aproximovány kubickými funkcemi

$$v(x, t) = C_1(t) + C_2(t)x + C_3(t)x^2 + C_4(t)x^3 = \Phi(x)\mathbf{c}_1(t), \quad (3.3)$$

$$w(x, t) = C_5(t) + C_6(t)x + C_7(t)x^2 + C_8(t)x^3 = \Phi(x)\mathbf{c}_2(t). \quad (3.4)$$

V obou případech je vektor násadových funkcí [1] ve tvaru

$$\Phi(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]. \quad (3.5)$$

Úhly natočení lze aproximovat kvadratickými funkcemi

$$\psi(x, t) = B_1(t) + B_2(t)x + B_3(t)x^2 = \Theta(x)\mathbf{b}_1(t), \quad (3.6)$$

$$\vartheta(x, t) = B_4(t) + B_5(t)x + B_6(t)x^2 = \Theta(x)\mathbf{b}_2(t) \quad (3.7)$$

s vektorem násadových funkcí

$$\Theta(x) = [1 \quad x \quad x^2]. \quad (3.8)$$

Podélné a torzní deformace budou aproximovány lineárními polynomy

$$u(x, t) = C_9(t) + C_{10}(t)x = \Psi(x)\mathbf{c}_3(t), \quad (3.9)$$

$$\varphi(x, t) = C_{11}(t) + C_{12}(t)x = \Psi(x), \mathbf{c}_4(t), \quad (3.10)$$

kde vektor násadových funkcí je

$$\Psi(x) = [1 \quad x]. \quad (3.11)$$

Dosažením poměrného zkosu (3.2) a aproximačních vztahů (3.3) a (3.6) resp. (3.4) a (3.7) do (3.1) získáme

$$\left[ \Theta(x) + \frac{EJ_\zeta}{k_\zeta AG} \Theta''(x) \right] \mathbf{b}_1(t) = \Phi'(x)\mathbf{c}_1(t), \quad (3.12)$$

$$\left[ \Theta(x) + \frac{EJ_\eta}{k_\eta AG} \Theta''(x) \right] \mathbf{b}_2(t) = -\Phi'(x)\mathbf{c}_2(t). \quad (3.13)$$

Rozepsáním vztahu (3.12) a porovnáním koeficientů u mocnin  $x$  na levé a pravé straně dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} x^0 : \quad B_1(t) &= C_2(t) - \frac{6EJ_\zeta}{k_\zeta AG} C_4(t) \\ x^1 : \quad B_2(t) &= 2C_3(t) \\ x^2 : \quad B_3(t) &= 3C_4(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Obdobně lze rozepsat také výraz (3.13)

$$\begin{aligned} x^0 : \quad B_1(t) &= -C_2(t) + \frac{6EJ_\eta}{k_\eta AG} C_4(t) \\ x^1 : \quad B_2(t) &= -2C_3(t) \\ x^2 : \quad B_3(t) &= -3C_4(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Zavedením smykových parametrů dle [3].

$$\kappa_\zeta = \frac{6EJ_\zeta}{k_\zeta AGl^2}, \quad \kappa_\eta = \frac{6EJ_\eta}{k_\eta AGl^2}, \quad (3.16)$$

a dosazením do (3.14), (3.15) získáme vztah mezi vektory koeficientů aproximačních koeficientů

$$\mathbf{b}_1(t) = \mathbf{H}_\zeta \mathbf{c}_1(t), \quad \mathbf{b}_2(t) = -\mathbf{H}_\eta \mathbf{c}_2(t), \quad (3.17)$$

kde matice  $\mathbf{H}_\zeta$  a  $\mathbf{H}_\eta$  jsou

$$\mathbf{H}_\zeta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\kappa_\zeta l^2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\kappa_\eta l^2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Aproximační polynomy pro úhly natočení řezu hřídelového prvku (3.6) a (3.7) lze nyní vyjádřit

$$\psi(x, t) = \Theta(x) \mathbf{H}_\zeta \mathbf{c}_1(t), \quad (3.19)$$

$$\vartheta(x, t) = \Theta(x) \mathbf{H}_\eta \mathbf{c}_2(t). \quad (3.20)$$

K vyjádření posuvu a natočení v obecném místě  $x$  je potřeba pro všechny aproximace výchylek a natočení (3.3),(3.4),(3.26),(3.10),(3.19),(3.20) znát vektory koeficientů  $\mathbf{c}_1(t)$ ,  $\mathbf{c}_2(t)$ ,  $\mathbf{c}_3(t)$ ,  $\mathbf{c}_4(t)$ . Použijeme kompaktní zápis, kde lze v souřadnicovém systému použít vektory zobecněných posuvů uzlů elementu [3]. Jako uzly označíme krajní body hřídelového prvku A ( $x = 0$ ) a B ( $x = l$ ) na Obr. 3.2. Vektor zobecněných souřadnic bude

$$\mathbf{q}^{(e)}(t) = \left[ \mathbf{q}_1^{(e)T}(t) \quad \mathbf{q}_2^{(e)T}(t) \quad \mathbf{q}_3^{(e)T}(t) \quad \mathbf{q}_4^{(e)T}(t) \right]^T, \quad (3.21)$$

kde jednotlivé vektory vyjadřují okrajové podmínky elementu

$$\mathbf{q}_1^{(e)}(t) = \begin{bmatrix} v(0, t) \\ \psi(0, t) \\ v(l, t) \\ \psi(l, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2^{(e)}(t) = \begin{bmatrix} w(0, t) \\ \vartheta(0, t) \\ w(l, t) \\ \vartheta(l, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3^{(e)}(t) = \begin{bmatrix} u(0, t) \\ u(l, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_4^{(e)}(t) = \begin{bmatrix} \varphi(0, t) \\ \varphi(l, t) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Do výše uvedených vektorů dosadíme z aproximačních vztahů (3.3), (3.4), (3.26), (3.10), (3.19), (3.20) a získáme

$$\mathbf{q}_j^{(e)}(t) = \mathbf{S}_j \mathbf{c}_j, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (3.23)$$

Jednotlivé matice  $\mathbf{S}_j$  jsou konstantní matice násadových koeficientů a jsou v následujícím tvaru

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\kappa_\zeta l^2 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2L & (3 - \kappa_\zeta)l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \kappa_\eta l^2 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -(3 - \kappa_\zeta)l^2 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}.$$

Se znalostí těchto matic lze nyní vyjádřit vektory koeficientů úpravou vztahu (3.25) na

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{S}_j^{-1} \mathbf{q}_j^{(e)}(t), \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (3.25)$$

Dosazením vektorů koeficientů lineárních kombinací do aproximačních vztahů (3.3), (3.4), (3.26), (3.10), (3.19), (3.20) dostaneme aproximační vztahy mezi deformacemi a zobecněnými posuvy uzlů (krajních bodů elementu)

$$u(x, t) = \Psi(x) \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3^{(e)}(t), \quad (3.26)$$

$$v(x, t) = \Phi(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1^{(e)}(t), \quad (3.27)$$

$$w(x, t) = \Phi(x) \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2^{(e)}(t), \quad (3.28)$$

$$\varphi(x, t) = \Psi(x), \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4^{(e)}(t), \quad (3.29)$$

$$\vartheta(x, t) = -\Theta(x) \mathbf{H}_\eta \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2^{(e)}(t), \quad (3.30)$$

$$\psi(x, t) = \Theta(x) \mathbf{H}_\zeta \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1^{(e)}(t). \quad (3.31)$$

Tento přístup je velice dobře algoritmizovatelný. Pro hřídel kruhového či mezikruhového průřezu, které se v praxi velice často vyskytují, lze navíc předchozí vztahy ještě formálně zjednodušit, jelikož pro kruhový průřez jsou kvadratické momenty shodné  $J_\zeta = J_\eta = J$ . Stejně tak smykové součinitelé  $k_\eta = k_\zeta = k$ , a tím pádem i smykové parametry  $\kappa_\zeta = \kappa_\eta = \kappa$ . Potom se matice  $\mathbf{H}_\zeta$  a  $\mathbf{H}_\eta$  ve výrazech (3.30) a (3.31) rovnají  $\mathbf{H}_\zeta = \mathbf{H}_\eta = \mathbf{H}$ . Smykový součinitel  $k$  pro kruhový průřez je možné podle Timošenska a Kaneka [15] určit jako

$$k = \frac{6(1 + \nu)^2}{7 + 12\nu + 4\nu^2}, \quad (3.32)$$

kde  $\nu$  je Poissonova konstanta.

Matice hřídelových prvků bez uvažování tlumení získáme aplikací Lagrangeových rovnic 2. druhu porovnáním se standardním tvarem matic popisující kmitání na pravé straně rovnice

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \frac{\partial E_p^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega_R \mathbf{G}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}, \quad (3.33)$$

kde  $E_k^{(e)}$  je hřídelová energie elementu a  $E_p^{(e)}$  potenciální (deformační) energie hřídelového prvku. Matice na pravé straně  $\mathbf{M}^{(e)}$ ,  $\mathbf{G}^{(e)}$  a  $\mathbf{K}^{(e)}$  jsou popořadě matice hmotnosti, gyroskopických účinků a tuhosti, přičemž  $\omega_R$  je rychlost otáčení rotoru.

Vyjádříme nejdříve kinetickou energii elementu, u něhož budeme uvažovat malé výchylky  $\psi$  a  $\vartheta$ . S tímto předpokladem lze potom vyjádřit vektory rychlostí v pevném souřadnicovém systému  $xyz$  následovně

$$\mathbf{v}_S(x, t) = \begin{bmatrix} \dot{u}(x, t) \\ \dot{v}(x, t) \\ \dot{w}(x, t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}(x, t) = \begin{bmatrix} \omega_R + \dot{\varphi}(x, t) + \dot{\vartheta}(x, t)\psi(x, t) \\ \dot{\vartheta}(x, t) \\ \dot{\psi}(x, t) \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

kde  $\mathbf{v}_S(x, t)$  vyjadřuje rychlost od unášivého pohybu a vektor  $\boldsymbol{\omega}(x, t)$  rychlost od relativního sférického pohybu. Kinetická energie hřídelového prvku  $e$  je dána součtem energií od unášivého posuvného a sférického pohybu a integrací po jeho délce  $l$  [3]

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l [A(x) \mathbf{v}_S^T(x, t) \mathbf{v}_S(x, t) + \boldsymbol{\omega}^T(x, t) \mathbf{J}(x) \boldsymbol{\omega}(x, t)] \rho dx, \quad (3.35)$$

kde  $A(x)$  označuje plochu průřezu a  $\rho$  je hustota materiálu hřídele. Matice setrvačnosti je pro případ kruhového hřídele diagonální bez deviačních momentů

$$\mathbf{J}(x) = \begin{bmatrix} J_p & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

s polárním průřezem  $J_p$  a kvadratickým momentem  $J$ , které pro kruhový průřez nabývají hodnot

$$J = \frac{\pi d^4}{64}, \quad J_p = 2J, \quad (3.37)$$

kde  $d$  značí průměr hřídele. Dosazením rychlostí (3.34) a (3.36) pomocí aproximačních vztahů do (3.35) a zanedbáním členů vyšších řádů dostaneme výraz pro kinetickou energii

$$\begin{aligned} E_k^{(e)} = & \frac{1}{2} \int_0^l A \left[ \dot{\mathbf{q}}_3^T \mathbf{S}_3^{-T} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} \dot{\mathbf{q}}_3 + \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{S}_2^{-T} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{S}_2^{-1} \dot{\mathbf{q}}_2 \right] \rho dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l \left[ J_p \dot{\mathbf{q}}_4^T \mathbf{S}_3^{-T} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} \dot{\mathbf{q}}_4 + J \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{H} \mathbf{S}_2^{-1} \dot{\mathbf{q}}_2 + \right. \\ & + J \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{H} \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 + 2\omega_R (J_p \boldsymbol{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} \dot{\mathbf{q}}_4 - J_p \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{H} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1) + \\ & \left. + \omega_R^2 J_p \right] \rho dx. \end{aligned} \quad (3.38)$$



Pro vyjádření potenciální energie je nejdříve potřeba popsat posunutí obecného bodu hřídele. Posunutí takového bodu o souřadnicích  $x, y, z$  lze za předpokladu malých přetvoření vyjádřit v linearizovaném tvaru [12]

$$\begin{aligned} u_x &= u(x, t) - y\psi(x, t) + z\vartheta(x, t) \\ u_y &= v(x, t) - z\varphi(x, t) \\ u_z &= w(x, t) + y\varphi(x, t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Deformaci v libovolném bodě je možné formulovat

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' - y\psi' + z\vartheta' \\ 0 \\ 0 \\ v' - z\varphi' - \psi \\ w' + y\varphi' + \vartheta \\ \varphi - \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' - y\psi' + z\vartheta' \\ 0 \\ 0 \\ v' - z\varphi' - \psi \\ w' + y\varphi' + \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

kde byly vynechány argumenty  $x$  a  $t$ . Výrazy s čárkou vyjadřují derivaci podle prostorové proměnné  $x$ . Zanedbáme-li nulové členy v (3.41) a využitím aproximačních vztahů (3.26) - (3.31) lze psát

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3 - y \boldsymbol{\Theta}' \mathbf{H} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - z \boldsymbol{\Theta}' \mathbf{H} \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2 \\ \boldsymbol{\Phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - z \boldsymbol{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 - \boldsymbol{\Theta}' \mathbf{H} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 \\ \boldsymbol{\Phi}' \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2 + y \boldsymbol{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 - \boldsymbol{\Theta}' \mathbf{H} \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Pro izotropní materiál platí mezi tenzory deformace a napětí vztah [12]

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

které využijeme pro vyjádření nenulových prvků tenzoru napětí ve tvaru

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} E^* & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Potenciální energii deformace prvku můžeme vyjádřit ve tvaru [12]

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(A)} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dAdx = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(A)} E^* \varepsilon_x^2 + G \gamma_{xy}^2 + G \gamma_{xz}^2 dAdx. \quad (3.44)$$

Dosadíme-li do (3.44) za jednotlivé složky deformace (3.41) a uvažujeme-li kruhový průřez, jehož statické momenty průřezu jsou nulové, můžeme vyjádřit výslednou potenciální energii ve tvaru [3]

$$\begin{aligned}
 E_p^{(e)} = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E^* A q_3^T S_3^{-T} \Psi'^T + E^* J q_1^T S_1^{-T} H^T \Theta'^T \Theta' H S_1^{-1} q_1 + \right. \\
 & + E^* J q_2^T S_2^{-T} H^T \Theta'^T \Theta' H S_2^{-1} q_2 + G J_p q_4^T S_3^{-T} \Psi'^T \Psi' S_3^{-1} q_4 + \\
 & + G A q_1^T S_1^{-T} (\Phi' - \Theta H)^T (\Phi' - \Theta H) S_1^{-1} q_1 + \\
 & \left. + G A q_2^T S_2^{-T} (\Phi' - \Theta H)^T (\Phi' - \Theta H) S_2^{-1} q_2 \right] dx.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Dosazením kinetické (3.38) a deformační (3.45) energie do levé strany Lagrangeových rovnic 2. druhu (3.33) a porovnáním s pravou stranou získáme matici hmotnosti

$$\mathbf{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{2,2}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{3,3}^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{4,4}^{(e)} \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

se submaticemi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{1,1}^{(e)} &= \mathbf{S}_1^{-T} (A \rho \mathbf{I}_\Phi + J \rho \mathbf{H}^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H}) \mathbf{S}_1^{-1}, \quad \mathbf{M}_{2,2}^{(e)} = \mathbf{S}_2^{-T} (A \rho \mathbf{I}_\Phi + J \rho \mathbf{H}^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H}) \mathbf{S}_2^{-1}, \\
 \mathbf{M}_{3,3}^{(e)} &= A \rho \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_\Psi \mathbf{S}_3^{-1}, \quad \mathbf{M}_{4,4}^{(e)} = J \rho \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_\Psi \mathbf{S}_3^{-1},
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

matici gyroskopických účinků

$$\mathbf{G}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & J_p \rho \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{H}^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H} \mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -J_p \rho \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{H}^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{3.48}$$

a matici tuhosti

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{2,2}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{3,3}^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{4,4}^{(e)} \end{bmatrix}, \tag{3.49}$$

kde jednotlivé submatice mají tvar

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{1,1}^{(e)} &= \mathbf{S}_1^{-T} (E^* J \mathbf{H}^T \mathbf{I}_{\Theta'} \mathbf{H} + G A \mathbf{I}_H) \mathbf{S}_1^{-1}, \quad \mathbf{K}_{2,2}^{(e)} = \mathbf{S}_2^{-T} (E^* J \mathbf{H}^T \mathbf{I}_{\Theta'} \mathbf{H} + G A \mathbf{I}_H) \mathbf{S}_2^{-1}, \\
 \mathbf{K}_{3,3}^{(e)} &= \mathbf{S}_3^{-T} E^* A \mathbf{I}_{\Psi'} \mathbf{S}_3^{-1}, \quad \mathbf{K}_{4,4}^{(e)} = \mathbf{S}_3^{-T} G J_k \mathbf{I}_{\Psi'} \mathbf{S}_3^{-1},
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

kde  $J_k$  je moment odporu v krutu a speciálně pro kruhový profil nabývá [3]  $J_k \doteq J_p$ . Pro úplnost jsou níže ještě uvedeny všechny matice zavedené ve výrazech (3.47), (3.48) a (3.50) [3]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_\Phi &= \int_0^l \Phi^T(x) \Phi(x) dx = l \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} \\ \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} & \frac{l^5}{6} \\ \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} & \frac{l^5}{6} & \frac{l^6}{7} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{I}_\Psi &= \int_0^l \Psi^T(x) \Psi(x) dx = l \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{I}_\Theta &= \int_0^l \Theta^T(x) \Theta(x) dx = l \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} \\ \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{I}_{\Phi'} &= \int_0^l \Phi'^T(x) \Phi'(x) dx = l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l & l^2 \\ 0 & l & \frac{4}{3}l^2 & \frac{3}{2}l^3 \\ 0 & l^2 & \frac{3}{2}l^3 & \frac{9}{5}l^4 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{I}_{\Psi'} &= \int_0^l \Psi'^T(x) \Psi'(x) dx = l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{I}_{\Theta'} &= \int_0^l \Theta'^T(x) \Theta'(x) dx = l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & l & \frac{4}{3}l^2 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{I}_H &= \int_0^l (\Phi'(x) - \Theta(x)\mathbf{H})^T (\Phi'(x) - \Theta(x)\mathbf{H}) dx = l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 l^4 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Odvozené matice hmotnosti (3.46), gyroskopických účinků (3.48) a tuhosti (3.49) pro hřídelový element byly odvozeny v souladu s Timošenkovou teorií zkosoř pro kruhový profil hřídele.

