

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

KATEDRA MECHANIKY

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Modelování proudění a vedení tepla  
v palivových souborech jaderného reaktoru  
s využitím subkanálové analýzy**

Vedoucí práce:

**doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**

Odborný konzultant:

**Ing. Michal Dostál**

Vypracoval:

**Bc. Marek Bělohoubek**

Plzeň 2020

# ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd  
Akademický rok: 2019/2020

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE (projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Marek BĚLOHOUBEK**  
Osobní číslo: **A18N0108P**  
Studijní program: **N3955 Počítačové modelování v inženýrství**  
Studijní obor: **Dynamika konstrukcí a mechatronika**  
Téma práce: **Numerická simulace proudění chladiva ve svazku proutek reaktoru VVER 1000 pomocí subkanálové analýzy**  
Zadávací katedra: **Katedra mechaniky**

### Zásady pro vypracování

1. Provedení rešerše proudění chladiva v reaktoru VVER 1000.
2. Technická specifikace řešeného problému.
3. Formulace matematického modelu včetně okrajových podmínek.
4. Popis zvolené numerické metody a vývoj příslušných algoritmů.
5. Vlastní numerické řešení, vyhodnocení a diskuse dosažených numerických výsledků.

Rozsah diplomové práce: **40 – 60 stran A4 včetně příloh**  
Rozsah grafických prací:  
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**

#### Seznam doporučené literatury:

1. Košťálek J.: CALOPEA – výpočet lokálních termohydraulických parametrů kazet reaktorů VVER v procesu vyhořívání paliva. Výzkumná zpráva č. SVÚSS 85-05021. Státní výzkumný ústav pro stavbu strojů Běchovice, 1985.
2. Moorthi A., Anil Kumar Sharma, Velusamy K.: A review of sub-channel thermal hydraulic codes for nuclear reactor core and future directions. Nuclear Engineering and Design 332: 329-344, 2018.
3. Razým V.: Program CALOPEA – subkanálová analýza palivových kazet reaktorů typu VVER 440. Ae 11662/Dok, Škoda JS a.s., 2005.
4. Vimmr J.: Matematické modelování proudění stlačitelné tekutiny ve vnitřní aerodynamice. Disertační práce, ZČU v Plzni, 2002.

Vedoucí diplomové práce: **Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**  
Katedra mechaniky

Konzultant diplomové práce: **Ing. Michal Dostál**  
Škoda JS a.s., Plzeň

Datum zadání diplomové práce: **1. října 2019**  
Termín odevzdání diplomové práce: **29. května 2020**

*Radová*

**Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová**  
děkanka



*Jan Vimmr*

**Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**  
vedoucí katedry

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím uvedených zdrojů a literatury.

v Plzni dne 30.6.2020

.....

Marek Bělohoubek

## Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu své diplomové práce doc. Ing. Janu Vimmrovi, Ph.D. za jeho vedení, cenné rady při vypracování a za jeho ochotu a vstřícnost. Dále děkuji firmě Škoda JS a.s. za poskytnuté zázemí a za přístup k potřebným materiálů, především pak Ing. Michalu Dostálovi za odborné připomínky a cenné rady. Nakonec bych rád poděkoval své rodině a blízkým za podporu po dobu celého mého studia.

## Abstrakt

Tato práce se zabývá modelováním proudění a vedení tepla v palivových souborech jaderného reaktoru tlakovodního typu s využitím subkanálové analýzy. V rámci práce je shrnuta teorie týkající se principu a fungování jaderného reaktoru typu VVER 1000 a jsou komentovány dosud dosažené výsledky popisu proudění metodou subkanálové analýzy. Dále je představen matematický model proudění chladiva v aktivní zóně a vedení tepla v palivovém proutku jaderného reaktoru. Je navržena metodika numerického řešení těchto matematických modelů, která je algoritmizována a následně počítačově implementována v programovém prostředí MATLAB/Octave. Jsou provedeny numerické simulace proudění chladiva v palivovém souboru a získané výsledky jsou validovány s dostupnými experimentálními daty poskytnutými firmou Škoda JS a.s. V úloze vedení tepla palivovým proutkem je provedeno porovnání různých numerických přístupů k řešení této úlohy.

**Klíčová slova:** jaderný reaktor, palivový soubor, CFD, vedení tepla, palivový proutek, subkanálová analýza, numerické řešení

## Abstract

This thesis is focused on modeling of flow and heat conduction in fuel assemblies of the pressurized water type nuclear reactor using subchannel analysis. The thesis summarizes the theory concerning on the principle and operation of nuclear reactor type VVER 1000. The results are achieved by the description of flow by subchannel analysis. In this thesis, there is presented a mathematical model of water flow in the core and heat conduction in the fuel rod of a nuclear reactor. A methodology for the numerical solution of these mathematical models is proposed, it is algorithmized and then computer implemented in MATLAB/Octave. Numerical simulations of refrigerant flow in the fuel assembly are performed and the obtained results are validated by available experimental data provided by Škoda JS a.s. In the task of heat conduction through a fuel rod, a comparison of various numerical approaches to solving this problem is performed.

**Keywords:** nuclear reactor, fuel assembly, CFD, heat conduction, fuel rod, subchannel analysis, numerical solution

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
1.1	Cíle práce . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Současný stav problematiky</b>	<b>3</b>
2.1	Jaderný reaktor VVER 1000 . . . . .	3
2.1.1	Aktivní zóna jaderného reaktoru . . . . .	5
2.1.2	Palivové soubory . . . . .	8
2.1.3	Krize varu . . . . .	10
2.2	Termohydraulické výpočty v jaderné bezpečnosti . . . . .	12
2.2.1	Vývoj a užití subkanálové analýzy . . . . .	12
2.2.2	Dosud dosažené výsledky . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Matematický model</b>	<b>16</b>
3.1	Systém Navierových-Stokesových rovnic . . . . .	16
3.1.1	Stručný pohled do historie . . . . .	16
3.1.2	Reynoldsovův transportní teorém . . . . .	17
3.1.3	Zákony zachování . . . . .	19
3.1.4	Výsledná soustava rovnic za daných předpokladů . . . . .	22
3.2	Subkanálová analýza . . . . .	25
3.2.1	Odvození rovnic . . . . .	25
3.3	Vedení tepla . . . . .	35
3.3.1	Rovnice vedení tepla v příslušném tvaru . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Použité numerické metody</b>	<b>39</b>
4.1	Metoda konečných diferencí . . . . .	39
4.1.1	Taylorův rozvoj a diferenční formule . . . . .	39
4.1.2	Základní vlastnosti MKD . . . . .	41
4.2	Metoda konečných objemů . . . . .	42
4.3	Metoda konečných prvků . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Výpočtový model</b>	<b>45</b>
5.1	Úloha proudění chladiva v palivovém souboru . . . . .	45
5.1.1	Vlastnosti vody při konstantním tlaku . . . . .	45
5.1.2	Geometrie analyzované kazety . . . . .	46
5.1.3	Zákony zachování ve stacionárním tvaru . . . . .	54

5.1.4	Numerický tvar řešení . . . . .	57
5.1.5	Algoritmus výpočtu . . . . .	59
5.2	Nastavení koeficientu turbulentního míšení . . . . .	65
5.3	Úloha vedení tepla v palivovém proutku . . . . .	68
5.3.1	Geometrie analyzovaného proutku . . . . .	69
5.3.2	Rovnice vedení tepla ve stacionárním tvaru . . . . .	71
5.3.3	Numerické přístupy k řešení úlohy . . . . .	72
5.3.4	Algoritmus výpočtu . . . . .	79
5.3.5	Srovnání přesnosti numerických řešení . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Výsledky a diskuze</b>	<b>88</b>
6.1	Proudění chladiva v palivovém souboru . . . . .	88
6.1.1	Vyhodnocení teploty . . . . .	89
6.1.2	Vyhodnocení tlaku . . . . .	91
6.1.3	Vyhodnocení dalších veličin . . . . .	94
6.1.4	Porovnání výsledků s experimentem . . . . .	97
6.2	Vedení tepla v palivovém proutku . . . . .	98
6.3	Přednosti a omezení vyvinutého softwaru . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>103</b>
<b>8</b>	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>105</b>



## Značení

značka	význam	jednotka
<b>A</b>	matice koeficientů soustavy rovnic	–
<i>A</i>	celková plocha průtočného průřezu	m <sup>2</sup>
<i>a</i>	vzdálenost středů sousedních palivových proutků	m
<b>b</b>	vektor pravých stran soustavy rovnic	–
<i>C<sub>Q</sub></i>	poměrná část výkonu příslušející danému palivovému proutku	–
<i>c</i>	měrná tepelná kapacita	J · kg <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>
<i>c<sub>p</sub></i>	měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku	J · kg <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>
<i>DNBR</i>	rezerva do krize varu ( <i>Departure of Nucleate Boiling Ratio</i> )	–
<i>d</i>	průměr palivového proutku	m
<i>d<sub>h</sub></i>	hydraulický průměr	m
<i>E</i>	energie	J
<i>e</i>	měrná energie	J · kg <sup>-1</sup>
<b>F</b>	vektor síly	N
<b>f</b>	objemové síly vztažené na jednotku hmotnosti	N · kg <sup>-1</sup>
<i>G</i>	plošná hustota hmotnostního toku	kg · m <sup>-2</sup> · s <sup>-1</sup>
<b>g</b>	vektor tíhového zrychlení	m · s <sup>-2</sup>
<i>g</i>	tíhové zrychlení	m · s <sup>-2</sup>
<b>H</b>	vektor hybnosti	kg · m · s <sup>-1</sup>
<i>H</i>	odpor příčného proudění	s <sup>-1</sup>
<i>h</i>	měrná entalpie	J · kg <sup>-1</sup>
<i>h̃</i>	součinitel odporu příčného proudění	–
<i>k</i>	součinitel kondukčního přestupu tepla mezi sousedními subkanály	W · m <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>
<i>k̃</i>	multiplikační koeficient	–
<i>k̃<sub>ef</sub></i>	efektivní multiplikační koeficient	–
<i>L</i>	délka palivového souboru	m
<i>l</i>	vzdálenost mezi těžišti sousedních subkanálů	m
<i>l<sub>m</sub></i>	vzdálenost distančních mřížek	m
<i>M</i>	hmotnostní tok (v axiálním směru)	kg · s <sup>-1</sup>
<i>m</i>	hmotnost	kg

značka	význam	jednotka
$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel s nulou	
$\mathbf{N}$	vektor bázových funkcí	–
Nu	Nusseltovo číslo	–
$\mathbf{n}$	vektor jednotkové vnější normály	m
$n$	počet (obecně)	–
$O(\Delta x^n)$	zbytek (reziduum) Taylorova rozvoje řádu $n$	
$o_{in}$	délka rozhraní mezi proutkem a subkanálem	m
$o_s$	smáčený obvod	m
$o_v$	vytápěný obvod	m
Pr	Prandtlovo číslo	–
$p$	tlak	Pa
$Q$	celkový výkon	W
$\tilde{Q}$	teplo	J
$\tilde{Q}_t$	vyhoření jaderného paliva	$W \cdot s \cdot kg^{-1}$
$q$	hustota tepelného toku	$W \cdot m^{-2}$
$\tilde{q}$	lineární tepelný tok	$W \cdot m^{-1}$
$\hat{q}$	objemová hustota tepelného toku	$W \cdot m^{-3}$
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel	
Re	Reynoldsovo číslo	–
$r$	souřadnice v radiálním směru / poloměr	m
$\dot{r}$	rychlost generování vnitřního tepla vztažená na jednotku hmotnosti	$J \cdot s^{-1} \cdot kg^{-1}$
$S$	obsah plochy	$m^2$
$S_\Sigma$	směrodatná odchylka	–
$s$	délka subkanálového rozhraní	m
$T$	teplota	$^\circ C$
$t$	čas	s
$\mathbf{u}$	vektor (konvektivní) rychlosti	$m \cdot s^{-1}$
$u$	rychlost v axiálním směru	$m \cdot s^{-1}$
$V$	objem	$m^3$
$\partial V_F$	prostupná hranice kontrolního objemu	
$\partial V_W$	neprostupná hranice kontrolního objemu	
$v$	rychlost v příčném směru	$m \cdot s^{-1}$
$\hat{v}$	váhová funkce	
$v_h$	výška průřezu palivového souboru	m

<b>značka</b>	<b>význam</b>	<b>jednotka</b>
$v_{hr}$	délka hrany průřezu palivového souboru	m
$v_{pa,he,po}$	tloušťka jednotlivých vrstev palivového proutku	m
$W$	mechanická práce	J
$w$	hmotnostní tok v příčném směru vztažený na jednotku délky (příčný tok způsobený tlakovými rozdíly)	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
$\tilde{w}$	hmotnostní tok v příčném směru vztažený na jednotku délky (příčný tok způsobený turbulentními fluktuacemi)	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
$\boldsymbol{x}$	vektor prostorových souřadnic	m
$y$	souřadnice v axiálním směru	m
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel	
$\alpha$	součinitel přestupu tepla	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
$\beta$	součinitel turbulentního míšení	–
$\nabla$	operátor nabla (vektor parciálních derivací dle souřadnicových proměnných)	$\text{m}^{-1}$
$\Delta$	rozdíl hodnot (obecně) / Laplaceův operátor	
$\delta$	exponent Re ve výpočtu turbulentního míšení	–
$\delta_{ij}$	Kroneckerova delta	–
$\delta x$	variace veličiny $x$	
$\epsilon$	měrná vnitřní energie	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
$\varepsilon$	součinitel přenosu hybnosti turbulencí	–
$\hat{\epsilon}$	maximální relativní přípustná odchylka (zastavovací podmínky)	–
$\hat{\epsilon}_T$	maximální absolutní přípustná odchylka (zastavovací podmínky)	$^{\circ}\text{C}$
$\zeta$	součinitel místního odporu	–
$\eta$	dynamická viskozita	$\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$
$\lambda$	tepelná vodivost	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$\xi$	součinitel třecího odporu	–
$\rho$	měrná hmotnost (hustota extenzivní veličiny)	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$\hat{\rho}$	reaktivita reaktoru	–
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyův tenzor napjatosti	Pa
$\boldsymbol{\tau}$	tenzor smykového napětí (tenzor vazkých napětí)	Pa
$\Phi$	množství extenzivní veličiny	

<b>značka</b>	<b>význam</b>	<b>jednotka</b>
$\phi$	souřadnice směrového úhlu	rad
$\varphi$	měrná hodnota extenzivní veličiny	
$\Omega$	kontrolní (výpočtová) oblast	
$\partial\Omega$	hranice kontrolní (výpočtové) oblasti	
$\omega$	váhový koeficient Gaussovy-Seidelovy relaxační metody	–
$\bar{x}$	střední hodnota veličiny $x$	
$\langle x \rangle$	integrální průměr hodnot veličiny $x$ přes kontrolní plochu $S$	
$\langle\langle x \rangle\rangle$	integrální průměr hodnot veličiny $x$ přes kontrolní objem $V$	

# 1 Úvod

Jaderná energetika je nedílnou součástí energetického hospodářství mnoha zemí. Konkrétně v České republice je v současné době provozováno celkem šest jaderných bloků typu VVER o celkovém instalovaném výkonu přibližně 4150 MW, které zaručují produkci více než 30 % elektrické energie naší země. S ohledem na výhody, které jsou představovány vysokou efektivitou výroby elektrické energie, šetrností k životnímu prostředí a stabilní hodnotou dodávaného výkonu do sítě je i v současné době oblast jaderné energetiky velice perspektivním oborem.

Kromě zmiňovaných výhod má však jaderná energetika též řadu úskalí a rizik týkajících se především problematiky uložení vyhořelého jaderného paliva či bezpečnosti provozu jaderných elektráren. S ohledem na tento fakt je součástí státní legislativy široká řada předpisů, které si kladou za cíl vyloučit vznik nehody či havárie, případně pak zamezit úniku životně nebezpečných látek do okolního prostředí elektrárny.

Důležitým faktorem bezpečného provozu jaderných elektráren je dostatečný odvod tepelné energie vzniklé štěpnou reakcí z aktivní zóny jaderného reaktoru. V případě tlakovodního typu reaktoru je teplo z aktivní zóny odváděno vodou primárního okruhu elektrárny do parogenerátoru, kde je předáno sekundárnímu okruhu. Ochlazená voda primárního okruhu je následně odvedena zpět do oblasti aktivní zóny reaktoru a celý cyklus se opakuje.

Z hlediska bezpečného provozu jaderné elektrárny je tedy klíčový přesný popis problematiky proudění chladiva v oblasti aktivní zóny jaderného reaktoru. S ohledem na fakt, že možnosti experimentálních měření jsou značně časově i finančně náročné (a v mnoha provozních režimech dokonce nerealizovatelné), klade se stále větší důraz na využití numerických simulací.

Cílem předkládané diplomové práce je návrh metodiky, vývoj vlastních efektivních algoritmů a jejich počítačová implementace pro numerickou simulaci proudění chladiva v aktivní zóně reaktoru VVER 1000 a pro numerickou simulaci přidruženého problému vedení tepla v palivovém proutku. Zvolená metodika vychází z přístupu subkanálové analýzy vyvinuté speciálně pro účely výpočtů v oblasti jaderné energetiky. Tento přístup využívá vhodných zjednodušení výchozích rovnic popisujících základní fyzikální zákony v kombinaci s empirickými výpočtovými modely tak, aby bylo dosaženo vysoké efektivity výpočtů při zachování dostatečné přesnosti výstupních dat.

Výsledky numerických simulací v podobě rozložení veličin tlaku, teploty a hmotnostního toku jsou v práci vyhodnoceny, diskutovány a porovnány s do-

stupnými experimentálními daty poskytnutými firmou Škoda JS a.s.

## 1.1 Cíle práce

1. Seznámit se s problematikou konstrukce a principu fungování tlakovodního jaderného reaktoru typu VVER 1000 a nastudovat literaturu týkající se termohydraulických výpočtů v oblasti jaderné energetiky.
2. Představit metodu subkanálové analýzy a odvodit matematický model proudění a vedení tepla v palivovém souboru jaderného reaktoru.
3. Navrhnout metodiku a vyvinout původní algoritmy včetně jejich počítačové implementace pro numerické řešení stacionární úlohy proudění a vedení tepla v palivovém souboru.
4. Porovnat a diskutovat dosažené numerické výsledky s experimentálními daty poskytnutými firmou Škoda JS a.s.
5. Zhodnotit možnosti využití navržené metodiky numerického řešení proudění a vedení tepla v palivovém souboru s ohledem na bezpečnost provozu tlakovodního jaderného reaktoru.

## 2 Současný stav problematiky

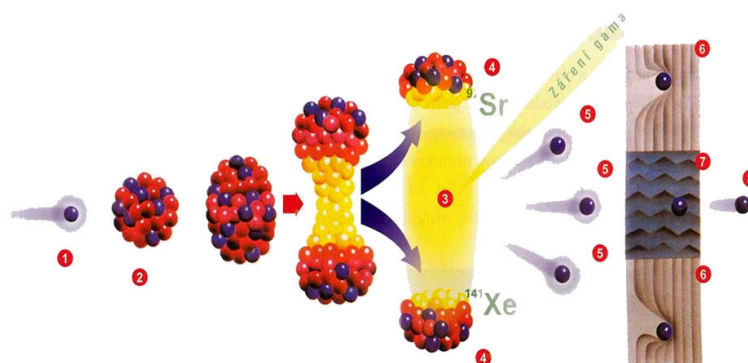
Po celém světě je dnes (červen 2020) v provozu 441 jaderných bloků, ve výstavbě jich je 54 a dalších více než 100 jich je ve fázi přípravy. Společně s jejich rostoucím počtem stoupá i kapacita vyprodukované elektrické energie a procentuální podíl na celkovém energetickém mixu jednotlivých zemí. To s sebou, zvláště po tragických událostech v Černobyli (1986) a Fukušimě (2011), přináší stále vyšší nároky na kritéria jaderné bezpečnosti [1].

### 2.1 Jaderný reaktor VVER 1000

Reaktor je obecně pojmenování pro zařízení, v němž probíhají fyzikální, chemické či biologické reakce. V případě jaderného reaktoru se jedná o štěpnou řetězovou reakci jader těžkých prvků (nejčastěji uranu izotopů  $U^{235}$  a  $U^{238}$ ). Štěpná reakce je zdrojem obrovského množství energie, která se postupně uvolňuje z jaderného paliva ve formě tepla a prostřednictvím parního cyklu slouží k výrobě elektrické energie [2].

Ke štěpné řetězové reakci dochází v jaderném palivu reaktoru a je způsobeno přítomností volných neutronů. Ty jsou jak příčinou rozštěpení jádra, tak následným produktem štěpné reakce. Udržení štěpné řetězové reakce je pak přímo závislé na množství volných neutronů a kinetické energii, jež tyto neutrony mají. Obecně platí, že ke štěpné reakci jader těžkých atomů dochází s větší pravděpodobností po interakci s neutrony malé energie (tzv. pomalými neutrony), produktem štěpné reakce jsou však obvykle neutrony s energií vysokou (tzv. rychlé neutrony). Z toho důvodu se do procesu řetězového štěpení často zavádějí účinné látky zpomalující tyto rychlé neutrony (viz obr. 2.1). Takové látky se nazývají moderátory a v závislosti na jejich přítomnosti v rámci procesu štěpení klasifikujeme jaderné reaktory na tepelné a rychlé [3].

Energie uvolněná při štěpení těžkých jader se transformuje na energii tepelnou a ohřívá palivové soubory. Toto teplo je z paliva odebíráno chladivem, prochází reaktorem a následně je odváděno do primárního okruhu k dalšímu využití. V historii vývoje energetických štěpných reaktorů se osvědčilo několik základních konstrukcí vyplývajících z kombinace užitého moderátoru a chladiva. Nejpoužívanějším médiem plnícím funkci chladiva i moderátoru je tzv. voda boritá (tj. roztok vody s  $H_3BO_3$ ). Pro zachování kapalného skupenství při pracovních teplotách pohybujících se nad hranicí  $300^\circ C$  je nutno udržovat vodu pod vysokým tlakem (přes 10 MPa). Z toho důvodu má reaktor využívající tento typ



Obrázek 2.1: Ilustrace principu štěpné reakce za přítomnosti moderátoru a absorbátoru. Legenda: 1 - Pomalý neutron, 2 - Jádru uranu  $U^{235}$ , 3 - Štěpení, 4 - Dva odštěpky, 5 - Rychlé neutrony, 6 - Absorbátor, 7 - Moderátor, 8 - Pomalý neutron. Převzato z [4].

chladiwa podobu tlakové ocelové nádoby. Alternativou k tomuto přístupu je pak koncepce se samostatnými, jednodušeji vyrobitelnými tlakovými kanálky, které jsou rozmístěné po aktivní zóně reaktoru v blocích moderátoru, přičemž každý z nich plní roli tlakové nádoby s palivem ochlazovaným protékajícím chladivem. Posledním konstrukčním typem uspořádání reaktoru je reaktor s železobetonovou nádobou, jež dobře odolává nadměrnému tlakovému namáhání [5].

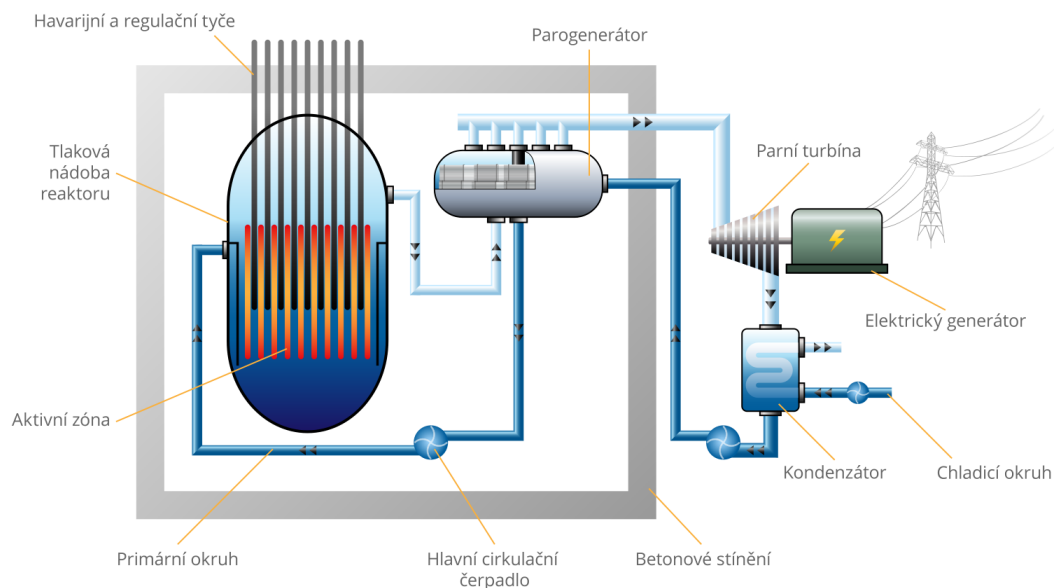
Jak již bylo nastíněno, klasifikace jaderných reaktorů se odvíjí primárně od typu moderátoru, chladiwa, konstrukce reaktorové nádoby či volbě palivového materiálu. Mezi nejužívanější typy patří varné reaktory (BWR), těžkovodní reaktory (CANDU), superkritické vodní reaktory (SCWR), rychlé množivé reaktory (FBR, LMFBR), plynem chlazené reaktory (Magnox, GAS), vysokoteplotní reaktory (HTGR) a tlakovodní reaktory (PWR) [6]. Právě do poslední jmenované rodiny reaktorů patří i typ VVER (zkratka ruského *Vodo-Vodjanoj Energetičeskij Reaktor*) užívaný v České republice, konkrétně se jedná o typy VVER 440 v Dukovanech a VVER 1000 v Temelíně.

Tlakovodní typ jaderného reaktoru má ocelovou tlakovou nádobu. V případě reaktoru typu VVER 1000 umístěném v jaderné elektrárně Temelín (ETE) se jedná o válcovou nádobu s eliptickým dnem o průměru 4,5 m a výšce 11 m vyrobenou z nízkolegované chrom-nikl-molybden-vanadové oceli. Tlak vody v primárním okruhu se pak v běžném provozu pohybuje mezi 15 a 16 MPa. Palivem je především obohacený uran  $U^{235}$  či směs uranu a plutonia  $Pu^{239}$  ve formě oxidů. Řízení štěpné reakce probíhá jednak pomocí koncentrace kyseliny borité v chladivu, jednak za pomoci absorpčních tyčí [3].

V případě tohoto typu reaktoru chladivo cirkuluje v uzavřeném primárním



okruhu mezi reaktorem a tepelnými výměníky, které vytvářejí páru pro turbogenerátory sekundárního okruhu. Primární okruh je radioaktivní, sekundární nikoliv. Tlakovodní reaktory představují nejužívanější typ reaktoru a jsou nainstalovány přibližně ve dvou třetinách všech jaderných elektráren. Obecné schéma elektrárny s tlakovodním typem reaktoru je znázorněno na obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Schéma jaderné elektrárny s tlakovodním typem reaktoru. Převzato z [5].

### 2.1.1 Aktivní zóna jaderného reaktoru

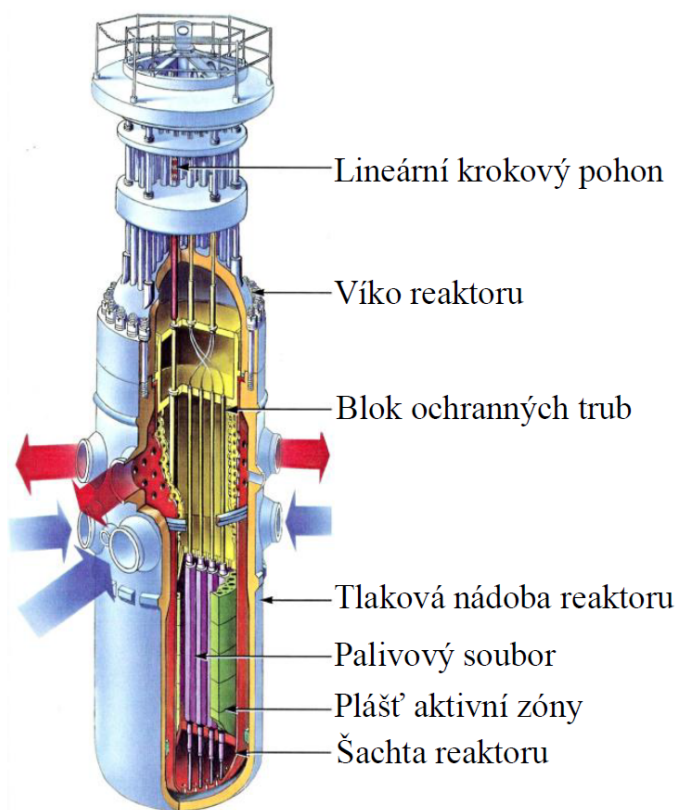
Aktivní zóna je pojmenování pro oblast tlakové nádoby, kde se nachází jaderné palivo a v níž probíhá štěpná reakce. V případě reaktoru typu VVER 1000 má tvar válce o průměru 3,16 m rozděleného hexagonální mříží, v níž je naskládáno 163 palivových souborů. Regulace výkonu v případě tohoto reaktoru zajišťuje 61 regulačních tyčí. Chladivo se do tlakové nádoby dostává sestupným prouděním kruhovou mezerou mezi šachtou reaktoru a vnitřní stěnou tlakové nádoby, otvory v eliptickém dnu stoupá do palivových souborů, kde se v důsledku uvolněné energie štěpné reakce zahřívá. Ohřáté chladivo (přibližně o 30 °C) dále stoupá nad aktivní zónu, kde se rozlévá postranními odvody směrem k parogenerátorům [5]. Schéma reaktoru typu VVER 1000 je viditelné na obr. 2.3, jeho konkrétní parametry jsou pak uvedené v tab. 2.1.

<b>Parametry reaktoru</b>	
Reaktor	Heterogenní, tlakovodní
Nominální tepelný výkon	3 120 MW
Celková výška reaktoru	30 m
<b>Tlaková nádoba</b>	
Materiál	nízkolegovaná uhlíková ocel
Výška tlakové nádoby	10,9 m
Vnější průměr nádoby	4,5 m
Vnitřní průměr nádoby	4,1 m
Tloušťka stěny	193 mm
Hmotnost tlakové nádoby	322 t
Celková hmotnost reaktoru	cca 800 t
<b>Aktivní zóna</b>	
Výška aktivní zóny	3,68 m
Průměr aktivní zóny	3,16 m
Hmotnost vsázky paliva	86 t
Obohacení paliva	0,7 – 5 % U <sup>235</sup>
Maximální vyhoření paliva	64 MW · d · kg <sup>-1</sup>
<b>Systém chlazení reaktoru</b>	
Počet chladicích smyček	4 ks
Nominální pracovní tlak	15,7 MPa
Teplota chladiva na vstupu do aktivní zóny	290 °C
Teplota na výstupu z aktivní zóny	320 °C
Objem primárního chladiva	337 m <sup>3</sup>
Průtok chladiva reaktorem	88 000 m <sup>3</sup> · h <sup>-1</sup>

Tabulka 2.1: Parametry reaktoru typu VVER 1000 jaderné elektrárny Temelín. Převzato z [5].

O stavu řízené štěpné řetězové reakce vypovídá veličina tzv. multiplikačního koeficientu  $\tilde{k}$ , který udává poměr mezi počtem štěpících neutronů nové a předchozí generace

$$\tilde{k} = \frac{n_{\text{nova}}}{n_{\text{predch}}}. \quad (2.1)$$



Obrázek 2.3: Řez jaderného reaktoru typu VVER 1000 jaderné elektrárny Temelín. Převzato z [7].

Pro konstantní výkon reaktoru je tedy vhodné, když se hodnota multiplikačního koeficientu  $\tilde{k}$  pohybuje kolem hodnoty jedna. Pokud je hodnota multiplikačního koeficientu rovna přesně jedné ( $\tilde{k} = 1$ ), označujeme takový stav jako kritický. Alternativně k multiplikačnímu koeficientu  $\tilde{k}$  se zavádí veličina reaktivity reaktoru  $\hat{\rho}$  udávající míru odchýlení od kritického stavu (což pro danou veličinu odpovídá odchýlení od nulové hodnoty) a platí pro ni vztah

$$\hat{\rho} = \frac{\tilde{k}_{ef} - 1}{\tilde{k}_{ef}}, \quad (2.2)$$

kde  $\tilde{k}_{ef}$  je efektivní multiplikační koeficient reálného reaktoru. Kromě multiplikačního koeficientu mají na hodnotu reaktivity vliv další fyzikální parametry aktivní zóny: teplota paliva, aktuální výkon reaktoru, tlak a množství kyseliny borité v chladiivu [3].

A právě poslední jmenované veličiny (tedy koncentrace kyseliny borité ve vodě primárního okruhu) se využívá pro řízení výkonu aktivní zóny. Bor slouží jako absorbátor neutronů a jeho množstvím se ovlivňuje průběh štěpné reakce. Tento typ řízení je tzv. pomalý, využívá se tedy k řízení výkonu v dlouhodobější perspektivě a je taktéž vhodný ke kompenzaci počátečního přebytku reaktivity nového paliva ze začátku kampaně.

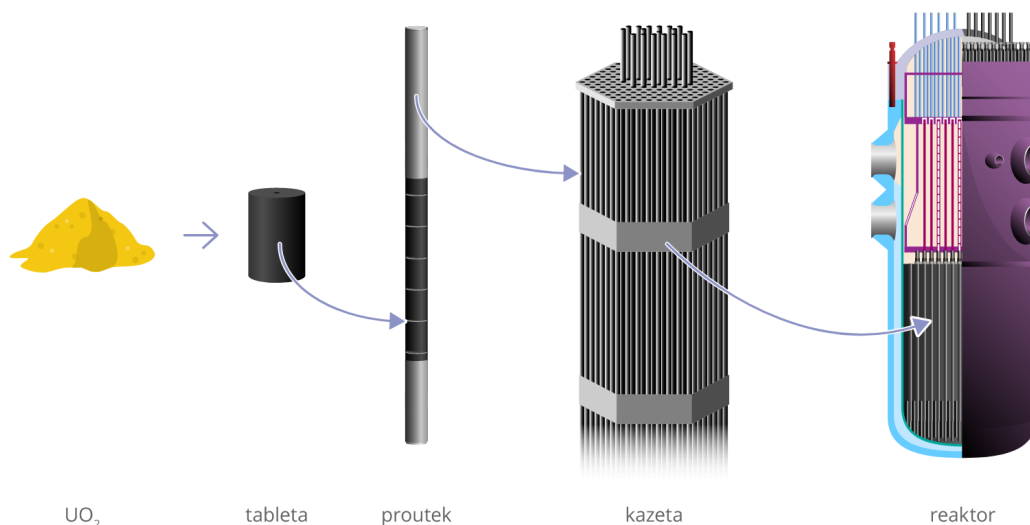
Druhou z možností, jež se využívá k aktivnímu řízení štěpné reakce, je řízení pomocí regulačních prvků s absorpční schopností (tzv. rychlé řízení). V případě reaktoru VVER 1000 se využívá regulačních tyčí zasouvaných do vodicích trubek palivových souborů. Zasunutím regulační tyče mezi palivové proutky se zvyšuje množství absorbátoru v aktivní zóně. Tlumí se tak reakce a výkon reaktoru klesá. Vytažení regulačních tyčí pak má opačný efekt [5].

### 2.1.2 Palivové soubory

Jaderné palivo jako takové se v reaktoru nachází v podobě palivových tablet. Jedná se o malé válečky z lisovaného  $\text{UO}_2$  o průměru 7,8 mm, výšce 10 – 12 mm buďto s malým centrálním otvorem či bez něj. Sloupec takovýchto tablet o hmotnosti 1,7 kg a délce 3680 mm je uzavřen v zirkonové trubičce, která je odolná vůči korozi a jen minimálně se podílí na zachytu volných neutronů. Prostor mezi tabletami je vyplněn heliem a spolu s obalovou trubkou slouží jako bariéra proti úniku štěpných produktů vznikajících v palivu. Trubička je na obou koncích hermeticky uzavřena a dohromady tento celek tvoří tzv. palivový proutek [5].

Z palivových proutků se skládají palivové soubory (kazety), přičemž pro reaktory typu VVER 1000 je takovýto soubor dlouhý 4,5 m a je složen z 312 palivových proutků, centrální trubky a z 18 rovnoměrně rozmístěných vodicích trubek pro zasouvání řídicích tyčí. Pro zachování rovnoměrného rozmístění palivových proutků v rámci souboru jsou po délce k centrální trubce připevněny v pravidelných rozstupech distanční mřížky. Tvar rozložení proutků v palivovém souboru je hexagonální, u typu reaktoru VVER 1000 pak palivový soubor nemá žádné vnější opláštění [3]. Umístění proutků v rámci palivového souboru a aktivní zóny je znázorněno na obr. 2.4.

Konkrétním typem palivových souborů užívaným v ETE jsou soubory TVSA-T ruské společnosti TVEL, které v roce 2010 a 2011 nahradily palivové soubory firmy Westinghouse nesoucí označení VVANTAGE-6 [8]. Počet vodicích trubek regulačních tyčí, stejně jako počet proutků v palivovém souboru zůstal neměnný, měnila se však konstrukce horní (hlavice) a dolní (patice) koncovky, počet a konstrukce distančních mřížek, uchycení klastrů, tvar a velikost palivových tablet a

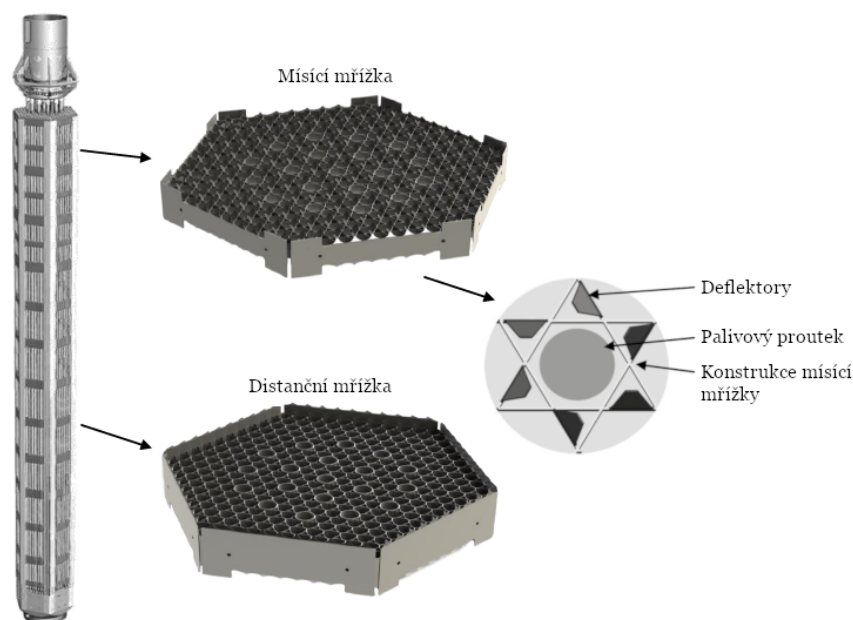


Obrázek 2.4: Relace palivových proutků ke kazetám a jejich umístění v rámci aktivní zóny. Převzato z [5].

těž použité materiály.

