

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Řešení úloh elastodynamiky pro
jednorozměrná a dvourozměrná
heterogenní elastická prostředí**

Autor: Bc. Ondřej Kába
Vedoucí: Ing. Vítězslav Adámek, Ph.D.

Červen 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 30. 6. 2020

Ondřej Kába

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval svým rodičům, kteří mě v celém trvání studia bezpodmínečně podporovali a umožnili mi se bezstarostně vzdělávat i věnovat svým mimoškolním zájmům.

Dále bych chtěl poděkovat Ing. Vítězslavu Adámkovi, Ph.D. za příkladné a odborné vedení této práce, za jeho věnovaný čas, podnětné rady, připomínky a motivaci v posledních měsících studia. Děkuji také Ing. Romanu Kroftovi a Ing. Janu Kryskovi, Ph.D. za pomoc při návrhu a za realizaci experimentů provedených v rámci této práce.

V neposlední řadě bych chtěl poděkovat své přítelkyni a přátelům za pochopení a morální podporu v závěru mého studia.

V Plzni dne 30. 6. 2020

Ondřej Kába

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá problematikou šíření nestacionárních vln v jedno-rozměrných a dvourozměrných elastických heterogenních prostředích. Na základě vztahů pro popis posuvů a napětí v homogenní tenké tyči je odvozeno řešení pro vrstevnatou tyč s libovolným počtem vrstev. Toto řešení je dále využito k aproximaci odezvy tyče z funkčně gradovaného materiálu. Výsledky této aproximace jsou pro konkrétní úlohy porovnány s řešením tohoto problému získaným metodou konečných prvků. Na základě odvozených vztahů je řešen problém návrhu vrstevnaté tyče za účelem minimalizace odezvy na rázové zatížení. Ve druhé části práce je popsáno odvození řešení pro nestacionární rovinnou napjatost v nekonečném pásu se speciální ortotropií a z něj vycházející řešení pro ortotropní dvouvrstvý pás. Výsledky získané pomocí tohoto řešení jsou porovnány s výsledky numerických simulací. Získané analytické a numerické řešení problému je dále porovnáno s experimentálně stanovenou odezvou reálných pásů. Experimentální data jsou následně využita k identifikaci materiálových parametrů a k diskuzi vhodnosti umístění měřících bodů v souvislosti s řešeným optimalizačním problémem.

Abstract

This thesis focuses on problems of non-stationary stress wave propagation in one-dimensional and two-dimensional elastic heterogeneous media. The analytical solution of this problem for a layered rod with an arbitrary number of layers is derived from the solution of the same problem for homogeneous rods. This solution is then used to approximate the response of a functionally graded rod. Results acquired by this approximation and by FEM are compared. An inverse problem of layered rod design with the goal of minimizing the rod's stress response to impact excitation is solved. In the second part of the thesis, the description of the solution for non-stationary plane stress problem of an infinite homogeneous and two-layered strip with special orthotropy is presented. Results obtained by this solution and by a numerical model are compared. Both of these results are then compared with the response of real strips acquired by an experiment. These experimental data are used as a basis for solving an inverse problem of material parameters identification and the suitability of the chosen measuring points for solving this optimization problem is discussed.

Obsah

1	Úvod	2
2	Šíření vln v homogenních a heterogenních prostředích	3
3	Šíření nestacionárních vln v 1D elastickém heterogenním prostředí	4
3.1	Formulace problému	4
3.2	Odvození analytického řešení v Laplaceově oblasti pro obecné 1D vrstevnaté prostředí	5
3.3	Vyčíslení analytického řešení v časové oblasti pomocí numerické zpětné Laplaceovy transformace	7
3.4	Aplikace odvozeného řešení na 1D elastické funkčně gradované prostředí	10
3.5	Aplikace řešení na vybrané úlohy optimalizace materiálových vlastností	17
4	Šíření nestacionárních vln ve 2D homogenním a heterogenním prostředí	22
4.1	Formulace problému	22
4.2	Řešení úlohy ortotropního pásu	23
4.3	Řešení úlohy dvouvrstvého ortotropního pásu	29
4.4	Vyčíslení řešení pro konkrétní úlohy	31
4.5	Numerické řešení problému	35
5	Porovnání získaných výsledků a experimentálních dat pro 2D úlohu	39
5.1	Příprava vzorků a měřicí aparatury	39
5.2	Popis měření na homogenních a vrstevnatých pásech	39
5.3	Zpracování experimentálních dat a identifikace materiálových parametrů	41
5.4	Tahová zkouška vzorků a porovnání nestacionární odezvy vrstevnatých pásů	46
5.5	Měření a optimalizace pro nové sledované body	51
6	Závěr	56
	Reference	57
A	Příloha	59
B	Příloha	60
C	Příloha	61

1 Úvod

Tato práce se zabývá šířením napětíových vln v jednorozměrných a dvourozměrných heterogenních elastických prostředích. Prvním cílem práce je nalezení analytického a numerického řešení pro nestacionární odezvu tenké vrstevnaté tyče a aplikace získaných výsledků na inverzní úlohy 1D vrstevnatého a gradovaného prostředí. Dalším cílem je rozšíření úlohy na vybraný 2D problém homogenního a heterogenního materiálu a zkoumání jeho odezvy jak analytickým a numerickým, tak experimentálním přístupem.

V první části práce jsou nejprve stručně zmíněny některé publikace zabývající se podobnou tematikou. V následující kapitole je provedeno odvození řešení pro nestacionární napjatost ve vrstevnaté tenké tyči s libovolným počtem vrstev. Dále je v této kapitole popsáno několik algoritmů pro numerickou zpětnou Laplaceovu transformaci, které jsou využity k vyčíslení odezvy vrstevnaté tyče pro konkrétní případy. Na těchto úlohách jsou prezentovány možnosti, výhody i nevýhody těchto algoritmů. V další části je odvozené řešení využito k aproximaci odezvy funkčně gradovaných tenkých tyčí. Tato aproximace je následně porovnávána s různými přístupy modelování gradovaných materiálů pomocí zvoleného konečnoprvkového softwaru. Nakonec je v této kapitole prezentováno a řešeno několik variant optimalizační úlohy návrhu vrstev tenké tyče s cílem minimalizovat amplitudu napětí na jejím nebuzeném konci.

Ve čtvrté kapitole je popsáno odvození řešení pro odezvu nekonečného pásu se speciální ortotropií na buzení rázového charakteru. Toto řešení je dále využito k odvození odezvy ortotropního dvouvrstvého pásu. Následně je popsán způsob vyčíslení odvozených vztahů a jsou diskutovány rozdíly v šíření vln v isotropním, ortotropním a ortotropním vrstevnatém pásu. Pro konkrétní úlohy jsou výsledky získané pomocí odvozeného řešení porovnány s výsledky numerického modelu a je zkoumána míra jejich shody. Pátá kapitola je věnována experimentálnímu měření, které bylo provedeno v rámci této práce, popisu použité aparatury a způsobu zpracování naměřených dat. Zmíněná data jsou následně využita k identifikaci materiálových parametrů vzorků, na nichž bylo měření realizováno. Tato optimalizační úloha je založena na analytickém řešení odvozeném pro vrstevnatý pás v předchozí kapitole. Na konci kapitoly je diskutována míra shody experimentálních dat a analytických výsledků pro nalezené materiálové parametry.

Při odvozování a úpravě prezentovaných analytických vztahů byl využíván symbolický software Maple 16. Vyčíslení těchto vztahů a řešení optimalizačních úloh bylo pak realizováno v softwaru Matlab R2016a. Konečnoprvkové modely, jejichž výsledky jsou v práci prezentovány, byly vytvořeny v programu MSC.Marc/Mentat 2016.

2 Šíření vln v homogenních a heterogenních prostředích

Problematika šíření nestacionárních podélných vln v tenkých elastických vrstevnatých tyčích řešená v první části této práce navazuje na [1], kde je na základě jiných prací odvozeno analytické řešení pro homogenní tenkou tyč a pro vrstevnatou tyč se třemi vrstvami. Odvozené řešení je v [1] ověřeno experimentem, který je následně využit jako vstup pro řešení inverzních úloh za účelem určení materiálových parametrů a identifikace buzení. Tato práce rozšiřuje zmíněný problém na libovolný počet vrstev s možností aproximovat tak odezvy tyčí z funkčně gradovaných materiálů, kterým se věnuje kniha [2]. V ní jsou popsány metody návrhu a modelování takovýchto materiálů, provedena analýza jejich chování při lomu, zhodnocení jejich vhodnosti pro strukturální aplikace apod. Návrhem gradovaných materiálů pro minimalizaci napětí pomocí 1D modelu se zabývá Bruck ve svém článku [3]. Práce [4] řeší šíření elastických vln v jednorozměrných fononických krystalech s funkčně gradovanými materiály. Jsou zde využity metody spektrálních prvků a přenosové matice pro návrh frekvenčních filtrů. Krapez ve svém článku [5] představuje metodu pro získání exaktního řešení pro šíření tepla a různých úloh šíření vln v gradovaných 1D materiálech jako alternativu k aproximaci takových materiálů pomocí vrstev. Práce [6] zkoumá pomocí metody konečných prvků vlastní tvary a frekvence funkčně gradovaných nosníků za předpokladů Euler-Bernoulliho teorie. Analytickým i přibližným řešením pro kritickou sílu při vzpěru nosníků s exponenciální závislostí materiálových parametrů se zabývá [7].

Problém šíření nestacionárních vln ve dvourozměrném isotropním elastickém pásu byl řešen už v roce 1976 v práci [8] pomocí metody integrálních transformací. V práci [9] je na základě tohoto řešení odvozeno řešení úlohy vrstevnatého elastického pásu, které je následně použito ke stanovení přesnosti modifikované Timošenkovy nosníkové teorie pro vrstevnaté nosníky. V další práci [10] je pak prezentováno řešení pro nestacionární odezvu viskoelastického pásu na buzení rázového charakteru. V článku [11] je řešeno šíření pulsů vyvolaných rázem ve vrstevnatém pásu pomocí jiného přístupu, konkrétně přenosové matice. Dále je zde zkoumán návrh optimálních materiálových parametrů pro snížení amplitudy a prodloužení trvání procházejícího pulsu. Podobný případ metodou charakteristik řeší [12] pro dvě vrstvy. V článku [13] je řešen problém dvouvrstvého viskoelastického média buzeného polonekonečným pásem pohybujícím se po volné hraně jedné z vrstev konstantní rychlostí s možným využitím při modelování seismických charakteristik Země. Práce [14] řeší s využitím zpětné numerické Laplaceovy transformace problém viskoelastického pásu s trhlinou v podélném směru. Zaměřuje se na faktor intenzity napětí v tomto médiu při rázovém napětí způsobujícím rozšiřování trhliny. Elastické vlny v ortotropních kompozitních pásech jsou řešeny pomocí metody spektrálních prvků v práci [15]. Je zde zkoumána závislost šíření vln na orientaci vláken a jejich objemovém poměru.

3 Šíření nestacionárních vln v 1D elastickém heterogenním prostředí

V následující kapitole bude odvozeno řešení nestacionární napjatosti v tenké tyči složené z libovolného počtu vrstev různých materiálových vlastností. Toto odvození bude zobecňovat řešení pro třívrstvou tyč z práce [1]. Základem odvození je Laplaceův obraz obecného řešení v homogenní tenké tyči a předpoklad spojitosti posuvů a napětí na rozhraních vrstev. Pro vyčíslení odvozeného řešení v časové oblasti budou využity tři algoritmy pro numerickou zpětnou Laplaceovu transformaci, které budou v této kapitole porovnány. Nalezené řešení bude využito k aproximaci odezvy tenké tyče z funkčně gradovaného materiálu. Toto přibližné řešení bude porováno s výsledky numerické simulace. Nakonec budou odvozené vztahy využity k řešení úlohy návrhu optimálního materiálového složení tyče za účelem minimalizace odezvy na jejím vetknutém konci.

3.1 Formulace problému

Při řešení úlohy nestacionární napjatosti ve vrstevnaté tenké tyči, jejíž příčný rozměr je výrazně menší než vlnová délka nejkratší vlny, která se tyčí šíří, bude využita teorie malých deformací. Materiál bude uvažován lineárně elastický a isotropní, pro k -tou vrstvu popsáný Youngovým modulem E_k a hustotou ρ_k . Vrstevnatá tyč bude prizmatická s průřezem $A_k(x) = A$.

Na obr. 1 je zobrazeno schéma řešené úlohy. Pro každou vrstvu bude zaveden souřadnicový systém x_k a délka k -té vrstvy bude označena l_k . Krajní vrstva, na jejíž volný konec bude působit vnější osově napětí $\sigma_0(t)$, bude označena indexem $k = 1$, tedy napětí v místě $x_1 = l_1$ bude předepsáno okrajovou podmínkou

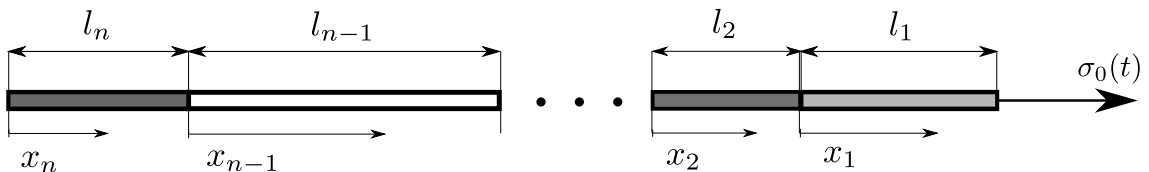
$$\sigma_1(l_1, t) = \sigma_0(t). \quad (3.1)$$

Vrstva na opačném konci tyče bude označena indexem $k = n$. Zde bude předepsána okrajová podmínka vetknutého, resp. volného, konce. Tedy v místě $x_n = 0$ bude předepsáno nulové osově posunutí, resp. nulové osově napětí,

$$u_n(0, t) = 0, \quad \text{resp.} \quad \sigma_n(0, t) = 0. \quad (3.2)$$

Počáteční podmínky pro $k = 1, \dots, n$ budou předepsány nulové ve tvaru

$$u_k(x_k, 0) = 0, \quad \frac{du_k}{dt}(x_k, t)|_{t=0} = 0. \quad (3.3)$$



Obrázek 1: Schéma řešeného problému.

3.2 Odvození analytického řešení v Laplaceově oblasti pro obecné 1D vrstevnaté prostředí

Pro účely odvození řešení úlohy popsané v kapitole 3.1 bude vrstevnatá tyč chápána jako systém n homogenních tyčí délek l_k ($k = 1, \dots, n$) navzájem provázaných odpovídajícími okrajovými podmínkami. Šíření podélné vlny v každé takovéto k -té homogenní vrstvě je popsáno 1D vlnovou rovnicí ve tvaru

$$c_{0,k}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u_k(x_k, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_k(x_k, t), \quad (3.4)$$

kde $c_{0,k} = \sqrt{E_k/\rho_k}$ je rychlost šíření vlny v k -té vrstvě tyče. Provedením Laplaceovy transformace rovnice (3.4) při uvažování nulových počátečních podmínek (3.3) vznikne obyčejná diferenciální rovnice

$$c_{0,k}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} U_k(x_k, p) = p^2 U_k(x_k, p), \quad (3.5)$$

v níž p je komplexní parametr Laplaceovy transformace. Obecné řešení rovnice (3.5) pro Laplaceův obraz posuvu U_k má tvar [1]

$$U_k(x_k, p) = A_k(p) \sinh\left(\frac{px_k}{c_{0,k}}\right) + B_k(p) \cosh\left(\frac{px_k}{c_{0,k}}\right), \quad (3.6)$$

kde A_k a B_k jsou neznámé funkce parametru p , které budou určeny pro každou vrstvu z příslušných okrajových podmínek. Obraz napětí Σ_k v k -té vrstvě lze následně s využitím vztahu pro obraz posuvů (3.6), teorie malých deformací a Hookeova zákona vyjádřit jako

$$\Sigma_k(x_k, p) = z_k p \left(A_k(p) \cosh\left(\frac{px_k}{c_{0,k}}\right) + B_k(p) \sinh\left(\frac{px_k}{c_{0,k}}\right) \right), \quad (3.7)$$

kde $z_k = \rho_k c_{0,k} = E_k/c_{0,k}$ je charakteristická impedance materiálu k -té vrstvy.

Jak je uvedeno výše, ke stanovení funkcí $A_k(p)$ a $B_k(p)$ pro $k = 1, \dots, n$ budou využity okrajové podmínky úlohy. Laplaceova transformace okrajové podmínky buzení (3.1) a následné dosazení obecného řešení pro obraz napětí (3.7) vede na rovnici

$$A_1(p) z_1 \cosh\left(\frac{pl_1}{c_{0,1}}\right) + B_1(p) z_1 \sinh\left(\frac{pl_1}{c_{0,1}}\right) = \frac{\Sigma_0(p)}{p}, \quad (3.8)$$

kde $\Sigma_0(p)$ je Laplaceův obraz funkce buzení $\sigma_0(t)$. Zavedením zjednodušeného zápisu

$$sh_k = \sinh\left(\frac{pl_k}{c_{0,k}}\right), \quad ch_k = \cosh\left(\frac{pl_k}{c_{0,k}}\right) \quad (3.9)$$

lze okrajová podmínka (3.8) zapsat ve tvaru

$$z_1 ch_1 A_1(p) + z_1 sh_1 B_1(p) = \frac{\Sigma_0(p)}{p}. \quad (3.10)$$

$$\begin{array}{c}
 2(k-1) \\
 \left[\begin{array}{cccccccccccc}
 z_1 ch_1 & z_1 sh_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -sh_k & -ch_k & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & z_{k-1} & 0 & -z_k ch_k & -z_k sh_k & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0
 \end{array} \right] \begin{bmatrix} A_1(p) \\ \vdots \\ B_{k-1}(p) \\ A_k(p) \\ \vdots \\ B_n(p) \end{bmatrix} = \\
 \begin{array}{c}
 \Sigma_1(l_1, p) = \Sigma_0(p) \\
 U_k(l_k, p) = U_{k-1}(0, p) \\
 \Sigma_k(l_k, p) = \Sigma_{k-1}(0, p) \\
 \Sigma_n(0, p) = 0
 \end{array} \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_0(p)}{p} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Obrázek 2: Maticový tvar soustavy rovnic pro určení koeficientů A_k a B_k .

Analogickým postupem pro podmínky vetknutého, resp. volného, konce (3.2) vzniknou rovnosti

$$B_n(p) = 0, \quad \text{resp.} \quad A_n(p) = 0. \quad (3.11)$$

Dále je nutné definovat podmínky spojitosti posuvů a napětí na rozhraních vrstev, které mají po Laplaceově transformaci pro $k = 2, \dots, n$ tvar

$$U_k(l_k, p) = U_{k-1}(0, p), \quad \Sigma_k(l_k, p) = \Sigma_{k-1}(0, p). \quad (3.12)$$

Dosazením (3.6) do podmínky spojitosti posuvů uvedené v (3.12) získáme s využitím zkráceného zápisu (3.9) pro $k = 2, \dots, n$ rovnici

$$sh_k A_k(p) + ch_k B_k(p) = B_{k-1}(p). \quad (3.13)$$

Analogickým postupem pro podmínku spojitosti napětí z (3.12) a pro obecné řešení (3.7) vznikne rovnice

$$z_k ch_k A_k(p) + z_k sh_k B_k(p) = z_{k-1} A_{k-1}(p). \quad (3.14)$$

Rovnice (3.10) - (3.14) tvoří pro dané p soustavu $2n$ algebraických rovnic o stejném počtu neznámých funkcí $A_k(p)$ a $B_k(p)$. Tuto soustavu lze zapsat do maticové podoby a jednoduše numericky řešit. Maticový zápis soustavy pro variantu s volným koncem tyče je zobrazen na obr. 2. První, resp. poslední, řádek matice soustavy reprezentuje podmínku buzení, resp. volného konce. Zbytek matice je složen z bloků reprezentujících podmínky spojitosti na rozhraní tyčí k a $k-1$ pro $k = 2, \dots, n$. Tyto bloky zabírají v matici řádky $2(k-1)$ a $2(k-1)+1$ a sloupce $2k-3$ až $2k$. Řešením těchto rovnic pro všechna p a konkrétní funkci buzení získáme funkce $A_k(p)$ a $B_k(p)$, jejichž dosazení do obecného řešení (3.6), resp. (3.7), vede na Laplaceův obraz posuvů, resp. napětí, ve vrstevnaté tyči. Pomocí takto odvozeného řešení a numerické zpětné Laplaceovy transformace, kterou se zabývá následující část práce, lze s využitím větších počtů vrstev n aproximovat odezvu tenké tyče s funkčně gradovanými materiálovými vlastnostmi.

3.3 Vyčíslení analytického řešení v časové oblasti pomocí numerické zpětné Laplaceovy transformace

V této podkapitole bude provedeno vyčíslení odezvy vrstevnaté tyče v časové oblasti. Bude využito Laplaceových obrazů odezvy vrstevnaté tyče odvozených v kapitole 3.2 a tří algoritmů pro numerickou zpětnou Laplaceovu transformaci (dále NILT), které budou v rámci této podkapitoly popsány a porovnávány s ohledem na jejich přesnost, stabilitu a výpočtovou rychlost.

První z algoritmů byl implementován na základě článku profesora Brančíka [16]. Tato metoda je založena na přibližném vyčíslení Bromwichova integrálu definujícího zpětnou Laplaceovu transformaci [17]

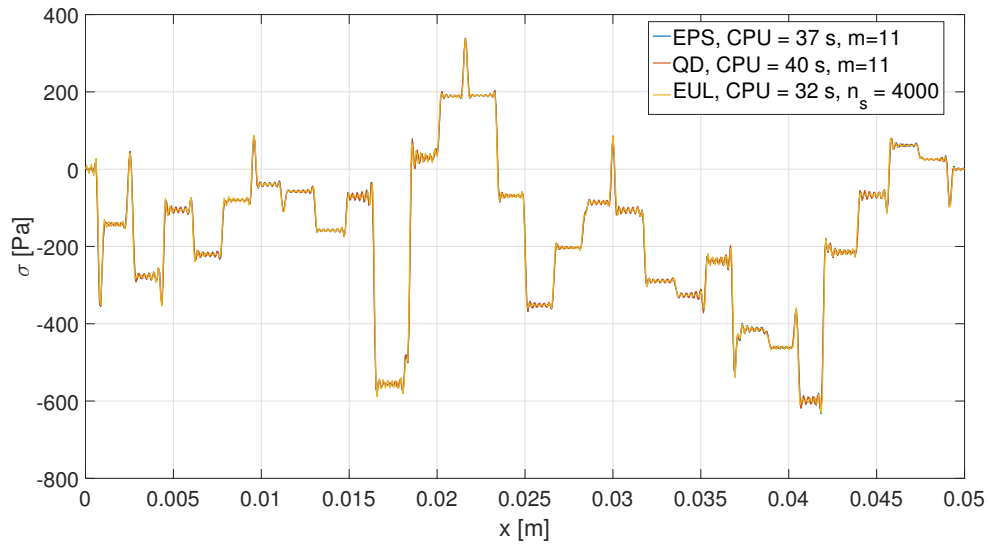
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt} dp. \quad (3.15)$$

Algoritmus využívá rychlou Fourierovu transformaci a tzv. ε -algoritmus k urychlení konvergence nekonečné řady, na kterou tato metoda vede. Tato varianta NILT vyžaduje vyčíslení originálu funkce v konečném počtu ekvidistantních časových bodů na daném intervalu $\langle 0, t_m \rangle$. Těchto bodů je $N = 2^m$, kde m je jedním z parametrů algoritmu. Algoritmus vrací velice přesné výsledky na intervalu $\langle 0, \frac{t_m}{2} \rangle$. Prodlužování časového intervalu vyžaduje pro zachování stejné přesnosti také zvýšení m , což ale prodlužuje výpočetní čas a může vnést do výsledků chybu ve formě parazitních oscilací. Tento algoritmus bude v následujícím textu označován jako *EPS*.

Druhý algoritmus byl implementován na základě článku [18] od stejného autora. V tomto případě však není k urychlení konvergence řady využíván ε -algoritmus, ale je nahrazen tzv. „quotient-difference“ algoritmem. Vyčíslení je opět provedeno pro 2^m ekvidistantních časových bodů na daném časovém intervalu. Přesnost algoritmu ovlivňují stejné faktory, jako v případě dříve zmíněné metody. Autor ve svém článku [18] uvádí, že tento přístup dosahuje až o 30% nižšího výpočtového času oproti algoritmu využívajícímu ε -algoritmus. Tento algoritmus bude v další části práce označován jako *QD*.

Poslední metoda použitá k vyčíslení analytického řešení z kapitoly 3.2 byla implementována na základě [19]. Je založena na vyčíslení Bromwichova integrálu pomocí aproximace členu e^{pt} nekonečnou řadou, záměně pořadí sumace a integrace a následného využití reziduové věty pro vyčíslení integrálu pro každý člen takto vzniklé sumy. Díky tomu, že je tato řada alternující, je možné k urychlení konvergence využít Eulerovy transformace. Na rozdíl od předchozích dvou algoritmů, tento vyčísluje originál funkce v libovolně zvoleném časovém bodě. Přesnost ovlivňují tři parametry. První, označený a , se vyskytuje v aproximaci exponenciálního členu Bromwichova integrálu a přímo ovlivňuje chybu této aproximace. Autor pro nejpřesnější výsledky doporučuje hodnotu $a = 6$, která je využita ve všech následujících porovnáních. Další dva parametry jsou n_s a n_d , které určují počty sčítaných členů nekonečných sum při vyčíslení. Konkrétně n_s je počet sčítaných členů základní sumy a n_d počet následujících členů využitých pro urychlení konvergence Eulerovou transformací. Parametr n_s byl v následujících porovnáních využíván pro ladění přesnosti algoritmu, zatímco pro počet členů pro urychlení konvergence byla pro

3.3 Vyčíslení analytického řešení v časové oblasti pomocí numerické zpětné Laplaceovy transformace

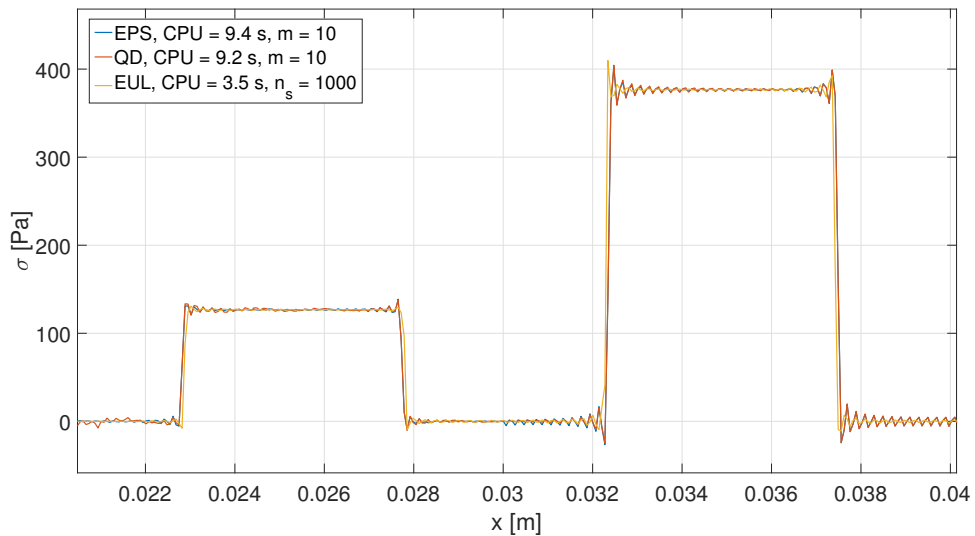


Obrázek 3: Porovnání algoritmů NILT - rozložení osového napětí ve vrstevnaté tyči v čase $t = 100 \mu\text{s}$

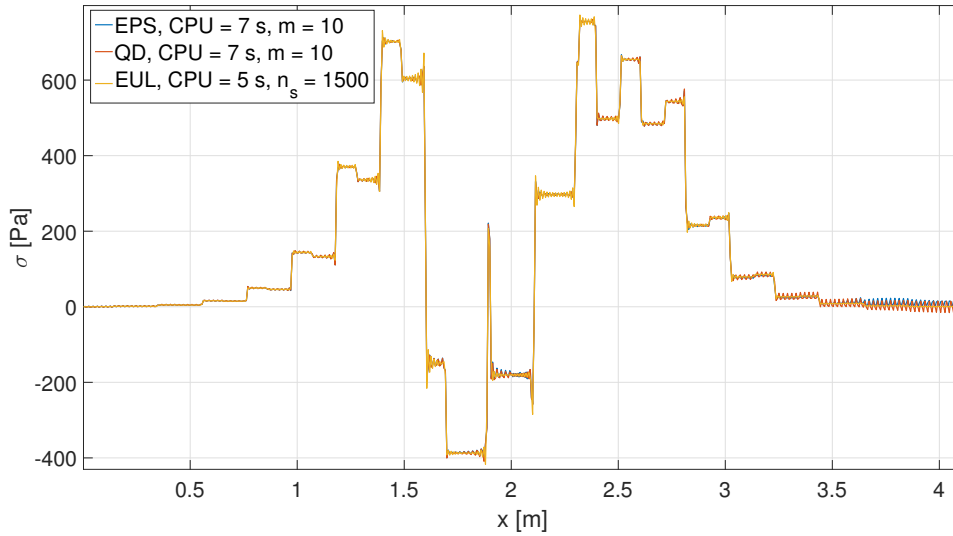
všechny výpočty volena hodnota $n_d = 150$. Tento algoritmus bude značen jako *EUL*.