Pokud bychom chtěli zanedbat zkosoř  $\bar{\gamma}_{\xi\eta} = 0$  a  $\bar{\gamma}_{\xi\zeta} = 0$  v (3.1), použili bychom teorii, která se nazývá Rayleighova. Použitím této teorie dojde ke zjednodušení výrazů a není potřeba znovu odvozovat všechny výrazy. V souladu s touto teorií dojde ke zjednodušení následujících vztahů [3]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^T \mathbf{I}_\Theta \mathbf{H} &= \mathbf{I}_{\Phi'}, \\
 \mathbf{H}^T \mathbf{I}_{\Theta'} \mathbf{H} &= \mathbf{I}_{\Phi''}, \\
 \Phi'(x) - \Theta(x)\mathbf{H} &= \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{I}_H = \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

kde

$$\mathbf{I}_{\Phi''} = \int_0^l \Phi''^T(x) \Phi''(x) dx = l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 12l^2 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Při odvozování matic lze mimo zkosů navíc ještě zanedbat vlivy od setrvačných účinků od natáčení průřezů hřídelového prvku při ohybu. Tato teorie se nazývá Bernoulliova-Eulerova teorie, kde kinetická energie elementu může být vyjádřena

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l [A(x) \mathbf{v}_S^T(x, t) \mathbf{v}_S(x, t) + J_p(x) (\omega_R + \dot{\varphi}(x, t))^2(x, t)] \rho dx, \quad (3.54)$$

a matice hmotnosti a tuhosti elementu se zjednoduší do tvaru

$$\mathbf{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T} A \rho \mathbf{I}_{\Phi} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-T} A \rho \mathbf{I}_{\Phi} \mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A \rho \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & J \rho \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T} E^* J \mathbf{I}_{\Theta''} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-T} E^* J \mathbf{I}_{\Theta''} \mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T} E^* A \mathbf{I}_{\Psi'} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T} G J_k \mathbf{I}_{\Psi'} \mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

Takto vyjádřené matice mají výhodu v tom, že jsou snadno algoritimizované. V rámci vytvoření programového vybavení byly implementovány všechny tři teorie pro modelování hřídelů a je tak na uživateli, který způsob modelování si vybere.

Pro lepší práci s jednotlivými maticemi a následném vytváření globálního modelu je ještě žádoucí transformovat vektor zobecněných výchylek (3.21) do konfiguračního prostoru definovaného výchylkami v krajních bodech elementu v pořadí

$$\mathbf{q}_e = [u(0, t), v(0, t), w(0, t), \varphi(0, t), \vartheta(0, t), \psi(0, t), \\ u(l, t), v(l, t), w(l, t), \varphi(l, t), \vartheta(l, t), \psi(l, t)]^T. \quad (3.57)$$

K provedení změny pořadí výchylek je potřeba zavést permutační matici ve tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Pomocí této matice pak vztah mezi (3.21) a (3.57) zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{q}^{(e)}(t) = \mathbf{P}\mathbf{q}_e. \quad (3.59)$$

Pro jednotlivé matice platí transformace

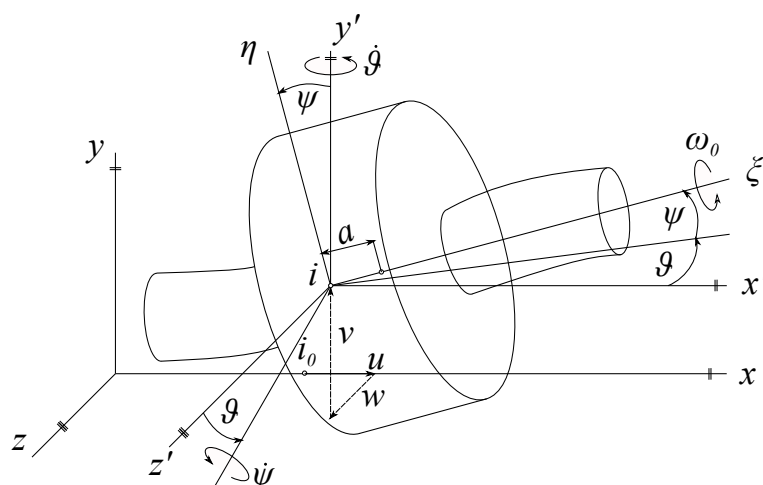
$$\mathbf{M}_e = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{(e)} \mathbf{P}, \quad \mathbf{G}_e = \mathbf{P}^T \mathbf{G}^{(e)} \mathbf{P}, \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{P}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{P}. \quad (3.60)$$

## 3.2 Modelování kotoučů

Dalším prvkem, jehož pohyb je potřeba matematicky vyjádřit je rotačně symetrický tuhý kotouč, za který lze zjednodušeně uvažovat např. olopatkovaný disk. Uvažujeme, že tuhý kotouč je nasazen centricky, kolmo a pevně na hřídeli. Poloha kotouče v místě  $i$  na hřídeli může být v prostoru vyjádřena pomocí 6 nezávislých souřadnic

$$\mathbf{q}_k = [u(t), v(t), w(t), \varphi(t), \vartheta(t), \psi(t)], \quad (3.61)$$

kteří lze najít na Obr. 3.4. Souřadnice  $a$  představuje vychýlení středu hmotnosti kotouče na hřídeli ve směru osy rotace. Odvození matice pro tento prvek bylo provedeno již



Obrázek 3.4: Rotačně symetrický kotouč [2]

v bakalářské práci [2]. Princip spočívá ve vyjádření kinetické energie kotouče. Ve druhém kroku se aplikují Lagrangeovy rovnice 2. druhu, čímž lze získat matici hmotnosti tuhého kotouče v uzlu  $i$  ve tvaru [2]

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & ma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ma & I + ma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -ma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ma & I + ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

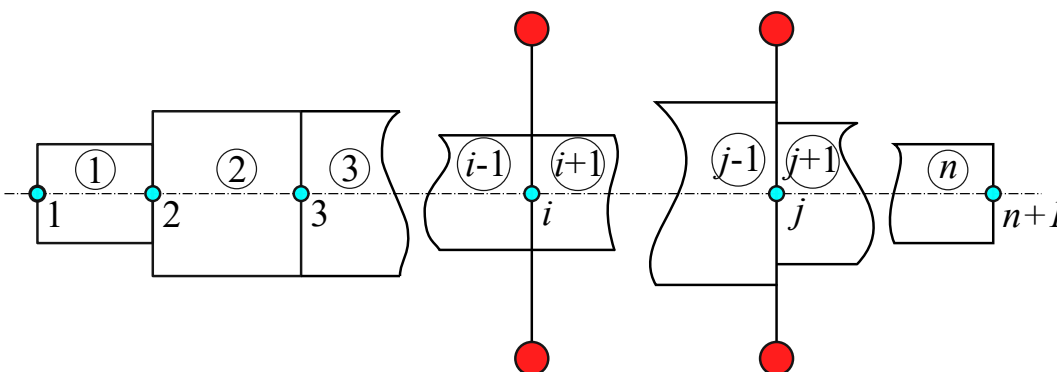
kde  $m$  vyjadřuje hmotnost kotouče a  $I_0$ , resp.  $I$  moment setrvačnosti k ose otáčení, resp. příčným osám. Matici gyroskopických účinků dostáváme ve tvaru

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

### 3.3 Model rotoru

Pro vyšetřování pohybu celého rotoru je potřeba sestavit globální matice sestavených matic odvozených v dřívější části textu. Uvažujme nejdříve kmitání hřídele s nasazenými kotouči.

Prvním úkolem je diskretizace hřídele na určitý počet elementů  $n$ . Diskretizaci je obecně dobré provádět v místech, kde dochází ke změnám průřezů hřídele nebo kde se připojují diskrétní prvky. Pro lepší zachycení ohybu je vhodné dlouhé části hřídelových prvků s konstantním průřezem. Na Obr. 3.5 je vidět ukázka diskretizace.

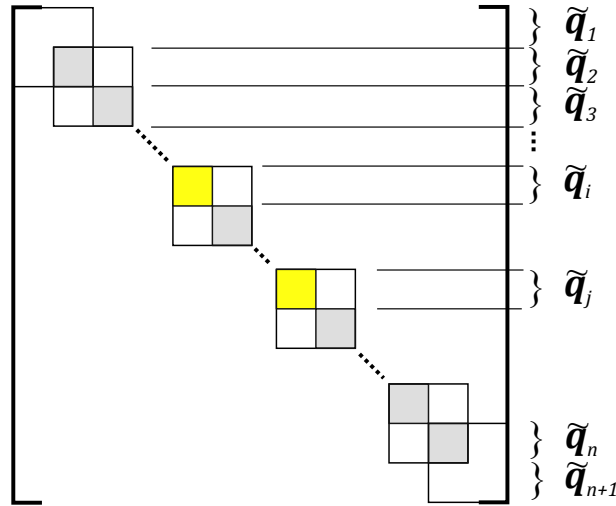


Obrázek 3.5: Ukázka diskretizace hřídele: tyrkysovou barvou jsou označeny uzly, čísla v kroužku značí elementy a červené kroužky kotouče [2]

Diskretizací hřídele na  $n$  elementů vznikne  $n + 1$  uzlů, které vyjadřují krajní body elementů. Výchylky a natočení v  $i$ -tém uzlu lze popsat vektorem zobecněných souřadnic  $\tilde{\mathbf{q}}_i = [u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \vartheta_i, \psi_i]$ . Globální matice modelu pak lze sestavit dle schéma zobrazeného na Obr. 3.6. Velké čtverce představují submatice elementů. Šedé čtverce vyjadřují překrytí těchto elementů, což matematicky vyjadřuje součet submatic elementů na těchto pozicích. Žluté čtverce vyjadřují příspěvky od kotoučů nasazených v místech  $i$  a  $j$ . Opět tuto submatici přičteme na příslušné pozice.

Tímto postupem sestavíme globální matice hřídele s nasazenými tuhými kotouči, které označíme matici hmotnosti  $\tilde{\mathbf{M}}_R$ , matici gyroskopických účinků  $\tilde{\mathbf{G}}_R$  a matici tuhosti  $\tilde{\mathbf{K}}_R$ . Dále můžeme zavést proporcionální matici tlumení

$$\tilde{\mathbf{B}}_R = \alpha \tilde{\mathbf{M}}_R + \beta \tilde{\mathbf{K}}_R. \quad (3.64)$$



Obrázek 3.6: Schéma sestavování globálních matic

Důležité je si uvědomit, že výsledný model má  $6(n + 1)$  zobecněných souřadnic. Pro vyšetřování pouze příčných kmitů je vhodné výsledné matice redukovat pomocí transformační matice. Vyšetřování pouze příčných kmitů má smysl při analýze radiálních ložisek, kde vyšetřujeme primárně krouživý pohyb hřídele. Vlivem působení vnějších sil např. z důvodu nevyvážku jsou navíc příčné kmity dominantní vůči podélným, či torzním kmitům. Z vektoru  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  vyloučíme souřadnice podélné výchylky  $u_i$  a torzního natočení  $\varphi_i$  následovně

$$\tilde{\mathbf{q}}_i = [u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \vartheta_i, \psi_i] \Rightarrow \mathbf{q}_{R,i} = [v_i, w_i, \vartheta_i, \psi_i], \quad (3.65)$$

kde  $\mathbf{q}_i$  je redukovaný vektor zobecněných souřadnic pro uzel. Globální matice redukovujeme vytvořením transformační matice  $\mathbf{T}$ . Uvažujme jednotkovou matici o rozměrech  $6(n + 1) \times 6(n + 1)$ . Matici  $\mathbf{T}$  dostaneme tak, že vyloučíme z této matice řádky se souřadnicemi, které chceme vyloučit ( $u_i$  a  $\varphi_i$ , kde  $i = \{1, 2, \dots, n + 1\}$ ). Tím dostaneme matici  $\mathbf{T}$  o rozměrech  $4(n + 1) \times 6(n + 1)$ . Redukované globální matice pak dostaneme následující operací

$$\mathbf{X}_R = \mathbf{T} \widetilde{\mathbf{X}}_R \mathbf{T}^T, \quad \mathbf{X} = \mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{G}, \mathbf{K}. \quad (3.66)$$

Redukovaný vektor zobecněných souřadnic pak dostaneme jako

$$\mathbf{q}_R = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{q}}. \quad (3.67)$$

Výsledný model rotoru hřídele s nasazenými kotouči bez buzení a vnějších sil lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M}_R \ddot{\mathbf{q}}_R(t) + [\mathbf{B}_R + \omega_R \mathbf{G}_R] \dot{\mathbf{q}}_R(t) + \mathbf{K}_R \mathbf{q}_R(t) = \mathbf{0}. \quad (3.68)$$

### 3.3.1 Doplnění modelu o kluzná ložiska s plovoucími pouzdry

V kapitole 2 byly odvozeny hydrodynamické síly působící mezi hřídelem a plovoucím kroužkem (pouzdem), resp. mezi plovoucím kroužkem a ložiskovým pouzdem. Plovoucí kroužek vnáší do modelu má obecně 3 stupně volnosti - výchylky ve vodorovném  $v_{FR}^X$  a svislém směru  $w_{FR}^X$  a úhel natočení kolem osy rotace  $\varphi_{FR}^X$ , kde  $X = T, C$  kde  $T$ ,

resp.  $C$  značí kroužek v ložisku na turbínové, resp. kompresorové straně ložiska. Vektor zobecněných souřadnic kroužku pak můžeme napsat

$$\mathbf{q}_{FR}^{(X)} = \begin{bmatrix} v_{FR}^{(X)} \\ w_{FR}^{(X)} \\ \varphi_{FR}^{(X)} \end{bmatrix}, \quad X = T, C \quad (3.69)$$

Nyní přidejme tyto ložiskové vazby, síly od nevyvážky a tíhovou sílu do modelu (3.68)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_R \\ \\ M_{FR}^{(T)} \\ \\ M_{FR}^{(C)} \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_R \\ \ddot{\mathbf{q}}_{FR}^{(T)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{FR}^{(C)} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_R + \omega_R \mathbf{G}_R & & \\ & \mathbf{0} & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B} + \omega_R \mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_R \\ \dot{\mathbf{q}}_{FR}^{(T)} \\ \dot{\mathbf{q}}_{FR}^{(C)} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_R & & \\ & \mathbf{0} & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_{FR}^{(T)} \\ \mathbf{q}_{FR}^{(C)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_R^{st} \\ \mathbf{f}_{FR(T)}^{st} \\ \mathbf{f}_{FR(C)}^{st} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^{st}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_R^e(\omega_R, t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^e(\omega_R, t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{FR(T),R} \\ \mathbf{f}_{R,FR(T)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_R, t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{H,FR(T)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_R, t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{FR(C),R} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{R,FR(C)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_R, t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{H,FR(C)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_R, t)}, \quad (3.70)$$

kde matice  $\mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{B}_R, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  a  $\mathbf{G} = \text{diag}(\mathbf{G}_R, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ . První řádek výrazu (3.70) odpovídá hřídeli s nasazeným tuhým kotoučem. Druhý, resp. třetí řádek značí rovnice pro plovoucí kroužek na turbínové, resp. kompresorové straně rotoru. Matice hmotnosti pro plovoucí kroužek je

$$\mathbf{M}_{FR} = \begin{bmatrix} m_{FR(X)} & 0 & 0 \\ 0 & m_{FR(X)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{FR(X)} \end{bmatrix}, \quad X = T, C, \quad (3.71)$$

kde  $m_{FR(X)}$  značí hmotnost kroužku a  $I_{FR(X)}$  moment setrvačnosti plovoucího kroužku vzhledem k ose rotace.