V dnes užívaném palivovém souboru typu TVSA-T mod.2 (viz obr. 2.5) se nachází celkem dvanáct distančních mřížek, jež mají za cíl udržovat palivové proutky v konstantní vzdálenosti od sebe. Po výšce palivového souboru jsou pak kromě distančních mřížek umístěny též mřížky mísící, které slouží ke zvýšení turbulencí proudu chladicího média. Pomocí deflektorových lopatek ohnutých pod určitým úhlem vůči hlavnímu směru proudění se aktivně mění proud chladiva kolem proutků a přispívá se tak k rovnoměrnějšímu rozložení tepla v rámci palivového souboru a jeho efektivnějšímu odvodu z aktivní zóny reaktoru [9].

Co se výměny paliva týče, k té dochází v pravidelných intervalech, přičemž se mění vždy pouze část palivových souborů. V případě VVER 1000 se jedná o periodu přibližně jednoho roku a výměnu podstoupí čtvrtina souborů. Palivové kazety s vyhořelým palivem jsou zavážecím strojem přenášeny do bazénu vedle reaktoru s vyhořelým palivem a aktivní zóna nově přeskládána dle předepsaného rozložení. Celá odstávka trvá přibližně jeden až dva měsíce a pro zajištění odstínění radioaktivního záření probíhá celý proces pod vodou [5].



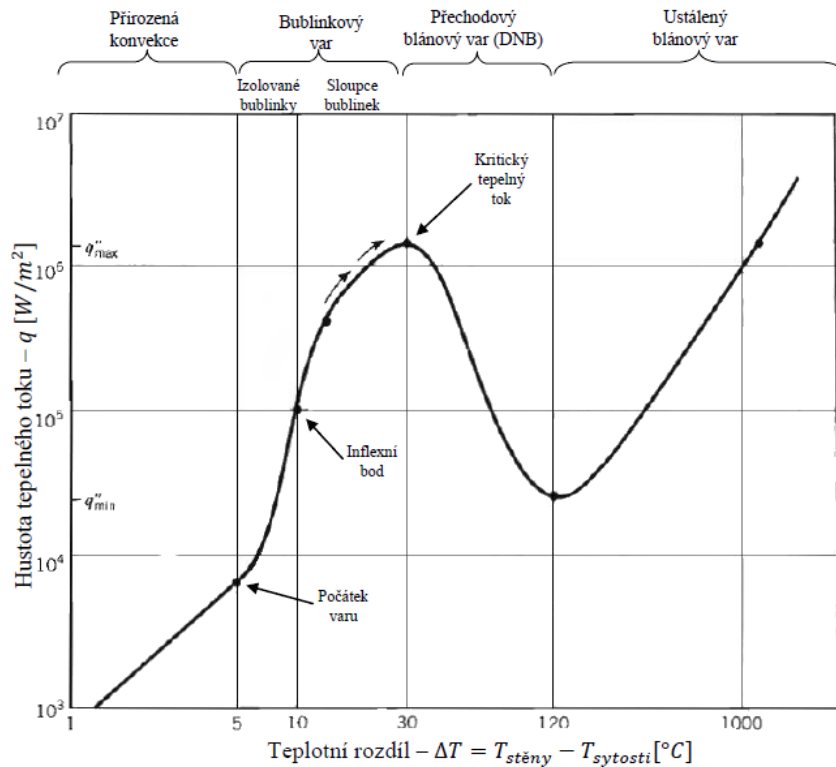
Obrázek 2.5: Palivový soubor typu TVSA-T mod. 2 a použité mísicí a distanční mřížky. Převzato z [9].

### 2.1.3 Krize varu

V rámci provozu tlakovodního reaktoru je jedním z klíčových bezpečnostních kritérií udržování chladicího média v kapalně fázi tak, aby se neměnila jeho vlastnosti a správně plnilo svou roli odvodu tepla z aktivní zóny reaktoru. V závislosti na stavu chladiva při povrchu palivových proutků rozlišujeme následující čtyři specifické charakteristiky odvodu tepla (viz obr. 2.6) [3].

1. **Konvekce.** Je-li teplota povrchu stěny palivových proutků nižší než teplota sytosti chladicího média při daném tlaku, je odvod tepla zprostředkován primárně konvekcí do jednofázového proudu chladiva.
2. **Bublínkový var.** V případě, že je teplota povrchu proutků vyšší než teplota sytosti, chladivo se v mezní vrstvě ohřívá a vzniká povrchový var mající podobu bublinek páry. Takto vzniklé bublinky jsou unášeny proudem neohřátého chladiva, ve kterém zpětně kondenzují a předávají vodě skupenské teplo. Povrchový bublinkový var způsobuje silnou turbulenci proudu chladiva, čímž přispívá ke zvýšení odvodu tepla z povrchu palivových proutků.

3. **Přechodový blánový var.** Pokud teplota chladiva na okolí palivového proutku dosáhne teploty, v níž bublinky páry již nekondenzují, přechází povrchový var ve var objemový a vytváří se tak souvislá blána parní fáze chladiva při povrchu proutku.
4. **Ustálený blánový var.** K tomuto typu varu dochází při specifické kombinaci hodnot tepelného toku, průtoku chladiva a hmotového obsahu páry. V takovém režimu pokrývá parní fáze celou smáčivou plochu palivového proutku a odvod tepla z proutku je značně omezen izolačními vlastnostmi parní blány. Teplota povrchu proutku prudce stoupá a hrozí oxidace pokrytí nebo též natavení jaderného paliva a jeho možné poškození. Daný režim odvodu tepla je nazýván krizí odvodu tepla (nebo také krizí varu) a je v rámci provozu jaderného reaktoru zcela nepřijatelný.



Obrázek 2.6: Závislost hustoty tepelného toku  $q$  na teplotním rozdílu stěny palivového proutku a teploty sytosti páry chladicího média. Převzato z [10].

Výše zmíněná krize odvodu tepla, označována též zkratkou DNB (*Departure from Nucleate Boiling*), je definována překročením bodu, v němž rapidně poklesne přestup tepla mezi povrchem palivového proutku a chladivem v důsledku izolačních vlastností parní blány utvořené na povrchu proutků za stále stoupající teploty (viz obr. 2.6). Tento stav je obvykle monitorován hodnotou veličiny *DNBR* (*Departure from Nucleate Boiling Ratio*), jež je definována jako poměr hustoty tepelného toku  $q$  potřebného k dosažení kritického bodu odvodu tepla a aktuální lokální hustoty tepelného toku palivového proutku [10]

$$DNBR = \frac{q_{\text{DNB}}}{q_{\text{akt}}}. \quad (2.3)$$

## 2.2 Termohydraulické výpočty v jaderné bezpečnosti

Jak již bylo uvedeno, rostoucí podíl výroby elektrické energie z jaderných elektráren s sebou nese zvyšující se nároky na bezpečnost jejich provozu. K vůbec nejdůležitějším z těchto kritérií patří bezpečný odvod tepla z aktivní zóny jaderného reaktoru, a to za všech provozních režimů. Teplotní bezpečnost jaderného reaktoru je obvykle zajišťována vhodnou kombinací simulačních experimentů a termohydraulických výpočtů. Nejčastějšími sledovanými veličinami jsou rezerva do krize varu, povrchová teplota palivových proutků a výstupní teplota chladicího média.

Z matematicko-fyzikálního hlediska se jedná primárně o řešení úlohy proudění chladiva primárního okruhu, především pak v palivových souborech aktivní zóny reaktoru. S ohledem na daná specifika (standardizovaná geometrie a potřeba nízké výpočetní náročnosti) se v průběhu let vyvinula specifická metodika řešení těchto úloh užívající souhrnný název subkanálová analýza [6].

### 2.2.1 Vývoj a užití subkanálové analýzy

Subkanálová analýza vychází z klasických zákonů zachování hmotnosti, energie a hybnosti. Ty však upravuje dle potřeby konkrétní aplikace, kterou je vedle maximální relevance výstupních dat průtoků, tlaků a teplot především nízká výpočetní náročnost. I přes současné možnosti výpočetní techniky nedosahují CFD (*Computational Fluid Dynamics*) analýzy potřebné rychlosti a subkanálová analýza má tak stále své jednoznačné opodstatnění. Jejím základním principem je specifický způsob prostorové diskretizace výpočtové oblasti, redukce zákonů zachování hybnosti o jeden rozměr a nahrazení některých fyzikálních dějů empi-



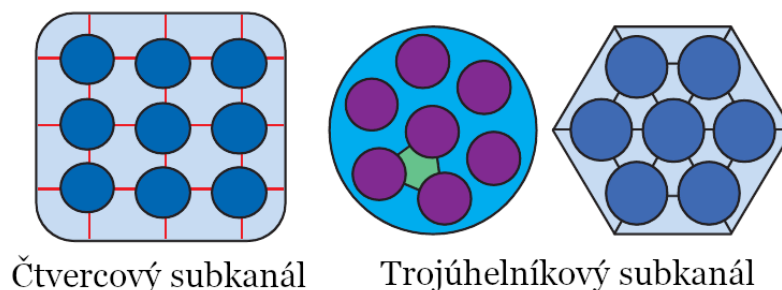
rickými modely. Podrobným odvozením výchozích rovnic subkanálové analýzy se zabývá odst. 3.2.

Historie subkanálové analýzy je spojena s počátky komerčního využití jaderné energie přelomu 50. a 60. let 20. století a potřebě výpočtového popisu dění v jaderném reaktoru tak, aby mohl být efektivně korigován jeho výkon s ohledem na maximální efektivitu a bezpečnost. Mezi prvními programovými komplexy fungujícími na bázi principu subkanálové analýzy je americký projekt pocházející z roku 1961 a nesoucí název HECTIC, který brzy následovaly další [11]. Jedním z nejvýznamnějších následovníků je především program COBRA americké organizace BNWL, jehož první verze vyšla roku 1967 [12]. V tuzemských podmínkách patří mezi nejdůležitější počiny tohoto typu programy VEVERKA (1978) a jeho nástupce CALOPEA (1985) užívaný v modifikované podobě dodnes [13]. Seznam nejvýznamnějších subkanálových kódů užívaných ve světě je pak viditelný v tab. 2.2.

### 2.2.2 Dosud dosažené výsledky

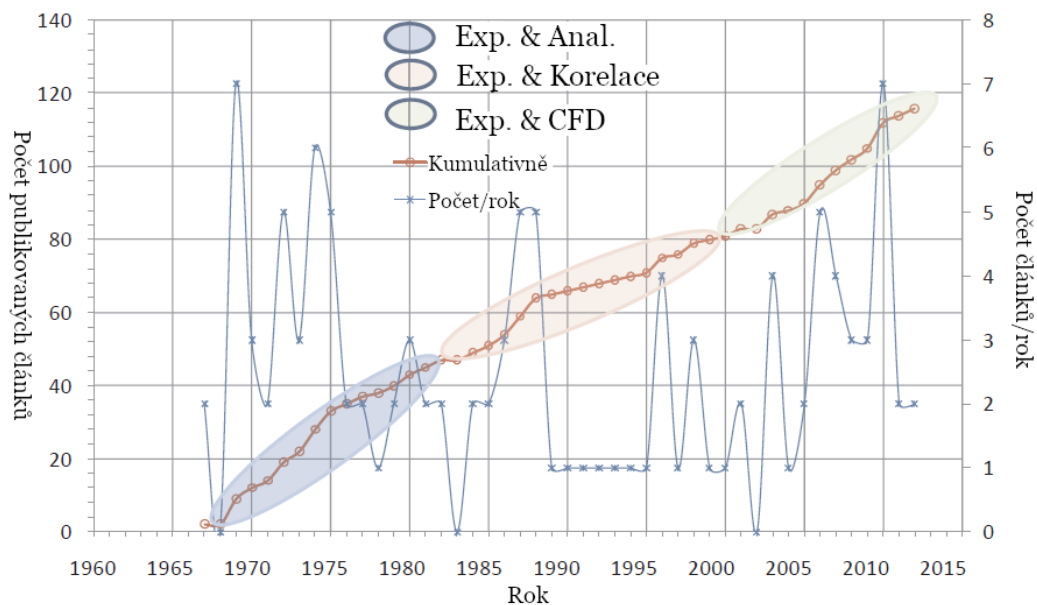
Klíčovou roli pro přesné řešení úlohy proudění chladiva v palivových souborech plní především dva aspekty: vhodná volba prostorové diskretizace a relevantní popis turbulentního míšení chladicího média.

Co se diskretizace týče, využívaly výpočetní modely 60. a 70. let rozličné přístupy (viz [14, 15]), avšak v pozdější době došlo, s ohledem na potřebu efektivní redukce zákonů zachování a přesné aproximaci příčných toků mezi jednotlivými subkanály, ke sjednocení diskretizace na pravidelných subkanálech centrováných v místech mezer mezi palivovými proutky, jak ukazuje obr. 2.7 [6].



Obrázek 2.7: Obvyklý způsob prostorové diskretizace palivového souboru v průřezu. Převzato z [6].

Druhým z klíčových aspektů aproximace úlohy proudění je modelování turbulentního míšení v chladivu palivového souboru. To je primárně způsobeno tlakovými rozdíly v jednotlivých subkanálech, skupenskými změnami v chladícím médiu a usměrňováním proudění ze strany distančních a mísících mřížek. Vývoj v této oblasti zahrnuje různé přístupy. Jedná se především o kombinaci vhodně zvolených experimentů (viz např. [16, 17]), zjednodušení analytických vztahů (viz [18, 19]) a s rozvojem výpočetní techniky i větší využití CFD analýzy (viz [20, 21]). Celkový přehled počtu vědeckých článků zabývajících se touto tematikou je viditelný na obr. 2.8.



Obrázek 2.8: Výzkumné články publikované v průběhu let na téma turbulentního subkanálového míšení. Převzato z [6].

Název kódu	Rok vydání	Stát	Typ reaktoru
HECTIC	1961	USA	GAS, PWR
SASS	1966	Švédsko	CANDU
COBRA	1967	USA	PWR, LMFBR
HAMBO	1967	UK	PWR
THINC	1968	USA	PWR
SCEPTIC	1971	Švýcarsko	GAS, PWR
MISTRAL	1972	Německo	PWR
MATTEO	1973	USA	BWR
WOSUB	1973	USA	BWR
DIANA	1974	Japonsko	PWR
ENERGY	1975	USA	LMFBR
TORC	1975	USA	PWR
LYNXT	1976	USA	PWR
SCRIMP	1977	Švýcarsko	GAS, PWR
VEVERKA	1978	ČSR	VVER
CANAL	1979	USA	BWR, PWR
THERMIT	1981	USA	LMFBR
ASSERT	1984	USA	CANDU
SABRE	1984	Francie	LMFBR
CALOPEA	1985	ČSR	VVER
SABENA	1985	Japonsko	LMFBR
KANAL	1989	USSR	PWR, VVER
VIPRE	1993	USA	PWR
MATRA	1999	Jižní Korea	PWR, LMFBR
FLICA	2000	Francie	LMFBR
NASCA	2001	Japonsko	PWR, LMFBR
SUBCHANFLOW	2010	Německo	PWR
SACoS	2012	Čína	SCWR
ATHAS	2016	Čína	PWR

Tabulka 2.2: Chronologický seznam vyvinutých kódů fungujících na bázi subkanálové analýzy. Převzato z [6].

## 3 Matematický model

Matematické modely poskytují exaktní pohled na dění v mnoha vědních oborech od přírodních, přes technické, až po ty sociální. Pomáhají nám porozumět vnitřním mechanismům systémů a vzájemným vztahům mezi nimi a dovolují nám predikovat, jak se systémy za předem daných podmínek budou chovat.

### 3.1 Systém Navierových-Stokesových rovnic

V rámci řešení úloh matematicko-fyzikálního charakteru hraje vždy klíčovou roli množina vztahů popisujících daný reálný problém. V případě proudění reálných tekutin k tomuto popisu slouží systém Navierových-Stokesových rovnic.

#### 3.1.1 Stručný pohled do historie

Proudění tekutin patří mezi vědní obory s širokým přesahem do našich každodenních životů a lidé se již od nepaměti snažili této problematice porozumět. V průběhu staletí se postupně vyvíjel a zpřesňoval vědecký pohled na tuto oblast. Pojdme se tedy nyní krátce na tento historický vývoj podívat.

Pravděpodobně prvním, kdo se ve větší míře o tuto problematiku zajímal, byl Archimédes ze Syrakus (287 - 212 př. n. l.), jenž formuloval základní poznatky z oblasti hydrostatiky a je duchovním praotcem této disciplíny. Co se týče hydrodynamiky, jsou vědecké poznatky v této oblasti daleko mladšího data. V roce 1738 Daniel Bernoulli publikoval svou *Hydrodynamica seu de viribus et motibus fluidorum commentarii*, jež přináší komplexnější pohled na řešení úlohy proudění. Na Bernoulliho práci navázal francouzský fyzik a matematik Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) a následně švýcar Leonhard Euler (1717-1783), jenž jako první uvažoval vliv tření při proudění tekutin. Eulerem navržený model tření úměrný tlaku v tekutině (odpovídající popisu v pevných látkách) však nebyl experimentálně potvrzen. Tento problém nezávisle na sobě vyřešili až Francouz Claude Louis Marie Henri Navier a Ir George Gabriel Stokes v letech 1827 a 1845 [22, 23].

Nelineární systém Navierových-Stokesových rovnic, doplněný o nezbytné konstitutivní vztahy, tedy slouží k popisu proudění reálné tekutiny. V obecném tvaru však není tento systém rovnic řešitelný. K řešení přispěl až prudký rozvoj výpočetní techniky ve 20. století a s tím související vývoj v oblasti numerické matematiky. Nedlouho po 2. světové válce vznikl obor výpočtové dynamiky tekutin (CFD), jehož vývoj díky stále rostoucím možnostem výpočetní techniky a numerické optimalizace trvá dodnes [22, 24].

### 3.1.2 Reynoldsův transportní teorém

Reynoldsův transportní teorém (rovněž známý i pod označením Leibnizův-Reynoldsův teorém) je třídimenzionální zobecnění Leibnizova integrálního pravidla, je pojmenován po anglickém fyzikovi Osborne Reynoldsovi (1842 - 1912) a využívá se při formulaci základních zákonů zachování v mechanice kontinua [25].

Jeho principem je bilance celkového množství extenzivní fyzikální veličiny  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  v čase a v kontrolním objemu uvažovaná v Eulerově popisu (kde je pozorovatel pevně spjatý se souřadnicovým systémem). Celkové množství extenzivní veličiny  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  v uvažované oblasti  $\Omega^t \subset \mathbb{R}^3$  lze vyjádřit vztahem

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int_{V^t} \rho(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) dV^t, \quad (3.1)$$

kde  $\rho(\mathbf{x}, t)$  je hustota extenzivní veličiny a  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  je měrná hodnota extenzivní veličiny v místě  $\mathbf{x}$  a čase  $t$  vztažená na jednotku hmotnosti.

V nedeformovatelném kontrolním objemu  $V$  (s hranicí  $\partial V$ ) předpokládejme, že v čase  $t$  systém zaujímající oblast  $\Omega^t$  splývá s kontrolním objemem  $V$  (tj.  $V^t \equiv V \wedge \partial V^t \equiv \partial V$ ). V takovém případě lze celkovou míru změny extenzivní veličiny  $\Phi$  v  $\Omega^t$  vyjádřit jako součet časové změny  $\Phi$  uvnitř zvoleného kontrolního objemu a konvektivního toku veličiny  $\Phi$  hranicí  $\partial V$ . Reynoldsův transportní teorém (RTT) má tedy tvar

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) dV + \oint_{\partial V} \rho(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (3.2)$$

kde  $\frac{D}{Dt}$  je materiálová derivace v Eulerově popisu,  $\mathbf{u}$  je vektor relativní rychlosti tekutiny vůči pohybujícímu se kontrolnímu objemu (konvektivní rychlost) a  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor vnější normály k hranici  $\partial V$  [26].

#### 3.1.2.1 Odvození

Uvažujme proudové pole definované vektorem rychlosti  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  a termodynamický systém unášený v tomto proudovém poli (viz obr. 3.1). Dále uvažujme, že v čase  $t$  tento systém zaujímá oblast  $\Omega^t$  o objemu  $V^t$ , jež splývá s kontrolním objemem  $V$ . Z obr. 3.1 tedy lze psát

$$\Omega^t = V^t \cup \partial V^t \equiv V \cup \partial V = I + II \quad \wedge \quad \Omega^{t+\Delta t} = V^{t+\Delta t} \cup \partial V^{t+\Delta t} = II + III.$$

Změna množství extenzivní veličiny  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  za čas  $\Delta t$  v oblasti  $\Omega$  pak lze definovat jako

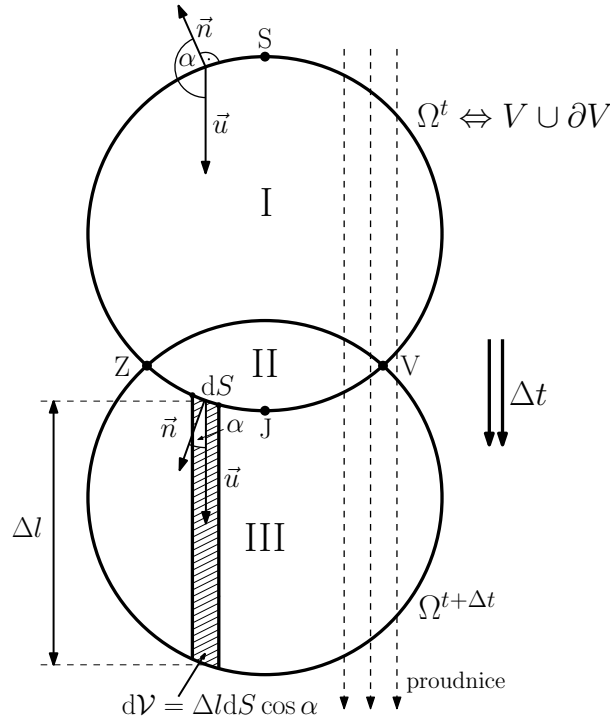
$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t) = (\Phi_{II} + \Phi_{III})_{t+\Delta t} - (\Phi_I + \Phi_{II})_t = \\ &= (\Phi_I + \Phi_{II})_{t+\Delta t} - (\Phi_I + \Phi_{II})_t + (\Phi_{III})_{t+\Delta t} - (\Phi_I)_{t+\Delta t}.\end{aligned}$$

Podělením výše uvedeného výrazu  $\Delta t$  a limitním přechodem pro  $\Delta t \rightarrow 0$  následně získáváme tvar rovnice

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi_{CV}(t + \Delta t) - \Phi_{CV}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi_{III}(t + \Delta t)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi_I(t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad (3.3)$$

kde pro člen pravé strany  $\Phi_{CV}(t)$  platí

$$\Phi_{CV}(t) = (\Phi_I + \Phi_{II})_t.$$



Obrázek 3.1: Oblast  $\Omega$  v Eulerově popisu v čase  $t$  a  $t + \Delta t$ .

První člen na pravé straně rovnice (3.3) přímo odpovídá definici časové derivace přes kontrolní objem  $V$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi_{CV}(t + \Delta t) - \Phi_{CV}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \varphi dV. \quad (3.4)$$

Druhý člen pravé strany rovnice (3.3) odkazuje na množství extenzivní veličiny  $\Phi$  obsažené v objemu  $III$  v čase  $t + \Delta t$ . Uvažujeme-li částici systému nacházející se na diferenciální ploše  $dS$  náležící části hranice kontrolního objemu ( $ZJV \subset \partial V$ ), urazí tato částice za čas  $\Delta t$  vzdálenost rovnou  $\Delta l = u\Delta t$ . Pro objemový diferenciál  $d\mathcal{V}$  (viz obr. 3.1) tedy lze psát

$$d\mathcal{V} = \Delta l dS \cos \alpha = u\Delta t dS \cos \alpha = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS \Delta t.$$

Dosažením výše uvedeného vztahu do druhého členu rovnice (3.3) tedy dostáváme vztah

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi_{III}(t + \Delta t) - \Phi_{III}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{III} \rho \varphi d\mathcal{V} = \int_{(ZJV)} \rho \varphi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Analogický postup zvolíme i pro případ třetího členu pravé strany rovnice (3.3). V tomto případě se jedná o množství extenzivní veličiny  $\Phi$  v objemu  $I$  v čase  $t + \Delta t$  a pohybující se element tekutiny uvažujeme na ploše  $dS$  náležící části hranice ( $ZSV \subset \partial V$ ). Poslední člen pravé strany rovnice (3.3) tedy lze vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi_I(t + \Delta t) - \Phi_I(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_I \rho \varphi d\mathcal{V} = - \int_{(ZSV)} \rho \varphi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

kde znaménková konvence odpovídá hodnotám úhlu  $\alpha$  přináležejícím druhému kvadrantu.

Dále sečteme druhý a třetí člen rovnice (3.3) představující celkový tok extenzivní veličiny  $\Phi$  hranicí kontrolního objemu  $\partial V = (ZJV) \cup (ZSV)$ . Bude tedy platit

$$\int_{(ZJV)} \rho \varphi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{(ZSV)} \rho \varphi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint_{\partial V} \rho \varphi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.5)$$

V závěrečném kroku odvození dosadíme (3.4) a (3.5) do (3.3), čímž získáme Reynoldsův transportní teorém v konečném tvaru [26]

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) dV + \oint_{\partial V} \rho(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.2)$$

### 3.1.3 Zákony zachování

Jak již bylo uvedeno, Reynoldsova transportního teorému lze využít pro formulaci zákonů zachování extenzivních veličin v rámci kontrolního objemu. V daném případě postupně odvodíme zákony zachování pro veličiny hmotnosti, hybnosti a celkové energie [22].

### 3.1.3.1 Zákon zachování hmoty

První z odvozovaných vztahů je zákon zachování hmoty (ZZH). Množství extenzivní veličiny  $\Phi$  v systému  $\Omega^t$  a její měrnou hodnotu  $\varphi$  můžeme vyjádřit jako

$$\Phi(t) \equiv m(t) \quad \wedge \quad \varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial m} \equiv \frac{\partial m}{\partial m} = 1.$$

S ohledem na fakt, že se hmota v systému  $\Omega^t \subset \mathbb{R}^3$  v čase žádným způsobem negeneruje ani neztrácí, lze dosazením do Reynoldsova transportního teorému (3.2) získat výslednou rovnici kontinuity ve tvaru

$$\frac{Dm(t)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \oint_{\partial V} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0. \quad (3.6)$$

Výraz (3.6) je integrálním vztahem zákona zachování hmotnosti v Eulerově popisu a vyjadřuje míru změny hmotnosti uvnitř pevně zvoleného kontrolního objemu  $V$  [27].

### 3.1.3.2 Zákon zachování hybnosti

Dalším ze zákonů zachování je zákon zachování hybnosti ve směrech příslušných souřadnicových os (ZZHyb). Příslušná rovnice pro systém  $\Omega^t \subset \mathbb{R}^3$  o objemu  $V$  je tedy vektorová dimenze tři. Pro vektorovou extenzivní veličinu  $\Phi$  a měrnou hodnotu extenzivní veličiny  $\varphi$  v takovém případě platí

$$\Phi(t) \equiv m\mathbf{u} \equiv \mathbf{H} \quad \wedge \quad \varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial m} \equiv \mathbf{u},$$

kde  $\mathbf{H}$  je vektor hybnosti ve směrech souřadnicových os. Dle 2. Newtonova pohybového zákona dále platí

$$\frac{D\mathbf{H}(t)}{Dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \equiv \oint_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dS + \int_V \rho \mathbf{f} \, dV, \quad (3.7)$$

kde prostřední člen rovnice odpovídá výslednici sil působících na zkoumaný systém a členy pravé strany rovnice odpovídají po řadě příspěvkům povrchových sil a vnějších objemových sil.  $\boldsymbol{\sigma}$  je pak symetrický Cauchyův tenzor napjatosti, pro jehož prvky lze psát

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad (3.8)$$



kde  $p$  je statický tlak v tekutině,  $\tau_{ij}$  je symetrický tenzor vazkých napětí (tenzor smykového napětí) a  $\delta_{ij}$  je Kroneckerova delta [22].

Dosazením takto definovaných veličin do RTT (3.2) získáme integrální vyjádření zákona zachování hybnosti v Eulerově popisu, jež má následující tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} \, dV + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = - \oint_{\partial V} p \mathbf{n} \, dS + \oint_{\partial V} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \, dS + \int_V \rho \mathbf{f} \, dV. \quad (3.9)$$

### 3.1.3.3 Zákon zachování celkové energie

Poslední ze zákonů zachování vyjadřuje celkovou energii v systému  $\Omega^t \subset \mathbb{R}^3$  o objemu  $V$  (ZZE), přičemž pro množství extenzivní veličiny  $\Phi$  a její měrnou hodnotu  $\varphi$  platí

$$\Phi(t) \equiv E(t) \quad \wedge \quad \varphi(\mathbf{x}, t) \equiv e(\mathbf{x}, t) = \epsilon + \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}),$$

kde  $e$  je měrná celková energie vztažená na jednotku hmotnosti a odpovídá součtu měrné vnitřní energie  $\epsilon$  a měrné kinetické energie  $\frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})$ .

Z 1. termodynamického zákona dále platí, že změna celkové energie  $E$  systému odpovídá výměně (přidání či odebrání) tepla  $\tilde{Q}$  nebo vykonání mechanické práce  $W$ , nebo-li

$$\frac{DE(t)}{Dt} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (3.10)$$

S využitím RTT popsaného rovnicí (3.2) tedy lze psát

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e \, dV + \oint_{\partial V} \rho e (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \\ = \oint_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS - \oint_{\partial V} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) \, dV + \int_V \rho \dot{r} \, dV, \end{aligned} \quad (3.11)$$

kde první člen pravé strany odpovídá příspěvku povrchových sil (konkrétně tlakových a vazkých), druhý člen charakterizuje tok tepla hranicí kontrolního objemu  $\partial V$  a poslední dva členy vyjadřují po řadě příspěvky od vnějších objemových sil a od objemových zdrojů tepla. Z nově uvedených veličin pak  $\mathbf{f}$  je objemová síla vztažená na jednotku hmotnosti,  $\dot{r}$  udává rychlost generování vnitřní energie vztažené na jednotku hmotnosti a  $\mathbf{q}$  je hustota tepelného toku, pro jejíž  $j$ -tou složku platí Fourierův zákon ve tvaru

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (3.12)$$

kde  $\lambda$  je tepelná vodivost a  $T$  je teplota [22]. Dosazením (3.8) a (3.12) do vztahu (3.11) získáme výsledný integrální tvar zákona zachování celkové energie systému v Eulerově popisu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e \, dV + \oint_{\partial V} \rho e (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = & - \oint_{\partial V} p (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \oint_{\partial V} (\boldsymbol{\tau} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS + \\ & + \oint_{\partial V} \lambda (\nabla T \cdot \mathbf{n}) \, dS + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) \, dV + \int_V \rho \dot{r} \, dV, \end{aligned} \quad (3.13)$$

kde  $\nabla f(\mathbf{x})$  vyjadřuje vektor parciálních derivací obecné skalární funkce  $f(\mathbf{x})$  dle souřadnicových proměnných.

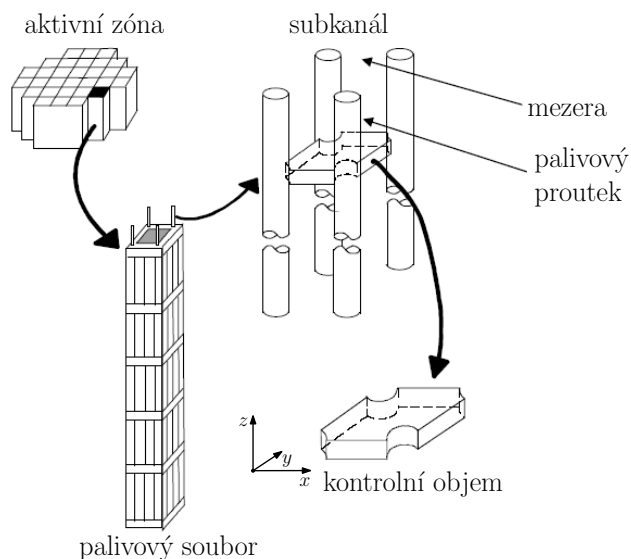
### 3.1.4 Výsledná soustava rovnic za daných předpokladů

Výsledkem zákonů zachování výše uvedených veličin je soustava Navierových-Stokesových rovnic v Eulerově popisu daných vztahy (3.6), (3.9) a (3.13). Tuto soustavu lze souhrnně zapsat ve tvaru

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \oint_{\partial V} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e \, dV + \oint_{\partial V} \rho e (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS &= - \oint_{\partial V} p (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \oint_{\partial V} (\boldsymbol{\tau} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS + \\ &+ \oint_{\partial V} \lambda (\nabla T \cdot \mathbf{n}) \, dS + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) \, dV + \int_V \rho \dot{r} \, dV, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} \, dV + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS &= - \oint_{\partial V} p \mathbf{n} \, dS + \oint_{\partial V} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \, dS + \int_V \rho \mathbf{f} \, dV, \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

kde rovnice po řadě představují zákon zachování hmoty, celkové energie a hybnosti systému  $\Omega^t \subset \mathbb{R}^3$ .

Předkládaná práce se zabývá úlohou proudění chladiva v palivových souborech jaderného reaktoru, které je obecně popsáno soustavou rovnic (3.14). S ohledem na fakt, že nelze nalézt uzavřené analytické řešení této soustavy, diskretizuje se oblast výpočtové geometrie palivového souboru a hledá se přibližné řešení v oblasti kontrolního objemu  $V$  každého takto vzniklého subkanálu. Vztah mezi obecně definovaným kontrolním objemem subkanálu a aktivní zónou jaderného reaktoru je viditelný na obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Relace kontrolního objemu subkanálu k jádru reaktoru. Převzato z [27].

Hranici kontrolního objemu definovaného obr. 3.2 tvoří buďto pevná stěna palivového proutku, rozhraní mezi dvěma subkanály nebo vnější stěna palivového souboru. Hranici subkanálu tak lze rozdělit na dvě charakterově odlišné disjunktní podoblasti

$$\partial V = \partial V_F \cup \partial V_W,$$

kde  $\partial V_F$  (*fluid*) je prostupná a  $\partial V_W$  (*solid wall*) je neprostupná část hranice kontrolního objemu  $V$ . Prostupná část hranice  $\partial V_F$  je představována rozhraním dvou subkanálů, zbylé dva typy hranice uvažujeme jako neprostupné ( $\partial V_W$ ). Nyní již můžeme zavést základní předpoklady odpovídající specifikům dané úlohy [27].

### Dané předpoklady

- Konvektivní rychlost  $\mathbf{u}$  je v místě neprostupné hranice  $\partial V_W$  nulová.
- Chladicí médium je nestlačitelná, ale tepelně expandovatelná kapalina (tzn. vlastnosti chladiva se mění pouze v závislosti na teplotě).
- Příspěvek kinetické energie je vůči vnitřní tepelné energii zanedbatelný ( $\frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \ll \epsilon \Rightarrow e \approx \epsilon$ ).

- Hodnota smykového napětí  $\boldsymbol{\tau}$  je v místě prostupné hranice  $\partial V_F$  nulová.
- Jedinou významnou objemovou silou v systému je tíhová síla.

S ohledem na zavedené předpoklady úlohy převedeme soustavu rovnic (3.14) do nového tvaru. V případě zákona zachování hybnosti uplatňujeme pouze předpoklad nulové konvektivní rychlosti  $\mathbf{u}$  na neprostupné hranici  $\partial V_W$ . Nový tvar této rovnice tedy je

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\partial V_F} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (3.15)$$

Co se úpravy zákona zachování celkové energie systému týče, zde nejprve předpokládejme, že jedinou objemovou silou v působící v rámci kontrolního objemu je tíhová síla

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad -g]^T$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení. V takovém případě pak můžeme předposlední člen pravé strany ZZE přepsat do tvaru

$$\int_V \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) dV \equiv \int_V \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) dV = - \int_V \rho g \frac{\partial z}{\partial t} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V p dV,$$

kde  $p$  označuje hydrostatický tlak. Dále budeme předpokládat zanedbatelný příspěvek kinetické energie oproti vnitřní tepelné energii a taktéž zavedeme novou veličinu měrné entalpie  $h$

$$e \approx \epsilon \quad \wedge \quad h = \epsilon + \frac{p}{\rho}. \quad (3.16)$$

Následně budeme opět předpokládat nulovou hodnotu konvektivní rychlosti  $\mathbf{u}$  v místě neprostupné hranice  $\partial V_W$  a taktéž nulovost tenzoru vazkých napětí  $\boldsymbol{\tau}$  na prostupné hranici  $\partial V_F$  (člen obsahující  $\boldsymbol{\tau}$  se tedy na základě posledních dvou předpokladů v rovnici ZZE zcela vynuluje). Výsledná rovnice zákona zachování celkové energie tedy bude mít následující podobu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho h dV + \int_{\partial V_F} \rho h(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \rho \dot{r} dV + \int_{\partial V_F} \lambda(\nabla T \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.17)$$

Poslední rovnicí je Navierova-Stokesova rovnice pro zachování hybnosti v systému. V rámci ní jsou opět zavedeny předpoklady nulové konvektivní rychlosti

$\mathbf{u}$  na neprostupné hranici  $\partial V_W$ , nulové hodnoty smykového napětí  $\boldsymbol{\tau}$  v místě prostupné hranice  $\partial V_F$  a zanedbání všech vnějších objemových sil vyjma síly tíhové. Lze tedy rovnou psát nový tvar zákona zachování hybnosti

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial V_F} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \int_V \rho \mathbf{g} \, dV - \oint_{\partial V} p \mathbf{n} \, dS + \int_{\partial V_W} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \, dS. \quad (3.18)$$

Spojením rovnic (3.15), (3.17) a (3.18) tedy získáme výslednou soustavu Navierových-Stokesových rovnic v integrálním tvaru a Eulerově popisu za specifických předpokladů dané úlohy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \int_{\partial V_F} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho h \, dV + \int_{\partial V_F} \rho h (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \int_V \rho \dot{r} \, dV + \int_{\partial V_F} \lambda (\nabla T \cdot \mathbf{n}) \, dS, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial V_F} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \\ = \int_V \rho \mathbf{g} \, dV - \oint_{\partial V} p \mathbf{n} \, dS + \int_{\partial V_W} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \, dS. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

## 3.2 Subkanálová analýza

Jak již bylo řečeno v odst. 2.2, přístupů k řešení problematiky proudění chladiva v palivových souborech jaderných reaktorů je více, avšak právě subkanálová analýza přináší množinu výhod, pro něž je (s neustálými modifikacemi) dodnes nejvíce užívanou metodou řešení tohoto problému. Jedná se především o kombinaci přesných výstupů uzpůsobených přímo na míru výpočtové geometrii a nízkých výpočetních nároků daných redukcí soustavy rovnic o jeden člen, zavedením empirických modelů aproximujících výpočetně složité fyzikální děje a specifickou prostorovou diskretizací analyzované geometrie [27].

