

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2019/2020

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Jan VÁVERKA**  
Osobní číslo: **A18B0599P**  
Studijní program: **B3918 Aplikované vědy a informatika**  
Studijní obor: **Kybernetika a řídicí technika**  
Téma práce: **Frekvenční identifikace elektromechanických soustav**  
Zadávací katedra: **Katedra kybernetiky**

### Zásady pro vypracování

1. Seznamte se s aktuálními technikami a algoritmy identifikace lineárních t-invariantních systémů a slabě nelineárních systémů v časové a frekvenční oblasti se zaměřením na elektromechanické soustavy.
2. Implementujte vhodné frekvenční metody pro neparametrickou i parametrickou identifikaci s využitím metod popsaných v seznamu literatury.
3. Otestujte navržené algoritmy v prostředí SW Matlab na sadě typizovaných testů zahrnujících obvyklé třídy mechanických soustav. Využijte simulovaná i experimentální data získaná na reálných systémech.
4. Porovnejte dosažené výsledky s metodami System Identification toolboxu v systému Matlab.

Rozsah bakalářské práce: **30-40**  
Rozsah grafických prací:  
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

Duník J., Identifikace systémů a filtrace, ZČU 2018  
Pintelon, Schoukens, System Identification – A Frequency Domain Approach, Wiley 2012

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Martin Gubej, Ph.D.**  
Katedra kybernetiky

Datum zadání bakalářské práce: **15. října 2019**  
Termín odevzdání bakalářské práce: **25. května 2020**

*Radová*

**Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová**  
děkanka



*J. Psutka*

**Prof. Ing. Josef Psutka, CSc.**  
vedoucí katedry

## PROHLÁŠENÍ

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou/bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou/diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 1.6.2020



.....  
*vlastnoruční podpis*

## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing. Martinu Goubejovi Ph.D. za poskytnutí odborného tématu zasahujícího do různých oblastí a cenné rady při jeho vypracování.

## **Anotace**

Tato práce se zabývá experimentální identifikací systémů v časové a frekvenční oblasti s využitím periodických budících signálů typu multisine. Je představeno několik typů metod s jejich variantami v obou oblastech. Následně je popsán program v prostředí Matlab, díky kterému je možné spouštět různé testy pro porovnání implementovaných metod. Na závěr jsou implementované metody porovnány na několika testech včetně identifikace z reálně naměřených dat.

## **Klíčová slova**

experimentální identifikace, frekvenční oblast, LLS, WLS, IWLS, metoda lineárních nejmenších čtverců, multisine, Fourierova transformace

## **Abstract**

This work deals with experimental identification of systems in the time and frequency domain using multisine periodic excitations. Several types of methods and some modifications in both domains are presented. Subsequently, a program in the Matlab environment used to run various tests to compare the implemented methods is described. In conclusion, the implemented methods are compared by running several tests including identification using real measured data.

## **Key words**

experimental identification, frequency domain, LLS, WLS, IWLS, linear least squares method, multisine, Fourier transform

# Obsah

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Úvod do problematiky</b>                                | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Aktuální stav problematiky</b>                          | <b>2</b> |
| 2.1      | Časová vs. frekvenční oblast . . . . .                     | 2        |
| 2.2      | Fourierova transformace . . . . .                          | 4        |
| 2.3      | Vstupní signály . . . . .                                  | 6        |
| 2.3.1    | Harmonické signály . . . . .                               | 7        |
| 2.3.2    | Multisine signály . . . . .                                | 7        |
| 2.3.3    | Signály s proměnnou frekvencí . . . . .                    | 8        |
| 2.4      | Neparametrický model . . . . .                             | 9        |
| 2.4.1    | Přechodový jev a ustálený stav . . . . .                   | 9        |
| 2.4.2    | Reprezentace neparametrického modelu . . . . .             | 9        |
| 2.4.3    | Neparametrický model šumu . . . . .                        | 9        |
| 2.5      | Parametrické odvození modelu . . . . .                     | 11       |
| 2.5.1    | Kvalita odhadu parametrů - strannost, konsistence . . .    | 11       |
| 2.5.2    | Lineární nejmenší čtverce - LLS . . . . .                  | 13       |
| 2.5.3    | Metoda chyby predikce - PEM . . . . .                      | 15       |
| 2.5.4    | Metoda přídatné proměnné . . . . .                         | 15       |
| 2.5.5    | Metoda lineárních nejmenších čtverců - frekvenční oblast   | 16       |
| 2.5.6    | Metoda vážených lineárních nejmenších čtverců . . . .      | 17       |
| 2.5.7    | Metoda iterativních lineárních nejmenších čtverců . . .    | 17       |
| 2.5.8    | Metoda iterativních vážených lineárních nejmenších čtverců | 18       |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.5.9    | Nelineární optimalizace nejmenších čtverců . . . . .                       | 18        |
| 2.5.10   | Stochasticky optimální odhad metodou maximální vě-<br>rohodnosti . . . . . | 19        |
| 2.6      | Slabě nelineární systémy . . . . .   | 20        |
| 2.6.1    | Stacionární nelineární systémy . . . . .                                   | 20        |
| 2.6.2    | Dynamické nelineární systémy . . . . .                                     | 21        |
| 2.6.3    | Nejlepší lineární aproximace . . . . .                                     | 21        |
| <b>3</b> | <b>Popis řešení</b>  | <b>22</b> |
| 3.1      | Program pro porovnání identifikačních metod . . . . .                      | 22        |
| 3.2      | Hlavní struktura programu . . . . .  | 23        |
| 3.3      | Generování vstupních signálů . . . . .                                     | 24        |
| 3.4      | Generování přenosových funkcí . . . . .                                    | 25        |
| 3.5      | Import experimentální odezvy . . . . .                                     | 26        |
| 3.6      | Identifikační metody . . . . .   | 27        |
| 3.6.1    | Časová oblast . . . . .  | 27        |
| 3.6.2    | Frekvenční oblast . . . . .  | 28        |
| 3.6.3    | Lineární nejmenší čtverce - základní varianta . . . . .                    | 28        |
| 3.6.4    | Vážené nejmenší čtverce . . . . .  | 31        |
| 3.6.5    | Iterované vážené nejmenší čtverce . . . . .                                | 31        |
| 3.7      | Validace identifikovaných modelů . . . . .                                 | 32        |
| <b>4</b> | <b>Shrnutí výsledků implementace</b>                                       | <b>33</b> |
| 4.1      | Vstupní signál . . . . .   | 33        |
| 4.2      | Neparametrický model . . . . .   | 37        |
| 4.3      | Parametrická identifikace . . . . .  | 41        |
| 4.3.1    | Test systémů třetího řádu . . . . .  | 42        |
| 4.3.2    | Test elektromechanických systémů . . . . .                                 | 45        |
| 4.3.3    | Identifikace z naměřených dat reálného systému . . . . .                   | 49        |
| 4.3.4    | Shrnutí . . . . .  | 52        |





# Kapitola 1

## Úvod do problematiky

Nedílnou součástí automatického řízení je získání matematického modelu zkoumaného systému. U velkého množství známých systémů lze tento model získat analyticky pomocí matematického modelování. To využívá apriorní fyzikální a matematické (popřípadě také chemické či biologické) znalosti o zkoumaném systému k sestavení diferenciálních rovnic. U některých systémů však nelze nalézt analytické řešení matematického modelu vůbec, nebo je to velice obtížné.

Proto vznikla větev experimentální identifikace, která se snaží co nej-přesněji aproximovat analytické řešení, bez nutnosti znalostí o reálném systému. Využívá se zde vhodně zvoleného vstupního signálu a příslušné odezvy systému na tento signál. Abychom dosáhli požadovaného výsledku, musíme vstupní signál volit dostatečně bohatý na to, aby vybudil systém na všech místech, které jsou pro nás důležité a ukázal tak jeho dynamiku. Speciálně u identifikace ve frekvenční oblasti používáme jako vstup harmonické signály o různých frekvencích a klademe tak důraz na resonance a disonance systému

Existují různé algoritmy pro získání matematického modelu na základě těchto dat, ale jejich podstata bývá stejná - minimalizace určitého kritéria. Obvykle se jedná o metodu nejmenších čtverců, kdy se snažíme minimalizovat vzdálenost neznámého modelu od naměřených dat na základě kritéria součtu kvadrátů jejich odchylek. Tato metoda může být modifikována různými způsoby, jako je například přiložení váhy každému měření, která nám do algoritmu dodává informaci o věrohodnosti či důležitosti měření. Přidělení váhy je zvláště výhodné v případě, kdy máme data korelovaná všudypřítomným šumem.

# Kapitola 2

## Aktuální stav problematiky

### 2.1 Časová vs. frekvenční oblast

Experimentální identifikace v časové oblasti je obvyklý přístup, jak se k identifikaci postavit. Vybudíme systém vhodným signálem, změříme výstup a snažíme se vhodným způsobem určit strukturu modelu a její parametry tak, aby odezva určeného modelu na stejný budící signál byla co nejvíce podobná měřenému výstupu. Existuje mnoho metod, které se snaží model identifikovat tím nejlepším způsobem. Některé metody ale selhávají i u sebemenší kontaminaci signálu šumem.

Co kdybychom tedy dokázali rozdělit měřený signál na vysokofrekvenční šum a hlavní nízkofrekvenční část signálu? Z této úvahy již vyplývá, že se budeme muset vydat do frekvenční oblasti, kde dokážeme časový průběh signálu rozdělit do jednotlivých frekvenčních složek. Nejenom z tohoto důvodu byla vytvořena větev experimentální identifikace ve frekvenční oblasti, kdy jsme schopni díky principu superpozice a Fourierovy transformace signál do těchto složek rozdělit a například přikládat vyšší váhu nízkofrekvenční části ve snaze potlačit šum.

Identifikace ve frekvenční oblasti využívá velmi důležité vlastnosti lineárních systémů, a to jejich odezvy na harmonický signál. Po odeznění počátečního přechodového děje je totiž odezva lineárního systému na harmonický signál se stejnou frekvencí. Zajímavé informace z této odezvy jsou však změna amplitudy a posun ve fázi. Díky této trojici (frekvence, změna amplitudy, změna fáze) jsme schopni sestavit neparametrickou frekvenční odezvu systému (FRF), která je velice užitečná k určení rezonancí, disonancí a celkovému zobrazení dynamiky systému ještě před samotnou parametrickou

identifikací. Typicky se tato frekvenční odezva získává díky diskrétní Fourierově transformaci, která však obecně nemusí vracet přesné odezvy kvůli vstupně-výstupnímu šumu či velikosti/typu použité okénkové funkce (leakage efekt). Naštěstí se tento problém dá snadno potlačit či zcela odstranit použitím vhodného vstupního periodického signálu. Využití frekvenční odezvy je vhodný mezikrok této větve identifikace, jelikož jsme následně schopni přiložit odlišné váhy jiným frekvencím a zaměřit se tak na specifické frekvenční pásmo. Jako tyto váhy lze například využít inverzi variancí frekvenční odezvy, které lze snadno získat při použití periodického signálu. Další větev, kde je důležitá možnost zdůraznění některé části frekvenčního pásma, je automatizace, kde je běžně naším cílem vystihnout správně dynamiku v pásmu středních frekvencí pro vysokou robustnost ve stabilitě, jelikož chyba na nízkých frekvencích se dá kompenzovat zpětnou vazbou a nepřesnosti na vysokých frekvencích lze potlačit malým zesílením v otevřené smyčce. Dalším rozumným způsobem implementace vah je například použít exponenciální funkci.

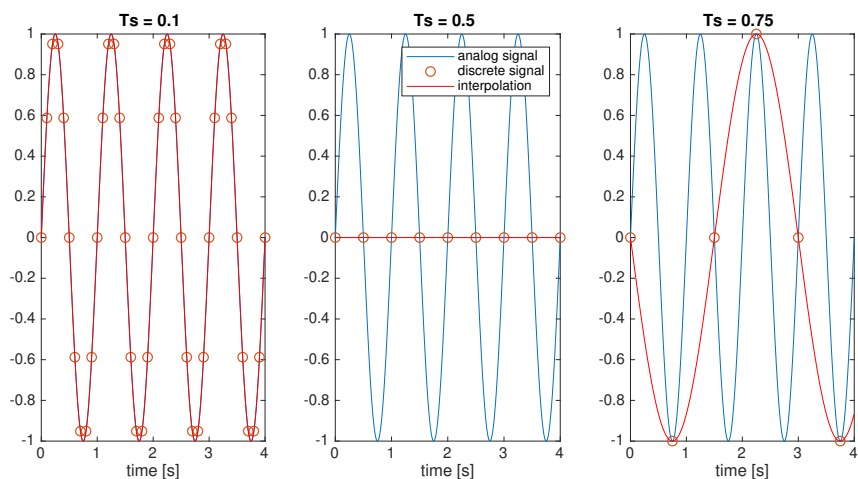
Jak je popsáno níže, díky volbě frekvenční oblasti je možné detekovat nelinearity systému pomocí volby speciálně upravených vstupních periodických signálů. Energie u nelineárních systémů se totiž na rozdíl od LTI systémů přelévá mezi frekvencemi, což nám může velmi zkomplikovat identifikaci v časové oblasti. Z tohoto důvodu je výhodné ve frekvenční oblasti sledovat odezvy jen na některých frekvencích a tento jev znovu eliminovat.

Přestože je reprezentace dat v časové a frekvenční oblasti odlišná, oba přístupy nesou stejnou informaci o systému. Jeden typ zobrazení těchto dat může být v některé úloze výhodnější než druhé, a proto je důležité rozumět oběma přístupům.

## 2.2 Fourierova transformace

Pokud se jedná o identifikaci ve frekvenční oblasti, naším hlavním cílem je vybudit systém tak, abychom získali neparametrický tvar frekvenčního přenosu daného systému, který nám udává odezvu systému na harmonické signály o různých frekvencích. V naprosté většině případů takovou odezvu získáme pomocí tzv. rychlé diskrétní Fourierovy transformace (FFT). Tento algoritmus slouží k převodu signálu mezi časovou a frekvenční oblastí. Pokud tedy víme, na jakých frekvencích jsme systém vybudili, lze pomocí Fourierovy transformace výstupu a vstupu získat jejich podíl - tudíž odezvu. K úspěšnému použití Fourierovy transformace však musíme počítat s problémy, které mohou nastat.

Jeden z těchto problémů se nazývá aliasing a záleží na volbě periody vzorkování našeho diskrétního vstupního signálu. Vzniká, pokud vzorkovací frekvence je nižší (nebo stejná), než nejvyšší frekvence obsažená v signálu - tato nejnižší možná frekvence, pro kterou aliasing již nastává, se nazývá Nyquistova frekvence. Aliasing znemožní rozpoznat tento signál, jak je uvedené v následujícím grafu. Pokud se setkáme s tímto problémem, musíme snížit periodu vzorkování, použít low-pass filtr, nebo popřípadě přehodnotit, zda tyto vysoké frekvence opravdu obsahují důležitou dynamiku.



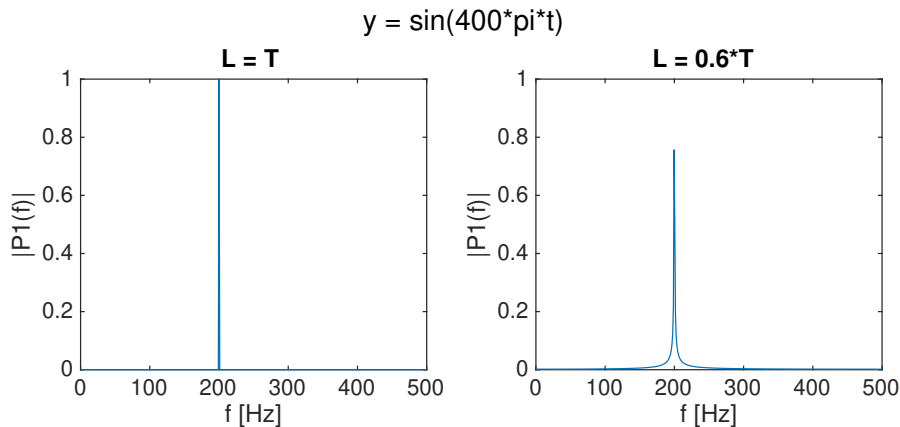
Obrázek 2.1: Aliasing

Dalším důležitým potencionálním problémem je tzv. spektrální 'leakage', kvůli kterému dochází ke zkreslení výstupu Fourierovy transformace. Dochází k němu u neperiodického buzení v případě ořezávání signálu na konečnou délku. Tomu se dá jednoduše vyhnout zvolením právě periodického signálu, kdy měříme signál o délce  $k$ -násobku periody signálu ( $k$  volíme například

podle hladiny šumu měření pro vyšší přesnost). Dalším možným důvodem výskytu leakage efektu je zanedbání počátečního přechodového děje (u periodického buzení časem odezní, viz. 2.3). Při návrhu budícího signálu se snažíme tento efekt co nejvíce redukovat, ale v praxi je vždy v nějaké míře zastoupen.

Pokud nemáme možnost vytvořit vstupní signál tak, abychom potlačili leakage efekt dostatečně, dalším způsobem je použít speciální typ a délku okénkové funkce. Díky použití okénkové funkce však nelze efekt eliminovat, jelikož dochází k omezení signálu na konečnou délku. Hledáme tedy vhodnou aproximaci, jejíž vhodnost se liší podle typu použitého okénka a jeho délky. Okénka mohou být například obdélníková, trojúhelníková, sinusová, nebo komplexnější. Mezi známé patří (v angličtině) Hann, Hamming, Welch a Parzen.