Porovnání výše popsaných algoritmů byla prováděna na základě jejich rychlosti výpočtu a množství parazitních oscilací při srovnatelné přesnosti výsledků pro různé vrstevnaté tyče při buzení hladkým kosinovým pulsem s předpisem

$$\sigma_0(t) = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{t_0}\right) \right) (H(t) - H(t - t_0)) \quad (3.16)$$



Obrázek 4: Porovnání algoritmů NILT - rozložení osového napětí ve vrstevnaté tyči v čase $t = 10 \mu\text{s}$



Obrázek 5: Porovnání algoritmu NILT - rozložení osového napětí ve vrstevnaté tyči v čase $t = 2$ ms

a obdélníkovým pulsem s předpisem

$$\sigma_0(t) = \sigma_0(H(t) - H(t - t_0)), \quad (3.17)$$

kde σ_0 je amplituda pulsu, t_0 délka jeho trvání a $H(t)$ Heavisidova funkce. Porovnání bylo prováděno pro časy simulace $t \in \langle 10^{-5}; 10^{-2} \rangle$ s a délky pulsů $t_0 \in \langle 10^{-6}; 10^{-3} \rangle$. Na základě výsledků provedených výpočtů lze obecně říci, že výpočtové časy algoritmů *EPS* a *QD* jsou srovnatelné pro většinu případů odpovídajících výše definovaným parametrům úlohy. V některých případech, např. pro krátký puls s $t_0 = 1 \mu\text{s}$ a delší čas $t = 100 \mu\text{s}$, byla dokonce metoda *EPS* rychlejší, a to až o necelých 10%. Výsledky výpočtu pro tento případ jsou zobrazeny na obr. 3. Zkratka CPU v legendě obrázků této kapitoly označuje strojový čas jednotlivých algoritmů pro získání daných výsledků. Z těchto výsledků je také zřejmá vyšší rychlost *EUL*, tento algoritmus dosahuje o 13% kratšího výpočtového času než druhý nejrychlejší *EPS*. Vyšší rychlost *EUL* se projevila ve všech testovaných úlohách. Pro krátký budicí puls a krátký čas simulace bylo pomocí *EUL* dokonce možné získat méně rozkmitané výsledky za téměř třetinu výpočtového času algoritmů založených na rychlé Fourierově transformaci (viz obr. 4). Takto výrazný časový rozdíl však není obecně zaručen. Například při pouhém ztrojnásobení t oproti předchozímu případu, algoritmy *EPS* a *QD* stále dávají podobně kvalitní výsledky pro $m = 10$, tedy i stejný výpočtový čas, zatímco *EUL* již pro zachování srovnatelné přesnosti vyžaduje zvýšení parametru n_s , což má za následek zpomalení simulace a snížení rozdílu v rychlosti oproti zbylým dvěma algoritmům. Tento jev souvisí s tím, že zvětšení parametru m algoritmů *EPS* a *QD* o nejmenší možný inkrement 1 zdvojnásobí počet vyhodnocovaných časových bodů, a tedy i značně ovlivní výpočtový čas. Oproti tomu algoritmus *EUL* je možné ladit ve velice malých inkrementech podle potřeby simulace a pro výpočty prováděné v cyklu lze tedy zajistit vyšší efektivitu.

Kromě kratších výpočtových časů se *EUL* ukázal v rámci daného testování jako

nejstabilnější z vybraných algoritmů. Téměř ve všech provedených simulacích vykazoval menší množství parazitních kmitů, které se mohou objevit u *EPS* a *QD* pro delší t a vyšší hodnoty m . Obr. 5 zobrazuje výsledky simulace pro $t = 2$ ms, kde je možné u těchto algoritmů pozorovat rozvlnění výsledků rostoucí od buzeného konce tyče (pravá strana grafu). Tento jev byl v různé míře pozorován u řady výsledků získaných algoritmy založenými na rychlé Fourierově transformaci, *EUL* však v těchto oblastech vykazuje minimální chyby.

Všechny typy zde porovnávaných algoritmů pro zpětnou numerickou Laplaceovu transformaci mají své výhody i nevýhody a výběr jejich použití bude z velké části záviset na účelu výpočtu. Pro vyčíslení originálu funkce v jednom časovém okamžiku je podle provedených testů výhodnější využití algoritmu *EUL*, který je i při vyčíslení funkce se skokovými změnami stabilnější a méně náročný na výpočtový čas. Jeho další výhodou je jemnější možnost nastavení parametru, který ovlivňuje přesnost pro dané t a tedy i možnost efektivnějšího řešení úloh s opakovaným vyčíslením úlohy s podobnými t_0 a t . Při řešení úloh s nutným vyčíslením originálu funkce na celém časovém intervalu je naopak výhodnější využít algoritmy založené na rychlé Fourierově transformaci, které mají při inverzi funkce ve větším množství časových bodů výraznou převahu v oblasti výpočtového času.

3.4 Aplikace odvozeného řešení na 1D elastické funkčně gradované prostředí

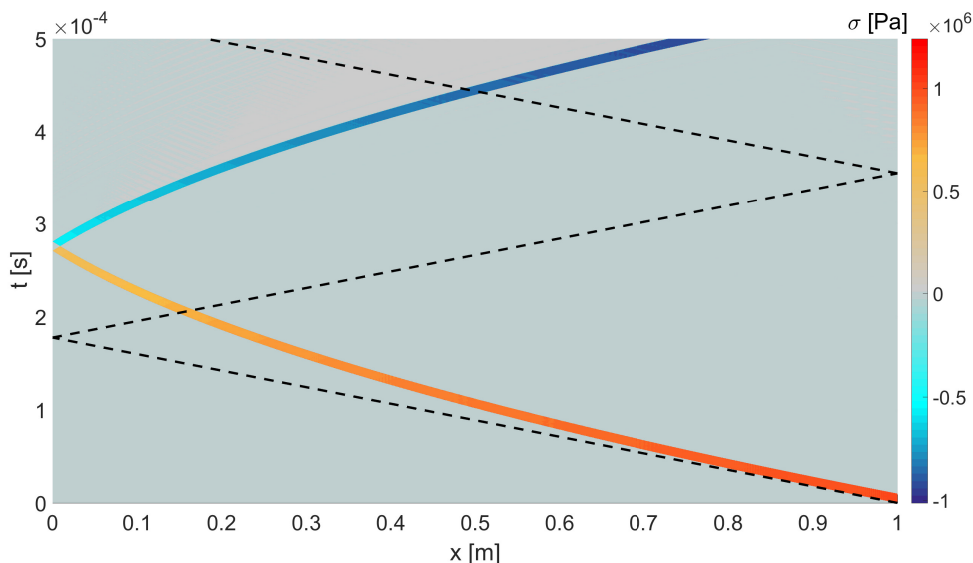
S ohledem na možné způsoby modelování funkčně gradovaných materiálů zmíněné v kapitole 2, lze řešení odvozené v kapitole 3.2 pro vrstevnatou tyč použít k aproximaci odezvy 1D tyče s funkčně gradovanými materiálovými vlastnostmi. V této kapitole budou prezentovány výsledky několika příkladů tohoto využití a budou porovnány s odezvami získanými konečnoprvkovým softwarem MSC.Marc/Mentat 2016.

Analytické výsledky prezentované v této podkapitole byly vyčíslovány pomocí řešení odvozeného v podkapitole 3.2 a algoritmu *EPS* s parametrem $m = 12$ (viz podkapitolu 3.3). Aproximace byla provedena pro 100 vrstev, pokud není specifikováno jiné n . Tyč byla ve všech těchto úlohách buzena obdélníkovým pulsem o délce trvání $t_0 = 10 \mu\text{s}$ s amplitudou $\sigma_0 = 1$ MPa a její odezva byla vyčíslena v napětích do času $t_{max} = 500 \mu\text{s}$. Nebuzený konec tyče ($x = 0$) je volný, na všech následujících obrázcích lze tedy určit směr pohybu pulsu podle jeho amplitudy: puls s kladnou amplitudou se pohybuje v záporném směru osy x , zatímco puls se zápornou amplitudou se pohybuje ve směru opačném.

Jako první příklad pro porovnání byla zvolena jednoduchá úloha tyče dlouhé 1 m s lineárně se měnícím Youngovým modulem podle předpisu

$$E(x) = E_0 + E_1 x, \quad (3.18)$$

kde $E_0 = 25$ GPa a $E_1 = 225$ GPa. Jedná se tedy o tyč, která má v místě buzení $E(1) = 250$ GPa a na opačném konci $E(0) = 25$ GPa. Hustota materiálu bude po celé délce tyče uvažována konstantní a rovna $\rho = 7870$ kg/m³. Rychlost šíření podélné

Obrázek 6: Odezva tyče s lineární závislostí $E(x)$ v časoprostorové rovině.

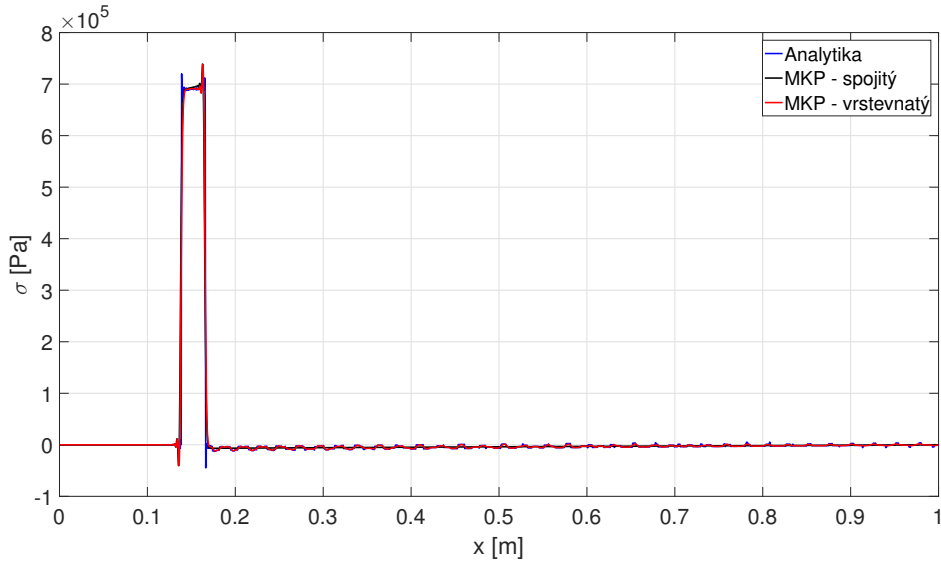
vlny v tyči tedy nebude s ohledem na (3.18) konstantní a bude dána předpisem

$$c_0(x) = \sqrt{\frac{E_0 + E_1 x}{\rho}}. \quad (3.19)$$

Její maximum v místě buzení má tak hodnotu $c_0(1) = 5636$ m/s a na opačném konci tyče má minimum $c_0(0) = 1782$ m/s. Velký rozdíl rychlostí na opačných koncích tyče byl zvolen záměrně pro zvýraznění efektu měnících se materiálových parametrů a otestování přesnosti vyčíslení v takovémto méně konzervativním případě.

Nalezená odezva pro tuto úlohu je v časoprostorové oblasti zobrazena na obr. 6. Na tomto obrázku je také přerušovanou černou čarou naznačen předpokládaný pohyb čela pulsu v tyči s konstantní rychlostí $c_0(1) = 5636$ m/s. Z odklonění křivky, která popisuje skutečný pohyb napěťového pulsu gradovanou tyčí, od této čáry je zřejmá změna rychlosti šíření vlny v tyči. Tyto výsledky tedy minimálně kvalitativně odpovídají očekávanému řešení. Pro zjištění jejich přesnosti je ale samozřejmě nutné provést porovnání s jinou metodou vhodnou pro vyčíslení nestacionární odezvy tyče.

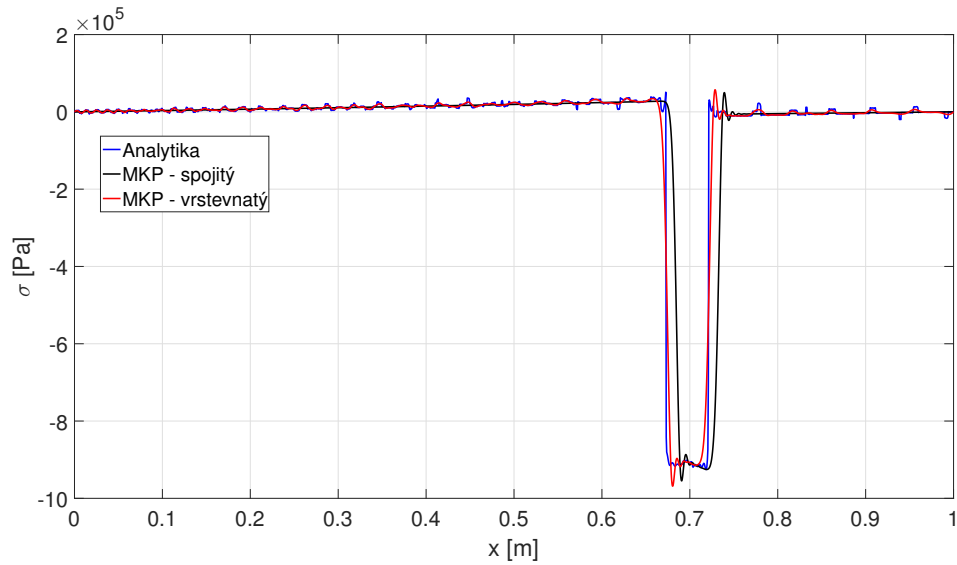
Pro tyto účely byly ve zmíněném softwaru vytvořeny dva konečnoprvkové modely. V prvním z těchto modelů byl Youngův modul použitého lineárně elastického materiálu definován pomocí funkce závislé na počáteční poloze prvků a Poissonovo číslo bylo voleno jako $\nu = 0,3$. Z důvodu odchylky výsledků získaných tímto způsobem na několika testovacích příkladech byl také sestaven model aproximující gradovaný materiál pomocí 100 vrstev s inkrementálně se měnícím Youngovým modulem tak, jako v případě analytického řešení. Pro materiál v obou modelech bylo také zvoleno numerické tlumení s koeficientem 0,2. Prvky byly voleny lineární, dle [20] označeny jako typ 9, a jejich počet byl pro tyč délky 1 m volen tak, aby vlnové délce nejkratší vlny s nejvyšší frekvencí f_{max} , kterou má model popsat, odpovídala délka deseti prvků. Pomocí analýzy amplitudového spektra budicího pulsu (viz [1]) byla zvolena $f_{max} = 2$ MHz a jí odpovídající zaokrouhlený počet prvků 5800. Počet prvků byl zaokrouhlen na stovky pro zjednodušení sestavení modelu



Obrázek 7: Porovnání výsledků analytiky a MKP pro první příklad v čase $t = 207 \mu\text{s}$

využívajícího aproximaci gradovaného materiálu pomocí 100 vrstev. Řešení v časové oblasti bylo nalezeno pomocí explicitní metody centrálních diferencí s integračním krokem $\Delta t = 1,22 \cdot 10^{-8}$ s.

Porovnání výsledků analytického řešení bylo provedeno ve vybraných časových okamžicích podle toho, v jaké části tyče se puls v daný moment nacházel. Na obr. 7 je zobrazeno porovnání v čase $t = 207 \mu\text{s}$, tedy před prvním odrazem pulsu od volného konce. Jsou zde vykresleny křivky popisující rozložení napětí σ podél tyče získané pomocí analytického přístupu a obou numerických modelů popsaných výše. Je zřejmé, že v tomto čase všechny tři přístupy vykazují velice dobrou shodu. U modelů využívajících aproximaci pomocí vrstev můžeme sledovat rozvlněnost jakéhosi zbytkového napětí v oblasti $x \in (0,2; 1)$ způsobenou odrazy pulsu na hranicích vrstev, zatímco spojitý model vykazuje v této části v podstatě lineární závislost. Při použití více vrstev při aproximaci gradovaného materiálu se stávají i výsledky těchto modelů hladší, jak bude demonstrováno později. Na obr. 7 lze také sledovat snížení amplitudy procházejícího pulsu, která má v tomto čase hodnotu nižší než $0,7\sigma_0$. Puls se také při průchodu do části tyče s nižším c_0 zužuje, což je možné pozorovat v porovnání s obr. 8, kde jsou zobrazeny výsledky v čase $t = 488 \mu\text{s}$. Puls se zde nachází v části tyče blíže buzenému konci, kde je c_0 vyšší, jeho amplituda zde přesahuje $0,9\sigma_0$ a puls je znatelně širší, než na opačném konci tyče. V tomto čase je lépe pozorovatelná i lineární závislost zbytkového napětí (tentokrát v oblasti $x \in (0; 0,6)$). Je možné zde také pozorovat neshodu konečnoprvkového modelu se spojitou změnou materiálových parametrů s modelem využívající aproximaci pomocí vrstev. Výsledky modelu se spojitou změnou zbylé dva pulsy mírně předbíhají, což může být způsobeno nedostatečným počtem vrstev při aproximaci gradované tyče, ale i nedostatky použitého softwaru při řešení úlohy se spojitou změnou materiálových parametrů, které budou demonstrovány na následujícím příkladu. Přesnost obou numerických modelů v delším čase simulace také snižuje vliv disperze způsobené prostorovou diskretizací, což je možné pozorovat na menší strmosti čel



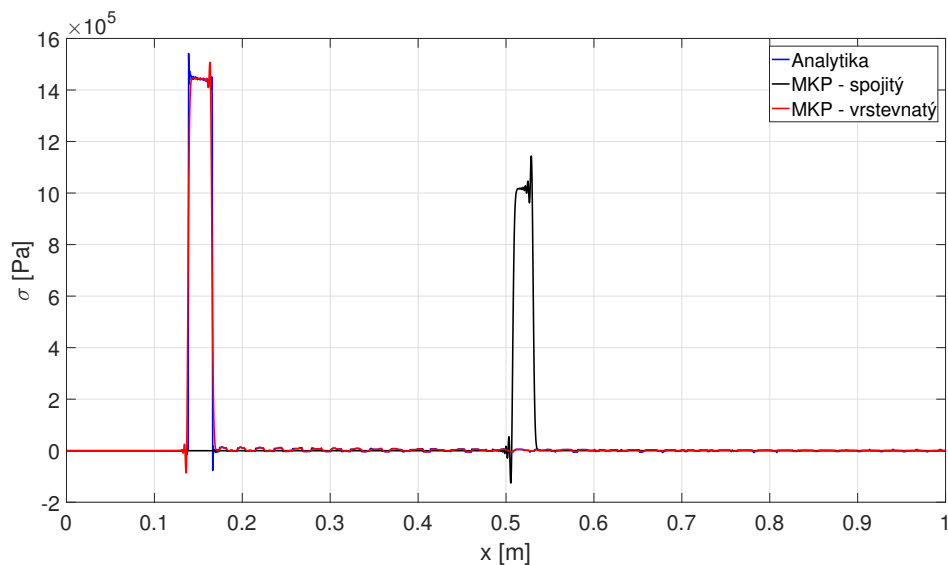
Obrázek 8: Porovnání výsledků analytiky a MKP pro první příklad v čase $t = 488 \mu\text{s}$

pulsu, zatímco analytické výsledky si drží strmé čela i v těchto časech.

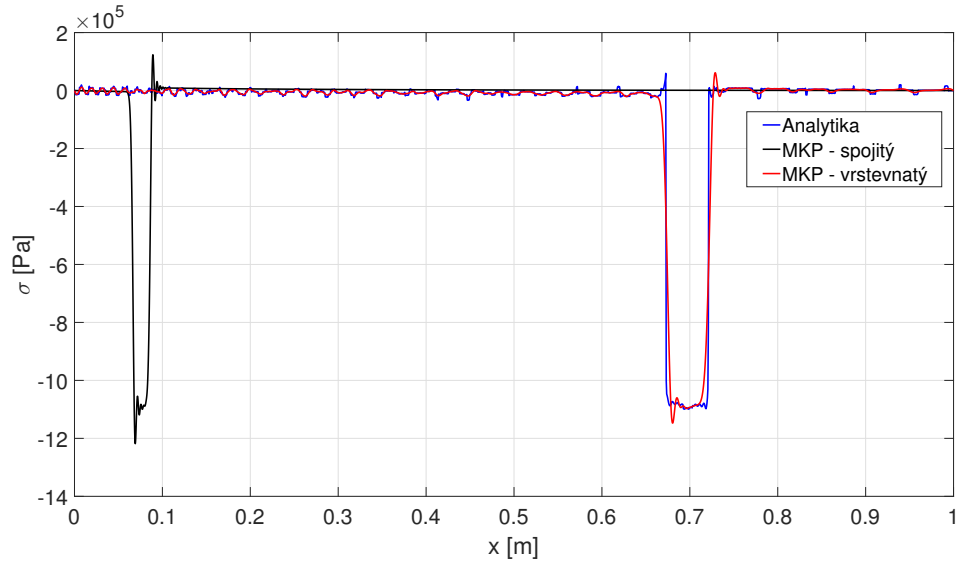
Odlíšná rychlost šíření pulsu v konečnoprvkovém modelu definovaném pomocí spojitě změny materiálových parametrů, která byla zmíněna výše, je výraznější v případě spojitě změny hustoty. Proto bude druhý příklad definován tak, aby funkce $c_0(x)$ popisující rychlost šíření vlny v tyči byla identická jako v předchozím případě, ale byla dána změnou hustoty materiálu ρ při zachování konstantní hodnoty E . Funkce $\rho(x)$ bude proto uvažována ve tvaru

$$\rho(x) = \frac{7870E}{(25 + 225x) \cdot 10^9}, \quad (3.20)$$

kde $E = 50 \text{ GPa}$. Puls se tak bude šířit tyčí v každý moment stejnou rychlostí jako



Obrázek 9: Porovnání výsledků analytiky a MKP pro druhý příklad v čase $t = 207 \mu\text{s}$



Obrázek 10: Porovnání výsledků analytiky a MKP pro druhý příklad v čase $t = 488 \mu\text{s}$

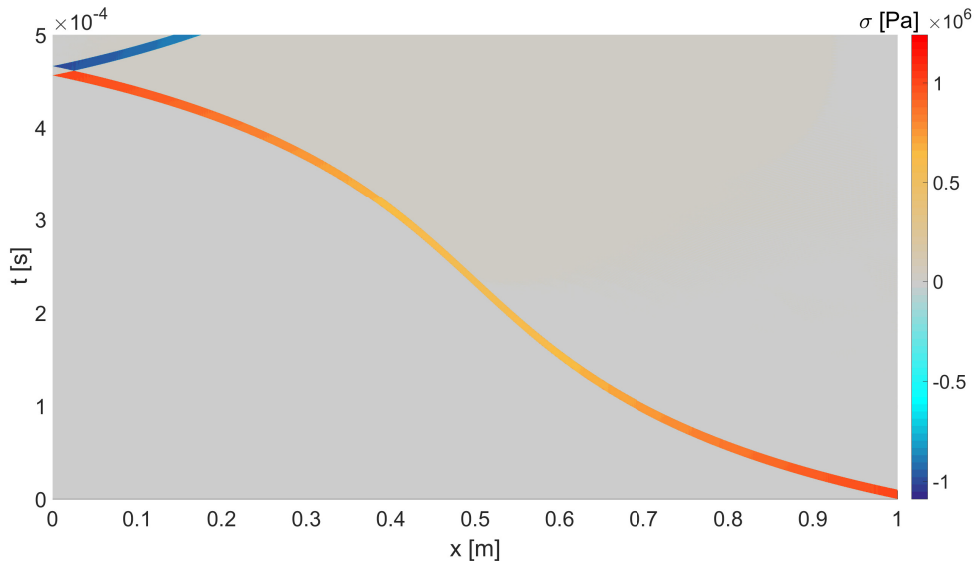
v prvním případě, charakteristická impedance, která má vliv na poměr odražené a procházející energie na rozhraní vrstev tyče, však bude, na rozdíl od předchozího případu, směrem od buzeného konce růst. Dá se tak předpokládat, že amplituda pulsu bude v tomto případě u nebuzeného konce vyšší než σ_0 . Buzení a ostatní parametry úlohy budou stejné jako v prvním případě.

Předpoklad týkající se nárůstu amplitudy pulsu potvrzují výsledky na obr. 9, na kterém si lze všimnout, že dosahuje více než 140% budící amplitudy. Druhý předpoklad, tedy vyšší odchylka spojitého numerického modelu, se zřejmě také potvrdil. Ve výsledcích získaných touto metodou je možné pozorovat výrazné zpoždění pulsu oproti zbylým dvěma metodám. Je zřejmé, že tento puls prochází tyčí s téměř poloviční průměrnou rychlostí. Tento jev je stále přítomen i v delších časech simulace (viz obr. 10). Zde je možné pozorovat stále dobrou shodu výsledků analytického a vrstevnatého konečnoprvkového modelu, již v předchozím případě zmiňovanou disperzi způsobenou prostorovou diskretizací v MKP a oscilace ve zbytkovém napětí.

V posledním příkladě bude definována změna obou materiálových parametrů, tj. budou předepsány funkce $E(x)$ a $\rho(x)$. Konkrétně se bude jednat o parabolické závislosti ve tvaru

$$E(x) = E_2x^2 + E_1x + E_0, \quad \rho(x) = \rho_2x^2 + \rho_1x + \rho_0, \quad (3.21)$$

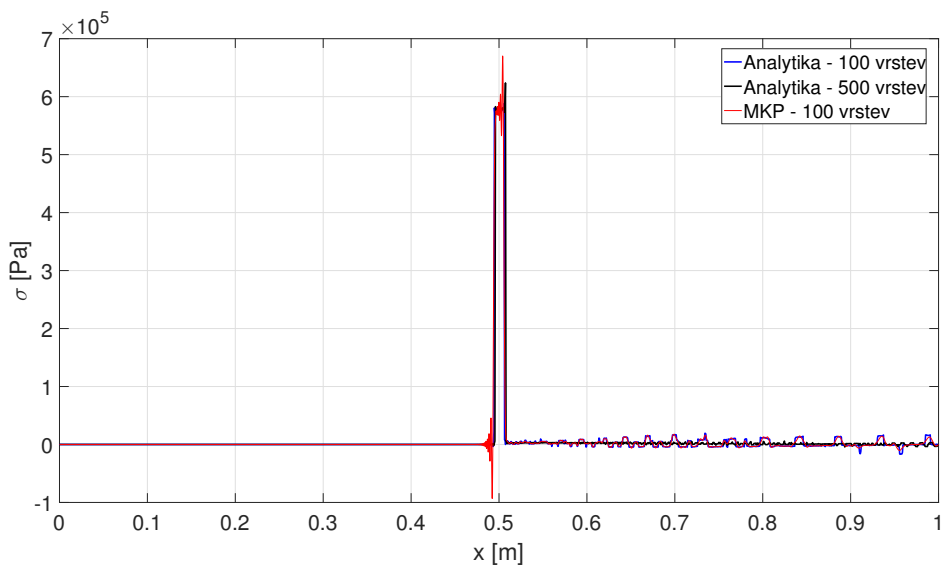
které popisují změnu materiálu z oceli ($E_{oc} = 210 \text{ GPa}$, $\rho_{oc} = 7870 \text{ kg/m}^3$) na krajích tyče na olovo ($E_{ol} = 16 \text{ GPa}$, $\rho_{ol} = 11340 \text{ kg/m}^3$) v jejím středu. V tomto případě budou již porovnávány pouze výsledky vrstevnatého numerického modelu s analytickými modely se 100 a 500 vrstvami, neboť na základě porovnání výsledků analytického a vrstevnatého numerického modelu pro rostoucí počet vrstev (blíží se gradovanému materiálu) s výsledky numerického spojitého modelu lze usoudit, že vybraný software nepracuje se spojitou změnou parametrů korektně a jeho výsledky nejsou správné. Rychlost šíření vlny v olovu odpovídá přibližně pětina rychlosti



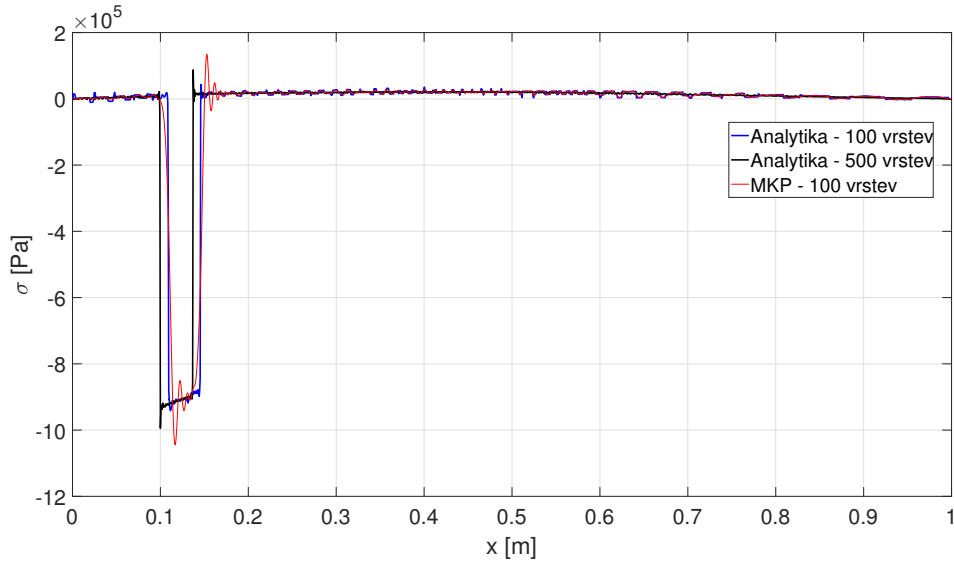
Obrázek 11: Odezva tyče s parabolickou závislostí materiálových parametrů na x v časoprostorové rovině.

v oceli, jedná se tedy opět o velmi značný rozdíl v c_0 . Dá se předpokládat, že v delších časech se na takovémto příkladě projeví vliv aproximace konečným počtem vrstev a výsledky modelů s různými počty vrstev se nebudou zcela shodovat. Parametry nediskutované v popisu této úlohy se shodují s předchozími příklady.