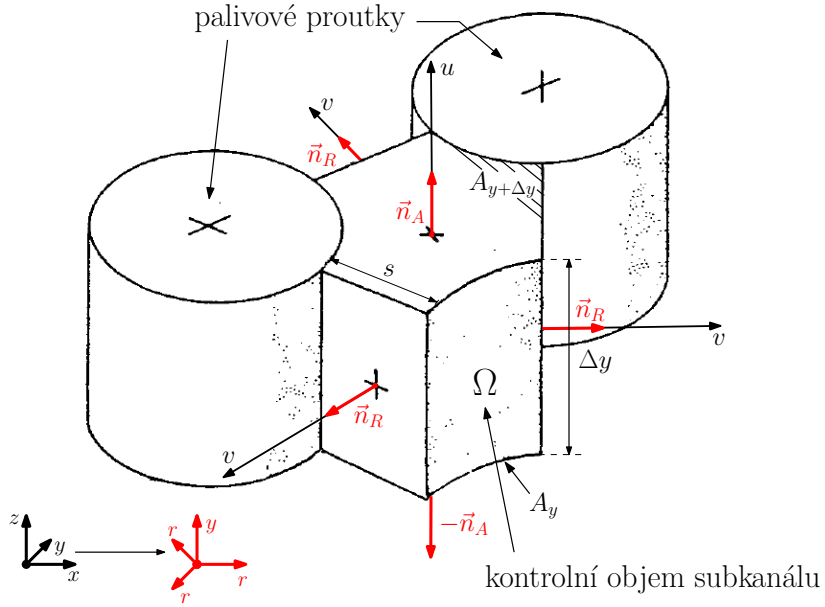
### 3.2.1 Odvození rovnic

Výchozí rovnice subkanálové analýzy v integrálním tvaru a Eulerově popisu jsou představovány soustavou (3.19), přičemž redukovaným vztahem je vektorová rovnice hybnosti, jež se z kartézských souřadnic transformuje na směry

axiální (odpovídající souřadnicové ose  $z$ ) a radiální (slučující příspěvky hybnosti ve směrech os  $x$  a  $y$ ). Z tohoto důvodu nově zavedeme dvouprvkové vektory rychlosti  $\mathbf{u}$  a vnějších normálových vektorů  $\mathbf{n}_A$  a  $\mathbf{n}_R$  ve směrech příslušných nově zavedeným souřadnicím (viz obr. 3.3)

$$\widehat{xyz} \rightarrow \widehat{y\tilde{r}} : \mathbf{u} = [u \ v]^T \wedge \mathbf{n}_A = [1 \ 0]^T \wedge \mathbf{n}_R = [0 \ 1]^T.$$

S ohledem na fakt, že vytvářený program pracuje pouze v režimu jednofázového proudění, omezí se odvození vztahů subkanálové analýzy pouze na tomu odpovídající výpočtový model. Odvození vztahů pro jednotlivé zákony zachování je uvedeno níže, empirické vztahy zohledňující dvoufázové proudění chladiva jsou popsány v literatuře [27, 28].



Obrázek 3.3: Kontrolní objem subkanálu s vyznačenými rozměrovými veličinami a veličinami rychlosti v nově zavedeném souřadnicovém systému. Převzato z [27].

### 3.2.1.1 Zákon zachování hmoty

Prvním ze zákonů zachování je rovnice kontinuity ve výchozím tvaru odpovídajícímu vztahu (3.15). V rámci kontrolního objemu subkanálu  $V$ , jenž je definován obr. 3.3, zavedeme integrální průměry hodnot jednotlivých veličin (viz věta o střední hodnotě integrálního počtu) [29]. Platí tedy

$$\begin{aligned} \langle\langle \rho \rangle\rangle &\equiv \frac{1}{V} \int_V \rho \, dV \quad \wedge \quad \langle \rho u \rangle_y \equiv \frac{1}{A_y} \int_{A_y} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_A) \, dS \quad \wedge \\ \wedge \quad \langle \rho v \rangle_j &\equiv \frac{1}{s_j \Delta y} \int_{s_j \Delta y} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_R) \, dS \quad \wedge \quad \bar{A} \equiv \frac{A_y + A_{y+\Delta y}}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, n_s, \end{aligned}$$

kde  $A_y$  představuje plochu hranice kontrolního objemu v axiálním směru v místě  $y$ , přičemž pro celou prostupnou hranici kontrolního objemu  $\partial V_F$  platí  $\partial V_F = A_y \cup A_{y+\Delta y} \cup \sum_{j=1}^{n_s} s_j \Delta y$ , kde  $s_j$  je délka  $j$ -tého rozhraní mezi dvěma sousedními subkanály (v průřezu geometrií) a  $n_s$  udává počet sousedních subkanálů.  $\bar{A}$  je střední hodnota velikosti hraničních ploch v axiálním směru v rámci jednoho prostorového kroku  $\Delta y$ ,  $V$  udává objem kontrolní oblasti, pro nějž přibližně platí  $V = \bar{A} \Delta y$  a symboly „ $\langle\langle \rangle\rangle$ “ a „ $\langle \rangle$ “ označují po řadě integrální průměry hodnot veličiny přes kontrolní objem  $V$ , resp. kontrolní plochu  $S$ .

Vyjádření ZZH po zavedení nových proměnných, vydělení rovnice členem  $\Delta y$  a zavedení předpokladů diferenciálně malého axiálního kroku ( $\Delta y \rightarrow 0$ ) a konstantního průřezu ( $\bar{A} \equiv A = konst.$ ) v celé délce palivového souboru, vede na nový tvar rovnice kontinuity

$$A \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle \rho \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \rho u \rangle A + \sum_{j=1}^{n_s} \langle \rho v \rangle_j s_j = 0. \quad (3.20)$$

Dále zavedeme nové veličiny hmotnostního toku v axiálním směru  $M$  a hmotnostního toku v příčném směru vztaheného na jednotku délky  $w$  (dále též příčný tok) a budeme předpokládat konstantní hodnotu měrné hmotnosti  $\rho$  v rámci kontrolního objemu subkanálu  $V$ , platí tedy

$$M \equiv \langle \rho u \rangle A \quad \wedge \quad \langle\langle \rho \rangle\rangle \equiv \rho \quad \wedge \quad \langle \rho v \rangle_j s_j \equiv w_j.$$

Takto zadefinované veličiny dosadíme do vztahu (3.20) a získáme výsledný tvar rovnice subkanálové analýzy pro zákon zachování hmotnosti

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial y} = - \sum_{j=1}^{n_s} w_j. \quad (3.21)$$

### 3.2.1.2 Zákon zachování celkové energie

Co se zákona zachování celkové energie týče, vyjdeme z výchozího vztahu (3.17). V daném případě nejdříve zadefinujeme vnitřní tvorbu tepla v tekutině, přenos tepla ze sousedních subkanálů a empiricky zavedeme vliv turbulentního míšení, následně budeme postupovat analogicky s předcházejícím odstavcem zavedením integrálních průměrů veličin v kontrolním objemu  $V$  a na jeho hranici  $\partial V$  a jejich přepisem do kompaktního tvaru.

První ze zavedených členů rovnice je tepelný příspěvek v chladiivu generovaný v důsledku jaderné reakce paliva v sousedících proutcích subkanálu, jenž má tvar

$$\int_V \rho \dot{r} dV \equiv \Delta y \sum_{j=1}^{n_p} C_{Q_j} o_{in_j} Q_{sum} \equiv \Delta y \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{q}_j, \quad (3.22)$$

kde  $n_p$  je počet palivových proutků sousedících s daným subkanálem,  $C_Q$  je poměrná část tepelného výkonu příslušející danému palivovému proutku (z celkového výkonu palivového souboru  $Q_{sum}$ ),  $o_{in}$  je délka rozhraní mezi proutkem a příslušným subkanálem a  $\tilde{q}$  je nově zavedená veličina lineárního tepelného toku.

Dalším vztahem je výraz definující přenos tepla ze sousedních subkanálů. V tomto případě budeme aproximovat parciální derivaci dle radiální souřadnice  $r$  jako rozdíl teplot sousedních subkanálů  $\Delta T$  podělený vzdáleností jejich geometrických středů  $l$  a nakonec budeme předpokládat konstantní hodnotu tepelné vodivosti  $\lambda$ . Pro přestup tepla přes  $j$ -té subkanálové rozhraní tedy bude platit

$$\int_{s_j \Delta y} \lambda (\nabla T \cdot \mathbf{n}_R) dS \equiv -\lambda \Delta y s_j \frac{\Delta T_j}{l_j} = -\Delta y k_j \Delta T_j,$$

kde  $k$  je součinitel kondukčního přestupu tepla mezi sousedními subkanály. S ohledem na předpoklad malých rozdílů teplot mezi dvěma po sobě jdoucími axiálními kroky  $\Delta y$  uvažujeme nulový příspěvek energie při přestupu tepla přes hranici v axiálním směru. Platí tedy

$$\int_{\partial V_F} \lambda (\nabla T \cdot \mathbf{n}) dS \equiv -\Delta y \sum_{j=1}^{n_s} k_j \Delta T_j,$$

kde vektor  $\mathbf{n}$  je vnější jednotkový normálový vektor v příslušném místě kontrolní hranice  $\partial V$ .



Nakonec do ZZЕ zavedeme zcela nový člen charakterizující příspěvek energie ze strany turbulentního míšení, pro nějž platí

$$Q_{tm} \equiv -\Delta y \sum_{j=1}^{n_s} \tilde{w}_j \Delta h_j, \quad (3.23)$$

kde  $\tilde{w}$  je příčný tok způsobený turbulentními fluktuacemi a  $\Delta h$  je rozdíl měrných entalpií v sousedních subkanálech. S ohledem na výpočetní náročnost turbulencí ve výpočtové oblasti je zaveden empirický vztah pro vyjádření průtočné hmoty  $\tilde{w}$ , ve kterém jednu z proměnných představuje součinitel turbulentního míšení  $\beta$ . Ten později poslouží jako návrhový parametr pro lepší konvergenci vypočtených výsledků s experimentálními daty. Samotný vztah vyjadřující veličinu  $\tilde{w}$  je pak následující

$$\tilde{w}_j = \beta \overline{\text{Re}}^\delta d_h G, \quad (3.24)$$

kde  $\text{Re}$  je Reynoldsovo číslo,  $\delta$  je fitovací exponent výpočtu,  $G$  udává plošnou hustotu hmotnostního toku  $M$  a  $d_h$  označuje hydraulický průměr, který lze obecně charakterizovat vztahem  $d_h = 4 \frac{S}{o_s}$ , kde  $S$  je velikost průtočné plochy a  $o_s$  je smáčený obvod. Pruhy nad jednotlivými proměnnými pak značí střední hodnotu daných veličin pro dvojici sousedních subkanálů. V axiálním směru se turbulentní míšení neuvažuje.

Po definování zdrojových členů zákona zachování energie opět přejdeme k zavedení integrálních průměrů hodnot členů levé strany rovnice (3.17). Tyto průměry mají následující podobu

$$\begin{aligned} \langle\langle \rho h \rangle\rangle &\equiv \frac{1}{V} \int_V \rho h \, dV & \wedge & \langle \rho u h \rangle_y \equiv \frac{1}{A_y} \int_{A_y} \rho h (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_A) \, dS & \wedge \\ & \wedge \langle \rho v h \rangle_j & \equiv & \frac{1}{s_j \Delta y} \int_{s_j \Delta y} \rho h (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_R) \, dS. \end{aligned}$$

Po dosazení příslušných vyjádření, podělení členem  $\Delta y$ , následným předpokladem jeho diferenciálně malé velikosti a předpokladem konstantní velikosti plochy průřezu subkanálu  $A$  ve směru axiální souřadnice  $y$  získáme rovnici ve tvaru

$$A \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle \rho h \rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \rho u h \rangle A = \sum_{j=1}^{n_s} (-k_j \Delta T_j - \tilde{w}_j \Delta h_j + \langle \rho v h \rangle_j S_j) + \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{q}_j. \quad (3.25)$$

Podělením celého vztahu veličinou průtočné hmotnosti  $M$  a za předpokladu níže platných rovností lze psát výslednou rovnici zákona zachování energie v kontrolním objemu subkanálu [27]

$$h \equiv \frac{\langle \rho u h \rangle}{\langle \rho u \rangle} \quad \wedge \quad h \equiv \frac{\langle \rho v h \rangle}{\langle \rho v \rangle} \quad \wedge \quad h \equiv \frac{\langle\langle \rho h \rangle\rangle}{\rho},$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{M} \left[ \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{q}_j + \sum_{j=1}^{n_s} (-k_j \Delta T_j - \tilde{w}_j \Delta h_j + w_j \Delta h_j) \right]. \quad (3.26)$$

### 3.2.1.3 Zákon zachování hybnosti v axiálním směru

Poslední rovnicí určenou k úpravě je vektorová rovnice hybnosti ve směrech příslušných souřadnicovým osám  $x$ ,  $y$  a  $z$ , kterou je třeba rozepsat do nově zavedených směrů  $r$  a  $y$ .

Nejdříve se budeme zabývat rovnicí ZZHyb ve směru axiální souřadnice vycházející ze vztahu (3.18). I tentokrát se některé fyzikální děje aproximují empiricky. V daném případě se jedná o vliv smykového napětí  $\boldsymbol{\tau}$  na neprostupné hranici  $\partial V_W$  a vliv turbulentního míšení. První z jmenovaných aproximačních vztahů lze vyjádřit jako

$$\int_{\partial V_W} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \, dS \cdot \mathbf{n}_A \equiv -\frac{1}{2} \left( \frac{\xi \Delta y}{d_h} + \zeta \right) \langle \rho u^2 \rangle \bar{A}, \quad (3.27)$$

kde  $\zeta$  představuje součinitel místního odporu v místech mísících, resp. distančních mřížek palivového souboru (přičemž hodnota je konstantní a je určována experimentálně pro každý jednotlivý typ mřížky),  $\xi$  je pak součinitel třecího odporu od pevné stěny a jeho hodnota je stanovena jako

$$\xi = (1,82 \log(\text{Re}) - 1,64)^{-2}. \quad (3.28)$$

Dalším z uvažovaných vlivů je celkový silový příspěvek v axiálním směru od turbulentního míšení

$$F_{tm} \equiv -\varepsilon \Delta y \sum_{j=1}^{n_s} \tilde{w}_j \Delta u_j, \quad (3.29)$$

kde  $\varepsilon$  vyjadřuje konstantní (empirický) součinitel přenosu hybnosti turbulencí.

Co se bilance tlakových členů pravé strany rovnice (3.18) týče, lze analogicky předchozím odstavcům zavést integrální průměr tlaku  $\langle p \rangle$  v místě  $y$  přes axiální hranici kontrolního objemu  $\partial V$

$$\langle p \rangle_y \equiv \frac{1}{A_y} \int_{A_y} p \mathbf{n} \, dS \cdot \mathbf{n}_A.$$

Tlakové členy ZZHyb (3.18) tedy lze vyjádřit vztahem

$$\begin{aligned} - \int_{\partial V_F} p \mathbf{n} \, dS \cdot \mathbf{n}_A - \int_{\partial V_W} p \mathbf{n} \, dS \cdot \mathbf{n}_A &= - \int_{A_{y+\Delta y}} p \mathbf{n}_A \, dS \cdot \mathbf{n}_A + \\ &+ \int_{A_y} p \mathbf{n}_A \, dS \cdot \mathbf{n}_A \equiv - \langle p \rangle_{y+\Delta y} A_{y+\Delta y} + \langle p \rangle_y A_y, \end{aligned}$$

kde vektor  $\mathbf{n}$  vyjadřuje vnější normálu v obecném místě hranice kontrolního objemu  $\partial V$  (tedy buďto  $\mathbf{n}_R$  nebo  $\mathbf{n}_A$ ). Pro body hranice odpovídající rozhraní sousedních subkanálů či rozhraní proutek-subkanál je normálový vektor  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_R$ . Skalární součin vektorů  $\mathbf{n}_R \cdot \mathbf{n}_A$  je pro body této hranice nulový, čemuž odpovídá i nulovost příslušných integrálů.

Posledním členem pravé strany analyzované rovnice (3.18) je výraz vyjadřující vliv tíhové síly, který opět průměrujeme přes kontrolní objem  $V$

$$\int_V \rho \mathbf{g} \, dV \cdot \mathbf{n}_A \equiv -\bar{A} \Delta y \langle \langle \rho \rangle \rangle g, \quad (3.30)$$

kde znaménko mínus odpovídá zvolené orientaci axiální osy. Levou stranu rovnice (3.18) upravíme opět zavedením integrálních průměrů přes kontrolní objem  $V$ , resp. jeho hranici  $\partial V$ , v tomto případě ve tvaru

$$\begin{aligned} \langle \langle \rho u \rangle \rangle &\equiv \frac{1}{V} \int_V \rho \mathbf{u} \, dV \cdot \mathbf{n}_A \quad \wedge \quad \langle \rho u^2 \rangle_y \equiv \frac{1}{A_y} \int_{A_y} \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_A) \, dS \cdot \mathbf{n}_A \quad \wedge \\ &\wedge \quad \langle \rho uv \rangle_j \equiv \frac{1}{s_j \Delta y} \int_{s_j \Delta y} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_R) \, dS \cdot \mathbf{n}_A, \end{aligned}$$

kde první člen představuje objemovou hybnost v axiálním směru, druhý člen vyjadřuje průměrovaný tok axiální hybnosti přes vodorovnou plochu průřezu  $A$  v místě  $y$  a třetí člen axiální tok hybnosti skrz subkanálová rozhraní nesené radiální rychlostí  $v$ .

Přepis rovnice ZZHyb (3.18) po dosazení za jednotlivé členy, podělení součinem  $\bar{A}\Delta y$  a zavedením předpokladů, že  $\Delta y$  je diferenciálně malé a plocha průřezu  $A$  je konstantní, má tedy následující tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u \rangle A + \frac{\partial}{\partial y} \langle \rho u^2 \rangle A + \sum_{j=1}^{n_s} \langle \rho u v \rangle_j s_j + A \frac{\partial}{\partial y} \langle p \rangle = \\ = -A \langle \rho \rangle g - \frac{1}{2} \left( \frac{\xi}{d_h} + \frac{\zeta}{dy} \right) \langle \rho u^2 \rangle A - \varepsilon \sum_{j=1}^{n_s} \tilde{w}_j \Delta u_j. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Tuto rovnici lze dále přepsat podělením plochy průřezu  $A$  a přepisem vybraných členů s využitím již dříve zavedených veličin hmotnostního toku  $M$  a hmotnostního toku v příčném směru vztaženého na jednotku délky  $w$  do výsledného tvaru zákona zachování hybnosti v axiálním směru

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^{n_s} (w_j \Delta u_j - \varepsilon \tilde{w}_j \Delta u_j) - \\ - \rho g - \left( \frac{M}{A} \right)^2 \left[ \frac{\xi}{2\rho d_h} + \frac{\zeta}{2\rho dy} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

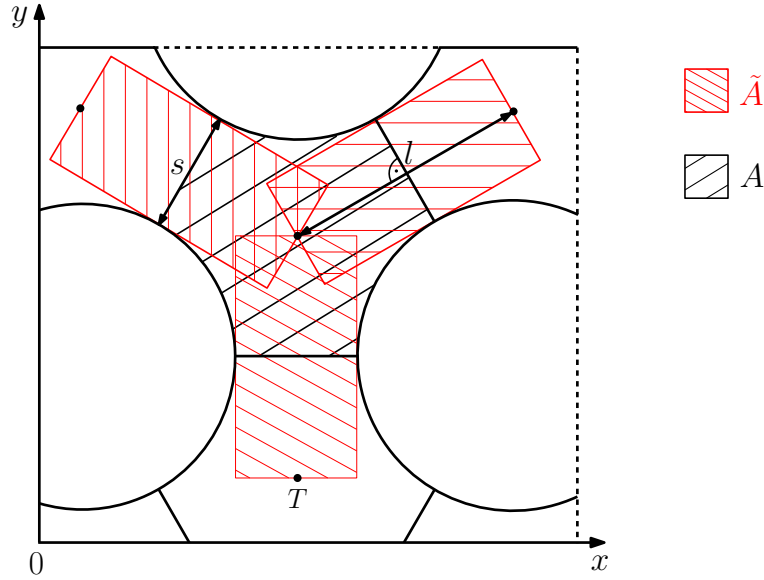
#### 3.2.1.4 Zákon zachování hybnosti v radiálním směru

Posledním odvozovaným vztahem subkanálové analýzy je zákon zachování hybnosti v radiálním (příčném) směru. Ten opět vychází z rovnice (3.18), v tomto případě však redukuje rovnice ve směru původních souřadnicových os  $x$  a  $y$  do jedné. Pro takový případ je nutné zavést nové předpoklady kladené na kontrolní oblast, a to včetně zcela nové definice kontrolního objemu  $V$  (svými vlastnostmi pokud možno ekvivalentního s kontrolním objemem původním). Tyto nové předpoklady jsou viditelné níže [27].

#### Předpoklady pro řešení bilance hybnosti v příčném směru

- Ve větší vzdálenosti od prostupné hranice mezi subkanály je rychlost v radiálním směru  $v$  zanedbatelná. V důsledku tohoto předpokladu je tok radiální hybnosti přes svislé plochy (hybnost unášená rychlostí  $v$ ) nulový.
- Vliv tíhové síly je pro případ příčného proudění zanedbatelný.

- Je zaveden nový kontrolní objem v oblasti kolem hranice jednotlivých subkanálů, přičemž plocha v průřezu je nově definována jako  $\tilde{A} = sl$ , kde  $l$  je vzdálenost těžišť sousedních subkanálů (viz obr. 3.4). Předpokládá se, že původní subkanálové kontrolní objemy se s novými překrývají a platí  $\sum_{j=1}^{n_{sub}} A_j \approx \sum_{j=1}^{n_{nko}} \tilde{A}_j$ , kde  $n_{sub}$  udává počet subkanálů v dané geometrii a  $n_{nko}$  počet nově zavedených kontrolních objemů v oblastech kolem rozhraní mezi subkanály. Daný předpoklad není zcela přesný, chyba je však dostatečně malá a lze ji zanedbat.
- V důsledku složité geometrie v oblasti mezery mezi palivovými proutky se vliv smykového napětí  $\tau$  empiricky aproximuje.



Obrázek 3.4: Průřez výpočtovou geometrií ilustrující zavedení nového kontrolního objemu s plochou průřezu  $\tilde{A}$  pro ZZHyb v radiálním směru.

Nejdříve zavedeme člen aproximující vliv smykového napětí  $\tau$  od neprostupné hranice kontrolního objemu  $\partial V_W$  jako

$$\int_{\partial V_W} \tau \mathbf{n} dS \cdot \mathbf{n}_R \equiv -\frac{1}{2} s \Delta y \langle \rho v^2 \rangle \tilde{h}, \quad (3.33)$$

kde  $\tilde{h}$  je součinitel odporu příčného proudění. Dále provedeme bilanci vlivu příčných tlakových sil na hybnost v radiálním směru, a to opět s využitím integrálních

průměrů hodnot veličiny tlaku v kontrolním objemu

$$- \int_{\partial V_F} p \mathbf{n} dS \cdot \mathbf{n}_R - \int_{\partial V_W} p \mathbf{n} dS \cdot \mathbf{n}_R \equiv [\langle p \rangle_i - \langle p \rangle_j] s \Delta y, \quad (3.34)$$

kde indexy  $i$  a  $j$  odkazují na subkanály sousedící se sledovaným rozhraním. Následně zavedeme integrální průměry veličin přes kontrolní objem  $V$ , resp. jeho hranici  $\partial V$

$$\langle\langle \rho v \rangle\rangle \equiv \frac{1}{sl \Delta y} \int_{sl \Delta y} \rho \mathbf{u} dV \cdot \mathbf{n}_R \quad \wedge \quad \langle \rho v u \rangle \equiv \frac{1}{sl} \int_{sl} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_A) dS \cdot \mathbf{n}_R, \quad (3.35)$$

kde první člen vyjadřuje moment hybnosti v radiálním směru v objemu  $V$ , druhý člen pak odpovídá toku příčné hybnosti přes vodorovnou plochu nesenou axiální rychlostí  $u$ . Všechny vyjádřené členy lze dosadit do výchozí rovnice (3.18) a získat tak nový předpis

$$sl \Delta y \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle \rho v \rangle\rangle + sl \langle \rho v u \rangle_{y+\Delta y} - sl \langle \rho v u \rangle_y = -\frac{1}{2} s \Delta y \langle \rho v^2 \rangle \tilde{h} + [\langle p \rangle_i - \langle p \rangle_j] s \Delta y. \quad (3.36)$$

Nakonec vydělíme výraz součinem součinem  $l \Delta y$ , z pohledu proměnné  $y$  převedeme do diferenciálního tvaru a využijeme známých tvarů pro vyjádření veličiny příčného toku  $w$ . Získáváme tak výsledný tvar subkanálové analýzy pro zachování hybnosti v radiálním směru (v daném případě psaný pro rozhraní přináležející sousedním subkanálovým prvkům  $i$  a  $j$ ),

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (w_{ij} u)}{\partial y} = \frac{s_{ij}}{l_{ij}} [(p_i - p_j) - H_{ij} w_{ij}], \quad (3.37)$$

kde člen  $H_{ij}$  definuje odpor příčného proudění a je definován vztahem

$$H_{ij} = \frac{\tilde{h} |w_{ij}|}{2 \rho_i s_{ij}^2}. \quad (3.38)$$

### Výsledná soustava rovnic subkanálové analýzy

Výsledkem odvození subkanálové analýzy jsou tedy zákony zachování hmotnosti (3.21), celkové energie (3.26) a hybnosti v příslušných směrech (3.32) a (3.37). Jedná se o čtyři časově variantní parciální diferenciální rovnice (PDR) prvního řádu a na soustavu lze nahlížet jako na třídimenzionální popis proudění

zredukovaný o jeden člen, případně jako na 1D problém s přídatným příčným prouděním. Níže vypsaná forma odpovídá rovnicím pro  $i$ -tý subkanál [28]

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial M_i}{\partial y} = - \sum_{j=1}^{n_s} w_{ij}, \\ \frac{1}{u} \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial h_i}{\partial y} = \frac{1}{M_i} \left[ \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{q}_{ij} + \sum_{j=1}^{n_s} (-k_{ij} \Delta T_{ij} - \tilde{w}_{ij} \Delta h_{ij} + w_{ij} \Delta h_{ij}) \right], \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial M_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial y} = \frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^{n_s} (w_{ij} \Delta u_{ij} - \varepsilon \tilde{w}_{ij} \Delta u_{ij}) - \\ - \rho_i g - \left( \frac{M_i}{A_i} \right)^2 \left[ \frac{\xi_i}{2\rho_i d_{h_i}} + \frac{\zeta_i}{2\rho_i d_y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho_i} \right) \right], \\ \frac{\partial w_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (w_{ij} u)}{\partial y} = \frac{s_{ij}}{l_{ij}} (\Delta p_{ij} - H_{ij} w_{ij}). \end{array} \right. \quad (3.39)$$

### 3.3 Vedení tepla

Jak již bylo dříve předesláno, přidruženou úlohou, jíž se práce zabývá, je úloha vedení tepla v palivovém proutku. Tato kapitola se bude zabývat obecnou formulací právě této problematiky.

Zákonitostmi přeměny energie se zabývá obor termodynamiky. Ten zažil svůj největší průlom v 19. století s vývojem spalovacího motoru, kdy bylo třeba najít exaktní zákonitosti přeměny tepla na mechanickou práci. Termodynamika se následně rozvíjela a uplatnění tak dnes nachází v rozličných oborech fyziky, chemie a mnohých dalších [30].

Sdílení tepla jako takové se uskutečňuje třemi možnými způsoby: vedením (kondukcí), prouděním (konvekcí) a sáláním (radiací). V případě kondukcce přechází teplo od částice k částici pomocí přímého styku. Při tomto typu přenosu se tepelná energie uvolňuje elastickým vlněním (kapaliny a tuhá dielektrika), difuzí atomů nebo molekul (plyny) či difuzí volných elektronů (kovy). Typická je především pro tuhá tělesa a kapaliny, které se nepohybují. Obecně pak platí, že oblasti s vyšší střední kinetickou energií předávají část své pohybové energie oblastem s nižší střední kinetickou energií.

Sdílení tepla konvekcí se děje pouze u plynů a kapalin a je způsobeno prouděním hmoty o různé teplotě. Pohybem hmoty dochází k vzájemnému pohybu jednotlivých částic s odlišnou teplotou (resp. vnitřní energií), což způsobuje přenos tepla. Rychlost tohoto přenosu primárně závisí na typu proudění tekutiny. Konvekce je vždy spojena s kondukcí a může být vyvolána přirozeným pohybem např. vlivem změny hustoty či pohybem nuceným (ventilátor, čerpadlo, ...).

Posledním typem šíření tepla je sálání. Jedná se o fyzikální proces, při kterém látka emituje energii ve formě elektromagnetického záření. Energie je tedy přeměňována z tepelné na radiační a nazpět a její šíření je (na rozdíl od konvekce a kondukce) možné i ve vakuu. Faktory, jež mají vliv na množství a rychlost emitované energie jsou především teplota tělesa, barva povrchu a obsah plochy povrchu [31].

### 3.3.1 Rovnice vedení tepla v příslušném tvaru

Úlohy přenosu tepla lze obecně klasifikovat dle závislosti na čase (stacionární a nestacionární) a dimenzi přenosu tepla (1D, 2D a 3D). Základním konstitutivním vztahem problematiky vedení tepla je Fourierův zákon

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3.12)$$

kde  $q_i$  je hustota tepelného toku ve směru  $i$ -té prostorové proměnné a  $\lambda$  představuje tepelnou vodivost, znaménko mínus pak odpovídá směru záporně vzatého gradientu teploty, v němž je teplo vedeno.

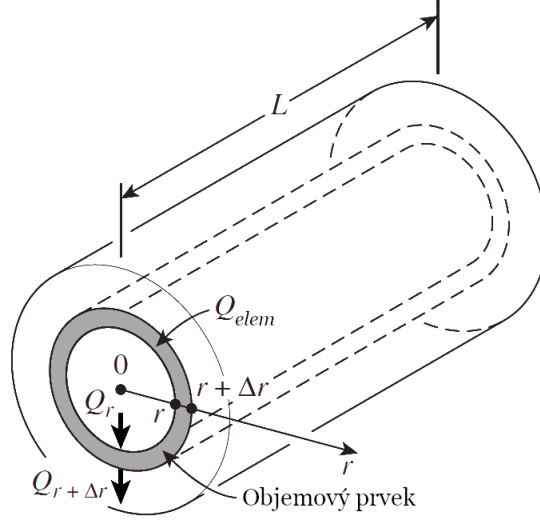
Kromě vlivu vedení tepla má na celkovou bilanci tepelné energie vliv též generování tepla uvnitř média. To může zahrnovat přeměnu mechanické, elektrické, jaderné nebo chemické energie na teplo. V rámci bilance energie jsou takové procesy přeměny charakterizovány členem generátoru energie

$$Q = \int_V \hat{q}_{gen} dV, \quad (3.40)$$

kde  $Q$  je celkový generovaný tepelný výkon v médiu a  $\hat{q}_{gen}$  je hustota generovaného tepelného toku.

V rámci řešené úlohy se zabýváme vedením tepla v palivovém proutku. Tvar geometrie proutku odpovídá dlouhé válcové skořepině poloměru  $r$  a délky  $L$  (viz obr. 3.5) a bere v potaz předpoklady izotropie a homogenity materiálu a rotační symetrie úlohy. Ta je tedy řešena jako jednodimenzionální ve směru radiální složky.





Obrázek 3.5: Jednorozměrné vedení tepla objemovým prvkem válcové geometrie. Převzato z [32].

Pro sestavení rovnice vedení tepla je nutné vycházet ze zákona zachování tepelné energie, jež má následující tvar

$$Q_r - Q_{r+\Delta r} + Q_{elem} = \frac{\Delta E_{elem}}{\Delta t}, \quad (3.41)$$

kde  $Q_r$  je tepelný výkon v místě  $r$ ,  $Q_{elem}$  celkový tepelný výkon generovaný v elementu a  $\Delta E_{elem}$  představuje změnu vnitřní energie elementu. Pro energetický člen pravé strany rovnice (3.41) pak za předpokladu konstantní hodnoty hustoty  $\rho$  platí kalorimetrická rovnice

$$\Delta E_{elem} = E_{elem,t+\Delta t} - E_{elem,t} = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c A \Delta r (T_{t+\Delta t} - T_t), \quad (3.42)$$

kde  $c$  je měrná tepelná kapacita. Pro válcový tvar objemového prvku lze dále psát

$$A = 2\pi r L \neq konst. \quad \wedge \quad Q_{elem} = \hat{q}_{gen} A \Delta r \quad \wedge \quad Q = qA = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial r},$$

kde  $A$  představuje plochu elementu, přes níž dochází ke konvektivnímu toku tepla a je obecně funkcí poloměru  $r$  ( $A = A(r)$ ). Dosazením výše uvedených členů do rovnice (3.41) a dělením výrazem  $A\Delta r$  získáme nový tvar bilance tepelné energie

$$-\frac{1}{A} \frac{Q_{r+\Delta r} - Q_r}{\Delta r} + \hat{q}_{gen} = \rho c \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}. \quad (3.43)$$

Zavedením předpokladu diferenciálně malých členů  $\Delta r$  a  $\Delta t$  ( $\Delta r \rightarrow 0$  a  $\Delta t \rightarrow 0$ ) a zkrácením konstantním členem  $2\pi L$  na levé straně rovnice (3.43) získáme výsledný tvar rovnice nestacionárního vedení tepla pro rotačně symetrickou úlohu [32]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \hat{q}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.44)$$

## 4 Použité numerické metody

U nelineárních parciálních diferenciálních rovnic zpravidla nelze nalézt uzavřené analytické řešení. V takovém případě je nutné hledat řešení alespoň přibližné, k čemuž slouží aparát numerické matematiky. Principem většiny užívaných numerických metod je rozdělení výpočtové oblasti na konečný počet částí, nad nimiž se hledá aproximované řešení.

Mezi základní numerické metody používané pro řešení PDR patří metody konečných diferencí (MKD), konečných objemů (MKO) a konečných prvků (MKP). Předkládaná práce se opírá primárně o první jmenovanou metodu, zbylé dvě jsou implementovány pouze za účelem porovnání numerického řešení přidružené úlohy vedení tepla palivovým proutkem. Tomu odpovídá i omezený rozsah zpracované teorie zaměřující se pouze na popis základních principů těchto metod.

### 4.1 Metoda konečných diferencí

První popisovanou numerickou metodou je metoda konečných diferencí (anglicky FDM - *Finite Difference Method*). Základním principem této metody (někdy též nazývané metoda sítí) je aproximace parciálních derivací vhodnými diferencními podíly daného řádu přesnosti. Pomocí této aproximace přejde diferenciální rovnice na soustavu rovnic algebraických. Počet rovnic soustavy odpovídá počtu uzlových bodů, v nichž se diferenciální rovnice na dané časové hladině vyčísluje a tedy i velikosti diskretizačního kroku. Konstrukce diferencních podílů pak vychází z teorie Taylorova rozvoje [33].

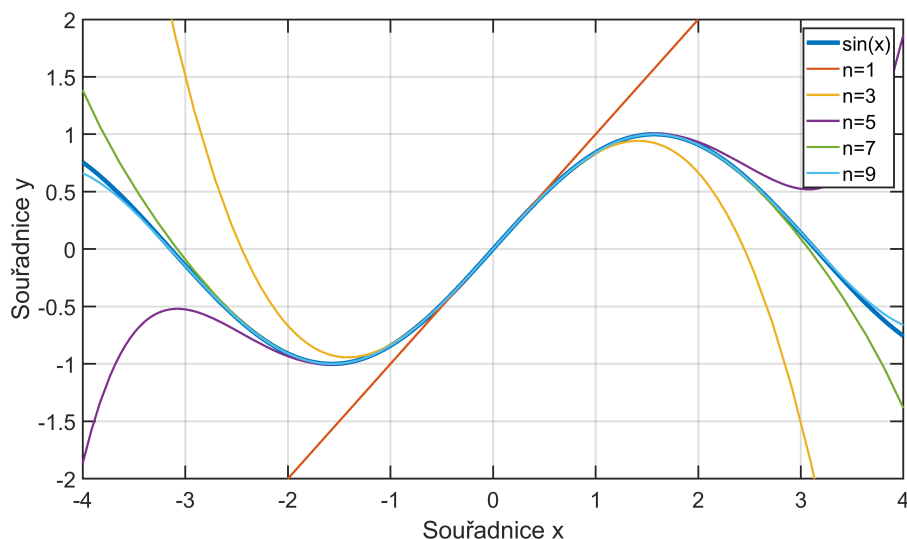
#### 4.1.1 Taylorův rozvoj a diferencní formule

Taylorův rozvoj představuje nahrazení obecné funkce  $f(x)$  na okolí konkrétního bodu  $x_0$  mocninou polynomiální řadou. Obecný předpis pro tento rozvoj je dán vztahem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (4.1)$$

kde závorkované horní indexy určují řád derivace (indexy bez závorky pak mocninu výrazu).

V případě, že počet členů rozvoje je konečný, přechází mocnná řada na konečný součet posloupnosti, tzv. Taylorův polynom. Ten aproximuje zadanou funkci  $f(x)$  na okolí bodu  $x_0$ . Z výše uvedeného vztahu vyplývá, že stupeň polynomu  $n$  udává nejvyšší mocninu figurující v předpisu, počet členů rozvoje je pak roven  $n + 1$ . Z obr. 4.1 je dále zřejmé, že vyšší stupeň polynomu přináší vyšší míru přesnosti aproximace v okolí pracovního bodu  $x_0$  [33].



Obrázek 4.1: Ukázka aproximace funkce  $\sin(x)$  na okolí bodu  $x_0 = 0$  Taylorovým polynomem řádu  $n$ .