Pro otestování vlivu leakage efektu jsem zvolil harmonický signál s frekvencí  $f = 200\text{Hz}$  a amplitudou  $y_m = 1$ . Následně jsem provedl jeho Fourierovu transformaci v úseku celé jeho periody (tedy celočíselného násobku) a pouze na úseku  $3/5$  jeho periody.



Obrázek 2.2: Leakage efekt

Vidíme, že díky Fourierově transformaci jsme schopni při absenci leakage efektu přesně zjistit sílu daných frekvencí v signálu. V opačném případě lze sice v některých případech správně odhadnout vybuzené frekvence, ale nelze přesně určit jejich sílu - amplitudu. Tato charakteristika se nazývá spektrum signálu a může také sloužit jako nástroj pro určení vhodnosti vstupního signálu.

## 2.3 Vstupní signály

Zvolení vhodného vstupního signálu je velmi důležitá část jakékoliv větve systémové identifikace. Jaký zvolíme vstupní signál nám následně definuje informace, které se o systému dozvíme. Snažíme se tedy pomocí vstupního signálu zjistit co nejvíce informací za co nejkratší čas. Jedna z nejdůležitějších vlastností vhodného signálu je tedy schopnost vybudit systém na místech jeho dynamiky - mluvíme tedy o oblastech, kde se nacházejí jeho nuly a póly. Další vlastností vhodného vstupního signálu je nízký tzv. 'crest factor' (neboli CF). CF definovali Pintelon a Schoukens v [2] jako podíl maximální a střední hodnoty daného signálu:

$$CF = \frac{X_{peak}}{X_{RMS}} = \frac{\max|x(t)|}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt}} \quad (2.1)$$

Crest faktor tedy představuje, jak extrémní jsou nejvyšší hodnoty vůči efektivní hodnotě signálu. Z této definice tedy plyne, že například konstantní signál má  $CF = 1$  a sinusoida  $CF \sim 1.4$ .

Vstupní signály se obecně dělí na 2 typy - náhodné signály a optimalizované periodické signály. V této práci se však zaměříme pouze na optimalizované periodické signály, mezi které patří jedno-frekvenční sine signály, chirp signály a především signály typu multisine (signál složený z několika harmonických signálů o různých frekvencích). Jednou z předních výhod periodických signálů je možnost volby počtu period vzhledem k úrovni kontaminace signálu šumem. Následně nejenom získáme přesnější data díky průměrování period, ale také jsme schopni získat neparametrický model šumu, který můžeme použít jako váhu na potlačení více kontaminovaných prvků při parametrické identifikaci. Další důležitou vlastností periodických signálů je možnost zapomenout několik počátečních period a vyčkat tak na odeznění počátečního přechodového děje systému. Při použití periodických signálů tedy můžeme vybrat vysoký počet period pro vysoce kontaminované data, a zvýšit tak přesnost, ale zároveň nejsme nuceni využít takto dlouhého signálu u méně kontaminovaných systémů a zkrátit tím dobu experimentu.

Speciálně u multisine signálů jsme schopni přesně definovat důležité frekvence a následně jejich amplitudu. Máme tedy naprostou kontrolu nad spektrem signálu a nemůže se nám stát, že náš signál bude mít na důležitých frekvencích nízké SNR (signal-to-noise ratio), jako tomu je u náhodného buzení.

Na další výhodu speciálně vytvořených signálů narazíme u zkoumání nelinearit systémů, kde lze vynechat ve vstupním signálu některé frekvence pro

jejich lepší identifikaci, jak již bylo řečeno v sekci 2.1.

### 2.3.1 Harmonické signály

Při vybuzení systému harmonickým signálem o určité frekvenci získáme frekvenční odezvu systému na této frekvenci - čili změnu amplitudy a fáze (odezva lineárního systému na harmonický signál je harmonický signál o stejné frekvenci, pouze s odlišnou amplitudou a fází). Tato odezva nám však udává jen jeden bod frekvenční charakteristiky, která nám nestačí k identifikaci celé dynamiky systému. Musíme tedy pro získání více bodů frekvenční charakteristiky vybudit systém několikrát na různých frekvencích a vždy vyčkat na odeznění počátečního přechodového děje. To je ale velice časově náročné, a proto k vybuzení systému jednoduchým harmonickým signálem téměř nikdy nedochází.

### 2.3.2 Multisine signály

Jak již bylo řečeno, Multisine je periodický signál, který je složen z několika harmonických signálů. To dramaticky zkrátí dobu měření, jelikož díky principu superpozice jsme schopni zpět vypreparovat všechny frekvenční složky vstupního i výstupního signálu a tím získat frekvenční odezvu na mnoha frekvencích zároveň. Musíme si však znovu dávat pozor na počáteční přechodový děj systému a správně zvolit délku signálu, aby nedošlo k výše zmíněnému leakage efektu. Z tohoto důvodu musíme frekvenční složky zvolit tak, aby každá frekvence v signálu byla celočíselným  $k$ -násobkem nejnižší frekvence  $f_0$  obsažené v signálu a tím dosáhneme periodicity. Amplitudy jednotlivých složek můžeme volit podle potřeby (v našem případě volíme stejné amplitudy pro všechny složky).

Poslední volné parametry jsou samozřejmě fáze posunutí jednotlivých složek. Volba fází samozřejmě bude udávat velikost crest faktoru a tudíž je rozumné se nad volbou fází zamyslet. Máme k dispozici tyto základní volby fází:

- náhodné fáze
- Schroederovy fáze -  $\phi_k = \phi_1 - \frac{k(k-1)}{K}\pi, (k = 2, 3, \dots, K)$
- speciální algoritmy na optimalizaci CF - iterativní postup pomocí FFT a IFFT

### **2.3.3 Signály s proměnnou frekvencí**

Tyto signály, také zvané Chirp signály, jsou vhodnou alternativou Multisine signálů. Mají odlišné spektrum signálu a také omezení na plochost amplitudového spektra.



## 2.4 Neparametrický model

Body neparametrického modelu (v našem případě jde o frekvenční odezvu systému) obecně získáme z podílu Fourierovy transformace výstupu ku vstupu na námi vybudovaných frekvencích. Jelikož budíme systém periodickým signálem, máme možnost signál rozdělit na dílčí periody a vypočítat Fourierovu transformaci pro každou periodu zvlášť. Tímto získáme nejen přesnější výsledky díky použití střední hodnoty přes několik period, ale také získáme představu o přítomnosti šumu a věrohodnosti každého bodu frekvenční odezvy systému.

### 2.4.1 Přechodový jev a ustálený stav

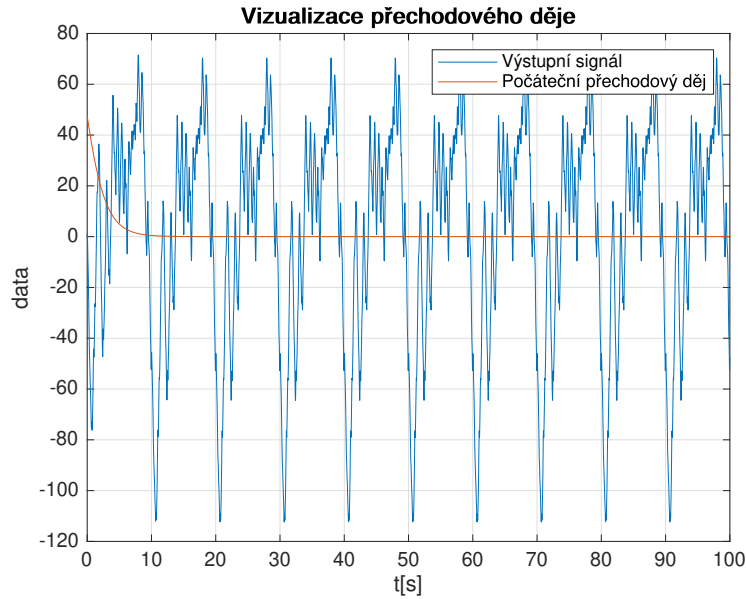
Při měření frekvenční odezvy systému musíme také dbát na to, že při změně vstupního signálu se na výstupu objevuje nejen žádaná frekvenční odezva v ustáleném stavu, ale také přechodový jev, který postupně s časem odezní. Z tohoto důvodu bychom měli určit počet prvních period, které nebudeme počítat do našeho neparametrického modelu. Počáteční přechodový děj je ilustrovaný na následujícím grafu, kde jsme měřili signál o 10 periodách. Vidíme, že při tomto experimentu stačí vynechat z algoritmu pouze první periodu signálu.

### 2.4.2 Reprezentace neparametrického modelu

Fourierova transformace vrací komplexní čísla pro všechny všechny frekvence mezi nulou a Nyquistovou frekvencí jak pro kladné, tak i záporné frekvence. My ale, jak už vychází z definice multisine signálu, budíme signál pouze na určitých frekvencích. Právě odezva na těchto frekvencích nás zajímá a budeme jí používat ke zjištění našeho neparametrického modelu. Výsledné komplexní čísla  $Z$  reprezentují jak změnu amplitudy ( $A = |Z|$ ), tak změnu fáze ( $\phi = \tan^{-1}(\frac{\text{imag}(Z)}{\text{real}(Z)})$ ). Zároveň tyto čísla představují body například v Nyquistově či Bodeho diagramu.

### 2.4.3 Neparametrický model šumu

Pokud je součástí měření vstupně-výstupní šum, máme možnost využít periodicity našeho vstupního signálu pro odvození neparametrického modelu šumu. Toho docílíme při rozdělení vstupního i výstupního signálu na peri-



Obrázek 2.3: Ukázka počátečního přechodového děje

ody. Musíme dbát na dodržení přesné délky periody kvůli výše zmíněnému leakage efektu, který by se vyskytl ve Fourierově transformaci a zhoršil tak naše výsledky. Po rozdělení signálu vypočteme pro každou periodu zvlášť FFT a použijeme níže zmíněné vztahy na odvození variance FRF dat pro každou frekvenci. Tyto vztahy byly odvozené v [1] pro deterministické periodické signály:

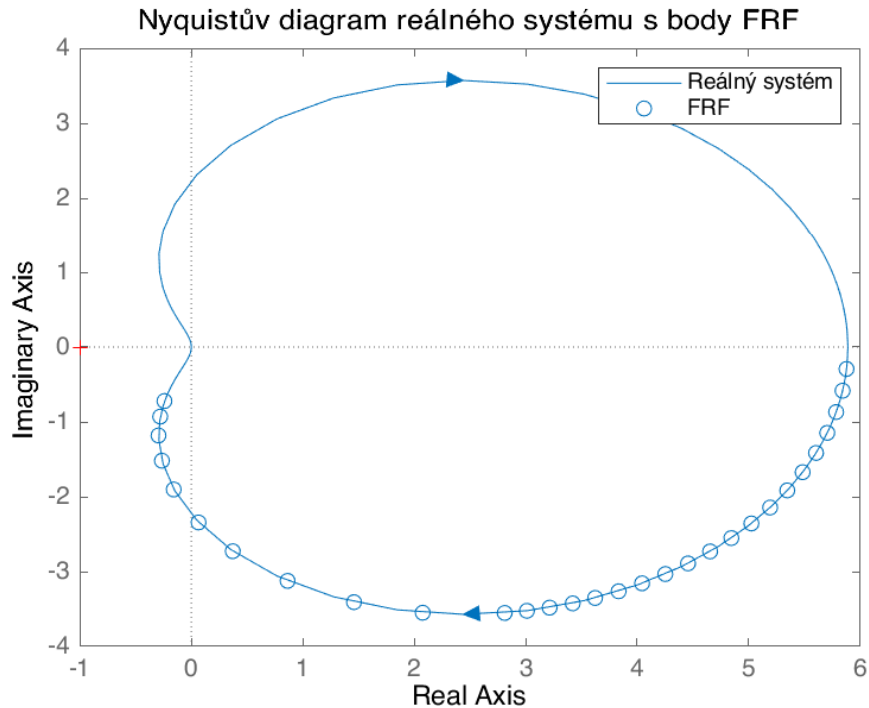
$$\hat{\sigma}_U^2(k) = \frac{1}{M-1} \sum_{l=1}^M |U^{[l]}(k) - \hat{U}(k)|^2 \quad (2.2)$$

$$\hat{\sigma}_Y^2(k) = \frac{1}{M-1} \sum_{l=1}^M |Y^{[l]}(k) - \hat{Y}(k)|^2 \quad (2.3)$$

$$\hat{\sigma}_{YU}^2(k) = \frac{1}{M-1} \sum_{l=1}^M (Y^{[l]}(k) - \hat{Y}(k)) \overline{(U^{[l]}(k) - \hat{U}(k))} \quad (2.4)$$

$$\sigma_H^2(k) \sim \frac{|\hat{H}(j\omega_k)|^2}{M} (\hat{\sigma}_Y^2(k)/|\hat{Y}(k)|^2 + \hat{\sigma}_U^2(k)/|\hat{U}(k)|^2 - 2\text{Re}(\hat{\sigma}_{YU}^2(k)/(\hat{Y}(k)\overline{\hat{U}(k)}))) \quad (2.5)$$

V [1] je také dokázáno, že při použití dostatečně velkého počtu period signálu ( $M \geq 20$ ) je možné jednoduchou formulí získat poloměr kružnice okolo našich průměrovaných FRF bodů, ve kterých se nachází reálný systém s  $100 \cdot p\%$



Obrázek 2.4: Nyquistův diagram FRF dat

percentilem (Confidence regions):

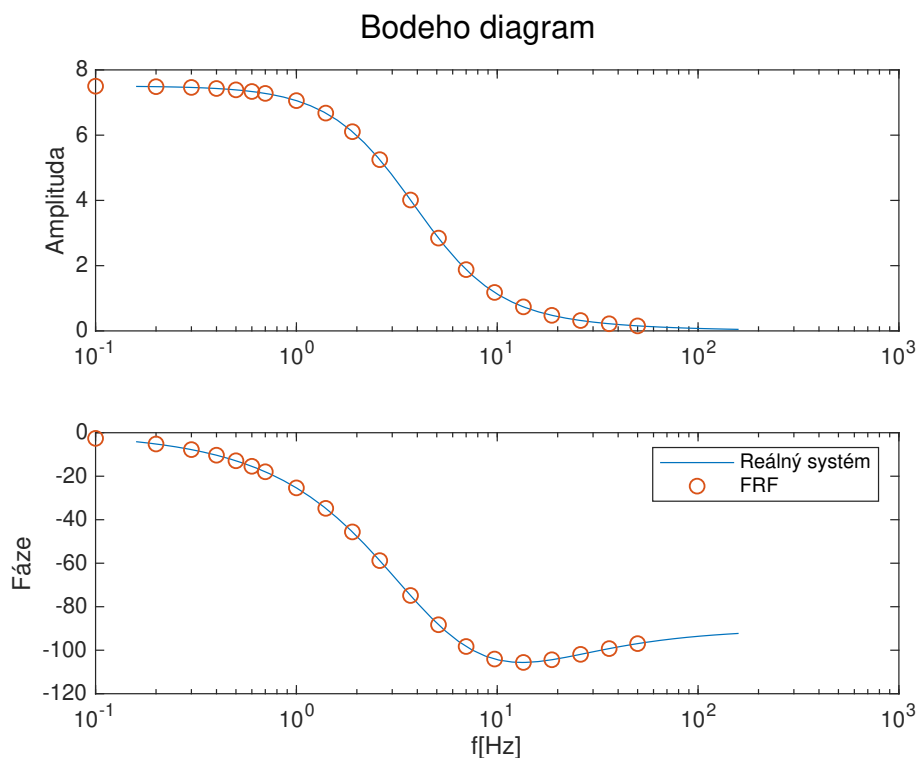
$$R = \sqrt{-\ln(1-p)}\sigma_G \quad (2.6)$$

Pokud tedy přidáme výstupní šum do předchozího příkladu, dokážeme získat vizuální přehled o přesnosti dat na zkoumaných frekvencích.

## 2.5 Parametrické odvození modelu

### 2.5.1 Kvalita odhadu parametrů - strannost, konsistence

Pro identifikační metody je rozumné zavést pojmy strannost, asymptotická strannost a konsistence odhadu. Aby byl odhad parametrů modelu nestranný, musí platit, že se jeho střední hodnota neodchyluje od skutečné hodnoty.