Na pravé straně (3.70) jsou vnější síly působící na systém. První silou značenou  $\mathbf{f}^{st}$  je vektor tíhového zatížení, kde

$$\mathbf{f}_R^{st} = \text{diag}\{\mathbf{M}_R\} \cdot [\mathbf{g}^T, \mathbf{g}^T, \dots, \mathbf{g}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_R}, \quad \mathbf{g} = [0, -g, 0, 0]^T, \quad (3.72)$$

$$\mathbf{f}_{FR(X)}^{st} = [0, -m_{FR} \cdot g, 0]^T \in \mathbb{R}^3, \quad X = T, C, \quad (3.73)$$

kde  $n_R$  značí počet zobecněných souřadnic hřídelových elementů a  $g$  tíhové zrychlení.

Druhým členem vektor vyjadřující síly od nevyvážky v jednotlivých uzlech. Nevývažek působící v obecném uzlu  $i$  můžeme zapsat jako

$$\mathbf{f}_{R,i}^e = \left. \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta m_i e_i \omega_R^2 \cos(\omega_R t + \varphi_i) \\ \Delta m_i e_i \omega_R^2 \sin(\omega_R t + \varphi_i) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{q}_{R,i} \quad (3.74)$$



kde  $\Delta m_i$  je hmotnost neváhy v  $i$ -tém uzlu,  $e_i$  excentricita neváhy v  $i$ -tém uzlu,  $\omega_R$  rychlost otáčení hřídele a  $\varphi_i$  úhel neváhy v  $i$ -tém uzlu v počáteční konfiguraci rotoru. Výsledný vektor sil způsobených neváhami lze nejobecněji zapsat pro případ, že by se obecně různý neváhový vektor vyskytoval v každém uzlu. V takovém případě tento vektor vyjádříme jako součet od jednotlivých neváhových vektorů v daných uzlech

$$\mathbf{f}_R^e = \sum_{i=1}^{I_R} \mathbf{f}_{R,i}^e \in \mathbb{R}^{n_R}, \quad (3.75)$$

kde  $I_R$  je počet uzlů diskretizovaného hřídele.

Vektory  $\mathbf{f}_T$  a  $\mathbf{f}_C$  z (3.70) vyjadřují síly od kroužku na hřídel ( $\mathbf{f}_{FR(X),R}$ ), od hřídele na kroužek ( $\mathbf{f}_{R,FR(X)}$ ) a síly mezi ložiskovým pouzdrem („housingem“) a plovoucím kroužkem ( $\mathbf{f}_{H,FR(X)}$ ). Prvky těchto vektorů tvoří síly, které byly odvozeny v kapitole 2. Umístění těchto sil do vektorů  $\mathbf{f}_{FR(X),R}$ ,  $\mathbf{f}_{R,FR(X)}$ ,  $\mathbf{f}_{H,FR(X)}$  je popsán níže.

Vektor vyjadřující sílu mezi kroužkem a hřídelem nabyde tvaru

$$\mathbf{f}_{FR(X),R} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ F_{I,z(X)}^{(Y)} \\ F_{I,y(X)}^{(Y)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ F_{I,z(X)}^{(Y)} \\ F_{I,y(X)}^{(Y)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}} \right\} \text{uzel nasazení ložiska, } \mathbf{f}_{FR(X),R} \in \mathbb{R}^{n_R}, X = T, C, \quad (3.76)$$

kde  $F_{I,z(X)}^{(Y)}$  a  $F_{I,y(X)}^{(Y)}$  jsou síly vyjádřené v (2.48). Síly mezi plovoucím kroužkem a hřídelem vyjádříme vektorem

$$\mathbf{f}_{R,FR(X)} = \left[ \begin{array}{c} -F_{I,z(X)}^{(Y)} \\ -F_{I,y(X)}^{(Y)} \\ M_{I(X)} + M_{O(X)} \end{array} \right], \mathbf{f}_{R,FR(X)} \in \mathbb{R}^3, X = T, C, \quad (3.77)$$

kde  $M_{I(X)}$  a  $M_{O(X)}$  jsou odvozeny v (2.44) a (2.45).

Poslední vazbou, která zbývá vyjádřit, je vazba mezi kroužkem a ložiskovým pouzdrem

$$\mathbf{f}_{H,FR(X)} = \left[ \begin{array}{c} F_{O,z(X)}^{(Y)} \\ F_{O,y(X)}^{(Y)} \\ 0 \end{array} \right], \mathbf{f}_{H,FR(X)} \in \mathbb{R}^3, X = T, C, \quad (3.78)$$

kde  $F_{O,z(X)}^{(Y)}$  a  $F_{O,y(X)}^{(Y)}$  jsou vztahy (2.49).

# Kapitola 4

## Metody pro vyšetřování kmitání rotorových soustav

V této kapitole jsou rozebrány metody užívané pro analýzu mechanických systémů. Jsou zde vysvětleny postupy, kterými lze vyšetřovat nekonzervativní mechanické soustavy v časové a frekvenční oblasti, určovat jejich stabilitu, provádět kondenzaci. Nejdříve je ukázáno jak model mechanické soustavy převést do stavového prostoru, který je vhodný pro numerickou integraci. Dále je proveden výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů, přičemž pomocí matice vlastních vektorů lze redukovat celý model. Poslední podkapitolou bude ukázka Fourierovy transformace, pomocí které lze vyšetřovat systém ve frekvenční oblasti.

### 4.1 Převod modelu do stavového prostoru

Přepišme ještě jednou model pohybové soustavy (3.70) - pro přehlednost bez závislosti na čase, rychlosti otáčení hřídele, zobecněných výchylkách a jejich derivacích

$$M\ddot{q} + (B + \omega_R G)\dot{q} + Kq = f_N, \quad (4.1)$$

kde vektorem  $f_N$  byla označena celá pravá strana

$$f_N = f^{st} + f^e + f_T + f_C. \quad (4.2)$$

Celý systém (4.1) převedeme do stavového prostoru tak, že jej rozšíříme o identitu

$$M\dot{q} - M\dot{q} = 0 \quad (4.3)$$

a zavedeme stavový vektor  $u(t)$  a jeho derivaci  $\dot{u}(t)$

$$u = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad \dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Rozšířením o identitu (4.4) k modelu (4.1) dostaneme systém rovnic, který můžeme maticově zapsat jako

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M & 0 \\ B + \omega_R G & M \end{bmatrix}}_N \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix}}_{\dot{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -M \\ K & 0 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_u = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f_N \end{bmatrix}}_{f_n}. \quad (4.5)$$

Odsud osamostatníme vektor  $\dot{\mathbf{u}}$  a zbytek převedeme na druhou stranu

$$\dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{u} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{f}_n, \quad (4.6)$$

kde  $\mathbf{N}^{-1}$  je neznámá inverzní matice, kterou vyjádříme z rovnosti

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{E}, \quad (4.7)$$

kde  $\mathbf{E}$  značí jednotkovou matici. Pro určení inverzní matice je potřeba zavést neznámé  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  jako submatice matice  $\mathbf{N}^{-1}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} + \omega_R\mathbf{G} & \mathbf{M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}}. \quad (4.8)$$

Řešením výše uvedeného výrazu je

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{B} + \omega_R\mathbf{G})\mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Dosazením vyjádřené inverzní matice (4.9) do (4.6) vyjádříme výsledný model jako

$$\dot{\mathbf{u}} = -\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{B} + \omega_R\mathbf{G}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{u} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}, \quad (4.10)$$

kde jako  $\mathbf{A}$  označujeme systémovou matici a vektor  $\mathbf{f}$  jako vektor působících sil na systém. Tímto jsme převedli pohybovou soustavu (4.1) z prostoru zobecněných souřadnic do stavového prostoru v elegantním tvaru

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (4.11)$$

Tento popis pohybové soustavy je vhodný z důvodu numerické integrace. V tomto tvaru lze totiž pohybové rovnice integrovat pomocí metod numerické integrace, která se v praxi hojně používá. Software MATLAB má v knihovně několik různých metod numerické integrace [16], např. ode45, ode113, ode23, ode15s.

## 4.2 Modální analýza - problém vl. hodnot a vl. vektorů

Modální analýzou rozumíme vypočtení vlastních čísel a vlastních vektorů pro danou soustavu. Pro homogenní nekonzervativní soustavu ve stavovém prostoru (4.11)

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), \quad (4.12)$$

vyhovuje řešení

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t}, \quad (4.13)$$

přičemž  $e$  značí Eulerovo číslo. Tento vztah zderivujeme a dosadíme do (4.12) a získáme rovnici představující problém vlastních hodnot ve stavovém prostoru

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (4.14)$$

poněvadž netriviální řešení je možné, pouze pokud determinant je roven nule

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0. \quad (4.15)$$

Řešením je  $2n$  vlastních čísel  $\lambda_\nu$ , kde  $n$  je počet zobecněných souřadnic původního systému (4.1). Vlastní čísla mohou být komplexně sdružená nebo reálná

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad (4.16)$$

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu - i\beta_\nu, \quad \nu = m + 1, \dots, 2m, \quad (4.17)$$

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu, \quad \nu = 2m + 1, \dots, 2n, \quad (4.18)$$

kde  $\alpha_\nu$ , resp.  $\beta_\nu$  značí reálnou, resp. imaginární složku komplexního vlastního čísla. Takto získaná vlastní čísla  $\lambda_\nu$  se tradičně řadí podle velikosti vzestupně nejdříve vlastní čísla s kladnou imaginární částí (4.16), za ně ve stejném pořadí k nim přidružená vlastní čísla se zápornou částí (4.17) a nakonec vzestupně reálná vlastní čísla (4.18). Takto získaná vlastní čísla nám dávají informace o vlastních frekvencích dynamického systému a také jeho stabilitě. Vlastní frekvence systému pak odpovídají imaginární složce vlastního čísla

$$\Omega_\nu = \beta_\nu. \quad (4.19)$$

Reálná část komplexního vlastního čísla rozhoduje o míře tlumení vlastního tvaru odpovídající danému vlastnímu číslu. Kromě toho navíc reálná část vlastních čísel rozhoduje o stabilitě systému. Pokud je reálná část kladná, systém je stabilní. V případě, že je reálná část nulová pohybuje se systém na mezi stability a pro případ, kdy je alespoň jedno z reálných čísel  $\alpha_\nu$  kladné, systém se stává nestabilním.

Každému vlastnímu číslu  $\lambda_\nu$  odpovídá vlastní tvar  $\mathbf{u}_\nu$ , který je řešením rovnice (4.14). Vlastní vektory jsou obecně komplexní a lineárně nezávislé. Pro nekonzervativní model je vektor  $\mathbf{u}_\nu$  nazýván jako pravostranný vlastní vektor. Pomocí lineární kombinace těchto pravostranných vlastních vektorů je možné pro soustavu (4.1) popsat libovolný pohyb ve stavovém prostoru [4]

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{\nu=1}^{2n} \mathbf{u}_\nu x_\nu(t) = \mathbf{U} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{U} \in C^{2n,2n}. \quad (4.20)$$

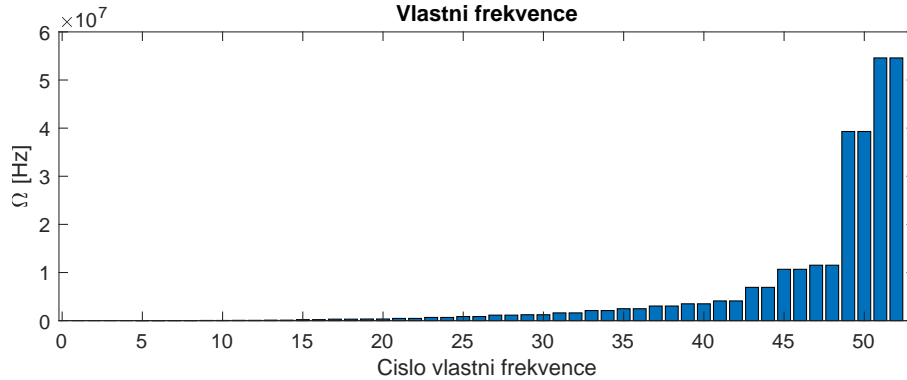
Matice  $\mathbf{U}$  se nazývá modální matice pravostranných vlastních vektorů, kde jednotlivé sloupce tvoří vlastní vektory. Vektor  $\mathbf{x}(t)$  představuje vektor modálních souřadnic. Vztah (4.20) je nazýván z důvodu transformace souřadnic stavového vektoru na modální souřadnice modální transformací ve stavovém prostoru. Pro analytické vyšetřování odezvy lineárních nekonzervativních soustav by byla potřeba vytvořit adjungovaný model k (4.1) a z něho vypočítat příslušné levostranné vlastní vektory. Tento postup je uveden např. v [4], [13]. V našem případě však pro řešení využíváme numerickou integraci z důvodu výskytu nelineárních sil v olejových filmech, proto zde není analytické vyšetřování nekonzervativních lineárních soustav podrobněji vysvětleno.

### 4.3 Kondenzace modelu pomocí modální redukce

Jak již bylo zmíněno, pro vyšetřování odezvy je potřeba provádět numerickou integraci modelu (4.11). Uvažujme model hřídele o  $k$  elementech a  $k + 1$  uzlech se 4 stupni volnosti

a dvou ložiskách, které obě mají 3 stupně volnosti. Celkový počet stupňů volnosti pak bude  $n = 4 \cdot (k + 1) + 2 \cdot 3$ . Ve stavovém prostoru se počet stupňů volnosti zdvojnásobí na  $2n$ . Pro 10 hřídelových elementů tak dostáváme 100 obyčejných diferenciálních rovnic, které je potřeba v každém čase vyčíslit. To je časově velmi náročná operace, proto bylo nutné najít nějaký nástroj, pomocí kterého by se snížil čas výpočtu při zachování přesnosti výpočtu.

Vhodným nástrojem se ukázala metoda modální redukce (též nazývaná jako kondenzace), která je popsána v této části kapitoly. Pro pochopení dlouhého času výpočtu je potřeba se podívat na vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory v konfiguračním prostoru. Na Obr. 4.1 jsou pro ukázkou vyneseny všechny vlastní frekvence pro konzervativní model hřídele s kotouči o 10 elementech. Je patrné, že poslední frekvence značně převyšují ostatní vlastní frekvence. Je proto nasnadě klást si otázku, zda se vůbec reálně takto vysoké frekvence a jejich příslušné tvary mohou vybudit, či jestli je jejich příspěvek významný. Důsledkem započítávání těchto vysokých frekvencí totiž dochází v algoritmech numerické integrace ke zkracování časového kroku, což vede k mnohonásobně delšímu celkovému času výpočtu [5].