Pro sestavení základních diferenčních schémat si nejdříve vyjádříme obecnou funkci  $f(x)$  na okolí bodu  $x + \Delta x$  a  $x - \Delta x$ . V rámci rozvoje vypisujeme pouze členy Taylorova polynomu do řádu  $n$ , zbylé členy představují zbytek Taylorova polynomu  $O(\Delta x^{n+1})$  řádu  $n + 1$ , který má pro dostatečně malé okolí, případně pro dostatečně vysoké  $n$  jen malý vliv na podobu výsledné funkce. Taylorův rozvoj pro  $f(x + \Delta x)$  má následující tvar

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Delta x^3 + O(\Delta x^4), \quad (4.2)$$

pro Taylorův rozvoj  $f(x - \Delta x)$  pak platí vztah

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Delta x^3 + O(\Delta x^4). \quad (4.3)$$

Z těchto rovnic již nyní lze vyjádřit základní diferenční formule potřebné pro implementaci MKD [33]. Pouhým přehozením jednotlivých členů rovnice (4.2) a vydělením  $\Delta x$  lze získat pro aproximaci parciální derivace dopředné diferenční schéma prvního řádu přesnosti v podobě

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (4.4)$$

Analogicky lze z rovnice (4.3) získat pro aproximaci parciální derivace zpětnou diferenční formuli prvního řádu přesnosti, jež má tvar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (4.5)$$

Z rozdílu rovnic (4.2) a (4.3) dostaneme pro aproximaci parciální derivace centrální diferenční schéma druhého řádu přesnosti

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (4.6)$$

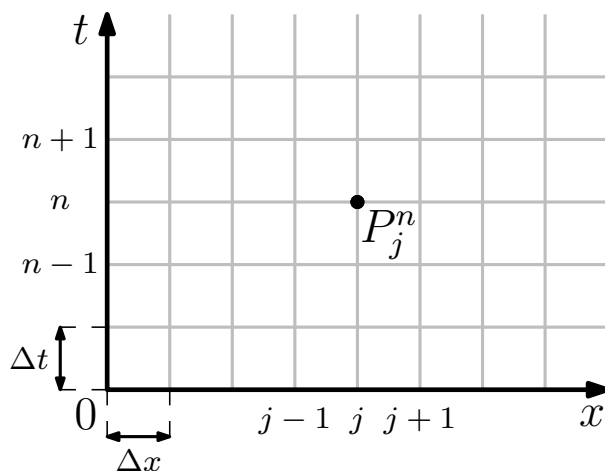
Ze srovnání jednotlivých diferenčních schémat je patrné, že hodnota rezidua  $O$  z Taylorova rozvoje, které se v rámci numerických výpočtů zanedbává, je v případě centrálního diferenčního schématu úměrná  $\Delta x^2$ , zatímco pro případ dopředné a zpětné diferenční formule pouze  $\Delta x$  [33].

#### 4.1.2 Základní vlastnosti MKD

V případě využití numerických metod vyvstává přirozený požadavek na konvergenci přibližného řešení k řešení přesnému. Tento požadavek však není splněn automaticky.

Uvažujme okrajově-počáteční úlohu popsanou lineární hyperbolickou parciální diferenciální rovnicí v 1D s hledanou veličinou  $u(x, t)$ . Tu následně diskretizujme v čase i prostoru (viz obr. 4.2), přičemž  $u_j^n$  je hodnota funkce  $u(x_j, t^n)$  v daném uzlovém bodě  $P_j^n = [x_j \ t^n]$ , kde spodní index udává prostorovou souřadnici a horní index odpovídá příslušné časové hladině<sup>1</sup>. V takovém případě lze využít Laxovu větu, jež říká, že zvolená numerická metoda je konvergentní právě tehdy, když je stabilní a konzistentní s uvažovanou lineární hyperbolickou parciální diferenciální rovnicí. Konkrétní implementace této metody je viditelná v odst. 5.1.4 a 5.3.3 [33].

<sup>1</sup>Časoprostorovou síť definovanou obr. 4.2 lze popsat jako  $\varphi_s = \{[x_j \ t^n] : x_j = j\Delta x, j \in \mathbb{Z}, t^n = n\Delta t, n \in \mathbb{N}_0\}$ .



Obrázek 4.2: Zavedená časoprostorová síť diskretizující výpočtovou oblast parciální diferenciální rovnice.

## 4.2 Metoda konečných objemů

Metoda konečných objemů (anglicky FVM - *Finite Volume Method*) je oproti MKD mladší a pokročilejší numerickou metodou vhodnou pro numerické řešení nelineárních hyperbolických PDR, přičemž principem této metody je aproximace integrálních identit získaných při formulaci základních fyzikálních zákonů zachování v integrálním tvaru.

V daném případě se výpočtová oblast diskretizuje na konečný počet disjunktních kontrolních podoblastí  $\Omega_j$  (ve 3D objemů), pro něž platí

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \begin{cases} \emptyset \\ \partial\Omega_{ij} \end{cases} \quad \wedge \quad \cup_{j=1}^n \Omega_j = \Omega, \quad (4.7)$$

kde  $\Omega_{ij}$  představuje společnou část hranice  $i$ -té a  $j$ -té podoblasti a  $n$  je celkový počet těchto podoblastí. V této práci uvažujeme metodu konečných objemů typu „*cell-centred*“, kdy neznámé vyčíslujeme ve středech kontrolních podoblastí (objemů). V takovém případě postupujeme v rámci odvození dle následujících kroků:

1. Integrace výchozí parciální diferenciální rovnice popisující řešený problém přes kontrolní objem  $\Omega_j$ .
2. Aplikace Gaussovy-Ostrogradského věty na členy obsahující derivace prostorových proměnných, která ve 3D převádí objemové integrály na plošné

a pro skalární veličinu  $f$  má obecný tvar

$$\int_V \nabla f \, dV = \oint_{\partial V} f \mathbf{n} \, dS, \quad (4.8)$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor vnější normály k ploše  $dS$ , jež tvoří hranici kontrolního objemu  $\partial V$ .

3. Zavedení integrálního průměru  $\langle U \rangle_j$  (viz věta o střední hodnotě integrálního počtu) hledané veličiny  $u(\mathbf{x}, t)$  na kontrolní podoblasti  $\Omega_j$  ve tvaru

$$\langle U \rangle_j = \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} u(\mathbf{x}, t) \, d\Omega, \quad (4.9)$$

kde  $|\Omega_j|$  je velikost kontrolního objemu  $\Omega_j$ .

4. Aproximace časové derivace pomocí libovolné metody určené k řešení obyčejných diferenciálních rovnic (Rungeova-Kuttova metoda, metoda konečných diferencí, ...).
5. Aproximace tokové funkce  $f(u(\mathbf{x}, t))$  na hranici podoblasti  $\partial\Omega_j$ . S ohledem na fakt, že přesné řešení v místě hranice neznáme, vyjadřujeme tok  $f$  pomocí tzv. numerického toku  $\Phi$  vypočteného jako funkce hodnot integrálních průměrů  $\langle U \rangle_j^n$  na příslušné časové hladině  $n$ . Platí tedy

$$f(u(\mathbf{x}, t^n)) \approx \Phi(\langle U \rangle_i^n, \langle U \rangle_j^n), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{ij}.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že na rozdíl od MKD, kde je výsledkem diskrétní hodnota v uzlových bodech  $U_j^n$  časoprostorové sítě, metodou konečných objemů získáváme po částech konstantní funkci  $\langle U \rangle_j^n$ . Dalším důležitým rozdílem je skutečnost, že formulace schématu pomocí MKO připouští nespojitosti v řešení, zatímco MKD předpokládá jeho dostatečnou hladkost. Konkrétní implementace této metody je viditelná v odst. 5.3.3 [34].

### 4.3 Metoda konečných prvků

Poslední z použitých numerických metod je metoda konečných prvků (anglicky FEM - *Finite Element Method*). Stejně jako v případě MKO i tato metoda pracuje s výpočtovou oblastí rozdělenou na konečný počet disjunktních elementů (konečných prvků), nad kterými se hledané řešení aproximuje. Tato aproximace

má podobu lineární kombinace báзовých funkcí, které se nejčastěji volí ve tvaru úplných polynomů prostorových proměnných, přičemž platí, že se zvyšujícím se stupněm polynomu a jemností diskretizačního kroku se řešení zpřesňuje<sup>2</sup>. Hodnoty koeficientů lineární kombinace se pak získávají za pomoci interpolačních podmínek, kdy hledané funkce musí nabývat hodnot v předepsaných uzlových bodech na konečném prvku.

Aproximované řešení se neaplikuje přímo na výchozí rovnice zadané úlohy, ty je tedy nutné nejprve upravit. K tomu je možné využít buďto variační metodu, jež hledá stacionární bod jistého funkcionálu (obvykle vyjadřujícího potenciální energii systému) či formulovat slabé řešení ve smyslu metody vážených reziduí. Přeformulování původní úlohy probíhá ve třech krocích:

1. Převedení všech členů řídicí soustavy rovnic na jednu stranu, přenásobení váhovými funkcemi  $\hat{v}_i$  a integrace přes kontrolní oblast  $\Omega$ .
2. Aplikace 1. Greenovy formule na členy obsahující derivace vyšších řádů, jež má pro obecné skalární funkce  $f$  a  $g$  následující tvar

$$\int_V f \Delta g \, dV = \int_{\partial V} f \nabla g \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_V \nabla f \nabla g \, dV, \quad (4.10)$$

kde  $\Delta$  je Laplaceův operátor.

3. Zahrnutí okrajových podmínek do řešení soustavy rovnic.

Po přeformulování úlohy na slabé řešení se za integrační oblast volí oblast konečného prvku  $\Omega_e$  a na váhové funkce je nahlíženo např. jako na variace hledaných veličin (ve smyslu principu virtuálních prací). Následně se do řešení dosadí aproximační funkce a vyhodnotí se integrály nad konečnými prvky<sup>3</sup>. Nakonec je třeba lokální hodnoty vedené nad každým prvkem sečíst (ve smyslu MKP) a vyřešit soustavu algebraických rovnic pro neznámé veličiny v uzlových bodech. Konkrétní implementace této metody je viditelná v odst. 5.3.3 [35].

<sup>2</sup>Toto tvrzení neplatí absolutně. Pro přílišnou jemnost prostorového kroku začne převládat vliv numerických chyb a aproximované řešení od přesného začne opět divergovat.

<sup>3</sup>S ohledem na jednoduchost řešené úlohy není třeba řešit otázku zavádění přirozených souřadnic ani numerické integrace nad konečným prvkem.



## 5 Výpočtový model

Ve chvíli, kdy je znám matematický model uvažovaného problému (viz kap. 3), je možné přistoupit k jeho řešení. S ohledem na charakter úloh, kdy nelze nalézt jejich analytické řešení v uzavřeném tvaru, je třeba ho hledat numericky (viz kap. 4). Tato kapitola nabízí chronologický postup práce, jenž vede k nalezení numerického řešení pro obě analyzované úlohy.

### 5.1 Úloha proudění chladiva v palivovém souboru

Hlavní úlohou, řešenou v rámci diplomové práce, je úloha proudění chladiva v palivovém souboru. Systém rovnic (3.39) popisujících tuto úlohu je nelineární a budeme jej řešit numericky. Pro případ této úlohy byla zvolena metoda konečných diferencí (viz odst. 4.1). Celý postup včetně programové implementace je pak popsán níže.

#### 5.1.1 Vlastnosti vody při konstantním tlaku

Úloha proudění chladiva je popsána soustavou čtyř PDR (3.39), jejichž řešením získáváme průběh čtyř fyzikálních veličin v rámci zkoumané geometrie. Konkrétně se jedná o hmotnostní tok v axiálním směru  $M$ , měrnou entalpii  $h$ , tlak  $p$  a hmotnostní tok v příčném směru vztážený na jednotku délky  $w$ . Množina potřebných vstupních veličin je však větší a je potřeba je odvodit jiným způsobem. Některé z nich lze získat ze známých vlastností chladiva pro předepsaný tlak.

Jak již bylo zmíněno dříve (viz odst. 2.1), reaktor VVER 1000 je představitelem tlakovodního typu reaktoru a jeho chladivem je roztok vody s  $\text{H}_3\text{BO}_3$  udržovaný pod vysokým konstantním tlakem (v daném případě 15,7 MPa). Dané vlastnosti vody jsou vyjádřeny jako přímé funkce měrné entalpie  $h$ , která představuje jednu z výstupních veličin výchozí soustavy rovnic (3.39). Vyjadřovanými veličinami jsou konkrétně teplota  $T(h)$ , měrná hmotnost  $\rho(h)$ , dynamická viskozita  $\eta(h)$ , měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku  $c_p(h)$  a tepelná vodivost  $\lambda(h)$ . Pro zvýšení přesnosti výstupů jsou tabulkové hodnoty prokládány metodou nejmenších čtverců a vyčísleny v násobně větším počtu bodů.

Všechny hodnoty jsou udávány za předpokladu konstantního tlaku, jenž je rovný 15,7 MPa. Hodnota tlaku v rámci geometrie palivového souboru konstantní není, avšak odchylky vůči referenčnímu tlaku jsou zanedbatelné a na hodnoty závislých veličin nemají velký vliv. S ohledem na výpočtový model předpokládající pouze jednofázové proudění se vyjadřují hodnoty odpovídající jen kapalné fázi

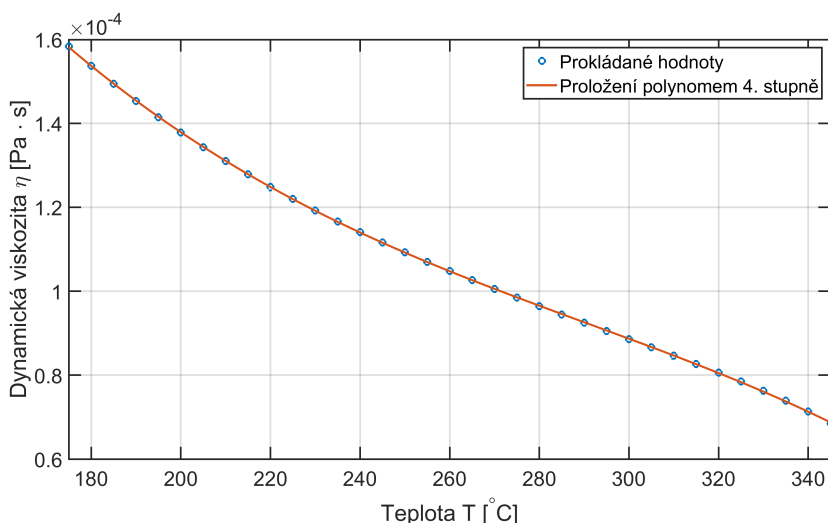
vody, rozsahem odpovídající teplotě mezi 175 °C a 345 °C. Tabelizované hodnoty jsou viditelné v tab. 5.1, příklad interpolace jedné z veličin, konkrétně dynamické viskozity  $\eta$ , metodou nejmenších čtverců je pak znázorněn na obr. 5.1.

$T$ [°C]	$h$ [kJ · kg <sup>-1</sup> ]	$\rho$ [kg · m <sup>-3</sup> ]	$\eta$ [ $\mu\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ]	$c_p$ [kJ · kg <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup> ]	$\lambda$ [W · m <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup> ]
175	749,2	901,6	1,583	4,329	0,686
185	792,6	891,3	1,494	4,361	0,683
195	826,4	880,5	1,415	4,398	0,678
205	880,6	869,3	1,343	4,440	0,673
215	925,2	857,6	1,279	4,489	0,666
225	970,4	845,3	1,220	4,544	0,659
235	1016	832,4	1,166	4,609	0,650
245	1063	818,8	1,116	4,683	0,641
255	1110	804,5	1,070	4,771	0,630
265	1158	789,3	1,026	4,874	0,618
275	1207	773,1	0,985	4,998	0,604
285	1258	755,7	0,945	5,149	0,589
295	1310	736,9	0,905	5,338	0,572
305	1365	716,3	0,866	5,582	0,553
315	1422	693,4	0,827	5,913	0,533
325	1484	667,1	0,785	6,395	0,510
335	1551	635,8	0,739	7,182	0,486
345	1630	594,8	0,684	8,907	0,459

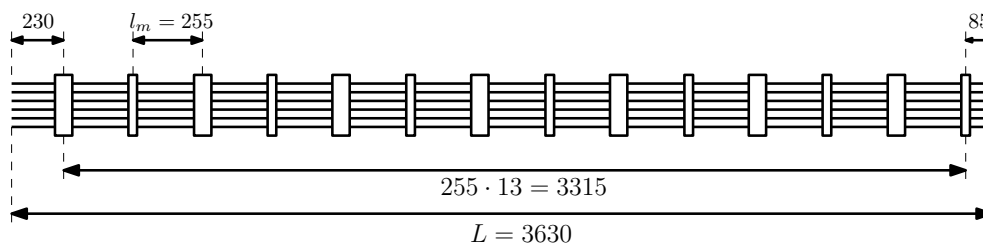
Tabulka 5.1: Vlastnosti vody za předpokladu konstantní hodnoty tlaku 15,7 MPa pro rozmezí teplot 175 °C – 345 °C. Převzato z [36].

### 5.1.2 Geometrie analyzované kazety

Další věcí, jež je nutná před samotnou numerickou analýzou řešené úlohy, je dodefinování všech potřebných rozměrových charakteristik zkoumané geometrie výpočtové oblasti. Ta má tvar pravidelného šestibokého hranolu o celkové délce  $L$  s pravidelně umístěnými mísíciemi a distančními mřížkami ve vzájemné vzdálenosti  $l_m$  (viz obr. 5.2). V průřezu zaujímá geometrie tvar pravidelného šestiúhelníku výšky  $v_h$  a nachází se v ní 19 palivových proutků. Dalšími ze známých rozměrů



Obrázek 5.1: Graf závislosti dynamické viskozity  $\eta$  vody na teplotě  $T$  při konstantním tlaku 15,7 MPa pro diskrétní tabelizované hodnoty a jejich interpolace metodou nejmenších čtverců.

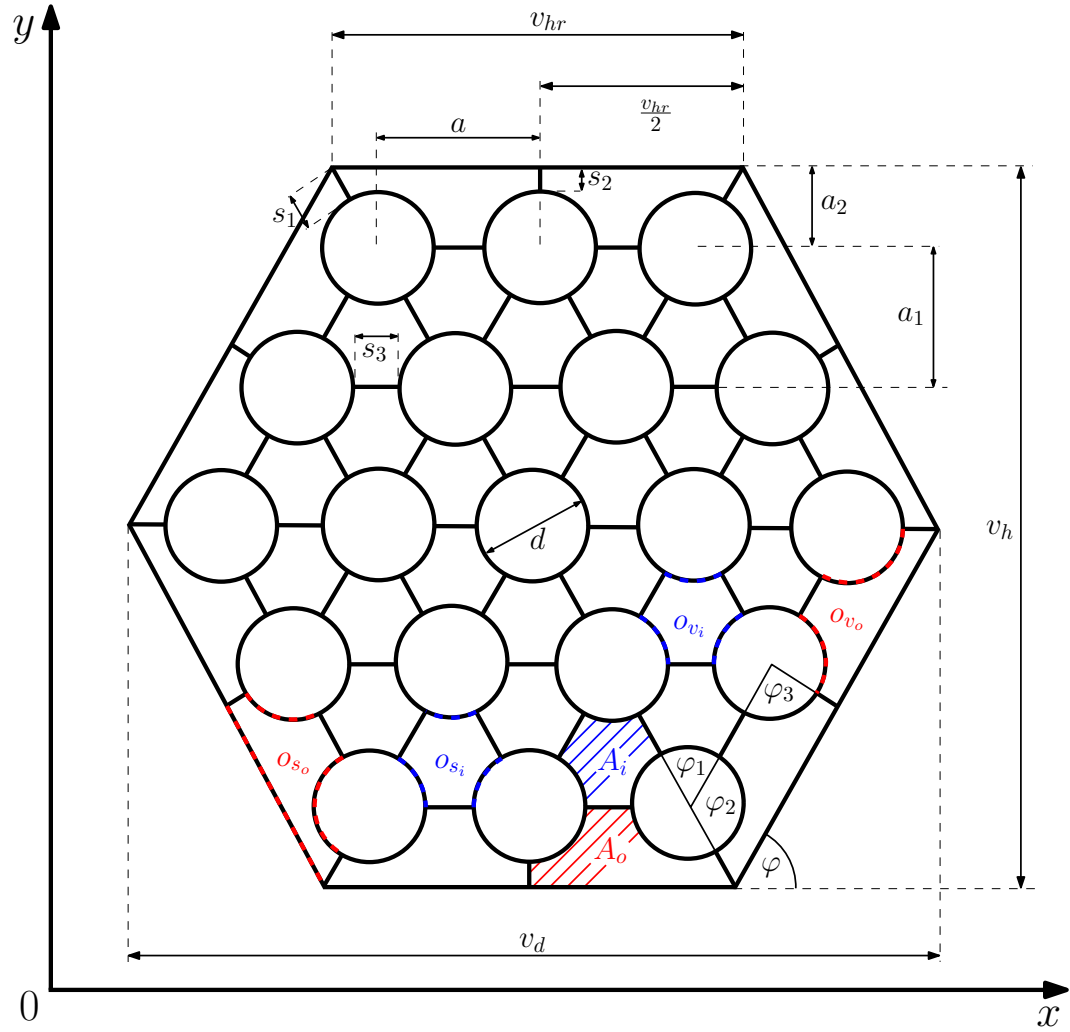


Obrázek 5.2: Profil analyzovaného palivového souboru s vyznačenými mísíci a distančními mřížkami. Číselné hodnoty rozměrů jsou udávány v mm.

jsou vzdálenost mezi středy dvou sousedních palivových proutků  $a$  a jejich průměr  $d$ .

Ze zadaných základních rozměrů je již možné dopočítat jednotlivé rozměrové veličiny potřebné k řešení vstupní soustavy rovnic (3.39). Obecně je třeba získat hodnoty globálních rozměrů průřezu palivového souboru  $v_i$ , délky subkanálových rozhraní  $s_i$ , velikosti plošných průřezů subkanálů  $A_i$ , hodnoty vytápěných a smáčivých obvodů ( $o_{v_i}$ , resp.  $o_{s_i}$ ) a vzdálenosti těžišť jednotlivých subkanálů  $l_i$ .

Odvození jednotlivých rozměrů je (s výjimkou vzdáleností subkanálových těžišť  $l_i$ , které je pro svůj větší rozsah uváděno v samostatném odstavci) viditelné níže. Význam počítaných veličin je znázorněn na obr. 5.3, číselné hodnoty rozměrů odpovídající pracovní geometrii palivového souboru jsou pak uvedeny v tab. 5.2.



Obrázek 5.3: Průřez geometrií testovacího palivového souboru v měřítku se znázorněnými rozměrovými veličinami a zavedeným souřadnicovým systémem.

Ze znalostí goniometrie, zadaných rozměrů a vlastností pravidelného troj- a šestiúhelníku nejprve vypočteme výšky vnitřního a vnějšího subkanálu ( $a_1$ , resp.  $a_2$ ) a délku hrany  $v_{hr}$

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \wedge \quad a_2 = \frac{v_h - 4a_1}{2} \quad \wedge \quad v_{hr} = \frac{v_h}{2 \sin \varphi}.$$

Se znalostí těchto veličin je dále možné vyjádřit délky rozhraní  $s_1$ ,  $s_2$  a  $s_3$  pro různé

kombinace vnitřního a vnějšího subkanálu

$$s_1 = \sqrt{\left(\frac{v_{hr}}{2} - a\right)^2 + a_2^2} - \frac{d}{2} \quad \wedge \quad s_2 = a_2 - \frac{d}{2} \quad \wedge \quad s_3 = a - d. \quad (5.1)$$

Nakonec je možné získat celkovou šířku kazety  $v_d$ , pro niž platí vztah

$$v_d = 4a + 2s_1 + d. \quad (5.2)$$

Kromě jednotlivých rozměrů je třeba určit též geometrické charakteristiky vytápěného a smáčeného obvodu a plochy průřezu jednotlivých subkanálů. Veličina vytápěného obvodu  $o_v$  představuje celkovou délku rozhraní mezi subkanálem a příslušnými palivovými proutky, jež se subkanálem sousedí. Smáčivý obvod  $o_s$  pak vyjadřuje délku rozhraní mezi subkanálem a pevnou stěnou, jež je představována buďto stěnou palivového proutku nebo vnější hranou palivového souboru (viz obr. 5.3). Dané veličiny jsou pro vnitřní subkanál vyjádřeny vztahy

$$o_{v_i} = \frac{1}{2}\pi d \quad \wedge \quad o_{s_i} = o_{v_i}. \quad (5.3)$$

Pro vnější subkanál pak platí

$$o_{v_o} = \frac{7}{12}\pi d \quad \wedge \quad o_{s_o} = \frac{7}{12}\pi d + \frac{v_{hr}}{2}. \quad (5.4)$$

Co se velikosti ploch průřezů vnitřních a vnějších subkanálů týče, jejich hodnoty jsou dány jako

$$A_i = \frac{a_1}{2}a - \frac{1}{8}\pi d^2 \quad \wedge \quad A_o = a_2a + \left(\frac{v_{hr}}{2} - a\right)\frac{a_2}{2} - \frac{7}{48}\pi d^2. \quad (5.5)$$

Pro úplnost ještě uvedme vztahy pro vnitřní úhly  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  a  $\varphi_3$  potřebné v rámci výpočtů dílčího výkonového příspěvku  $\tilde{q}$  palivových proutků jednotlivým subkanálům

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3} \quad \wedge \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3} \quad \wedge \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2}.$$

rozměr	vypočtená hodnota	rozměr	vypočtená hodnota
$A_i$	37,56 mm <sup>2</sup>	$o_{v_o}$	16,76 mm
$A_o$	60,62 mm <sup>2</sup>	$s_1$	3,202 mm
$a$	12,75 mm	$s_2$	2,161 mm
$a_1$	11,04 mm	$s_3$	3,606 mm
$a_2$	6,733 mm	$v_d$	66,55 mm
$d$	9,144 mm	$v_h$	57,63 mm
$L$	3630 mm	$v_{hr}$	33,27 mm
$l_m$	255 mm	$\varphi$	$\frac{\pi}{3}$ rad
$o_{s_i}$	14,36 mm	$\varphi_1$	$\frac{\pi}{3}$ rad
$o_{s_o}$	33,39 mm	$\varphi_2$	$\frac{2}{3}\pi$ rad
$o_{v_i}$	14,36 mm	$\varphi_3$	$\frac{\pi}{2}$ rad

Tabulka 5.2: Hodnoty geometrických charakteristik analyzovaného palivového souboru v abecedním pořadí pro zadané rozměry  $a$ ,  $d$ ,  $v_h$ ,  $l_m$  a  $L$ .

### 5.1.2.1 Stanovení těžišť subkanálů a jejich vzdáleností

V rámci zákona zachování hybnosti v příčném (radiálním) směru byl zaváděn nový kontrolní objem, přičemž jeden z jeho charakteristických rozměrů je aproximován vzdáleností těžišť sousedních subkanálů  $l_i$  (viz obr. 5.5).

Jednoduchý kombinatorický výpočet nám dává pro dva odlišné typy subkanálů (vnitřní a vnější) celkem tři možné kombinace. První z nich je volba dvou vnitřních subkanálů. Pro rovnostranný trojúhelník platí, že vzdálenost těžiště od jakéhokoliv vrcholu je rovna  $a\frac{\sqrt{3}}{3}$  [29]. Palivové proutky v tomto případě zasahují do geometrie subkanálu rovnoměrně a na polohu těžiště nemají vliv. Výsledný vztah pro výpočet vzdálenosti mezi těžišti dvou vnitřních subkanálů má tedy tvar

$$l_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}a. \quad (5.6)$$

Co se výpočtů se zastoupením vnějších subkanálů týče, zde je nutné nejdříve zjistit polohu jeho těžiště. To lze obecně vypočítat jako podíl statického momentu tělesa vůči jeho celkové hmotnosti  $m$ . Díky aditivitě operace integrace lze výpočet provádět postupně přes jednotlivá subtělesa (přičemž odečítaná tělesa mají u příslušného integrálu záporné znaménko) [37]. Za předpokladu konstantní

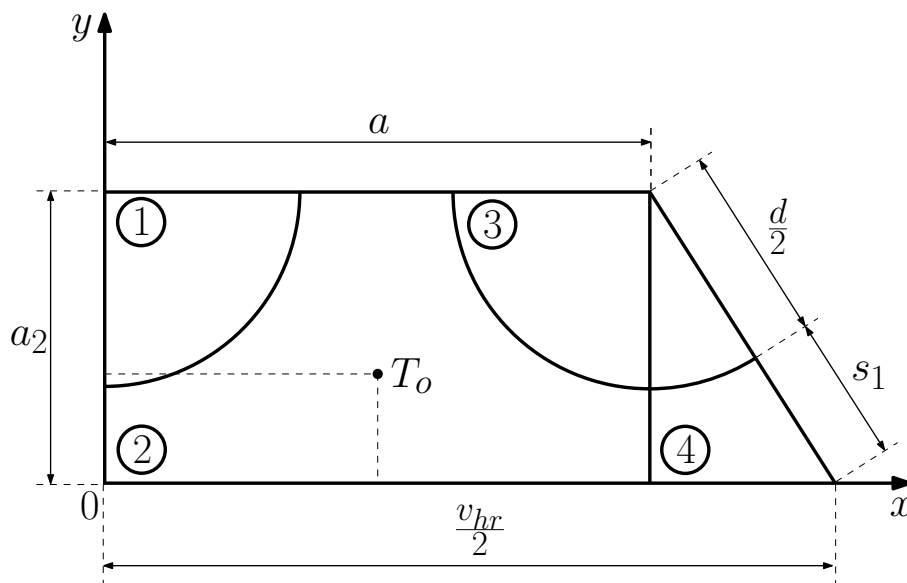
měrné hmotnosti  $\rho = konst.$  a výšky v axiálním směru  $\Delta y = konst.$  platí

$$\mathbf{x}_T = \frac{\int_m \mathbf{x} dm}{m} = \frac{\int_V \mathbf{x} dV}{V} = \frac{\int_A \mathbf{x} dS}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{A_i} \mathbf{x}_i dS}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (5.7)$$

kde  $n$  je počet subtěles kontrolního objemu.

Pro výpočet těžiště vnějšího subkanálu zavedeme pomocný souřadnicový systém daný obr. 5.4 a jeho polohu vypočteme dle vztahu

$$\mathbf{x}_{T_o} = \frac{I_{2x} + I_{4x} - I_{1x} - I_{3x}}{A_o}, \quad I_{ix} = \int_{A_i} \mathbf{x}_i dS. \quad (5.8)$$



Obrázek 5.4: Geometrie vnějšího subkanálu v měřítku s vyznačenými subtělesy, rozměry a s nově zavedeným lokálním souřadnicovým systémem.

Pro potřeby analytických výpočtů integrálů nad geometrií palivového proutku nejdříve zavedeme transformaci do polárních souřadnic

$$x = r \cos \varphi + x_S \quad \wedge \quad y = r \sin \varphi + y_S \quad \wedge \quad J_\Phi = r, \quad (5.9)$$

kde  $\varphi$  je úhel natočení,  $r$  udává poloměr,  $x_S$  a  $y_S$  určují souřadnice středu příslušného subtělesa a  $J_\Phi$  je Jacobián transformace [29].

Nyní je již možné vyjádřit potřebné integrály. Pro  $x$ -ovou souřadnici tedy platí

$$\begin{aligned}
 I_{1x} &= \int_{A_1} x \, dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{\frac{d}{2}} r^2 \cos \varphi \, dr d\varphi = \frac{d^3}{24}, \\
 I_{2x} &= \int_{A_2} x \, dS = \int_0^{a_2} \int_0^a x \, dx dy = \frac{a_2 a^2}{2}, \\
 I_{3x} &= \int_{A_3} x \, dS = \int_{\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} (r^2 \cos \varphi + ra) \, dr d\varphi = \frac{ad^2\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}d^3}{48}, \\
 I_{4x} &= \int_{A_4} x \, dS = \int_a^{\frac{v_{hr}}{2}} \int_0^{-k_1x+k_2} x \, dy dx = \frac{a_2}{v_{hr} - 2a} \left( \frac{v_{hr}^3}{24} + \frac{2a^3}{3} - \frac{v_{hr}a^2}{2} \right),
 \end{aligned}$$

kde přímka definující horní mez proměnné  $y$  integrálu  $I_{4x}$  má tvar

$$y(x) = -k_1x + k_2, \quad k_1 = \frac{2a_2}{v_{hr} - 2a} \quad \wedge \quad k_2 = \frac{v_{hr}a_2}{v_{hr} - 2a}. \quad (5.10)$$

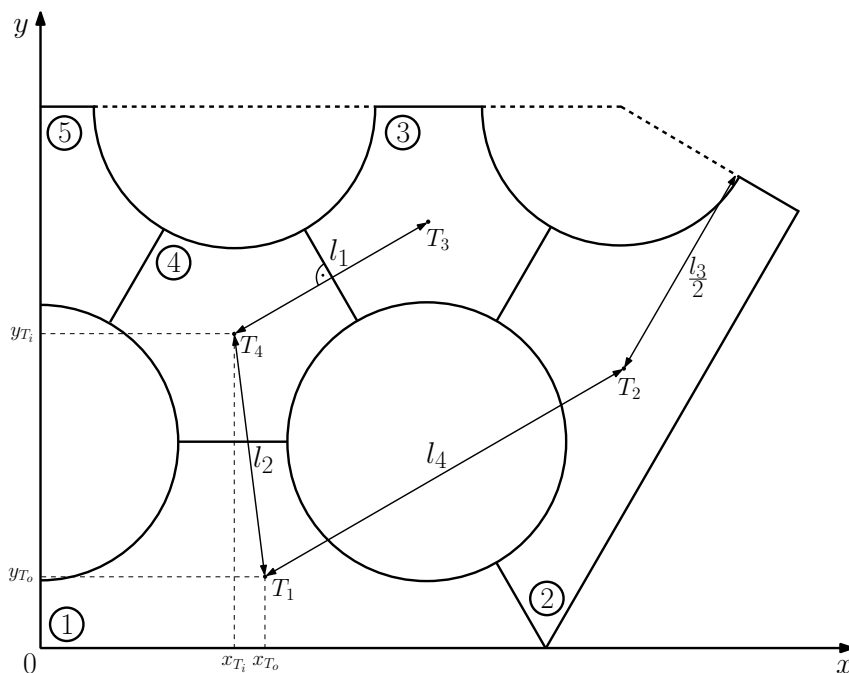
Analogicky provedeme též výpočty integrálů ve směru souřadnicové osy  $y$

$$\begin{aligned}
 I_{1y} &= \int_{A_1} y \, dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{\frac{d}{2}} (a_2r + r^2 \sin \varphi) \, dr d\varphi = \frac{a_2d^2\pi}{16} - \frac{d^3}{24}, \\
 I_{2y} &= \int_{A_2} y \, dS = \int_0^{v_b} \int_0^a y \, dx dy = \frac{aa_2^2}{2}, \\
 I_{3y} &= \int_{A_3} y \, dS = \int_{\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} (r^2 \sin \varphi + ra_2) \, dr d\varphi = \frac{a_2d^2\pi}{12} - \frac{d^3}{16}, \\
 I_{4y} &= \int_a^{\frac{b}{2}} \int_0^{-k_1x+k_2} y \, dy dx = \left( \frac{a_2}{v_{hr} - 2a} \right)^2 \left( \frac{v_{hr}^3}{12} - \frac{2a^3}{3} + v_{hr}a^2 - \frac{av_{hr}^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Po dosazení integrálů  $I_{ix}$  do rovnice (5.8) získáme explicitní závislost souřadnic středu vnějšího subkanálu  $\mathbf{x}_{T_o}$  na zadaných parametrech (pro složitost zápisu bude tento vztah v textu vynechán). Abychom zjistili hodnoty vzdáleností těžišť pro zbylé kombinace vnějšího a vnitřního subkanálu, rozšíříme původní vykreslenou oblast obr. 5.4 o další prvky geometrie v totožném lokálním souřadnicovém systému (viz obr. 5.5).

Nyní je již možné vyjádřit výpočetní vztahy pro zbylé rozměry  $l_i$ . Vzdálenost těžišť pro kombinaci vnější-vnitřní subkanál získáme jako rozdíl jejich polohy. Pro polohu těžiště  $T_i$  vnitřního subkanálu v lokálních souřadnicích daných obr.





Obrázek 5.5: Výsek průřezu analyzované geometrie výpočtové oblasti v měřítku s vyznačenými subkanály, těžišti  $T_i$  a jejich vzdálenostmi  $l_i$  v zavedeném lokálním souřadnicovém systému.

5.5 platí

$$x_{T_i} = \frac{a}{2} \quad \wedge \quad y_{T_i} = a_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}a,$$

výpočet rozměru  $l_2$  tedy můžeme psát jako

$$l_2 = \sqrt{(x_{T_i} - x_{T_o})^2 + (y_{T_i} - y_{T_o})^2}. \quad (5.11)$$

Poslední zbylou kombinací prvků je dvojice vnější-vnější subkanál. Zde se hodnota vzdálenosti těžišť  $l$  liší pro případy dvojice vnějších subkanálů přináležejících a nepřináležejících jedné hraně palivového souboru. Pro dvojici splňující tuto podmínku je vzdálenost těžišť  $l_3$  daná vztahem

$$l_3 = 2x_{T_o}. \quad (5.12)$$

Co se posledního případu týče, vypočteme velikost rozměru  $l_4$  jako dvojnásobek vzdálenosti polohy těžiště vnějšího subkanálu od přímky definující rozhraní

mezi těmito subkanály (viz obr. 5.5). Pro případ vzdálenosti obecného bodu  $A$  od přímky  $p$  platí

$$v(A, p) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (5.13)$$

kde konstanty  $a$ ,  $b$  a  $c$  definují obecný předpis přímky a jmenovatel výrazu odpovídá velikosti normálového vektoru této přímky [29]. Poslední ze zbývajících rozměrů  $l_i$  tedy získáme jako

$$l_4 = 2 \frac{|k_1 x_{T_o} + y_{T_o} - k_2|}{\sqrt{k_1^2 + 1}}, \quad (5.14)$$

kde koeficienty  $k_1$  a  $k_2$  odpovídají předpisu přímky (5.10). Souřadnice těžišť vnějšího a vnitřního subkanálu a hodnoty jejich vzdáleností  $l_i$  pro konkrétní hodnoty zadaných parametrů jsou viditelné v tab. 5.3.

rozměr	vypočtená hodnota	rozměr	vypočtená hodnota
$l_1$	7,361 mm	$x_{T_i}$	6,375 mm
$l_2$	8,147 mm	$x_{T_o}$	7,381 mm
$l_3$	14,76 mm	$y_{T_i}$	10,40 mm
$l_4$	13,70 mm	$y_{T_o}$	2,313 mm

Tabulka 5.3: Hodnoty souřadnic těžišť vnitřního a vnějšího subkanálu v lokálních souřadnicích a jejich vzájemné vzdálenosti  $l_i$  v abecedním pořadí pro analyzovanou geometrii výpočtové oblasti palivového souboru.

### 5.1.3 Zákony zachování ve stacionárním tvaru

Ve chvíli, kdy jsou dokončeny přípravné výpočty, je možné řešit samotnou výchozí soustavu parciálních diferenciálních rovnic (3.39).

Předkládaná práce se zabývá pouze stacionárním řešením této soustavy. Členy obsahující veličiny času  $t$  tedy budou nulové a soustava PDR tak přejde na soustavu ODR v prostorové proměnné  $y$ . S ohledem na zjednodušení úlohy a empirické aproximace některých z fyzikálních dějů jsou jednotlivé členy dále zpřesněny či je zavedena jejich závislost na smyslu proudění. Veškeré níže uvedené změny matematického modelu jsou v souladu s literaturou [28].