Obrázek 2.5: Bodeho diagram FRF dat

Tedy:

$$E[\hat{\Theta}] = \Theta_0, \quad (2.7)$$

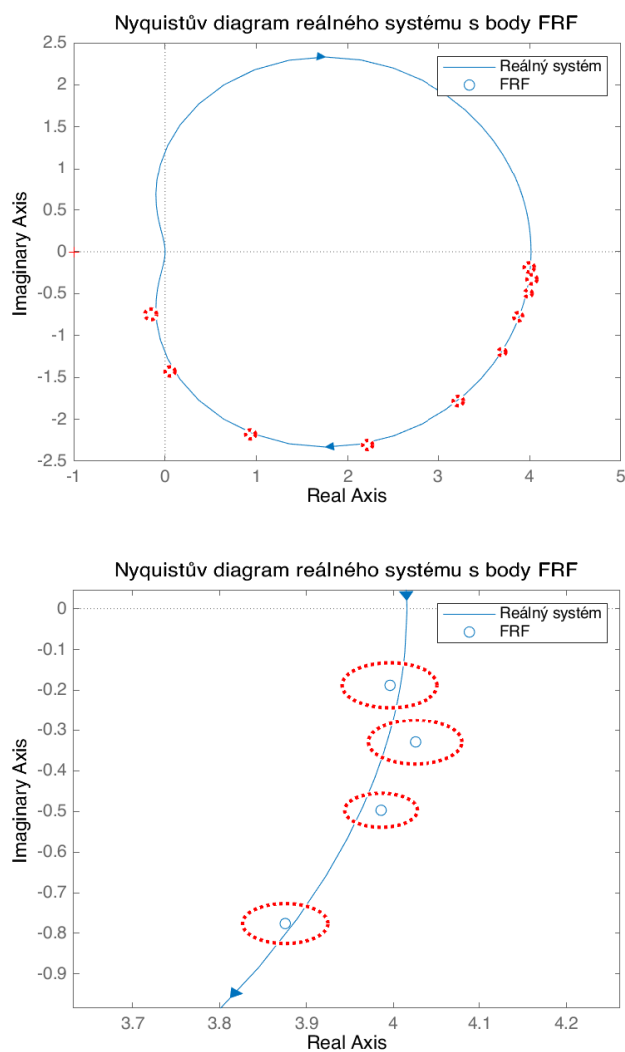
kde  $E$  je operátor střední hodnoty. V některých případech je strannost odhadu závislá na počtu dat, pomocí kterých systém identifikujeme. To znamená, že při konečném počtu dat je odhad parametrů stranný, mezitím co pro nekonečný počet dat je odhad nestranný. Z tohoto důvodu byla zavedena asymptotická strannost odhadu. Musí tedy platit, že:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\Theta}] = \Theta_0 \quad (2.8)$$

Dalším pojmem je konsistence odhadu, která je úzce spojená s asymptotickou nestranností. Kromě výše zmíněné podmínky však musí splňovat ještě jednu další, a to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D\hat{\Theta} = 0, \quad (2.9)$$

kde  $D$  je operátor diference. Tedy aby byl odhad konsistentní, musí se s narůstajícím počtem dat zužovat kolem hledaného parametru.



Obrázek 2.6: Confidence regions získaných FRF dat

## 2.5.2 Lineární nejmenší čtverce - LLS

Uvažujeme lineární časově invariantní systém s jedním vstupem  $u(k)$  a jedním výstupem  $y(k)$  s časovým posunem o  $k$  kroků  $q$  ve tvaru diferenční rovnice

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k). \quad (2.10)$$

Po použití Z-transformace jsme schopni získat jeho přenosovou funkci

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_b} b_k z^k}{\sum_{k=0}^{n_a} a_k z^k}, \quad (2.11)$$

kde  $b_k$  a  $a_k$  jsou koeficienty polynomů v čitateli a jmenovateli,  $n_b$  a  $n_a$  řády těchto polynomů a  $z$  je komplexní proměnná. Naším cílem je určit tyto koeficienty pomocí vektoru vstupů a výstupů, k čemu se ve velkém množství případů užívá lineární regrese. K tomuto účelu lze úlohu přepsat do tvaru s regresory:

$$y(t) = \phi^T(t)\Theta, \quad (2.12)$$

kde prvky vektoru  $\phi$  jsou tzv. regresory a  $\Theta$  jsou naše hledané parametry. Aby ze vztahu vycházelo jen jediné řešení, stačilo by použít stejný počet měření jako počet našich neznámých parametrů. Z důvodu přítomnosti šumů, poruch a také nedokonalosti modelu je však rozumné použít vyšší počet měření. Z tohoto důvodu je naše soustava lineárních rovnic přeuročena a má tedy více, než jedno řešení. Zavedeme tedy chybové kritérium, které nám určí vhodnost daného řešení soustavy. Základní vztah pro určení velikosti chyby v každém bodě měření je

$$e(t) = y(t) - \phi^T(t)\Theta. \quad (2.13)$$

Na základě tohoto vztahu se pak můžeme setkat s různými typy ztrátových funkcí. Jedna ze základních metod uvažuje ztrátovou funkci ve tvaru součtu kvadrátů těchto odchylek, tudíž jde o nejmenší čtverce:

$$V(\Theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N e^2(t) = \frac{1}{2} e^T e = \frac{1}{2} \|e\|_1^2 \quad (2.14)$$

Z definice v [5] vychází, že pokud je matice  $\Phi^T \Phi$  pozitivně definitní, má tato ztrátová funkce jediné minimum

$$\hat{\Theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y = \Phi^\dagger Y \quad (2.15)$$

s následující hodnotou ztrátové funkce

$$V(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2} [Y^T Y - Y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y], \quad (2.16)$$

kde  $(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$  se nazývá Moore-Penroseova pseudoinverze matice  $\Phi$ , ze které se stává klasická inverze v případě, kdy matice  $\Phi$  je čtvercová a regulární.

## Strannost odhadu

V realitě je vždy v signálu přítomný šum. Proto je rozumné se zabývat stranností odhadu. Z metody lineárních nejmenších čtverců lze získat asymptoticky nestranné odhady jen pro modely ve struktuře ARX, tedy:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + e(k) \quad (2.17)$$

Je dokázáno ([5]), že nejlepší nestranný odhad reálných parametrů (BLUE) je ve smyslu vážených nejmenších čtverců. Konkrétně pokud pro každé měření použijeme inverzi jeho variance. Znamená to, že pokud má dané měření velkou varianci (vysoká kontaminace šumem, nepřesná data), přiřkládáme mu tím pádem menší váhu. U přesných dat dochází k opačnému jevu.

### 2.5.3 Metoda chyby predikce - PEM

Metoda chyby predikce je jakési rozšíření metody nejmenších čtverců, jen pro složitější struktury modelů (např. ARMAX modely). Metoda je založena na výběru vektoru parametrů  $\Theta$  takovém, aby chyby predikce  $e(t, \Theta)$  byly minimální. Pro SISO systém můžeme vytvořit vektor chyb predikce v každém časovém okamžiku díky naměřeným datům a pomocí tohoto vektoru vytvořit naši ztrátovou funkci, kterou lze použít jako naše minimalizační kritérium:

$$V_N(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N h(t)e(t, \Theta)e^T(t, \Theta), \quad (2.18)$$

kde  $h(t)$  značí explicitní váhovou funkci pro dané chyby predikce.

Jeden z příkladů implementace chyby predikce je například metoda výstupní chyby (Output error method - OE), kde chybu predikce určíme jako rozdíl mezi měřeným výstupem a modelovaným deterministickým výstupem. Vypadá tedy následovně:

$$e(t, \Theta) = y(t) - G(s, \Theta)u(t) \quad (2.19)$$

Metoda chyby predikce bývá často aplikovaná iterativně numericky, a tím pádem je hledání extrému výpočetně velmi složité. Jelikož však nenese stejné omezení na strukturu modelu, jako tomu je u metody lineárních nejmenších čtverců, je také hojně využívána.

### 2.5.4 Metoda přídavné proměnné

Na rozdíl od metody nejmenších čtverců, kdy díky omezujícím podmínkám na strukturu modelu měla úloha vždy jen jeden extrém, metody přídavné

proměnné se snaží o nalezení jakéhokoliv nestranného odhadu parametrů. Jejím hlavním rozdílem je tedy možnost metodu aplikovat na širší množství systémů, stejně jako u výše zmíněné metody chyby predikce. Oproti chybě predikce je však jednorázová, a tak nepodléhá stejným výpočetním problémům. Pro následující strukturu modelu

$$y^T(t) = \varphi^T(t)\Theta_0 + v(t), \quad (2.20)$$

kde  $v(t)$  je bílý šum, požadujeme, aby pro  $N \rightarrow \infty$  platilo

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t)v(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t)[y(t) - \varphi^T(t)\Theta] = 0, \quad (2.21)$$

kde prvky  $\zeta(t)$  se nazývají instrumenty (přídavné proměnné). Z této rovnice lze snadno odvodit vztah pro základní odhad

$$\hat{\Theta} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t)\varphi^T(t) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t)y(t) \right] \quad (2.22)$$

Instrumenty mohou být vybírány různě, ale vždy musí zajišťovat konsistentní odhad parametrů. To znamená, že instrumenty musí být korelované s regresory, ale nesmí být korelovány se šumem. Jedním způsobem jak zvolit instrumenty je použít metodu lineárních nejmenších čtverců a lineární filtr.

### 2.5.5 Metoda lineárních nejmenších čtverců - frekvenční oblast

Úkolem identifikace ve frekvenční oblasti je, stejně jako v časové oblasti, získat parametry určitého modelu. Tento model může být spojitý  $F(s)$  nebo diskrétní  $F(z)$

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_b} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{n_a} a_k s^k}, F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_b} b_k z^k}{\sum_{k=0}^{n_a} a_k z^k} \quad (2.23)$$

Frekvenční přenos lze analyticky získat dosazením za komplexní proměnnou. Ve spojitém případě  $s = j\omega$ , v diskrétním  $z = e^{j\omega T}$ . Po dosazení ve spojitém případě:

$$H(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_b} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n_a} a_k (j\omega)^k} \quad (2.24)$$

Mohli bychom určit velikost chyby jako rozdíl měřené frekvenční odezvy a analytického přístupu.

$$e_k(\omega_k, \Theta) \triangleq h_k - H(\omega_k, \Theta) \quad (2.25)$$



s naměřenou frekvenční odezvou na  $k$ -té frekvenci  $h_k$ .

Bohužel při takovém přístupu je chyba  $e(\omega_k, \Theta)$  nelineární funkcí proměnné  $\Theta$ , a proto nejdříve vynásobíme pravou stranu rovnice jmenovatelem přenosu  $A(\omega)$ . Výsledný předpis pro chybu rovnice:

$$e_k(\omega_k, \Theta) \triangleq A(\omega_k, \Theta)h_k - B(\omega_k, \Theta) \quad (2.26)$$

Chybu rovnice následně můžeme použít do předpisu ztrátové funkce, kterou se budeme snažit minimalizovat, pro obdržení optimálních parametrů modelu:

$$V_{LS}(\Theta) = \sum_{k=1}^F |e_k(\omega_k, \Theta)|^2 \quad (2.27)$$

V [2] je dokázáno, že tato linearizace má 2 problémy. Prvním z nich je zdůrazňování šumu na vysokých frekvencích kvůli přiřazení stejné váhy všem měření a špatná podmíněnost v soustavě normálních rovnic. V obecném případě je tedy metoda lineárních nejmenších čtverců nekonzistentní. Výjimka nastává, pokud přítomný šum je nezávislý na parametrech  $\Theta$ .

### 2.5.6 Metoda vážených lineárních nejmenších čtverců

Z výše zmíněných důvodů je rozumné použít nějakou formu vážení našich měření. Z tohoto důvodu musíme kritérium změnit na novou podobu:

$$V_{WLS}(\Theta) = \sum_{k=1}^F e_k^H(\omega_k, \Theta) \cdot w_k^2 \cdot e_k(\omega_k, \Theta), \quad (2.28)$$

kde  $w_k$  je váha pro chybu rovnice na frekvenci  $\omega_k$  a  $H$  značí Hermitovskou transpozici. Výběr vhodné váhové funkce závisí vždy na dané úloze, ale existují dvě běžné situace, kvůli kterým chceme využít váhové funkce - zaměření se na dané frekvenční pásmo a potlačení nepřesných měření. Pokud máme k dispozici varianci FRF dat (například díky využití periodického signálu), můžeme jako váhu použít inverzi jejich variancí, a tak přiřadit nižší váhu více zašuměným datům. Dále pro účely numerické simulace a dosažení maximální robustnosti ve stabilitě v automatizaci je možné pro váhy použít například exponenciálu, či jinou funkci.

### 2.5.7 Metoda iterativních lineárních nejmenších čtverců

Jedna z možností, jak vylepšit výsledky z předchozích metod, je použít iterativní variantu. V každé iteraci vydělíme chybu rovnice jmenovatelem odhadu

minulé iterace, abychom dosáhli lepšího výsledku.

$$V_{ILS}^{(i)}(\Theta^{(i)}) = \sum_{k=1}^F \frac{|e_k(\omega_k, \Theta^{(i)})|^2}{|A(\omega_k, \Theta^{(i-1)})|^2} \quad (2.29)$$

Je ukázáno, že při dostatečně vysokém počtu iterací konverguje tato ztrátová funkce ke ztrátové funkci nelineárních nejmenších čtverců. Bohužel, ani při tomto přístupu nemůžeme zaručit konsistenci odhadů.

### 2.5.8 Metoda iterativních vážených lineárních nejmenších čtverců

Jedná se o obecnější formu předchozího případu, kde místo jmenovatele přenosu vážíme odhad v dané iteraci libovolnou váhovou funkcí.

$$V_{IWLS}^{(i)}(\Theta^{(i)}) = \sum_{k=1}^F w_k^2(\omega_k, \Theta^{(i-1)}) |e_k(\omega_k, \Theta^{(i)})|^2 \quad (2.30)$$

Z kritéria lze vypožorovat, že při zvolení váhové funkce

$$w_k(\omega_k, \Theta^{(i-1)}) = \frac{1}{|A(\omega_k, \Theta^{(i-1)})|^r} \quad (2.31)$$

lze získat předešlé speciální případy, a to LLS pro  $r = 0$  a ILS pro  $r = 1$ .

### 2.5.9 Nelineární optimalizace nejmenších čtverců

Dalším způsobem, jak získat co nejpřesnější odhady parametrů  $\Theta$ , je nenásobit chybu rovnice jmenovatelem přenosu, ale použít numerické metody k určení minima ztrátové funkce. K numerickému řešení lze použít například Gauss-Newtonovu minimalizační numerickou metodu. Jedná se o Newtonovu metodu speciálně upravenou pro řešení nelineární regrese. Jako základ lze tedy použít chybu rovnice ve tvaru rozdílu měřeného výstupu a analyticky spočteného výstupu. Je ale ukázáno, že i při použití numerické minimalizace jsou odhady stranné. Lepší způsob, jak získat konsistentní odhady, je použít výše definovanou chybu rovnice jako rozdíl přenosových funkcí místo rozdílu výstupů:

$$V_{NLS}(\Theta) = \sum_{k=1}^F |h_k - H(\omega_k, \Theta)|^2 \quad (2.32)$$

K počátečnímu odhadu potřebnému k nelineární optimalizaci lze znovu použít metodu LLS nebo IWLS.

Stejně jako u předchozích příkladů, i u nelineárních nejmenších čtverců lze použít váženou variantu. Způsob vážení a typy váhových funkcí jsou ale stejné, a tak zde nebudou znovu probírány.

### 2.5.10 Stochasticky optimální odhad metodou maximální věrohodnosti

Algoritmus maximální věrohodnosti uvažuje Gaussovský stacionární šum na vstupu i výstupu, který vytváří cirkulárně komplexní Gaussovské rozdělení. V tomto případě je rozumné sestojit řešení maximální věrohodnosti s pomocí variancí výstupní ve tvaru

$$V_{ML}(\Theta) = \sum_{k=1}^F \frac{|e_k(\omega_k, \Theta)|^2}{\sigma_e^2(\omega_k, \Theta)}, \quad (2.33)$$

kde  $\sigma_e^2(\omega_k, \Theta)$  je variance chyby rovnice, u které jsou měření zaměněná za jejich šum. Varianci chyby rovnice získáme díky našemu dříve získanému neparametrickému modelu šumu následujícím vztahem

$$\begin{aligned} \sigma_e^2(\omega_k, \Theta) = & \sigma_Y^2(k)|A(\omega_k, \Theta)|^2 + \sigma_U^2(k)|B(\omega_k, \Theta)|^2 \\ & - 2RE(\sigma_{YU}^2(k)A(\omega_k, \Theta)\bar{B}(\omega_k, \Theta)) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Minimum takovéto funkce je nutné řešit numericky kvůli zřejmé nelinearitě v parametrech  $\Theta$ . Pokud však definujeme chybu rovnice jako rozdíl přenosové funkce a FRF dat (2.25), vztahy se zjednoduší a můžeme uvažovat variance FRF dat také jako varianci chyby rovnice. Úloha tedy přejde na nelineární nejmenší čtverce, které lze znovu přepsat na iterační formu s váhou

$$w_k(\omega_k, \Theta^{(i-1)}) = \frac{1}{|A(\omega_k, \Theta^{(i-1)})| \cdot \sigma_H(k)}, \quad (2.35)$$

kde  $\sigma_H(k)$  je směrodatná odchylka naměřené frekvenční odezvy, tedy

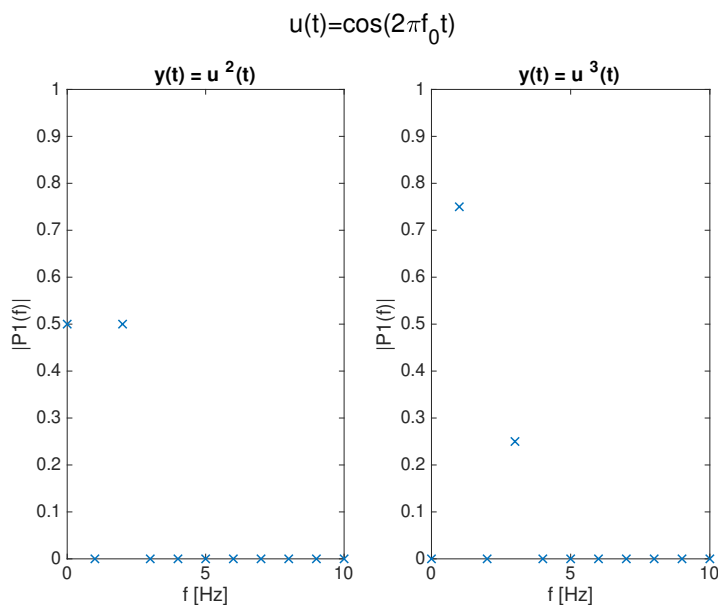
$$\sigma_H(k) = \sqrt{\sigma_H^2(k)}$$

získané v rovnici 2.5. Kvůli předpokladům je tento odhad stochasticky optimální ve smyslu ML jen když opravdu jde o Gaussovské šumy. Pokud jde o negaussovské šumy, které ale mají nulovou střední hodnotu, je výsledkem Markovský estimátor. Pro obecné šumy jde jenom o speciální variantu NLS. I v nejhorším případě však estimátor obsahuje informaci o nepřesnostech měření a měl by tedy dosahovat obecně lepších výsledků.