Odezva tyče v časoprostorové rovině je zobrazena na obr. 11. Na těchto výsledcích lze pozorovat zpomalení pulsu a zmenšení jeho amplitudy v prostřední části tyče a následné zrychlení na původní rychlost při postupu pulsu k volnému konci. Na obr. 12 je dále zobrazeno porovnání výsledků zmíněných tří modelů v čase $t = 231 \mu\text{s}$, kdy se puls šíří v opačném směru osy x a všechny modely v něm vykazují dobrou



Obrázek 12: Porovnání výsledků analytiky a MKP pro třetí příklad v čase $t = 231 \mu\text{s}$

Obrázek 13: Porovnání výsledků analytiky a MKP pro třetí příklad v čase $t = 488 \mu s$

shodu. Model s větším počtem vrstev má v oblasti zbytkového napětí významně menší kmity, čímž se více přimyká ke skutečné odezvě gradované tyče, která by v této části měla být hladká. V porovnání s obr. 13, který zobrazuje výsledky stejné úlohy v čase $t = 488 \mu s$, je zřejmé také zúžení pulsu v prostřední části tyče. Na obr. 13 si lze také všimnout předpokládané odchylky modelů aproximujících gradovaný materiál pomocí 100 a 500 vrstev a zbytkového napětí, které v tomto případě připomíná parabolu a v případě modelu s 500 vrstvami má značně hladší průběh. Výsledky tohoto modelu však vykazují větší rozkmitání před čely pulsu než ty získané analytickým modelem s menším počtem vrstev.

V této kapitole bylo provedeno porovnání výsledků výpočtů aproximujících odezvu tyčí s funkčně gradovanými materiálovými parametry. K získání analytické aproximace bylo využito vztahů odvozených v podkapitole 3.2 a poznatků o NILT z podkapitoly 3.3. Výsledky tohoto přístupu byly porovnány se dvěma různými přístupy modelování stejné úlohy v konečnoprvkovém softwaru MSC.Marc/Mentat 2016. Byla zjištěna velmi dobrá shoda výsledků analytiky a MKP při modelování úlohy jako vrstevnaté tyče. Využití spojitě změny definované funkcí závislou na počátečních souřadnicích se však jeví jako nespolehlivé řešení, obzvláště při předepsání spojitě změny hustoty, z důvodu rozdílné rychlosti šíření pulsu tyčí jak od analytického, tak vrstevnatého numerického přístupu. Analytické výsledky vykazují oproti MKP vyšší strmost čel pulsu i v delších časech analýzy, nižší výpočtový čas a nižší rozkmitání výsledků v okolí pulsu. Tento rozdíl v kvalitě výsledků analytiky a MKP však nebude zdaleka tak zřejmý při buzení tyče sinovým či hladkým kosinovým pulsem, který lépe popisuje např. napětí při rázu těles, než zde používaný obdélníkový puls. Při řešení úloh s výraznou změnou rychlosti c_0 se ukázalo, že pro dosažení vysoké přesnosti výsledků i v delších časech je vhodné při aproximaci využít vyššího počtu vrstev. Tyto modely však vykazují větší chyby v okolí čel pulsu. Nevýhodou použité implementace analytického přístupu je vyšší náročnost na operační paměť v případech delších t_{max} a většího počtu vrstev.

3.5 Aplikace řešení na vybrané úlohy optimalizace materiálových vlastností

V této kapitole budou řešeny tři varianty úlohy minimalizace napěťové odezvy na vetknutém konci vrstevnaté tyče. Minimalizace v těchto úlohách bude prováděna hledáním optimálních materiálových parametrů jednotlivých vrstev, přičemž jednotlivé varianty úlohy se budou lišit omezeními kladenými na tyto parametry ve smyslu typu množin, ze kterých budou vybírány (spojitá/diskrétní), popřípadě provázáním parametrů funkční závislostí na poloze v tyči. V optimalizačním algoritmu bude využito řešení odvozené v podkapitole 3.2, které je díky své malé časové náročnosti pro tento typ úloh ideální. Cílová funkce pro optimalizaci bude definována jako podíl maxima absolutní hodnoty napětí na vetknutém konci a amplitudy budícího pulsu

$$f_c = \frac{\max_t \{|\sigma(0,t)|\}}{\max_t \{|\sigma_0(t)|\}}. \quad (3.22)$$

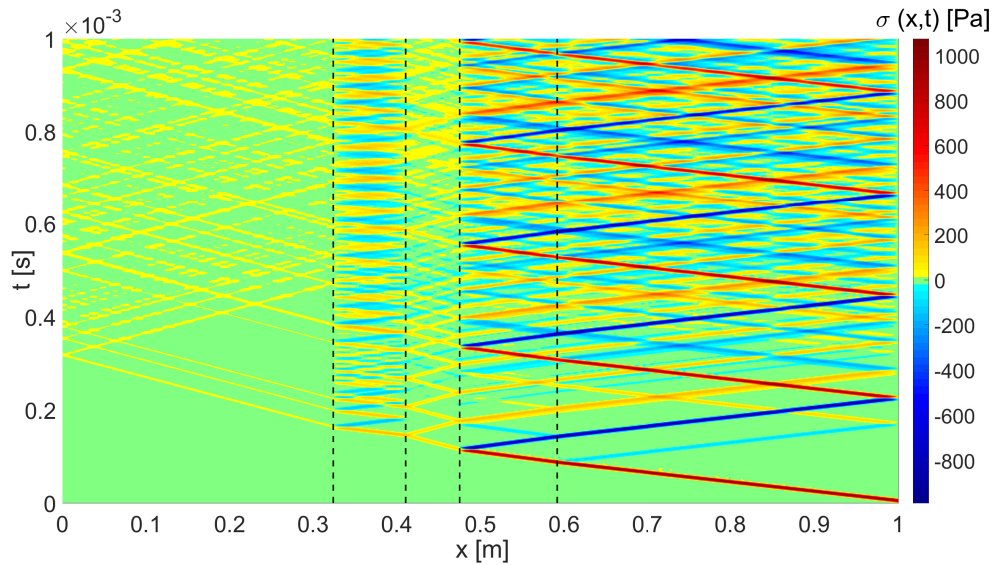
Takto definovaná cílová funkce pro danou úlohu může mít mnoho lokálních minim a velice složitý průběh, obzvláště pak v případě většího počtu optimalizovaných parametrů. Na základě tohoto faktu a rychlosti vyčíslení cílové funkce pomocí výše zmíněného postupu byla pro optimalizaci použita stochastická metoda PSO nebo-li „Particle swarm optimization“. Tento problém bude řešen nejen za účelem nalezení takové skladby materiálu, aby tyč pohltila co nejvíce energie při průchodu pulsu její délkou, ale také určení, zda je toto řešení jednoznačné a zda vede na materiálovou skladbu, která by mohla být napodobena materiálem se spojitě gradovanými vlastnostmi.

První variantou úlohy je minimalizace velikosti napětí $\sigma(0,t)$ v čase pomocí změny materiálových parametrů vrstev v intervalech s předem zadanými dolními a horními hranicemi. Optimalizační algoritmus tak hledá v zadaném intervalu pro každou k -tou vrstvu optimální hodnotu E_k a ρ_k . Tyto intervaly byly

$$E \in \langle 4,5; 250 \rangle \text{ GPa}, \quad \rho \in \langle 10^3; 10^4 \rangle \text{ kg/m}^3. \quad (3.23)$$

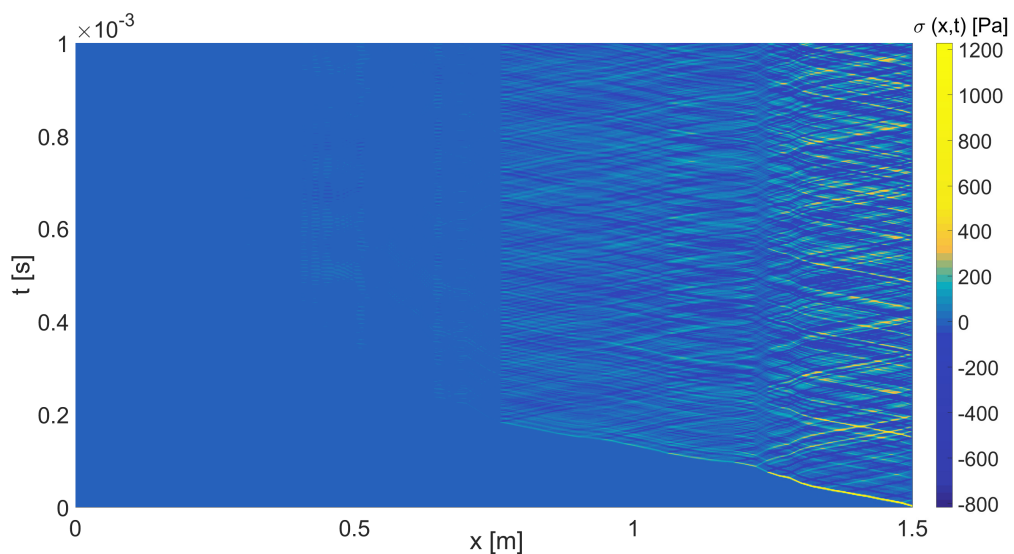
Optimalizace byly řešeny pro vrstevnaté tyče délky 1 m a 2 m s počtem vrstev od 3 do 75 a pro budící pulsy délky $t_0 \in \langle 1; 100 \rangle \mu\text{s}$. Úloha byla řešena ve dvou modifikacích. V prvním případě byla předem známa délka jednotlivých vrstev a optimalizovaly se pouze materiálové vlastnosti. Ve druhém byla délka jednotlivých vrstev optimalizována spolu s materiálovými parametry a pevně zvolena byla pouze celková délka tyče. Problém tedy obsahoval $2n$ optimalizovaných parametrů v případě varianty s pevnou délkou vrstev, $3n$ parametrů v případě druhém.

V obou výše zmíněných modifikacích tohoto problému bylo dosaženo velice kvalitativně podobných výsledků, proto zde budou popsány společně. Optimalizace délek vrstev dosahovala mírně lepších redukcí amplitudy než varianta s ekvidistantním rozdělením tyče, avšak hlavní vliv na hodnotu cílové funkce měla délka budícího pulsu. Pro pulsy s $t_0 < 10 \mu\text{s}$ se podařilo pro dané t_0 puls zredukovat na méně než 3% jeho původní amplitudy. Míra redukce se však se zvětšujícím se t_0 snižovala, například pro puls délky $t_0 = 100 \mu\text{s}$ se amplitudu podařilo zredukovat již pouze na 32%. Na obr. 14 je zobrazena odezva tyče s $n = 5$ na puls s $t_0 = 10 \mu\text{s}$. Je zde

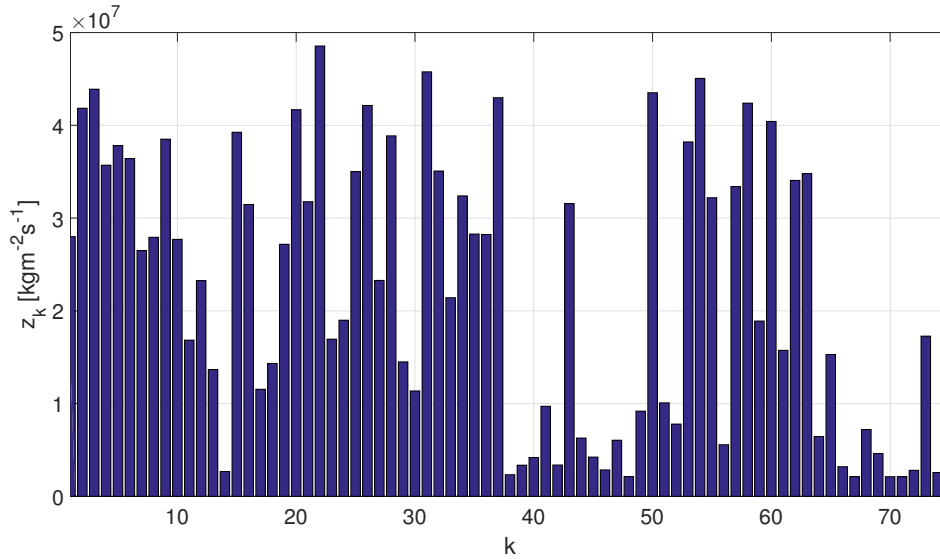


Obrázek 14: Redukce amplitudy obdélníkového pulsu délky $t_0 = 10 \mu\text{s}$ v optimalizované tyči s $n = 5$

možné pozorovat postupnou redukci amplitudy pulsu pomocí odrazů na rozhraní jednotlivých vrstev (vyznačeny černými přerušovanými čarami). Je zřejmé, že pro výrazné snížení amplitudy procházejícího pulsu stačí malé množství vrstev, mezi některými vrstvami ale musí být velký rozdíl v materiálových vlastnostech. Velké změny v materiálových parametrech lze však po optimalizaci pozorovat i v případě tyčí s větším počtem vrstev. Na obr. 15 je zobrazena odezva tyče s $n = 75$ optimalizované pro puls stejné délky. Míra redukce amplitudy je srovnatelná s předchozím případem pro $n = 5$. Materiálové vlastnosti sousedících vrstev se místy významně



Obrázek 15: Redukce amplitudy obdélníkového pulsu délky $t_0 = 10 \mu\text{s}$ v optimalizované tyči s $n = 75$

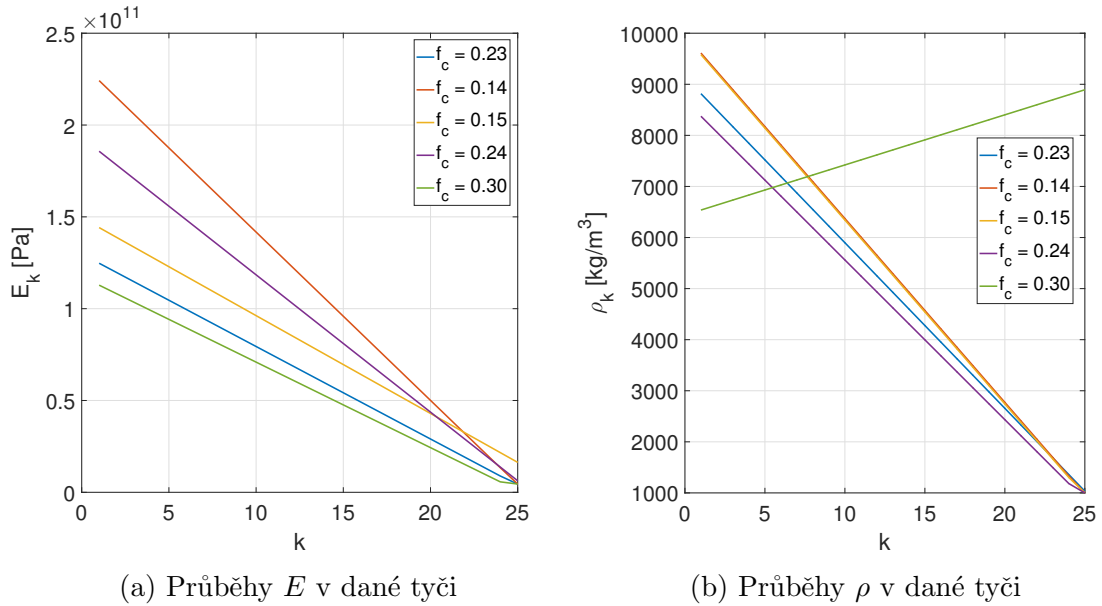


Obrázek 16: Průběh charakteristické impedance podél tyče s $n = 75$ navržené pro puls délky $t_0 = 10 \mu\text{s}$

mění, což je patrné i z průběhu charakteristické impedance podél tyče zobrazeného na obr. 16. Je zřejmé, že výsledkem této varianty optimalizační úlohy jsou tyče s velkými skokovými změnami parametrů, které sice značně minimalizují amplitudu procházejícího pulsu, avšak změnu jejich materiálových vlastností není možné popsat vhodnou spojitou funkcí. Dále se ukazuje, že takto formulovaná úloha není definována jednoznačně nebo že se použitými algoritmy nedaří najít globální minimum zvolené cílové funkce. Opakované optimalizace pro stejnou tyč a puls sice ve většině případů dosáhnou velice podobné redukce amplitudy, složení tyče se ale pro každý výpočet liší.

Ve druhé variantě optimalizační úlohy byla pozornost zaměřena právě na spojitost funkcí popisujících změnu materiálových parametrů tyče, jednalo se tedy o tyče vyrobené z gradovaných materiálů. Parametry E a ρ byly předem definovány jako obecné lineární, popř. kvadratické, funkce a optimalizovanými parametry byly přímo jejich koeficienty. V této variantě úlohy tak došlo k výrazné redukci optimalizovaných parametrů, 4 pro lineární závislost a 6 pro závislost kvadratickou. Funkční hodnoty $E(x)$ a $\rho(x)$ byly omezeny stejnými intervaly jako ve variantě popsané výše. Pro algoritmem navržené funkce, jejichž funkční hodnoty by nepatřily do daných intervalů, byl proveden přepočítání dané hodnoty tak, aby do intervalu patřila a její vzdálenost od překročené hranice intervalu byla zachována.

Stejně jako v prvním případě se jednoznačné řešení nepodařilo nalézt. Navíc opakované optimalizace často nedosáhly ani podobných hodnot cílové funkce f_c . Příkladem toho jsou závislosti E a ρ znázorněné na obr. 17, které byly získány opakovanými běhy optimalizační úlohy pro stejná vstupní data. Konečné hodnoty cílových funkcí se v těchto případech pohybovaly od 15% do 30%. Je zřejmé, že i přesto, že ve většině případů mají výsledky podobný charakter, rozptýly ve funkčních hodnotách nalezených funkcí jsou, obzvláště ve vrstvách s nižším indexem, velké. Takto formulovaná úloha je tedy velice nekonzistentní ve svých výsledcích.


 Obrázek 17: Výsledky optimalizací pro spojitou změnu E a ρ

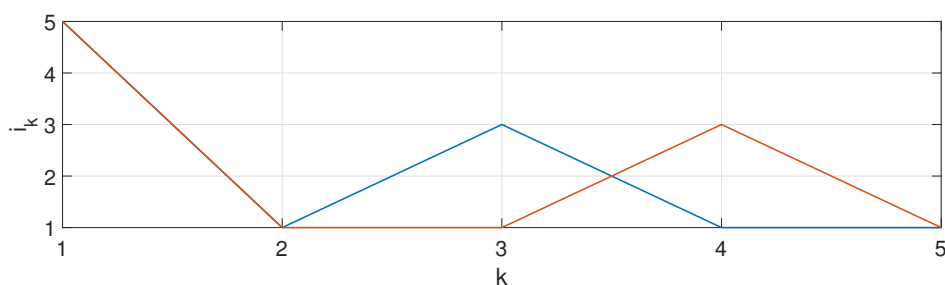
Poslední variantou optimalizační úlohy, jejíž cílem bylo minimalizovat napětí na vetknutém konci tyče, byla optimalizace s diskrétním výběrem materiálu z předem definovaných dvojic E a ρ (viz tabulka 1). Tento způsob optimalizace je velice nenáročný na výpočtový čas, počet optimalizovaných parametrů je roven počtu vrstev tyče, přičemž každý z nich může nabývat pouze hodnot $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ačkoliv v opakovaných běžích optimalizací se stejnými vstupními daty algoritmus našel tyče, které dosahovaly stejné redukce amplitudy pulsu, jednoznačné řešení opět nalezeno nebylo. Jak demonstruje obr. 18, i pro tyč s $n = 5$ je možné nalézt dvě různé konfigurace materiálu, které redukují puls na identickou hodnotu (okolo 15% pro puls s $t_0 = 20 \mu s$). Obě tyče obsahují stejné skoky v materiálových parametrech, ovšem v různých částech tyče. Pořadí skoků v parametrech ale nehraje v redukcí amplitudy na konci tyče roli, protože na každém rozhraní je amplituda procházejícího pulsu dána pouze amplitudou původního pulsu a koeficientem daným poměrem charakteristických impedancí materiálů tvořících rozhraní. Pořadí těchto úprav amplitudy tedy díky komutativnosti násobení nemá vliv na velikost amplitudy pulsu v poslední vrstvě tyče.

V této podkapitole byly za pomoci odvozeného řešení pro vrstevnatou tenkou tyč zkoumány různé přístupy využití optimalizačních algoritmů při optimálním návrhu vrstevnaté, popř. funkčně gradované, tyče minimalizující amplitudu napětí na jejím vetknutém konci. Pro pevně zvolenou celkovou délku tyče byla zjištěna závislost

i	1	2	3	4	5
E_i [GPa]	4,5	35	70	130	210
ρ_i [kg/m ³]	1000	1200	3500	4000	7870

Tabulka 1: Materiály definované pro optimalizaci s diskrétním výběrem.



Obrázek 18: Výsledné materiálové skladby tyče s $n = 5$ optimalizované pro puls délky $t_0 = 20 \mu s$

nejvyšší možné redukce amplitudy na délce budícího pulsu. Pro dostatečně krátký puls bylo možné najít takovou tyč, která jeho amplitudu redukuje až pod 3% původní hodnoty. Ukázalo se však, že žádná z variant optimalizační úlohy nevedla na jednoznačné řešení, tzn. že pro dosažení stejné redukce amplitudy pulsu bylo nalezeno více materiálových konfigurací vrstev.

4 Šíření nestacionárních vln ve 2D homogenním a heterogenním prostředí

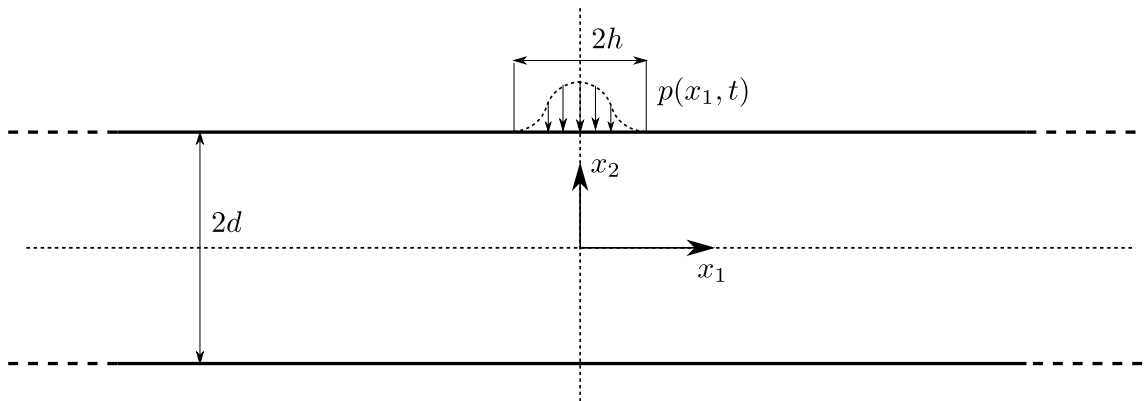
Tato kapitola se bude zabývat šířením nestacionárních vln v jednovrstvém a dvouvrstevném nekonečném pásu se speciální ortotropií. Pro tyto dvě úlohy zde bude popsáno odvození řešení vycházející z prací [21] a [22]. Pro odvozené řešení bude popsán proces vyčíslení a na několika příkladech budou zkoumány rozdíly v šíření vln v isotropním, ortotropním a vrstevnatém materiálu. V poslední části kapitoly bude provedeno porovnání výsledků odvozených vztahů a modelu vytvořeného v konečnoprvkovém softwaru za účelem ověření správnosti odvození.

4.1 Formulace problému

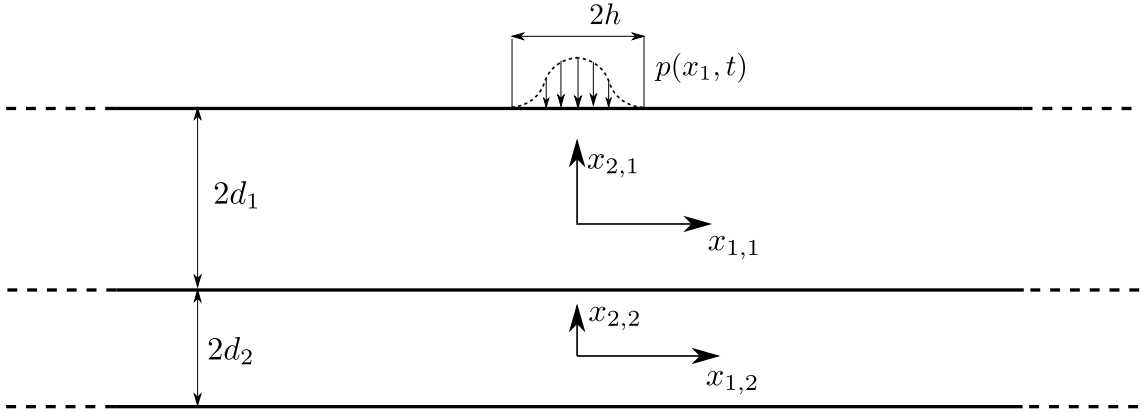
V následující části textu bude řešena úloha nestacionární rovinné napjatosti nekonečně dlouhého elastického pásu se speciální ortotropií, tedy takovou, pro kterou platí totožnost materiálových a geometrických os. Schéma této úlohy je zobrazeno na obr. 19. Pás má šířku $2d$, neomezenou délku, zanedbatelnou tloušťku a hustotu ρ . Souřadnicový systém má počátek umístěný ve středu pásu, osa x_1 je totožná s horizontální osou pásu a x_2 je na ni kolmá. Pás je na hranici $x_2 = d$ zatížen příčným tlakovým zatížením $p(x_1, t)$, které je v podélném směru x_1 symetrické podle osy x_2 a nenulové na oblasti délky $2h$. V čase je buzení popsáno libovolnou funkcí $\sigma_0(t)$. Spodní hranice pásu je uvažována volná. Díky předpokladu rovinné napjatosti jsou nenulové pouze normálové složky napětí ve směrech x_1 a x_2 a smykové napětí σ_{12} . Je tedy možné zavést vektory napětí a deformací jako

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, t) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2, t) \\ \sigma_{22}(x_1, x_2, t) \\ \sigma_{12}(x_1, x_2, t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2, t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2, t) \\ \varepsilon_{22}(x_1, x_2, t) \\ \gamma_{12}(x_1, x_2, t) \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Materiál pásu je jednoznačně popsán pomocí čtyř parametrů, konkrétně pomocí Youngových modulů ve směru x_1 a x_2 označených E_1 a E_2 , Poissonova čísla ν_{12} vyjadřujícího podíl poměrného zkrácení ve směru x_2 a poměrného prodloužení ve směru x_1 a modulu pružnosti ve smyku v rovině x_1x_2 značeného G_{12} .