Korigovanými členy jsou především součinitel třecího odporu  $\xi$ , jehož nové vyjádření má podobu

$$\xi_{kor} = \xi \left\{ 1 + \frac{o_v}{o_s} \left[ \left( \frac{\eta_s}{\eta} \right)^{0,6} - 1 \right] \right\}, \quad (5.15)$$

kde  $\eta_s$  je hodnota dynamické viskozity v místě stěny palivového proutku, kterou vyjádříme jako funkci teploty  $T_s$  v totožném místě, přičemž pro teplotu  $T_s$  platí předpis daný tzv. Newtonovým vztahem pro přestup tepla

$$T_s = T + \frac{q}{\alpha}, \quad (5.16)$$

kde  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla a  $T$  je teplota v subkanálu. Součinitel přestupu tepla  $\alpha$  pak lze vyjádřit jako funkci podobnostních čísel Nu, Re a Pr, pro něž platí

$$\alpha = \frac{\lambda \text{Nu}}{d_h}, \quad \text{Nu} = 0,023 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,4} \quad \wedge \quad \text{Pr} = \frac{c_p \eta}{\lambda} \quad \wedge \quad \text{Re} = \frac{G d_h}{\eta}, \quad (5.17)$$

kde Nu je Nusseltovo číslo, Pr je Prandtlovo číslo a Re je Reynoldsovo číslo. Druhým vztahem je korekce příčného turbulentního toku  $\tilde{w}$  od příčného toku  $w$  dle Bowringova modelu

$$\tilde{w}_{kor} = \tilde{w} \left[ 1 - \frac{|w|}{2\tilde{w}} + \left( \frac{w}{4\tilde{w}} \right)^2 \right]. \quad (5.18)$$

Navíc při splnění podmínky  $|w| > 4\tilde{w}$  platí, že hodnota turbulentního míšení je nulová ( $\tilde{w}_{kor} = 0$ ). Jak již bylo řečeno, kromě zavedených korekčních členů jsou upravovány také některé z veličin v závislosti na smyslu proudění. Tyto korekce pak shrnuje tab. 5.4.

V případě, že některé ze zavedených veličin v tabulce přináležejí více možnostem, odpovídá horní možnost předpokladu velmi slabého příčného proudění definovaného vztahem

$$|w_{ij}| \leq w_{min} = 0,01 \frac{M_i + M_j}{2\Delta y}, \quad (5.19)$$

kde  $\Delta y$  je velikost prostorového kroku v axiálním směru (diskretizované geometrie výpočtové oblasti).

smysl proudění	i-tý → j-tý subk.	i-tý ← j-tý subk.
$w_{ij}$	$> 0$	$< 0$
$h_*$	$h_i$	$h_j$
$\rho_*$	$0,5(\rho_i + \rho_j)$	
	$\rho_i$	$\rho_j$
$u_*$	$0,5(u_i + u_j)$	
	$u_i$	$u_j$
$\Delta h_{ij*} = h_i - h_*$	0	$h_i - h_j$
$\Delta u_{ij*} = 2u_i - u_*$	$2u_i - 0,5(u_i + u_j)$	
	$u_i$	$2u_i - u_j$

Tabulka 5.4: Zavedení korekčních členů závisících na smyslu proudění chladiva.

Po těchto úpravách je již možné uvést soustavu obyčejných diferenciálních rovnic řešících stacionární úlohu proudění do konečné podoby, a to včetně všech uvažovaných korekcí. Soustava vyjádřená pro  $i$ -tý subkanál má tedy tvar

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dM_i}{dy} = - \sum_{j=1}^{n_s} w_{ij}, \\
 \frac{dh_i}{dy} = \frac{1}{M_i} \left[ \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{q}_{ij} + \sum_{j=1}^{n_s} (-k_{ij} \Delta T_{ij} - \tilde{w}_{kor,ij} \Delta h_{ij} + w_{ij} \Delta h_{ij*}) \right], \\
 \frac{dp_i}{dy} = \frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^{n_s} (w_{ij} \Delta u_{ij*} - \varepsilon \tilde{w}_{kor,ij} \Delta u_{ij}) - \\
 - \rho_i g - \left( \frac{M_i}{A_i} \right)^2 \left[ \frac{\xi_{kor,i}}{2\rho_i d_{h_i}} + \frac{\zeta_i}{2\rho_i dy} + \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\rho_i} \right) \right], \\
 \frac{d(w_{ij} u_*)}{dy} = \frac{s_{ij}}{l_{ij}} (\Delta p_{ij} - H_{ij} w_{ij}).
 \end{array} \right. \quad (5.20)$$

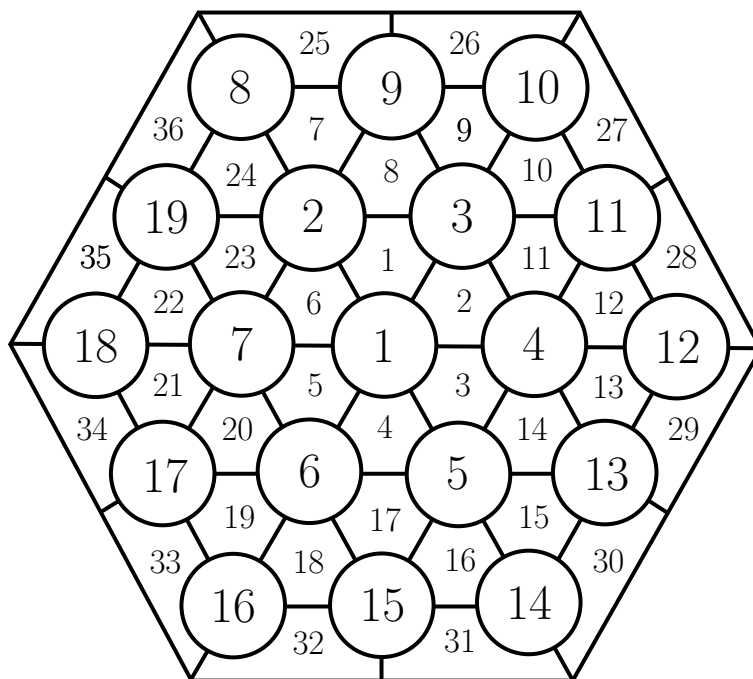
Pro úplnost uvedme ještě vztahy pro průměrované hodnoty dynamické viskozity  $\bar{\eta}$ , plošné hustoty hmotnostního toku  $\bar{G}$ , hydraulického průměru  $\bar{d}_h$  a Rey-

noldsova čísla  $\overline{Re}$  pro dvojice subkanálů  $i$  a  $j$

$$\overline{\eta} = \frac{1}{2}(\eta_i + \eta_j) \quad \wedge \quad \overline{G} = \frac{M_i + M_j}{A_i + A_j} \quad \wedge \quad \overline{d_h} = 4 \frac{A_i + A_j}{o_{s_i} + o_{s_j}} \quad \wedge \quad \overline{Re} = \frac{\overline{Gd_h}}{\overline{\eta}}.$$

#### 5.1.4 Numerický tvar řešení

Soustava (5.20) řešící stacionární úlohu proudění chladiva v palivovém souboru je systémem čtyř nelineárních ODR a je třeba jej řešit numericky. S ohledem na specificky danou diskretizaci uvažované geometrie výpočtové oblasti (konkrétní volba diskretizace a jejího číslování je viditelná na obr. 5.6) je pro řešení zvolena metoda konečných diferencí (viz odst. 4.1), konkrétně pak dopředná diferenční formule umožňující sestavení explicitního diferenčního schématu vhodného ke krokové iteraci výpočtu. Nevýhodou této numerické metody je především nižší výpočetní přesnost, jež je úměrná velikosti kroku  $\Delta y$ . Ta by však měla být kompenzována laděním fitovacích koeficientů empirických modelů přímo na reálná výstupní data.



Obrázek 5.6: Volba prostorové diskretizace úlohy na uvažované geometrii palivového souboru s uvedeným číslováním subkanálů a palivových proutků.

Dopředné diferenční schéma pro obecnou veličinu  $f$  a  $i$ -tý subkanál má následující tvar

$$\frac{df}{dy} \equiv \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta y}, \quad (5.21)$$

kde pro libovolný subkanál platí  $\Delta y = y^{k+1} - y^k$ . Spodní index výrazu (5.21) udává číslo subkanálu, horní index pak odpovídá prostorovému kroku iterace. Výstupními veličinami jednotlivých rovnic soustavy (dle pořadí rovnic ve vztahu (5.20)) jsou hmotnostní tok v axiálním směru  $M$ , měrná entalpie  $h$ , tlak  $p$  a příčný tok  $w$ . Jednotlivé veličiny jsou pak vyhodnocovány v pořadí:  $w^{k+1} \rightarrow M^{k+1} \rightarrow p^{k+1} \rightarrow h^{k+1}$ . Již vyhodnocené veličiny tak lze v rámci následujících iteračních schémat využít v  $k + 1$  iteraci (viz soustava rovnic (5.22)).

Rozepíšeme-li složenou derivaci poslední rovnice vztahu (5.20), dosadíme-li dopředné diferenční schéma (5.21) a vyjádříme-li výstupní veličiny ve výše uvedeném pořadí pro  $k + 1$  iteraci<sup>4</sup>, získáme algebraickou soustavu rovnic ve tvaru

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{ij}^{k+1} = w_{ij}^k + \frac{\Delta y}{u_*^k} \left[ \frac{s_{ij}}{l_{ij}} (\Delta p_{ij}^k - H_{ij}^k w_{ij}^k) \right] - \frac{u_*^{k+1} - u_*^k}{u_*^k} w_{ij}^k, \\ M_i^{k+1} = M_i^k - \Delta y \sum_{j=1}^{n_s} w_{ij}^{k+1}, \\ p_i^{k+1} = p_i^k + \frac{\Delta y}{A_i} \sum_{j=1}^{n_s} (w_{ij}^{k+1} \Delta u_{ij*}^k - \varepsilon \tilde{w}_{kor,ij}^k \Delta u_{ij}^k) - \\ - \Delta y \rho_i^k g - \left( \frac{M_i^{k+1}}{A_i} \right)^2 \left( \frac{\xi_{kor,i}^k \Delta y}{2 \rho_i^k d_{h_i}} + \frac{\zeta_i^{k+1}}{2 \rho_i^k} + \frac{\rho_i^k - \rho_i^{k+1}}{\rho_i^k \rho_i^{k+1}} \right), \\ h_i^{k+1} = h_i^k + \frac{\Delta y}{M_i^{k+1}} \left[ \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{q}_{ij} + \sum_{j=1}^{n_s} (-k_{ij} \Delta T_{ij}^k - \tilde{w}_{kor,ij}^k \Delta h_{ij}^k + w_{ij}^{k+1} \Delta h_{ij*}^k) \right], \end{array} \right. \quad (5.22)$$

<sup>4</sup>V případě veličin figurujících v  $k + 1$  axiální vrstvě, aniž bychom explicitně znali jejich hodnotu ( $u_*$  a  $\rho_i$ ), využíváme iteračního schématu prediktor-korektor. Provedené výpočty ukazují, že příspěvek těchto veličin je v daném případě malý a ke konvergenci dochází vždy již po dvou krocích.

kde spodní index značí závislost na umístění subkanálu, horní pak na axiální pozici, v případě dvojice spodních indexů se jedná o interakci dvou sousedních subkanálů či interakci subkanál-proutek<sup>5</sup>. Prvky neobsahující spodní ani horní index jsou konstanty nezávislé na axiální pozici i umístění (číslé) subkanálu. V rámci každého prostorového kroku jsou kromě výstupních veličin soustavy rovnic iterovány rovněž proměnné vyjádřené jakožto přímé funkce měrné entalpie  $h$  (viz odst. 5.1.1). Jedná se o veličiny  $T$ ,  $\rho$ ,  $\eta$  a  $\lambda$ . Další z iterovaných veličin figurujících v soustavě (5.22) pak již lze vyjádřit jako funkce této množiny proměnných. Explicitní tvar závislostí jednotlivých veličin odpovídá vyjádřením uváděným v odst. 3.2.1 a 5.1.3. Vyjádříme-li pouze jejich funkční závislosti, dostáváme

$$\begin{aligned} H_{ij}^k &= H_{ij}^k(w_{ij}^k, \rho_*^k) & \wedge & & u_i^k &= u_i^k(M_i^k, \rho_i^k) \\ \tilde{w}_{kor,ij}^k &= \tilde{w}_{kor,ij}^k(M_i^k, w_{ij}^k, \eta_i^k) & \wedge & \zeta_i^k &= \zeta_i^k(y^k) & \wedge & \xi_{kor,ij}^k = \xi_{kor,ij}^k(M_i^k, \eta_i^k). \end{aligned}$$

### 5.1.5 Algoritmus výpočtu

Ve chvíli, kdy je soustava diferenciálních rovnic převedena na soustavu rovnic diferenčních a jsou explicitně známy všechny výpočetní vztahy, lze přistoupit k počítačové implementaci řešeného problému. K tomu je využito programové prostředí MATLAB/Octave, které je postavené na programovacích jazycích C, C++ a Fortran a slouží k implementaci algoritmů, počítačovým simulacím, analýze a prezentaci dat postavených na maticové bázi [38].

K řešení úlohy byly vytvořeny skripty *subkanalovaAnalyza\_statika.m* a *grafickeVystupy.m*. První ze skriptů představuje programové řešení úlohy proudění chladiva v palivovém souboru. Jeho vstupem jsou základní rozměrové charakteristiky analyzované geometrie výpočtové oblasti, tabulkové hodnoty vlastností vody při předepsaném tlaku, okrajové podmínky úlohy, známé fyzikální konstanty, konstanty výpočtových modelů a parametry výpočtu. Výstupem programu jsou pole veličin ve tvaru matic s hodnotami v jednotlivých subkanálech a příslušných axiálních vrstvách. Tato výstupní pole analyzovaných veličin jsou pak vstupem druhého skriptu, který slouží primárně ke grafické vizualizaci vypočtených dat.

Celkový postup algoritmizace úlohy začíná načtením vstupních rozměrových parametrů, na který navazují výpočty geometrických charakteristik palivového souboru. Dále se načítají tabulkové hodnoty vlastností vody při odpovídajícím

<sup>5</sup>Pro uvažovanou geometrii danou obr. 5.6 platí, že počet sousedních subkanálů je ve všech případech  $n_s = 3$ , počet palivových proutků sousedících s příslušnými subkanály je pak  $n_p = 2 \vee n_p = 3$  v závislosti na tom, zda-li se jedná o vnější či vnitřní subkanál.

konstantním tlaku a prokládají se polynomem minimální odchylky ve smyslu metody nejmenších čtverců.

Dalším krokem algoritmu je deklarace matic definujících zvolenou diskretizaci na průřezu geometrie. V daném případě se jedná o matice sousedních subkanálů, palivových proutků a geometrických vlastností jednotlivých subkanálů. Samotná diskretizace testované geometrie včetně voleného číslování subkanálů a palivových proutků odpovídá obr. 5.6. Dále je třeba definovat hodnoty fyzikálních konstant a programových parametrů. Mezi ně patří především velikost prostorového kroku v axiálním směru  $\Delta y$ , hodnota váhového koeficientu  $\omega$  a zastavovací podmínky pro iterování veličin  $\hat{\varepsilon}$  (více viz níže). Přehled konstant empirických modelů a nastavení jejich hodnot platných pro všechny provedené výpočty je viditelný v tab. 5.5 a odpovídá literatuře [28].

značka konst.	význam	nast. hodnota
$\delta$	exponent Re ve výpočtu turbulentního míšení	-0,1
$\varepsilon$	součinitel přenosu hybnosti turbulencí	1
$\zeta$	součinitel místního odporu <sup>6</sup>	0,8
$\tilde{h}$	součinitel odporu příčného proudění	1000

Tabulka 5.5: Nastavení hodnot konstant empirických modelů zastoupených v úloze proudění. Převzato z [28].

Posledním vstupem, který je třeba v rámci programového skriptu načíst, je okrajová podmínka úlohy. Pro tento účel rozdělíme hranici uvažované výpočtové geometrie  $\partial\Omega$  na disjunktní podoblasti, pro něž platí

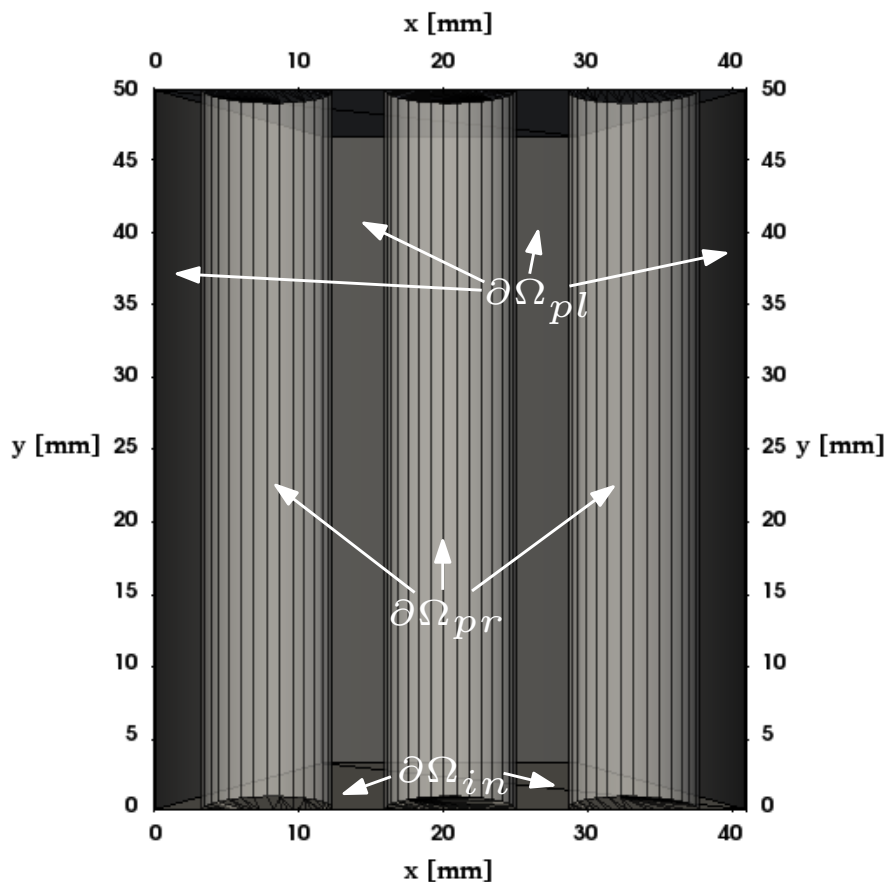
$$\partial\Omega = \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{pl} \cup \partial\Omega_{pr} \cup \partial\Omega_{out},$$

kde  $\partial\Omega_{pl}$  je vnější hranice palivového souboru,  $\partial\Omega_{pr}$  představuje rozhraní mezi subkanály a palivovými proutky,  $\partial\Omega_{in}$  a  $\partial\Omega_{out}$  jsou poté spodní vstup a horní výstup uvažované geometrie výpočtové oblasti (viz obr. 5.7), přičemž okrajová podmínka je předepsána na prvních třech částech této hranice a je určována pro hmotnostní tok  $M$ , teplotu chladiva  $T$ , tlak  $p$  a příčný tok  $w$ .

Co se okrajové podmínky na vstupu  $\partial\Omega_{in}$  týče, uvažujeme pro případ všech předepisovaných veličin Dirichletovu okrajovou podmínku. Na této hranici předpokládáme konstantní rozložení všech vstupních veličin, v případě tlaku  $p_{in}$  a

<sup>6</sup>Hodnota platí jen pro axiální souřadnice, v nichž se nachází mísící mřížka, v místě distanční mřížky je hodnota čtvrtinová, v axiální vrstvě bez mřížky pak nulová.





Obrázek 5.7: Průřez geometrií palivového souboru v měřítku s vyznačenými hranicemi, na nichž je předepsána okrajová podmínka.

příčného toku  $w_{in}$  je pak okrajová podmínka homogenní<sup>7</sup>. Vstupní hodnotu měrné entalpie  $h_{in}$  pak vyjádříme jako přímou funkci zadané vstupní teploty  $T_{in}$ .

Druhou podoblastí je vnější hranice palivového souboru  $\partial\Omega_{pl}$ . Palivový soubor vnímáme jako izolovanou soustavu, skrze vnější hranici tedy nedochází k výměně hmoty ani energie a pro všechny vstupní veličiny je tedy předepsána homogenní Neumannova podmínka.

Poslední uvažovanou částí hranice s předepsanou okrajovou podmínkou je rozhraní mezi subkanálem a palivovými proutky  $\partial\Omega_{pr}$ . S ohledem na fakt, že

<sup>7</sup>U tlaku se jedná pouze o referenční hodnotu, k níž vztahujeme výpočty, v případě příčného toku předpokládáme skutečnou nulovou hodnotu této veličiny.

veškerá interakce mezi palivovými proutky a subkanály je zahrnuta v objemových zdrojích řídicí soustavy rovnic (5.22)<sup>8</sup>, předepisujeme i na této hranici pro všechny vstupní veličiny homogenní Neumannovu podmínku. Všechny uvažované okrajové podmínky pak můžeme souhrnně zapsat následujícím způsobem

$$\left\{ \begin{array}{l} M(\mathbf{x}) = M_{in}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{in} \quad \wedge \quad \frac{\partial M(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{pl} \cup \partial\Omega_{pr}, \\ T(\mathbf{x}) = T_{in}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{in} \quad \wedge \quad \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{pl} \cup \partial\Omega_{pr}, \\ p(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{in} \quad \wedge \quad \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{pl} \cup \partial\Omega_{pr}, \\ w(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{in} \quad \wedge \quad \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{pl} \cup \partial\Omega_{pr}, \end{array} \right. \quad (5.23)$$

kde  $\mathbf{x}$  vyjadřuje vektor souřadnic.

Co se objemových zdrojů týče, v případě tepelného výkonu  $Q$  uvažujeme předepsanou distribuci výkonu mezi palivové proutky uvažované geometrie. Rozložení výkonu v rámci jednoho palivového proutku poté předpokládáme konstantní jak po jeho délce, tak v rámci jeho průřezu. Zbylé objemové zdroje mají konstantní hodnotu nezávisle na prostorové souřadnici výpočtu a jsou dány tab. 5.5.

### 5.1.5.1 Iterační výpočet

Ve chvíli, kdy jsou načteny veškeré programové vstupy, je definována diskretizace geometrie výpočtové oblasti a deklarovány modelové parametry, je možné přistoupit k samotnému iteračnímu výpočtu. Nejprve jsou deklarovány pomocné matice výstupních veličin ( $M$ ,  $w$ ,  $h$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $\rho$  a  $T$ ) příslušející dané axiální vrstvě.

Následně jsou, v závislosti na smyslu a charakteru příčného proudění, vyhodnoceny členy indexované hvězdičkou (viz tab. 5.4). Dalším krokem v rámci iterace je vyhodnocení příčného toku  $w_{ij}^{k+1}$  a na něm závislých veličin, po kterém následuje vyhodnocení rovnic zákonů zachování (5.22). Nakonec je provedena korekce pro členy závislé na  $k+1$  axiální vrstvě (jedná se o člen  $u_*$  figurující v rovnici příčného proudění a člen  $\rho_i$  v bilančním vztahu pro tlak) a jsou dopočteny veličiny vycházející z tabulkových hodnot vlastností vody.

V praxi se ukazuje, že tlak  $p$  je v rámci jedné axiální vrstvy pro výpočtový svazek přibližně konstantní. V rámci numerického výpočtu se pak zvyšující se tlakový

<sup>8</sup>Interakce mezi subkanály a sousedními palivovými proutky je představována veličinami tepelného výkonu  $Q$ , součinitele třecího odporu  $\xi$  a součinitele odporu příčného proudění  $\tilde{h}$ .

rozdíl (v rámci jedné axiální vrstvy) projevuje rostoucími oscilacemi příčných toků  $w$ , jež mohou vést až k divergenci celkového řešení. Tento nežádoucí jev je potlačen zavedením iteračního procesu příčného toku  $w$  nad každou axiální vrstvou pomocí Gaussovy-Seidelovy relaxační metody [28].

Iterovány jsou všechny výstupní veličiny rovnic (5.22), a to pomocí členů, které jsou funkcí příčného toku  $w$  a korekčních členů závisejících na  $k + 1$  axiální vrstvě. S ohledem na fakt, že iterační proces Gaussovy-Seidelovy relaxace probíhá v rámci jedné axiální vrstvy, příspěvky objemových zdrojů příslušných veličin již nejsou v řídicích rovnicích zahrnuty. Výpočtové formule pro relaxaci výstupních veličin  $M$ ,  $p$  a  $h$  pak mají následující tvar

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{ij}^{k+1} = w_{ij}^+ + \frac{\Delta y}{u_*^+} \left[ \frac{s_{ij}}{l_{ij}} (\Delta p_{ij}^+ - H_{ij}^+ w_{ij}^+) \right] - \frac{u_*^{k+1} - u_*^+}{u_*^+} w_{ij}^+, \\ M_i^{k+1} = M_i^+ - \Delta y \sum_{j=1}^{n_s} w_{ij}^+, \\ p_i^{k+1} = p_i^+ + \frac{\Delta y}{A_i} \sum_{j=1}^{n_s} (w_{ij}^+ \Delta u_{ij*}^+ - \varepsilon \tilde{w}_{kor,ij}^+ \Delta u_{ij}^+) - \left( \frac{M_i^+}{A_i} \right)^2 \frac{\rho_i^+ - \rho_i^{k+1}}{\rho_i^+ \rho_i^{k+1}}, \\ h_i^{k+1} = h_i^+ + \frac{\Delta y}{M_i^+} \sum_{j=1}^{n_s} (w_{ij}^+ \Delta h_{ij*}^+ - k_{ij} \Delta T_{ij}^+ - \tilde{w}_{kor,ij}^+ \Delta h_{ij}^+), \end{array} \right. \quad (5.24)$$

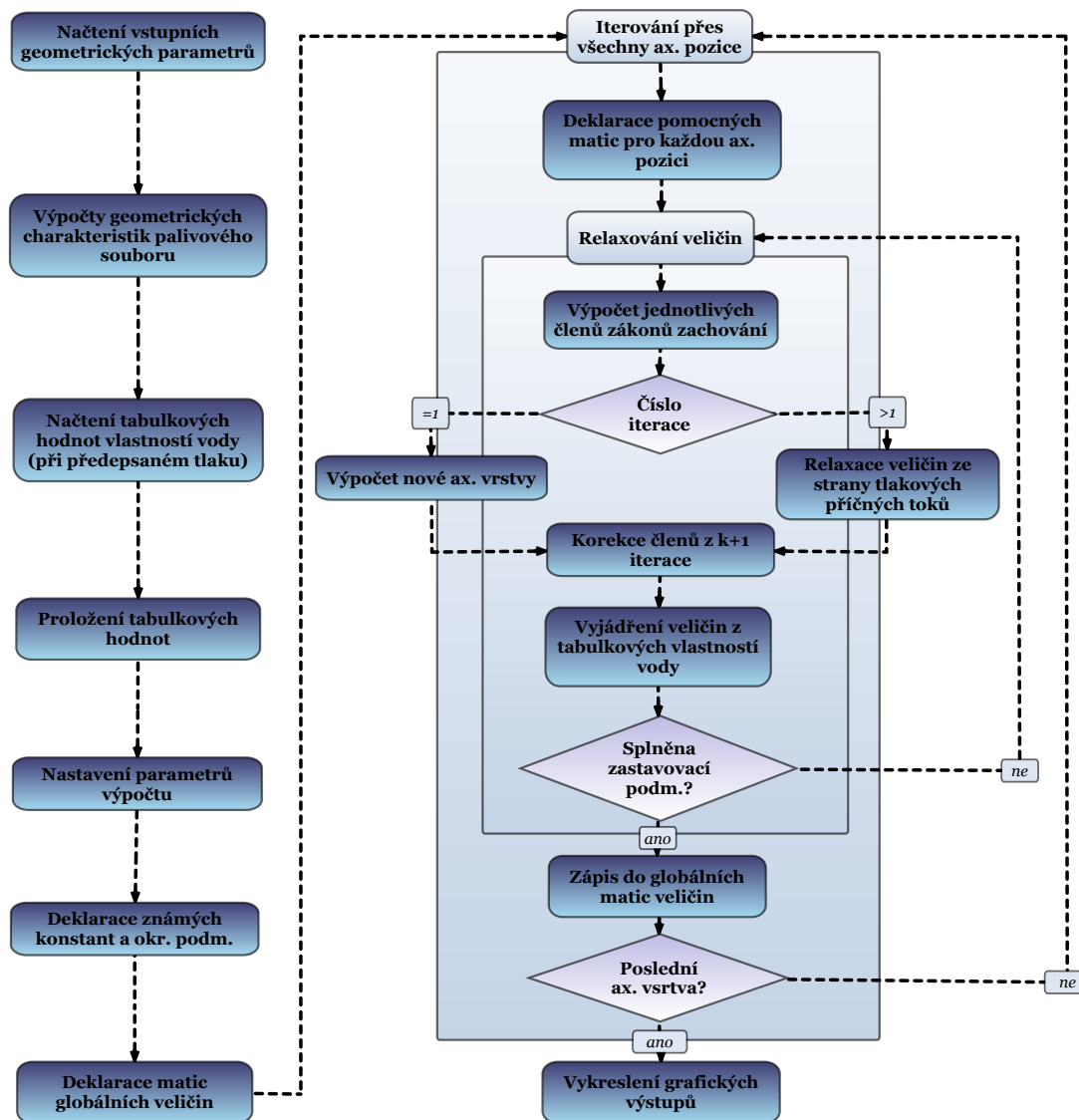
kde horní index  $+$  značí příslušnost k předchozí iteraci. Vypočtené veličiny jsou následně relaxovány dle formule s váhovým koeficientem  $\omega$  (shodným pro všechny veličiny), pro níž platí

$$X_{mod}^{k+1} = \omega X^+ + (1 - \omega) X^{k+1}, \quad (5.25)$$

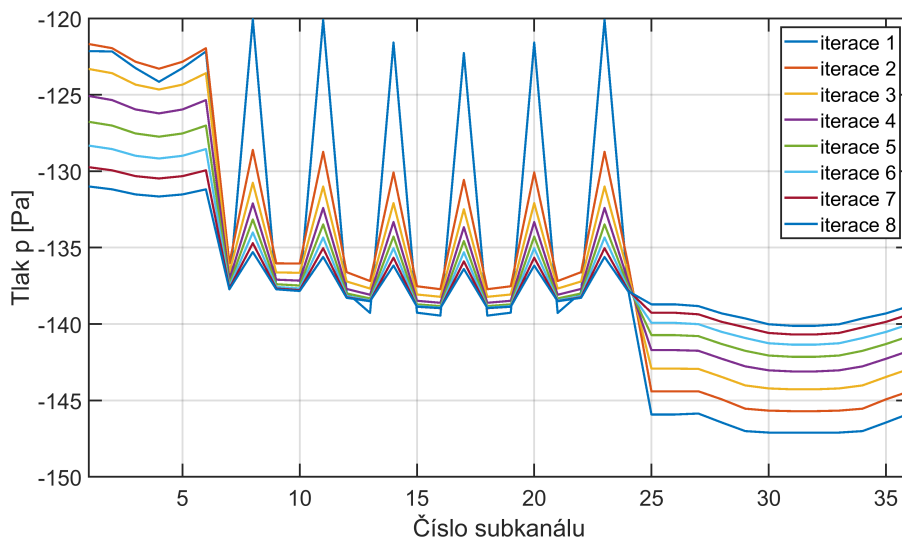
kde veličina  $X$  má po řadě význam příčného toku  $w$ , hmotnostního toku  $M$ , tlaku  $p$  a entalpie  $h$ . Zastavovací podmínka konvergenčního procesu je pak vztažena na dostatečně malou relativní změnu analyzovaných veličin mezi dvěma po sobě jdoucími iteracemi. Konkrétní tvar podmínky je následující

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n_{sub}\} : \frac{X_i^{k+1} - X_i^+}{X_i^{k+1}} \leq \hat{\varepsilon}, \quad (5.26)$$

kde  $X$  opět představuje veličiny  $M$ ,  $p$  a  $h$ ,  $n_{sub}$  je celkový počet subkanálů a  $\hat{\varepsilon}$  značí maximální přípustnou odchylku. Ukázka tlakové korekce pomocí Gaussovy-Seidelovy relaxační iterační metody v rámci jedné axiální vrstvy je viditelná na obr. 5.9, celý výpočetní algoritmus je pak souhrnně znázorněn na vývojovém diagramu obr. 5.8.



Obrázek 5.8: Vývojový diagram úlohy proudění chladiva v palivovém souboru řešený subkanálovou analýzou.



Obrázek 5.9: Ukázka korekce tlaku Gaussovo-Seidelovo relaxační metodou pro jednu axiální vrstvu a zastavovací podmínku  $\hat{\varepsilon} = 0,01$ . Křivky grafu ukazují průběh tlaku příslušný jednotlivým krokům iterace.

## 5.2 Nastavení koeficientu turbulentního míšení

Mezi nejdůležitější sledované parametry subkanálové analýzy patří především rozložení výstupní teploty palivových souborů. S ohledem na co nejpřesnější výstup se koeficienty empirických modelů (využívaných v rámci subkanálové analýzy) fitují přímo na experimentální data testované geometrie. V daném případě je jako volný parametr volen koeficient  $\beta$  figurující ve výpočtu příčného turbulentního toku  $\tilde{w}$  (viz vztah (3.24)), a to v místě mísících a distančních mřížek. Abychom fitovali pouze jeden volný parametr, zavedme pro koeficient  $\beta$  následující předpoklad

$$\beta = \begin{cases} \beta_{fit} & y = y_m \\ \frac{\beta_{fit}}{4} & y = y_d, \\ 0,11 & \text{jinde} \end{cases}$$

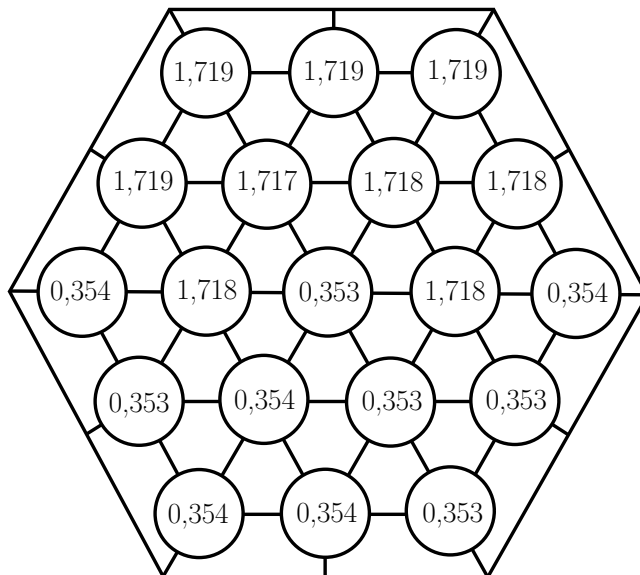
kde  $y_m$  je axiální souřadnice odpovídající místu mísící mřížky a  $y_d$  axiální souřadnice mřížky distanční. Hodnotu koeficientu  $\beta_{fit}$  pak budeme hledat jako minimum funkce směrodatných odchylek výstupních teplot výpočtu a experimentu

přes všechny experimentální módy [39]. Konkrétní předpis pro výpočet teplotní odchylky pro různá nastavení koeficientu  $\beta$  míšení je pak následující

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\frac{1}{n_{mod} - 1} \cdot \frac{1}{n_{TC} - 1} \cdot \sum_{j=1}^{n_{mod}} \sum_{i=1}^{n_{TC}} \left( \frac{T_i^{vyp} - T_i^{exp}}{\Delta T_i^{exp}} \right)_j^2}, \quad (5.27)$$

kde  $n_{mod}$  je počet experimentálních módů,  $n_{TC}$  počet měřících termočlánků na výstupu palivového souboru,  $T^{vyp}$  značí vypočtenou hodnotu teploty a  $T^{exp}$  hodnotu danou experimentem.

Množina experimentálních dat pokrývá široké spektrum nastavení výkonů  $Q$  (v rozmezí 162 – 2388 kW), vstupních teplot  $T_{in}$  (182,3 – 295,2 °C) a hmotnostních toků  $M$  (0,8 – 7,4 kg · s<sup>-1</sup>). Konkrétní kombinace vstupních parametrů jsou viditelné v tab. 5.6. Pro všechny experimentální módy pak platí předpoklad konstantní hodnoty tlaku 15,7 MPa, rovnoměrného rozložení počáteční teploty a hmotnostního toku a rozložení výkonů odpovídajícího obr. 5.10. Vstupní veličiny jsou pak naměřeny s přesností  $\pm 2^\circ\text{C}$  v případě teploty  $T_{in}$  a  $\pm 0,0814 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  v případě průtočné hmotnosti  $M$  [40].



Obrázek 5.10: Poměrné rozložení výkonu palivových proutků v rámci testované geometrie výpočtové oblasti. Uvedené hodnoty jsou normalizovány a jejich výsledný součet je roven celkovému počtu proutků (pro daný případ 19).

Číslo exp.	$T_{in}$ [°C]	$M$ [kg · s <sup>-1</sup> ]	$Q$ [kW]
1	292,0	7,400	981
2	291,7	5,748	797
3	293,2	4,051	1106
4	292,7	2,434	379
5	295,2	0,801	289
6	272,9	0,865	162
7	272,7	2,432	892
8	270,5	4,053	761
9	271,5	5,773	974
10	270,7	7,320	1254
11	242,3	0,811	211
12	242,3	2,432	610
13	213,0	7,380	2042
14	211,5	5,721	1628
15	210,9	4,115	1183
16	214,2	2,495	737
17	213,5	0,837	246
18	187,1	0,800	593
19	182,5	2,495	851
20	185,3	4,027	1383
21	182,3	5,553	1844
22	183,3	7,283	2388

Tabulka 5.6: Vstupní hodnoty veličin pro různé experimentální módy. Převzato z [39].

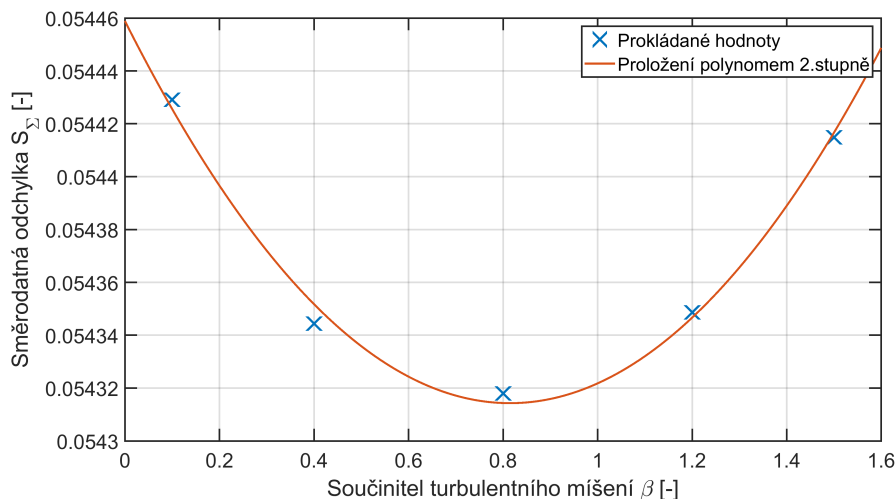
Výstupní teploty palivového souboru jsou zaznamenány termočlánky, jejichž počet a umístění odpovídá navržené diskretizaci testovací geometrie výpočtové oblasti, hodnoty výstupních teplot výpočtu jsou tedy porovnávány přímo a není je nutno nijak interpolovat. Pro vyšší relevanci fitovacího procesu provedeme (pouze v rámci uváděných odchylek měření) korekci vstupních experimentálních dat.