## 2.6 Slabě nelineární systémy

### 2.6.1 Stacionární nelineární systémy

Odezva stacionárních nelineárních systémů na periodický signál je, stejně jako u lineárních systémů, znovu periodický signál. Hlavním rozdílem u stacionárních nelineárních systémů je možnost přenést energii z frekvence budící na ostatní frekvence. Z experimentů vybuzení jednoduchým sinusovým signálem lze snadno zjistit, že pokud se jedná o stacionární nelineární systému typu sudé funkce, energie jsou rozprostřené po sudých násobcích původní budící frekvence  $f_0$ , zatímco u lichých funkcí se energie nachází na lichých násobcích  $f_0$ . Na následujícím grafu je vidět účinek nelineárního systému typu sudé ( $y = u^2(t)$ ) a liché ( $y = u^3(t)$ ) funkce s harmonickým vstupem.



Obrázek 2.7: Jednostranné amplitudové spektrum odezvy stacionárních nelineárních systémů na harmonický signál s frekvencí 1Hz

Vidíme, že v případě sudé funkce se energie vstupního signálu rozdělila mezi sudé násobky původní frekvence  $f_0 = 1\text{Hz}$  - čili  $f_1 = 0 \cdot f_0\text{Hz} = 0\text{Hz}$  a  $f_2 = 2 \cdot f_0\text{Hz} = 2\text{Hz}$ . V případě liché funkce se energie rozdělila mezi liché násobky  $f_0$ , tedy  $f_1 = 1 \cdot f_0\text{Hz} = 1\text{Hz}$  a  $f_2 = 3 \cdot f_0\text{Hz} = 3\text{Hz}$ . Tento princip funguje u jakékoliv liché či sudé funkce. Jediným rozdílem je rozdělení energie mezi vyšší harmonické frekvence.

Stejný princip lze použít na vstupní signál typu Multisine. Je ukázáno, že pokud se náš budící signál skládá pouze z lichých násobků frekvence  $f_0$ , výstupní signály obsahují pouze liché násobky  $f_0$  pro liché systémy a pouze sudé násobky  $f_0$  pro sudé systémy. Pokud se však vstupní signál skládá ze všech harmonických násobků frekvencí, jeho odezva obsahuje také všechny harmonické frekvence.

## 2.6.2 Dynamické nelineární systémy

Pro naše účely se z celé množiny nelineárních systémů zaměříme pouze na ty, u kterých se vliv počátečních podmínek asymptoticky blíží k nule a zároveň jejich ustálená odezva na periodický signál je také periodický signál se stejnou periodou. Budeme je nazývat PISPO systémy (period in same period out). Obecně je totiž odezva nelineárního systému nepředvídatelná a pro trochu jiné počáteční podmínky může mít naprosto jiný průběh (chaotické chování), popřípadě není obecně zaručena periodická odezva. Důvodem může být existence několika stabilních řešení nebo cyklů.

Při vybuzení PISPO systému signálem typu multisine získáme stejné výsledky, jako u systému statického. Tedy pokud budící signál obsahuje pouze liché harmonické násobky frekvence  $f_0$ , odezva se bude skládat pouze z lichých/sudých násobků této frekvence. Typ násobků znovu záleží na lichosti/sudosti nelineárního systému.

## 2.6.3 Nejlepší lineární aproximace

Jak již bylo řečeno, hlavním rozdílem při přípravě experimentu pro slabě nelineární systémy je vytvořit vstupní multisine signál, který obsahuje pouze liché násobky nejnižší frekvence  $f_0$ . Po určení frekvenčních složek provedeme experiment minimálně 7x, vždy s náhodnými fázemi rovnoměrně rozloženými v intervalu  $\Phi \in [0; 2\pi)$ . Frekvenční odezvu nejdříve zprůměrujeme přes všechny odměřené periody v ustáleném stavu a následovně přes všechna měření. Díky tomuto přístupu můžeme zároveň získat i velmi cenné variance FRF dat a tím pádem ověřit jejich přesnost, popřípadě určit nonlinearity.

Dalším způsobem je, místo několika měření s náhodnými fázemi, použít měření pouze jedno, ale vynechat některé frekvenční složky. Tato metoda je však méně robustní, a tak se jí v této práci nebudu zabývat.

# Kapitola 3

## Popis řešení

### 3.1 Program pro porovnání identifikačních metod

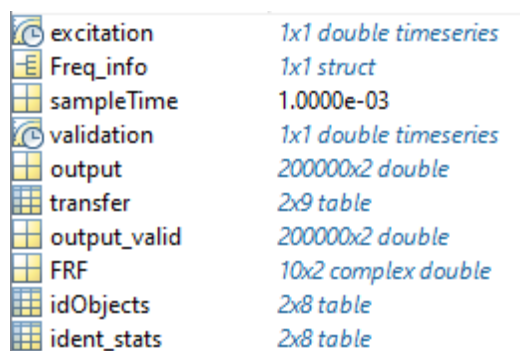
Pro simulaci všech částí systémové identifikace a následné porovnání výsledků jsem vytvořil program v prostředí Matlab. Tento program se dělí na následující části:

- Generování vstupního a validačního signálu s požadovaným rozložením frekvencí
- Generování přenosových funkcí s požadovanou strukturou a simulace jejich odezvy na oba signály
- (Import výstupů naměřených na reálných systémech v podobě Time-Series objektu)
- Získání Fourierovy transformace a statistik šumů
- Parametrická identifikace za použití všech (nebo jen některých) implementovaných metod
- Ověření identifikovaných přenosů - vypočtení implementovaných kritérií

Program si předává strukturu, ve které se uchovávají všechny důležité informace a výsledky testů pro jednoduché zpřístupnění a případnou rekonstrukci experimentu.

## 3.2 Hlavní struktura programu

Jak bylo řečeno, hlavní jádro je proměnná typu *struct*, kterou si postupně všechny části programu předávají. Z této implementace vychází, že aby dílčí funkce správně se strukturou pracovaly, musí struktura projít všemi předchozími částmi a obsahovat tak jejich výstupy. Díky pracování se strukturou se zjednoduší volání funkcí, které by jinak měly spoustu opakujících se parametrů (např. perioda vzorkování, vybuzené frekvence, odezvy, atd.). Naplněná struktura po běžném průchodu programu vypadá následovně:



|              |                       |
|--------------|-----------------------|
| excitation   | 1x1 double timeseries |
| Freq_info    | 1x1 struct            |
| sampleTime   | 1.0000e-03            |
| validation   | 1x1 double timeseries |
| output       | 200000x2 double       |
| transfer     | 2x9 table             |
| output_valid | 200000x2 double       |
| FRF          | 10x2 complex double   |
| idObjects    | 2x8 table             |
| ident_stats  | 2x8 table             |

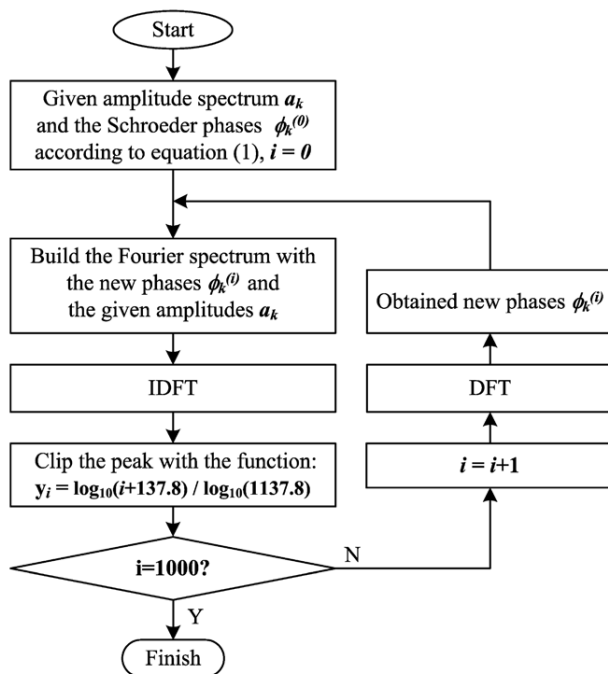
Obrázek 3.1: Naplněná struktura po průchodu programem

- **excitation/validation** identifikační/validační vstupní signál
- **transfer** vygenerované přenosové funkce a jejich identifikované modely
- **output/output\_valid** simulovaná odezva systémů na identifikační/validační vstupní signál
- **FRF** frekvenční data sloužící k identifikaci systému
- **sampleTime** perioda vzorkování signálů
- **Freq\_info** informace získané při generování vstupního signálu sloužící ke správné Fourierově transformaci (počet period signálu, modely šumů, atd.)
- **idObjects** výstupy z Matlab identifikačních metod (nedůležité k běhu programu)
- **ident\_stats** kritéria definující správnost identifikace dílčích metod

### 3.3 Generování vstupních signálů

Usooudil jsem za vhodné soustředit se na 'multisine' signály, kvůli jejich jednoduchosti a přesnosti, pokud jde o Fourierovu transformaci. Programové rozhraní jsem tedy vytvářel především pro tyto typy signálů, ale lze použít vstupní signál jakýkoliv. Při vytváření signálu si uživatel zvolí počet period, po které se signál bude opakovat, počet sinusoid, ze kterých se vstupní signál má skládat a informace o jejich frekvencích. Těmito informacemi jsou jejich spodní a vrchní limita a měřítko (lineární či logaritmické rozložení frekvencí). Funkce pak pomocí těchto parametrů vygeneruje frekvence mezi danými limity s požadovaným rozložením, které však odpovídají všem požadavkům bezchybné Fourierovy transformace. Především tedy požadavek, aby všechny budící frekvence obsažené v signálu byly násobkem první, čili nejnižší frekvence z nich.

Po získání požadovaných frekvencí přejde funkce do zjištění optimálních fází každé složky pro získání co nejnižšího Crest Faktoru. K tomu dochází pomocí speciálního algoritmu navrženém v [3], který vychází ze Schroederových fází a následně hledá lokální řešení pomocí dopředné a zpětné rychlé Fourierovy transformace a zastříhávací funkce.



Obrázek 3.2: Diagram znázorňující použitý algoritmus na min CF - zdroj [3]



### 3.4 Generování přenosových funkcí

Pro testovací účely je možné v programu generovat libovolný počet přenosových funkcí, na kterých se testují identifikační metody. Přenosové funkce se generují z rovnoměrného rozdělení pomocí intervalů, ve kterých se mají nacházet nuly, póly a zesílení systému. Přenosové funkce vyšších řádů se pak generují více intervaly poskládaných za sebou v poli. Pro komplexně sdružené nuly nebo póly se meze intervalů zadávají jako komplexní čísla, kde reálná část komplexně sdružených pólů se generuje z reálné složky mezi intervalů, mezitím co imaginární část je generována z komplexní složky intervalů. Pro každý jeden komplexní interval se vygenerují oba komplexně sdružené póly/nuly. Zesílení se také zadává intervalem. Funkčnost je demonstrována následovně:

```
TFnuly = {[-20, -50], [-50, -100]};  
TFpoly = {[-20, -50], [-30 + 10j, -70 + 30j]};  
TFK = [30 50];
```

Po použití parametrů:

```
TF =
```

$$\frac{40.429 (s+41.35) (s+86.85)}{(s+22.64) (s^2 + 106.1s + 3253)}$$

```
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
>> pole(TF)
```

```
ans =
```

```
-22.6434 + 0.0000i  
-53.0327 +20.9842i  
-53.0327 -20.9842i
```

Obrázek 3.3: Způsob generování přenosových funkcí

Po vytvoření přenosových funkcí se pro každou z nich simulují odezvy na vstupní i validační signál a oba signály jsou upraveny podle požadavků. Jde

o přidání výstupní poruchy ve formě šumu s požadovaným rozdělením (normální, či rovnoměrné rozdělení) a následně o případnou kvantizaci signálů v hodnotách. Obě úpravy je možné definovat zároveň s parametry pro generování přenosových funkcí. Pro výši šumu se používá parametr *NoiseValue*, který u normálního rozdělení má vlastnost směrodatné odchylky a u rovnoměrného rozdělení dolní a horní mez (tedy šum se nachází v intervalu  $[-NV, NV]$ ). Následně jsou přenosové funkce a odezvy uloženy do hlavní struktury programu. Všechny přenosové funkce v programu jsou uloženy ve formátu ZPK (zero-pole-gain), u kterého Matlab ukládá hodnoty jednotlivých kořenů místo hodnot koeficientů polynomů čitatele a jmenovatele. Při ukládání v klasickém formátu TF s koeficienty totiž dochází u vysokých řádů modelů k velkým hodnotám koeficientů a tedy ke ztrátě informace kvůli numerické přesnosti počítače.

### 3.5 Import experimentální odezvy

Pokud jde o identifikaci reálného systému, a máme k dispozici jeho experimentální odezvu na generovaný vstupní signál, lze tento signál také použít v programu pro jeho identifikaci. Jde tedy o náhradu přístupu generování přenosových funkcí a následné simulaci jejich odezvy. Pro identifikaci systému z experimentální odezvy se vřele doporučuje použít i validační signál, který běžně v programu není povinné použít.

## 3.6 Identifikační metody

Hlavním účelem bylo vytvořit program pro snadné otestování všech potřebných metod v časové i frekvenční oblasti a především zobecnit vstupní a výstupní parametry všech metod. Vytvořil jsem tedy část parametrické identifikace v programu tak, aby bylo možné implementovat jak běžné metody System Identification toolboxu, tak vlastní bez nutnosti složité implementace nové metody.

Jelikož se v této práci zaměřuji na metody ve frekvenční oblasti, jedná se v časové oblasti především o běžně používané parametrické metody ze System Identification toolboxu. Všechny použité metody mají sice jinou strukturu, ale vstupní parametry jsou mezi sebou převoditelné. Jako vstup do metod jsem tedy zvolil řády polynomů BJ struktury, ze kterých si pak každá metoda převezme vlastní vstupní parametry.

### 3.6.1 Časová oblast

#### **ssest**

Metoda určená k odhadnutí stavového popisu hledaného modelu. Vnitřně používá komponentovou analýzu pro počáteční odhad a následně iterativní metodu chyby predikce pro určení bližšího odhadu.

#### **tfest**

Metoda pro odhad pouze přenosové funkce. Při základním použití využívá algoritmus přídavné proměnné, ale je možné i využít například nelineární optimalizaci s počátečním odhadem LLS.

#### **arx**

Využívá QR rozklad pro řešení soustavy lineárních rovnic ve smyslu lineárních nejmenších čtverců pro model typu ARX.

#### **armax**

Iterativní algoritmus, který minimalizuje kritérium ve smyslu chyby predikce pro ARMAX model.

oe

Jde o interpretaci metody výstupní chyby, tedy o speciální příklad metody chyby predikce pro odhadnutí OE modelu.

bj

Odhaduje přenosovou funkci Box-Jenkins struktury. K tomu se využívají numerické metody na minimalizaci NLS nebo ML kritéria.

### 3.6.2 Frekvenční oblast

Ve frekvenční oblasti jsem vyzkoušel techniky lineárních nejmenších čtverců v základní, vážené a iterativní variantě. Vycházel jsem z postupu popsáném v [4] pro implementaci základní varianty v maticové podobě a následně jí upravil pro ostatní varianty.

### 3.6.3 Lineární nejmenší čtverce - základní varianta

Nejdříve je důležité definovat chybu rovnice pro dříve vybranou formu přenosové funkce 2.24

$$H(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^n a_k(j\omega)^k}, \quad (3.1)$$

kde zafixujeme člen  $a_n$  na jednotku. Chybu rovnice jsem definoval v každém bodě naměřené frekvenční charakteristiky:

$$e_i = \sum_{k=0}^m b_k(j\omega_i)^k - h_i \left[ \sum_{k=0}^n a_k(j\omega_i)^k + (j\omega_i)^n \right] \quad (3.2)$$

Pokud sepíšeme tyto odchylky pro každou frekvenci pod sebe do vektoru, jsme schopni odvodit následný maticový vztah:

$$E = P \cdot B - T \cdot A - W \quad (3.3)$$

s koeficienty přenosu B a A a následujícími maticemi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & j\omega_1 & (j\omega_1)^2 & \cdots & (j\omega_1)^m \\ 1 & j\omega_2 & (j\omega_2)^2 & \cdots & (j\omega_2)^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & j\omega_L & (j\omega_L)^2 & \cdots & (j\omega_L)^m \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$T = \begin{bmatrix} h_1 & h_1 j\omega_1 & h_1 (j\omega_1)^2 & \cdots & h_1 (j\omega_1)^{n-1} \\ h_2 & h_2 j\omega_2 & h_2 (j\omega_2)^2 & \cdots & h_2 (j\omega_2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_L & h_L j\omega_L & h_L (j\omega_L)^2 & \cdots & h_L (j\omega_L)^{n-1} \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} h_1 (j\omega_1)^n \\ h_2 (j\omega_2)^n \\ \vdots \\ h_L (j\omega_L)^n \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

kde  $h(k)$  je naše naměřená frekvenční odezva na  $k$ -té frekvenci a  $L$  celkový počet měřených vzorků/frekvencí. Tato cenová funkce má pouze jedno minimum, které lze získat vyřešením soustavy o  $n+m+1$  lineárních rovnic. V maticové podobě je naším úkolem vyřešit následující rovnici:

$$\begin{bmatrix} Y & \vdots & X \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ X^t & \vdots & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ \cdots \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ \cdots \\ F \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

s maticemi

$$[X] = -Re([P^*]^t [T]) \quad (3.7)$$

$$[Y] = Re([P^*]^t [P]) \quad (3.8)$$

$$[Z] = Re([T^*]^t [T]) \quad (3.9)$$

$$[G] = Re([P^*]^t [W]) \quad (3.10)$$

$$[F] = -Re([T^*]^t [W]) \quad (3.11)$$

Z numerických důvodů je velmi důležité upravit tento postup několika způsoby, neboť obecně soustava rovnic není dobře podmíněná.