Obrázek 19: Schéma problému homogenního pásu



Obrázek 20: Schéma problému dvouvrstvého pásu

V případě řešení odezvy vrstevnatého pásu je pro každou vrstvu $k = 1, 2$ daného pásu zaveden souřadnicový systém $x_{1,k}x_{2,k}$ ve středu dané vrstvy analogicky se souřadnicovým systémem homogenního pásu. Šířka k -té vrstvy je $2d_k$. Buzení je aplikováno na horní okraj vrstvy $k = 1$. Spodní okraj vrstvy $k = 2$ je uvažován volný. Každá vrstva je popsána materiálovými parametry $E_{1,k}, E_{2,k}, \nu_{12,k}$ a $G_{12,k}$. Schéma této úlohy je zobrazeno na obr. 20.

4.2 Řešení úlohy ortotropního pásu

Odvození řešení pro nestacionární napjatost v nekonečně dlouhém ortotropním pásu vychází z pohybových rovnic pro případ rovinné napjatosti, kinematických rovnic a fyzikálních rovnic pro ortotropní elastický materiál.

Pohybové rovnice pro úlohu elastodynamiky a rovinnou napjatost lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{11}(x_1, x_2, t) + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12}(x_1, x_2, t), \\ \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{22}(x_1, x_2, t) + \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{12}(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

kde funkce $u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t)$ reprezentují složky posuvů ve směrech x_1 a x_2 . Mezi složkami posuvů a deformací platí za předpokladu malých deformací kinematické rovnice

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial}{\partial x_1} u_1(x_1, x_2, t), \\ \varepsilon_{22}(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial}{\partial x_2} u_2(x_1, x_2, t), \\ \gamma_{12}(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial}{\partial x_2} u_1(x_1, x_2, t) + \frac{\partial}{\partial x_1} u_2(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Fyzikální rovnice lze pro výše popsany ortotropní materiál a zavedené vektory (4.1) zapsat jako [23]

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, t) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2, t), \quad (4.4)$$

kde matice tuhosti \mathbf{D} ve vztahu (4.4) lze pro případ rovinné napjatosti vyjádřit následovně

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Jednotlivé koeficienty b_{ij} matice tuhosti \mathbf{D} mají přitom tvar

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, & b_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, \\ b_{12} &= \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, & b_{21} &= \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, & b_{66} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

kde pro ν_{21} díky Bettiho teorému platí

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}. \quad (4.7)$$

Z dosazení (4.7) do (4.6) je zřejmá rovnost

$$b_{12} = b_{21}. \quad (4.8)$$

Fyzikální rovnice (4.4) lze tedy po složkách zapsat jako

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, x_2, t) &= b_{11}\varepsilon_{11}(x_1, x_2, t) + b_{12}\varepsilon_{22}(x_1, x_2, t), \\ \sigma_{22}(x_1, x_2, t) &= b_{21}\varepsilon_{11}(x_1, x_2, t) + b_{22}\varepsilon_{22}(x_1, x_2, t), \\ \sigma_{12}(x_1, x_2, t) &= b_{66}\gamma_{12}(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dosazením kinematických rovnic (4.3) do fyzikálních rovnic (4.9) a následným dosazením takto získaných vztahů do pohybových rovnic (4.2) vzniknou základní parciální diferenciální rovnice řešeného problému, které mají při zavedení rychlostí šíření vln c_{11} , c_{22} a c_{12} tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= c_{11}^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \nu_{21} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + c_{12}^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= c_{22}^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + c_{12}^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

kde c_{11} a c_{22} jsou rychlosti šíření dilatační vlny (P-vlny) ve směrech x_1 a x_2 a c_{12} je rychlost šíření smykové vlny (S-vlny). Tyto rychlosti jsou zavedeny jako

$$c_{11}^2 = \frac{b_{11}}{\rho}, \quad c_{22}^2 = \frac{b_{22}}{\rho}, \quad c_{12}^2 = \frac{b_{66}}{\rho}. \quad (4.11)$$

Parciální diferenciální rovnice (4.10) jsou navzájem provázané, na rozdíl od úlohy isotropního pásu (viz [8]). Je tedy potřeba je řešit najednou. Tato soustava bude řešena pomocí integrálních transformací, konkrétně Laplaceovou v čase a Fourierovou v jedné prostorové proměnné. Tímto způsobem bude systém parciálních diferenciálních rovnic (4.10) převeden na soustavu dvou provázaných obyčejných diferenciálních rovnic. Pro kompletní definici úlohy je ještě nutné formulovat počáteční

a okrajové podmínky. Počáteční podmínky jsou uvažovány nulové, tj. ve tvaru

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, 0) = 0, \quad u_2(x_1, x_2, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_1(x_1, x_2, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_2(x_1, x_2, t)|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Okrajové podmínky popisují příčné buzení horní hrany a volnou spodní hranu pásu. Lze tedy psát

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_1, d, t) = p(x_1, t), \quad \sigma_{12}(x_1, d, t) = 0, \\ \sigma_{22}(x_1, -d, t) = 0, \quad \sigma_{12}(x_1, -d, t) = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

kde $p(x_1, t) = \sigma_{0x}(x_1)\sigma_0(t)$ a prostorová část této funkce je uvažována ve tvaru

$$\sigma_{0x}(x_1) = \cos\left(\frac{\pi x_1}{2h}\right). \quad (4.14)$$

Nyní je možné při uvažování nulových počátečních podmínek (4.12) provedením Laplaceovy transformace základních rovnic (4.10) získat rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{c_{11}^2}{p^2} \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \nu_{21} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{c_{12}^2}{p^2} \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \\ U_2 &= \frac{c_{22}^2}{p^2} \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{c_{12}^2}{p^2} \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

kde $U_1 = U_1(x_1, x_2, p)$ a $U_2 = U_2(x_1, x_2, p)$ jsou Laplaceovy obrazy funkcí posuvů u_1 a u_2 a p je komplexní parametr provedené transformace. Dále bude řešení U_1 a U_2 předpokládáno ve tvaru Fourierových integrálů. Díky předpokladu sudosti budoucího napětí v proměnné x_1 bude posuv u_1 i jeho obraz lichou funkcí v x_1 a posuv u_2 i jeho obraz sudou funkcí ve stejné proměnné. Je tedy možné psát

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega, x_2, p) \sin(\omega x_1) d\omega, \\ U_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega, x_2, p) \cos(\omega x_1) d\omega, \end{aligned} \quad (4.16)$$

kde ω je proměnná Fourierových integrálů a funkce $A = A(\omega, x_2, p)$ a $B = B(\omega, x_2, p)$ jsou jejich spektra, která je nutné určit z okrajových podmínek. Po dosazení (4.16) do rovnic (4.15) a provedení derivací lze odvodit integrální rovnosti, které je možné za předpokladu integrovatelnosti integrandů a rozdílnosti integračních intervalů pouze v konečném počtu bodů převést na rovnosti integrandů ve tvaru

$$\begin{aligned} A \sin(\omega x_1) &= \left(-\frac{c_{11}^2 \omega}{p^2} \left(A\omega + \nu_{21} \frac{\partial B}{\partial x_2} \right) + \frac{c_{12}^2}{p^2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} - \omega \frac{\partial B}{\partial x_2} \right) \right) \sin(\omega x_1), \\ B \cos(\omega x_1) &= \left(\frac{c_{22}^2}{p^2} \left(\nu_{12} \omega \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2} \right) + \frac{c_{12}^2 \omega}{p^2} \left(\frac{\partial A}{\partial x_2} - \omega B \right) \right) \cos(\omega x_1). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Po porovnání koeficientů u sinů a kosinů, po provedení algebraických úprav a zavedení označení

$$\begin{aligned} a_1(\omega, p) &= \frac{c_1^2 \omega^2}{c_{12}^2} + \frac{p^2}{c_{12}^2}, & b_1(\omega, p) &= \frac{c_{12}^2 \omega^2}{c_{22}^2} + \frac{p^2}{c_{22}^2}, \\ a_2(\omega, p) &= \frac{c_{11}^2 \nu_{21} \omega}{c_{12}^2} + \omega, & b_2(\omega, p) &= \nu_{12} \omega + \frac{c_{12}^2 \omega}{c_{22}^2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

lze rovnice (4.17) přepsat na soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} - a_1 A - a_2 \frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2} - b_1 B + b_2 \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Obecné řešení této soustavy je možné předpokládat ve tvaru

$$\begin{aligned} A(\omega, x_2, p) &= A_1(\omega, p) e^{\lambda x_2}, \\ B(\omega, x_2, p) &= B_1(\omega, p) e^{\lambda x_2}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

kde $A_1(\omega, p)$ a $A_2(\omega, p)$ jsou neznámé komplexní amplitudy hledaných spekter a λ představuje kořeny charakteristických rovnic odpovídajících soustavě (4.19). Dosažení (4.20) do (4.19) vede na algebraickou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Vyjádřením podmínky existence netriviálního řešení této soustavy vznikne bikvadratická rovnice

$$\lambda^4 + (a_2 b_2 - b_1 - a_1) \lambda^2 + a_1 b_1 = 0, \quad (4.21)$$

jejíž řešení je možné zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \lambda_1(\omega, p) &= \Lambda_1(\omega, p) = \frac{1}{2} \sqrt{2k(\omega, p) + 2\sqrt{l(\omega, p)}}, \\ \lambda_2(\omega, p) &= -\Lambda_1(\omega, p), \\ \lambda_3(\omega, p) &= \Lambda_2(\omega, p) = \frac{1}{2} \sqrt{2k(\omega, p) - 2\sqrt{l(\omega, p)}}, \\ \lambda_4(\omega, p) &= -\Lambda_2(\omega, p), \end{aligned} \quad (4.22)$$

kde

$$\begin{aligned} k(\omega, p) &= -a_2 b_2 + b_1 + a_1, \\ l(\omega, p) &= a_2^2 b_2^2 - 2a_2 b_2 (a_1 + b_1) + (a_1 + b_1)^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Po využití řešení (4.22) charakteristické rovnice (4.21), vztahů definujících hyperbolické funkce a po přeznačení amplitud funkcí fundamentálního systému lze obecné řešení pro hledaná spektra zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} A &= Q_A \cosh(x_2 \Lambda_1) + S_A \cosh(x_2 \Lambda_2) + P_A \sinh(x_2 \Lambda_1) + R_A \sinh(x_2 \Lambda_2), \\ B &= Q_B \cosh(x_2 \Lambda_1) + S_B \cosh(x_2 \Lambda_2) + P_B \sinh(x_2 \Lambda_1) + R_B \sinh(x_2 \Lambda_2), \end{aligned} \quad (4.24)$$

kde $P_A, Q_A, R_A, S_A, P_B, Q_B, R_B$ a S_B jsou neznámé funkce parametrů ω a p , které je nutné určit ze čtyř okrajových podmínek úlohy. Díky provázanosti rovnic (4.19)

jsou pouze čtyři ze zmíněných funkcí nezávislé. Dále je tedy potřeba vyšetřit jejich závislost, aby bylo možné je jednoznačně určit. To lze provést například dosazením obecného řešení pro A z (4.24) do první rovnice (4.19). Izolováním členu $\partial B/\partial x_2$ ve vzniklé rovnici a následnou integrací podle x_2 vznikne obecné řešení pro B vyjádřené pomocí funkcí P_A, Q_A, R_A a S_A , které lze po úpravě a zavedení pomocného označení zapsat ve tvaru

$$B = l_1 (P_A \cosh(x_2 \Lambda_1) + Q_A \sinh(x_2 \Lambda_1)) + l_2 (R_A \cosh(x_2 \Lambda_2) + S_A \sinh(x_2 \Lambda_2)), \quad (4.25)$$

kde

$$l_1(\omega, p) = \frac{\Lambda_1^2 - a_1}{a_2 \Lambda_1}, \quad l_2(\omega, p) = \frac{\Lambda_2^2 - a_1}{a_2 \Lambda_2}. \quad (4.26)$$

Z porovnání (4.25) s druhou rovnicí (4.24) jsou zřejmé vztahy

$$Q_B = P_A l_1, \quad S_B = R_A l_2, \quad P_B = Q_A l_1, \quad R_B = S_A l_2. \quad (4.27)$$

Po provedení přeznačení $P = P_A, Q = Q_A, R = R_A$ a $S = S_A$ je tedy možné obecné řešení pro A a B zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} A &= Q \cosh(x_2 \Lambda_1) + S \cosh(x_2 \Lambda_2) + P \sinh(x_2 \Lambda_1) + R \sinh(x_2 \Lambda_2), \\ B &= P l_1 \cosh(x_2 \Lambda_1) + R l_2 \cosh(x_2 \Lambda_2) + Q l_1 \sinh(x_2 \Lambda_1) + S l_2 \sinh(x_2 \Lambda_2). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Neznámé funkce P, Q, R a S lze určit dosazením do okrajových podmínek (4.13). Ty je však nutné nejdříve převést Laplaceovou transformací do komplexní oblasti, tj. do podoby

$$\begin{aligned} \Sigma_{22}(x_1, d, t) &= \sigma_{0x}(x_1) \Sigma_0(p), & \Sigma_{12}(x_1, d, t) &= 0, \\ \Sigma_{22}(x_1, -d, t) &= 0, & \Sigma_{12}(x_1, -d, t) &= 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

kde Σ_{11}, Σ_{22} a Σ_{12} jsou Laplaceovy obrazy funkcí popisujících napětí v pásu a $\Sigma_0(p)$ je obraz časově závislé části budící funkce $p(x_1, t)$. Laplaceovy obrazy napětí lze určit dosazením kinematických rovnic (4.3) do fyzikálních rovnic (4.9) a následnou transformací těchto vztahů. Dosazením obecného řešení pro obrazy posuvů (4.16) a obecných řešení pro Fourierova spektra A a B (4.28) do takto upravených vztahů vzniknou obecné předpisy pro obrazy napětí v pásu. Provedením derivací podle prostorových proměnných a algebraických úprav lze tyto vztahy přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} S_{11}(x_1, x_2, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ((b_{11}\omega + b_{12}L_1)(Q \cosh(x_2 \Lambda_1) + P \sinh(x_2 \Lambda_1)) + \\ &\quad (b_{11}\omega + b_{12}L_2)(R \sinh(x_2 \Lambda_2) + S \cosh(x_2 \Lambda_2))) \cos(\omega x_1) d\omega, \\ S_{22}(x_1, x_2, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ((b_{21}\omega + b_{22}L_1)(Q \cosh(x_2 \Lambda_1) + P \sinh(x_2 \Lambda_1)) + \\ &\quad (b_{21}\omega + b_{22}L_2)(R \sinh(x_2 \Lambda_2) + S \cosh(x_2 \Lambda_2))) \cos(\omega x_1) d\omega, \\ S_{12}(x_1, x_2, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty b_{66}((\Lambda_1 - \omega l_1)(P \cosh(x_2 \Lambda_1) + Q \sinh(x_2 \Lambda_1)) + \\ &\quad (\Lambda_2 - \omega l_2)(R \cosh(x_2 \Lambda_2) + S \sinh(x_2 \Lambda_2))) \sin(\omega x_1) d\omega, \end{aligned} \quad (4.30)$$

kde

$$L_1(\omega, p) = l_1(\omega, p)\Lambda_1(\omega, p), \quad L_2(\omega, p) = l_2(\omega, p)\Lambda_2(\omega, p). \quad (4.31)$$

Aby bylo možné po dosazení (4.30) do (4.29) podmínku buzení převést z integrální rovnosti za dříve zmíněných předpokladů na rovnost integrandů, je nutné prostorovou část buzení (4.14) vyjádřit pomocí Fourierova integrálu ve tvaru

$$\sigma_{0x}(x_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty a(\omega) \cos(\omega x_1) d\omega. \quad (4.32)$$

Spektrum $a(\omega)$ lze pro (4.14) určit integrací obecného předpisu pro Fourierovo spektrum a má tvar

$$a(\omega) = \frac{4\pi h \cos(\omega h)}{\pi^2 - 4\omega^2 h^2}. \quad (4.33)$$

Nyní, po provedení výše zmíněných operací a vydělení rovnice členem $\cos(\omega x_1)$, je možné psát obraz okrajové podmínky buzení následovně

$$(b_{21}\omega + b_{22}L_1)(Q \cosh(d\Lambda_1) + P \sinh(d\Lambda_1)) + (b_{21}\omega + b_{22}L_2)(R \sinh(d\Lambda_2) + S \cosh(d\Lambda_2)) = a(\omega)\Sigma_0(p). \quad (4.34)$$

Analogickým postupem pro zbylé tři okrajové podmínky vznikne soustava čtyř rovnic o čtyřech neznámých, jejíž řešení lze po zavedení značení

$$\begin{aligned} k_1(\omega, p) &= b_{21}\omega + b_{22}L_1, \\ k_2(\omega, p) &= b_{21}\omega + b_{22}L_2, \\ k_3(\omega, p) &= -\omega l_1 + \Lambda_1, \\ k_4(\omega, p) &= -\omega l_2 + \Lambda_2, \\ k_5(\omega, p) &= \cosh(d\Lambda_1) \sinh(d\Lambda_2) k_2 k_3 - \cosh(d\Lambda_2) \sinh(d\Lambda_1) k_1 k_4, \\ k_6(\omega, p) &= \cosh(d\Lambda_1) \sinh(d\Lambda_2) k_1 k_4 - \cosh(d\Lambda_2) \sinh(d\Lambda_1) k_2 k_3, \\ k_{11}(\omega, p) &= b_{11}\omega + b_{12}L_1, \\ k_{21}(\omega, p) &= b_{11}\omega + b_{12}L_2, \\ F(\omega, p) &= a(\omega)\Sigma_0(p) \end{aligned} \quad (4.35)$$

zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} P(\omega, p) &= -\frac{1}{2} \frac{F k_4 \cosh(d\Lambda_2)}{k_5}, & Q(\omega, p) &= \frac{1}{2} \frac{F k_4 \sinh(d\Lambda_2)}{k_6}, \\ R(\omega, p) &= \frac{1}{2} \frac{F k_3 \cosh(d\Lambda_1)}{k_5}, & S(\omega, p) &= -\frac{1}{2} \frac{F k_3 \sinh(d\Lambda_1)}{k_6}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Nyní jsou tedy známy amplitudy funkcí fundamentálního systému soustavy rovnic (4.19) a tedy po dosazení (4.36) do (4.28) i její řešení a tedy konkrétní spektra A a B pro okrajové podmínky (4.13). Dosazením těchto spekter a vztahů (4.36) do obecných předpisu pro obrazy posuvů (4.16) a napětí (4.30) vzniknou výsledné

vztahy pro tyto obrazy ve tvaru

$$\begin{aligned}
 U_1(x_1, x_2, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (Q \cosh(x_2 \Lambda_1) + S \cosh(x_2 \Lambda_2) + \\
 &\quad P \sinh(x_2 \Lambda_1) + R \sinh(x_2 \Lambda_2)) \sin(\omega x_1) d\omega, \\
 U_2(x_1, x_2, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (Pl_1 \cosh(x_2 \Lambda_1) + Rl_2 \cosh(x_2 \Lambda_2) + \\
 &\quad Ql_1 \sinh(x_2 \Lambda_1) + Sl_2 \sinh(x_2 \Lambda_2)) \cos(\omega x_1) d\omega, \\
 S_{11}(x_1, x_2, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (k_{11}(Q \cosh(x_2 \Lambda_1) + P \sinh(x_2 \Lambda_1)) + \\
 &\quad k_{21}(R \sinh(x_2 \Lambda_2) + S \cosh(x_2 \Lambda_2))) \cos(\omega x_1) d\omega, \\
 S_{22}(x_1, x_2, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (k_1(Q \cosh(x_2 \Lambda_1) + P \sinh(x_2 \Lambda_1)) + \\
 &\quad k_2(R \sinh(x_2 \Lambda_2) + S \cosh(x_2 \Lambda_2))) \cos(\omega x_1) d\omega, \\
 S_{12}(x_1, x_2, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} b_{66}(k_3(P \cosh(x_2 \Lambda_1) + Q \sinh(x_2 \Lambda_1)) + \\
 &\quad k_4(R \cosh(x_2 \Lambda_2) + S \sinh(x_2 \Lambda_2))) \sin(\omega x_1) d\omega.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Pomocí těchto vztahů lze pak odvodit obrazy ostatních veličin, např. rychlostí V_1 , V_2 a zrychlení A_1 , A_2 , pro které při zohlednění nulových počátečních podmínek platí [17]

$$\begin{aligned}
 V_1(x_1, x_2, p) &= pU_1(x_1, x_2, p), & V_2(x_1, x_2, p) &= pU_2(x_1, x_2, p), \\
 A_1(x_1, x_2, p) &= p^2U_1(x_1, x_2, p), & A_2(x_1, x_2, p) &= p^2U_2(x_1, x_2, p).
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

4.3 Řešení úlohy dvouvrstvého ortotropního pásu

V této podkapitole bude popsán postup řešení úlohy rovinné napjatosti nekonečně dlouhého dvouvrstvého pásu se speciální ortotropií.

Řešení úlohy vychází ze vztahů (4.37), které obecně popisují obrazy posuvů a napětí v homogenním pásu se speciální ortotropií. Každá z vrstev se totiž chová jako homogenní pás, tudíž vztahy pro Laplaceovy obrazy posuvů a napětí jsou formálně stejné jako (4.37), postačuje do nich zavést jen index příslušné vrstvy

k ($k = 1, 2$), např. následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
 U_{1,k}(x_{1,k}, x_{2,k}, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (Q_k \cosh(x_{2,k}\Lambda_{1,k}) + S_k \cosh(x_{2,k}\Lambda_{2,k}) + \\
 &\quad P_k \sinh(x_{2,k}\Lambda_{1,k}) + R_k \sinh(x_{2,k}\Lambda_{2,k})) \sin(\omega x_{1,k}) d\omega, \\
 U_{2,k}(x_{1,k}, x_{2,k}, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (Pl_{1,k} \cosh(x_{2,k}\Lambda_{1,k}) + Rl_{2,k} \cosh(x_{2,k}\Lambda_{2,k}) + \\
 &\quad Ql_{1,k} \sinh(x_{2,k}\Lambda_{1,k}) + Sl_{2,k} \sinh(x_{2,k}\Lambda_{2,k})) \cos(\omega x_{1,k}) d\omega, \\
 S_{11,k}(x_{1,k}, x_{2,k}, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (k_{11,k} (Q_k \cosh(x_{2,k}\Lambda_{1,k}) + P_k \sinh(x_{2,k}\Lambda_{1,k})) + \\
 &\quad k_{21,k} (R_k \sinh(x_{2,k}\Lambda_{2,k}) + S_k \cosh(x_{2,k}\Lambda_{2,k}))) \cos(\omega x_{1,k}) d\omega, \\
 S_{22,k}(x_{1,k}, x_{2,k}, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (k_{1,k} (Q_k \cosh(x_{2,k}\Lambda_{1,k}) + P_k \sinh(x_{2,k}\Lambda_{1,k})) + \\
 &\quad k_{2,k} (R_k \sinh(x_{2,k}\Lambda_{2,k}) + S_k \cosh(x_{2,k}\Lambda_{2,k}))) \cos(\omega x_{1,k}) d\omega, \\
 S_{12,k}(x_{1,k}, x_{2,k}, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} b_{66,k} (k_{3,k} (P_k \cosh(x_{2,k}\Lambda_{1,k}) + Q_k \sinh(x_{2,k}\Lambda_{1,k})) + \\
 &\quad k_{4,k} (R_k \cosh(x_{2,k}\Lambda_{2,k}) + S_k \sinh(x_{2,k}\Lambda_{2,k}))) \sin(\omega x_{1,k}) d\omega.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

kde funkce P_k, Q_k, R_k a S_k jsou neznámé. Tyto vztahy pak popisují obrazy posuvů a napětí v k -té vrstvě vrstevnatého pásu. Neznámé funkce pro $k = 1, 2$ je potřeba určit z okrajových podmínek, kterými jsou, kromě podmínky buzení a volné spodní hrany pásu, podmínky spojitosti příslušných posuvů v obou směrech a napětí na rozhraních vrstev. Po Laplaceově transformaci těchto podmínek lze tedy pro dvouvrstvý pás psát

$$\begin{aligned}
 S_{22,1}(x_{1,1}, d_1, p) &= \sigma_{0x}(x_{1,1})\Sigma_0(p), \\
 S_{12,1}(x_{1,1}, d_1, p) &= 0, \\
 U_{1,1}(x_{1,1}, -d_1, p) &= U_{1,2}(x_{1,2}, d_2, p), \\
 U_{2,1}(x_{1,1}, -d_1, p) &= U_{2,2}(x_{1,2}, d_2, p), \\
 S_{22,1}(x_{1,1}, -d_1, p) &= S_{22,2}(x_{1,2}, d_2, p), \\
 S_{12,1}(x_{1,1}, -d_1, p) &= S_{12,2}(x_{1,2}, d_2, p), \\
 S_{22,2}(x_{1,2}, -d_2, p) &= 0, \\
 S_{12,2}(x_{1,2}, -d_2, p) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Pro přehlednost dalšího zápisu bude zavedeno zkrácené označení

$$s_{ik} = \sinh(d_k \Lambda_{i,k}), \quad c_{ik} = \cosh(d_k \Lambda_{i,k}), \quad i = 1, 2. \tag{4.41}$$

Po dosazení vztahu (4.39) do transformovaných okrajových podmínek (4.40), provedení úprav a využití sudosti a lichosti funkcí $\sinh(x)$ a $\cosh(x)$ vede problém na soustavu osmi algebraických rovnic pro osm neznámých ve tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (4.42)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{32} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ R_1 \\ S_1 \\ P_2 \\ Q_2 \\ R_2 \\ S_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a(\omega)\Sigma_0(p) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} k_{1,1}s_{11} & k_{1,1}c_{11} & k_{2,1}s_{21} & k_{2,1}c_{21} \\ b_{66,1}k_{3,1}c_{11} & b_{66,1}k_{3,1}s_{11} & b_{66,1}k_{4,1}c_{21} & b_{66,1}k_{4,1}s_{21} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} -s_{11} & c_{11} & -s_{21} & c_{21} \\ l_{1,1}c_{11} & -l_{1,1}s_{11} & l_{2,1}c_{21} & -l_{2,1}s_{21} \\ -k_{1,1}s_{11} & k_{1,1}c_{11} & -k_{2,1}s_{21} & k_{2,1}c_{21} \\ b_{66,1}k_{3,1}c_{11} & -b_{66,1}k_{3,1}s_{11} & b_{66,1}k_{4,1}c_{21} & -b_{66,1}k_{4,1}s_{21} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} -s_{12} & -c_{12} & -s_{22} & -c_{22} \\ -l_{1,2}c_{12} & -l_{1,2}s_{12} & -l_{2,2}c_{22} & -l_{2,2}s_{22} \\ -k_{1,2}s_{12} & -k_{1,2}c_{12} & -k_{2,2}s_{22} & -k_{2,2}c_{22} \\ -b_{66,2}k_{3,2}c_{12} & -b_{66,2}k_{3,2}s_{12} & -b_{66,2}k_{4,2}c_{22} & -b_{66,2}k_{4,2}s_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{32} &= \begin{bmatrix} -k_{1,2}s_{12} & k_{1,2}c_{12} & -k_{2,2}s_{22} & k_{2,2}c_{22} \\ b_{66,2}k_{3,2}c_{12} & -b_{66,2}k_{3,2}s_{12} & b_{66,2}k_{4,2}c_{22} & -b_{66,2}k_{4,2}s_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Soustava (4.42) lze pro dvě vrstvy řešit analyticky či numericky, pro více vrstev však analytické řešení již není možné. Jejím řešením jsou vztahy, které po dosazení do (4.39) vedou na obrazy řešení napjatosti v každé vrstvě pásu. V případě popisu prostorové části buzení odlišnou funkcí než kosinovým předpisem (4.14) je nutné určit spektrum $a(\omega)$ pro danou funkci. To je možné provést analytickou či numerickou integrací obecného předpisu pro Fourierovo spektrum.

4.4 Vyčíslení řešení pro konkrétní úlohy

V této kapitole bude stručně popsán postup vyčíslení vztahů popisujících obrazy posuvů a napětí v libovolné vrstvě pásu v časové oblasti. Následně budou prezentovány výsledky úloh isotropního, ortotropního a ortotropního vrstevnatého pásu a analyzovány rozdíly v šíření vln v těchto prostředích.