Obrázek 4.1: Ukázka velikosti vlastních frekvencí

Metoda modální redukce je založena na modální analýze systému. Uvažujme podle (3.70), že je systém tvořený ze tří subsystémů: rotoru a dvou plovoucích kroužků na turbínové a kompresorové straně. Výhodou modální redukce je, že může být udělána zvlášť pro jednotlivé subsystémy. Proto modální redukce bude provedena pouze pro rotorový subsystém

$$\mathbf{M}_R \ddot{\mathbf{q}}_R(t) + [\mathbf{B}_R + \omega_R \mathbf{G}_R] \dot{\mathbf{q}}_R(t) + \mathbf{K}_R \mathbf{q}_R(t) = \mathbf{f}_R(\dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t, \omega), \quad (4.21)$$

kde  $\mathbf{f}_R$  značí všechny působící síly působící na subsystém. Prvním krokem je přidružení konzervativní soustavy k tomuto modelu

$$\mathbf{M}_R \ddot{\mathbf{q}}_R(t) + \mathbf{K}_R \mathbf{q}_R(t) = \mathbf{0}. \quad (4.22)$$

Této rovnici vyhovuje řešení

$$\mathbf{q}_R(t) = \mathbf{v}_R e^{i\Omega_R t}, \quad (4.23)$$

kde  $\mathbf{v}$  je vektor amplitud pro příslušnou úhlovou frekvenci  $\Omega$ . Dosazením tohoto vztahu do (4.22) dostáváme rovnici pro problém vlastních hodnot

$$(\mathbf{K}_R - \Omega_R^2 \mathbf{M}_R) \mathbf{v}_R = \mathbf{0}. \quad (4.24)$$

Netriviální řešení existuje právě tehdy, když charakteristická rovnice

$$\det(\mathbf{K}_R - \Omega_R^2 \mathbf{M}_R) = 0, \quad \lambda_R = \Omega_R^2, \quad (4.25)$$

řecké písmeno  $\lambda_R$  označuje vlastní čísla charakteristické rovnice. Pomocí kořenů této charakteristické rovnice  $\lambda_{R,\nu} = \Omega_{R,\nu}^2$  lze vyjádřit ze vztahu (4.24) vlastní tvar  $\mathbf{v}_{R,\nu}$

$$(\mathbf{K}_R - \Omega_{R,\nu}^2 \mathbf{M}_R) \mathbf{v}_{R,\nu} = \mathbf{0}. \quad (4.26)$$

Z vlastních čísel a vlastních vektorů vytvoříme spektrální matici  $\mathbf{\Lambda}_R$  a modální matici  $\mathbf{V}_R$  ve tvaru

$$\mathbf{\Lambda}_R = \text{diag}(\Omega_{R,\nu}^2), \quad \mathbf{V}_R = [\mathbf{v}_{R,1}, \mathbf{v}_{R,2}, \dots, \mathbf{v}_{R,n_R}], \quad \nu = 1, 2, \dots, n_R. \quad (4.27)$$

Z vektoru  $\mathbf{V}_R$  vybereme požadovaných  $m_R$  vlastních tvarů ( $m_R < n_R$ ). Reálně tak vybereme prvních  $m_R$  sloupců z vektoru  $\mathbf{V}_R$ . Označme tuto matici jako

$$\mathbf{V}_{R,m} = [\mathbf{v}_{R,1}, \mathbf{v}_{R,2}, \dots, \mathbf{v}_{R,m_R}], \quad \mathbf{V}_{R,m} \in \mathbb{R}^{n_R, m_R}. \quad (4.28)$$

Stejně tak je potřeba redukovat spektrální matici  $\mathbf{\Lambda}_R$ , aby obsahovala pouze vlastní čísla odpovídajícím vybraným vlastním vektorům. Vezmeme tedy prvních  $m_R$  řádků a prvních  $m_R$  sloupců z původní matice a vytvoříme

$$\mathbf{\Lambda}_{R,m} = \text{diag}(\Omega_{R,\nu}^2), \quad \nu = 1, 2, \dots, m_R, \quad \mathbf{\Lambda}_{R,m} \in \mathbb{R}^{m_R, m_R}. \quad (4.29)$$

Nyní provedeme modální transformaci (transformaci z prostoru zobecněných souřadnic do prostoru modálních souřadnic)

$$\mathbf{q}_R(t) = \mathbf{V}_{R,m} \mathbf{x}_{R,m}(t), \quad \mathbf{x}_{R,m}(t) \in \mathbb{R}^{m_R}. \quad (4.30)$$

Díky podmínkám ortonormality vlastních vektorů platí, že [4]

$$\mathbf{V}_{R,m}^T \mathbf{M}_R \mathbf{V}_{R,m} = \mathbf{E}_{R,m}, \quad \mathbf{V}_{R,m}^T \mathbf{K}_R \mathbf{V}_{R,m} = \mathbf{\Lambda}_{R,m}, \quad (4.31)$$

kde  $\mathbf{E}_{R,m}$  je jednotková matice řádu  $m_R$ . Nyní provedeme vlastní modální transformaci souřadnic prvního řádku. S využitím podmínek ortonormality dostáváme bez uvedení závislostí

$$\mathbf{E}_{R,m} \ddot{\mathbf{x}}_{R,m} + [\mathbf{V}_{R,m}^T \mathbf{B}_R \mathbf{V}_{R,m} + \omega_R \mathbf{V}_{R,m}^T \mathbf{G}_R \mathbf{V}_{R,m}] \dot{\mathbf{x}}_{R,m} + \mathbf{\Lambda}_{R,m} \mathbf{x}_{R,m} = \mathbf{V}_{R,m}^T \mathbf{f}_R, \quad (4.32)$$

pro počáteční podmínky

$$\dot{\mathbf{x}}_{R,m}(0) = \mathbf{V}_{R,m}^T \mathbf{M}_R \dot{\mathbf{q}}_R(0), \quad \mathbf{x}_{R,m}(0) = \mathbf{V}_{R,m}^T \mathbf{M}_R \mathbf{q}_R(0). \quad (4.33)$$

Vztahem (4.32) formálně nahradíme první řádek v (3.70). Získáváme tak systém, kde výsledný vektor souřadnic výchylek  $\mathbf{q}$  v (4.1) nyní bude ve tvaru

$$\mathbf{q} = \left[ \mathbf{x}_{R,m}, \mathbf{q}_{FR}^{(T)}, \mathbf{q}_{FR}^{(C)} \right]. \quad (4.34)$$

S kondenzovaným modelem dále pracujeme úplně stejným způsobem jako z původním modelem, tzn. převedeme do stavového prostoru a ve tvaru (4.11) provádíme numerickou

integraci. Na první pohled je však zřejmé, že vektor  $\mathbf{q}$  je po modální redukci tvořen jak z modálních, tak zobecněných souřadnic. Jelikož jsou nelineární síly odvozené v prostoru zobecněných souřadnic, je potřeba v každém iteračním kroku převést modální souřadnice zpět do prostoru zobecněných souřadnic podle transformačního vztahu (4.30). Po této transformaci jsou vypočteny nelineární síly, které jsou poté převedeny opět do prostoru modálních souřadnic.

Ač se může zdát, že tento postup je zdoluhavější a časově náročnější z důvodů převádění souřadnic z jednoho prostoru do druhého v každé iteraci, opak je pravdou. Tento postup dokáže ušetřit značné množství výpočetního času.

## 4.4 Linearizace nelineárních ložiskových sil v okolí rovnovážné polohy

K nelineárnímu modelu je také příhodné vytvořit model lineární pro sestavení Campbellova diagramu, který dává informace o kritických otáčkách rotoru. Nevýhodou linearizace systému je, že aproximují nelineární modely pouze v blízkosti rovnovážné polohy. Proto při linearizaci ložiskových sil  $\mathbf{f}_T$  a  $\mathbf{f}_C$  v (3.70) nejdříve potřebujeme najít staticky rovnovážnou polohu a poté v této poloze linearizovat síly. Tímto postupem se obecně linearizují nelineární systémy kolem rovnovážné polohy.

Rovnovážná poloha je dána pouze statickými silami působícími na kroužek Za takové síly lze považovat tíhovou sílu působící na kroužek a čep hřídele v místě uzlu. Pro nalezení rovnovážné polohy ložiskových sil tedy použijme vektor pravé strany (3.70)  $\mathbf{f}_T$  (pro  $\mathbf{f}_C$  odvození probíhá shodně). Můžeme napsat rovnost

$$\mathbf{f}_T(\mathbf{q}, \omega) + \mathbf{f}_{st}^T = \mathbf{0}, \quad (4.35)$$

kde  $\mathbf{f}_{st}^T$  je vektor statického zatížení turbodmyhadla v místě ložiska na turbínové straně. Znalost tohoto zatížení je klíčová pro správné nalezení rovnovážné polohy. Statické zatížení turbodmyhadla v místě ložisek najdeme tak, že vypočteme ze znalosti geometrie rotoru jeho střed hmotnosti. Ze znalosti středu hmotnosti rotoru a pozice uzlů s ložisky pak lze snadno dopočítat výsledné statické zatížení  $\mathbf{f}_{st}^T$ , resp.  $\mathbf{f}_{st}^C$  v místě ložiska na turbínové, resp. kompresorové straně ložiska. Je zřejmé, že pro statickou polohu jsou časově závislé derivace  $\mathbf{f}_T$  rovno nule. Z toho vyplývá, že všechny časové derivace ( $\dot{\epsilon}_X, \dot{\phi}_X$ ) v (2.38) - (2.41) jsou rovny nule. Konečně můžeme rozepsat soustavu (4.35)

$$\begin{aligned} F_{I,z} &= 0, \\ F_{I,y} - f_{st}^T &= 0, \\ -F_{I,z} + F_{O,z} &= 0, \\ -F_{I,y} + F_{O,y} - m_{FR}g &= 0, \\ M_I + M_O &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Numerickým řešením (4.36) pomocí funkce v MATLABu *fsolve* získáme rovnovážné polohy středu čepu hřídele v místě ložiska  $v_i, w_i$ , středu kroužku  $v_{FR}^{(T)}, w_{FR}^{(T)}$  a rychlost otáčení kroužku  $\dot{\varphi}_{FR}^{(T)}$ . Nyní lze podle [7] vyjádřit linearizované koeficienty matice tuhosti

na základě prvních členů Taylorova rozvoje jako

$$\begin{aligned}
 k_{zz}^{(i)} &= - \left. \frac{\partial F_z}{\partial z} \right|_{\dot{\varepsilon}=0, \dot{\phi}=0} = - \left( \frac{\partial F_z}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\
 k_{zy}^{(i)} &= - \left. \frac{\partial F_z}{\partial y} \right|_{\dot{\varepsilon}=0, \dot{\phi}=0} = - \left( \frac{\partial F_z}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\
 k_{yz}^{(i)} &= - \left. \frac{\partial F_y}{\partial z} \right|_{\dot{\varepsilon}=0, \dot{\phi}=0} = - \left( \frac{\partial F_y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{\partial F_y}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\
 k_{yy}^{(i)} &= - \left. \frac{\partial F_y}{\partial y} \right|_{\dot{\varepsilon}=0, \dot{\phi}=0} = - \left( \frac{\partial F_y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\
 b_{zz}^{(i)} &= - \left. \frac{\partial F_z}{\partial \dot{z}} \right|_{\dot{\varepsilon}=0, \dot{\phi}=0} = - \left( \frac{\partial F_z}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial F_z}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{z}} \right) \\
 b_{zy}^{(i)} &= - \left. \frac{\partial F_z}{\partial \dot{y}} \right|_{\dot{\varepsilon}=0, \dot{\phi}=0} = - \left( \frac{\partial F_z}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial F_z}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{y}} \right) \\
 b_{yz}^{(i)} &= - \left. \frac{\partial F_y}{\partial \dot{z}} \right|_{\dot{\varepsilon}=0, \dot{\phi}=0} = - \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial F_y}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{z}} \right) \\
 b_{yy}^{(i)} &= - \left. \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right|_{\dot{\varepsilon}=0, \dot{\phi}=0} = - \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial F_y}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{y}} \right), \quad i = T, C,
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

kde lze navíc psát

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{z}} = \frac{\cos \phi}{c} \\
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{y}} = \frac{\sin \phi}{c} \\
 \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{z}} = \frac{-\sin \phi}{e} \\
 \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{y}} = \frac{\cos \phi}{e}.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Výše uvedenými vztahy lze linearizovat jak vnější, tak vnitřní hydrodynamické síly. Pro přehlednost byly vynechány veškeré indexy značící typ ložiska (krátké, dlouhé) a typ vrstvy (vnější, vnitřní). Tyto vztahy platí totiž obecně a lze je aplikovat na síly odvozené pro model v kapitole 2.3. V programu MATLAB byly veškeré derivace provedeny pomocí symbolických proměnných a poté do nich dosazeny příslušné rovnovážné polohy. Z jednotlivých prvků z (4.37) lze vytvořit matice

$$\mathbf{K}_i(\omega) = \begin{bmatrix} k_{zz}^{(I)} & k_{zy}^{(I)} & -k_{zz}^{(I)} & -k_{zy}^{(I)} \\ k_{yz}^{(I)} & k_{yy}^{(I)} & -k_{yz}^{(I)} & -k_{yy}^{(I)} \\ -k_{zz}^{(I)} & -k_{zy}^{(I)} & k_{zz}^{(O)} + k_{zz}^{(I)} & k_{zy}^{(O)} + k_{zy}^{(I)} \\ -k_{yz}^{(I)} & -k_{yy}^{(I)} & k_{yz}^{(O)} + k_{yz}^{(I)} & k_{yy}^{(O)} + k_{yy}^{(I)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^i & \mathbf{K}_{12}^i \\ \mathbf{K}_{21}^i & \mathbf{K}_{22}^i \end{bmatrix}, \quad i = T, C. \tag{4.39}$$





vyjadřuje vývoj vlastních frekvencí systému v závislosti na jeho otáčkách. Kritické otáčky se z něho získají pomocí průsečíků náběžové přímky s křivkami vlastních frekvencí. Vlastní frekvence jsou počítány z matice  $A$  pro model (4.42) pro všechny požadované otáčky.

### 4.5 Analýza ustálené dynamické odezvy ve frekvenční oblasti

Vyšetřování kmitavých soustav není možné jen v časové oblasti, v níž lze pozorovat, jak se chovají jednotlivé souřadnice systému v čase. Často totiž bývá výsledek v časové oblasti dosti nepřehledný a je velmi těžké rozlišit, co se v systému děje. Proto je dobré získaný výsledek převést z časové oblasti do frekvenční. K tomu existuje mnoho různých nástrojů, jejichž vhodnost záleží na typu signálu.

Patrně nejznámějším a také nejvíce používaným nástrojem pro vyšetřování frekvencí v signálu je diskretní Fourierova transformace [18]. Tato metoda je vhodná k vyšetřování odezvy stacionárních signálů. V našem případě budeme zkoumat ustálenou odezvu na buzení nevyvážením. Toto buzení se skládá z harmonických funkcí, proto se dá ustálený stav považovat za stacionární signál. V aplikaci diskretní Fourierovy transformace budeme postupovat tak, že vybereme ustálený úsek simulace v čase, odečteme od něho střední hodnotu a na výsledný signál aplikujeme v MATLABu příkazem *fft*. Tato funkce je rychlejší verzí diskretní Fourierovy transformace.

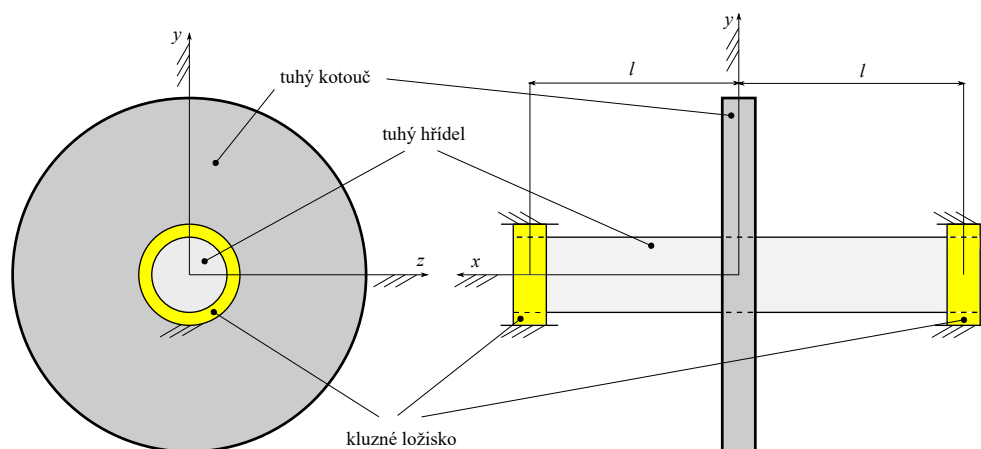
Pro vyšetřování nestacionárních signálů, pro něž je typická změna frekvencí v čase (např. hlasový signál), se provádí časově-frekvenční analýza. Na časový signál se pak aplikují např. krátká Fourierova transformace, vlnkové transformace, či transformace typu EMD.