První z úprav je škálování v čase a hodnotách. Toho dosáhneme tím, že před spuštěním metody znormalizujeme všechny frekvence a FRF data tak, aby obě hodnoty ležely v intervalu  $[0; 1]$ . Tedy vydělíme všechny frekvence nejvyšší z jejich hodnot a FRF vzorky jejich největší absolutní hodnotou. Po průběhu metody musíme samozřejmě znovu výsledky denormalizovat.

## LLS - ortogonální polynomy

Jak již bylo řečeno v minulé kapitole, u vyšších řádů metoda selhává i při využití normalizace frekvencí a hodnot. Z tohoto důvodu je rozumné přeformulovat polynomy čitatele a jmenovatele v 2.24 ve smyslu jiné báze. Touto bází tedy zvolíme speciálně vytvořené ortogonální polynomy, jak je popsáno v [4].

Tato metoda využívá informace, že frekvenční odezva pro kladné frekvence existuje také pro frekvence záporné. Dokonce je frekvenční odezva záporných

frekvencí pouze zrcadlená odezva frekvencí kladných. Toto tvrzení můžeme vidět například při vykreslení Nyquistova diagramu, kde je zrcadlení zřejmé.

Díky zrcadlení lze ortogonální polynomy rozdělit na dvě části podle počátku a zabývat se pouze kladnou částí bez ztráty potřebných vlastností záporné části. Přenosovou funkci tedy můžeme přepsat na tvar s ortogonálními polynomy:

$$H(\omega_i) = \frac{\sum_{k=0}^m d_k \varphi_{i,k}^+}{\sum_{k=0}^n c_k \theta_{i,k}^+} \quad (3.12)$$

Kritérium se následně změní na tvar:

$$E = P \cdot D - T \cdot C - W \quad (3.13)$$

s koeficienty ortogonálních polynomů D a C a následujícími maticemi

$$P = \begin{bmatrix} \varphi_{1,0}^+ & \varphi_{1,1}^+ & \varphi_{1,2}^+ & \cdots & \varphi_{1,m}^+ \\ \varphi_{2,0}^+ & \varphi_{2,1}^+ & \varphi_{2,2}^+ & \cdots & \varphi_{2,m}^+ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{L,0}^+ & \varphi_{L,1}^+ & \varphi_{L,2}^+ & \cdots & \varphi_{L,m}^+ \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$T = \begin{bmatrix} h_1 \theta_{1,0}^+ & h_1 \theta_{1,1}^+ & h_1 \theta_{1,2}^+ & \cdots & h_1 \theta_{1,n-1}^+ \\ h_2 \theta_{2,0}^+ & h_2 \theta_{2,1}^+ & h_2 \theta_{2,2}^+ & \cdots & h_2 \theta_{2,n-1}^+ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_L \theta_{L,0}^+ & h_L \theta_{L,1}^+ & h_L \theta_{L,2}^+ & \cdots & h_L \theta_{L,n-1}^+ \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} h_1 \theta_{L,n}^+ \\ h_2 \theta_{L,n}^+ \\ \vdots \\ h_L \theta_{L,n}^+ \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

Díky volbě ortogonálních polynomů se velice zjednoduší soustava lineárních rovnic na tvar s jednotkovými maticemi:

$$\begin{bmatrix} I & \vdots & X \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ X^t & \vdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ \cdots \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

s maticemi

$$[X] = -Re([P^*]^t [T]) \quad (3.17)$$

$$[H] = Re([P^*]^t [W]) \quad (3.18)$$

Díky této úpravě jsme schopni koeficienty ortogonálních polynomů čitatele a jmenovatele vypočítat odděleně:

$$[I - X^t X] C = -X^t H \quad (3.19)$$

$$D = H - X D \quad (3.20)$$

Nyní když máme postup výpočtu, stačí určit způsob sestavení ortogonálních polynomů. Hledáme polynomy, které budou splňovat následující podmínky:

$$\sum_{i=1}^L (\varphi_{i,k}^+)^* (\varphi_{i,j}^+) = \begin{cases} 0.5, & \text{pokud } k = j \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\sum_{i=1}^L (\theta_{i,k}^+)^* |h_i|^2 (\theta_{i,j}^+) = \begin{cases} 0.5, & \text{pokud } k = j \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.22)$$

Ve výše citovaném článku od Formentiho [4] je také zmíněna Forsythova metoda, která se dopodrobna zabývá generováním hodnot ortogonálních polynomů pro numerické řešení.

### 3.6.4 Vážené nejmenší čtverce

Pro testovací účely jsem zvolil dvě zmíněné varianty vážení pro LLS. První z nich je exponenciální vážení, kdy přiřadíme vyšší váhu měřením na nižších frekvencích. Druhá implementovaná varianta je pomocí získaných variancí měření díky periodickému buzení. Jako váhy měření tedy zvolíme jejich inverzi. Obě tyto metody vycházejí z verze LLS s ortogonálními polynomy, kde pro aplikování vlastní váhy stačí vynásobit matice P, T a W vektorem váhy. Zároveň musíme dbát na to, aby polynomy byly stále ortogonální. Musí tedy splňovat nové podmínky (L je rovné počtu polynomů):

$$\sum_{i=1}^L (\varphi_{i,k}^+)^* w_i^2 (\varphi_{i,j}^+) = \begin{cases} 0.5, & \text{pokud } k = j \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\sum_{i=1}^L (\theta_{i,k}^+)^* (w_i \cdot |h_i|)^2 (\theta_{i,j}^+) = \begin{cases} 0.5, & \text{pokud } k = j \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.24)$$

### 3.6.5 Iterované vážené nejmenší čtverce

Iterovanou variantu nejmenších čtverců jsem implementoval tak, jak je popsáno v [2]. Jako počáteční odhad jsem zvolil výše zmíněný odhad LLS. Následně v každé iteraci odhadneme parametry znovu, tentokrát s váhou rovné  $w = \frac{1}{|A(\omega, \theta_{i-1})|^r}$ . Díky parametru  $r$  můžeme zároveň do metody přidat váhu ve smyslu relaxace kritéria. Pro  $r = 0$  získáme základní metodu LLS, mezitím co při volbě  $r = 1$  získáme neváženou iterativní metodu nejmenších čtverců. Volil jsem jak variantu s  $r = 1$  pro ILS, tak i relaxovanou IWLS variantu s  $r = 0.8$ . Následně je implementována metoda ML stejným způsobem, jen s váhou  $w = \frac{1}{|A(\omega, \theta_{i-1})|_{\sigma_H}}$  (viz. teoretická část).

### 3.7 Validace identifikovaných modelů

Pro otestování správnosti identifikovaných modelů je důležité porovnat výsledky s naměřenými daty v co nejvíce ohledech. Z tohoto důvodu jsem v této části implementoval porovnání přenosů v časové i frekvenční oblasti.

V časové oblasti nejdříve program vypočte vektor chyby - odchylka identifikačního výstupního signálu a simulovaného signálu ze zkoumaného odhadu přenosu. Z tohoto vektoru chyby následně vypočte jeho střední hodnotu, nekonečnou normu, peak-to-peak hodnotu a procentuální shodu signálů pomocí normalizované efektivní hodnoty podle kritéria:

$$NRMSE = \frac{\|xref - x\|}{\|xref - mean(xref)\|}, \quad (3.25)$$

kde  $\|\cdot\|$  definuje kvadratickou normu,  $xref$  je odezva pravého systému a  $x$  simulovaná odezva identifikovaného modelu. Tento postup se provede jak pro signál použitý k identifikaci, tak i pro validační signál, je-li k dispozici.

Následuje ověření ve frekvenční oblasti. K tomu ale dochází pouze pokud se jedná o uměle vygenerovaný systém - čili jsme schopni zjistit pravé hodnoty frekvenční odezvy. Pro otestování modelů musíme nejdříve určit, pro jaké frekvence budeme modely testovat. To určíme pomocí dolní a horní meze frekvenčního pásma a typem rozložení (logaritmické/ekvidistantní). Program následně vygeneruje vektor frekvencí a pro tyto frekvence vypočte frekvenční odezvu generovaného a identifikovaného přenosu. Pomocí těchto odezev lze také získat vektor chyb, pro který program znovu vypočte nekonečnou normu a procentuální shodu.



# Kapitola 4

## Shrnutí výsledků implementace

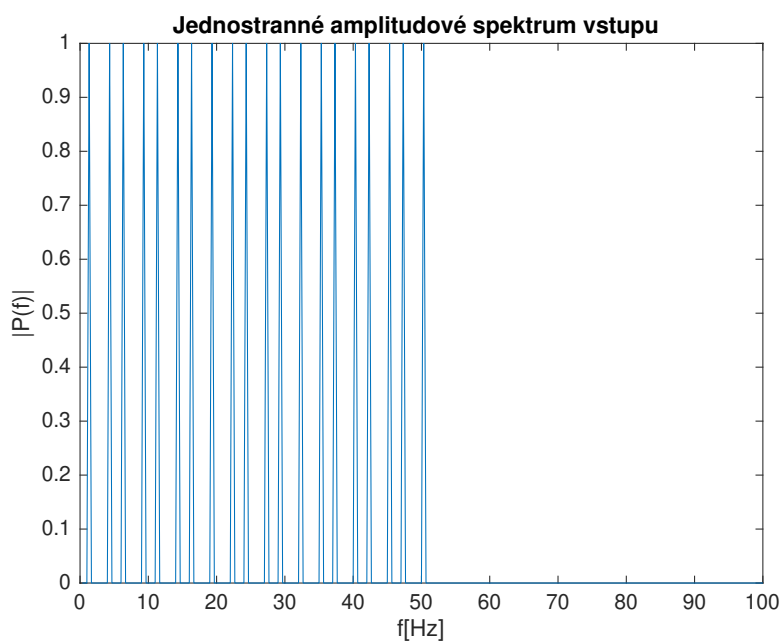
### 4.1 Vstupní signál

Jak bylo zachyceno v předchozí kapitole, ve vstupních signálech jsem se zaměřil na periodické signály typu multisine se zvoleným rozložením a pásmem frekvencí. Amplitudové spektrum jsem volil ploché (stejná amplituda všech budících frekvenčních složek) a pro optimální fáze jsem využil speciální iterativní algoritmus navržen v [3].

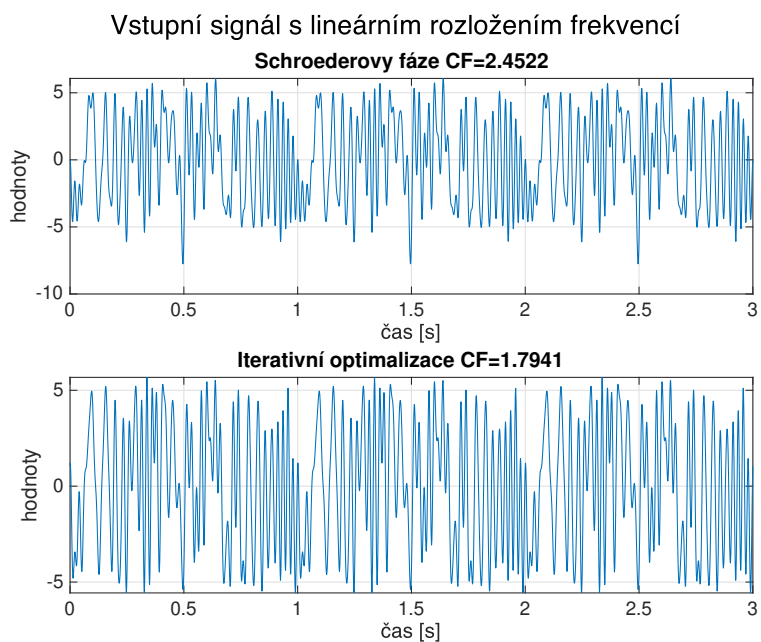
Pro interpretaci rozdílu mezi použitím základních fází a iterativně optimalizovaných fází jsem vytvořil vstupní signál bez šumu se třemi periodami a lineárním rozložením frekvencí mezi 1-50Hz. Při práci s frekvencemi v automatickém řízení však může být vhodné využít logaritmické rozložení, aby nedocházelo k upřednostňování vyšších frekvencí. Ověřil jsem tedy funkčnost iterativního přístupu i u tohoto případu.

Z následujících grafů je vidět, že iterativně volené fáze opravdu dosahují nižších hodnot crest faktoru při lineárním i logaritmickém rozložení frekvencí. Po testování jiných rozmezí frekvencí vstupního signálu jsem došel k závěru, že při použití pouze Schroederových fází bez následné iterativní optimalizace dosahuje lineární rozložení nižších hodnot CF, než je tomu u pseudo-logaritmického rozložení (toto vychází z odvození Schroederových fází v [3]). Tento rozdíl v CF je však odstraněn při použití zmíněné iterativní ořezávací funkce.

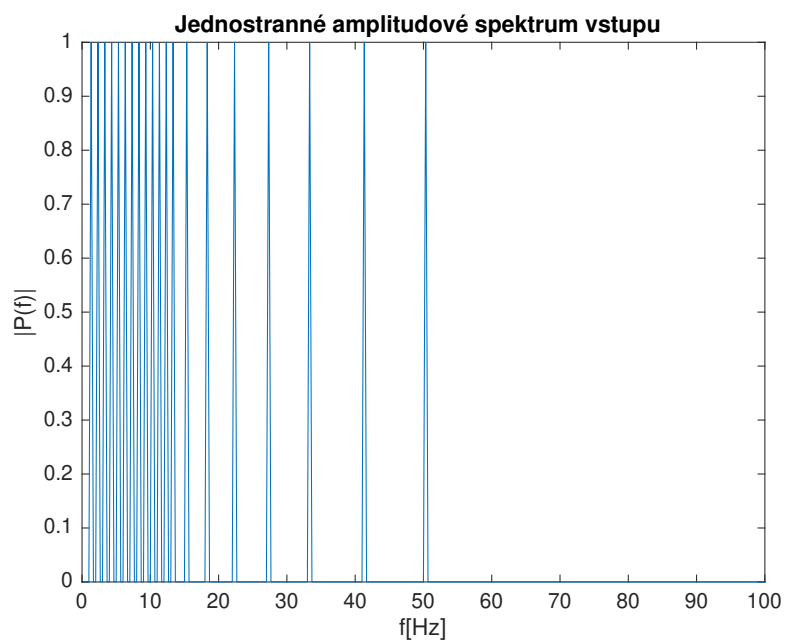
Při práci s nelineárními systémy lze vynechat sudé násobky frekvencí, jako je popsáno v kapitole 2. I pro tento přístup pomáhá iterativní optimalizace fází.