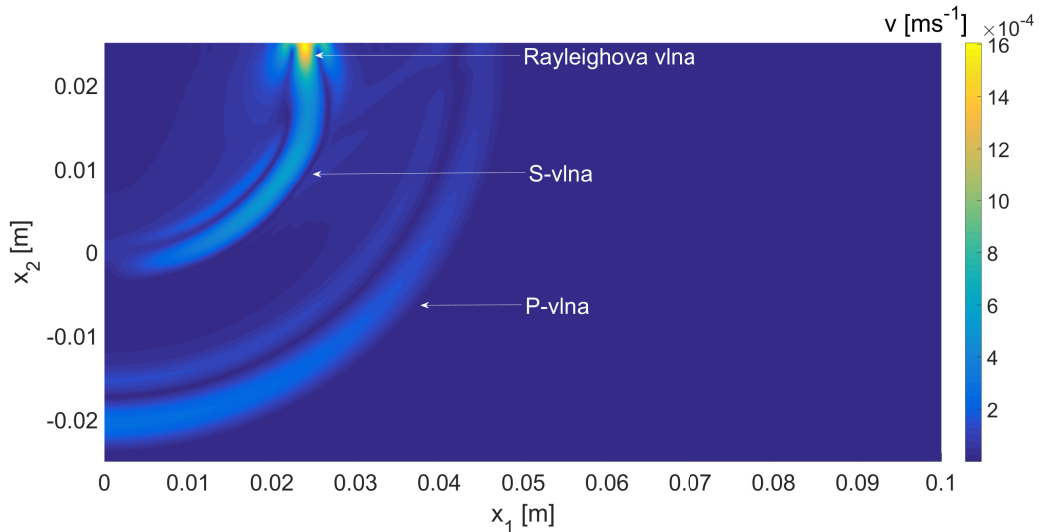
Konečné vztahy řešení odvozeného v podkapitolách 4.2 a 4.3 vyjadřují Laplaceovy obrazy posuvů a napětí a obsahují nevlastní integrál. V časové oblasti jsou vztahy vyčísleny pro konkrétní úlohu pomocí numerické zpětné Laplaceovy transformace algoritmem *EPS* popsaným v podkapitole 3.3. Následně je provedena numerické vyčíslení Fourierova integrálu Simpsonovým pravidlem pro horní mez volenou jako kompromis mezi výpočtovým časem a přesností vyčíslení integrálu. Konkrétně pro úlohy řešené v této práci je integrováno do $\omega_{max} = 4000$ ve 2000 ekvidistantních krocích.

Pro zkoumání šíření vln v různých typech materiálů budou řešeny úlohy pro pás o šířce 50 mm, který je buzený pulsem

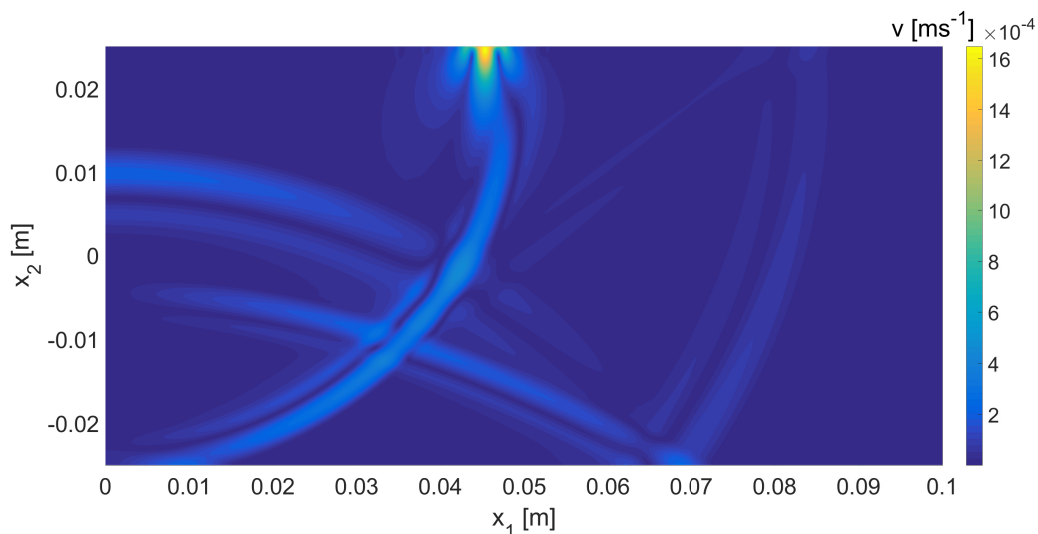
$$\sigma_0(t) = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right)\right) (H(t) - H(t - t_0)) \quad (4.45)$$

o amplitudě $\sigma_0 = 1$ MPa a délce trvání $t_0 = 2 \mu\text{s}$. V prostoru je buzení popsáno předpisem (4.14) pro $h = 0.25$ mm. Výsledky první úlohy byly vyčísleny pro isotropní materiál odpovídající oceli s parametry $\rho = 7800$ kg/m³, $E = 180$ GPa a $\nu = 0,3$. Rozložení celkové rychlosti v tomto pásu v čase $t = 9,7 \mu\text{s}$ je zobrazeno na obr. 21. Je možné na něm sledovat P-vlnu šířící se v obou směrech stejnou rychlostí $c_{11} = c_{22} = 5036$ m/s. Smyková vlna (S-vlna) ji následuje rychlostí $c_{12} = 2979$ m/s. Po horní hraně pásu se za S-vlnou šíří povrchová Rayleighova vlna rychlostí přibližně $c_r = 0,92c_{12}$ (oblast s výrazně vyšší rychlostí u horní hrany). Rozložení rychlostí po odrazu od spodní hrany pásu v čase $t = 17,6 \mu\text{s}$ je zobrazeno na obr. 22. Na tomto obrázku je lépe zřetelná separace smykové a Rayleighovy vlny. Na obou výše zmíněných obrázcích lze pozorovat menší amplitudy rychlostí způsobené smykovou vlnou v okolí vertikální osy symetrie pásu ($x_1 = 0$).

Pro demonstrování šíření vln v ortotropním pásu byly zvoleny materiálové parametry $\rho = 7800$ kg/m³, $E_1 = 180$ GPa, $E_2 = 90$ GPa, $\nu_{12} = 0,3$ a $G_{12} = 69$ GPa, tj. modul pružnosti ve smyku je stejný, jako v předchozím případě. V ortotropním

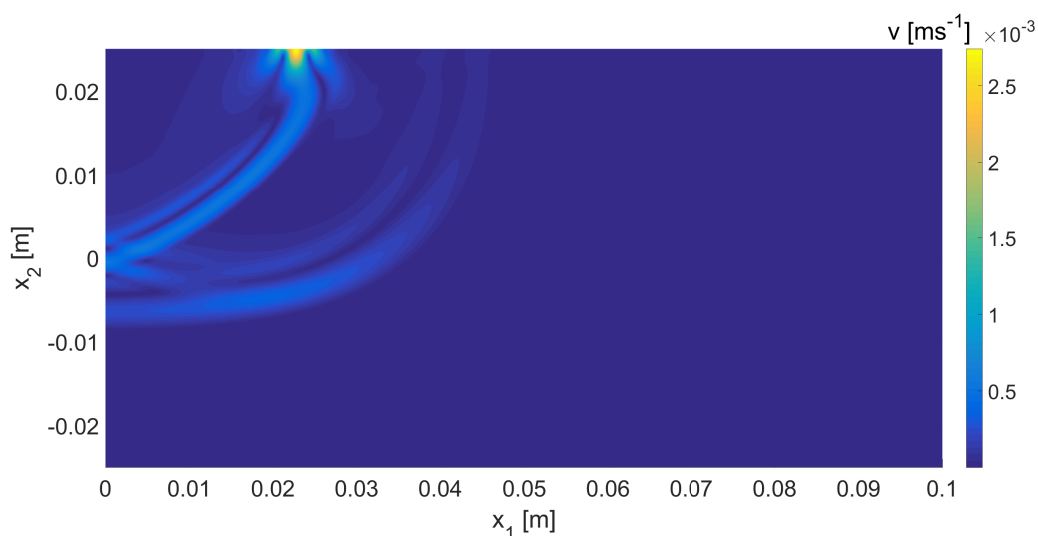


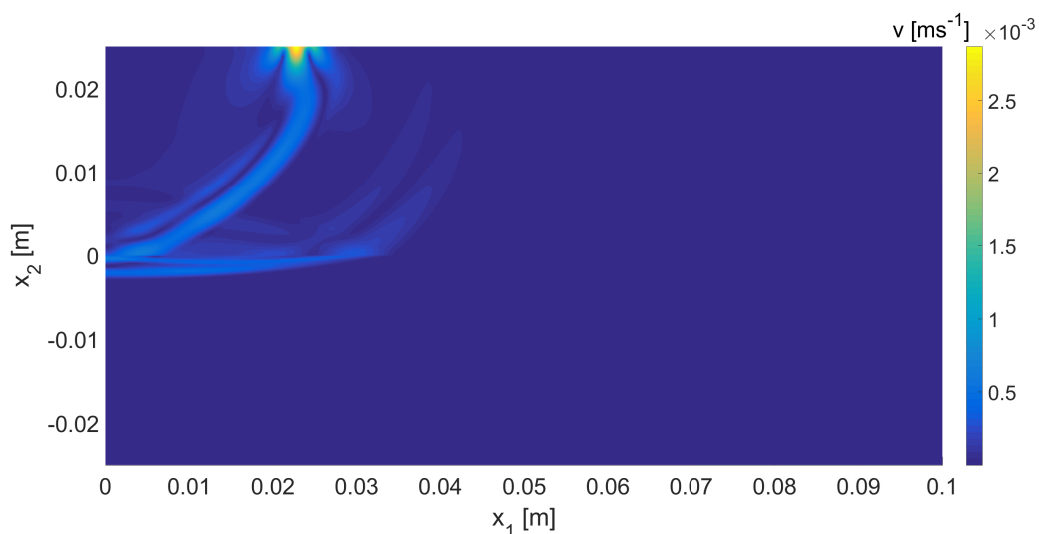
Obrázek 21: Rozložení celkové rychlosti v isotropním pásu v čase $t = 9,7 \mu\text{s}$

Obrázek 22: Rozložení celkové rychlosti v isotropním pásu v čase $t = 17,6 \mu\text{s}$

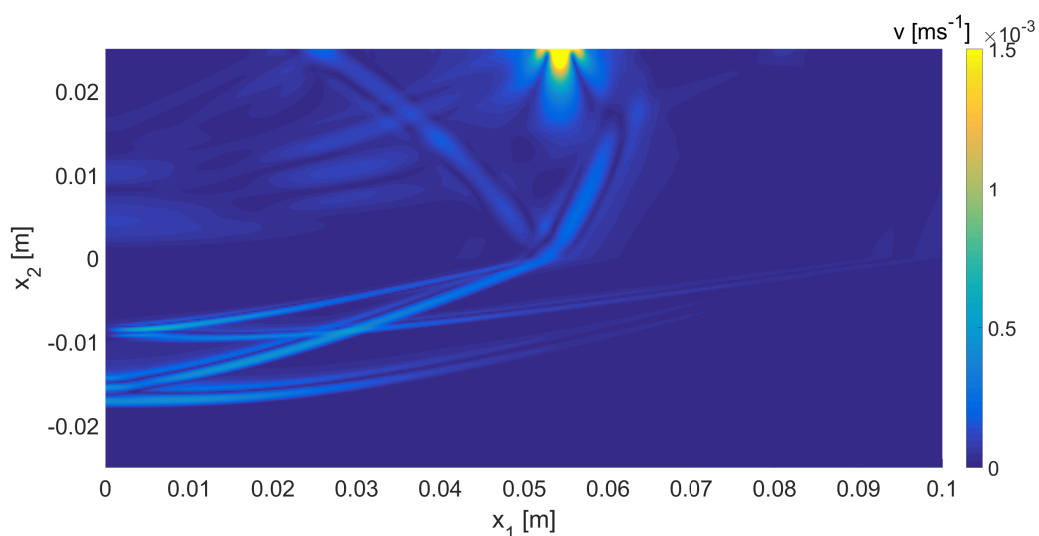
materiálu již neplatí rovnost rychlostí c_{11} a c_{22} , P-vlna se tak nešíří v obou směrech stejně rychle. To je zřejmé i z obr. 23, kde je zobrazeno rozložení celkové rychlosti v tomto ortotropním materiálu v čase $t = 9,7 \mu\text{s}$. Pro rychlost ve směru x_2 v tomto případě platí přibližně $c_{22} = 0,7c_{11}$. Na výsledcích pro ortotropní materiál si lze všimnout také jiného tvaru čela smykové vlny.

Pro demonstraci šíření vln ve vrstevnatém materiálu byl zvolen pás o dvou vrstvách šířky $2d_1 = 2d_2 = 25 \text{ mm}$, ve kterém vrstva $k = 1$ má identické materiálové parametry jako výše prezentovaný ortotropní pás. Spodní vrstva je definována jako isotropní olovo s parametry $\rho_{PB} = 11000 \text{ kg/m}^3$, $E_{PB} = 16 \text{ GPa}$ a $\nu_{PB} = 0,44$. Rychlosti šíření vln v olovu jsou výrazně menší, než v oceli ve vrstvě $k = 1$, část jak

Obrázek 23: Rozložení celkové rychlosti v ortotropním pásu v čase $t = 9,7 \mu\text{s}$

Obrázek 24: Rozložení celkové rychlosti ve vrstevnatém pásu v čase $t = 9,7 \mu s$

primární, tak smykové vlny, která projde rozhraním do vrstvy $k = 2$ by se tedy měla šířit výrazně pomaleji. Na obr. 24 je zobrazeno rozložení celkové rychlosti v tomto vrstevnatém pásu v čase $t = 9,7 \mu s$. Souřadnicový systém je zde zaveden analogicky jako v předchozích příkladech v této kapitole, takže rozhraní mezi oběma vrstvami odpovídá přímka $x_2 = 0$. V porovnání tohoto obrázku s výsledky pro jednovrstvý ortotropní pás (viz obr. 23) je zde zřejmé zmíněné zpomalení vln ve spodní vrstvě. Z obr. 25, který prezentuje výsledky pro vrstevnatý pás v čase $t = 21,9 \mu s$, je zřejmé, že velká část energie z P-vln a S-vln prošla skrz rozhraní do spodní vrstvy, na rozdíl od povrchové Rayleighovy vlny, která se stále šíří pouze v blízkosti horní hrany pásu. Ve vrchní vrstvě lze také pozorovat od rozhraní odraženou část primární a smykové

Obrázek 25: Rozložení celkové rychlosti ve vrstevnatém pásu v čase $t = 21,9 \mu s$

vlny, které však mají značně nižší amplitudu než vlny ve spodní vrstvě. Na obr. 25 je také pozorovatelné zkrácení pulsů šířících se ve vrstvě s pomalejšími rychlostmi šíření, které je analogické s jevem pozorovaným na gradovaných materiálech v kapitole 3.4 v 1D prostředích.

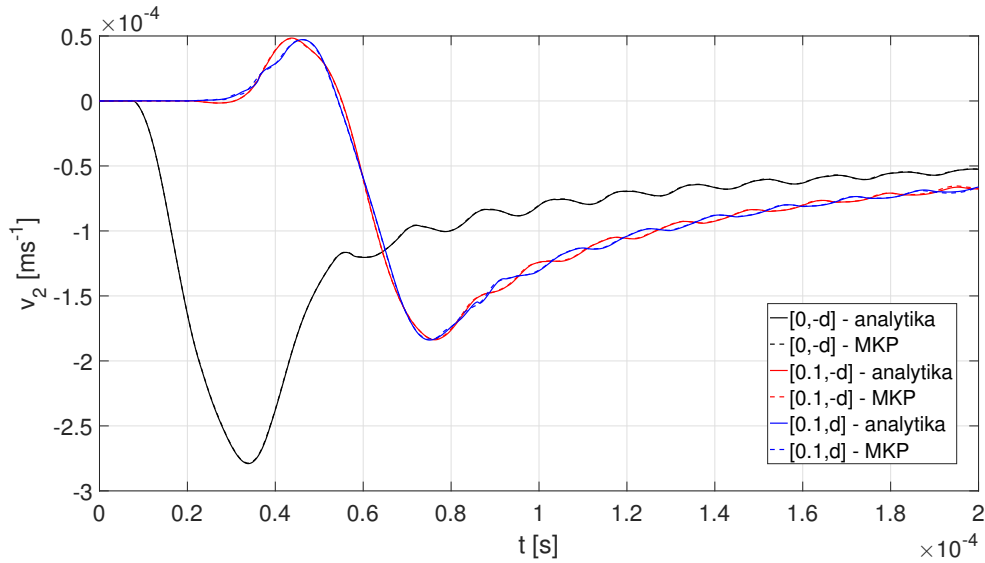
4.5 Numerické řešení problému

V této kapitole bude úloha řešená v kapitole 4 analyticky modelována pomocí MKP. Výsledky těchto dvou přístupů budou pro několik konkrétních úloh porovnány za účelem ověření přesnosti numerických modelů a zároveň k ověření správnosti odvození a vyčíslení analytických vztahů. Porovnání výsledků bude provedeno pro případ homogenního pásu z isotropního a ortotropního materiálu a pro vrstevnatý pás z ortotropních materiálů.

Pro získání numerického řešení byl sestaven model v konečnoprvkovém softwaru MSC.Marc/Mentat 2016. Rozměry modelu pásu byly voleny v souladu s pásy použitými při experimentu v kapitole 5, tedy délka 1 m a šířka $2d = 39,2$ mm. Ke zjednodušení modelu byla využita symetrie úlohy. Výsledný model má tedy délku 0,5 m se zafixovanými posuvy ve směru x_1 v uzlech ležících na svislé ose symetrie pásu. Model je sestaven z lineárních čtyřuzlových prvků pro rovinnou napjatost s délkou hrany 2 mm v podélném směru a 1,96 mm ve směru příčném. Tyto délky byly voleny tak, aby vlnové délce nejkratší vlny, kterou má model popsat, odpovídala délka hran alespoň deseti prvků. Konkrétně pro zvolené délky prvků je pro použité materiálové parametry ve všech případech model schopný popsat vlny s frekvencí nejméně $f_{max} = 200$ kHz. Tato frekvence by měla být dostatečná při zvoleném buzení hladkým kosinovým pulsem s předpisem (4.45) pro $\sigma_0 = 1$ MPa a $t_0 = 50 \mu s$.



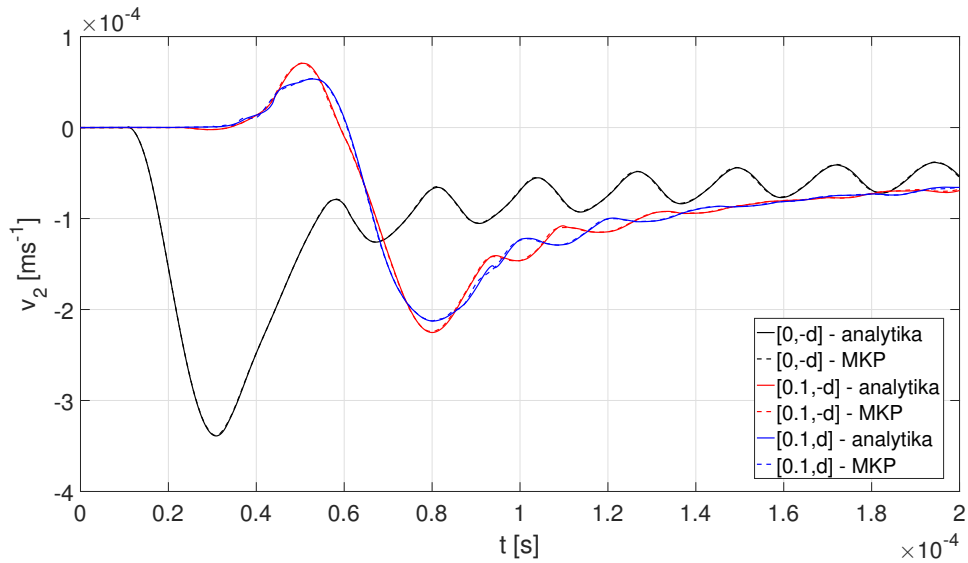
Obrázek 26: Detail prostorové diskretizace v okolí místa buzení

Obrázek 27: Průběh rychlosti v_2 ve vybraných bodech v isotropním pásu

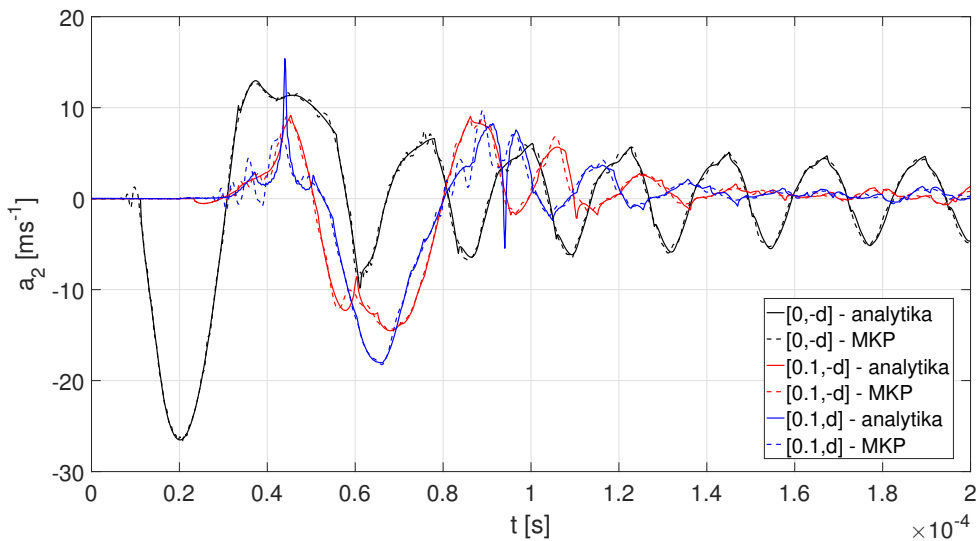
Puls s těmito parametry byl volen opět na základě dat z experimentálního měření prezentovaného v následující kapitole. Buzení je v modelu definováno pomocí funkce závislé na čase a souřadnici x_1 buzených uzlů na počátku výpočtu. Závislost na x_1 je definována identicky s analytickým řešením, tedy kosinovým předpisem (4.14). Buzení je aplikováno pomocí *Edge load* na oblast o délce $2h$, kde $h = 0,25$ mm je délka oblasti na jedné ze symetrických polovin modelu. Pro tento účel byla velikost prvků v okolí buzené oblasti zmenšena tak, aby této délce odpovídal právě jeden prvek (viz obr. 26). Úloha byla řešena centrálními diferencemi s pevným integračním krokem.

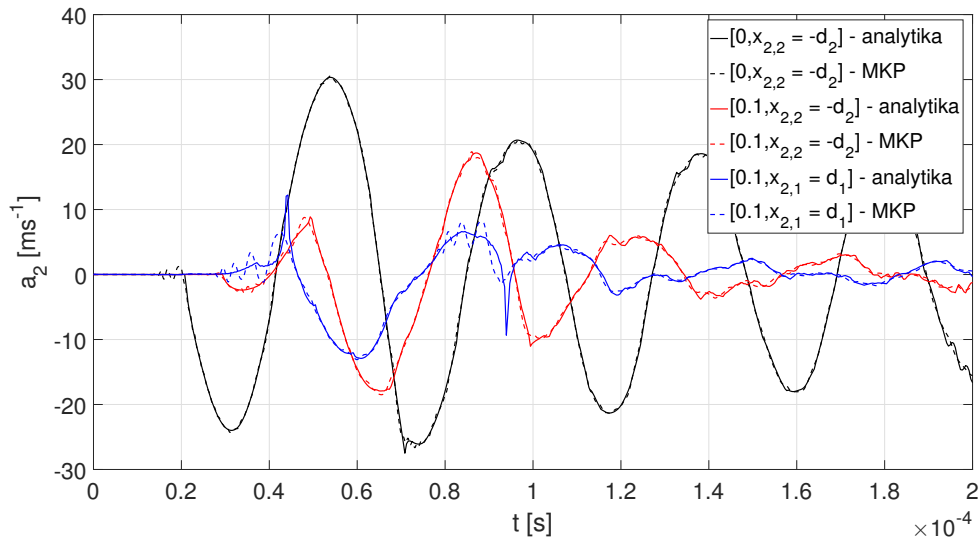
V následující části budou porovnávány výsledky pro rychlosti a zrychlení ve směru x_2 v bodech $[0, -d]$, $[q, -d]$ a $[q, d]$, kde $q = 0,1$ m. V prvním řešení případě byl materiál definován jako elastický isotropní s hustotou $\rho = 7643$ kg/m³, Youngovým modulem $E = 180$ GPa a Poissonovým číslem $\nu = 0,3$. Dále bylo použito numerické tlumení s koeficientem 0,2, které je vhodné pro snížení oscilací výsledků vyvolaných použitou numerickou metodou druhého řádu. Integrační krok byl volen jako maximální stabilní integrační krok centrálních diferencí, a to $\Delta t = 2,2 \cdot 10^{-8}$ s. Porovnání rychlostí získaných analytickým a numerickým přístupem ve zmíněných bodech pro tento případ je zobrazeno na obr. 27. Mezi odezvami z obou modelů je zřejmě dobrá shoda ve všech třech bodech. Na výsledcích z bodu na horní hraně pásu ($[q, d]$) lze pozorovat mírné oscilace výsledků získaných konečnoprvkovým modelem v oblasti $t \in (20; 40)$ μ s a nepatrné vyhlazení rychlé změny v rychlosti v oblasti $t \in (70; 90)$ μ s. Na obr. 27 je také viditelná odchylka výsledků v bodech umístěných v $x_1 = 0,1$ m v pozdějších časech, která je způsobena odraženou vlnou od konce pásu, jejíž vliv by se měl začít projevovat v těchto bodech přibližně v čase $t = 177$ μ s. Ve třetím bodě se odražená vlna projevuje až od času $t = 196$ μ s a v zobrazených výsledcích není tento vliv pozorovatelný.

Pro porovnání výsledků pro ortotropní materiál bylo voleno $E_1 = 180$ GPa, $E_2 = 90$ GPa, $G_{12} = 45$ GPa, $\nu_{12} = 0,3$. Porovnání vertikálních rychlostí pro

Obrázek 28: Průběh rychlosti v_2 ve vybraných bodech v ortotropním pásu

tento případ je zobrazeno na obr. 28. V porovnání s výsledky modelu s isotropním materiálem zde lze pozorovat pozdější příchod vln do všech tří bodů způsobený menšími rychlostmi šíření, především c_{22} a c_{12} . Dále pak nižší frekvenci a vyšší rozptyl amplitud vln, které se odráží mezi hranami pásu. Tento jev je patrný na výsledcích z bodu $[0, d]$. Výsledky z obou modelů jsou opět v dobré shodě a vyskytují se v nich stejné odchylky jako v případě isotropního materiálu. Tyto odchylky se podstatně více projeví při vyčíslení zrychlení, pro něž je porovnání zobrazeno na obr. 29. Zde je rozkmitání před ostrými změnami zrychlení a jejich vyhlazení nejen v těchto oblastech zřejmé i na výsledcích v ostatních bodech. Charakterově je však shoda vyčíslených zrychlení oběma přístupy velice dobrá. Dá se tedy usuzovat, že

Obrázek 29: Průběh zrychlení a_2 ve vybraných bodech v ortotropním pásu



Obrázek 30: Průběh zrychlení a_2 ve vybraných bodech ve vrstevnatém pásu

řešení pro homogenní pás odvozené v podkapitole 4.2 spolu se zvoleným způsobem vyčíslení v časové oblasti počítá jak rychlosti, tak zrychlení správně.

Pro porovnání výsledků analytického a numerického řešení pro vrstevnaté pásy byla řešena následující úloha. Horní vrstva byla definována identicky s ortotropním pásem řešeným dříve v této podkapitole. K ní byla přidána spodní vrstva o stejné šířce, tedy $2d_2 = 2d_1 = 39,2$ mm, a materiálových parametrech $E_{1,2} = 75$ GPa, $E_{2,2} = 40$ GPa, $G_{12,2} = 15$ GPa a $\nu_{12,2} = 0,35$, což jsou přibližné parametry hliníku použitého při experimentu v následující kapitole. Materiál spodní vrstvy tedy přibližně odpovídá ortotropnímu hliníku. Sledované body jsou opět tři, z toho dva na spodní hraně spodní vrstvy v $x_1 = 0$ a $x_1 = 0,1$ m. Třetí sledovaný bod je na horní hraně horní vrstvy v $x_1 = 0,1$ m. Porovnání výsledků analytiky a MKP pro zrychlení v tomto vrstevnatém pásu je zobrazeno na obr. 30. Z těchto výsledků je zřejmé, že konečnoprvkový model vnáší do výsledků stejné nepřesnosti jako v předchozích případech. Mimo tyto odchylky je shoda dobrá a lze říci, že algoritmizace vyčíslení analytických výsledků vyčísluje vztahy správně.