Analýzou ve frekvenční oblasti můžeme zjistit, při jakých otáčkách se systém chová nestabilně a určit příčinu této nestability. Nestabilita způsobená nevyvážeností rotorů se objevuje na otáčkové frekvenci. V kluzném ložisku pak vznikají nestability typu whirl (víření oleje) a whip (tlučení oleje). Nestabilita typu whirl se objevuje přibližně na 0,4-0,48 násobku otáčkové frekvence. Nestabilita typu whip je typická tím, že neodeznívá a téměř se nemění s otáčkami rotoru. Vzniká tak, že se frekvence víření rovná některé z vlastních frekvencí [10].

# Kapitola 5

## Nejjednodušší modely rotorů s kluznými ložisky

V této kapitole jsou prozkoumány dynamické vlastnosti kluzných ložisek použité na nejjednodušší model rotoru - Lavalův rotor (Obr. 5.1). Jedná se o rotor, který je tvořen hřídelem a tuhým kotoučem nasazeným uprostřed hřídele. V obecném případě se jedná o hřídel pružný. V této kapitole jsou však ukázány případy Lavalova rotoru, kde dojde k zanedbání poddajnosti hřídele, jelikož primární cíl této kapitoly je prozkoumat dynamické vlivy ložisek, nikoliv poddajnosti hřídele.

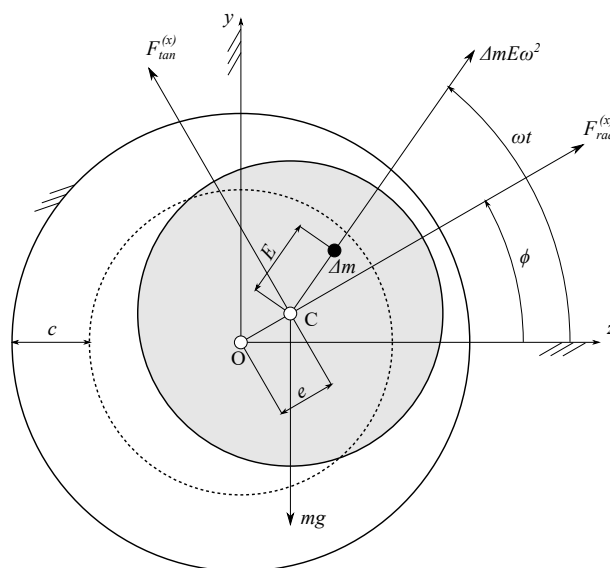


Obrázek 5.1: Ilustrace Lavalova rotoru na kluzných ložiskách

Kluzná ložiska vnáší do modelu nelineární vlivy a vykazují speciální dynamické vlastnosti, které se nevyskytují u lineárního systému. Zejména se jedná o způsob, jakým soustava ztrácí stabilitu. Provádění analýz nelineárních systémů je možné pomocí numerických metod numerické integrace sestaveného matematického modelu. Nelineární systém je však možné linearizovat v okolí pracovního bodu a rozhodovat o stabilitě rotoru na základě teorie stability pro lineární systémy.

### 5.1 Lavalův rotor uložený na kluzných ložiskách

Uvažujme Lavalův rotor uložený na dvou kluzných ložiskách, jehož parametry jsou uvedeny v Tab. 5.2. Jelikož se jedná o symetrickou úlohu, můžeme řešit úlohu pouze pro



Obrázek 5.2: Lavalův rotor na kluzných ložiskách

jedno ložisko, jak je naznačeno na Obr. 5.2. Protože se jedná o kluzná ložiska bez kroužku, tak je matematický popis systému jednodušší a lze jej ve stavovém prostoru rozepsat jako

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{m} \left[ F_{HD,z}^{(X)} + \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t) \right], \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{m} \left[ F_{HD,y}^{(X)} + \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) - mg \right], \quad (X) = IS, IL, \end{aligned} \quad (5.1)$$

kde síly  $F_{HD,z}^{(X)}$  a  $F_{HD,y}^{(X)}$  se rovnají vztahům ve (2.20).

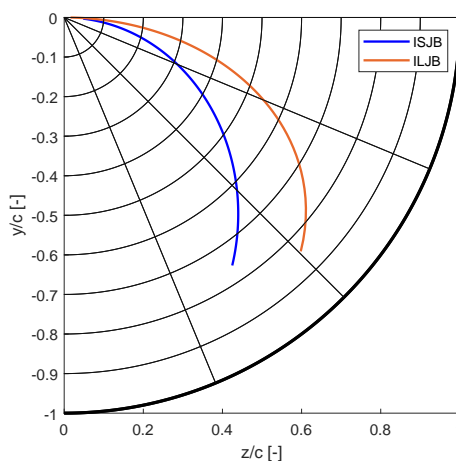
Jako první budeme zkoumat vliv úhlové rychlosti otáčení rotoru na rovnovážné poloze. Tato závislost je vynesena na Obr. 5.3. Lze vidět, že rovnovážné polohy se liší pro zvolený model ložiska. Na tomto obrázku lze též vidět, že se zvětšující se úhlovou rychlostí dochází k „centrování“ ložiska do počátku kartézského souřadnicového systému.

V těchto rovnovážných polohách byla provedena linearizace sil a byly vytvořeny matice tuhosti a tlumení dle kapitoly 4. Pro linearizovaný model byla vypočtena vlastní čísla, z nichž bylo usuzováno na stabilitu jednotlivých systémů. Na Obr. 5.4, resp. Obr. 5.5 lze vidět reálnou, resp. imaginární část vlastních čísel pro ILJB model ložisek. Lze vidět, že tento model je pro všechny simulované otáčky stabilní. Obdobně byly sestrojeny pro ISJB model ložisek Obr. 5.7 a Obr. 5.8. V tomto případě již lze určit mez, kdy se stává systém nestabilním. Z Obr. 5.6 lze vidět, že vlastní číslo se stává reálným pro přibližně pro 47 Hz.

V dalším kroku byla provedena analýza nelineárního modelu (5.1), kdy počáteční výchylky byly blízko dříve vypočtené rovnovážné polohy. Na Obr. 5.8, resp. Obr. 5.9 je vidět frekvenční spektrum pro zkoumané otáčky pro rotor bez nevyvážku, resp. s nevyvážkem pro model ložisek ISJB. Na Obr. 5.8 není vidět žádná frekvence, což je v souladu s tím, že je soustava stabilní. Proto se z výchylky kolem rovnovážné polohy utlumí zpět do rovnovážné polohy a dále nekmitá. Naopak z Obr. 5.9 je vidět, že je přítomna otáčková frekvence, která charakterizuje nevyvážek.

Tabulka 5.1: Parametry Lavalova rotoru na kluzných ložiskách

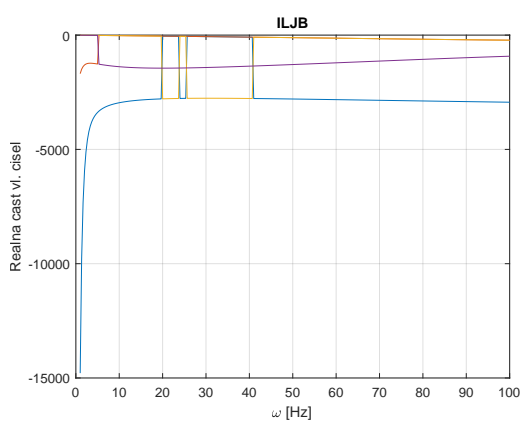
Parametr	Hodnota
Ložisková mezera	$c = 0.9 \times 10^{-3} [m]$
Nevývažek pro ISJB model	$\Delta m = 0.1 [kg]$
Nevývažek pro ILJB model	$\Delta m = 0.01 [kg]$
Excentricita nevývažku pro ISJB	$E = 0.015 [m]$
Excentricita nevývažku pro ILJB	$E = 0.01 [m]$
Hmotnost rotoru	$m = 10 [kg]$
Poloměr rotoru	$R = 49.37 \times 10^{-3} [m]$
Průměr rotoru	$2 \cdot R [m]$
Dynamická viskozita	$\mu = 0.07 [Pa \cdot s]$
Délka ložiska	$L = \eta D [m], \eta = 1 [-]$
Tíhové zrychlení	$g = 9.81 [m \cdot s^{-2}]$ ,
Otáčky rotoru	$\omega = \langle 10; 100 \rangle [Hz]$
Čas	$t = \langle 0; 3 \rangle [s]$



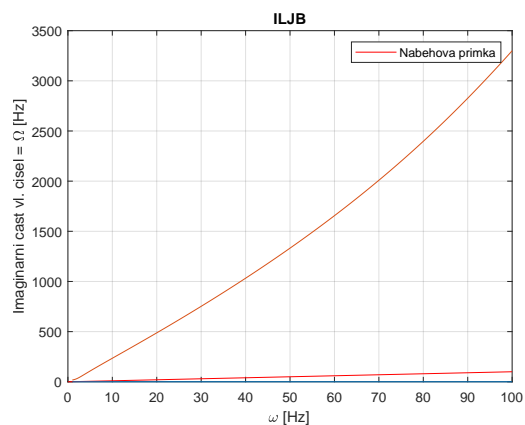
Obrázek 5.3: Rovnovážné polohy v závislosti na otáčkách

Na Obr. 5.10, resp. Obr. 5.11 lze vidět frekvenční spektra pro dané otáčky pro model ložiska ISJB. Z Obr. 5.10 vidíme, že vzniká nestabilita v ložisku typu whirl (vyskytuje se přibližně na polovině otáčkové frekvence). Vzniká přibližně kolem 47 Hz, což souvisí s vypočtenými vlastními čísly z Obr. 5.6. Projev této nestability je doplněn o Obr. 5.12, na kterém je vidět vliv relativní excentricity čepu hřídel v závislosti na otáčkách. Je vidět, jak se relativní excentricita blíží k nule (čep ložiska se centruje) a po překročení rychlosti 47 Hz se začne relativní excentricita blížit k jedničce (čep hřídele koná pohyb po obvodu ložiskové mezery).

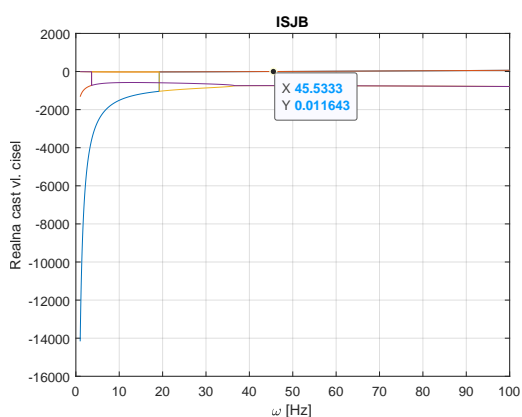
Na Obr. 5.11 můžeme vidět, že whirl nestabilita oleje se objevuje už dříve než pro 47 Hz. To lze přisuzovat tomu, že vlivem nevývažku dojde k příliš velké odchylce od rovnovážné polohy a tím pádem se začnou projevovat nelinearity.



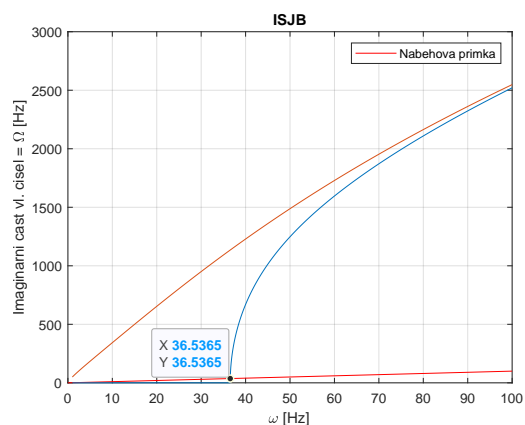
Obrázek 5.4: Reálná část vlastních čísel pro ILJB model ložisek



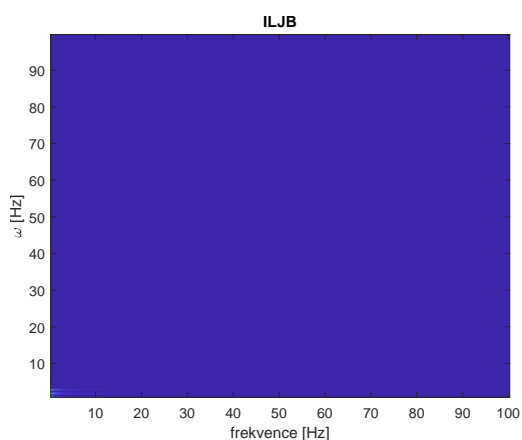
Obrázek 5.5: Imaginární část vlastních čísel pro ILJB model ložisek



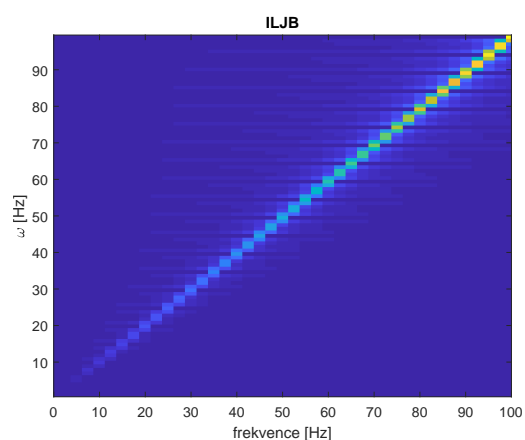
Obrázek 5.6: Reálná část vlastních čísel pro ISJB model ložisek



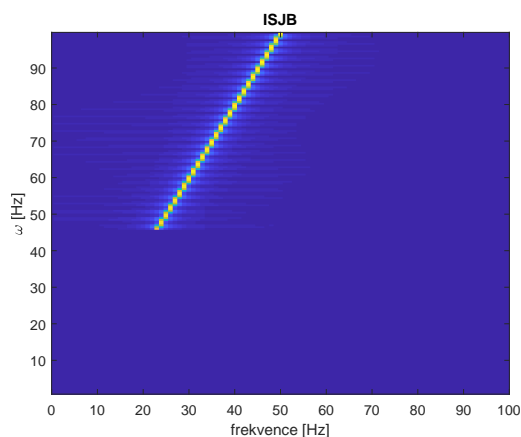
Obrázek 5.7: Imaginární část vlastních čísel pro ISJB model ložisek (Campbellův diagram)



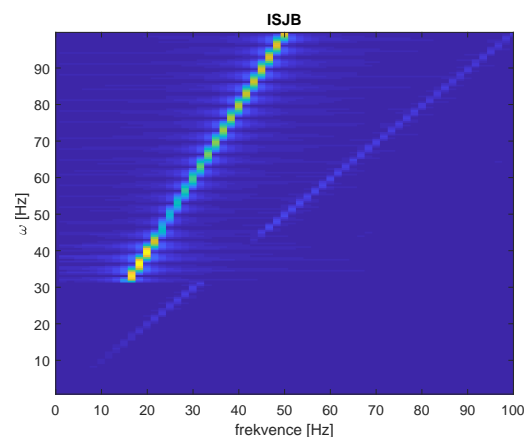
Obrázek 5.8: Frekvenční odezva pro ILJB model ložisek bez nevývažku



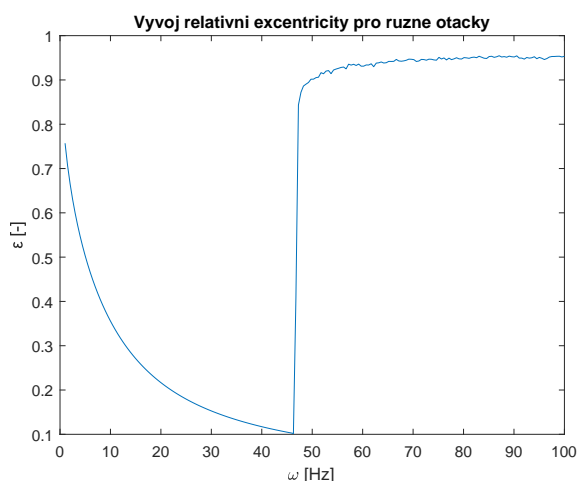
Obrázek 5.9: Frekvenční odezva pro ILJB model ložisek s nevývažkem