Navržený výpočtový model předpokládá izolovanou soustavu, ve které nedochází k energetické výměně s okolím a jediný zdroj energie dané uzavřené soustavy představuje tepelná energie palivových proutků. Pro takto definovaný systém lze předpokládat platnost kalorimetrické rovnice ve tvaru

$$Q = M\Delta h, \quad (5.28)$$

kde  $Q$  je celkový výkon palivového souboru,  $M$  je (konstantní) hmotnostní tok a  $\Delta h$  je rozdíl průměrné entalpie na vstupu a na výstupu palivového souboru. Vstupní data tedy (v rámci uváděných odchylek) upravíme tak, aby byl splněn předpoklad platnosti rovnice (5.28).

Takto upravená experimentální data představují vstupní hodnoty vytvořeného programu popsaného v odst. 5.1.5. Následně jsou vyhodnoceny hodnoty teploty na výstupu z palivového souboru pro všechny experimentální módy a vypočteny příslušné směrodatné odchylky. Ty jsou vyneseny do grafu a proloženy polynome druhého stupně (viz obr. 5.11). Výsledné globální minimum proložené křivky je pak námi hledaná hodnota součinitele turbulentního míšení  $\beta_{fit}$  (pro daný případ pak platí  $\beta_{fit_{min}} = 0,81$ ).



Obrázek 5.11: Závislost směrodatné odchylky  $S_\Sigma$  na různých nastaveních součinitele turbulentního míšení  $\beta$  pro nastavení jeho optimální hodnoty.

### 5.3 Úloha vedení tepla v palivovém proutku

Kromě hlavní úlohy proudění chladiva v palivovém souboru byla též řešena přidružená úloha vedení tepla v palivovém proutku. Rozložení tepla je řešeno jako rovinná úloha vždy pro vybranou axiální pozici palivového souboru. S ohledem na symetrii řešené geometrie (viz odst. 5.3.1) je možné provést restrikcí na jednodimenzionální řešení. To je následně vypočteno pro několik vybraných „paprsků“ (odpovídajících různým směrovým úhlům  $\phi$  ze středu palivového proutku)



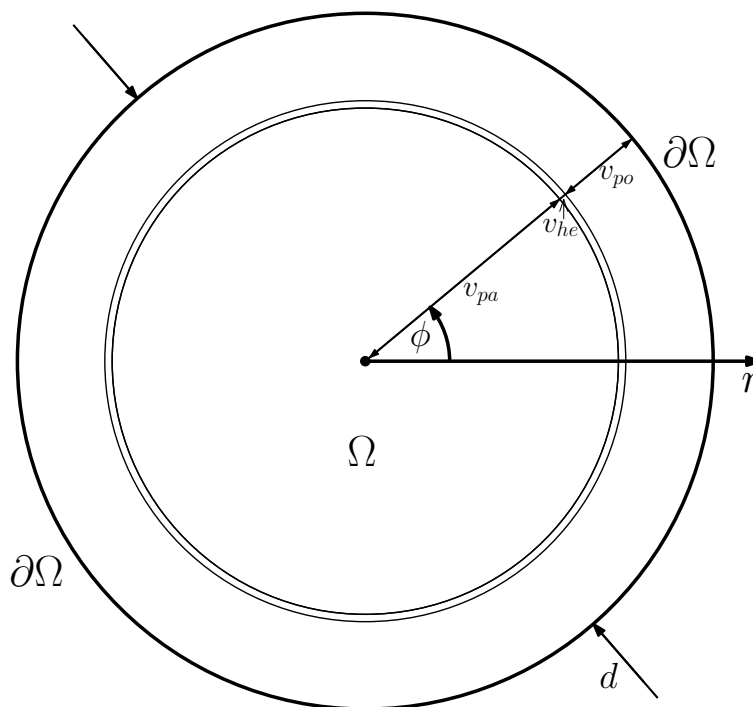
a opětovně složeno do rovinné geometrie.

V rámci diplomové práce je řešena stacionární úloha vedení tepla (viz odst. 3.3). Ta je popsána obyčejnou diferenciální rovnicí 2. řádu a v rámci řešení jsou srovnány numerické přístupy nejvyužívanějších metod (konkrétně MKD, MKO a MKP - viz kap. 4) a diskutována přesnost jejich výstupů.

### 5.3.1 Geometrie analyzovaného proutku

Před samotným numerickým řešením úlohy vedení tepla je nejprve třeba definovat výpočtovou geometrii, konkrétně její materiálové a geometrické charakteristiky.

Palivový proutek má v řezu tvar kruhu a skládá se z vrstev zirkonového pokrytí  $v_{po}$ , izolující heliové vrstvy  $v_{he}$  a vrstvy paliva  $v_{pa}$ . Základním předpokladem je rotační symetrie průřezu proutku, a to po celé jeho délce. Průřez geometrii palivového proutku je znázorněn na obr. 5.12, konkrétní hodnoty rozměrových parametrů jsou pak viditelné v tab. 5.7.



Obrázek 5.12: Průřez geometrií palivového proutku v měřítku se znázorněnými rozměrovými veličinami a zavedeným souřadnicovým systémem.

rozměr	nastavená hodnota
$v_{pa}$	3,9 mm
$v_{he}$	0,065 mm
$v_{po}$	0,585 mm
$d$	9,1 mm

Tabulka 5.7: Hodnoty geometrických charakteristik analyzovaného palivového proutku.

### 5.3.1.1 Určení hodnot tepelné vodivosti

S ohledem na materiálové složení palivového proutku je dále třeba určit hodnoty tepelné vodivosti  $\lambda$ , a to specificky pro každý jednotlivý materiál.

V případě zirkonového pokrytí je tepelná vodivost funkcí teploty ( $\lambda = \lambda(T)$ ). S ohledem na empirické znalosti daného materiálu je stanovena polynomiální teplotní závislost této veličiny, jejíž konkrétní předpis má následující podobu [41]

$$\begin{aligned} \lambda_{po}(T) = & 6,50 \cdot 10^{-17}T^6 - 2,51 \cdot 10^{-13}T^5 + 3,36 \cdot 10^{-10}T^4 - \\ & - 1,74 \cdot 10^{-7}T^3 + 2,35 \cdot 10^{-5}T^2 + 1,17 \cdot 10^{-2}T + 17. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Další ze zastoupených materiálových vrstev na geometrii je heliová mezera. V jejím případě je hodnota tepelné vodivosti  $\lambda$  závislá na geometrických charakteristikách průřezu proutku a parametrech paliva. Funkční předpis pro výpočet tepelné vodivosti má pak konkrétně tvar [41]

$$\lambda_{he} = \alpha_{he} r_{out} \ln \left( \frac{r_{out}}{r_{in}} \right), \quad (5.30)$$

kde  $\alpha_{he}$  je součinitel přestupu tepla heliovou vrstvou a  $r_{out}$  a  $r_{in}$  jsou hodnoty vnějšího a vnitřního poloměru analyzované vrstvy. V daném případě tedy platí

$$r_{out} = v_{pa} + v_{he} \quad \wedge \quad r_{in} = v_{pa}.$$

Součinitel přestupu tepla  $\alpha_{he}$  je funkcí tepelného výkonu na jednotku délky  $\tilde{q}$  a vyhoření paliva  $\tilde{Q}_t$ . Z dlouhodobých experimentálních dat jsou pak sestaveny tabulkové hodnoty přímé závislosti  $\alpha_{he}(\tilde{q}, \tilde{Q}_t)$ , které jsou následně proloženy polynomem  $n$ -tého stupně metodou nejmenších čtverců [41].

Pro potřeby všech provedených výpočtů budeme uvažovat hodnotu vyhoření paliva<sup>9</sup>  $\tilde{Q}_t = 41,3 \text{ MW} \cdot \text{d} \cdot \text{kg}^{-1}$ , pro níž platí předpis

$$\alpha_{he}(\tilde{q}, 41,3) = 0,0074 \tilde{q}^3 + 0,0277 \tilde{q}^2 + 23,2450 \tilde{q} + 8761,8. \quad (5.31)$$

<sup>9</sup>Veličina  $\tilde{Q}_t$  je udávána v jednotkách megawattdní na kilogram uranového paliva.

Poslední zkoumanou materiálovou vrstvou je oblast paliva, pro níž je hodnota tepelné vodivosti  $\lambda$  funkcí teploty a vyhoření paliva ( $\lambda = \lambda(T, \tilde{Q}_t)$ ). Experimentální data jsou i v tomto případě polynomiálně proložena ve smyslu metody nejmenších čtverců [41]. Pro námi hledanou závislost tepelné vodivosti  $\lambda$  na teplotě  $T$  a hodnotu vyhoření paliva stanovenou na  $\tilde{Q}_t = 41,3 \text{ MW} \cdot \text{d} \cdot \text{kg}^{-1}$  platí vztah

$$\lambda_{pa}(T, 41,3) = 1,6121 \cdot 10^{-8} T^3 - 4,642 \cdot 10^{-6} T^2 - 0,0013 T + 3,1364. \quad (5.32)$$

### 5.3.2 Rovnice vedení tepla ve stacionárním tvaru

Po určení všech potřebných parametrů je možné přistoupit k řešení samotné úlohy vedení tepla v palivovém proutku. Výchozím vztahem je PDR 2. řádu v jedné prostorové proměnné ve tvaru odpovídajícímu rotačně symetrické úloze (viz odst. 3.3)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \hat{q}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.44)$$

Tato práce se zabývá pouze stacionárním řešením úlohy vedení tepla, pravá strana rovnice (3.44) tudíž bude nulová a rovnice přejde na ODR 2. řádu s nuluovou pravou stranou obsahující zdroje tepla. Po elementární úpravě tedy přejde rovnice vedení tepla do tvaru

$$\frac{d}{dr} \left( r \lambda(T(r)) \frac{dT}{dr} \right) = -r \hat{q}_{gen}, \quad (5.33)$$

kde tepelná vodivost  $\lambda(T(r))$  je funkcí teploty závislé na radiální souřadnici.

V rámci výpočtu zavádíme předpoklad (platný již při řešení úlohy proudění chladiva) rovnoměrného rozložení výkonu v rámci palivového proutku. Ten je logicky generován pouze v palivové vrstvě proutku a pro člen  $\hat{q}_{gen}$  tedy platí

$$\hat{q}_{gen} = \begin{cases} \frac{C_{Q_i} Q_{sum}}{\pi v_{pa}^2 L} & r \leq v_{pa} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases},$$

kde  $Q_{sum}$  je celkový výkon analyzovaného palivového souboru a  $C_{Q_i}$  je poměrná část výkonu odpovídající vybranému  $i$ -tému palivovému proutku.

Co se okrajových podmínek týče, na vnější hranici  $\partial\Omega$  je zadána Dirichletova okrajová podmínka, jež má pro danou úlohu podobu teploty  $T_s$  odpovídající teplotě stěny z již provedených výpočtů proudění chladiva v palivovém souboru (viz

vztah (5.16)). Na vnitřní hranici (nacházející se ve středu proutku) je pak pro rovnoměrné rozložení výkonu logicky předpokládán nulový tepelný tok, zavádíme tedy homogenní Neumannovu podmínku.

### 5.3.3 Numerické přístupy k řešení úlohy

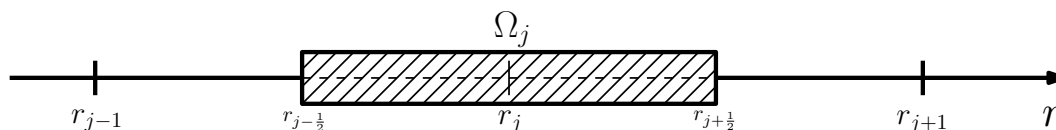
Analyzovaná rovnice (5.33) je ODR 2. řádu nelineární v prvním členu s neznámou závislostí  $\lambda(r)$ . Řešení tedy není možné nalézt v analytickém tvaru, ale je třeba stanovit jej numericky.

V rámci předkládané práce jsou srovnány nejužívanější numerické metody vhodné k řešení úlohy vedení tepla a srovnána je též přesnost jejich výstupů. Konkrétně se jedná o metody konečných objemů, konečných prvků a konečných diferencí ve tvaru pro dopřednou a centrální diferenci.

#### 5.3.3.1 Řešení pomocí MKO

První výpočetní metodou je metoda konečných objemů, jejíž základní princip byl nastíněn v odst. 4.2.

V rámci této metody bude postup následující. Nejprve provedeme diskretizaci 1D kontinua na konečný počet disjunktních kontrolních objemů  $\Omega_j$  v radiálním směru  $r$  s uzly nacházejícími se uprostřed těchto kontrolních objemů (viz obr. 5.13).



Obrázek 5.13: Znázornění jednorozměrného kontrolního objemu v radiálním směru.

V dalším kroku integrujeme řídicí rovnici (5.33) přes konečný objem  $\Omega_j$

$$\int_{\Omega_j} \frac{d}{dr} \left( r \lambda \frac{dT}{dr} \right) d\Omega_j = - \int_{\Omega_j} r \hat{q}_{gen} d\Omega_j.$$

Pro případ jednorozměrného kontinua odpovídá konečný objem intervalu v proměnné  $r$ , konkrétně pak platí  $\Omega_j = \langle r_{j-\frac{1}{2}}, r_{j+\frac{1}{2}} \rangle$ . Předchozí rovnici tak je možné upravit do nového tvaru

$$\int_{r_-}^{r_+} \frac{d}{dr} \left( r \lambda \frac{dT}{dr} \right) dr = - \int_{r_-}^{r_+} r \hat{q}_{gen} dr, \quad (5.34)$$

kde indexy „ $\pm$ “ označují hodnotu příslušné veličiny v místě  $j \pm \frac{1}{2}$ .

Dále na levou stranu rovnice (5.34) budeme nahlížet jako na integrál jednorozměrné divergence skalární veličiny, přičemž tuto skalární veličinu představuje výraz v závorce  $(r\lambda\frac{dT}{dr})$ . Je tedy možné aplikovat Gaussovo-Ostrogradského větu (4.8) a snížit řád derivace figurující na levé straně. Zároveň s tím integrál konečného objemu přechází na integrál přes jeho hranici. V případě jednodimenzionální úlohy se pak jedná o sumu dvouprvkové množiny hraničních bodů  $\{r_-, r_+\}$ . Platí tedy

$$\left(r\lambda\frac{dT}{dr}\right)_+ - \left(r\lambda\frac{dT}{dr}\right)_- = -\hat{q}_{gen} \int_{r_-}^{r_+} r dr,$$

kde znaménko mezi členy levé strany odpovídá zohlednění vnější normály rovnice (4.8) k hranici kontrolní oblasti  $\Omega_j$ . Přepisem levé strany rovnice a výpočtem integrálu pravé strany získáme řídicí rovnici MKO před zavedením aproximací hraničních členů

$$r_+\lambda_+ \left(\frac{dT}{dr}\right)_+ - r_-\lambda_- \left(\frac{dT}{dr}\right)_- = -\hat{q}_{gen} \frac{r_+^2 - r_-^2}{2}, \quad (5.35)$$

kde pro  $r_+$  a  $r_-$  platí

$$r_+ = r_j + \frac{\Delta r}{2} \quad \wedge \quad r_- = r_j - \frac{\Delta r}{2}.$$

Poté je třeba vhodně interpolovat veličiny na hranici kontrolního objemu pomocí hodnot v uzlových bodech. Pro derivaci nultého řádu zvolíme střední hodnotu dané veličiny, derivace 1. řádu pak aproximujeme pomocí centrální diferenční formule s délkou kroku  $\frac{\Delta r}{2}$ . Pro jednotlivé členy figurující v rovnici (5.35) tedy bude platit

$$\begin{aligned} \lambda(r_+) &= \frac{\lambda(r_{j+1}) + \lambda(r_j)}{2} \quad \wedge \quad \lambda(r_-) = \frac{\lambda(r_j) + \lambda(r_{j-1})}{2}, \\ \left(\frac{dT}{dr}\right)_+ &= \frac{T(r_{j+1}) - T(r_j)}{\Delta r} \quad \wedge \quad \left(\frac{dT}{dr}\right)_- = \frac{T(r_j) - T(r_{j-1})}{\Delta r}. \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme zvolené aproximace do původní rovnice (5.35) a získáme tak iterační schéma pro hodnoty teploty  $T$  v příslušných uzlových bodech

$$\frac{r_+\lambda_+}{\Delta r} T_{j+1} - \frac{r_+\lambda_+ + r_-\lambda_-}{\Delta r} T_j + \frac{r_-\lambda_-}{\Delta r} T_{j-1} = -\hat{q}_{gen} r_j \Delta r. \quad (5.36)$$

Iteračním procesem přes všechny uzlové body pak získáme algebraickou soustavu rovnic, která je při zohlednění okrajových podmínek jednoznačně řešitelná. Lze tedy psát

$$\mathbf{AT} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \quad (5.37)$$

kde  $\mathbf{T}$  je vektor teplot v uzlových bodech,  $\mathbf{A}$  je matice koeficientů teplot uzlových bodů a  $\mathbf{b}$  je vektor pravých stran (resp. vektor zdrojů).

### 5.3.3.2 Řešení pomocí MKP

Další z numerických metod možných k řešení úlohy vedení tepla je metoda konečných prvků, jejíž základní principy jsou popsány v odst. 4.3. Vycházet budeme opět ze stacionární rovnice vedení tepla (5.33). Jelikož se jedná o diferenciální rovnici 2. řádu, bude ji před zavedením aproximovaného řešení nutné přeformulovat na úlohu hledání tzv. slabého řešení.

Přeformulování původní úlohy proběhne v několika krocích. Nejprve rovnici (5.33) zanulujeme, přenásobíme váhovou funkcí  $\hat{v}$  a zintegrujeme přes výpočtovou oblast  $\Omega$ . Výsledkem tohoto kroku získáme rovnici ve tvaru tzv. váženého rezidua

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{d}{dr} \left( r\lambda \frac{dT}{dr} \right) + r\hat{q}_{gen} \right] \hat{v} \, d\Omega = 0. \quad (5.38)$$

Pro přesnou hodnotu řešení  $T$  je výraz v hranaté závorce roven nule, v případě aproximace řešení je pak nenulový. Cílem metod vážených reziduí je velikost takto vzniklého rezidua minimalizovat pomocí vhodně zvoleného tvaru váhové funkce  $\hat{v}$ . Pro tuto funkci zároveň zavedeme předpoklad nulovosti v místě hranice s definovanou Dirichletovou okrajovou podmínkou.

Druhým krokem slabé formulace je aplikace Greenovy věty (4.10) na členy vyšších derivací. Pro případ jedné proměnné je gradient skalární funkce ekvivalentní 1. derivaci a Laplaceův operátor  $\Delta$  2. derivaci. Integrální přes hranici 1D kontinua odpovídá dvouprvkové množině krajních bodů, znaménka u těchto členů pak respektují volbu vnějšího normálového vektoru k hranici výpočtové oblasti  $\Omega$ , platí tedy

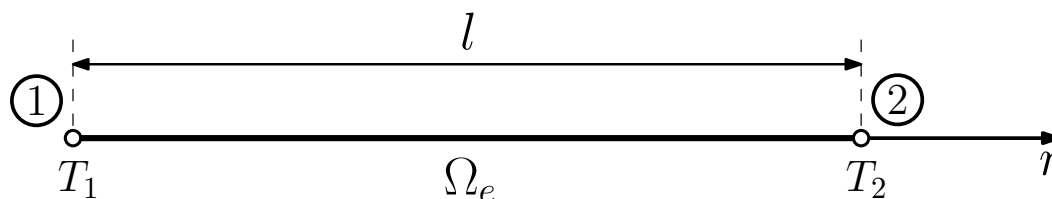
$$\left( \hat{v} r \lambda \frac{dT}{dr} \right)_{r=\frac{d}{2}} - \left( \hat{v} r \lambda \frac{dT}{dr} \right)_{r=0} - \int_{\Omega} \frac{d\hat{v}}{dr} \left( r \lambda \frac{dT}{dr} \right) \, d\Omega + \int_{\Omega} \hat{v} r \hat{q}_{gen} \, d\Omega = 0.$$

V závěrečném kroku dosadíme do výše uvedené rovnice okrajové podmínky. S ohledem na nulovost váhové funkce  $\hat{v}$  v místě předepsané Dirichletovy okrajové

podmínky bude první člen rovnice nulový. Druhý člen rovnice se pak vynuluje prostým dosazením vyčíslené hodnoty. Jednoduchou algebraickou úpravou tak získáváme výsledný tvar slabé formulace úlohy stacionárního vedení tepla

$$\int_{\Omega} \frac{d\hat{v}}{dr} \left( r\lambda \frac{dT}{dr} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \hat{v} r \hat{q}_{gen} d\Omega. \quad (5.39)$$

Ve chvíli, kdy je řídicí rovnice (5.33) převedena do tvaru slabé formulace (5.39), je možné přistoupit k diskretizaci kontinua. S ohledem na jednodimenzionální charakter úlohy volíme konečný prvek (KP) typu prut. Každému KP je v rámci analyzované geometrie přiřazeno globální pořadové číslo a dva uzlové body na jeho krajích, v nichž budeme vyčíslovat hodnoty výsledné teploty  $T_i$ . Všechny KP jsou pak obecně popsány referenčním (master) prvkem délky  $l$  se zavedeným lokálním číslováním uzlů, viz obr. 5.14.



Obrázek 5.14: Referenční (master) konečný prvek typu prut se zvoleným pořadím uzlových bodů.

Dalším krokem MKP je aproximace řešení nad konečným prvkem. V daném případě budeme aproximační funkce volit jako úplné polynomy prvního stupně. Funkci teploty  $T$  nad konečným prvkem tedy vyjádříme vztahem

$$T(r) = k_1 r + k_2,$$

kde  $k_i$  jsou dosud neznámé koeficienty lineární kombinace. Z referenčního prvku následně určíme podmínky pro hodnotu teploty v místech 0 a  $l$  ( $T(0) = T_1$  a  $T(l) = T_2$ ). Teplota nad konečným prvkem  $T(r)$  tak lze zapsat ve tvaru lineární kombinace uzlových hodnot

$$T(r) = \left(1 - \frac{r}{l}\right) T_1 + \frac{r}{l} T_2 = N_1 T_1 + N_2 T_2, \quad (5.40)$$

kde  $N_i$  označujeme jako bázové funkce.

Nyní se vraťme ke slabé formulaci (5.39) definované dosud nad obecnou výpočtovou oblastí, vztáhněme jeho platnost pouze na jeden konečný prvek a předpokládejme váhovou funkci  $\hat{v}$  v podobě variace teploty  $\delta T$ . Získáme tak nový tvar řídicí rovnice

$$\int_0^l \frac{d\delta T}{dr} \left( r\lambda \frac{dT}{dr} \right) dr = \int_0^l \delta T r \hat{q}_{gen} dr.$$

Dále vyjádříme veličiny teploty  $T$  a  $\delta T$  a jejich derivace dle prostorové proměnné  $r$  jako funkce  $N_i$ . S ohledem na fakt, že teplota v rovnici (5.40) je vyjádřena lineární kombinací uzlových hodnot, je nutné derivovat pouze bázové funkce. Pro jednoduchost zápisu pak zavedeme maticové vyjádření

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2]^T = \left[ 1 - \frac{r}{l} \quad \frac{r}{l} \right]^T \Rightarrow \mathbf{N}_{IR} = \left[ -\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right]^T,$$

$$\begin{aligned} T &= \mathbf{N}^T \mathbf{T} & \wedge & \quad \delta T = \delta \mathbf{T}^T \mathbf{N}, \\ \frac{dT}{dr} &= \mathbf{N}_{IR}^T \mathbf{T} & \wedge & \quad \frac{d\delta T}{dr} = \delta \mathbf{T}^T \mathbf{N}_{IR}, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{T}$  je vektor teplot v uzlových bodech KP.

Ve chvíli, kdy jsou všechny potřebné proměnné vyjádřeny pomocí bázových funkcí, je možné dosadit do výše zmíněné řídicí rovnice konečného prvku. Při uvážení nenulovosti variací teploty  $\delta \mathbf{T}^T$  pak lze tyto proměnné z obou stran rovnice vyloučit, píšeme tedy

$$\int_0^l r \lambda \mathbf{N}_{IR} \mathbf{N}_{IR}^T dr \mathbf{T} = \int_0^l r \hat{q}_{gen} \mathbf{N} dr.$$

Nakonec zavedeme předpoklad konstantních hodnot  $\lambda$  a  $\hat{q}_{gen}$  nad konečným prvkem, roznásobíme vektory a zintegrujeme. Získáme tak algebraickou soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé teploty  $T_i$  v uzlových bodech konečného prvku. Maticově lze takovou soustavu vyjádřit následovně

$$\frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \hat{q}_{gen} \begin{bmatrix} \frac{l^2}{6} \\ \frac{l^2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K}_e \mathbf{T}_e = \mathbf{b}_e, \quad (5.41)$$

kde  $\mathbf{K}_e$  je matice tuhosti elementu,  $\mathbf{T}_e$  je vektor uzlových hodnot KP a  $\mathbf{b}_e$  je lokální vektor pravých stran.



Matrice tuhosti elementu  $\mathbf{K}_e$  je čtvercová rozměru  $(2 \times 2)$ , je symetrická a singulární. Soustava rovnic, jež by vedla na řešení hodnot teploty uzlových bodů jednotlivých elementů, je tedy nedourčená a nemá jednoznačné řešení. Z toho důvodu je nutné zavést globální matici tuhosti  $\mathbf{K}$ , pro jejíž prvky platí součet ve smyslu metody konečných prvků

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_{KP}} \mathbf{K}_{e_i}, \quad (5.42)$$

kde  $n_{KP}$  je celkový počet KP geometrie. Globální matice  $\mathbf{K}$  je čtvercová a má rozměr odpovídající počtu stupňů volnosti celé soustavy (v daném případě přímo počtu uzlových bodů  $n_{KP} + 1$ ). Součet ve smyslu MKP pak znamená přiřazení prvku matice elementu (respektující lokální číslování) na odpovídající místo matice globální. Relaci globálního a lokálního číslování pro jednotlivé konečné prvky vyjadřuje lokalizační tabulka. Ukázka principu přiřazení globálních kódů lokálním pro několik prvních prvků je viditelná v tab. 5.8.

lokální kódy		$T_1$	$T_2$
		1	2
globální kódy	①	1	2
	②	2	3
	③	3	4
	④	4	5
	⑤	5	6
	⑥	6	7
	⑦	7	8
	⑧	8	9

Tabulka 5.8: Lokalizační tabulka udávající relaci mezi lokálními a globálními kódy.

Nakonec ještě zohledníme hlavní okrajovou podmínku. Její hodnotu dosadíme za odpovídající proměnnou vektoru uzlových teplot  $\mathbf{T}$ , přenásobíme příslušným sloupcem matice tuhosti a výsledek přičteme k pravé straně soustavy. Po těchto úpravách je již globální matice tuhosti  $\mathbf{K}$  regulární a celá soustava jednoznačně řešitelná. Výsledná výpočetní formule pro zjištění globálních teplot  $\mathbf{T}$  má tedy tvar

$$\mathbf{KT} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}. \quad (5.43)$$

### 5.3.3.3 Řešení pomocí MKD

Poslední zkoumanou numerickou metodou je metoda konečných diferencí, již bylo využito i v rámci řešení hlavní úlohy proudění chladiva a jejíž teorie je popsána v odst. 4.1.

Opět budeme vycházet z rovnice stacionárního vedení tepla (5.33), kterou však před aplikací MKD analyticky upravíme. Diferenciál  $dr$  převedeme na pravou stranu rovnice, zavedeme substituci  $f(r) = r\lambda(T(r))\frac{dT}{dr}$  a následně zintegrujeme

$$\int_{f(0)}^{f(r)} df = - \int_0^r r\hat{q}_{gen} dr.$$

Z definice  $f(r)$  je za předpokladu konečné hodnoty tepelné vodivosti  $\lambda$  a prostorové derivace teploty  $\frac{dT}{dr}$  zřejmé, že její hodnota je pro spodní integrační mez nulová<sup>10</sup>. Co se pravé strany týče, veličina  $\hat{q}_{gen}$  je po částech konstantní a lze ji tedy vytknout před integrál. Výsledná rovnice po integraci a následné úpravě tedy získá tvar

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{\hat{q}_{gen,pa}\tilde{r}^2}{2\lambda r}, \quad (5.44)$$

kde pro nově zavedené veličiny  $\hat{q}_{gen,pa}$  a  $\tilde{r}$  platí

$$\hat{q}_{gen,pa} = \hat{q}_{gen}(r), \quad r \leq v_{pa} \quad \wedge \quad \tilde{r} = \begin{cases} r & r \leq v_{pa} \\ v_{pa} & \text{jinde} \end{cases}.$$

Nyní již zavedením dopředné a centrální diferenční formule získáme dva iterační předpisy pro řešení stacionární úlohy vedení tepla

$$T_{j+1} = T_j - \frac{\hat{q}_{gen,pa}\tilde{r}_j^2\Delta r}{2\lambda_j r_j} \quad \wedge \quad T_{j+1} = T_{j-1} - \frac{\hat{q}_{ge,pa}\tilde{r}_j^2\Delta r}{\lambda_j r_j}. \quad (5.45)$$

Součtem přes všechny body diskretizační sítě a zohledněním hlavní okrajové podmínky získáme jednoznačně řešitelnou soustavu algebraických rovnic a je tedy možné psát

$$\mathbf{AT} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \quad (5.46)$$

kde analogicky metodě konečných objemů označuje  $\mathbf{T}$  vektor teplot v síťových bodech diskretizace,  $\mathbf{A}$  je matice koeficientů teplot příslušných uzlových bodů a  $\mathbf{b}$  je vektor zdrojů.

<sup>10</sup>Tento předpoklad je jistě splněn, jelikož  $\lambda$  je kladné reálné číslo a výraz  $\frac{dT}{dr}$  odpovídá v místě  $r = 0$  homogenní Neumannově podmínce.

### 5.3.4 Algoritmus výpočtu

Ve chvíli, kdy je úloha matematicky vyřešena, zbývá ji už jen programově implementovat. K tomu bylo (stejně jako v případě hlavní úlohy proudění) využito softwarového prostředí MATLAB/Octave, pro který byl napsán skript *vedeni\_Tepla\_statika.m* sloužící k programovému řešení úlohy i následnému vykreslení průběhu požadovaných veličin.

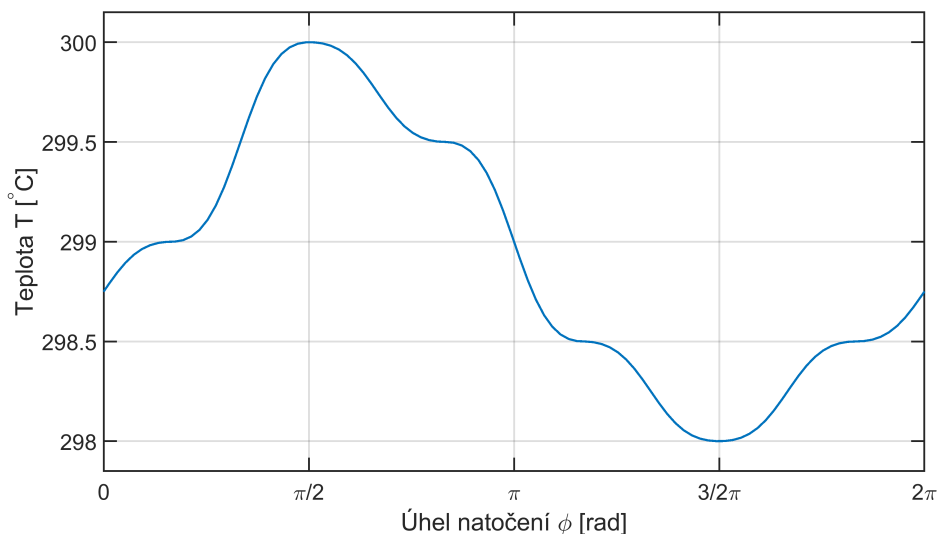
Vstupem tohoto programu jsou geometrické charakteristiky palivového proutku, dále vlastnosti vody při předepsaném konstantním tlaku, tabulkové hodnoty tepelné vodivosti pro jednotlivé materiálové vrstvy, hodnota výkonu a vyhoření analyzovaného proutku a pole teplot v okolních subkanálech pro požadovanou axiální vrstvu. Výstupem jsou poté pole teplot a tepelné vodivosti v rámci analyzované geometrie výpočtové oblasti a taktéž grafické výstupy těchto veličin pro celou geometrii či jejich průběh pro jeden zvolený radiální směr.

Samotný postup algoritmizace úlohy začíná načtením rozměrů analyzované geometrie a vstupních parametrů výpočtu. Ty zahrnují především volbu počítané axiální vrstvy proutku, délky prostorových kroků v radiálním směru ( $\Delta r$ ) a ve směru úhlu ( $\Delta \phi$ ) a také volbu výpočetní numerické metody. Z programu subkanálové analýzy jsou také načteny průběhy veličin měrné tepelné kapacity  $c_p$  a dynamické viskozity  $\eta$  v závislosti na teplotě vody při jejím konstantním tlaku a pole teplot v subkanálech nacházejících se v bezprostředním okolí analyzovaného palivového proutku.

Po načtení vstupních hodnot programu následuje výpočet Dirichletovy okrajové podmínky na vnější hranici geometrie. Základem výpočtu okrajové podmínky jsou výstupní teploty programu subkanálové analýzy. Ty předpokládají konstantní hodnotu teploty v každém subkanálu. Abychom zajistili přirozené předpoklady na spojitost a hladkost funkce definující teplotní průběh v okolí proutku, budeme konstantní hodnoty teplot subkanálů prokládat po částech polynomem 2. stupně. Vypočtené hodnoty teploty v subkanálech následně přepočítáme na teploty na stěně palivového proutku dle teorie popsané v odst. 5.1.3. Získáme tak funkční teplotní průběh okrajové podmínky na vnější hranici geometrie výpočtové oblasti. Ukázka takového průběhu je pak viditelná na obr. 5.15.

Dalším krokem algoritmu je načtení hodnot tepelné vodivosti  $\lambda$  pro jednotlivé materiálové vrstvy (viz odst. 5.3.1). Posledním krokem před samotným iteračním výpočtem je deklarace globálních matic výstupních veličin teploty  $T$  a tepelné vodivosti  $\lambda$ .

Jak již bylo řečeno výše, dvoudimenzionální úloha vedení tepla na průřezu palivového proutku je řešena jako systém 1D úloh ve vybraných radiálních směrech,



Obrázek 5.15: Ukázka průběhu Dirichletovy okrajové podmínky úlohy vedení tepla v pali-  
vovém proutku.

kteří jsou následně složeny zpět do rovinné geometrie. Iterace výpočtu tedy probíhá postupně přes jednotlivé radiální „paprsky“ rotačně symetrické geometrie.

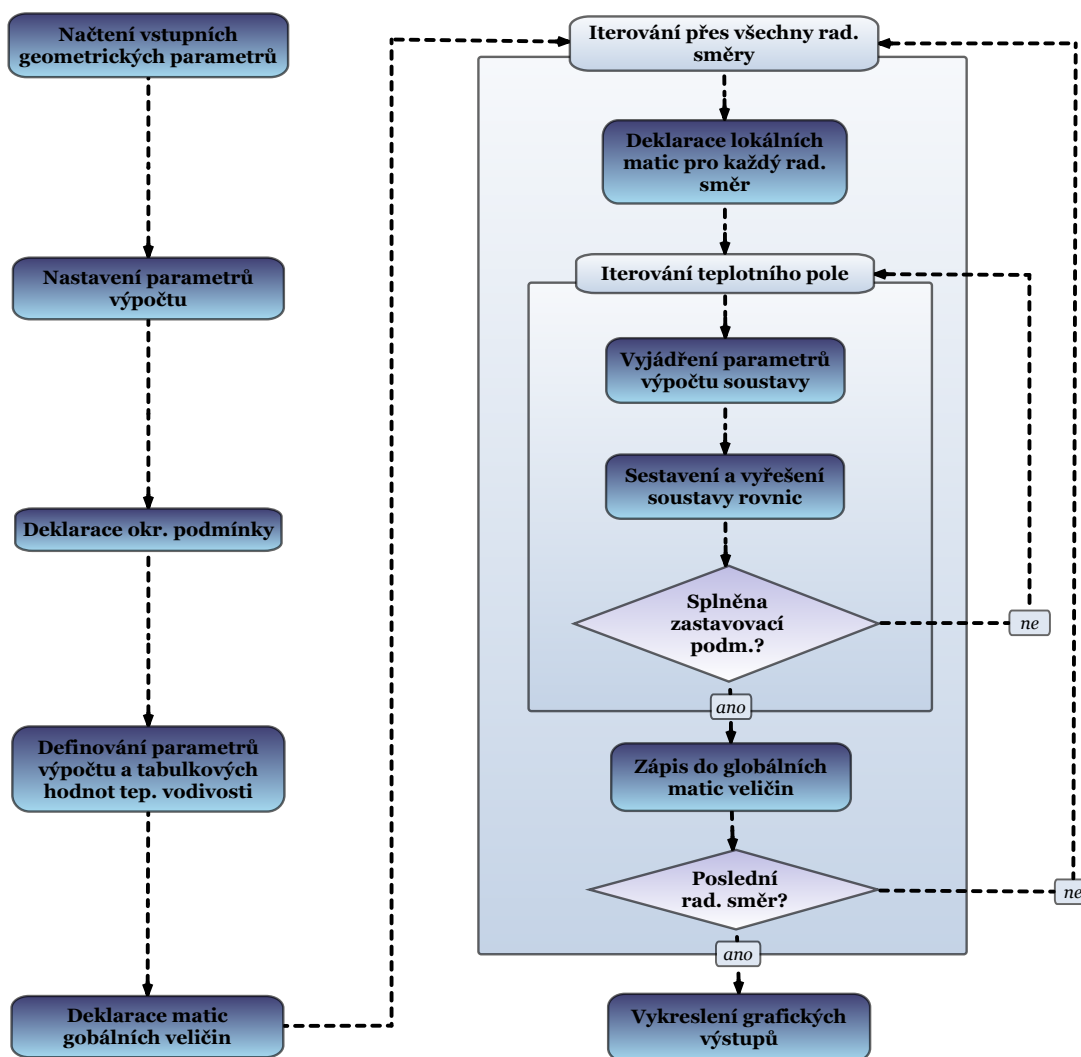
V rámci každého radiálního směru nejdříve určíme hodnoty hlavní okrajové podmínky a parametrů tepelné vodivosti  $\lambda$  v jednotlivých uzlových bodech diskretizované 1D úlohy. Následně sestavíme soustavu rovnic teplot  $T_i$  v uzlových bodech pro vybranou numerickou metodu, zohledníme okrajovou podmínku a nakonec soustavu rovnic vyřešíme.