5 Porovnání získaných výsledků a experimentálních dat pro 2D úlohu

V této kapitole bude nejprve věnována pozornost experimentu provedenému v rámci této práce. Primárně byla měřena odezva dvou kovových homogenních pásů a vrstevnatého pásu na rázové buzení. Tento experiment byl dále doplněn statickou tahovou zkouškou vzorků těchto materiálů. Změřená data byla v další části kapitoly využita pro identifikaci materiálových parametrů pásů, na nichž bylo měření prováděno.

5.1 Příprava vzorků a měřící aparatury

Měření nestacionární odezvy bylo nejprve provedeno na ocelovém a hliníkovém pásu délky $l = 1$ m, šířky 40 mm a tloušťky 5 mm. Vzhledem k tomu, že oba pásy byly vyrobeny válcováním, bylo nutné před samotným měřením provést opracování jejich hran tak, aby se na ně dal správně připevnit snímač a aby na sebe těsně doléhaly pro potřeby jejich spojení při měření na vrstevnatém pásu. Výsledná šířka jednotlivých pásů po jejich opracování byla $2d = 39,2$ mm. S ohledem na tloušťku pásů a charakter buzení, který bude diskutován později, lze po zatížení v pásech předpokládat stav rovinné napjatosti. Vzhledem k přibližným materiálovým vlastnostem pásů lze za předpokladu jejich isotropie odhadnout maximální rychlost šíření rozruchu jako $c_{11} = 5000$ m/s. Zvolená délka pásů tak poskytuje při buzení v jedné polovině přibližně 180 až 200 μs podle místa snímání, během nichž se neprojeví odražená vlna od boční hrany pásu a změřená odezva by tedy měla být v souladu s teorií pro nekonečný pás. Tento časový interval by měl být při dané šířce dostatečný pro porovnání výsledků a provedení optimalizace materiálových parametrů.

Buzení pásů bylo realizováno rázovým kladívkem *Brüel & Kjær Miniature Impact Hammer - Type 8204*, pomocí kterého byla také měřena budící síla $F_0(t)$. Specifikace tohoto kladívka jsou uvedeny v příloze A. Kladívko na měřených pásech generovalo pulsy o délce trvání v rozmezí $t_0 \in (50; 60)$ μs . Odezva pásů byla měřena pomocí dvou miniaturních akcelerometrů *Brüel & Kjær Miniature DeltaTron® Accelerometer - Type 4519*, jejichž specifikace jsou uvedeny v příloze B. Akcelerometry, vážící pouhých 1,6 g, byly na pásy připevněny pomocí vteřinového lepidla. Jak kladívko, tak akcelerometry byly napájeny analyzátozem *OROS OR35*, záznam byl však prováděn na digitální osciloskop *Teledyne LeCroy WaveAce 2014* se vzorkovací frekvencí $f_{vz} = 25$ MHz. Specifikace osciloskopu je uvedena v příloze C. Záznamy buzení i odezvy ve voltech získané pomocí osciloskopu je před porovnáváním s výpočtem nutné převést na odpovídající jednotky pomocí citlivostí udávaných výrobcem.

5.2 Popis měření na homogenních a vrstevnatých pásech

Před měřením byly vzorky zváženy a z jejich rozměrů a hmotností byly určeny hustoty

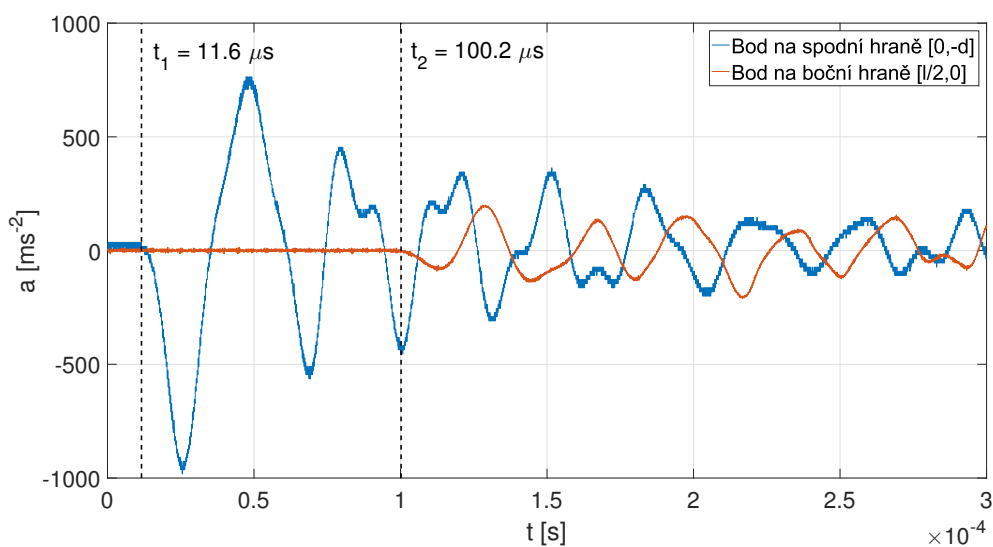
$$\rho_{ST} = 7643\text{kg/m}^3, \quad \rho_{AL} = 2577\text{kg/m}^3, \quad (5.1)$$



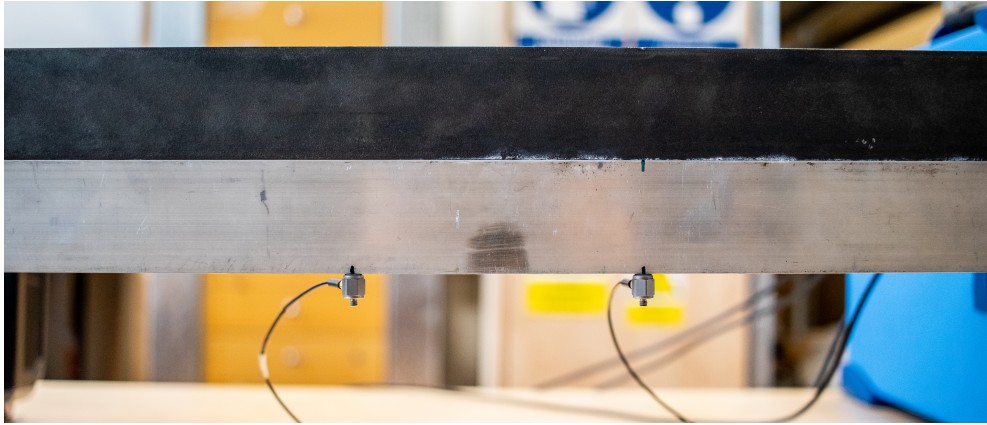
Obrázek 31: Konfigurace měření na ocelovém pásu

kde index ST značí parametr příslušející ocelovému pásu a AL hliníkovému. Následně bylo provedeno na jednotlivých vzorcích za pokojové teploty několik měření odezvy. Pás byl při měření zavěšen pomocí provázků za své kraje. Pro měření zrychlení ve směru x_2 byl zvolen bod $[0, -d]$, tedy přímo pod buzeným místem. Pro měření zrychlení ve směru x_1 byl vybrán bod $[-l/2, 0]$, tedy na boční hraně uprostřed pásu. Fotografie z připraveného měření pro ocelový pás je zobrazena na obr. 31. Takto zvolené umístění akcelerometrů mělo ověřit isotropii pásu a umožnit přibližný odhad rychlosti šíření P-vlny materiálem. Záznam zrychlení ve vertikálním směru x_2 měl dále sloužit jako referenční odezva při optimalizaci materiálových parametrů.

Záznam zrychlení z jednoho měření na ocelovém vzorku je pro oba body zobrazen na obr. 32. Data jsou upravená tak, aby začátek budícího pulsu odpovídal času $t = 0$ a černými přerušovanými čarami jsou zde vyznačeny časy, ve kterých je poprvé zřejmý efekt buzení na odezvě v jednotlivých měřicích místech. Z takto určených časů t_1 a t_2 byly pro všechna provedená měření určeny odhady rychlostí c_{11} a c_{22}



Obrázek 32: Záznam zrychlení z vybraného měření pro ocelový vzorek



Obrázek 33: Nalepení akcelerometrů na vrstevnatém pásu

následovně:

$$c_{11,ST} \approx \frac{l/2}{t_2} = \frac{0.5}{100.2 \cdot 10^{-6}} = 4990 \text{ms}^{-1}, \quad c_{22,ST} \approx \frac{2d}{t_1} = \frac{39.2 \cdot 10^{-3}}{11.6 \cdot 10^{-6}} = 3379 \text{ms}^{-1}. \quad (5.2)$$

Tyto odhady rychlostí z různých měření se lišily minimálně, je tedy zřejmé, že v případě oceli se nejednalo o isotropní materiál. V případě hliníkového vzorku byly analogickým postupem určeny přibližné rychlosti

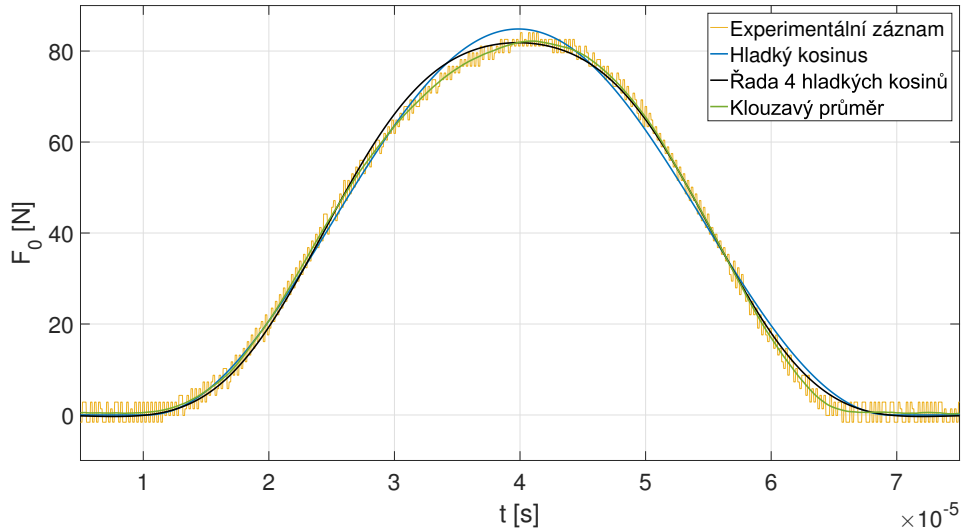
$$c_{11,AL} \approx 4770 \text{ms}^{-1}, \quad c_{22,AL} \approx 3330 \text{ms}^{-1}, \quad (5.3)$$

tedy ani v tomto případě se předpoklad isotropie nepotvrdil. Nejlepší dostupnou analytickou metodou pro popis těchto vzorků se tedy stalo řešení pro pás se speciální ortotropií odvozené v podkapitole 4.2, které bude využito pro identifikaci materiálových parametrů v následující podkapitole.

Pro další měření byly pásy na podélné hraně slepeny pomocí vteřinového lepidla. Tento přístup tvorby vrstevnatého materiálu není samozřejmě zcela korektní, nicméně osvědčil se při měření odezvy vrstevnaté tenké tyče v [1]. V uvedené práci šlo sice o jednodušší úlohu jak z hlediska fyzikálních jevů, tak výrazně menší lepené plochy, ale předpokládalo se, že tento postup bude dostatečný i pro přípravu vzorku vrstevnatého pásu. Takto vytvořený pás byl následně zavěšen stejným způsobem jako v případě homogenních vzorků. Postupně bylo měření provedeno jak pro případ buzení ocelové vrstvy, tak hliníkové. Akcelerometry byly v obou variantách nalepeny na spodní hranu spodní, nebuzené vrstvy. Jeden přímo pod místo měření, druhý ve vzdálenosti $x_1 = 100 \text{ mm}$ (viz obr. 33).

5.3 Zpracování experimentálních dat a identifikace materiálových parametrů

Při zpracování dat z experimentu se ukázalo, že šum vyskytující se v experimentálních datech znemožňuje použití přímo změřeného budicího pulsu jako vstupu pro analytické výpočty. Šum se ve vypočtené odezvě ve zrychleních mnohonásobně zesiluje



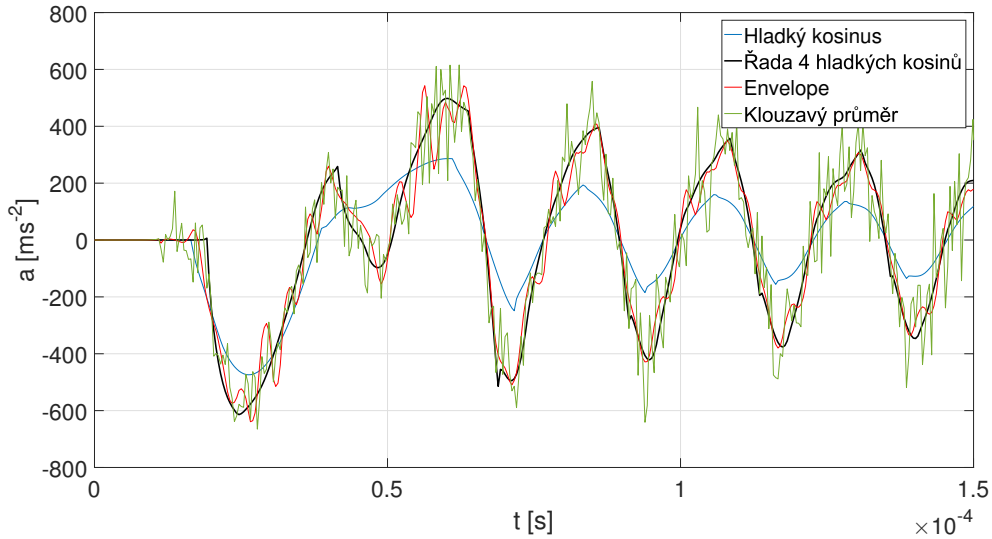
Obrázek 34: Záznam budicího pulsu z experimentálního měření na oceli a jeho aproximace

a zakrývá její charakter. Proto bylo testováno několik možností aproximace budicího pulsu za účelem získání co nejpřesnějšího popisu vstupu, který ale také umožní získání dostatečně čisté odezvy pro porovnání se změřeným záznamem zrychlení. Budicí puls zaznamenaný při měření na ocelovém pásu je spolu s některými aproximacemi, které jsou diskutovány dále, zobrazen na obr. 34.

První možností aproximace buzení byl kosinus s hladkým náběhem s předpisem (4.45). Tímto přístupem nebylo možné plně popsat charakter budicího pulsu, který se zdál být nesymetrický ve smyslu zatížení-odlehčení, umožnil však získání nerozkmitaného zrychlení z analytických vztahů. Dále byl puls aproximován několika různými modifikacemi Fourierovy řady s různými počty členů. Mezi testované modifikace patřila např. klasická Fourierova řada, řada kosinů s hladkým náběhem nebo řada kvadrátů sinů. Tyto aproximace byly určovány optimalizací amplitud jejich členů a délky nejdelšího pulsu řady ve smyslu nejmenších čtverců v porovnání se změřeným pulsem. Ukázalo se, že řada hladkých kosinů s malým počtem členů (3 až 5) byla z výše uvedených typů nejvhodnější. Další testovanou aproximací bylo využití aritmetického průměru horní a spodní obálky rozkmitaného signálu pomocí v Matlabu implementované funkce *envelope* v modifikaci *peak*, tedy interpolací lokálních maxim a minim signálu před daný počet vzorků. Tímto přístupem bylo možné získat zjevně velice dobrou aproximaci budicího signálu, se kterou však docházelo k oscilacím v odezvě. Nakonec byla testována aproximace klouzavým průměrem s předpisem [24]

$$y_{KP}(j) = \frac{1}{m} \sum_{i=j-m+1}^j x(i), \quad j = m, \dots, n, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (5.4)$$

kde x je vektor původních hodnot, y_{KP} je vektor hodnot klouzavého průměru, m je délka „okna“ klouzavého průměru a n je délka vektoru x . Tato aproximace zřejmě



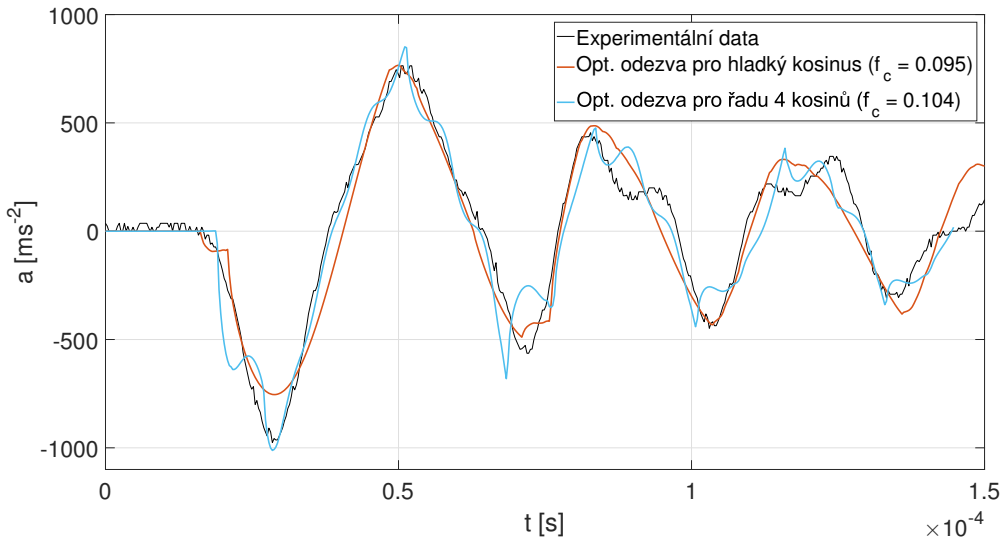
Obrázek 35: Záznam zrychlení z vybraného měření pro ocelový vzorek

nejlépe vystihovala zaznamenaný budicí puls, ale také obsahovala nežádoucí kmitání, kvůli kterému nebyla vhodná pro vstup do výpočtu zrychlení. Na obr. 35 je zobrazena odezva pásu s parametry odpovídajícími oceli, které byly použity v podkapitole 4.5, v bodě $[0, -d]$ na aproximaci hladkým kosinem, řadou kosinů se čtyřmi členy, obálkou a klouzavým průměrem. Na odezvě získané pomocí hladkého kosinu je patrné, že v porovnání s ostatními aproximacemi zcela nevystihuje charakter pulsu. Mimo tento druh popisu buzení je zřejmě nejvhodnější řada kosinů, k níž náležící odezva zjevně popisuje velice podobně charakter šíření vln jako odezvy zbylých dvou aproximací, není však rozkmitaná. Později při optimalizaci materiálových parametrů se ukázalo, že aproximace jak hladkým kosinem, tak řadou kosinů, konverguje k prakticky stejným výsledkům. Dokonce v mnoha případech byla jak numerická, tak vizuální shoda s experimentem lepší pro případ aproximace jednodušší metodou. Proto byly optimalizace prováděny ve velkém množství případů pro obě náhrady budicího pulsu.

Optimalizace materiálových parametrů na základě výše popsaného měření byla prováděna v několika modifikacích, které se lišily zejména optimalizovanými parametry výpočtu, intervaly, ze kterých byly vybírány a nerovnicovými omezeními na hodnoty parametrů. Cílová funkce definující míru shody změřené odezvy s výpočtem na časovém intervalu $t \in (0; 150) \mu\text{s}$ byla definována jako

$$f_c = \left| \frac{(\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_{e1})^T \mathbf{W} (\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_{e1})}{\mathbf{a}_a^T \mathbf{W} \mathbf{a}_{e1}} \right|, \quad (5.5)$$

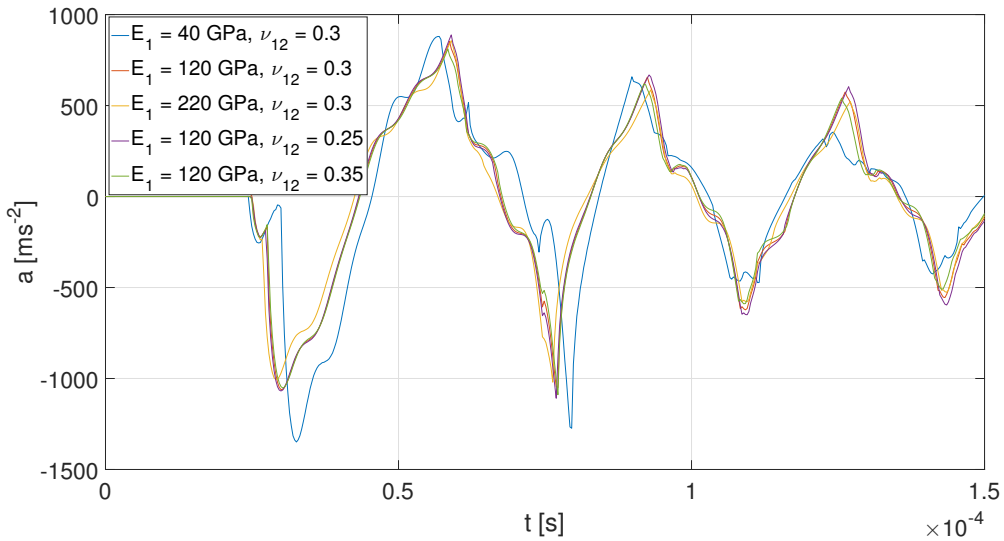
kde \mathbf{a}_a je sloupcový vektor zrychlení získaný výpočtem pro dané hodnoty optimalizovaných parametrů, \mathbf{a}_{e1} je sloupcový vektor experimentálních dat z prvního akcelerometru interpolovaných na časový vektor analytických výsledků a \mathbf{W} je váhová matice. Váhová matice byla v konečné verzi procesu volena jako jednotková, v průběhu jeho ladění však bylo vyzkoušeno několik možností přiřazujících vyšší váhu určitým částem záznamu, žádná však nepříspěla ke zlepšení výsledků. Kromě optimalizace



Obrázek 36: Nejlepší dosažená shoda pro ocel

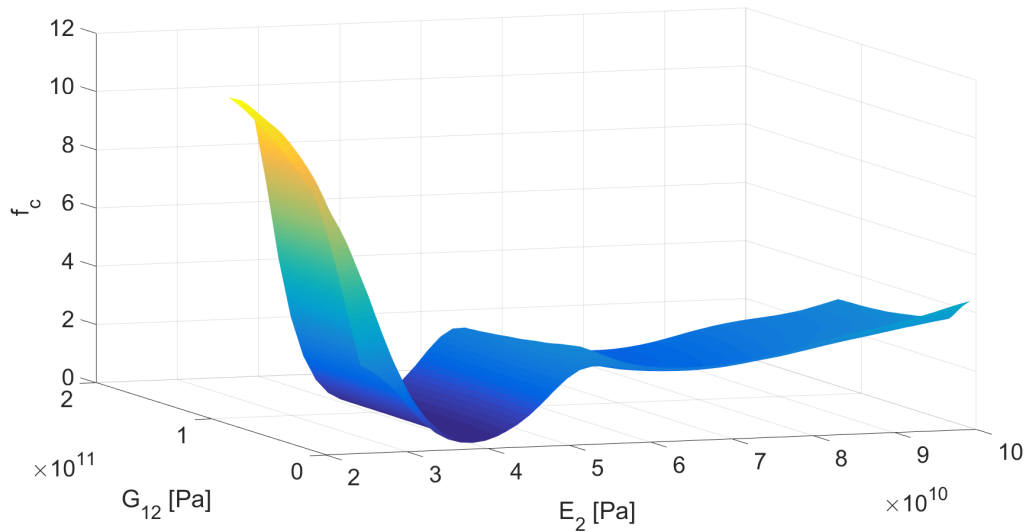
parametrů popisujících materiál, které budou diskutovány později v této podkapitole, byla optimalizována ještě velikost S kontaktní plochy kladívka potřebná pro přepočítání změřené síly na budící napětí $\sigma_0(t) = \frac{F_0(t)}{S}$, které je vstupem výpočtu. Tato plocha byla odhadnuta jako $S_0 = \pi r^2$, kde $r \doteq 0.25$ mm je přibližný poloměr hrotu kladívka. Optimalizace plochy byla následně implementována jako vnořený optimalizační proces do výpočtu cílové funkce, kdy byl hledán faktor f tak, aby cílová funkce (5.5) pro $\mathbf{a}_a = f \mathbf{a}_{a0}$, kde \mathbf{a}_{a0} jsou analytické výsledky pro buzení $\sigma_0(t) = \frac{F_0(t)}{S_0}$, byla minimální. Optimální plocha měla potom hodnotu $S = \frac{S_0}{f}$. Toto zjednodušení prakticky snížilo počet optimalizovaných parametrů o 1, protože vnořená optimalizace násobením odezvy je velice časově nenáročná a je díky ní možné během zlomku vteřiny pro každou kombinaci materiálových parametrů najít nejvhodnější hodnotu S bez potřeby opakovaného vyčíslení odezvy pomocí odvozených vztahů. Tento proces je možné využít díky linearitě úlohy. Do optimalizačního algoritmu byla také přidána nelineární podmínka $c_{12} < c_{22}$. Ta zabránila zbytečnému vyčíslování odezev, které zjevně neodpovídaly charakteru změřených dat.

Úloha byla opakovaně řešena pro různá měření algoritmy *particleswarm* a *ga*, které jsou implementovány v Matlabu. Při některých optimalizacích byla využita možnost *HybridFcn* s funkcí *fmincon*. Tato volba umožňuje po skončení optimalizačního procesu prvního algoritmu z výsledného bodu v prostoru optimalizovaných proměnných spustit ještě zpřesňující funkci *fmincon*. Algoritmus *particleswarm* neumožňuje zadání nelineární podmínky pro optimalizované parametry, proto byl náročnější na výpočtový čas a jeho výsledky ne vždy odpovídaly skutečnému charakteru experimentálních dat (např. první výkmit dat proběhl s opačným znaménkem kvůli $c_{12} > c_{22}$, zbytek výsledků však byl v dobré shodě). Pro oba algoritmy bylo během jedné optimalizace vyčísleno až okolo 7000 různých odezev, celý proces pro jedno měření tedy trval v rámci jednotek hodin. Na obr. 36 je zobrazena nejlepší dosažená shoda experimentálních dat změřených na oceli a analytických výsledků pro aproximaci buzení hladkým kosinem a kosinovou řadou. Lze říci, že ani jedna ze

Obrázek 37: Citlivostní analýza pro parametry E_1 a ν_{12}

získaných odezev zcela nepopisuje charakter změřených dat. V některých místech je shoda lepší pro křivku získanou pomocí buzení jedním druhem aproximace, v jiných pro křivkou druhou. Hodnota cílové funkce se podařila dosáhnout nižší při aproximaci hladkým kosinem, ne však výrazně. V obou případech jde o výsledky procesu s konstantní hodnotou $\nu_{12} = 0.3$, pro ostatní parametry byly nalezeny optimální hodnoty $E_1 = 50$ GPa, $E_2 = 41$ GPa, $G_{12} = 35$ GPa při buzení hladkým kosinem a $E_1 = 41$ GPa, $E_2 = 41$ GPa a $G_{12} = 20$ GPa při buzení řadou. Takto určené hodnoty E_1 jsou v obou případech nereálné, protože odpovídající rychlost c_{11} by byla poloviční, než původní odhad, tedy pulsu by trvalo projít pásem dvojnásobný čas. Neshoda charakteru křivek může být způsobena neplatným předpokladem speciální ortotropie ve zkoumaných vzorcích. Dále na ni může mít vliv velikost akcelerometru, jehož plocha v kontaktu s pásem má průměr okolo 5 mm, což by mohlo způsobit jakési průměrování zrychlení z této plochy a tím způsobené vyhlazení změřených dat, která jsou porovnávána s odezvou v diskrétním bodě. Jiný charakter odezvy může mít za následek samozřejmě také zvolená aproximace, jak je zřejmé z obr. 35 a 36, vhodnější aproximaci se však nepodařilo nalézt.