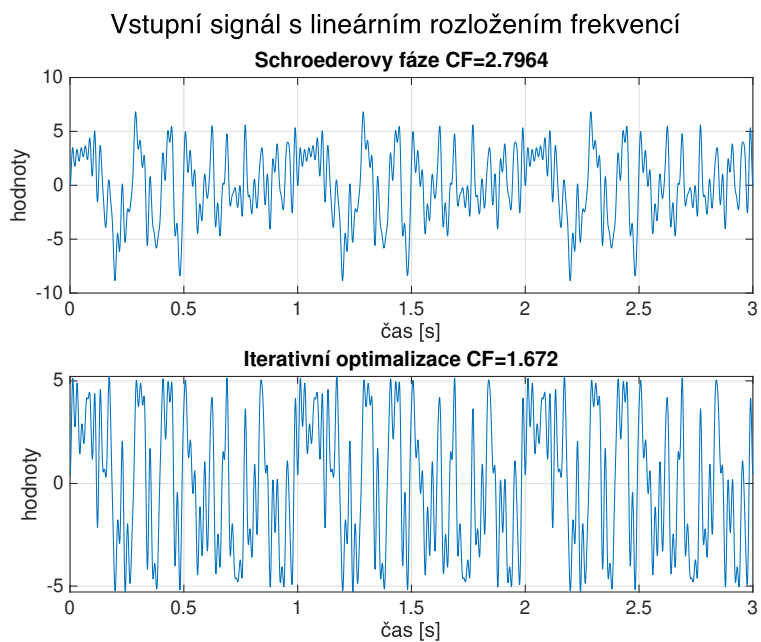
Obrázek 4.1: Spektrum vstupního signálu s lineárním rozložením frekvencí



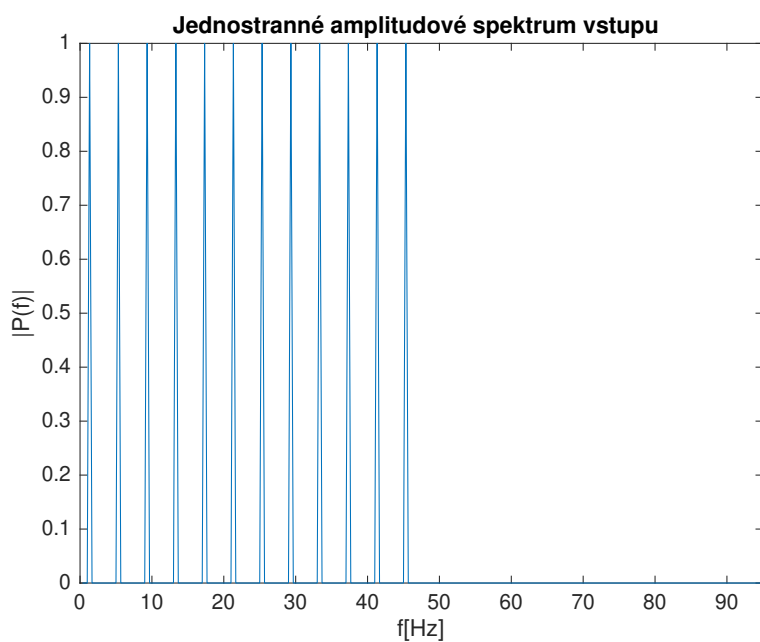
Obrázek 4.2: Otestování iterativní optimalizace fází pro zlepšení crest faktoru při lineárním rozložení frekvencí



Obrázek 4.3: Spektrum vstupního signálu s logaritmickým rozložením frekvencí

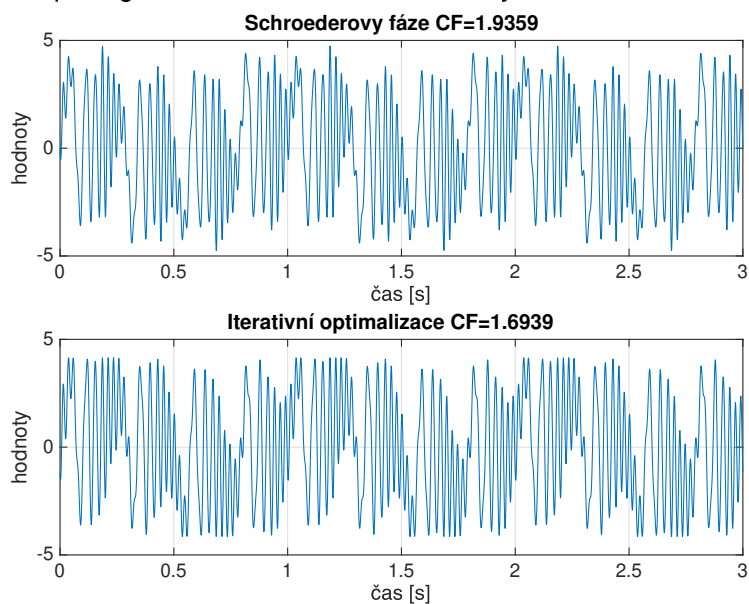


Obrázek 4.4: Otestování iterativní optimalizace fází pro zlepšení crest faktoru při pseudo-logaritmickém rozložení frekvencí



Obrázek 4.5: Spektrum vstupního signálu s lichými násobkami frekvencí

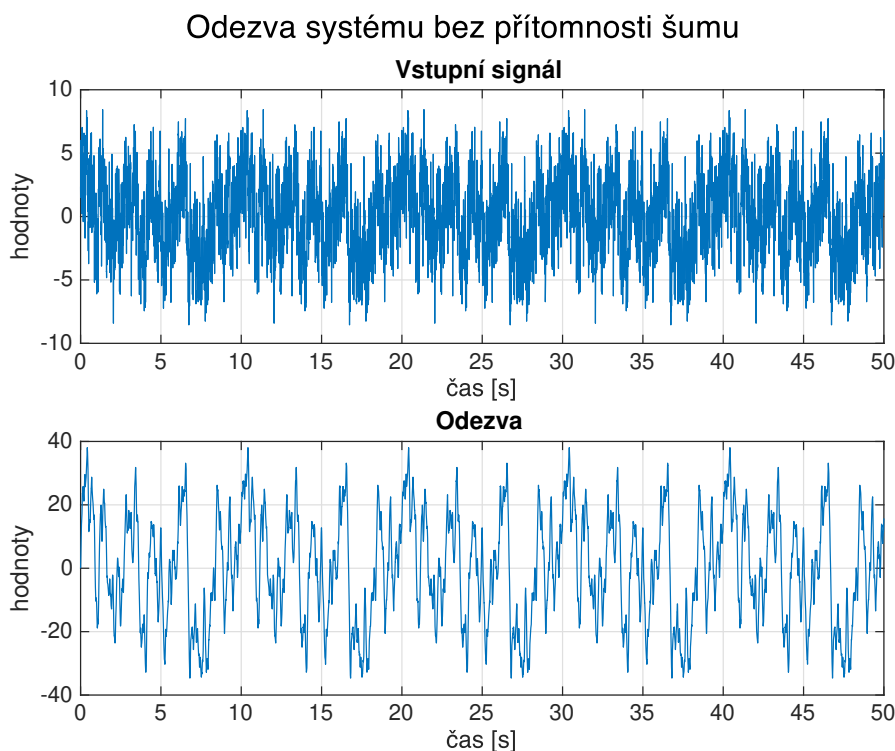
Vstupní signál s lineárním rozložením lichých násobků frekvencí



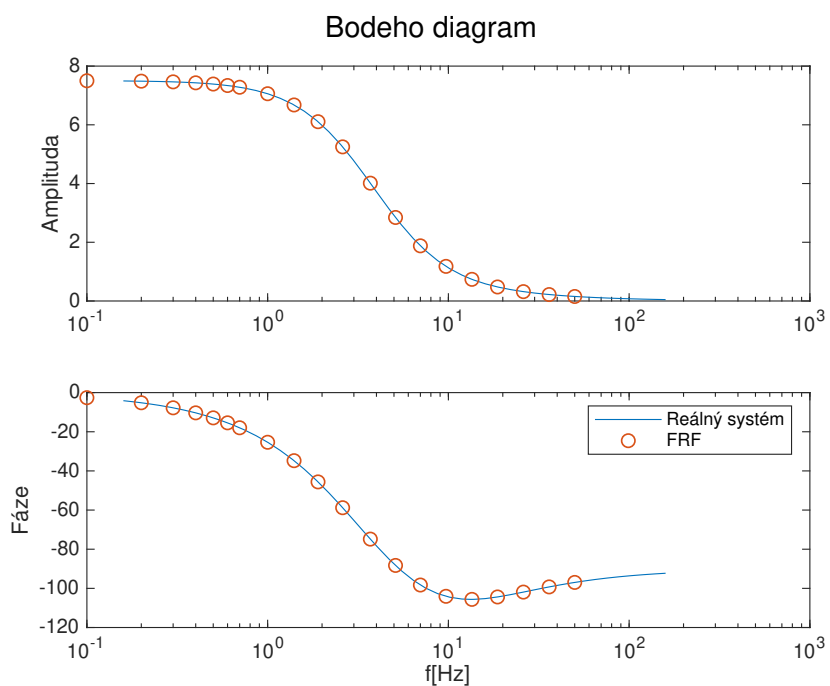
Obrázek 4.6: Otestování iterativní optimalizace fází pro zlepšení crest faktoru při vynechání sudých násobků frekvencí

## 4.2 Neparametrický model

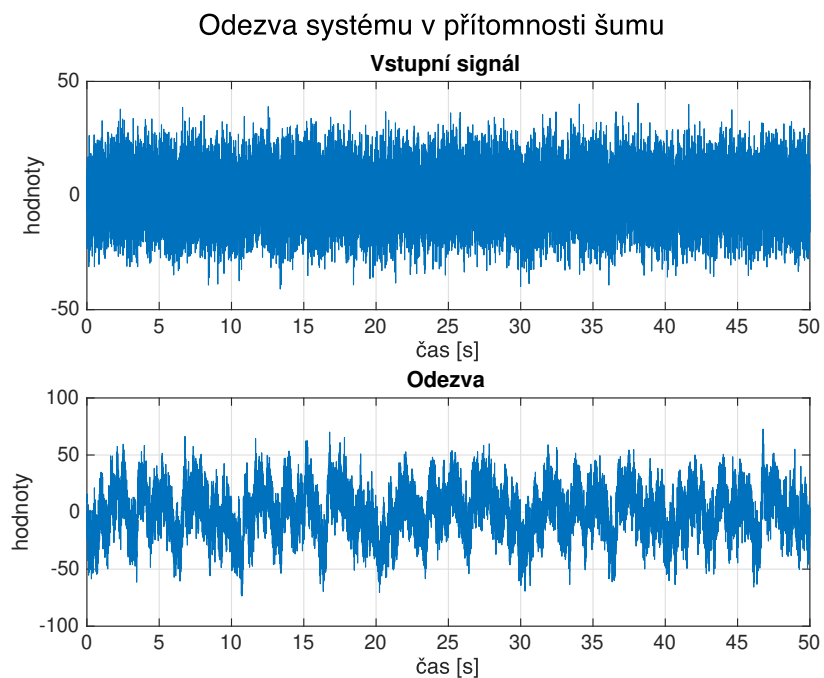
Díky použití periodického signálu je velmi snadné dosáhnout vyšší přesnosti a získat neparametrický model šumu. Toto bylo ukázáno již v kapitole 2. Z tohoto důvodu jsem se rozhodl ověřit vliv volby počtu period signálu na přesnost získaných FRF dat. Bez přítomnosti šumu lze díky správné volbě frekvencí určit frekvenční odezvu (FRF) přesně u libovolného počtu period (po odeznění počátečního přechodového děje), což lze snadno ověřit porovnáním vypočtených FRF dat systému s jeho teoretickými hodnotami frekvenční přenosové funkce (toto samozřejmě nelze v reálné situaci, jelikož se právě tuto přenosovou funkci snažíme identifikovat). Při aplikaci vstupně-výstupního šumu je důležité použít dostatečně vysoký počet period pro získání přesného výsledku. Rozdíl mezi délkou 5 period a 50 period je zřejmý především u variancí FRF dat, jak je možné zkontrolovat na následujících grafech.



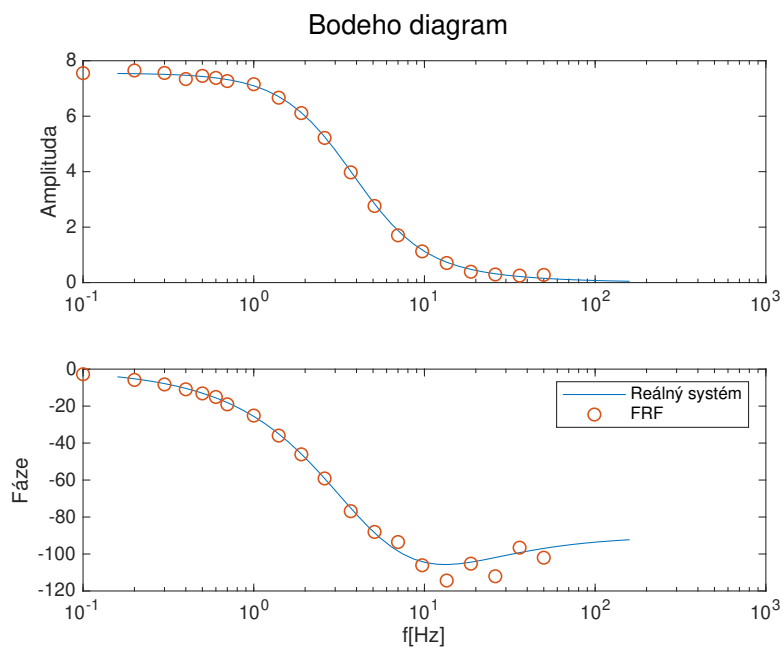
Obrázek 4.7: Vstupní signál a odezva bez realizace šumu



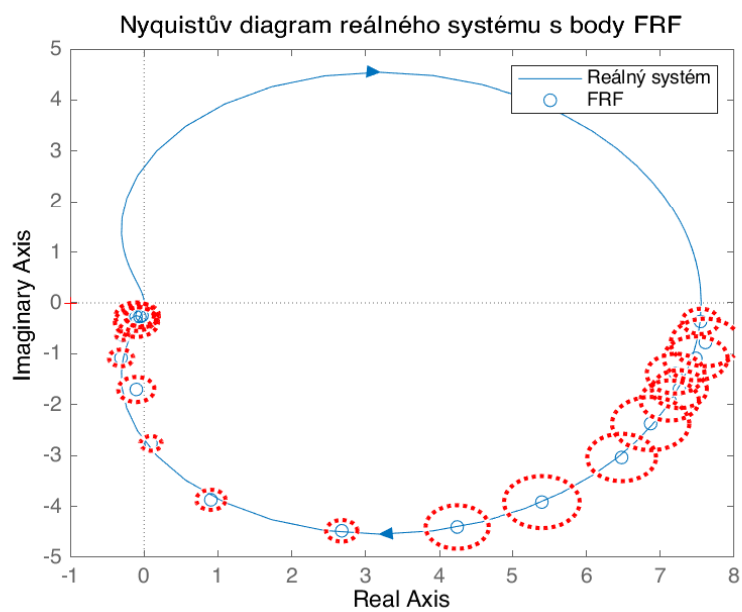
Obrázek 4.8: Ověření správnosti FRF dat oproti reálnému systému bez šumu



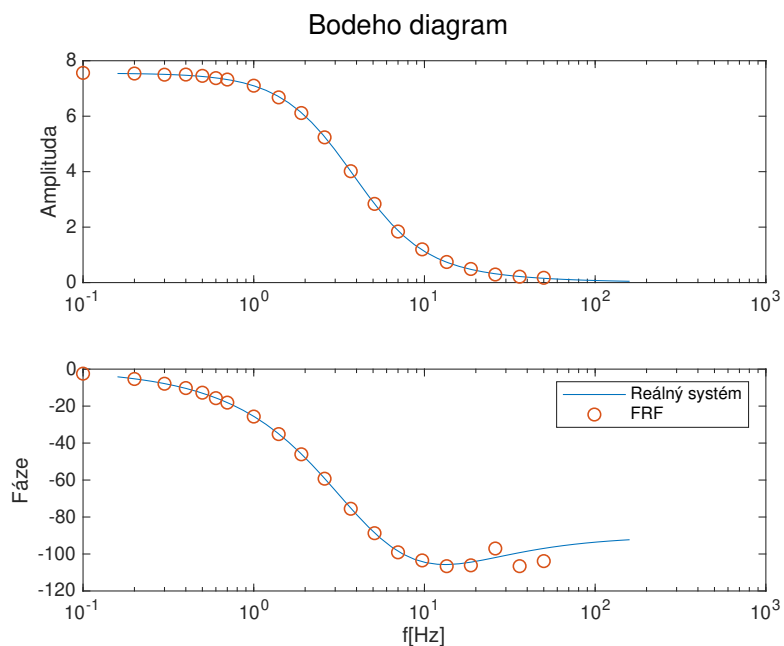
Obrázek 4.9: Vstupní signál a odezva s šumem na vstupu i výstupu



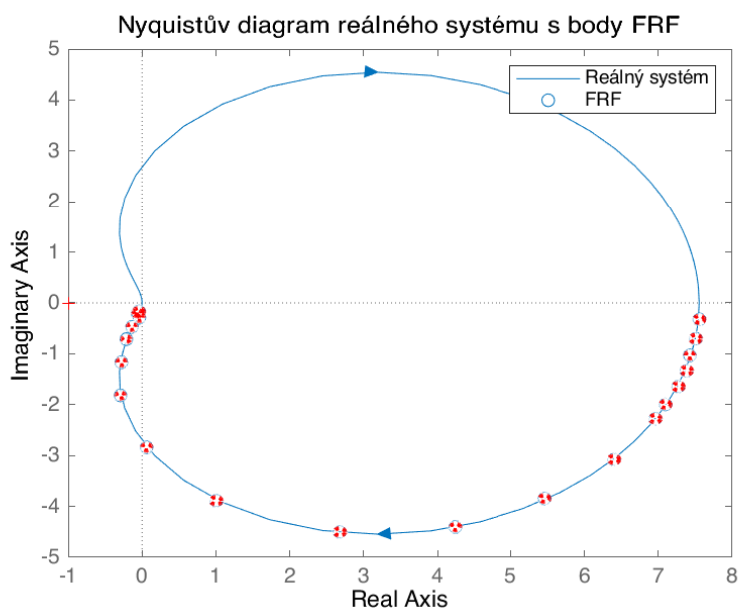
Obrázek 4.10: Ověření správnosti FRF dat oproti reálnému systému v přítomnosti šumu při použití 5 period



Obrázek 4.11: Ověření správnosti FRF dat oproti reálnému systému v přítomnosti šumu při použití 5 period



Obrázek 4.12: Ověření správnosti FRF dat oproti reálnému systému v přítomnosti šumu při použití 50 period



Obrázek 4.13: Ověření správnosti FRF dat oproti reálnému systému v přítomnosti šumu při použití 50 period



## 4.3 Parametrická identifikace

K otestování správnosti a porovnání metod jsem použil krabicové grafy (boxplot) z výsledků validační části programu. Dokážeme tedy velmi dobře určit vlastnosti jako střední hodnotu, minimum/maximum a kvartily výskytu jednotlivých kritérií pro všechny metody a porovnat je mezi sebou. Tyto krabicové grafy jsem vykreslil ze zkoumaných systémů pro všechna implementovaná validační kritéria. V časové oblasti jde tedy u odchylek časových odezev na vstupní signál o jejich střední hodnoty (rmse), maximum jejich absolutních hodnot (inf), rozdíl maximální a minimální hodnoty (pkpk) a procentuální shodu pomocí NRMSE kritéria (nrmse). Ve frekvenční oblasti pak odchylky získáme porovnáním frekvenční odezvy získaných modelů a FRF dat a počítáme z nich stejné kritéria, až na pkpk.