Obrázek 5.10: Frekvenční odezva pro ISJB model ložisek bez nevyvážky



Obrázek 5.11: Frekvenční odezva pro ISJB model ložisek s nevyvážkem



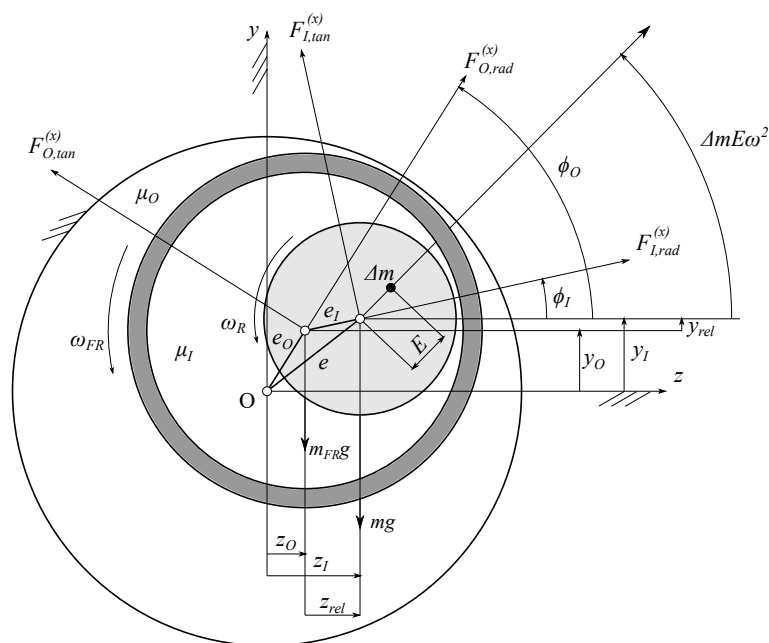
Obrázek 5.12: Rovnovážné polohy v závislosti na otáčkách

## 5.2 Lavalův rotor uložený na kluzných ložiskách s plovoucím pouzdrem

U Lavalova rotoru s plovoucím kroužkem se problém zkomplikuje z důvodu existence dvou olejových vrstev. Díky tomu, že úloha je opět symetrická, můžeme provádět analýzu pouze v jednom ložisku. Na Obr. 5.13 je možné vidět ilustraci této úlohy, včetně působících sil na soustavu. Pomocí odvozených rovnic nelineárních sil v kapitole 2 můžeme odvodit matematický model Lavalova rotoru ve stavovém prostoru jako

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_6 \\
 \dot{x}_2 &= x_7 \\
 \dot{x}_3 &= x_8 \\
 \dot{x}_4 &= x_9 \\
 \dot{x}_5 &= x_{10} \\
 \dot{x}_6 &= \frac{1}{m} \left[ F_{I,z}^{(X)} + \Delta m E \omega_R^2 \cos(\omega_R t) \right] \\
 \dot{x}_7 &= \frac{1}{m} \left[ F_{I,y}^{(X)} + \Delta m E \omega_R^2 \sin(\omega_R t) - mg \right] \\
 \dot{x}_8 &= \frac{1}{m_{FR}} \left[ -F_{I,z}^{(X)} + F_{O,z}^{(X)} \right] \\
 \dot{x}_9 &= \frac{1}{m_{FR}} \left[ -F_{I,y}^{(X)} + F_{O,y}^{(X)} - m_{FR} g \right] \\
 \dot{x}_{10} &= \frac{1}{I_{FR}} [M_I + M_O], \quad X = IS, IL,
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

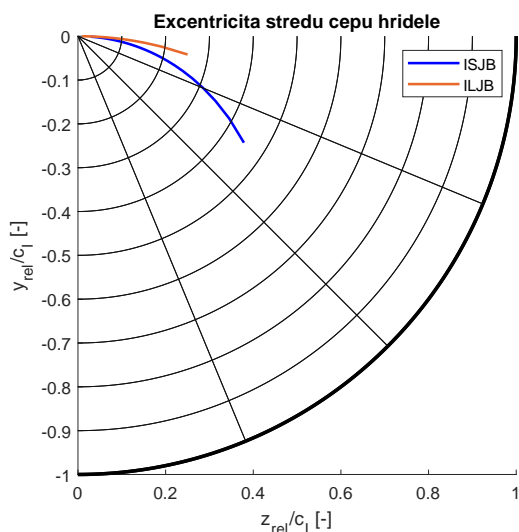
kde pro výpočet byly použity momenty třecích sil ve tvaru (2.46) a (2.47). Momenty v tomto tvaru byly též použity v případě analýzy turbodmychadla.



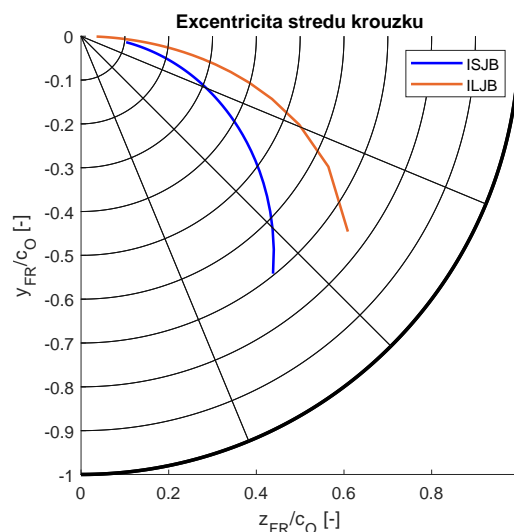
Obrázek 5.13: Ilustrace Lavalova rotoru na kluzných ložiskách

Jako první opět budeme vyšetřovat rovnovážnou polohu a nyní i též rychlost otáčení kroužku pro rovnovážnou polohu. Na Obr. 5.14 je opět znázorněn vývoj rovnovážné polohy pro zkoumané otáčky pro relativní excentricitu středu čepu hřídele uvnitř kroužku. Na vedlejším Obr. 5.15 je pak znázorněna excentricita středu kroužku vzhledem k vnější ložiskové mezeře  $e_O$ . Opět je vidět stejně jako v předchozím případě trend vyplavování středů do počátku souřadnicové soustavy se zvyšujícími se otáčkami.



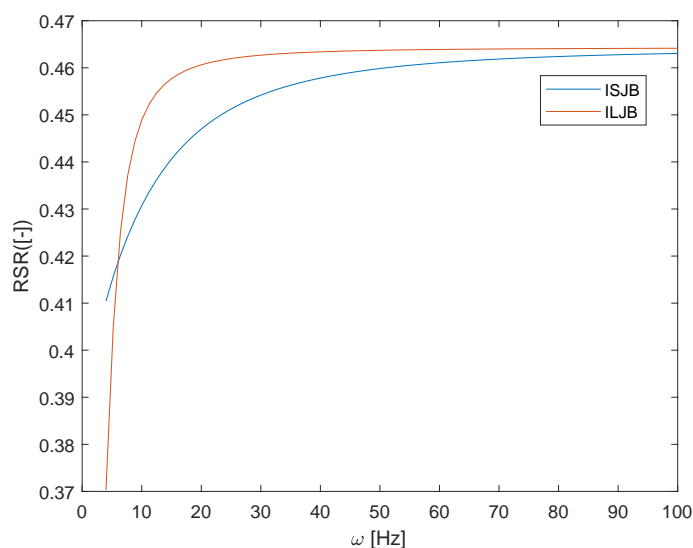


Obrázek 5.14: Rel. excentricita středu čepu hřídele uvnitř ložiskového kroužku



Obrázek 5.15: Relativní excentricita kroužku

Na Obr. 5.16 je znázorněn vývoj RSR pro různé otáčky. Tyto hodnoty byly získány numericky společně s řešením rovnovážné polohy. Lze pozorovat, že se poměr rychlosti kroužku se zvyšující se rychlostí otáčení rotoru pomalu zvětšuje.



Obrázek 5.16: Ring speed ratios plovoucího kroužku

Zaměříme se nyní pouze na analýzu modelu Lavalova rotoru uloženého na kluzných ložiskách s plovoucími pouzdry pro model krátkého ložiska (ISJB). Výpočtem matic tlumení a tuhosti pro linearizovaný model, lze vypočítat vlastní čísla systémové matice. Z komplexních vlastních čísel je možné opět usuzovat na stabilitu systému. Stejně jako v předchozím případě, vyneseme reálnou část vlastních čísel do Obr. 5.17 a imaginární část vlastních čísel do Obr. 5.20. Z obou obrázků vidíme, že mez stability systému i kritické otáčky nastávají pro otáčky přibližně 35 Hz.

Mez stability pak můžeme pozorovat i ve frekvenční odezvě nelineárního modelu (5.2) bez nevyvážky na Obr. 5.19. Při uvažování nevyvážky můžeme pozorovat na Obr.

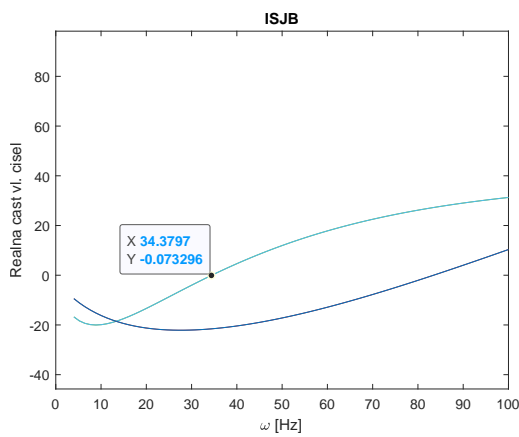
Tabulka 5.2: Parametry Lavalova rotoru na kluzných ložiskách s plovoucími pouzdry

Parametr	Hodnota
Hmotnost rotoru	$m = 10$ [kg]
Tíhové zrychlení	$g = 9.81$ [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ],
Hmotnost nevývažku	$m = 0.15$ [kg]
Excentricita nevývažku	$E = 0.015$ [m]
Vnitřní poloměr	$R_I = 49.37 \times 10^{-3}$ [m]
Vnitřní průměr	$D_I = 2 \cdot R_I$ [m]
Vnější poloměr	$R_O = 52 \times 10^{-3}$ [m]
Vnější průměr	$D_O = 2 \cdot R_O$ [m]
Dynamická viskozita vnitřní vrstvy	$\mu_I = 0.08$ [Pa·s]
Dynamická viskozita vnější vrstvy	$\mu_O = 0.10$ [Pa·s]
Vnitřní ložisková mezera	$c_I = 0.9 \times 10^{-3}$ [m]
Vnější ložisková mezera	$c_O = 1.2 \times 10^{-3}$ [m]
Vnitřní délka ložiska	$L_I = \eta D_I$ [m], $\eta = 1$ [-]
Vnější délka ložiska	$L_O = \eta D_I$ [m], $\eta = 1$ [-]
Hmotnost plovoucího kroužku	$m_{FR} = 0.072$ [kg]
Moment setrvačnosti plovoucího kroužku	$I_{FR} = 1.8 \times 10^{-4}$ [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ]
Otáčky rotoru	$\omega = \langle 6; 100 \rangle$ [Hz]
Čas simulace	$t = \langle 0; 5 \rangle$ [s]

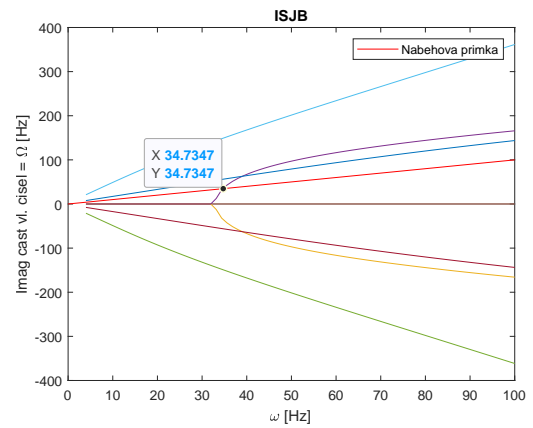
5.20 opět kromě nestability typu whirl (nejvýraznější - žlutá) otáčkovou frekvenci (rovna otáčkové frekvenci) ještě 3. frekvenci (nejvíce nalevo), která se nachází z důvodu dvou olejových vrstev v ložisku.

Pro zajímavost také byly na Obr. 5.21, resp. 5.22 vyneseny RSR získané výpočtem a při simulaci nelineárního modelu v čase pro model bez nevývažku, resp. s nevývažkem. Z obou obrázků vidíme, že se nelineární model chová jako lineární dokud je stabilní a kmitá dostatečně blízko rovnovážné poloze.

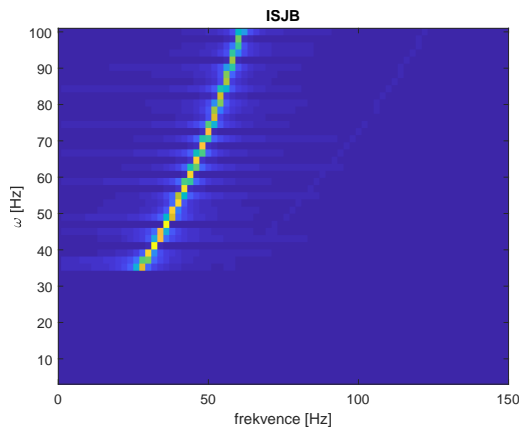
## 5. NEJEDNODUŠŠÍ MODELÝ ROTORŮ S KLUZNÝMI LOŽISKY



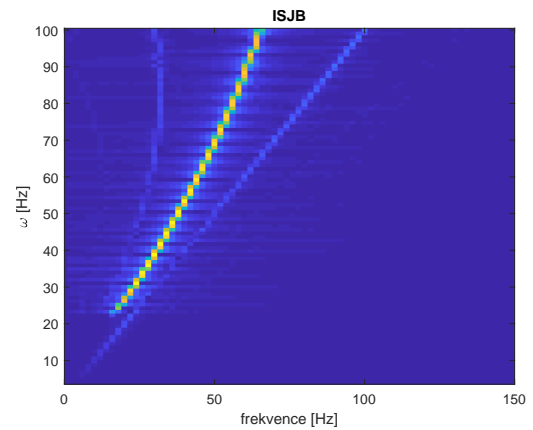
Obrázek 5.17: Reálná část vlastních čísel pro ISJB model ložisek



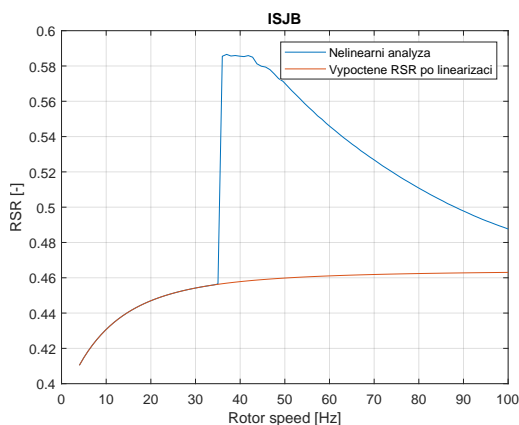
Obrázek 5.18: Imaginární část vlastních čísel pro ISJB model ložisek (Campbellův diagram)



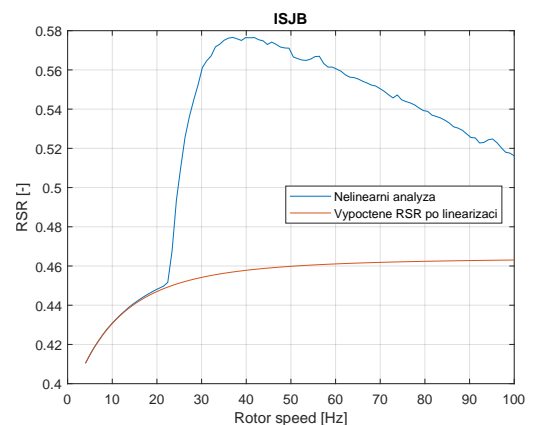
Obrázek 5.19: Frekvenční odezva pro ISJB model ložisek bez nevyvážku



Obrázek 5.20: Frekvenční odezva pro ISJB model ložisek s nevyvážkem



Obrázek 5.21: Porovnání RSR získaného výpočtem při linearizaci a RSR získaného numerickou integrací nelineárního modelu bez nevyvážku

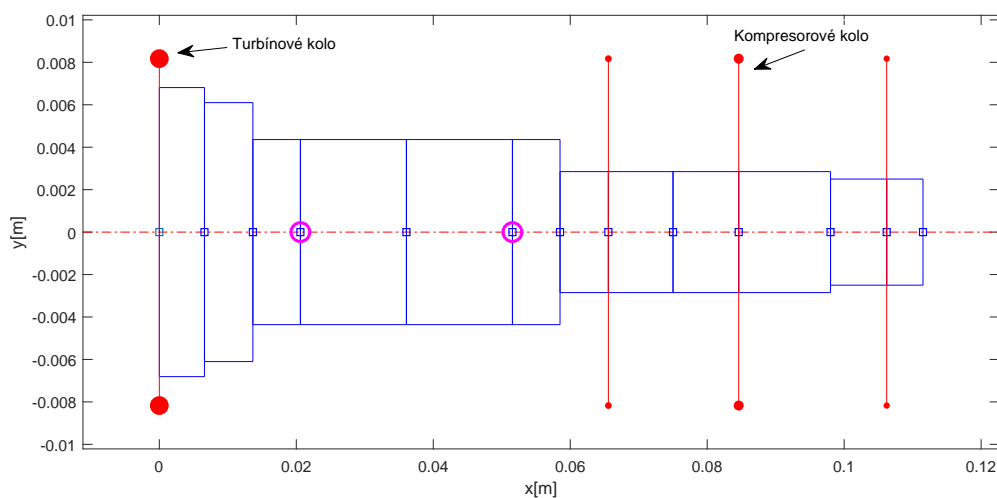


Obrázek 5.22: Porovnání RSR získaného výpočtem při linearizaci a RSR získaného numerickou integrací nelineárního modelu s nevyvážkem

# Kapitola 6

## Aplikace na turbodmychadlo

V této kapitole je provedena analýza reálného rotoru turbodmychadla řady C15 od výrobce ČZ a.s. na základě vytvořeného programu v MATLABu. Do programu slouží jako vstupy geometrické a materiálové parametry hřídelových elementů, kotoučů a kluzných ložisek s plovoucími pouzdry. Program byl navržen tak, aby ho bylo možné použít i pro analýzu libovolného rotoru uloženého na kluzných ložiskách s plovoucími pouzdry. Výstupem programu jsou rovnovážné polohy kroužků ložiska a hřídele v uzlech nasazení ložiska, linearizované vazby v olejových filmech, simulace rotoru v čase a spektrální odezva. Pomocí výsledků ze simulace v čase pak lze podrobněji zkoumat např. RSR nebo orbity hřídele a plovoucího kroužku.