Z celého souboru provedených optimalizací se ukázalo, že proces ve většině případů (jak pro ocel, tak hliník) konvergoval ke stejné hodnotě E_2 , konkrétně $E_{2,ST} = 40 \pm 2$ GPa, $E_{2,AL} = 11 \pm 2$ GPa. Tyto parametry však v obou materiálech odpovídají rychlosti šíření přibližně $c_{22} = 2300$ m/s, která je značně nižší, než původní odhad založený na času průchodu pulsu pásem. Navíc, pro ostatní parametry se nepodařilo v opakovaných bězích algoritmu najít jednoznačné optimální řešení (nezávisle na rozsahu intervalů, ze kterých byly vybírány). Byla proto provedena citlivostní analýza cílové funkce pro parametry ν_{12} a E_1 , jejíž výsledek je zobrazen na obr. 37. Výsledky v tomto obrázku byly získány pro aproximaci pulsu řadou kosinů o 4 členech, $E_2 = 40$ GPa a $G_{12} = 35$ GPa. Je zřejmé, že jediná odezva, která se výrazně liší od ostatních, byla získána pro $E_1 = 40$ GPa, což je, jak bylo odůvodněno výše, nereálná hodnota. Parametry E_1 a ν_{12} tedy zjevně mají minimální

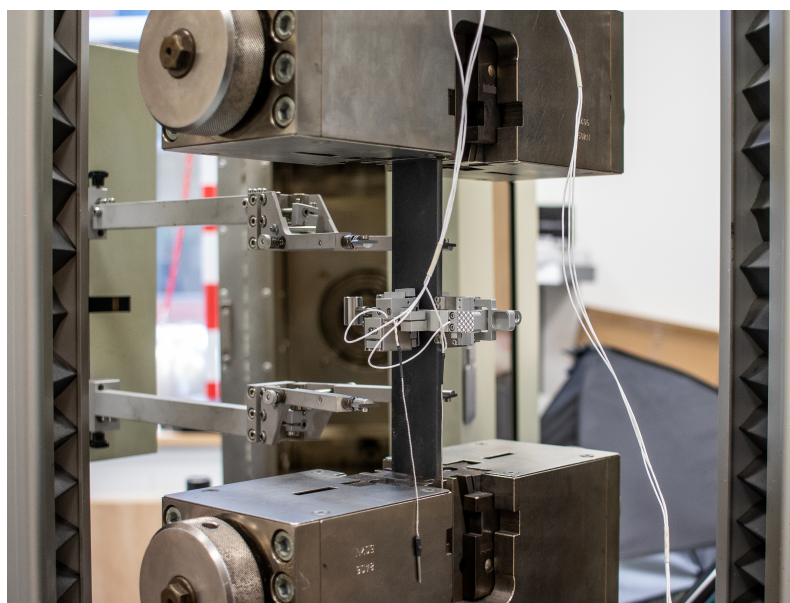
Obrázek 38: Cílová funkce pro optimalizaci E_2 a G_{12}

vliv na odezvu v tomto bodě. V prostoru parametrů E_2 a G_{12} byla následně pro ocel a jedno vybrané měření vykreslena cílová funkce v mezích $E_2 \in (25; 100)$ GPa a $G_{12} \in (10; 120)$ GPa. Tato funkce je zobrazena na obr. 38. Lze zde pozorovat jakýsi „kanál“, který jednoznačně umísťuje minimum této funkce do malého okolí hodnoty $E_2 = 40$ GPa, což potvrzuje výsledky optimalizací. Při změně G_{12} v této oblasti však zjevně dochází k minimální změně hodnoty cílové funkce.

Z provedené citlivostní analýzy (obr. 37) a tvaru cílové funkce (obr. 38) je tedy možné konstatovat, že bod měření $[0, -d]$ není vhodný pro identifikaci materiálových konstant a že ze čtyř parametrů, potřebných pro kompletní popis materiálu, je jednoznačně určen pouze Youngův modul ve směru x_2 . Navíc hodnoty takto určených modulů mají téměř poloviční hodnoty než odhady vycházející z časů průchodu pulsu pásem. Je tedy možné, že tyto parametry nejsou určeny správně.

5.4 Tahová zkouška vzorků a porovnání nestacionární odezvy vrstevnatých pásů

Z důvodu neschopnosti určení některých materiálových parametrů z naměřených dat na homogenním pásu a pochybností o správnosti zjevně jednoznačně určených E_2 bylo dále přistoupeno k tahové zkoušce. Z každého pásu byl uříznut vzorek o délce $l_{vz1} = 30$ cm a šířce $s_{vz1} = 2d = 39,2$ mm za účelem provedení tahové zkoušky podle technické normy ČSN ISO 6892-1 pro identifikaci parametrů $E_{1,ST}$ a $E_{1,AL}$. Při tomto měření byl dále ke vzorku připevněn extenzometr měřící zúžení vzorku ve směru x_3 , ze kterého mohlo být přibližně určeno Poissonovo číslo ν_{13} , které by při uvažování příčné isotropie bylo rovno ν_{12} . Zúžení v tomto směru je však velice malé, čímž je ovlivněna přesnost výsledků, tato data je tedy třeba brát pouze jako odhad. Takto připravený ocelový vzorek na tahovou zkoušku je zobrazen na obr. 39. Dále byly připraveny vzorky o délce $l_{vz2} = 2d = 39,2$ mm a šířce $s_{vz2} = 20$ mm za účelem určení přibližné hodnoty $E_{2,ST}$ a $E_{2,AL}$. Tyto vzorky o délce necelé 4 cm byly



Obrázek 39: Ocelový vzorek připravený na tahovou zkoušku s přídavným extenzometrem měřícím zúžení ve směru x_3

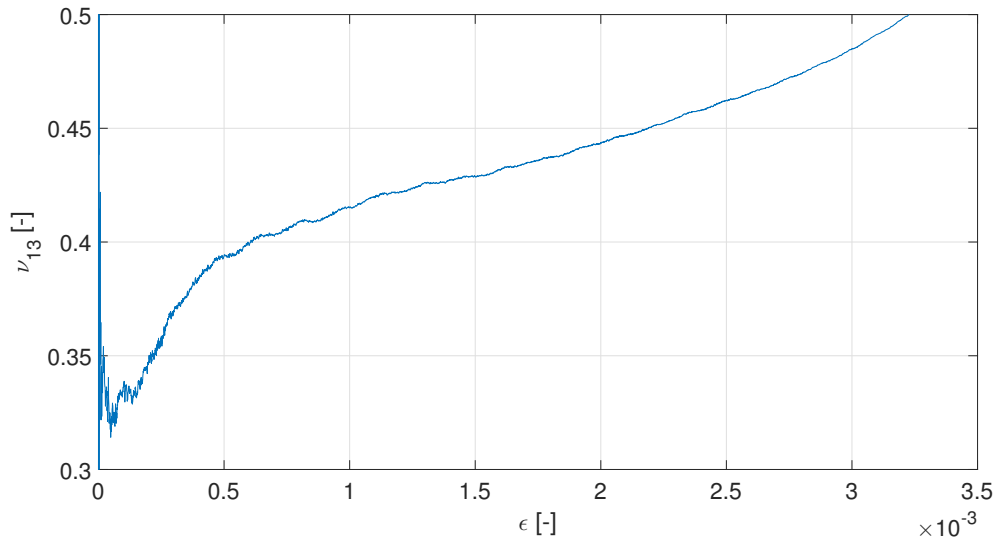
na hraně možností použité aparatury, kdy extenzometr měřící prodloužení ve směru natahování (tedy x_2 v systému pásů) byl nastaven na nejbližší možnou počáteční vzdálenost 10 mm a vzorky byly upnuty v čelistech za část dlouhou pouhých 5 mm. Takto připravený hliníkový vzorek je zobrazen na obr. 40.

Výsledky tahových zkoušek provedených na velkých vzorcích měly velice předvídatelný průběh. Pro hliník se podařilo překročit mez kluzu, která měla hodnotu přibližně 210 MPa. Průběh pracovního diagramu do zatížení 170 MPa byl velice dobře aproximovatelný lineární závislostí a modul pružnosti v tahu byl vyhodnocen



Obrázek 40: Příčný hliníkový vzorek připravený na tahovou zkoušku

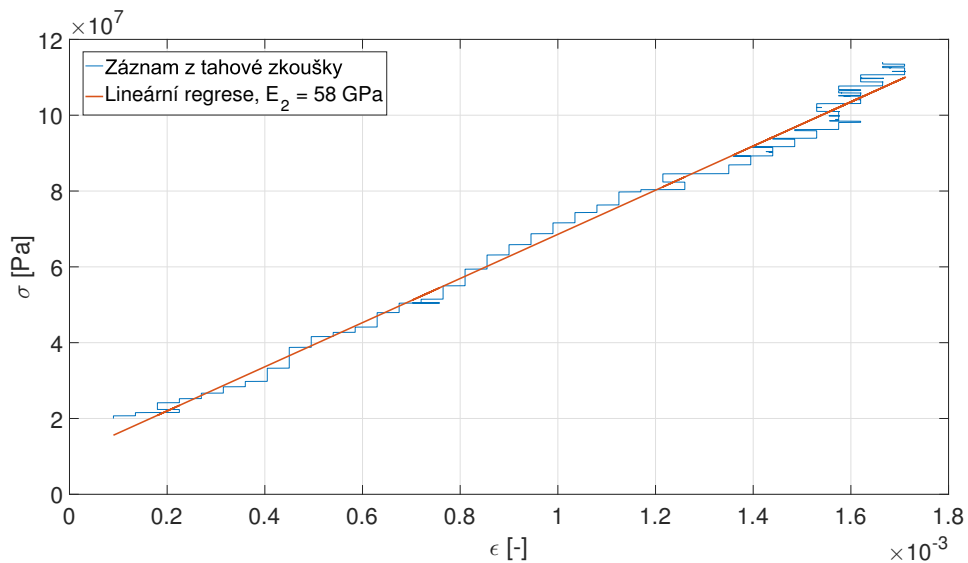
5.4 Tahová zkouška vzorků a porovnání nestacionární odezvy vrstevnatých pásů



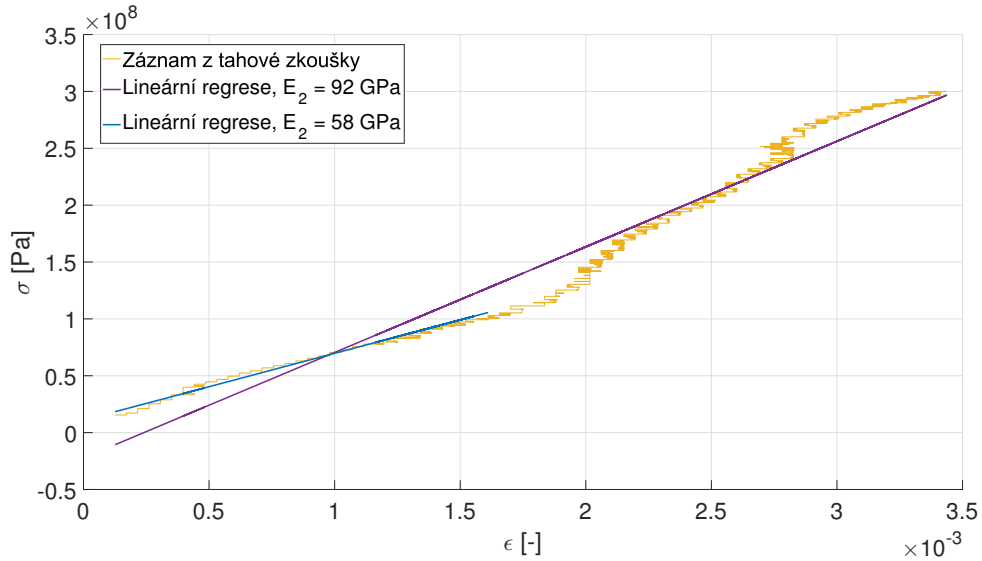
Obrázek 41: Průběh $\nu_{13,AL}$ při tahové zkoušce hliníkového vzorku

jako $E_{1,AL} = 63$ GPa. Tento modul pružnosti přibližně odpovídá rychlosti $c_{11,AL}$ odhadnuté v podkapitole 5.2. V případě ocelového vzorku se meze kluzu dosáhnout nepodařilo z důvodu jeho velké tuhosti, pracovní diagram však velice přesně odpovídal přímlce. Na základě lineární regrese byl určen modul pružnosti $E_{1,ST} = 201$ GPa, který opět přibližně odpovídá rychlosti šíření v daném směru odhadnuté z doby průchodu pulsu pásem.

Záznamy příčného zúžení z těchto tahových zkoušek již bohužel nebyly takto jednoduše vyhodnotitelné. Průběh $\nu_{13,AL}$ z měření na velkém hliníkovém vzorku je zobrazen na obr. 41. Je zřejmé, že z tohoto měření není možné hodnotu Poissonova čísla určit. Průběh $\nu_{13,ST}$ měl velice podobný charakter a také z něj nebylo možné



Obrázek 42: Pracovní diagram změřený na malém hliníkovém vzorku



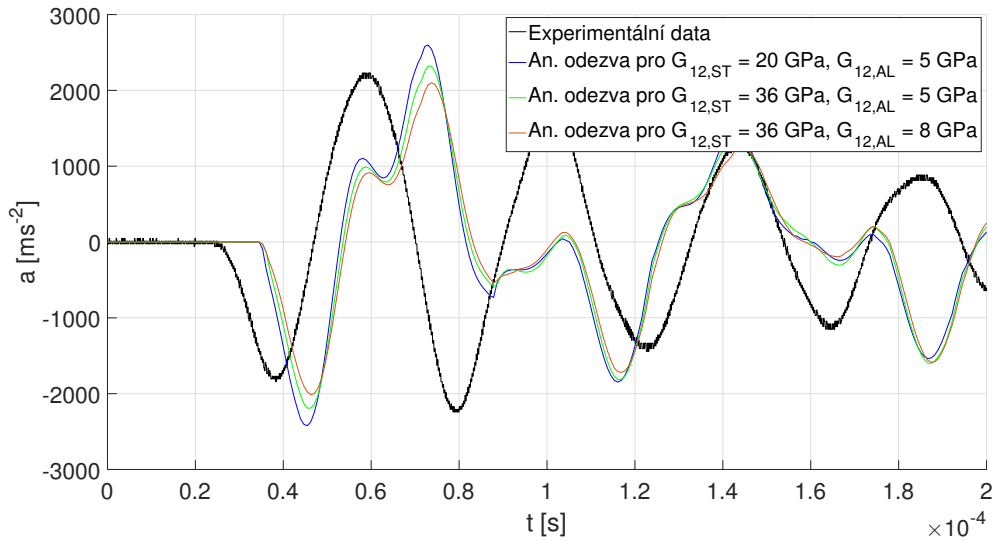
Obrázek 43: Pracovní diagram změřený na malém ocelovém vzorku

stanovit jednu hodnotu, ke které by průběh konvergoval.

Data z tahových zkoušek pro příčné vzorky byly velice negativně ovlivněny nevhodnými rozměry vzorků, je však možné je využít alespoň k odhadu tuhostí materiálů ve směru x_2 . Na obr. 42 je zobrazen změřený pracovní diagram pro vzorek hliníku. Z diagramu byla vybrána část bez předzatížení a pod mezí kluzu a následně provedena lineární regrese, která je také vynesena do obr. 42. Zdá se, že regrese s $E_{2,AL} = 58$ GPa poměrně dobře aproximuje změřená data. Tento fakt přispívá myšlence, že modul pružnosti $E_{2,AL} = 12$ GPa určený optimalizací odezvy na homogenním pásu nalezený v podkapitole 5.3 není určen správně. Podobné závěry lze udělat pro ocel, jejíž pracovní diagram pro malý vzorek je zobrazen na obr. 43. Celý diagram, opět bez části předzatížení a pod mezí kluzu, je aproximován lineární závislostí se směrnici $E_{2,ST1} = 92$ GPa. Z grafu je však zřejmé, že lineární regrese nepopisuje zaznamenaná data dobře. Z aproximace části diagramu s nejmenší tuhostí pro $\varepsilon \in (0,2; 1,6)$, která lze celkem přesně proložit přímkou se směrnici $E_{2,ST2} = 58$ GPa, lze však odhadnout, že celková tuhost oceli ve směru x_2 bude téměř určitě vyšší než 40 GPa, které byly určeny optimalizací v předchozí podkapitole.

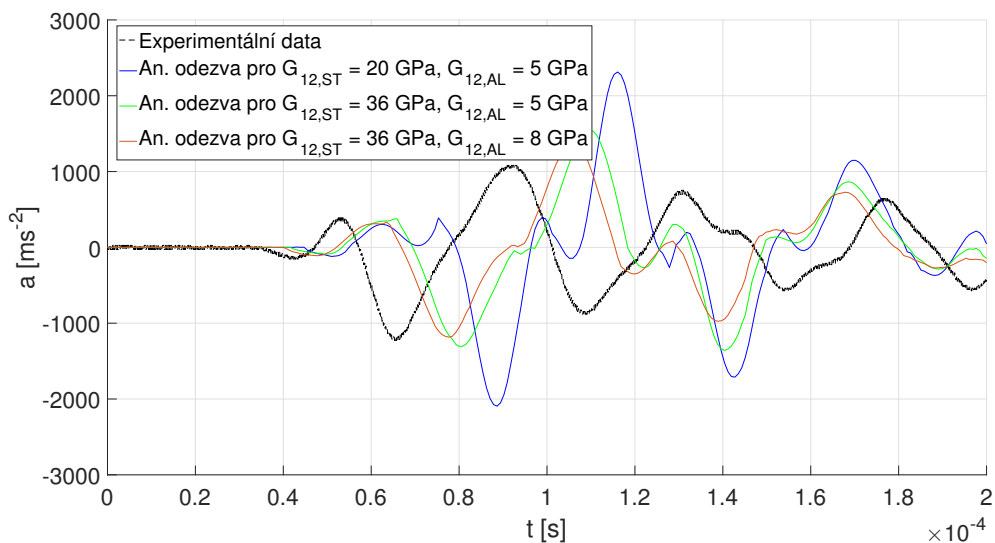
I přesto, že tahová zkouška ve směru x_2 neumožnila přesně určit moduly pružnosti v tahu v tomto směru, její data přispěla k myšlence, že optimalizace materiálových parametrů z měření v bodě $[0, -d]$ neurčuje tyto parametry správně. Pro potvrzení této domněnky bylo provedeno porovnání experimentálních dat z měření vrstevnatého pásu a odezvy získané pro vrstevnatý pás s parametry $E_{1,ST} = 201$ GPa a $E_{1,AL} = 63$ GPa určenými tahovou zkouškou, $E_{2,ST} = 40$ GPa a $E_{2,AL} = 11$ GPa určenými optimalizací, $\nu_{12,ST} = 0.3$ a $\nu_{12,AL} = 0.33$ odhadnutými a s nejběžněji se vyskytujícími hodnotami G_{12} ve výsledcích optimalizací. Toto porovnání pro zrychlení v bodě $[0, -d]$ je zobrazeno na obr. 44. Z doby příchodu vzruchu do místa měření je zřejmé, že rychlosti c_{22} v získaných výsledcích jsou značně nižší, než v reálném pásu. Dále je možné si všimnout rozdílného charakteru vypočtené odezvy a v experi-

5.4 Tahová zkouška vzorků a porovnání nestacionární odezvy vrstevnatých pásů



Obrázek 44: Porovnání odezvy vrstevnatého pásu v bodě $[0, -d]$ s výpočty pro parametry E_1 určené tahovou zkouškou a zbylé určené optimalizací

mentálních dat. Z tohoto obrázku je také zjevná malá citlivost odezvy v bodě $[0, -d]$ na změnu modulu pružnosti ve smyku i v případě vrstevnatého pásu. Neshodu experimentálních a analytických výsledků lze sledovat i při porovnání stejných modelů v bodě $[100 \text{ mm}, -d]$, které je zobrazeno na obr. 45. Zde je také zřejmá vyšší citlivost výsledků na parametr $G_{12,ST}$. Celkově lze říci, že parametry určené optimalizací popsanou v podkapitole 5.3 se jeví jako špatné z více důvodů a pro nalezení parametrů materiálů bližších skutečnosti je třeba pro měření odezvy zvolit jiné body.



Obrázek 45: Porovnání odezvy vrstevnatého pásu v bodě $[100 \text{ mm}, -d]$ s výpočty pro parametry E_1 určené tahovou zkouškou a zbylé určené optimalizací

5.5 Měření a optimalizace pro nové sledované body

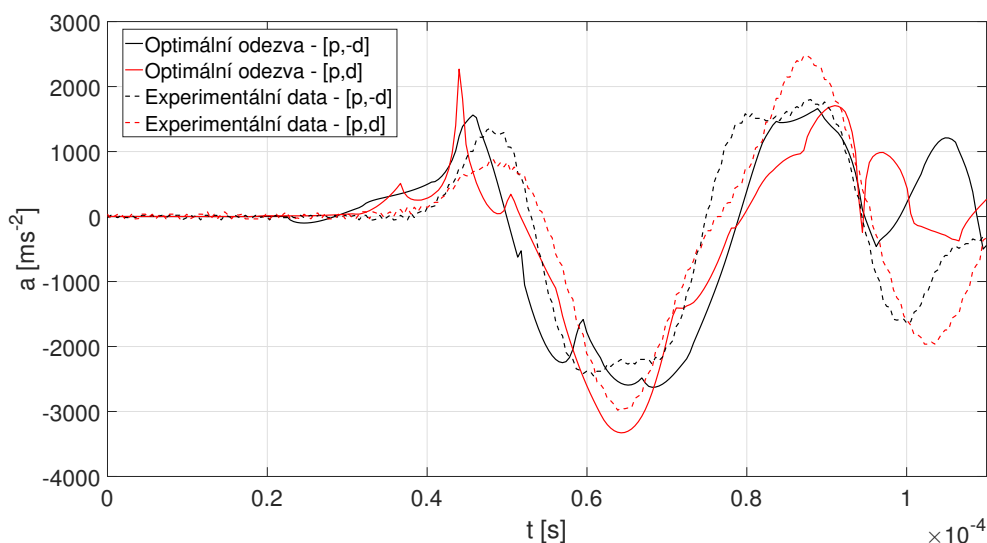
Na základě analýzy odezvy vrstvnatého pásu provedené na konci podkapitoly 5.4 bylo provedeno nové měření odezvy homogenních pásů. Pásky byly sice zkráceny při přípravě vzorků pro tahovou zkoušku, jejich nová délka však stále umožňovala porovnání odezvy neovlivněné vlnou odraženou od boční hrany až do času přibližně $t_{max} = 120 \mu\text{s}$. Pro měření odezvy byly voleny body $[p, -d]$ a $[p, d]$, kde $p = 100 \text{ mm}$. Jak se ukázalo v předchozí části práce, odezva v bodě $[p, -d]$ je citlivější na změnu parametru G_{12} než v bodě $[0, -d]$, měření v něm by tedy mělo být vhodnější pro optimalizační proces. Zároveň jeho umístění na spodní hraně by mělo být vhodné pro určení E_2 . Bod $[p, d]$ byl volen z důvodu možnost zachytit v záznamu Rayleighovu vlnu (viz podkapitola 4.4), jejíž rychlost je určena parametrem G_{12} , tedy také by měl být vhodný pro určení tohoto parametru. Umístění obou bodů mimo osu buzení by také mělo přispět k jejich vhodnosti pro optimalizaci parametru E_1 .

Optimalizace byla pro čtyři měření pro každý materiál prováděna stejným způsobem jako v podkapitole 5.3, tentokrát však byla cílová funkce definována jako

$$f_c = \left| \frac{(\mathbf{a}_{a1} - \mathbf{a}_{e1})^T \mathbf{W} (\mathbf{a}_{a1} - \mathbf{a}_{e1})}{\mathbf{a}_{a1}^T \mathbf{W} \mathbf{a}_{e1}} \right| + \left| \frac{(\mathbf{a}_{a2} - \mathbf{a}_{e2})^T \mathbf{W} (\mathbf{a}_{a2} - \mathbf{a}_{e2})}{\mathbf{a}_{a2}^T \mathbf{W} \mathbf{a}_{e2}} \right|, \quad (5.6)$$

kde \mathbf{a}_{a1} a \mathbf{a}_{a2} jsou analytické výsledky postupně v bodech $[p, -d]$ a $[p, d]$ a \mathbf{a}_{e1} a \mathbf{a}_{e2} jsou odpovídající záznamy z měření. Váhová matice \mathbf{W} byla opět volena jako jednotková. Pro některé běhy optimalizací byly optimalizovány nejen materiálové parametry, ale i šířka buzené oblasti $2h$ a korekce umístění měřených bodů $\delta x_{1,1}$ a $\delta x_{1,2}$, tedy možnost algoritmu posunout bod, ve kterém je odezva vyčíslována, o 3 mm v obou směrech osy x_1 . Optimalizace těchto parametrů byla provedena z důvodu rozměrů akcelerometru a možné nepřesnosti při jejich nalepení. Tyto parametry byly ve většině provedených optimalizacích nalezeny jako $h = 1 \text{ mm}$, $\delta x_{1,1} = \delta x_{1,2} = -3 \text{ mm}$, proto byly pro finální optimalizaci zafixovány na těchto hodnotách. Dále byl pevně nastaven parametr E_1 na hodnoty nalezené tahovou zkouškou v podkapitole 5.4, neboť se ukázalo, že tento parametr při optimalizaci konvergoval v nereálně vysokým hodnotám (např. $E_{1,ST} = 330 \text{ GPa}$), ale bez výrazného zlepšení shody výsledků. Ukázalo se, že pro odezvy v těchto bodech bylo dosaženo výrazně lepší shody při použití aproximace budicího pulsu jednoduchým hladkým kosinem, proto byla používána převážně tato náhrada buzení.

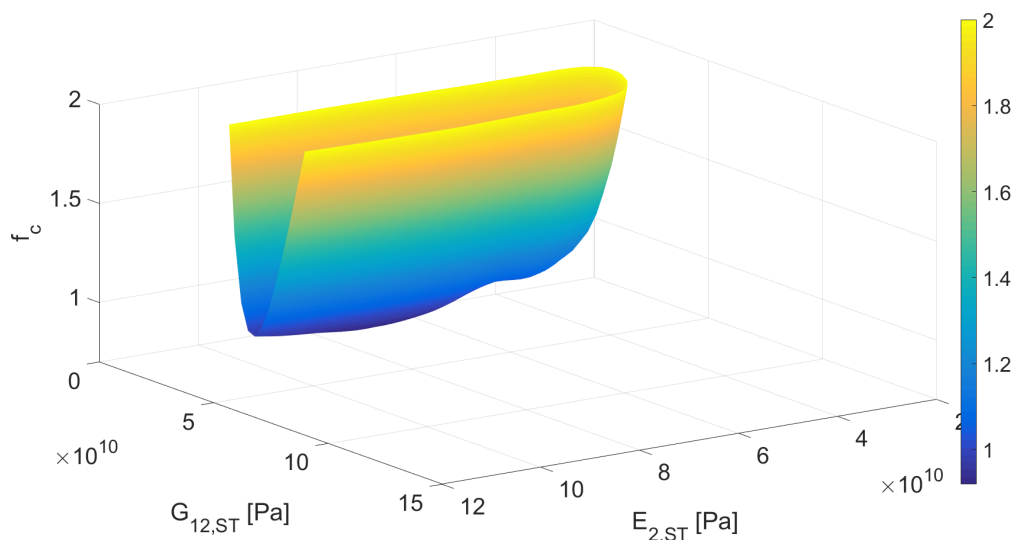
Výsledky optimalizací byly poměrně jednoznačné pro všechny tři zbylé materiálové parametry. Pro opakované běhy optimalizačního procesu a různé použité algoritmy měly optimální parametry v převážné většině případů prakticky stejné hodnoty. Konkrétně pro ocel byly nalezeny optimální parametry $E_{2,ST} = 88 \text{ GPa}$, $G_{12,ST} = 39 \text{ GPa}$, $\nu_{12,ST} = 0.28$. Nejlepší dosažená shoda pro ocel při aproximaci hladkým kosinem je zobrazena na obr. 46. Je zřejmé, že shoda není ideální, opakovaná konvergence ke stejným parametrům pro různá měření však poukazuje na dobrou podmíněnost úlohy. Cílová funkce, zobrazená na obr. 47, jasně ukazuje, že změna měřených bodů zajistila dobrou podmíněnost při hledání parametru G_{12} . Minimum ve směru E_2 je méně zřejmé, pro optimalizační algoritmus se však ukázalo poměrně jednoduše naležitelné. Tato mírná nejasnost může být způsobena krátkým časem, na kterém byla optimalizace prováděna. V tomto časovém intervalu se projeví pouze jeden „překmit“ způsobený příchodem P-vlny, jejíž rychlost



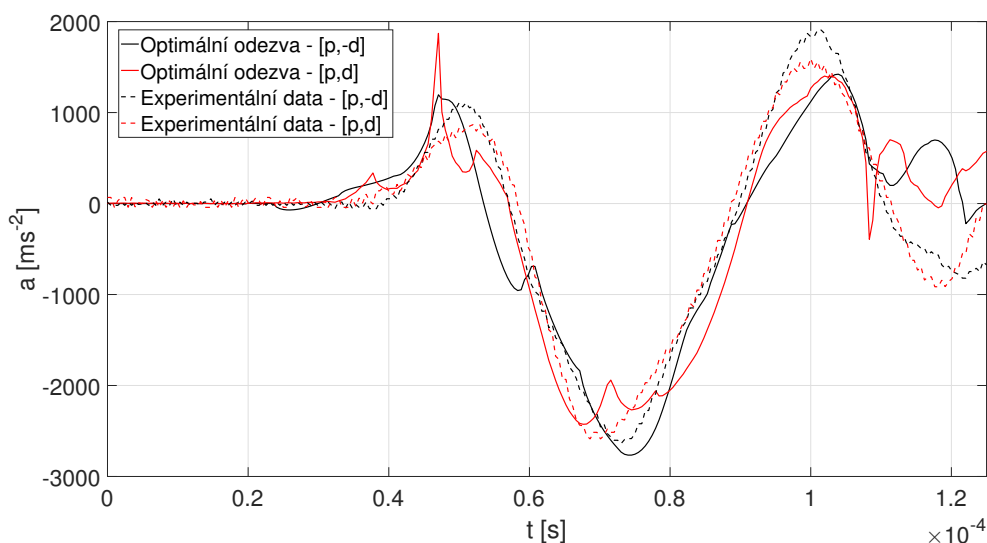
Obrázek 46: Shoda naměřené a vypočtené odezvy ocelového pásu po optimalizaci

při optimalizaci závisí právě na E_2 . Je tedy možné, že pokud by bylo k dispozici měření v těchto bodech na delším pásu, optimalizace by byla lépe podmíněná i pro tento parametr. Pro hliník byly nalezeny optimální parametry $E_{2,AL} = 30$ GPa, $G_{12,AL} = 13$ GPa a $\nu_{12,AL} = 0.32$. Nejlepší shoda dosažená pro měření na hliníku je zobrazena na obr. 48. Je možné konstatovat, že shoda měření a výpočtu má u hliníku velmi podobné nedostatky jako v případě oceli. Charakter perfektně neodpovídá změřenému signálu, jednoznačnost výsledků však opět přidává procesu optimalizace na důvěryhodnosti.