Pro jednoduchost jsem u metody BJ zvolil dynamiku šumu v čitateli i jmenovateli prvního řádu. Všechny metody ve frekvenční oblasti (kromě obecné LLS) vycházejí z metody LLSort a interně ji využívají k výpočtu. Váha metody LLSexp má tvar klesající exponenciály, která přiřazuje prvnímu měření váhu 5 a poslednímu váhu 1. Relaxační koeficient u vážené iterační IWLS metody je  $r = 0.8$ . U iterovaných variant se vždy algoritmus zastaví, pokud suma absolutních odchylek získaného modelu od FRF dat klesne pod 0.001, nebo pokud algoritmus přesáhne 1000 iterací. V obou případech se pak bere poslední hodnota modelu.

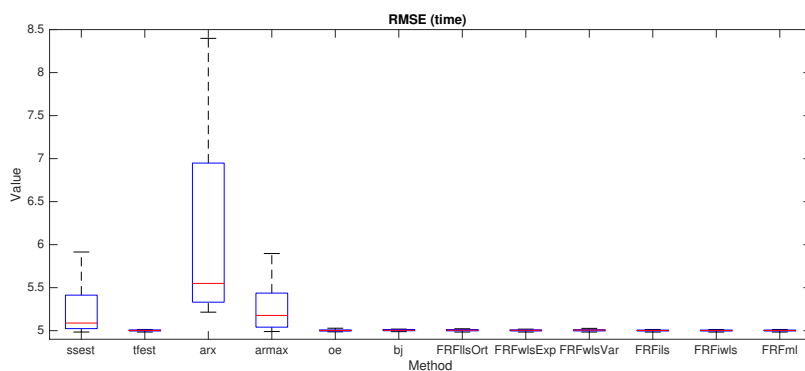
### 4.3.1 Test systémů třetího řádu

Pro testy jsem použil vstupní signál s 20 periodami a 20 frekvenčními složkami s logaritmickým rozložením frekvencí v intervalu [0.1, 10] Hz. Periodu vzorkování vstupního a výstupního signálu jsem volil 0.001s. Bylo testováno 50 systémů třetího řádu se

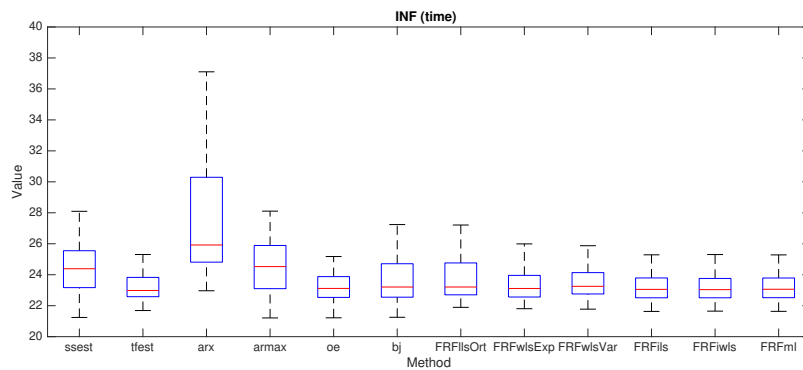
- třemi póly v intervalu [-1, -20]
- dvěma nulami v intervalech [-1, -40]
- a zesílením o velikosti 100

Póly a nuly jsou generovány ve výše uvedených intervalech pomocí rovnoměrného rozdělení. Šumy na vstupu i výstupu jsem reprezentoval diskretním bílým šumem s normálním rozdělením se směrodatnou odchylkou 2 (na vstupu) a 5 (na výstupu). Toto vedlo k výkonovému podílu signálu vůči šumu  $\text{SNR} \sim 4$  na vstupu i výstupu. Následně jsem vynechal první periodu jako důsledek přechodového děje.

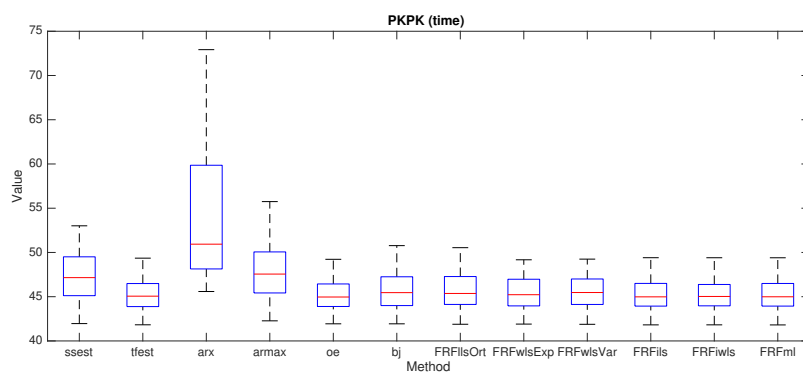
Z grafů v časové oblasti vystupuje pouze metoda ARX, která obecně dosahovala horších shod se simulovanými daty. To je z důvodu zanedbání šumu v ARX struktuře. Ve frekvenční oblasti dále vidíme, že i matlabovské metody *ssest* a *armax* dosahují nižší shody se zkoumaným systémem. To může znamenat, že model slouží pouze jako nízkofrekvenční aproximace systému a vede ke špatným predikcím především na vyšších frekvencích. Zbylé časové i frekvenční metody dosahují na této jednoduché struktuře podobných výsledků.



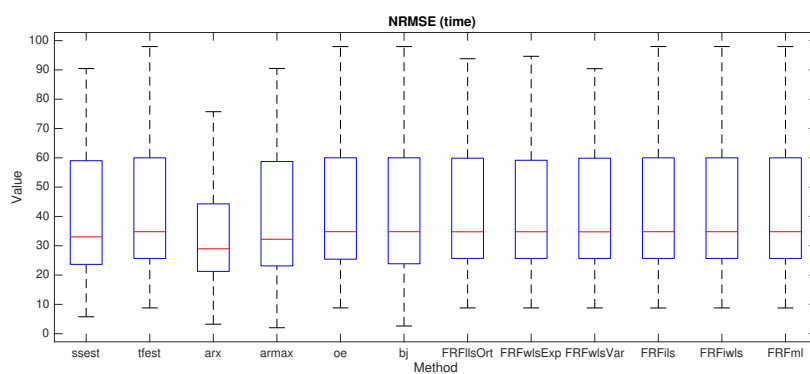
Obrázek 4.14: Střední hodnoty odchylek časových odezev modelů třetího řádu



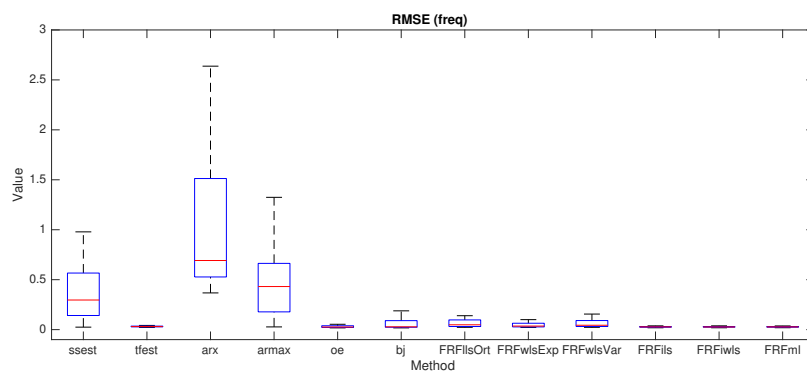
Obrázek 4.15: Maximum absolutních hodnot odchylek časových odezví modelů třetího řádu



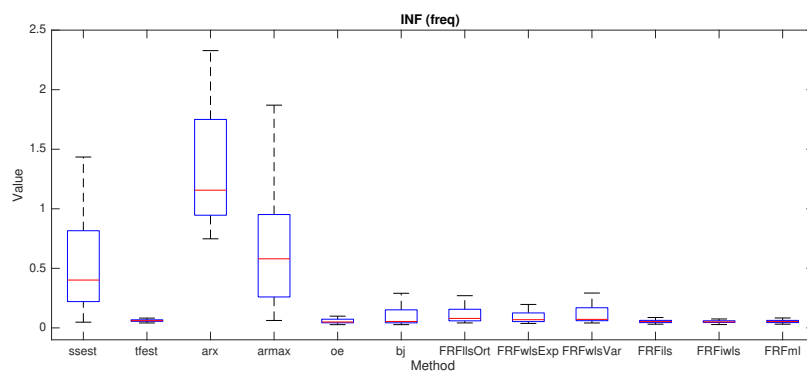
Obrázek 4.16: Rozdíl maxima a minima odchylek časových odezví modelů třetího řádu



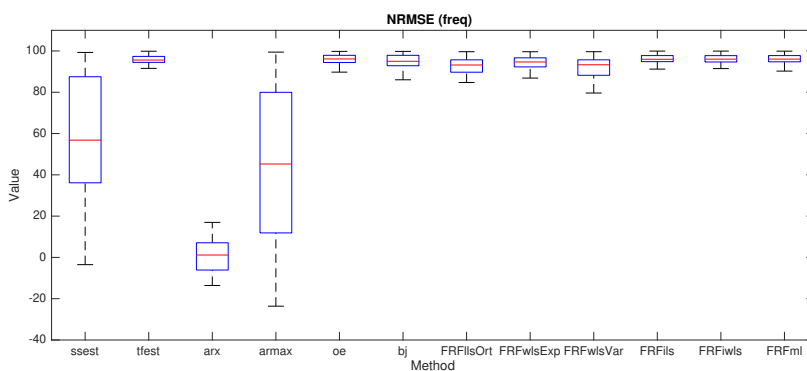
Obrázek 4.17: Procentuální shoda časových odezví modelů třetího řádu



Obrázek 4.18: Střední hodnoty odchylek frekvenčních odezev modelů třetího řádu



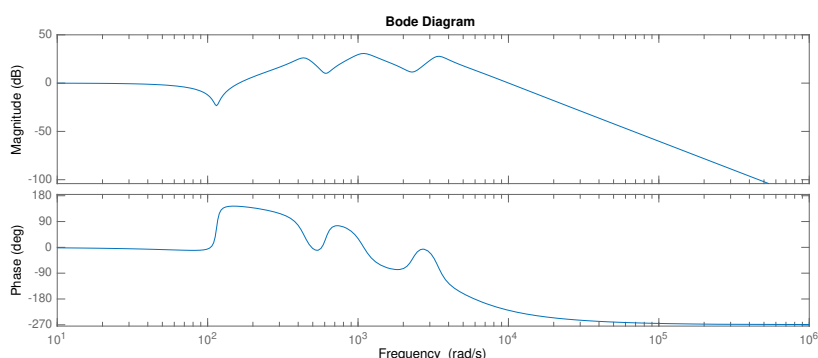
Obrázek 4.19: Maximum absolutních hodnot odchylek frekvenčních odezev modelů třetího řádu



Obrázek 4.20: Procentuální shoda frekvenčních odezev modelů třetího řádu

### 4.3.2 Test elektromechanických systémů

Otestování metod na systémech třetího řádu s plochým spektrem je dobré pro obecné srovnání. Řádově obtížnější jsou ale elektro-mechanické systémy s výskytem rezonancí a antirezonancí, kde se prudce mění amplituda a fáze. Z tohoto důvodu jsem pro tento test vygeneroval znovu 50 systémů, tentokrát devátého řádu s šesti nulami. Nuly i póly se zde vyskytují reálné i komplexní. Příklad takové dynamiky je zobrazen na následujícím Bodeho diagramu:

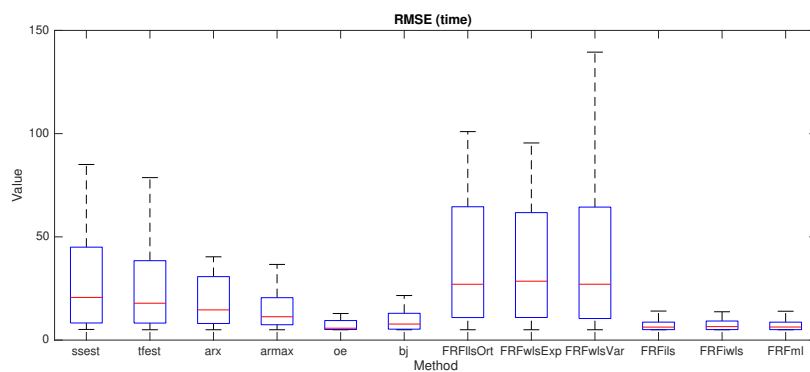


Obrázek 4.21: Příklad dynamiky testovaného dynamického systému

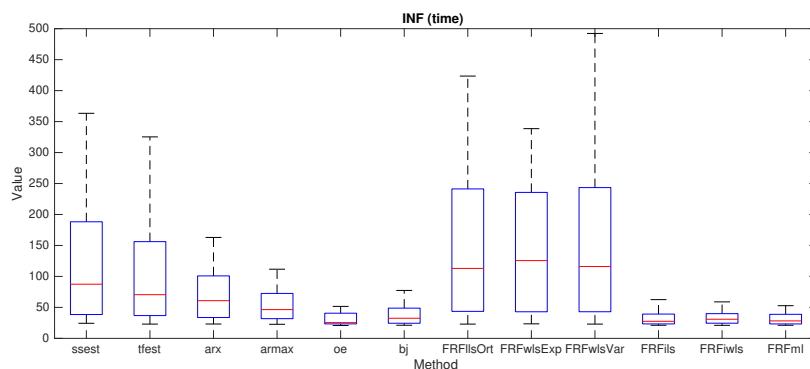
Vstupní signál jsem tentokrát použil s 50 periodami a 100 frekvenčními složkami s logaritickým rozložením frekvencí v intervalu  $[1, 900]$  Hz. Vstupní signál jsem volil takto z důvodu, aby pokryl co nejpřesněji velkou část Periodu vzorkování vstupního a výstupního signálu jsem volil 0.0005s. Šum jsem zvolil se stejnými směrodatnými odchylkami jako v minulém případě ( $\sigma_U = 2, \sigma_Y = 5$ ). Výkonový poměr signálu ku šumu na vstupu byl tentokrát  $SNR_U = 11$  a na výstupu  $SNR_Y = 16$ . Kvůli přechodovému ději jsem odstranil prvních 10 naměřených period.

Jelikož se s modely pracuje na řádově vyšších frekvencích a použili jsme jen dvojnásobnou vzorkovací frekvenci oproti předchozímu případu (nyní velmi blízkou Nyquistově frekvenci), projevují se u frekvenčních neiterativních metod problémy způsobené diskretizací a interně skrytým vážením uvnitř ortogonální metody lineárních nejmenších čtverců. Z tohoto důvodu všechny metody téměř ve všech případech nekonvergují. Tento efekt by bylo možné odstranit výpočtem implementování jiné formy metody, která počítá přímo diskrétní přenos místo spojitého, ale ta není součástí této práce. Iterativní podstata iterativních metod postupně odstraní počáteční vážení a tím pádem dokonverguje ke správným odhadům. Pokud se podíváme na shodu ve

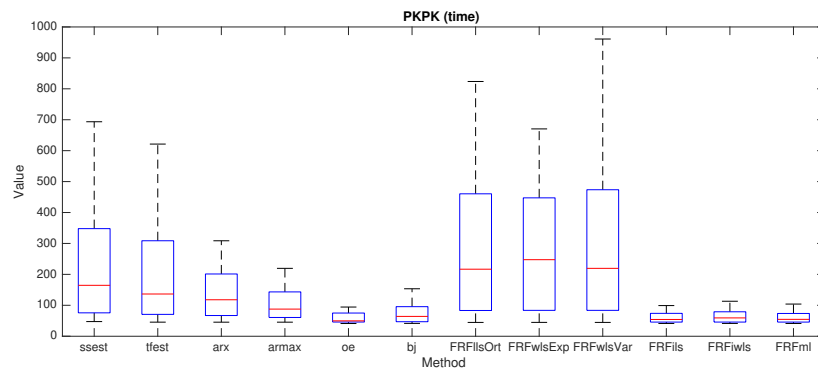
frekvenční oblasti, vidíme, že dokonce frekvenční iterativní metody dosahují o dost lepší výsledků, než je tomu u metod pracujících v časové oblasti.