S ohledem na fakt, že hodnota tepelné vodivosti je pro materiálové vrstvy paliva a pokrytí explicitně funkcí teploty ( $\lambda = \lambda(T)$ ), kterou dopředu neznáme, necháváme celý proces 1D výpočtu teplot iterovat. V prvním kroku volíme hodnoty tepelné vodivosti  $\lambda$  (na jednotlivých vrstvách) konstantní, v dalších krocích pak vycházíme z teplotního pole předchozí iterace. Iterace hodnot probíhá až do splnění zastavovací podmínky ve tvaru

$$\max_j \{|T_j^{k+1} - T_j^k|\} \leq \hat{\varepsilon}_T, \quad (5.47)$$

kde  $T_j^k$  je hodnota teploty v uzlovém bodu  $j$  v  $k$ -té iteraci a  $\hat{\varepsilon}_T$  je maximální přípustná odchylka pro dvě po sobě jdoucí iterace v jednotkách stupňů Celsia.

Po dokonvergování hodnot se výstupní veličiny 1D úlohy uloží do globálních matic a výpočet pokračuje iterací v novém radiálním směru. Po dokončení výpočtů ve všech vybraných směrech následuje již jen zpětné složení do rovinné geometrie a vykreslení požadovaných grafických výstupů. Celý výpočetní algoritmus je pak souhrnně znázorněn ve vývojovém diagramu obr. 5.16.



Obrázek 5.16: Vývojový diagram stacionární úlohy vedení tepla v palivovém proutku.

### 5.3.5 Srovnání přesnosti numerických řešení

Abychom provedli srovnání přesnosti jednotlivých numerických přístupů, je třeba stanovit referenční řešení, k němuž budeme přesnost vztahovat. K tomuto účelu odvodíme kvazianalytické řešení stacionární úlohy vedení tepla. Její základní tvar odpovídá rovnici (5.33), jež byla v předchozím odstavci analyticky upravena do podoby

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\hat{q}_{gen,pa}\tilde{r}^2}{2\lambda(T)r}. \quad (5.44)$$

#### 5.3.5.1 Odvození analytického řešení

Exaktnímu analytickému odvození výsledné teploty  $T$  brání neznalost přímé závislosti tepelné vodivosti  $\lambda$  na radiální souřadnici  $r$ . Jak je již zmíněno v odst. 5.3.1, hodnota tepelné vodivosti  $\lambda$  vychází z tabulkových údajů specifických pro jednotlivé materiálové vrstvy a závisí na teplotě, vyhoření paliva či výkonu palivového proutku. V rámci výpočtu na konkrétním palivovém proutku jsou vyhoření paliva a výkon považovány za konstantní, tepelná vodivost  $\lambda$  je tedy buďto konstantní (heliová vrstva) nebo funkcí pouze teploty  $T$  (vrstva paliva a pokrytí).

Pro odvození analytického řešení je tedy nutné stanovit funkční závislost tepelné vodivosti místo na teplotě pouze na radiální souřadnici ( $\lambda(T) \rightarrow \lambda(r)$ ). K tomuto účelu se využijí již napočtená data numerických řešení úlohy. Na jejich základě se stanoví závislost tepelné vodivosti na radiální souřadnici a proloží se vhodně zvolenou funkcí s minimální odchylkou ve smyslu metody nejmenších čtverců. Tato funkční závislost se následně dosadí do předpisu (5.44) a analyticky zintegruje.

Přesnost takto získaného kvazianalytického řešení je závislá jednak na přesnosti původní numericky předpočtené funkční závislosti  $\lambda(r)$  a dále pak na jejím co nejpresnějším proložení. Co se přesnosti proložení týče, té bylo zajištěno vhodnou volbou funkčních předpisů specifickou pro každou jednotlivou materiálovou vrstvu. Numerické nepřesnosti vstupních dat by pak měly být potlačeny jejich průměrováním přes všechny analyzované numerické metody. Testování navíc ukázalo, že citlivost výsledné analytické teploty na odlišných vstupech  $\lambda(r)$  (tzn. pro jinou volbu numerické metody) je velmi malá a vypočtené kvazianalytické řešení by tedy skutečně mělo odpovídat řešení přesnému.

Před samotným řešením na jednotlivých intervalech ještě zavedeme pomocné rozměry  $r_i$  odpovídající hraničním hodnotám poloměrů materiálových vrstev

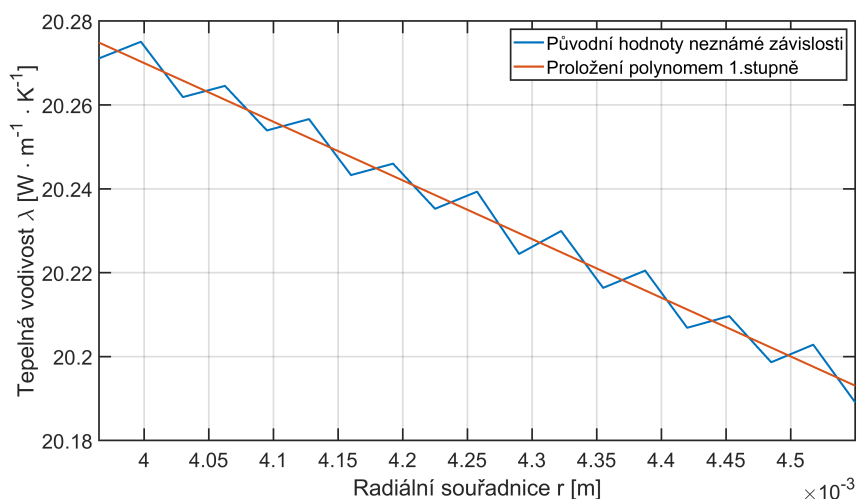
$$r_1 = v_{pa} \quad \wedge \quad r_2 = v_{pa} + v_{he} \quad \wedge \quad r_3 = v_{pa} + v_{he} + v_{po}.$$

a) vrstva pokrytí ( $r \in \langle r_2, r_3 \rangle$ ):

Pro příslušný interval prostorové proměnné  $r$  platí, že  $\tilde{r} = r_1$  a funkční závislost  $\lambda(r)$  má lineární charakter. Rovnici (5.44) tedy lze upravit do tvaru

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\hat{q}_{gen,pa} r_1^2}{2r(k_1 r + k_2)},$$

kde  $k_i$  jsou koeficienty proložené lineární funkce. Přesnost tohoto proložení je pak viditelná na obr. 5.17.



Obrázek 5.17: Ukázka funkční závislosti  $\lambda(r)$  v materiálové vrstvě zirkonového pokrytí a její proložení polynomem 1. stupně.

Nyní již lze převést diferenciál  $dr$  na pravou stranu rovnice a zintegrovat

$$\int_{T(r)}^{T(r_3)} dT = -\frac{\hat{q}_{gen,pa} r_1^2}{2} \int_r^{r_3} \frac{1}{r(k_1 r + k_2)} dr.$$

Argument integrálu pravé strany rozdělíme na parciální zlomky a následně přímo zintegrujeme. Získáme tak výsledný vztah pro teplotu v místě zirkonového pokrytí

$$T(r) = T(r_3) + \frac{\hat{q}_{gen,pa} r_1^2}{2k_2} \ln \left[ \frac{r_3(k_1 r + k_2)}{r(k_1 r_3 + k_2)} \right], \quad (5.48)$$

kde  $T(r_3)$  odpovídá hlavní okrajové podmínce na vnější hranici palivového proutku  $\partial\Omega$  a platí pro ni  $T(r_3) = T_s$ .

**b) vrstva helia** ( $r \in \langle r_1, r_2 \rangle$ ):

V případě heliové vrstvy palivového proutku je tepelná vodivost  $\lambda$  závislá pouze na hodnotách výkonu, vyhoření a konstantních geometrických charakteristikách palivového proutku. V rámci 1D výpočtu vedení tepla má tak pro konkrétní palivový proutek konstantní hodnotu ( $\lambda = konst.$ ). Řídící rovnice (5.44) tedy má pro danou materiálovou vrstvu následující tvar

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\hat{q}_{gen,pa}r_1^2}{2\lambda r},$$

V takovém případě je ihned možné převést diferenciál  $dr$  na pravou stranu a následně zintegrovat

$$\int_{T(r)}^{T(r_2)} dT = -\frac{\hat{q}_{gen,pa}r_1^2}{2\lambda} \int_r^{r_2} \frac{1}{r} dr.$$

V daném případě je možná přímá integrace. Získaný analytický předpis pro výpočet teploty v oblasti heliové vrstvy má pak následující podobu

$$T(r) = T(r_2) + \frac{\hat{q}_{gen,pa}r_1^2}{2\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right), \quad (5.49)$$

kde  $T(r_2)$  je teplota v místě rozhraní vrstev helia a pokrytí.

**c) vrstva paliva** ( $r \in \langle 0, r_1 \rangle$ ):

Poslední z analyzovaných intervalů prostorové proměnné  $r$  je interval odpovídající vrstvě paliva. V jeho případě platí, že  $\tilde{r} = r$  a funkční závislost  $\lambda(r)$  sleduje exponenciální funkci ( $\lambda(r) \equiv k_1 + k_2 e^{\frac{r}{k_3}}$ ). V takovém případě lze přepsat vztah (5.44) do nového tvaru

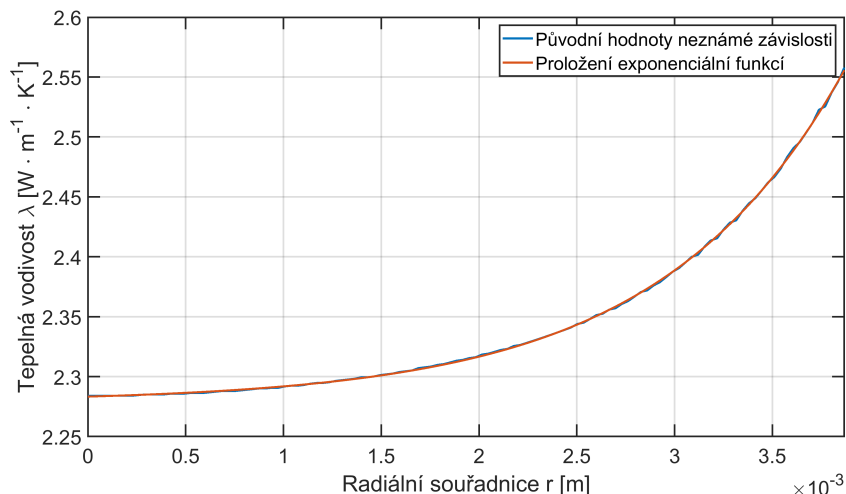
$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\hat{q}_{gen,pa}r}{2\left(k_1 + k_2 e^{\frac{r}{k_3}}\right)},$$

kde koeficienty  $k_i$  odpovídají nejlepší aproximaci numerických dat ve smyslu metody nejmenších čtverců. Proložení hodnot pro jeden z výpočtů je viditelné na obr. 5.18.

Dále převedeme diferenciál  $dr$  na pravou stranu rovnice a zintegrujeme v patřičných mezích

$$\int_{T(r)}^{T(r_1)} dT = -\frac{\hat{q}_{gen,pa}}{2} \int_r^{r_1} \frac{r}{k_1 + k_2 e^{\frac{r}{k_3}}} dr.$$





Obrázek 5.18: Ukázka funkční závislosti  $\lambda(r)$  v materiálové vrstvě paliva a její proložení exponenciální funkcí.

Analytický výpočet integrálu pravé strany provedeme pomocí softwaru WolframAlpha [42]. Výsledný obecný integrál má pak následující tvar

$$f(r) = \int \frac{r}{k_1 + k_2 e^{\frac{r}{k_3}}} dr = \frac{r \left[ r - 2k_3 \ln \left( \frac{k_2 e^{\frac{r}{k_3}}}{k_1} + 1 \right) \right] - 2k_3^2 \text{Li}_2 \left( -\frac{k_2 e^{\frac{r}{k_3}}}{k_1} \right)}{2k_1}, \quad (5.50)$$

kde  $\text{Li}_i(z)$  je polylogaritmická funkce  $i$ -té třídy<sup>11</sup> komplexního argumentu  $z$ . Dosažením do výše uvedené rovnice nakonec získáme explicitní analytický předpis pro materiálovou vrstvu paliva

$$T(r) = T(r_1) + \frac{\hat{q}_{gen,pa}}{2} [f(r_1) - f(r)]. \quad (5.51)$$

Veličiny  $T(r_i)$  představují konkrétní hodnoty teplot v místech rozhraní jednotlivých oblastí. V případě hodnoty  $T(r_3)$  se pak jedná o okrajovou podmínku úlohy  $T_s$  zadanou z výpočtů teplotního pole subkanálovou analýzou (viz odst. 5.1.3). Funkce teploty  $T(r)$  je tak pro všechny intervaly prostorové proměnné  $r$  určena jednoznačně.

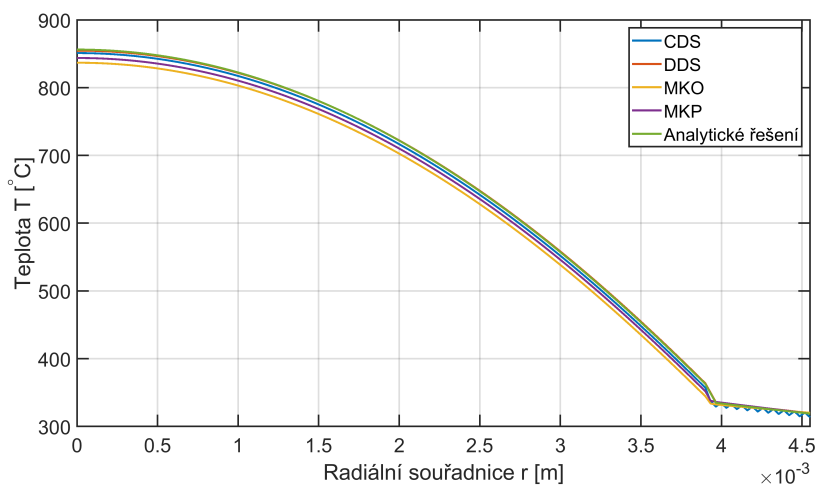
<sup>11</sup>Funkce polylogaritmu je obecně definovaná jako mocninná řada ve tvaru  $\text{Li}_i(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^i}$ .

### 5.3.5.2 Srovnání numerických řešení

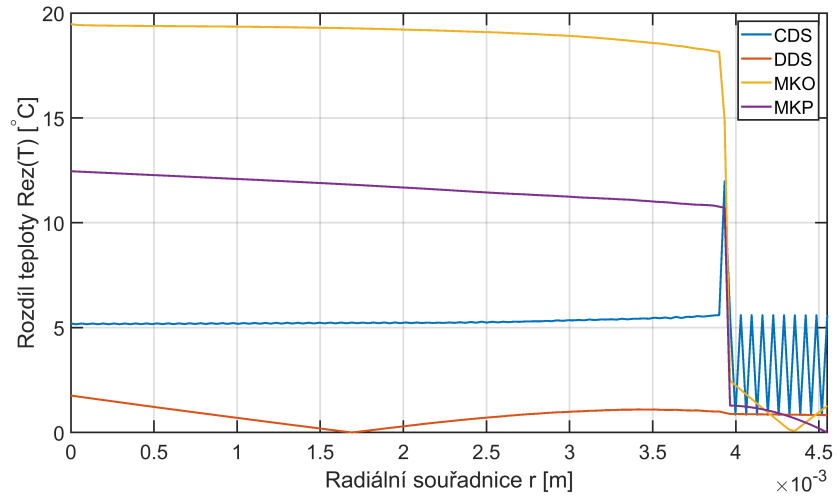
Ve chvíli, kdy je odvozeno analytické řešení úlohy vedení tepla, je možné přistoupit ke srovnání numerických přístupů jejího řešení. Srovnání bylo provedeno vždy pro jeden zvolený radiální směr a různou jemnost diskretizační sítě. Vždy byl pak volen takový počet konečných prvků, aby se v místech materiálových rozhraní nacházel uzlový bod sítě.

Testování ukázalo, že se zvyšující se jemností diskretizační sítě dochází k postupné konvergenci všech použitých numerických metod. Dále, že kvazianalytické řešení se od použití 35 prvků a výše mění v rozsahu maximálně 0,5 % (a lze jej tedy již pro tento počet prvků považovat za dostatečně přesné). Pro libovolný počet prvků diskretizační sítě pak výsledky vykazují stejný charakter viditelný též na obr. 5.19 a 5.20. Nejvyšší přesnosti dosahují algoritmy založené na metodě konečných diferencí, pravděpodobně z toho důvodu, že jsou implementovány na již částečně analyticky odvozené řešení, nejhorších výsledků naopak dosahuje metoda konečných objemů. V případě centrálního diferenčního schématu je pak dobře viditelný (pro tuto metodu typický) „cik-cak“ efekt.

Co se konvergence iteračního procesu tepelné vodivosti  $\lambda$  týče, je v případě všech metod velmi rychlá. Např. pro zastavovací podmínku stanovenou na  $\hat{\varepsilon}_T = 1^\circ\text{C}$  se jedná obvykle o dva až tři kroky iterace, v případě MKO obvykle o pět kroků.



Obrázek 5.19: Graf závislosti teploty  $T$  na radiální souřadnici  $r$  palivového proutku pro různé přístupy k řešení úlohy vedení tepla a volbu 140 prvků diskretizační sítě. Zkratky CDS a DDS označují centrální, resp. dopředné diferenční schéma.



Obrázek 5.20: Graf závislosti teplotní odchylky  $\text{Res}(T)$  numerických řešení od analytického v absolutní hodnotě na radiální souřadnici pro volbu 140 prvků diskretizační sítě.

## 6 Výsledky a diskuze

Jak již bylo několikrát uvedeno, předkládaná práce zpracovává úlohy proudění chladiva v palivovém souboru a vedení tepla v palivovém proutku, přičemž obě tyto úlohy byly programově implementovány v softwarovém prostředí MATLAB/Octave.

Co se úlohy proudění chladiva týče, diskutovány jsou veličiny teploty  $T$  [°C], tlaku  $p$  [Pa], axiální rychlosti  $u$  [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ] a příčného toku  $w$  [ $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ]. Charakter veličin je sledován po délce palivového souboru, na jeho výstupu či v okolí mísících mřížek. S ohledem na klíčový bezpečnostní význam odvodu tepla z aktivní zóny jaderného reaktoru je důraz kladen především na teplotní analýzu, kde je provedeno též srovnání s experimentem. V případě přidružené úlohy vedení tepla v palivovém proutku je primárně sledováno rozložení teploty v rámci průřezu palivového proutku.

### 6.1 Proudění chladiva v palivovém souboru

První vyhodnocovanou úlohou je výpočet proudění chladícího média v palivovém souboru. S ohledem na rozdíly ve výstupních datech při specifické volbě vstupních parametrů byly zvoleny dvě sady okrajových podmínek, jež jsou viditelné v tab. 6.1.

veličina	1. sada dat	2. sada dat
$T_{in}$	268 °C	189 °C
$M_{in}$	3,786 $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$	0,786 $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
$p_{in}$	0 Pa	0 Pa
$w_{in}$	0 $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	0 $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
$Q_{sum}$	0,593 MW	0,593 MW

Tabulka 6.1: Hodnoty okrajových podmínek na vstupu palivového souboru pro různé charakteristiky výstupních dat.

U všech veličin uvedených v tab. 6.1 s výjimkou výkonu palivových proutků předpokládáme na vstupu jejich rovnoměrné rozložení. Další z potřebných vstupních veličin pak již vyjádříme jako přímé funkce vstupní teploty  $T_{in}$  (viz odst. 5.1.1). V případě palivových proutků předpokládáme konstantní hodnotu výkonu po celé jejich délce. Jejich rozložení v rámci výpočtové geometrie pak odpovídá

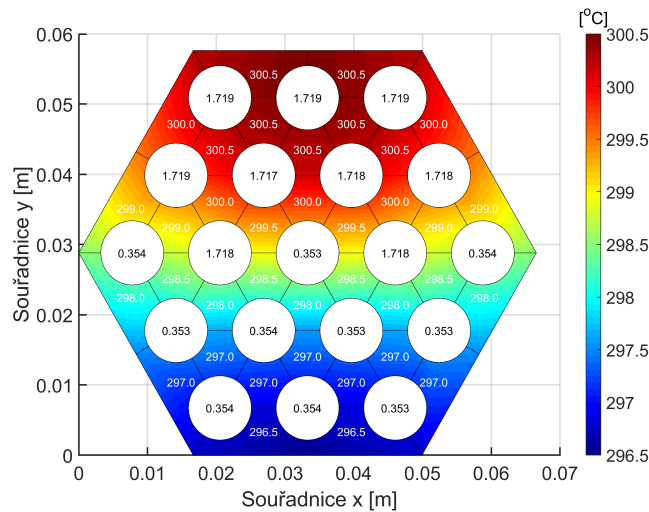
experimentům z analýzy koeficientu turbulentního míšení  $\beta$  (viz odst. 5.2). Co se týče okrajové podmínky na vnějším plášti palivového souboru, zde uvažujeme izolovanost celé soustavy a tedy nulovou výměnu všech veličin s okolím.

Klíčovou roli v rámci srovnání hraje především rozdíl v hodnotách vstupních hmotnostních toků  $M_{in}$ , rozdíl ve vstupních teplotách  $T_{in}$  byl zvolen pouze z toho důvodu, aby výstupní hodnoty teplot (u sady přínaležející menšímu z obou hmotnostní toků) nepřesáhly hranici teploty varu vody (stanovenou pro daný tlak 15,7 MPa přibližně na 350 °C). V případě sady vstupních parametrů obsahujících větší hmotnostní tok  $M_{in}$  se pak jedná o hodnoty odpovídající běžnému provozu tlakovodní jaderné elektrárny.

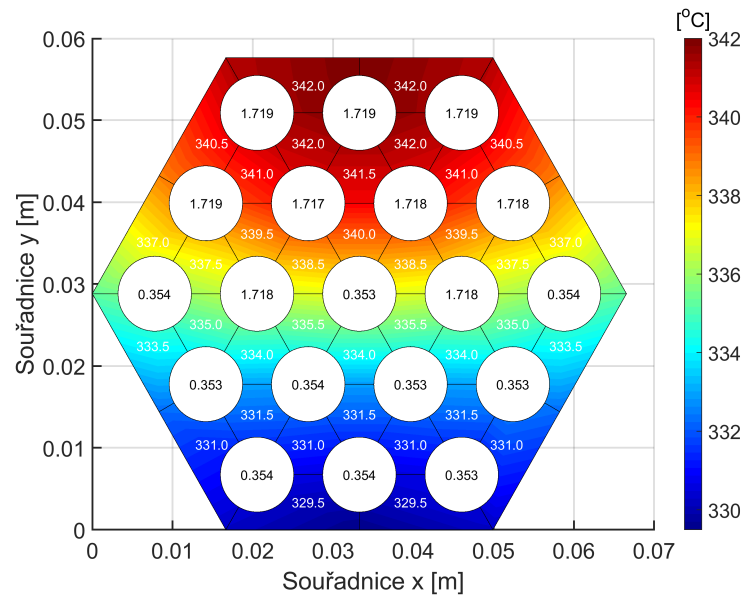
### 6.1.1 Vyhodnocení teploty

První analyzovanou veličinou byla teplota  $T$ , jež byla zkoumána na výstupu palivového souboru (viz obr. 6.1 a 6.2) a po délce souboru (obr. 6.3 a 6.4).

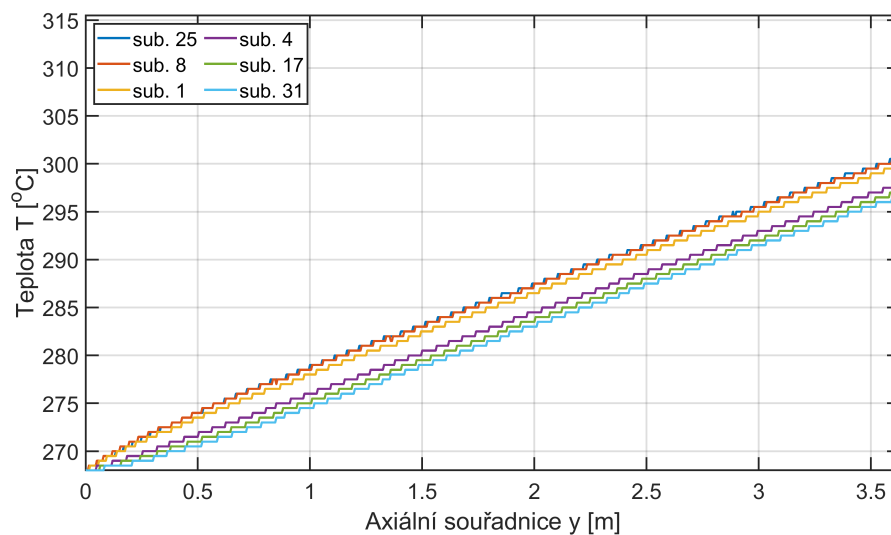
Rozložení výstupních teplot  $T$  odpovídá výpočtovým předpokladům, vyšších teplot tak dosahují subkanály v okolí palivových proutků s vyšším výkonem. Ze srovnání obr. 6.1 a 6.2 pak plyne, že v případě celkového vyššího hmotnostního toku  $M$  dochází k většímu míšení chladiva a výstupní teploty tak mají více homogenní charakter. V konkrétním případě pak rozdíl extrémálních hodnot teploty činí 4 °C pro větší hmotnostní tok  $M$  a 12 °C pro menší  $M$ .



Obrázek 6.1: Rozložení teploty na výstupu palivového souboru pro  $M = 3,786 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Čísla v jednotlivých palivových proutcích odpovídají jejich poměrnému výkonu  $C_Q$ .

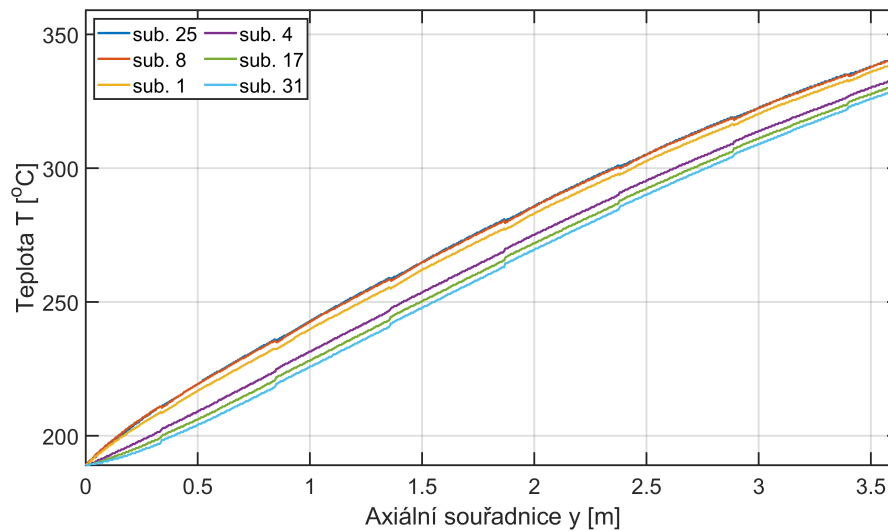


Obrázek 6.2: Rozložení teploty na výstupu palivového souboru pro  $M = 0,786 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Čísla v jednotlivých palivových proutcích odpovídají jejich poměrnému výkonu  $C_Q$ .



Obrázek 6.3: Průběh teploty po délce palivového souboru pro  $M = 3,786 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Rozdíl diskutovaného míšení chladiva je pak dobře patrný z průběhu teplot  $T$  po délce palivového souboru, kde pro případ většího hmotnostního toku  $M$  (obr. 6.3) má funkce teploty  $T$  „schodovitý“ charakter, kdežto v případě menšího  $M$  (obr. 6.4) odpovídá po částech lineární funkci s teplotními skoky v místech mísících mřížek. Zvolené vykreslované subkanály pak odpovídají po řadě směru záporně vzatého teplotního gradientu průřezu geometrie, z pohledu čtenáře se jedná o směr shora dolů (viz volba diskretizace obr. 5.6).



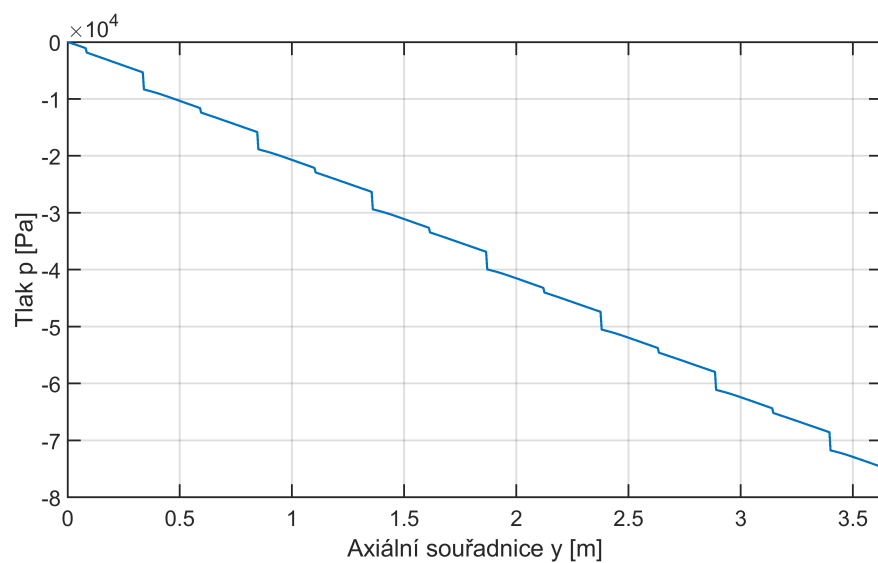
Obrázek 6.4: Průběh teploty po délce palivového souboru pro  $M = 0,786 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 6.1.2 Vyhodnocení tlaku

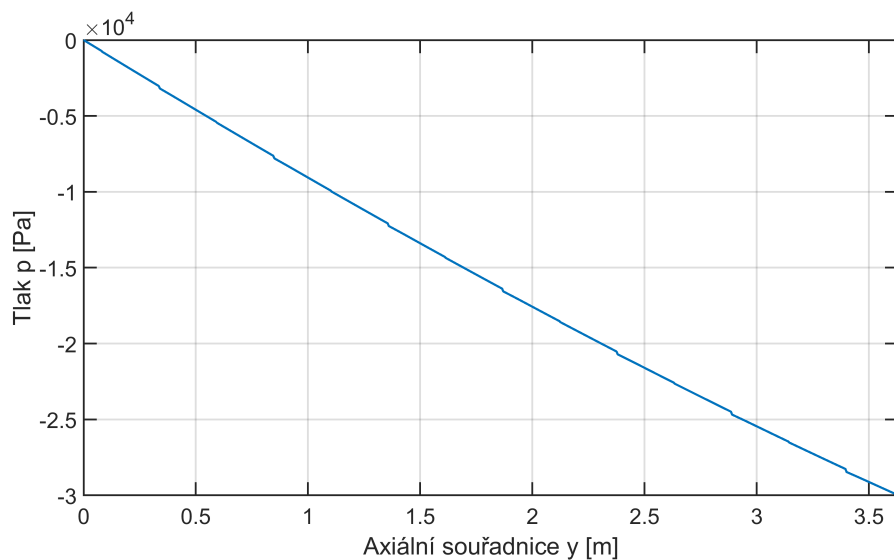
Další z analyzovaných veličin je hodnota tlaku  $p$ . Tu budeme zkoumat po délce palivového souboru (viz obr. 6.5 a 6.6) a v místech kolem mísících mřížek (obr. 6.7 a 6.8).

V případě analýzy tlaků  $p$  po délce palivového souboru jsou opět viditelné rozdíly pro obě hodnoty hmotnostního toku  $M$ , přičemž pro její větší hodnotu (obr. 6.5) je zřetelný celkově větší pokles tlaku i větší skoky v místech mísících i distančních mřížek. Tento jev je opět v souladu s předpoklady danými soustavou rovnic (5.22), jelikož zde jsou členy součinitelů třecího a místního odporu ( $\xi$  a  $\zeta$ ) úměrné kvadrátu hmotnostního toku  $M$ . Zároveň je z obou grafů patrné, že celkový nominální pokles tlaku  $p$  je vůči referenční hodnotě tlaku v celém systému

velmi malý a dříve zavedený předpoklad konstantního tlaku v rámci palivového souboru pro vlastnosti chladiva tedy oprávněný.



Obrázek 6.5: Průběh tlaku po délce palivového souboru pro  $M = 3,786 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

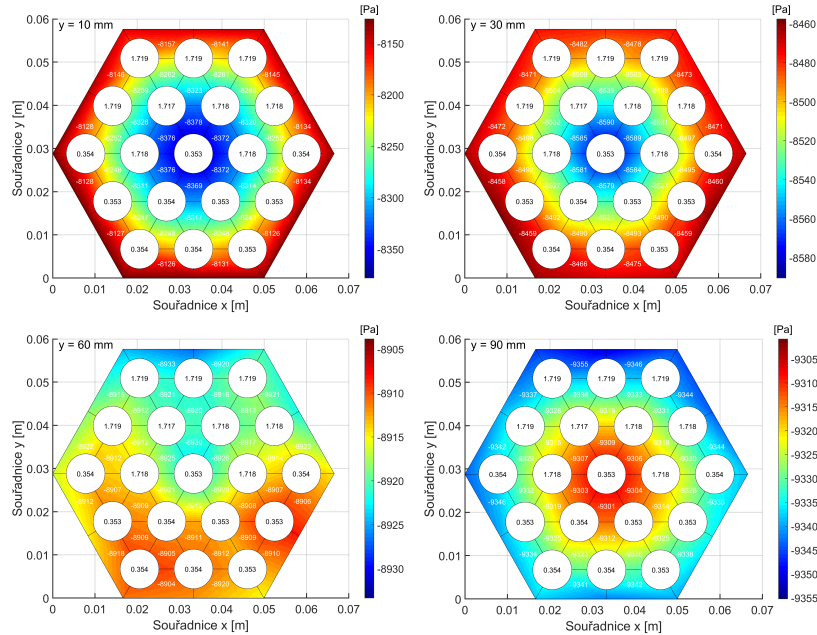


Obrázek 6.6: Průběh tlaku po délce palivového souboru pro  $M = 0,786 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .



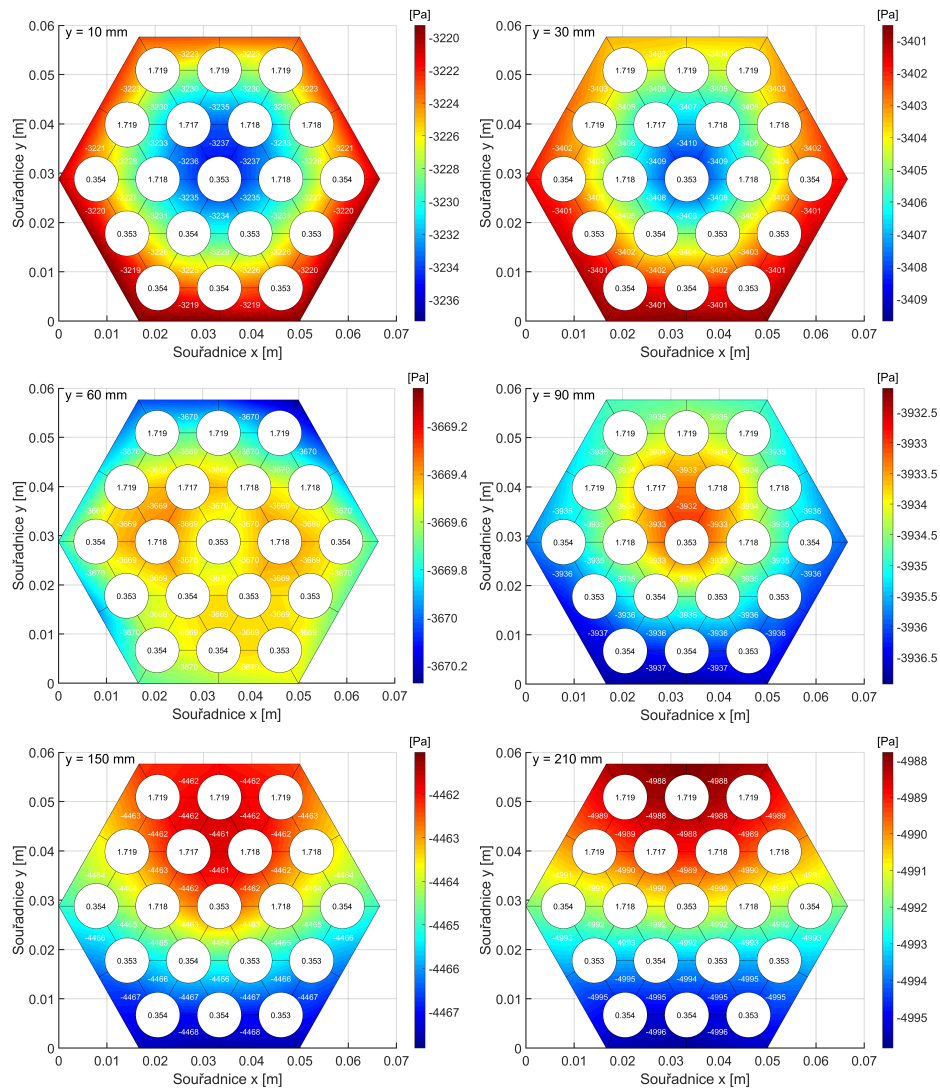
Druhou diskutovanou oblastí je rozložení tlaku  $p$  na okolí mísící mřížky. Na obr. 6.7 a 6.8 je viditelné rozložení tlaků v průřezu palivového souboru v různých vzdálenostech  $y$  od mísící mřížky. Ze srovnání grafických výstupů je patrné, že vzdálenost ustáleného rozložení tlaku<sup>12</sup> je pro menší hmotnostní tok  $M$  (obr. 6.8) dvojnásobná, což odpovídá menšímu míšení hmoty v tomto režimu.

Ze srovnání je taktéž patrné, že centrum nejvyšších hodnot tlaku  $p$  je v obou případech jinak umístěné. To je opět v korelaci s výpočtovou soustavou (5.22), kde při nižší hodnotě hmotnostního toku  $M$  je pro rozložení tlaku rozhodujícím faktorem hodnota měrné hmotnosti  $\rho$  chladiva. Ta je v místech vyšší teploty logicky nižší a úměrně tomu je menší i pokles celkového tlaku  $p$ . V případě vyšších hodnot hmotnostního toku  $M$  nabývají významu též další členy figurující v bilanci tlaku soustavy rovnic (5.22), především pak člen obsahující součinitel třecího odporu  $\xi$ . Ustálené rozložení tlaku  $p$  v průřezu tedy nabývá podoby odpovídající obr. 6.7 vpravo dole. Nutno však zdůraznit, že tlakový rozdíl v rámci jedné axiální vrstvy je v obou případech velice malý.