Pro parametry nalezené tahovou zkouškou vzorků a optimalizací popsané v této

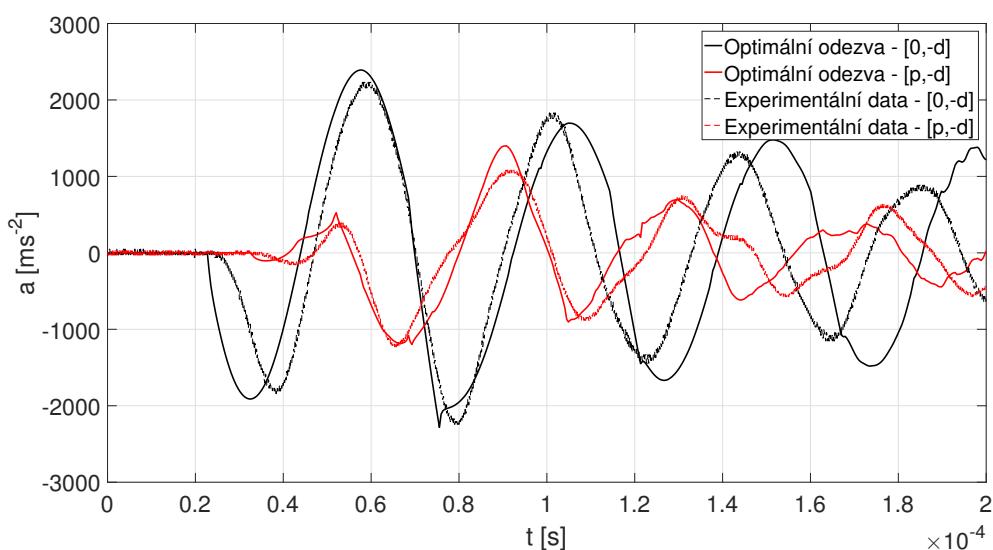


Obrázek 47: Cílová funkce v prostoru parametrů $E_{2,ST}$ a $G_{12,ST}$ pro optimalizaci s nově zvolenými body měření

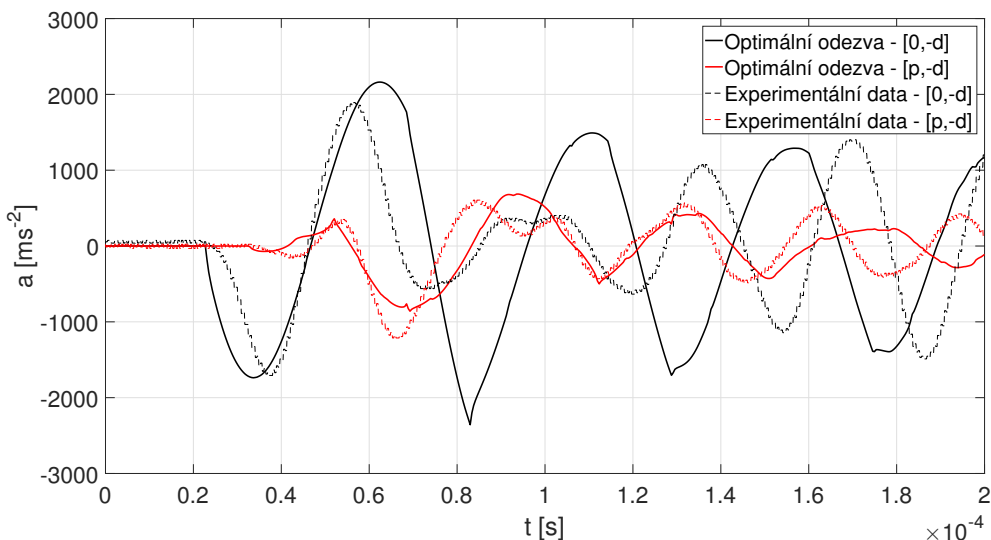


Obrázek 48: Shoda naměřené a vypočtené odezvy hliníkového pásu po optimalizaci

kapitole bylo provedeno porovnání výsledků pro vrstevnatý pás se změřenými daty. Odezvy vypočtené pro případ horní ocelové vrstvy jsou porovnány s experimentem na obr. 49. Je zřejmé, že shoda výsledků je značně lepší, než v případě porovnání pro parametry nalezené optimalizací z prvního měření (viz obr. 44 a 45). Lze si všimnout rozdílné frekvence, se kterou přicházejí vlny v analytických a experimentálních výsledcích do bodu $[0, -d]$. Na základě tohoto pozorování se dá usuzovat, že skutečné E_2 jednoho nebo obou materiálů je vyšší, než to nalezené optimalizací. Kratší čas příchodu vlny do místa buzení v analytických výsledcích by však implikoval opak. Dále je možné si všimnout horší shody pro případ opačného vrstevnatého



Obrázek 49: Porovnání experimentálních dat pro vrstevnatý pás s ocelí v horní vrstvě s výsledky výpočtu pro optimální parametry



Obrázek 50: Porovnání experimentálních dat pro vrstevnatý pás s hliníkem v horní vrstvě s výsledky výpočtu pro optimální parametry

pásu, tedy s hliníkem v horní vrstvě. Porovnání pro tento případ je zobrazeno na obr. 50.

Tato rozdílná míra shody pro opačné pořadí vrstev v pásu může být způsobena neplatným předpokladem speciální ortotropie v měřených vzorcích. Tím by mohla být způsobena i nedokonalá shoda v případě nejlepších výsledků získaných optimalizací pro homogenní materiál. Díky tomu, že vrstevnatý pás byl slepen stejným způsobem pro obě měření, bylo by teoreticky možné určit přibližné úhly natočení ortotropie pomocí vztahů pro mimoosou tuhost v jednosměrných kompozitech [25]. Bylo by nutné provést optimalizaci parametrů pro oba vrstevnaté pásy, která by však byla výrazně časově náročnější než zde popisované procesy z důvodu způsobu vyčíslení odezvy vrstevnatého pásu a většího počtu optimalizovaných parametrů. Těmito optimalizovanými parametry by bylo následně možné aproximovat matice mimoosých tuhostí pro případ natočení os o neznámý úhel α a $-\alpha$ (vrstevnatý pás byl z konfigurace ocel-hliník transformován na hliník-ocel pouhým otočením kolem osy x_2). Matice mimoosých tuhostí lze transformačními maticemi převést na matici tuhosti pro osové namáhání. Bylo by tedy možné optimalizací úhlu α minimalizovat rozdíl mezi takto nalezenou přibližnou maticí osové tuhosti z matice mimoosé tuhosti pro natočení systému o α a $-\alpha$ a tím odhadnout jak natočení systému v jednotlivých vrstvách, tak osové parametry materiálu. Tento postup byl pro zjednodušenou optimalizaci parametrů na vrstevnatých pásech vyzkoušen, nepodařilo se však jednoznačně najít optimální úhel a ve výpočtech metodou konečných prvků pro některé nalezené úhly a jim příslušející matice osové tuhosti nedošlo ke zlepšení výsledků. Tento proces by tedy bylo nutné zpřesnit a provést plnohodnotnou optimalizaci všech parametrů na vrstevnatém pásu.

Další možnou příčinou nižší míry shody experimentu s analytickými výsledky v celé kapitole 5 by mohla být nehomogenita materiálů, kdy i malá kavita nebo jiná nepravidelnost v pásu by do takto složitého fyzikálního jevu mohla vnést výraznou

nepřesnost. Stejný efekt může na výsledky mít i nedokonalé slepení, které je pouze aproximací vrstevnatého pásu. Vliv na záznam měření takto krátkých vln mohla mít i plocha akcelerometru, která byla k hraně pásu přilepená. Dalším, již zmiňovaným, faktorem v přesnosti analytických výsledků je záznam buzení, který byl ve všech případech značně rozkmitaný a těžko se z něj do detailu určoval charakter skutečného průběhu rázové síly.

6 Závěr

Tato práce se zabývala řešením úloh šíření napěťových vln v jednorozměrných a dvou-
rozměrných elastických heterogenních prostředích analytickým, numerickým a ex-
perimentálním přístupem.

Pomocí vztahů popisujících nestacionární napjatost v homogenní tenké tyči se
v rámci práce podařilo odvodit řešení pro odezvu tenké tyče s libovolným počtem vrst-
tev. Vyčíslení tohoto řešení bylo realizováno pomocí tří různých algoritmů numerické
zpětné Laplaceovy transformace. Tyto algoritmy byly na konkrétních úlohách po-
rovnány s ohledem na jejich přesnost a výpočtovou rychlost pro různé typy rázového
buzení. Nejefektivnější z těchto algoritmů byl spolu s odvozeným řešením následně
využit k aproximaci odezvy tenkých tyčí z funkčně gradovaných materiálů. Tyto
výsledky byly poté porovnány s odezvami získanými pomocí dvou různých přístupů
modelování funkčně gradovaných materiálů metodou konečných prvků v softwaru
MSC.Marc/Mentat 2016. Ukázalo se, že numerické výsledky získané modelováním
spojité změny některých materiálových parametrů nejsou ve shodě s očekávaným
řešením. V poslední části práce zabývající se řešením 1D úloh byly odvozené ana-
lytické vztahy využity v optimalizačních úlohách návrhu skladby vrstevnatých tyčí
za účelem minimalizace amplitudy napětí na nebuzeném konci. Byla provedena po-
drobná diskuze vlivu počtu vrstev a omezení optimalizovaných parametrů v souvis-
losti s tlumivými vlastnostmi tyčí a jednoznačností řešených úloh.

Ve druhé části práce, zabývající se 2D úlohami šíření vln, bylo popsáno odvození
řešení pro šíření vln v nekonečném ortotropním pásu vyvolané rázovým buzením.
Na základě nalezených vztahů bylo dále odvozeno řešení stejné úlohy pro ortot-
rovní dvouvrstvý pás. Tato řešení byla následně využita k popisu rozdílů šíření
vln v isotropních, ortotropních a vrstevnatých pásech. Byl diskutován vliv orto-
tropie a rozhraní vrstev na rychlost a charakter šířícího se pulsu. Následně bylo
provedeno modelování těchto úloh metodou konečných prvků a porovnání získaných
numerických výsledků s analytickým řešením ve vybraných bodech. Ukázalo se, že
při vhodné volbě parametrů konečnoprvkového modelu jsou numerické výsledky ve
velmi dobré shodě s analytickým řešením.

V následující části práce bylo popsáno provedené experimentální měření odezvy
ocelového a hliníkového pásu na zatížení rázovým kladívkem. Na základě změřených
dat a analytického řešení byla formulována a řešena úloha identifikace materiálových
parametrů pásů. První výsledky optimalizace ukázaly, že odezva měřená v bodě
ležícím proti místu buzení není vhodná pro identifikaci všech materiálových pa-
rametrů. Byla proto provedena statická tahová zkouška na vzorcích těchto pásů
a následně opětovné měření odezvy v jiných bodech ležících na hranách pásů. Na
základě výsledků těchto dvou zpřesňujících měření bylo možné formulovat dobře
podmíněnou úlohu identifikace materiálových parametrů. Výsledky získané výpočtem
pro takto nalezené parametry byly navíc v dobré shodě s měřením provedeným na
vrstevnatém pásu, který byl vytvořen slepením zmíněných homogenních pásů.

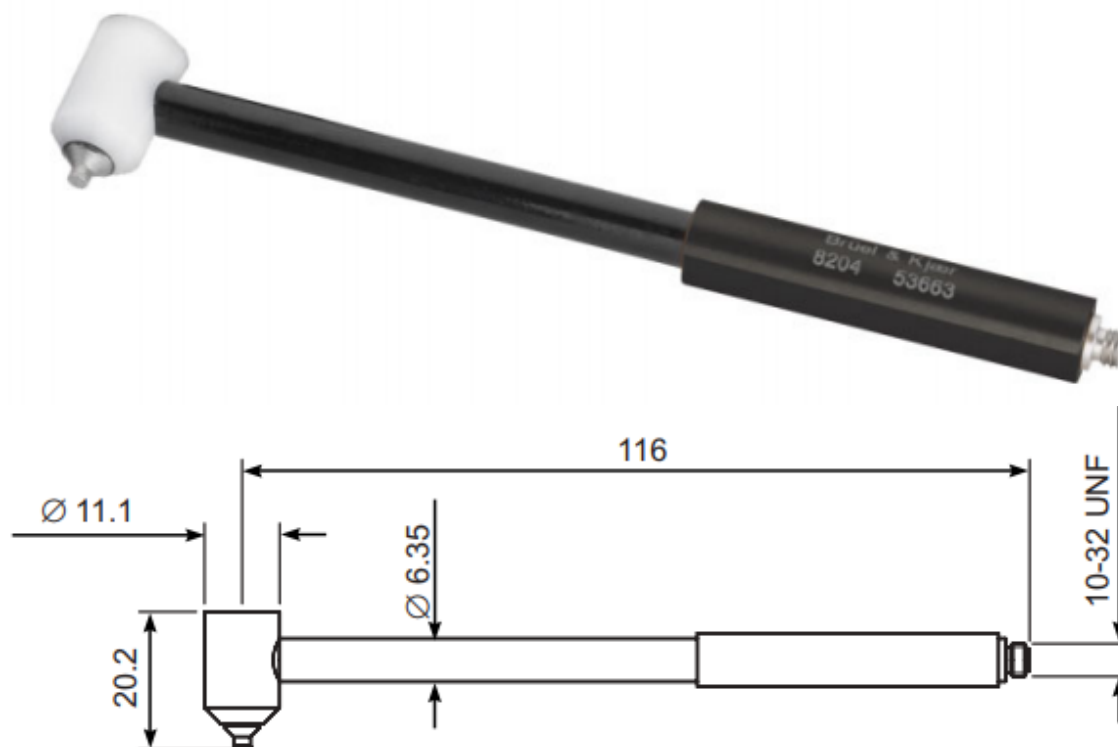
Reference

- [1] O. Kába, Šíření elastických vln v jednorozměrných homogenních a heterogenních prostředích, Bakalářská práce, ZČU v Plzni, 2018.
- [2] I. Shiota, Y. Miyamoto, Functionally Graded Materials 1996, Elsevier Science, Amsterdam, 1997.
- [3] H. Bruck, A one-dimensional model for designing functionally graded materials to manage stress waves, *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000) 6383–6395.
- [4] M. Wu, L. Wu, W. Yang, L. Chen, Elastic wave band gaps of one-dimensional phononic crystals with functionally graded materials, *Smart Materials and Structures* 18 (2009).
- [5] J. Krapez, The sech (ξ)-type profiles: A swiss-army knife for exact analytical modeling of thermal diffusion and wave propagation in graded media, *International Journal of Thermophysics* 39 (2018).
- [6] A. E. Alshorbagy, M. Eltaher, F. Mahmoud, Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method, *Applied Mathematical Modelling* 35 (2011) 412–425.
- [7] B. Xiao, X. Li, Exact solution of buckling load of axially exponentially graded columns and its approximation, *Mechanics Research Communications* 101 (2019) 103414.
- [8] F. Valeš, H. Šebková, The state of stress in non-stationary loaded thin belt, *Acta Technica* 4 (1976) 439–458.
- [9] V. Adámek, Comparison of 1D and 2D solutions for a beam under transverse impact, *MATEC Web of Conferences* 148 (2018) 05005.
- [10] V. Adámek, F. Valeš, Analytical solution for transient response of an infinite viscoelastic strip, *Journal of Vibration Engineering & Technologies* 3 (2015) 699–710.
- [11] L. Xiaobo, J. A. Amjad, G. F. Dargush, Analysis and optimal design of layered structures subjected to impulsive loading, *Computers and Structures* 87 (2009) 543–551.
- [12] A. P. Velo, G. A. Gazonas, Optimal design of a two-layered elastic strip subjected to transient loading, *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003) 6417–6428.
- [13] S. Mandal, A. Chakrabarti, Moving punch on a two-layered viscoelastic medium, *International Journal of Engineering Science* 34 (1996) 1047–1057.

-
- [14] H. Georgiadis, A. Rigatos, Transient SIF results for a cracked viscoelastic strip under concentrated impact loading - An integral-transform/function-theoretic approach, *Wave Motion* 24 (1996) 41–57.
- [15] Z. Arkadiusz, M. Krawczuk, W. Ostachowicz, Propagation of in-plane elasticwaves in a composite panel, *Finite Elements in Analysis and Design* 43 (2006) 145–154.
- [16] L. Brančík, Programs for fast numerical inversion of laplace transforms in matlab language environment, *Proceedings of the 7th Conference MATLAB'99* (1999) 27–39.
- [17] Z. Pírko, J. Veit, *Laplaceova transformace*, SNTL/ALFA, Bratislava, 1972.
- [18] L. Brančík, Matlab oriented matrix laplace transforms inversion for distributed systems simulation, *Proceedings of The International Conference on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences* (2002).
- [19] J. Valsa, L. Brančík, Approximate formulae for numerical inversion of laplace transforms, *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* 11 (1998) 153–166.
- [20] User manual of MSC.Marc: Volume B, MSC Software HmbH, Mnichov, 2016.
- [21] F. Valeš, Napjatost elastického pásu při příčném rázu, *Výzkumná zpráva Z355/71*, Ústav termomechaniky AVČR, Praha, 1973.
- [22] V. Adánek, F. Valeš, J. Červ, Transient response of layered orthotropic strip to transverse load, *Proceedings of 22nd International Conference Engineering Mechanics* (2016) 1–4.
- [23] R. M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, CRC Press, Cleveland, Ohio, USA, 1998.
- [24] J. Morávka, Optimální filtrace metalurgických signálů pomocí informačních kritérií (30. 6. 2020). https://www2.humusoft.cz/www/papers/tcp05/002_moravka.pdf.
- [25] V. Laš, *Mechanika kompozitních materiálů*, Západočeská univerzita, Plzeň, 2004.
- [26] Miniature Impact Hammer - Type 8204 product data, Brüel & Kjær, 28. 6. 2020. URL: <https://www.bksv.com/media/doc/Bp2077.pdf>.
- [27] Piezoelectric Accelerometer Miniature DeltaTron® Accelerometers - Types 4519, 4519-001, 4519-002 and 4519-003 product data, Brüel & Kjær, 28. 6. 2020. URL: <https://bksv.com/-/media/literature/Product-Data/bp2071.ashx>.
- [28] WaveAce™1000 and 2000 Oscilloscopes, Teledyne LeCroy, 28. 6. 2020. URL: https://cz.mouser.com/datasheet/2/227/waveace_1k-2k_datasheet-365122.pdf.

Příloha A

Parametry rázové kladívka Brüel & Kjær Miniature Impact Hammer - Type 8204 [26]

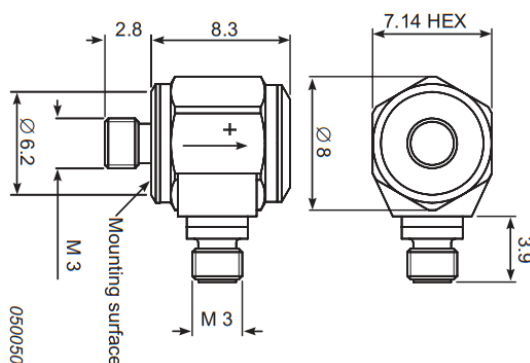


All dimensions in mm

	Units	8204
Dynamic Characteristics		
Voltage Sensitivity (typical)	mV/N (mV/lbf)	22.7 (100)
Full Scale Force Range Compression	N (lbf)	220 (50)
Linear Error at Full Scale	% full scale	<±2
Electrical Characteristics		
Full Scale Output Voltage	V	±5
DC Output Bias Voltage	V	+7 to +12
Output Impedance	Ω	<100
Power Supply	mA	2 to 20
Voltage Range	V DC	+18 to +30
Environmental Characteristics		
Temperature Range	°C (°F)	-73 to +60 (-100 to +140)
Max. Force Compression	N (lbf)	890 (200)
Physical Characteristics		
Dimensions		See outline drawing
Overall Length	mm (in.)	122 (4.8)
Effective Seismic Mass without Head Extender	gram (oz.)	2 (0.07)
Effective Seismic Mass with Head Extender	gram (oz.)	5.5 (0.2)
Impact Tip Material		17-4 PH stainless steel
Connector		10-32 UNF

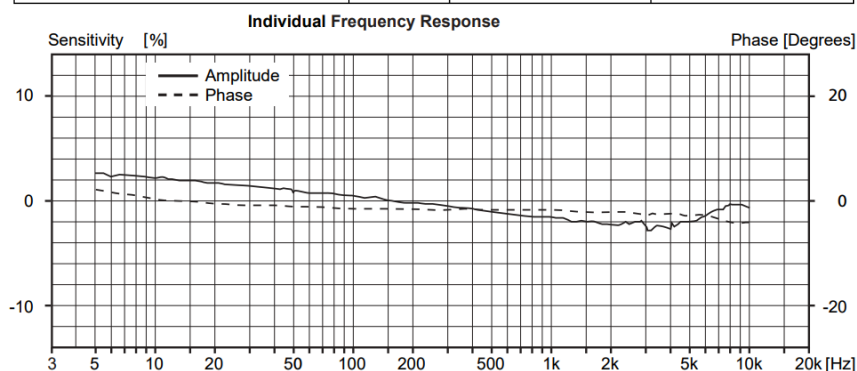
Príloha B

Parametry akcelerometru Brüel & Kjær Miniature DeltaTron® Accelerometer - Type 4519 [27]



All dimensions in mm

	Units	4519	4519-001	4519-002	4519-003
Dynamic Characteristics					
Voltage Sensitivity (@ 160Hz)	mV/g	10 ±10%	100 ±10%	10 ±10%	100 ±10%
Measuring Range	g	± 500	± 50	± 500	± 50
Frequency Response		See typical amplitude response			
Mounted Resonance Frequency	kHz	45			
Amplitude Response ±10% (typical) ^a	Hz	0.5 to 20000			
Residual Noise	mg	2.0	0.9	2.0	0.9
Transverse Sensitivity	%	<5			
Electrical Characteristics					
Output Impedance	Ω	<100			
DC Output	At room temperature	V			
Bias Voltage	In specified temp. range	V			
Power Supply	mA	2 to 20			
Start-up Time	s	<1			
Grounding		Case grounded			
Environmental Characteristics					
Temperature Range	°C	-51 to +121	-51 to +100	-51 to +121	-51 to +100
	°F	-60 to +250	-60 to +212	-60 to +250	-60 to +212
Humidity		Hermetically sealed			
Max. Operational Shock (peak)	g pk	5000			
Base Strain Sensitivity	Equiv. g/μ strain	0.007			
Thermal Sensitivity	Equiv. %/°C (%/°F)	0.2 (0.1)			
Physical Characteristics					
Dimensions		See outline drawing			
Weight	gram (oz.)	1.6 (0.06)		1.5 (0.05)	
Case Material		Titanium			
Connector		M3			
Mounting		M3 Stud		Adhesive	
Max. Mounting Torque	Nm (lb. in.)	1.7 (15)		-	



Příloha C

Parametry osciloskopu Teledyne LeCroy WaveAce 2014 [28]

WAVEACE 2000 SPECIFICATIONS

	WaveAce 2002	WaveAce 2004	WaveAce 2012	WaveAce 2014	WaveAce 2022	WaveAce 2024	WaveAce 2032	WaveAce 2034
Vertical								
Bandwidth	70 MHz	70 MHz	100 MHz	100 MHz	200 MHz	200 MHz	300 MHz	300 MHz
Rise Time	5.0 ns	5.0 ns	3.5 ns	3.5 ns	1.75 ns	1.75 ns	1.2 ns	1.2 ns
Input Channels	2	4	2	4	2	4	2	4
Vertical Resolution	8-bits							
Vertical Sensitivity	2 mV/div-5 V/div							
Bandwidth Limiting Filter	20 MHz							
Maximum Input Voltage	400 Vpk, CAT I				400 Vpk, CAT I (1 M Ω), 5 V _{rms} (50 Ω)			
Input Coupling	GND, DC 1 M Ω , AC 1 M Ω				GND, DC 1 M Ω , AC 1 M Ω , 50 Ω			
Input Impedance	1 M Ω 18 pF				1 M Ω 18 pF, 50 Ω			
Acquisition								
Sampling Rate (Single Shot)					2 GS/s (interleaved) 1 GS/s (all channels)			
Sampling Rate (Equivalent Time)	50 GS/s							
Peak Detect Period	2.5 ns							
Memory Length	12 kpts/Ch							
Maximum Memory	24 kpts							
Timebase Range	5.0 ns/div – 50 s/div		2.5 ns/div – 50 s/div				1.0 ns - 50 s/div	
Probes								
Standard Probes	10:1, 1:1 Switchable Passive Probe (one per channel)							
Triggering								
Triggers	Edge, Pulse Width, Video, Slope (Rise Time), Alternate							
Measure, Math and Wave Recorder								
Measure	Amplitude, Average, Base, Burst Width, Cyclic RMS, + Duty Cycle, - Duty Cycle, Fall Time, Frequency, Max, Mean, Min, Overshoot, Peak-Peak, Period, Phase, Preshoot, Rise Time, RMS, Top, + Width, - Width. Plus 9 advanced parameters for edge to edge timing measurements							
Math	Add, Subtract, Multiply, Divide, FFT (up to 1 kpts with Rectangular, Von Hann, Hamming or Blackman windows)							
Waveform Sequence Recorder	Record and playback a sequence of up to 2,500 waveforms							
Input/Output Interfaces								
USB	USB host port for flash drives, USB device port for connecting to PC and printers							
LAN	LAN port for connection to PC using WaveStudio software							
Physical								
Dimensions (HWD)	163 mm x 360 mm x 124.1 mm; 6.42' x 14.17' x 4.89'							
Weight	3.33 kg; 7.40 lbs.							
Power Requirements								
	100 - 240 V (\pm 10%) at 50 / 60 / 400 Hz (\pm 5%). Automatic AC voltage selection. Max power consumption: 50 W							
Compliance								
	CE Compliant, UL and cUL listed. Conforms to EN 61326-1, EN 61010-1, UL 61010-1 2nd edition, and CSA C22.2 No. 61010-1-04.							