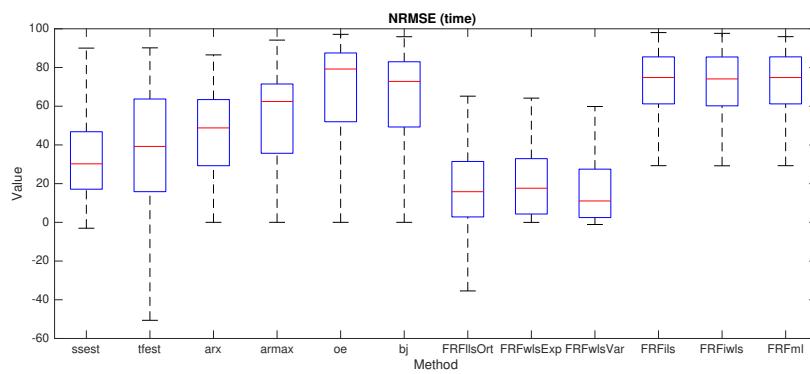
Obrázek 4.22: Střední hodnoty odchylek časových odezví modelů devátého řádu



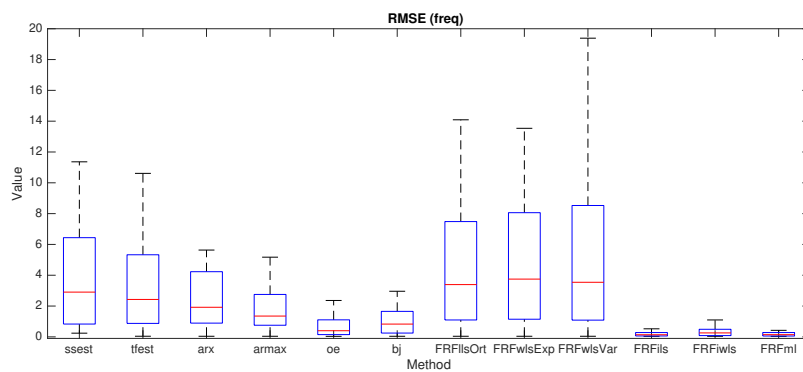
Obrázek 4.23: Maximum absolutních hodnot odchylek časových odezví modelů devátého řádu



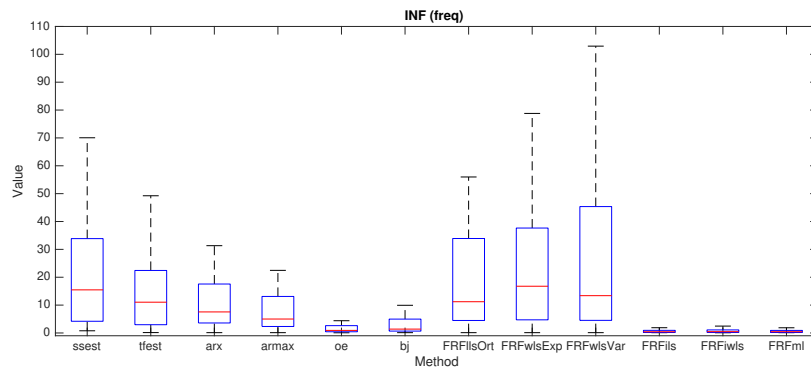
Obrázek 4.24: Rozdíl maxima a minima odchylek časových odezví modelů devátého řádu



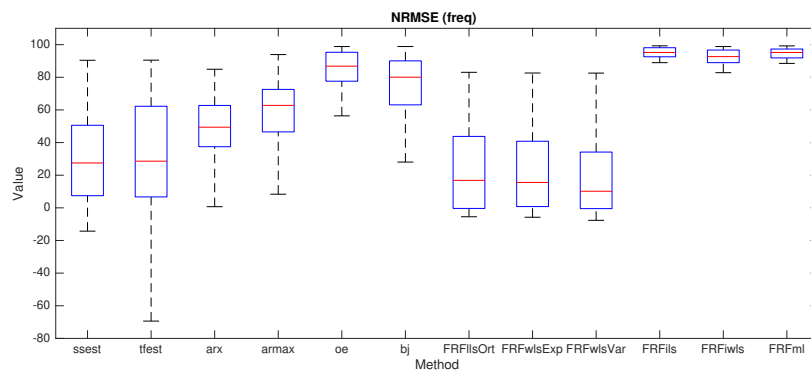
Obrázek 4.25: Procentuální shoda časových odezví modelů devátého řádu



Obrázek 4.26: Střední hodnoty odchylek frekvenčních odezví modelů devátého řádu



Obrázek 4.27: Maximum absolutních hodnot odchylek frekvenčních odezev modelů devátého řádu

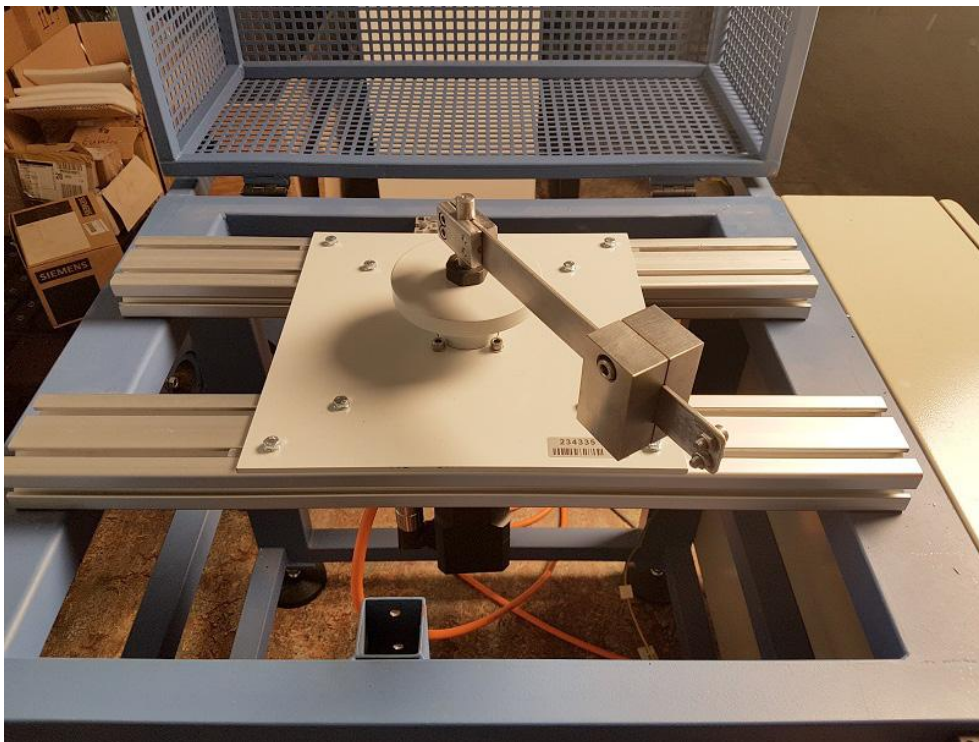


Obrázek 4.28: Procentuální shoda frekvenčních odezev modelů devátého řádu



### 4.3.3 Identifikace z naměřených dat reálného systému

Jako poslední test jsem zvolil identifikaci na základě naměřených dat z reálného systému (kompletní popis v [6]). Jedná se o pružné rameno řízené servopohonem (obr. 4.29).



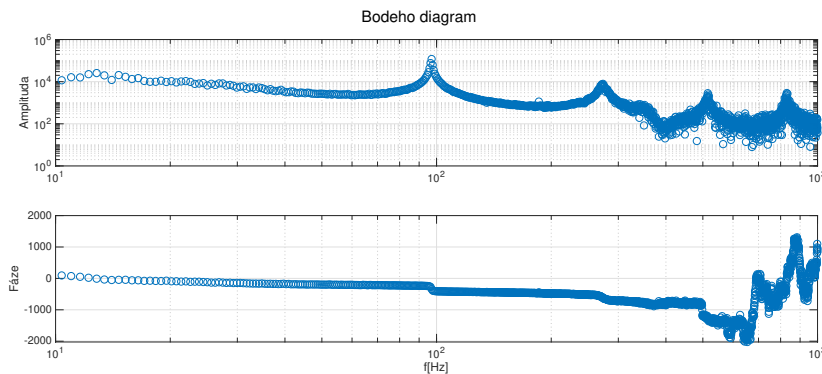
Obrázek 4.29: Zkoumaný reálný systém, ze kterého byla naměřena data - zdroj [6]

Pružné rameno tvoří systém s rozptřenými parametry nekonečného řádu (jde o mechanické kontinuum), který obsahuje mnoho resonančních módů, a tak představuje vhodný příklad, který simuluje mechanické problémy v praxi. Nekonečný řád tvoří v řízení velký problém, a tak je nutné systém aproximovat modelem konečného řádu, který modeluje především  $n$  prvních dominantních módů.

Vstupem je požadovaný moment motoru a výstupem zrychlení na konci ramene měřené akcelerometrem. Jako data jsem měl k dispozici naměřených 61 period o délce 16383 vzorků vzorkované s periodou 0.1ms. Cílem bylo získat relevantní model v rozsahu frekvencí 10-1000Hz, jelikož na nižších frekvencích se projevují high-pass filtry zařazené v obvodech pro měření signálu z

akcelerometru (kvůli kompenzaci driftu a biasu) a na vyšších frekvencích se již nacházíme mimo šířku pásma robotu.

Vyřadil jsem prvních 10 period kvůli přechodovému ději a vypočítal FRF v daném rozsahu frekvencí:



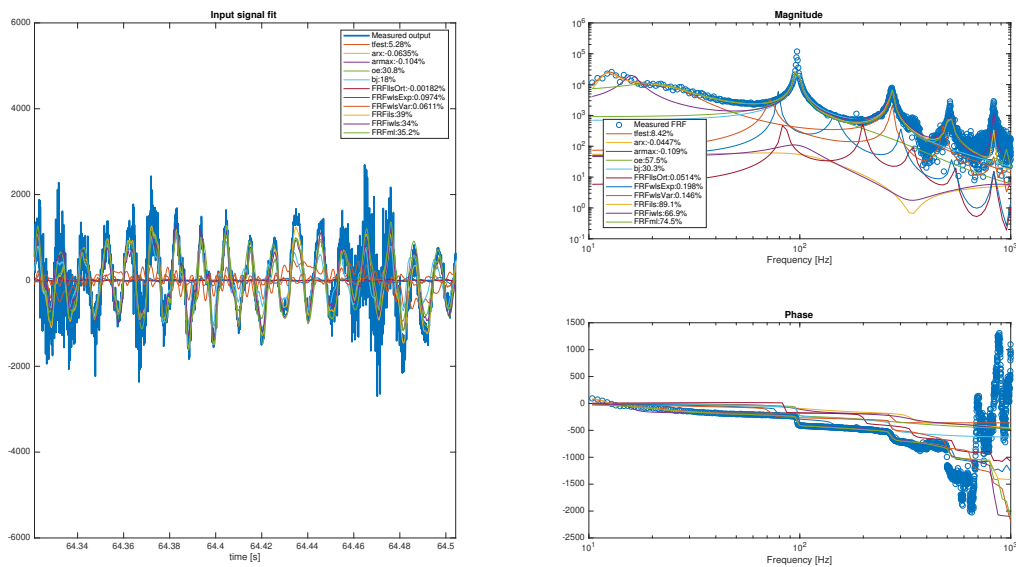
Obrázek 4.30: Frekvenční odezvoivá funkce zkoumaného systému ve frekvenčním regionu zájmu

Odhadnutí správného řádu systému jsem provedl metodou pokus-omyl, kdy jsem iterativně vyzkoušel všechny kombinace od prvního do 20. řádu systému a hledal nejlepší shodu ve frekvenční oblasti. Výsledky byly následující:

| řád | počet nul | max. shoda |
|-----|-----------|------------|
| 6   | 3         | 79.2       |
| 8   | 3         | 80.5       |
| 9   | 6         | 81         |
| 10  | 7         | 85         |
| 12  | 10        | 88         |
| 14  | 12        | 89.1       |
| 16  | 16        | 89.6       |
| 18  | 18        | 89.7       |
| 20  | 17        | 90.1       |

Tabulka 4.1: Maximální shody ve frekvenční oblasti pro dané struktury modelu

Poté jsem blíže prozkoumal tyto kombinace, aby finální odhad měl nejen dobrou procentuální shodu, ale aby také zachytil všechny pružné módy a další dynamiku. Z tohoto důvodu jsem zvolil za finální strukturu model 14. řádu s 12 nulami. Jelikož kvůli délce signálu byl u metody *SSEST* časově téměř nereálný výpočet odhadu, z algoritmu pro tento test jsem ji vyřadil.



Obrázek 4.31: Shoda modelů s FRF daty ve frekvenční oblasti (vpravo) a kontrola průběhu v časové oblasti po odeznění počátečního přechodového děje

| metoda    | shoda v časové oblasti [%] | shoda ve frek. oblasti [%] |
|-----------|----------------------------|----------------------------|
| tfest     | 5.28                       | 8.42                       |
| arx       | -0.0635                    | -0.0447                    |
| armax     | -0.104                     | -0.109                     |
| oe        | 30.8                       | 57.5                       |
| bj        | 18                         | 30.3                       |
| FRFilsOrt | -0.00182                   | 0.0514                     |
| FRFwlsExp | 0.0974                     | 0.198                      |
| FRFwlsVar | 0.0611                     | 0.146                      |
| FRFils    | 39                         | 89.1                       |
| FRFiwls   | 34                         | 66.9                       |
| FRFml     | 35.2                       | 74.5                       |

Tabulka 4.2: Výsledky identifikace jednotlivých metod na základě reálně naměřených dat

V metodách vidíme velké rozdíly z hlediska konvergence ke správnému řešení. Mezitím co metody *TFEST*, *ARX*, *ARMAX* a neiterativní metody ve frekvenční oblasti nekonvergují vůbec, iterativní metody konvergují vcelku s velkou přesností. Dobře si vede i metoda *OE*, která dosahuje přesnosti 57.5% ve frekvenční oblasti i přes to, že pracuje s časovými daty.

#### 4.3.4 Shrnutí

Pokud bych měl na základě mých testů zvolit nejspolehlivější metodu s nej přesnějšími odhady, šlo by o všechny iterativní metody pracující ve frekvenční oblasti, především tedy metodu maximální věrohodnosti *ML*. Tento závěr souhlasí i s její teoretickou podstatou, kde zavádíme do vážení nejen výsledky minulé iterace, ale i informace o variancích FRF dat. V časové oblasti by pak šlo o metodu výstupní chyby *OE*, která dosahovala nejlepších výsledků v porovnání s ostatními časovými metodami. Metody *SSEST*, *ARX*, *ARMAX* a neiterativní metody ve frekvenční oblasti jsou obecně nespolehlivé z důvodů popsaných výše.

Pokud jde o identifikaci reálného systému, většina metod nedokonvergovala ani blízko k řešení. Nejlepší shody dosáhla metoda iterativních nejmenších čtverců ve frekvenční oblasti *FRFils* následovaná ostatními iterativními metodami a časovou metodou output-error.

# Kapitola 5

## Závěrečné zhodnocení

V této práci jsem se seznámil s aktuálními praktikami časové a frekvenční identifikace systémů. Své poznatky jsem následně použil k vytvoření rozhraní s využitím prostředí Matlab pro provádění hromadných testů a porovnání jak časových, tak frekvenčních metod s pomocí několika kritérií správnosti modelů. Rozhraní jsem navrhl modulárně, aby bylo snadné v budoucnu upravit/zaměnit libovolnou část, popřípadě doplnit do rozhraní další metody k otestování.

Při výběru vstupního signálu jsem zvolil k bližšímu prozkoumání signály typu multisine s lineárním/logaritmickým rozložením frekvencí a díky tomu v simulacích kompletně odstranil tzv. leakage efekt, který obecně vzniká při přechodu z časové do frekvenční oblasti. Díky periodickému buzení je dále možné díky průměrování dosáhnout vyšší přesnosti FRF dat a získat neparametrický model šumu, který může být dále užitečný při parametrické identifikaci. V naprogramovaném rozhraní však lze obecně použít jakýkoliv vstupní či validační signál.

V parametrické identifikaci jsem implementoval frekvenční metodu lineárních nejmenších čtverců a několik jejích variant tak, jak je sepsáno ve zdrojích. Následně jsem tyto metody porovnal díky zmíněnému rozhraní s předními metodami *SystemIdentification* toolboxu s využitím několika testů včetně identifikace na základě reálných dat a shrnul výsledky testů na konci předchozí kapitoly. Metody *oe* a *bj* v časové a iterované metody ve frekvenční oblasti dosahovaly obecně nejlepších výsledků jak střední hodnotou shody, tak jejich variancí na simulovaných testech. Podrobnější souhrn výsledků najdete na konci předchozí kapitoly.

V programu se nachází několik příležitostí, kde je možné dosáhnout zlep-

šení. Jednou z nich je implementování jiných vstupních signálů pro testování. Jmenovitě se může jednat například o sweep signály či buzení náhodným šumem i přes jeho nedostatky oproti periodickým signálům. V části simulace odezvy je vždy šum na vstupu i výstupu reprezentován normálním/rovnoměrným rozdělením s nulovou střední hodnotou a požadovanou variancí. Bylo by tedy rozumné implementovat šum v korelaci s měřením pro vytvoření komplexnějších testů a lepší otestování metod. Samozřejmostí je přidání dodatečných identifikačních metod (například numerické řešení nelineárních nejmenších čtverců) a provedení složitějších testů (vysoké řády přenosů, dopravní zpoždění, kvantizace). Příkladem jsou například metody IWLS a ML, kde je možné kombinovat s vahami metod každé iteraci i uživatelskou váhu.

# Literatura

- [1] Schoukens J., Pintelon R., Rolain Y. (2012). *Mastering System Identification in 100 Exercises*. New York: John Wiley & Sons.
- [2] Pintelon, R., Schoukens, J. (2012). *System Identification: a Frequency Domain Approach*. New York: John Wiley & Sons.
- [3] Yang, Yuxiang & Zhang, Fu & Tao, Kun & Sanchez, Benjamin & Wen, He & Teng, Zhaosheng. (2015). *An improved crest factor minimization algorithm to synthesize multisines with arbitrary spectrum*. Physiological Measurement. 36. 10.1088/0967-3334/36/5/895.
- [4] Richardson, M.H. & Formenti D.L. (1982). *Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials*. California: Structural Measurement Systems, Inc.
- [5] Duník J. (2018). *Identifikace systémů a filtrace*. Plzeň: Západočeská univerzita.
- [6] Václav Helma, Martin Goubej, Ondřej Ježek (2018). *Acceleration Feedback in PID Controlled Elastic Drive Systems*. IFAC-PapersOnLine (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896318303641>).