Obrázek 6.7: Rozložení tlaku v průřezu palivového souboru na okolí mísící mřížky pro  $M = 3,786 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Hodnota  $y$  v levém horním rohu udává vzdálenost od poslední mísící mřížky.

<sup>12</sup>Vzdálenost ustáleného rozložení tlaku definujeme jako nejmenší hodnotu axiální souřadnice  $y$ , od níž se až do následující mísící mřížky nemění charakter rozložení dané veličiny.



Obrázek 6.8: Rozložení tlaku v průřezu palivového souboru na okolí mísící mřížky pro  $M = 0,786 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Hodnota  $y$  v levém horním rohu udává vzdálenost od poslední mísící mřížky.

### 6.1.3 Vyhodnocení dalších veličin

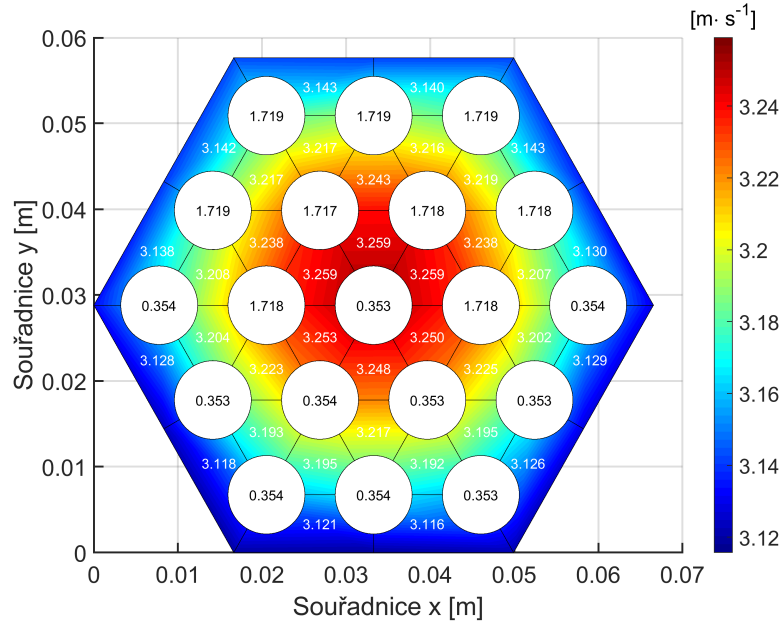
Posledními diskutovanými veličinami úlohy proudění jsou rychlosti v axiálním směru  $u$  (viz obr. 6.9 a 6.10) a příčné toky  $w$  (obr. 6.11). Co se rychlostí v axiálním

směru  $u$  tyče, ty lze vyjádřit pomocí vztahu

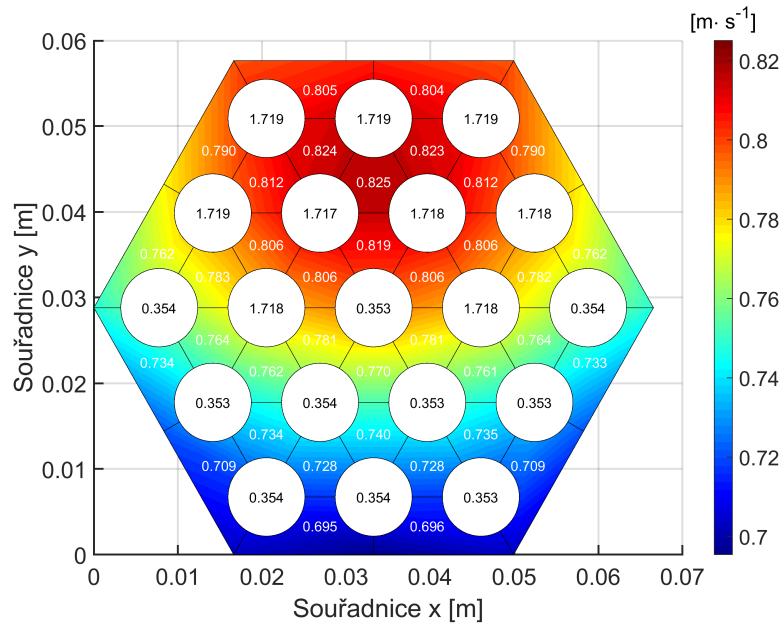
$$u = \frac{M}{\rho A} = \frac{G}{\rho}.$$

Rozložení rychlosti  $u$  tedy bude úměrné hmotnostnímu toku subkanálu plochou jeho průřezu  $G$  a nepřímo úměrné hustotě tekutiny  $\rho$ . Rozložení axiálních rychlostí  $u$  tedy bude představovat superpozici rozložení obou zmiňovaných veličin. Pro případ vyšší hodnoty  $M$  hraje klíčovou roli rozložení plošné hustoty hmotnostního toku  $G$  (které svým charakterem odpovídá rozložení tlaku  $p$ ). Pro případ nižší hodnoty  $M$  pak významnější roli přebírá rozložení měrné hmotnosti  $\rho$ , které odpovídá teplotnímu profilu průřezu geometrie. Tyto předpoklady pak potvrzují i grafické výstupy na obr. 6.9 a 6.10.

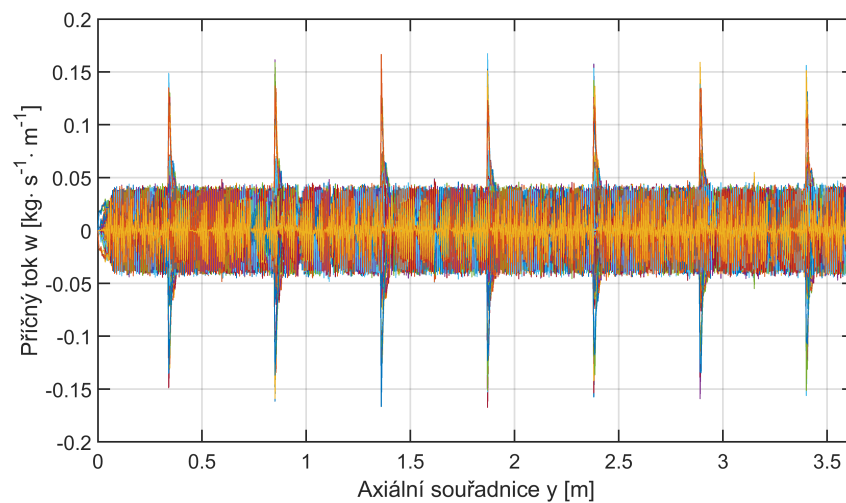
Pro úplnost uveďme též průběh příčného toku  $w$  přes hranice jednotlivých subkanálů (obr. 6.11), na němž je dobře patrná skoková změna veličiny v blízkosti mísících mřížek. S ohledem na totožný charakter grafických výstupů pro oba zkoumané hmotnosti toky  $M$  je uváděn pouze jeden z nich.



Obrázek 6.9: Rozložení axiálních rychlostí  $u$  v průřezu na výstupu palivového souboru pro  $M = 3,786 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .



Obrázek 6.10: Rozložení axiálních rychlostí  $u$  v průřezu na výstupu palivového souboru pro  $M = 0,786 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

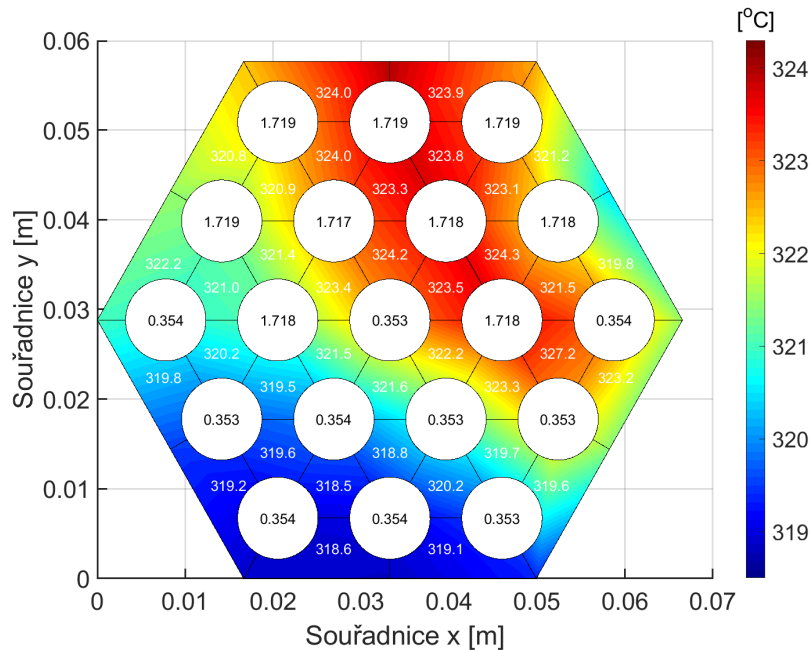


Obrázek 6.11: Průběh příčného toku přes hranice jednotlivých subkanálů po délce palivového souboru pro  $M = 3,786 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 6.1.4 Porovnání výsledků s experimentem

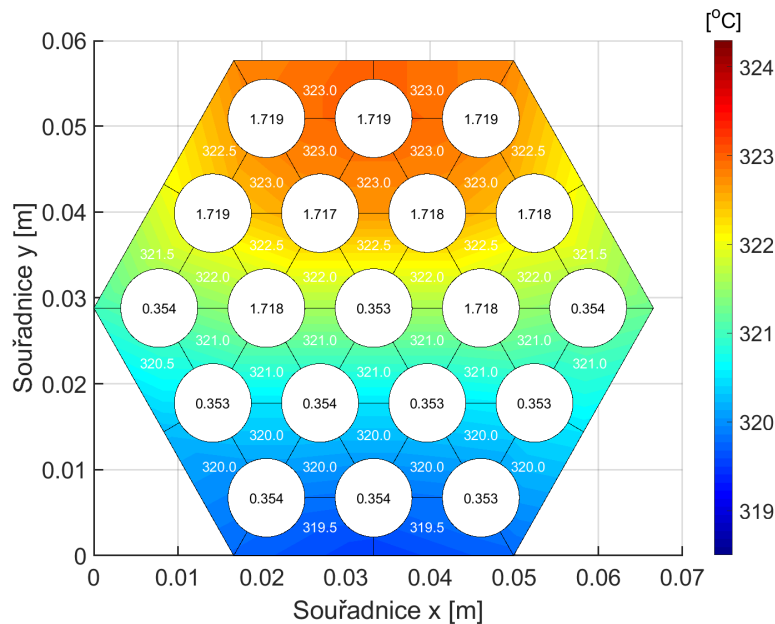
V rámci odst. 5.2 byl prováděn fitovací proces pro nastavení koeficientu  $\beta$  figurujícího ve výrazu (3.24) turbulentního míšení. V rámci tohoto procesu byly srovnávány výstupní teploty palivového souboru pocházející z experimentálních měření s výstupy vyvinutého softwaru založeného na metodě subkanálové analýzy.

Co se experimentálních měření týče, jedná se o sérii testů prováděných firmou Škoda JS pro firmu Westinghouse v roce 1994, a to na experimentálním palivovém souboru s 19 elektricky vytápěnými proutky, jejichž cílem bylo simulovat proudění tlakové vody v palivovém souboru typu VVANTAGE-6 dříve užívaném v jaderné elektrárně Temelín (viz odst. 2.1.2). Výstupní teploty byly měřeny na 36 pozicích, které svým umístěním přibližně odpovídají středům subkanálů při zvolené diskretizaci geometrie výpočtové oblasti. Rozsah naměřených veličin na vstupu a jejich přesnost odpovídají hodnotám uvedeným v odst. 5.2. Pořadí termočlánků je předpokládáno po řadě zleva doprava od horní ke spodní hraně palivového souboru [40].



Obrázek 6.12: Rozložení teploty na výstupu palivového souboru získaného experimentálně pro 4. sadu okrajových podmínek daných tab. 5.6 [40].

Z porovnání grafických výstupů experimentu a výpočtu (viz obr. 6.12 a 6.13) je zřejmé, že na rozdíl od experimentálních dat teplotní profil na výstupu vytvořeného programu přísně kopíruje rozložení výkonů v palivových proutcích a též rozsah teplot, jenž primárně odpovídá nastavené hodnotě součinitele turbulentního míšení  $\beta$ , je menší. Rozdíly mezi oběma přístupy jsou způsobeny primárně zjednodušujícími předpoklady výpočetního modelu, aproximací některých z fyzikálních dějů a nepřesnostmi měřících termočlánků experimentu. Chybný může být též vstupní předpoklad izolovanosti systému. Více na toto téma viz odst. 6.3 zabývající se limity a omezeními vyvinutého softwaru.



Obrázek 6.13: Rozložení teploty na výstupu palivového souboru získané pomocí vyvinutého softwaru založeného na metodě subkanálové analýzy pro 4. sadu okrajových podmínek daných tab. 5.6.

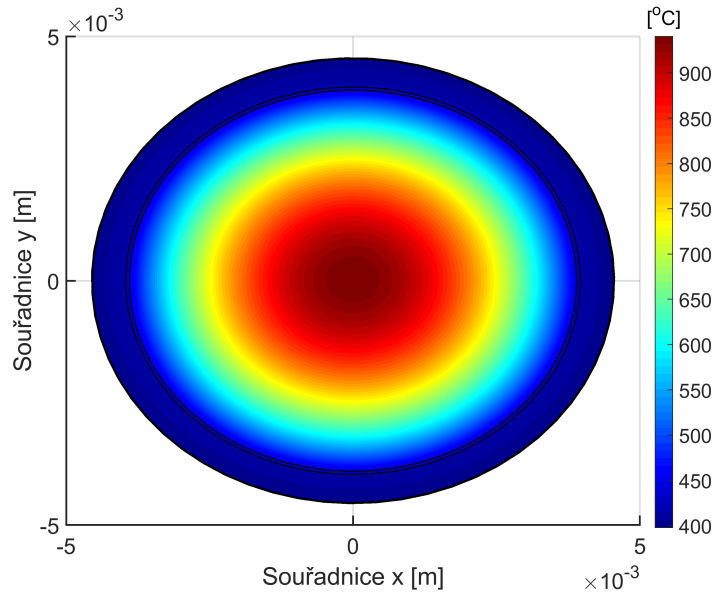
## 6.2 Vedení tepla v palivovém proutku

Přidruženou úlohou, jež byla v rámci diplomové práce analyzována, je stacionární úloha vedení tepla na průřezu palivového proutku. Jak se uvádí v odst. 5.3.4, implementovaný algoritmus využívá již provedených výpočtů subkanálové analýzy k definování okrajové podmínky teploty na vnější stěně pokrytí palivového proutku.

První analyzovanou veličinou je teplota  $T$ , resp. její rozložení v rámci průřezu palivového proutku pro zvolenou axiální souřadnici  $y$  (viz obr. 6.14 a 6.15). S ohledem na základní předpoklady rovnoměrného rozložení výkonu a rotační symetrie úlohy dává výpočtový model více či méně symetrické výstupní rozložení teploty  $T$ , kde míra této symetrie závisí pouze na hodnotách zadané okrajové podmínky (viz srovnání obr. 6.14 a 6.15)<sup>13</sup>.

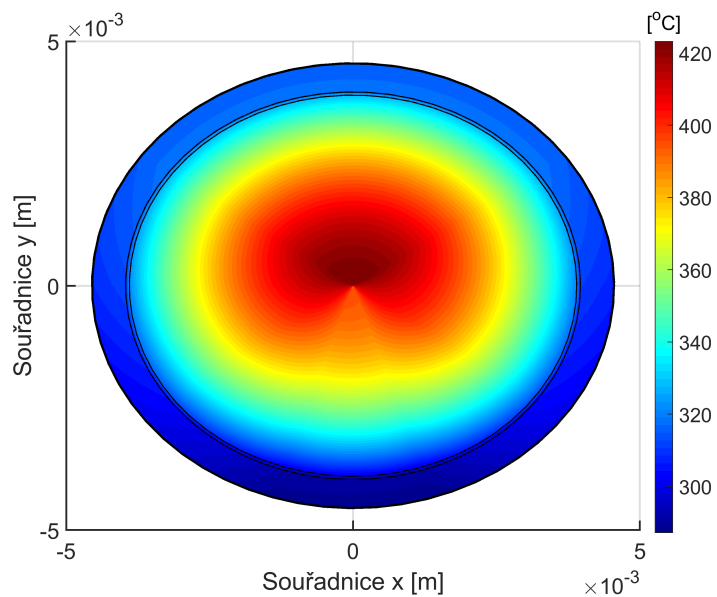
Co se dalších uváděných grafických výstupů týče, ty mají pro všechny nastavení výpočtových parametrů totožný charakter a jsou zde proto uváděny pouze v jednom příkladu. První graf na obr. 6.16 ukazuje průběh teploty  $T$  v průřezu palivového proutku pro jeden zvolený radiální směr, kde jsou dobře rozlišitelné materiálové vrstvy zirkonového pokrytí, heliové mezery a samotného paliva.

Tyto materiálové vrstvy jsou dobře viditelné i v obr. 6.17, který ukazuje průběh veličin tepelné vodivosti  $\lambda$  a změny teploty  $\Delta T$  mezi jednotlivými uzlovými body v průřezu palivového proutku, a to opět pro jeden zvolený radiální směr.

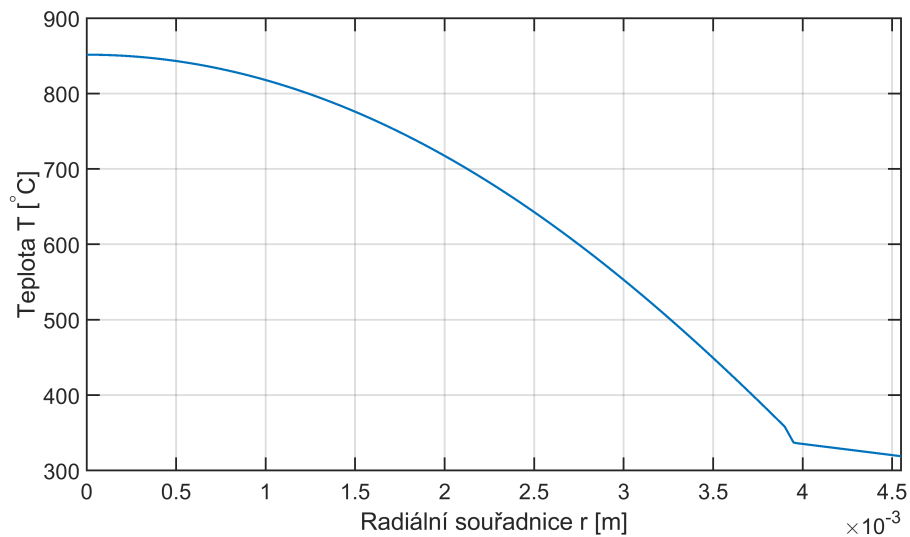


Obrázek 6.14: Rozložení teploty  $T$  v průřezu palivového proutku pro jeho výkon  $Q_{pr} = 54 \text{ kW}$  a teplotní okrajovou podmínku pohybující se v rozmezí  $2,5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

<sup>13</sup>Rozmezí extrémálních teplot okrajové podmínky výstupu obr. 6.15 bylo zvoleno záměrně pro vhodnou demonstraci diskutovaného jevu. Při běžném nastavení výpočtových parametrů programu subkanálové analýzy se takovýchto rozdílů nedosáhne.

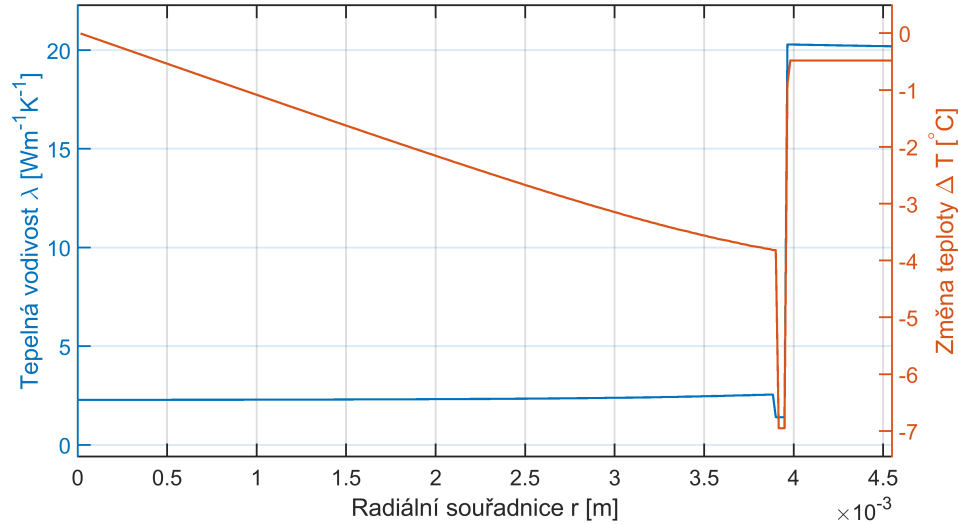


Obrázek 6.15: Rozložení teploty  $T$  v průřezu palivového proutku pro jeho výkon  $Q_{pr} = 11$  kW a teplotní okrajovou podmínku pohybující se v rozmezí  $30$  °C.



Obrázek 6.16: Průběh teploty  $T$  v průřezu palivového proutku pro jeden zvolený radiální směr a výkon proutku  $Q_{pr} = 54$  kW.





Obrázek 6.17: Průběh tepelné vodivosti  $\lambda$  a změny teploty  $\Delta T$  mezi jednotlivými uzlovými body v průřezu palivového proutku pro jeden zvolený radiální směr, výkon proutku  $Q_{pr} = 54 \text{ kW}$  a volbu délky kroku v radiálním směru  $\Delta r = 16,25 \mu\text{m}$ .

### 6.3 Přednosti a omezení vyvinutého softwaru

Poslední diskutovanou oblastí v rámci výsledkové části je zhodnocení předností, nedostatků a omezení vytvořeného programového skriptu s výhledem na jeho případné budoucí směřování. Největší předností programu je rychlost a efektivita výpočtu, který pro jeden palivový soubor s diskretizačním krokem  $\Delta y = 5 \text{ mm}$  a zastavovací podmínku iterace  $\hat{\varepsilon} = 0,05$  trvá řádově do 10 s, v případě přidružené úlohy vedení tepla pak pro krok  $\Delta r = 16,25 \mu\text{m}$ , 10 vybraných radiálních směrů a zastavovací iterační podmínku  $\hat{\varepsilon}_T = 1 \text{ }^\circ\text{C}$  je délka výpočtu přibližně  $1 \text{ s}^{14}$ .

Další výhodou je otevřenost výpočtového modelu, který je možné optimalizovat pro potřeby konkrétní výpočtové geometrie. S dostatečným množstvím experimentálních dat a volných fitovacích parametrů je tak možné dosáhnout vysoké přesnosti výstupních veličin při zachování rychlosti výpočtu. Poslední velkou výhodou programu je jeho plná spustitelnost v softwaru Octave, jenž je dostupný zcela zdarma.

<sup>14</sup>Změřená doba výpočtu odpovídá přenosnému počítači s procesorem Intel Core i5 1.generace a výpočtovému programu MATLAB ve verzi R2018b.

Mezi nevýhody předkládané implementace naopak patří zjednodušení některých fyzikálních jevů, kdy například interakce mezi subkanály jsou přísně lineární (interagují mezi sebou vždy jen sousední subkanály), což může přinášet značné nepřesnosti z pohledu turbulentního proudění tekutiny např. v oblastech kolem mísících mřížek (viz obr. 6.7 a 6.8) a dovoluje pouze výstupní rozložení teploty, jež svým charakterem odpovídá distribuci výkonů palivových proutků v rámci geometrie výpočtové oblasti (viz odst. 6.1.4).

Předložený model taktéž předpokládá nepoddajnost geometrických prvků palivového souboru, rovnoměrné rozložení výkonu palivového proutku a celkovou izolovanost soustavy. Tyto předpoklady však v praxi obecně splněny nejsou. Částečnou nevýhodou je taktéž fakt, že pro každý typ geometrie je třeba udělat novou sadu testovacích měření pro znovunastavení parametrů empirických modelů.

Dalšími nedostatky vytvořeného programu jsou poté nezohlednění skupenských změn v rámci chladiva a nemožnost řešit evoluční (nestacionární) úlohu proudění. Program tak nedokáže simulovat režimy náběhů a doběhů kampaně a je elementárně omezen na analýzu proudění při teplotách nacházejících se pod hranicí teploty varu chladicího média (pro předepsaný tlak se jedná přibližně o hodnotu 350 °C). Všechny přednosti a nevýhody jsou pak bodově shrnuty v tab. 6.2.

<b>Klady</b>		<b>Zápory</b>	
+	Rychlost a efektivita výpočtu	–	Problematické modelování turbulencí, nepřesný předpoklad izolovanosti výpočtové oblasti
+	Dostupnost zcela zdarma	–	Absence modelování poddajnosti těles, nemožnost řešení evoluční úlohy, nezohlednění skupenských změn chladiva
+	Možnost optimalizace volných parametrů empirických modelů pro každou výpočtovou geometrii	–	Potřeba nového nastavení parametrů empirických modelů pro každou výpočtovou geometrii

Tabulka 6.2: Bodové zhodnocení předností, nedostatků a omezení předkládané programové implementace.

## 7 Závěr

Cílem diplomové práce byl návrh metodiky, vývoj vlastních efektivních algoritmů a jejich počítačová implementace pro numerickou simulaci proudění chladiva v aktivní zóně jaderného reaktoru a pro simulaci vedení tepla na průřezu palivového proutku.

Proudění tekutin je obecně popsáno nelineárním systémem Navierových-Stokesových rovnic, které představují soustavu základních fyzikálních zákonů zachování hmotnosti, hybnosti a celkové energie systému. S ohledem na potřebu vysoké efektivity výpočtů při zachování dostatečné přesnosti výstupních dat se v průběhu let vyvinula specifická metodika řešení úlohy proudění v oblasti aktivní zóny jaderného reaktoru nesoucí souhrnný název subkanálová analýza. O tuto metodu, která využívá vhodných zjednodušení obecné úlohy proudění tekutin, se opírá i tato práce.

Konkrétně bylo subkanálové analýzy využito při řešení stacionární úlohy proudění chladiva v palivovém souboru, která je v rámci této metody popsána soustavou čtyř nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic. K počítačové implementaci úlohy byly nejprve výchozí rovnice diskretizovány pomocí metody konečných diferencí a následně programově implementovány v softwarovém prostředí MATLAB/Octave.

Zvolenou výpočtovou geometrií byl palivový soubor s 19 proutky umístěnými v pravidelné hexagonální mříži, pro nějž existuje široká množina naměřených experimentálních dat poskytnutá firmou Škoda JS a.s. Na základě těchto dat bylo provedeno nastavení modelového parametru koeficientu turbulentního míšení tak, aby rozdíl směrodatných odchylek výstupních teplot experimentů a výpočtů byl minimální.

Ve výsledkové části byly poté vyhodnoceny a diskutovány výstupní veličiny teploty, tlaku, axiální rychlosti a hmotnostního toku v příčném směru na jednotku délky. Výsledky byly uvedeny pro charakterově dvě odlišné sady okrajových podmínek úlohy a bylo provedeno jejich porovnání, přičemž všechny výstupy byly v souladu s předpoklady danými matematickým modelem subkanálové analýzy.

Rozložení teplot na výstupu palivového souboru koresponduje s distribucí výkonu mezi palivové proutky a rozdíl extrémálních hodnot je dán především nastavením koeficientu turbulentního míšení a velikostí hmotnostního toku v axiálním směru na vstupu. Pro axiální pozice s umístěnými mísícími či distančními mřížkami jsou pak typické skokové změny veličin tlaku a hmotnostního toku v příčném směru na jednotku délky. Velikost skokových změn je opět úměrná

velikosti vstupního hmotnostního toku v axiálním směru.

Co se zjištěných rozdílů mezi dostupnými experimentálními daty a numerickými výpočty týče, ty jsou pravděpodobně způsobeny kombinací zjednodušujících předpokladů výpočetního modelu, nedostatečnou aproximací některých z fyzikálních dějů, nesplněním předpokladu izolovanosti soustavy či nepřesnostmi měřících přístrojů experimentální sady.

Druhým numericky řešeným problémem v této práci byla úloha vedení tepla na průřezu palivového proutku. S ohledem na rotační symetrii úlohy byla provedena její restrikce na 1D řešení, které je provedeno pro několik vybraných radiálních směrů (odpovídajících různé volbě směrového úhlu ze středu palivového proutku) a opětovně složeno do rovinné geometrie.

Stacionární úloha vedení tepla byla řešena metodami konečných diferencí, konečných objemů a konečných prvků a výstupy těchto metod byly následně porovnány. Nejlepší vlastnosti řešení vykazovala metoda konečných diferencí využívající dopředné diferenční formule. Bylo též odvozeno kvazianalytické řešení opírající se o numericky předpočtená data, které dosahuje při stejném kroku diskretizace numerické metody řádově vyšší přesnosti.

Ve výsledkové části byl diskutován především vliv rozložení výstupní teploty v 2D geometrii v závislosti na volbě teplotní okrajové podmínky. Ukázalo se, že pro rovnoměrnější charakter okrajové podmínky dosahuje navržený výpočtový model vyšší přesnosti výstupů. Pro rozdíl extrémálních hodnot okrajové podmínky nad  $10^{\circ}\text{C}$  je již rozložení teploty v rovinné geometrii zkreslené. V praxi je však tento jev zastoupen jen výjimečně a restrikce na 1D úlohu je tedy oprávněná.

Co se vlastního přínosu týče, předkládaná práce přinesla z teoretického pohledu podrobné odvození rovnic matematického modelu subkanálové analýzy, které je v České republice zcela unikátní a v takovémto rozsahu dosud nepublikované. Vyvinutý software pak může sloužit pro případnou kontrolu či hledání chyb v komerčním a ve Škodě JS a.s. vyvíjeném subkanálovém kódu CALOPEA. Diplomová práce bude v budoucnu ve firmě Škoda JS a.s. sloužit jako ucelený studijní podklad pro nové pracovníky, kteří se budou zabývat problémem výpočtů metodou subkanálové analýzy.

Další možné směřování práce či zlepšování dosud vyvinutého softwaru pak lze spatřovat především v oblasti řešení nestacionárních úloh, zohlednění skupenských změn chladícího média a dalšího zpřesňování výpočetního modelu opírajícího se o srovnání s odlišnými přístupy k řešení dané problematiky pomocí CFD modelování či pomocí vhodně navržených experimentů.

## 8 Seznam použité literatury

- [1] World-nuclear.org. (2020). *World nuclear power reactors — Uranium requirements — Future nuclear power - World nuclear association*. [online] Available at: <https://www.world-nuclear.org/information-library/facts-and-figures/world-nuclear-power-reactors-and-uranium-requireme.aspx> [Accessed 1 April 2020].
- [2] Ibler, Z. (1987). *Provoz jaderných elektráren*. Plzeň: Vys. škola strojní a elektrotechn.
- [3] Hezoučký, F. and Štěch, S. (2015). *Základy teorie normálních a abnormálních provozních režimů energetických bloků s tlakovodními reaktory*. Plzeň: Západočeská univerzita..
- [4] Štěpánková, J. (n.d.). *RADIOEKOLOGIE*. [online] Slideplayer.cz. Available at: <https://slideplayer.cz/slide/2021892/> [Accessed 1 April 2020].
- [5] Svět energie (2016). *Jaderné elektrárny 3D – Interaktivní model elektrárny*. [online] Svetenergie.cz. Available at: <https://www.svetenergie.cz/cz/elektrarny/jaderne-elektrarny/jaderne-elektrarny-3d> [Accessed 1 April 2020].
- [6] Moorthi, A., Kumar Sharma, A. and Velusamy, K. (2018). *A review of sub-channel thermal hydraulic codes for nuclear reactor core and future directions*. Nuclear Engineering and Design, 332, pp.329-344.
- [7] Zdebor, J. (2016). *Podpůrné materiály pro studium předmětu JEP/ KKE*. Lecture, Plzeň.
- [8] Jančar, R. (2007). *Temelín pojede na ruské i americké palivo. Byli jsme u toho*. [online] iDNES.cz. Available at: [https://www.idnes.cz/technet/-technika/temelin-pojede-na-ruske-i-americke-palivo-byli-jsme-u-toho.A071125\\_170027\\_tec\\_technika\\_rja](https://www.idnes.cz/technet/-technika/temelin-pojede-na-ruske-i-americke-palivo-byli-jsme-u-toho.A071125_170027_tec_technika_rja) [Accessed 1 April 2020].
- [9] Samoilov, O., Shipov, D., Falkov, A., Romanov, A. and Sholin, E. (2011). *TVSA-12 Fuel assembly. Thermohydraulic characteristics of the TVSA-12 with mixing grids*. [online] Inis.iaea.org. Available at: [https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig\\_q=reportnumber:%22INIS-BG-1427%22](https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=reportnumber:%22INIS-BG-1427%22) [Accessed 1 April 2020].

- [10] En.wikipedia.org. (2019). *Nucleate boiling*. [online] Available at: [https://en.wikipedia.org/wiki/Nucleate\\_boiling#cite\\_ref-2](https://en.wikipedia.org/wiki/Nucleate_boiling#cite_ref-2) [Accessed 1 April 2020].
- [11] Reynolds, W.C., Kattchee, N. (1961). *HECTIC, An IBM 704 computer program for heat transfer analysis of gas cooled reactors*. Aerojet-General Nuclear.
- [12] Rowe, D.S. (1967). *Cross-Flow mixing between parallel flow channels during boiling Part-I COBRA-Computer program for coolant boiling in rod arrays*. BNWL.
- [13] Škoda JS a.s. (2005). *Subkanálová analýza palivových kazet reaktorů typu VVER 440*. Program CALOPEA. Plzeň.
- [14] Eifler, W., Nijsing, R. (1973). *VELASCO – Velocity field in asymmetric rod configurations*. Ispra Report.
- [15] Carajilescov, P. (1975). *Experimental and analytical study of axial turbulent flows in an interior subchannel of a bare rod bundle*. Massachusetts Institute of Technology.
- [16] Novendstern, E.H. (1972). *Turbulent flow pressure drop model for fuel rod assemblies utilizing a helical wire wrap spacer system*. Nucl. Eng. Des.
- [17] Ibragimov, M.C., Usupov, I.A., Subbotin, V.I. (1967). *The calculation and experimental investigation of velocity distribution in noncircular channels of complex form*. Liquid Meta.
- [18] Combustion Engineering Inc. (1977). *TORC code - verification and simplification methods*. CENPD-206-NP.
- [19] Hishida, H. (1974). *An analytical method of evaluating the effect of rod displacement on circumferential temperature and heat flux distributions in turbulent flow through unbaffled rod bundles*. Nucl. Eng. Des.
- [20] Biemüller, M., Meyer, L., Rehme, K. (1996). *Large eddy simulation and measurement of the structure of turbulence in two rectangular channels connected by a gap*. Turbulence Modelling and Experiments.
- [21] Conner, M.E., Baglietto, E., Elmahdi, A.M. (2010). *CFD methodology and validation for single-phase flow in PWR fuel assemblies*. Nucl. Eng. Des.

- [22] Hirsch, C. (1997). *Numerical computation of internal and external flows*. Chichester [England]: John Wiley & Sons.
- [23] Bistafa, S. (2017). *On the development of the Navier-Stokes equation by Navier. History of physics and related sciences*. [online] Available at: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172-018000200703&lng=en&tlng=en](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172-018000200703&lng=en&tlng=en) [Accessed 1 April 2020].
- [24] En.wikipedia.org. (2020). *History of fluid mechanics*. [online] Available at: [https://en.wikipedia.org/wiki/History\\_of\\_fluid\\_mechanics](https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_fluid_mechanics) [Accessed 1 April 2020].
- [25] Distart119.ing.unibo.it. (n.d.). *Reynolds transport theorem*. [online] Available at: <https://distart119.ing.unibo.it/albertold/files/Reynoldstheorem.pdf> [Accessed 1 April 2020].
- [26] Sciencedirect.com. (2009). *Reynolds transport theorem - An overview — Sciencedirect topics*. [online] Available at: <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/reynolds-transport-theorem> [Accessed 1 April 2020].
- [27] AREVA NP Inc. (2010). *COBRA-FLX: A core thermal-hydraulic analysis code*. [online] Available at: <https://www.nrc.gov/docs/ML1015/-ML101550179.pdf> [Accessed 1 April 2020].
- [28] Státní výzkumný ústav pro stavbu strojů Běchovice (1985). *CALOPEA - Výpočet lokálních termohydraulických parametrů kazet reaktorů typu VVER v procesu vyhořování paliva*. Praha.
- [29] McGregor, C., Nimmo, J. and Stothers, W. (2011). *Fundamentals of university mathematics*. Oxford: Woodhead Pub.
- [30] Mareš, R. (2008). *Kapitoly z termomechaniky*. Plzeň: Západočeská univerzita.
- [31] Michejev, M. (1953). *Základy sdílení tepla*. Praha: SNTL.
- [32] Cengel, Y. (2002). *Heat transfer*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill higher education.
- [33] Causon, D. and Mingham, C. (2010). *Introductory finite difference methods for pdes*. Book boon.

- [34] Versteeg, H. and Malalasekera, W. (1996). *An introduction to computational fluid dynamics*. Harlow: Longman.
- [35] Kim, N. and Sankar, B. (2009). *Introduction to finite element analysis and design*. New York: John Wiley & Sons.
- [36] Peacesoftware.de. (2007). *Online calculation of properties of water and steam*. [online] Available at: [http://www.peacesoftware.de/einigewerte/wasser\\_dampf\\_e.html](http://www.peacesoftware.de/einigewerte/wasser_dampf_e.html) [Accessed 27 May 2020].
- [37] Rosenberg, J. (1987). *Statika*. Plzeň: Ediční středisko VŠSE.
- [38] Mathworks.com. (n.d.). *MATLAB - Mathworks*. [online] Available at: [https://www.mathworks.com/products/matlab.html?s\\_tid=hp\\_products\\_matlab](https://www.mathworks.com/products/matlab.html?s_tid=hp_products_matlab) [Accessed 27 May 2020].
- [39] Škoda JS a.s. (2009). *Program CALOPEA-MS, Subkanálová analýza AZ reaktorů typu VVER 1000*. Plzeň.
- [40] Škoda JS a.s. (1994). *Zkoušky krize varu a mixace*. Plzeň.
- [41] Škoda JS a.s. (n.d.). *Vyhodnocení součinitele míšení a korelačních limitů WVLO, WVHI, WX, WX1L a WX1H pro subkanálový kód CALOPEA-MS*. Plzeň.
- [42] Wolframalpha.com. (n.d.). *Wolfram Alpha*. [online] Available at: [https://www.wolframalpha.com/input/?i=%E2%88%ABx%2F%28a%2Bb\\*e%5E%-28x%2Fc%29%29dx](https://www.wolframalpha.com/input/?i=%E2%88%ABx%2F%28a%2Bb*e%5E%-28x%2Fc%29%29dx) [Accessed 27 May 2020].