Obrázek 6.1: Schéma rotoru turbodmychadla, modrá barva ohraničuje elementy, modré čtverečky značí uzly, fialové kroužky pozici ložisek a červené čáry s kruhy na konci přidáné tuhé kotouče v uzlech

### 6.1 Geometrické a materiálové parametry turbodmychadla

Aby byla možnost matematicky popsat chování turbodmychadla, bylo nutné v prvním kroku diskretizovat hřídel pomocí metody konečných prvků. Turbodmychadlo se skládá z hřídele o hustotě  $\rho = 7850 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , turbínového a kompresorového kola, rozpěrky, matice

a dvou kluzných ložisek s plovoucími kroužky. Turbodmychadlo bylo diskretizováno na 12 elementů dle Obr. 6.1. Na Obr. 6.1 lze také názorně vidět, do kterých uzlu v modelu byly vloženy tuhé kotouče. Velikost červeného kruhu vyjadřuje hmotnost tuhého kotouče.

Tabulka 6.1: Parametry hřídele

Č. elementu	Průměr [mm]	Délka [mm]
1	13,62	6,59
2	12,20	7,07
3	8,72	6,94
4	8,72	15,48
5	8,72	15,48
6	8,72	6,95
7	5,70	7,06
8	5,70	9,44
9	5,70	9,59
10	5,70	13,41
11	5,00	8,20
12	5,00	5,30

Pro přehlednost byly materiálové a geometrické parametry turbodmychadla vyneseny do tabulek. Parametry diskretizace hřídele lze najít v Tab. 6.1. V další Tab. 6.2 lze potom najít do parametry tuhých kotoučů V této tabulce lze vidět ve 2. sloupci odsazení jednotlivých elementů od uzlů v axiálním směru. Nutno podotknout, že pro všechny tuhé elementy jsou deviační momenty  $D_{yz}$  a  $D_{xz}$  nulové. V poslední Tab. 6.3 jsou uvedeny parametry ložisek pro pokojovou teplotu 20 stupňů Celsia.

Tabulka 6.2: Parametry tuhých kotoučů

Uzel	Odsaz.	Hmot.	Ixx	Iyy	Izz	Dxy	Typ
	[mm]	[g]	[kgm <sup>2</sup> ]	[kgm <sup>2</sup> ]	[kgm <sup>2</sup> ]	[kgm <sup>2</sup> ]	
1	-12,09	234,8	5,638E-05	4,575E-05	4,574E-05	4,0E-09	Tur.kolo
8	0,00	10,17	2,90E-07	3,57E-07	3,57E-07	0	Rozpěrka
10	0,00	70,5	1,959E-05	1,347E-05	1,349E-05	0	Kom.kolo
12	1,75	2,00	2,50E-08	1,50E-08	1,50E-08	0	Matice

## 6.2 Analýza kritických otáček

V kapitole 3 byly představeny 3 způsoby modelování hřídelů. Pro modelování hřídele turbodmychadla byla použita Bernoulliiova-Eulerova teorie, která zanedbává vliv zkosů. Pro analýzu kritických otáček byla potřeba sestrojít Campbellův diagram, který byl získán

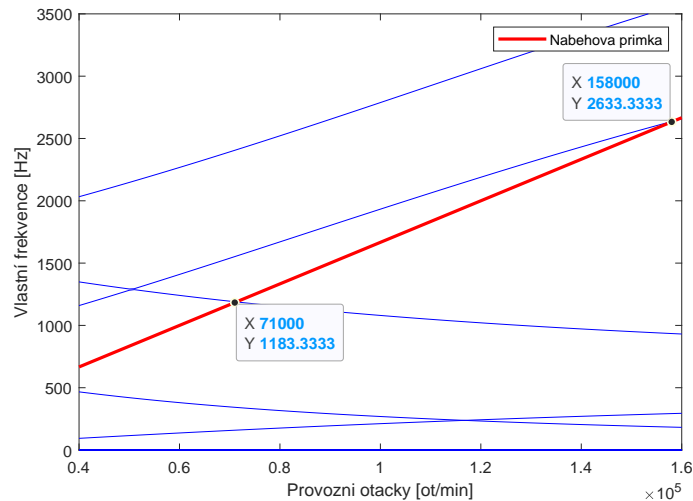
Tabulka 6.3: Parametry Ložisek

Parametr	Označení	Turb. strana	Komp. strana
Uzel	$i$	4	6
Vnitřní poloměr pouzdra	$R_I$ [mm]	4,375	4,375
Vnější poloměr pouzdra	$R_O$ [mm]	6,6925	6,6925
Vnitřní lož. mezera	$c_I$ [mm]	0,0185	0,0175
Vnější lož. mezera	$c_O$ [mm]	0,0375	0,036
Vnitřní délka ložiska	$L_I$ [mm]	7,6	7,6
Vnější délka ložiska	$L_O$ [mm]	8,6	8,6
Viskozita vnitřní vrstvy	$\mu_I$ [Pa·s]	0,0075	0,0075
Viskozita vnější vrstvy	$\mu_O$ [Pa·s]	0,0075	0,0075
Hmotnost kroužku	$m_{FR}$ [g]	5,8	5,8
Moment setrvačnosti k ax. ose	$I_{FR}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	1,827E-7	1,827E-7

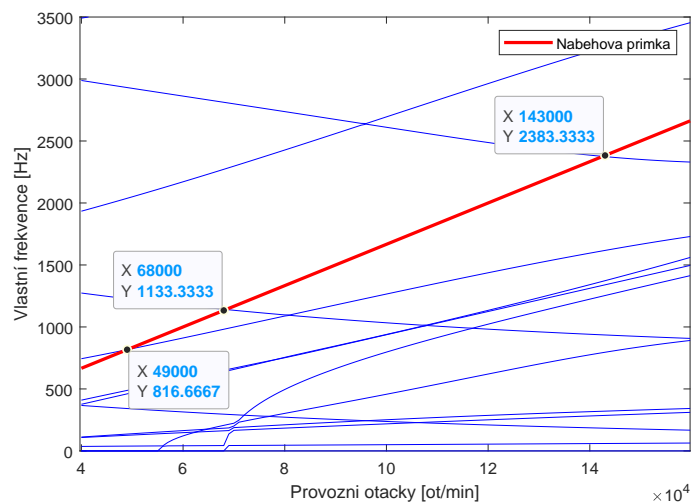
pomocí linearizace ložiskových vazeb. Postup linearizace a sestrojení Campbellova diagramu je podrobně popsán v kapitole 4. Pro stanovení linearizovaných sil je též důležité znát statické zatížení přenášené olejovými filmy. Ty lze určit na základě znalosti těžiště rotoru a polohy ložisek. Polohu těžiště vypočteme snadno ze znalosti hmotností a pozic elementů a tuhých kotoučů. Hodnota statického zatížení je pro ložisko na turbínové straně tímto výpočtem  $f_{st}^T = 3.2197$  N a na kompresorové straně  $f_{st}^C = 0,3366$  N.

V této sekci je též demonstrováno, jakým způsobem se změní Campbellovy diagramy, pokud budeme uvažovat jen nekonzervativní model izolovaného hřídele s gyroskopickými účinky bez vnějšího i vnitřního tlumení (Obr. 6.2) a poté stejný model doplněný o linearizované vazby ložisek (Obr. 6.3).

Z Campbellových diagramů získáme kritické otáčky jako průsečíky větví vlastních frekvencí s náběhovou přímkou. Je možné dále zkoumat, zda jsou jednotlivé větve vlastních frekvencí stabilní či nestabilní na základě tzv. poměrného modálního útlumu [17]. Z Campbellových diagramů vidíme, že potenciálně nebezpečné otáčky pro model s linearizovanými vazbami v ložiskách jsou 49000 ot/min, 68000 ot/min a 143000 ot/min. Campbellovy diagramy byly vytvořeny pro rozsah provozních otáček  $\omega_R = (40000, 160000)$ .



Obrázek 6.2: Campbellův diagram pro izolovaný rotor



Obrázek 6.3: Campbellův diagram pro rotor uložený na ložiskách

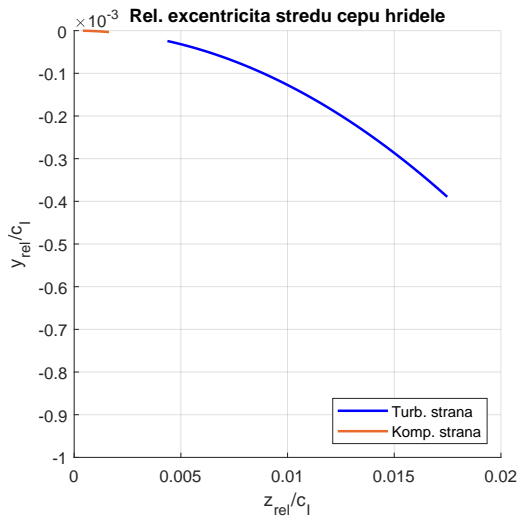
Na Obr. 6.4, resp. 6.5 lze sledovat, jak se vyvíjí rovnovážná poloha relativních excentrit středu čepu hřídele uvnitř plovoucího kroužku ložiska, resp. plovoucího kroužku. Je vidět, že se rovnovážné polohy liší pro obě ložiska. To je způsobeno především různým statickým zatížením působícím v uzlech s ložisky.

Obr. 6.6 znázorňuje vývoj RSR pro kroužek ložiska na turbínové, resp. kompresorové straně turbodmychadla pro zvyšující se provozní otáčky. Lze pozorovat, že kroužek na kompresorové straně ložiska se otáčí rychleji než na straně turbínové.

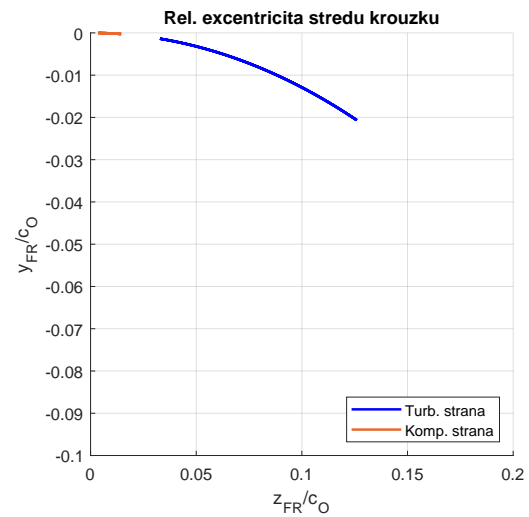
### 6.3 Simulace v časové oblasti

Na závěr byla provedena simulace modelu turbodmychadla s nelineárními ložiskovými vazbami dle (3.70). Pro numerickou integraci byl zvolen v MATLABu solver *ode15s*, protože byl nejrychlejší v porovnání s jinými solvery.

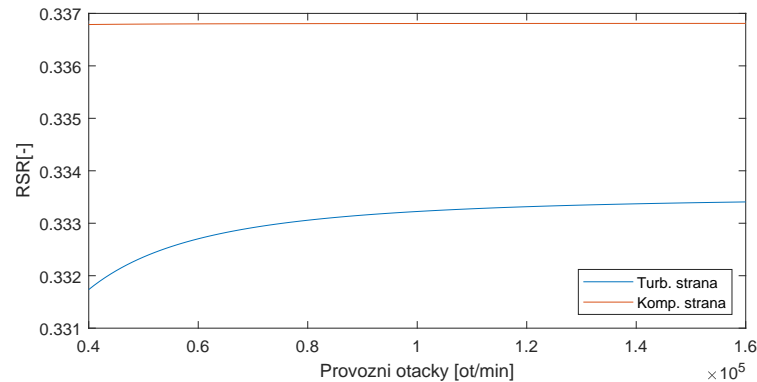
Pro analýzu turbodmychadla byla zavedena proporcionální matice tlumení charakterizující vnější tlumení s koeficientem  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1E-7$ . Stejně jako pro výpočet rovnovážné



Obrázek 6.4: Rovnovážná poloha hřídele v uzlu ložiska



Obrázek 6.5: Rovnovážná poloha plovoucího kroužku

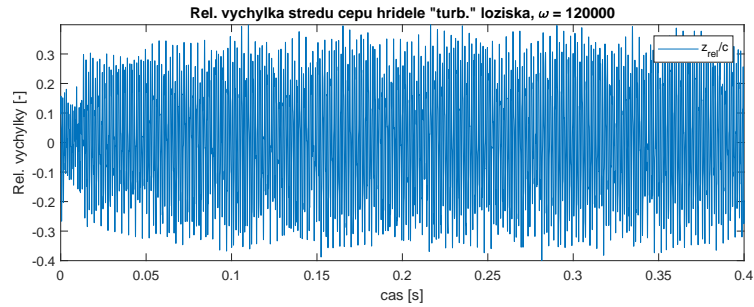


Obrázek 6.6: Vývoj RSR v závislosti na provozních otáčkách

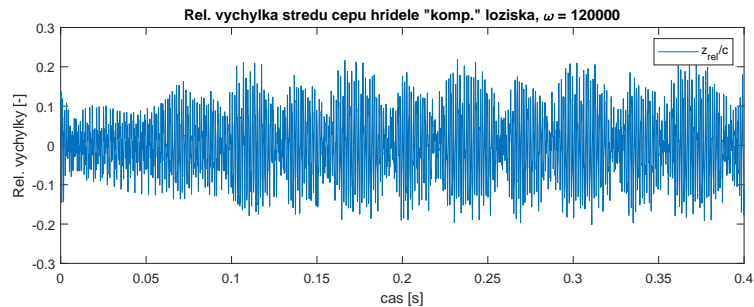
polohy byl i pro simulaci v čase použit model krátkého ložiska (ISJB). Tento model totiž lépe vystihuje chování skutečného ložiska, jelikož poměr délky použitého ložiska a jeho průměru je menší než 1. Simulace byla provedena pro čas  $t \in (0; 0.4)$  a provozní otáčky  $\omega_R = (60000; 160000)$  ot/min. Nevývážek byl umístěn do uzlu 1 o velikosti  $\Delta m = 1$  g a excentricitě  $E = 1$  mm. Pro rychlejší běh programu byla navíc použita metoda kondenzace, která byla vysvětlena v kapitole 4. Pro analýzu bylo použito prvních 30 vlastních tvarů a vlastních frekvencí.

Na Obr. 6.7, resp. Obr. 6.8 je zobrazen časový průběh z-ové souřadnice v uzlu ložiska na turbínové, resp. kompresorové straně ložiska pro provozní otáčky 120000 ot/min. Je vidět, že z časových průběhů je nemožné odhadnout, jaké frekvence se v signálu objevují. Je proto na všechny zkoumané provozní otáčky aplikována FFT pro posledních 0,8s signálu, kdy se dá signál považovat již za ustálený. Výsledky ve frekvenční oblasti pro všechny provozní otáčky lze vidět na Obr. 6.9, resp. 6.10. V obou frekvenčních odezvách jsou zřetelně vidět 3 vyskytující se frekvence v obou signálech. První větev začíná pro nejnižší otáčky na přibližně 200 Hz, druhá větev na 500 Hz a třetí větev na 1000 Hz. Třetí větev je otáčková frekvence vyvolaná nevyváhou, druhá větev je nestabilita oleje typu whirl a první větev se jeví trochu nejednoznačně jako nestabilita typu whirl nebo whip.

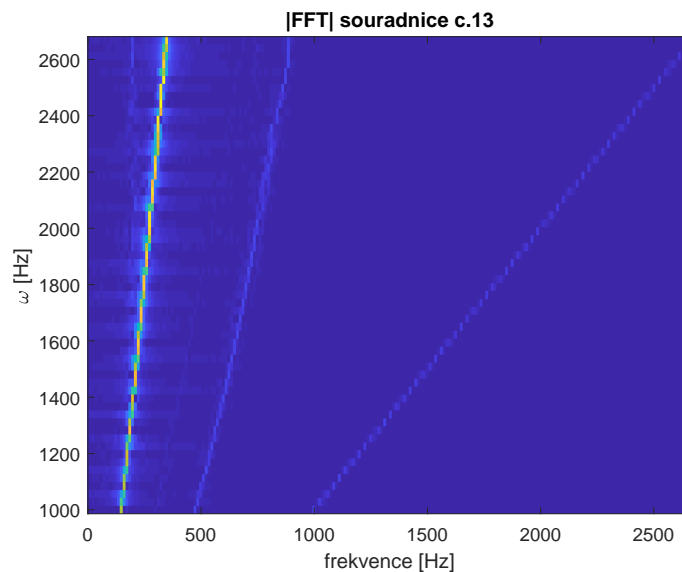




Obrázek 6.7: Časový průběh relativní z-ové výchylky středu čepu hřídele uvnitř plovoucího kroužku na turbínové straně turbodmychadla pro 120000 ot/min

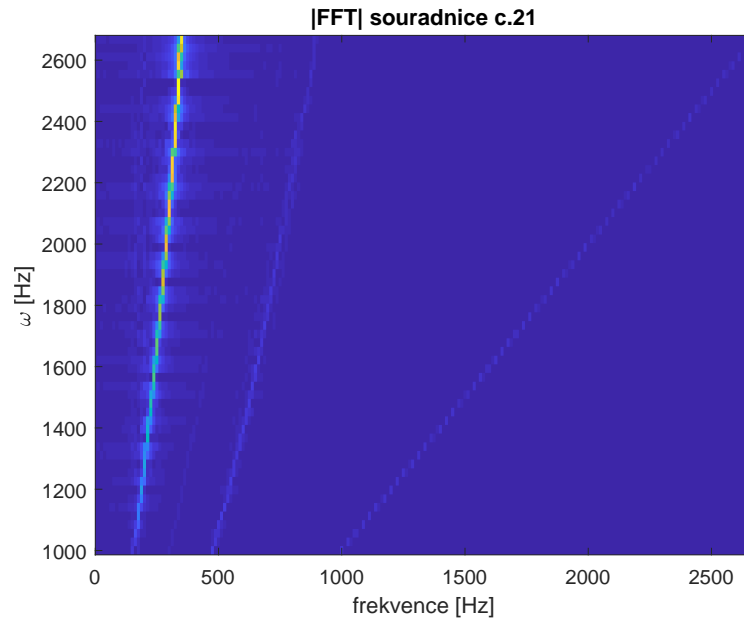


Obrázek 6.8: Časový průběh relativní z-ové výchylky středu čepu hřídele uvnitř plovoucího kroužku na kompresorové straně turbodmychadla pro 120000 ot/min

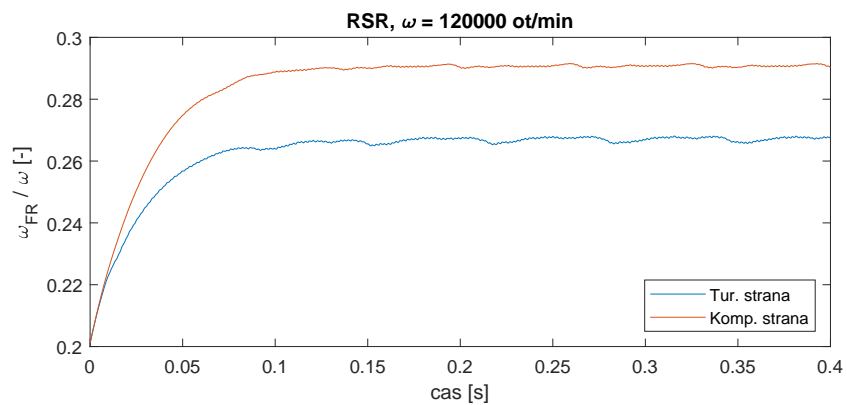


Obrázek 6.9: Spektrum odezvy v uzlu ložiska na turbínové straně

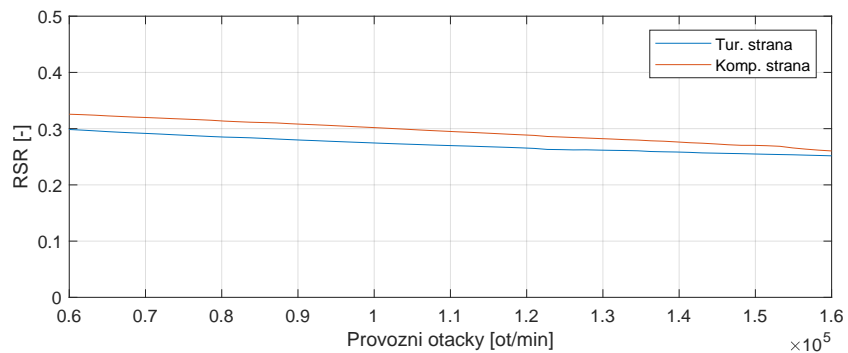
Na Obr. 6.11 je znázorněna rychlost kroužku v čase pro otáčky  $\omega_R=120000$  ot/min. Na obrázku je vidět, že pro tyto konkrétní otáčky je rychlost otáčení kroužku ložiska na turbínové straně menší než rychlost otáčení kroužku na kompresorové straně. Lepší přehled o rychlostech kroužku v závislosti na všech provozních otáčkách je vidět na Obr. 6.12. Je možno pozorovat, že pro všechny provozní otáčky, je rychlost kroužku u ložiska na turbínové straně o trochu vyšší než u kroužku na kompresorové straně.



Obrázek 6.10: Spektrum odezvy v uzlu ložiska na kompresorové straně

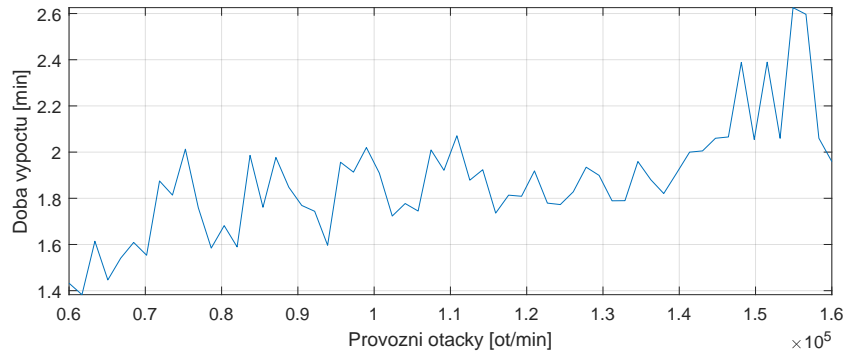


Obrázek 6.11: Rychlost otáčení rychlosti kroužku pro 120000 ot/min

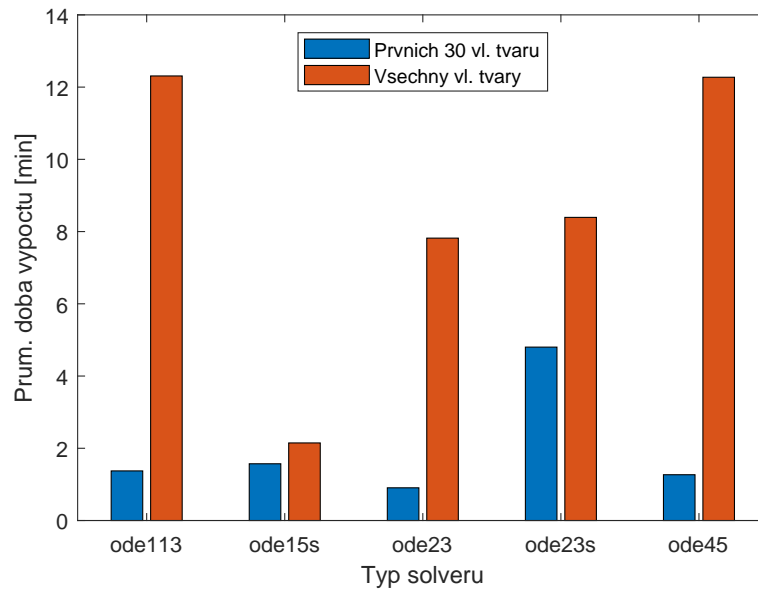


Obrázek 6.12: Vývoj RSR v závislosti na provozních otáčkách

V porovnání s Obr. 6.6, kde byla vypočtena rychlost kroužku pro linearizované ložiskové vazby, vidíme, že výpočtem s uvažováním nelineárních vazeb vychází rychlosti kroužků nepatrně menší. V obou případech platí, že rychlost kroužku na turbínové straně je menší



Obrázek 6.13: Doba výpočtu pro jednotlivé otáčky



Obrázek 6.14: Porovnání doby výpočtu pro různé solvery

než na kompresorové straně.

Na Obr. 6.13 je vynesena doba výpočtu pro solver *ode15s* kondenzovaného modelu pro všechny provozní otáčky. Je vidět, že se doba výpočtu zvětšuje s vyšujícím se provozními otáčkami. To je zapříčiněno tím, že dochází ke složitějšímu pohybu z důvodu vyšší otáčkové frekvence. Na posledním Obr. 6.14 jsou porovnány průměrné časy výpočtu jednotlivých solverů. Průměrný čas byl vypočten jako průměr výpočtových časů simulací 4 provozních stavů  $\omega_R = \{60000, 93300, 126600, 160000\}$  ot/min. Můžeme vidět, že ačkoliv solver *ode15s* není nejrychlejší pro kondenzovaný model, tak je výrazně nejrychlejší pro nekondenzovaný model. U ostatních solverů dochází k významnému navýšení doby výpočtu při uvažování více vlastních tvarů.

# Kapitola 7

## Závěr

Diplomová práce se zabývá modelováním rotorů a jejich následnou analýzou v časové a frekvenční oblasti. V diplomové práci bylo vytvořeno několik dílčích úkolů.

V kapitole 2 byly představeny metody, pomocí kterých lze modelovat síly přenášené olejovými vazbami u kluzných ložisek. Podrobněji byly rozebrány modely krátkého a tuhého ložiska. Důraz byl kladen především na matematický popis pro kluzná ložiska s plovoucím pouzdrům. Model těchto ložisek byl potřeba odvodit, aby šla provádět analýza rotoru uloženého na tomto typu ložisek.

V kapitole 3 bylo vysvětleno, jakým způsobem se modelují hřídele a tuhé kotouče rotorového subsystému. Pro tuto úlohu byla použita v současnosti nejpoužívanější metoda - metoda konečných prvků. Pro hřídel byly odvozeny 3 způsoby, které lze pro modelování hřídele použít. V závěru této kapitoly byla ukázána tvorba matematického modelu celého rotoru na kluzných ložiskách s plovoucími pouzdry.

Předmětem kapitoly 4 bylo popsat metody, kterými se běžně vyšetřují modely kmitajících soustav. Pro aplikaci numerické integrace je potřeba převést model rotoru do stavového prostoru. Problém vlastních hodnot a vlastních tvarů nekonzervativního systému byl též popsán v této kapitole. Dále byla představena modální kondenzace, jakožto velice užitečného nástroje pro snížení času výpočtu. Na konci této kapitoly byl uveden způsob, jakým lze linearizovat ložiskové vazby okolo rovnovážné polohy a pomocí Campbellova diagramu hledat kritické otáčky. Dále bylo popsáno, jakým způsobem je možné provádět převod signálu z časové do frekvenční oblasti.

Dynamické projevy kluzných ložisek byly zkoumány na nejjednodušších příkladech rotorů v kapitole 5. V poslední kapitole pak byl vytvořen výpočtový model reálného rotoru turbodmychadla. Na tomto modelu pak byla provedena výpočtová analýza v časové a frekvenční oblasti.

Součástí diplomové práce bylo potřeba vytvořit programové vybavení schopné řešit všechny zmíněné úlohy v této práci. To bylo vytvořeno v programu MATLAB a je možné ho použít pro analýzu jakéhokoliv rotoru uloženého na kluzných ložiskách s plovoucími pouzdry.

Tato diplomová práce a vytvořené programové vybavení může sloužit do budoucna jako základ pro další analýzy. Do budoucna by bylo možné zabývat se např. úlohou citlivosti nebo ladění rotorového systému.

# Literatura

- [1] Smolík, Luboš. *Analýza dynamických vlastností rotorů turbodmychadel*. Diplomová práce. FAV ZČU, 2013.
- [2] Liška, Karel. *Základní modely v dynamice rotujících soustav se zaměřením na rotory turbodmychadel*. Bakalářská práce. FAV ZČU, 2016.
- [3] Byrtus, Miroslav, Michal Hajžman a Vladimír Zeman. *Dynamika rotujících soustav*. Vydavatelství ZČU v Plzni, 2011.
- [4] Zeman, Vladimír a Zdeněk Hlaváč. *Kmitání mechanických soustav*. Vydavatelství ZČU v Plzni, 1999.
- [5] Zeman Vladimír, Zdeněk Hlaváč a Zdeňka Rendlová. *Modelování kmitání turbodmychadel*. Výzkumná zpráva číslo 529137-01-13. Plzeň, 2013.
- [6] Dyk, Štěpán, Luboš Smolík a Michal Hajžman. *Effect of various analytical descriptions of hydrodynamic forces on dynamics of turbochargers supported by floating ring bearings*. Tribology International 126 (2018) 65-79, 2018.
- [7] Dyk Štěpán, Jan Rendl, Miroslav Byrtus a Luboš Smolík. *Dynamic coefficients and stability analysis of finite-length journal bearings considering approximate analytical solutions of the Reynolds equation*. Tribology International 130 (2019) 229-244, 2019.
- [8] Zapoměl, Jaroslav. *Počítačové modelování příčného kmitání rotorů uložených v hydrodynamických ložiskách a squeeze filmových tlumičích*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2007.
- [9] Techlab s.r.o. *Trocha historie*, <http://www.techlab.cz/cs/Historie.pdf>
- [10] Rendl, Jan. *Výpočtové modelování kluzných ložisek pro úlohy dynamiky rotorů*. Diplomová práce. FAV ZČU, 2017.
- [11] Rendl, Jan. *Numerické řešení Reynoldsovy rovnice pro kluzná ložiska*. Bakalářská práce. FAV ZČU, 2015.
- [12] Dupal, Jan. *Výpočtové metody mechaniky*. Vydavatelství ZČU v Plzni, 1999.
- [13] Slavík, Jaromír, Vladimír Stejskal a Vladimír Zeman. *Základy dynamiky strojů*. Vydavatelství ČVUT. Praha, 1997.

- [14] Luis San Andrés. *Hydrodynamic Fluid Film Bearings and Their Effect on the Stability of Rotating Machinery*. Texas A&M University, 2006.
- [15] Wikipedie: Otevřená encyklopedie. *Tymošenková teorie ohybu nosníku*. [citováno 20. 06. 2020]. Dostupný z WWW: „[https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Tymo%C5%A1enkova\\_teorie\\_ohybu\\_nosn%C3%ADku&oldid=18372221](https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Tymo%C5%A1enkova_teorie_ohybu_nosn%C3%ADku&oldid=18372221)”
- [16] MATLAB. (2019). 9.6.0.1072779 (R2019a). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc.
- [17] Rendlová, Zdeňka. *Dynamické chování rotorů turbodmychadel*, disertační práce, FAV ZČU, 2016.
- [18] Dupal, Jan. *Mechanika stochastických systémů*, Vydavatelství ZČU v Plzni, 2008.