

**ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI**

**FAKULTA PEDAGOGICKÁ**

**KATEDRA VÝPOČETNÍ A DIDAKTICKÉ TECHNIKY**

**POZITIVITA POLYNOMŮ  
VČETNĚ ŠKOLSKÝCH SOUVISLOSTÍ**

**DISERTAČNÍ PRÁCE**

**Mgr. Jan Frank**

*Specializace v pedagogice*

*Informační a komunikační technologie ve vzdělávání*

Školitel: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

**Plzeň, 2020**

Prohlašuji, že jsem disertační práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 23. srpna 2020

.....

Mgr. Jan Frank

## **Poděkování**

Rád bych na tomto místě poděkoval všem, bez kterých by tato práce jistě nevznikla. Předně děkuji mému školiteli a průvodci celým doktorským studiem doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc., za odbornou pomoc, vedení a cennou zpětnou vazbu. Dále pak děkuji kolegům PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D., a PhDr. Petrovi Simbartlovi, Ph.D., za podporu a řadu cenných rad či postřehů, díky kterým bylo celé doktorské studium jednodušší. V neposlední řadě pak děkuji rodině a přítelkyni za jejich ohromnou podporu, porozumění a trpělivost.

# OBSAH

<b>OBSAH</b> .....	<b>- 4 -</b>
<b>1 ÚVOD A HISTORICKÝ KONTEXT PROBLEMATIKY</b> .....	<b>- 6 -</b>
1.1 HERMANN MINKOWSKI (1864–1909) .....	- 7 -
1.2 DAVID HILBERT (1862–1943).....	- 8 -
1.3 17. HILBERTŮV PROBLÉM .....	- 10 -
<b>2 ROZKLAD POLYNOMU NA SOUČET ČTVERCŮ S VYUŽITÍM POČÍTAČE</b> .....	<b>- 15 -</b>
2.1 NUTNÉ PODMÍNKY EXISTENCE ROZKLADU POLYNOMU NA SOS .....	- 16 -
2.2 ZPŮSOB ROZKLADU POLYNOMU NA SOS A JEDINEČNOST VÝSLEDKU .....	- 19 -
2.3 ROZKLAD NA SOS V ÚLOHÁCH MATEMATICKÝCH OLYMPIÁD .....	- 34 -
<b>3 OBECNÝ ALGORITMUS ROZKLADU POLYNOMU NA SOUČET ČTVERCŮ</b> ...	<b>- 40 -</b>
3.1 GRAMOVA MATICE POLYNOMU A ROZKLAD NA SOS .....	- 40 -
3.2 ALGORITMUS ROZKLADU.....	- 42 -
3.3 CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM A VLASTNÍ ČÍSLA GRAMOVY MATICE .....	- 43 -
3.4 CHOLESKÉHO DEKOMPOZICE .....	- 52 -
3.5 ROZKLAD POLYNOMU NA SOS S UŽITÍM NEWTONOVA POLYTOPU .....	- 54 -
<b>4 NĚKTERÉ ROZDÍLY MEZI KLASICKÝM A POČÍTAČOVÝM ROZKLADEM</b> ....	<b>- 64 -</b>
4.1 HODNOST MATICE A UŽITÍ CHOLESKÉHO DEKOMPOZICE.....	- 65 -
4.2 TWO SQUARES IDENTITY V ROZKLADU POLYNOMU NA SOS .....	- 68 -
4.2.1 Stručně o Hornerově schématu ve středoškolských souvislostech.....	- 73 -

<b>5</b>	<b>NĚKOLIK DALŠÍCH ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ S VYUŽITÍM POČÍTAČE.....</b>	<b>- 76 -</b>
5.1	Řešený příklad 1 – SŠ úloha a užití GeoGebry při řešení soustavy nerovnic .....	- 77 -
5.2	Řešený příklad 2 – důkaz neexistence rozkladu středoškolským způsobem .....	- 86 -
5.3	Řešený příklad 3 – homogenní polynomy a (kvadratické) formy.....	- 91 -
5.4	Řešený příklad 4 – více rozkladů na SOS daného reálného polynomu .....	- 95 -
5.5	Řešený příklad 5 – důkaz nerovnosti v oboru $\mathbb{R}$ a vhodné užití rozkladu na SOS.....	- 110 -
5.6	Řešený příklad 6 – Gramova matice typu $5 \times 5$ v rozkladu polynomu na SOS.....	- 119 -
5.7	Řešený příklad 7 – reálný polynom tří neurčitých a chytrá volba parametrů v $\mathbb{Z}$ .....	- 130 -
5.8	Řešený příklad 8 – počítačový důkaz nerovnosti s využitím rozkladu na SOS .....	- 139 -
<b>6</b>	<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>- 147 -</b>
	<b>RESUMÉ V ČESKÉM JAZYCE.....</b>	<b>- 149 -</b>
	<b>SUMMARY IN ENGLISH.....</b>	<b>- 150 -</b>
	<b>LITERATURA .....</b>	<b>- 151 -</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>- 154 -</b>
	<b>SEZNAM TABULEK.....</b>	<b>- 155 -</b>
	<b>PŘEHLED PUBLIKAČNÍ ČINNOSTI.....</b>	<b>- 156 -</b>

## 1 ÚVOD A HISTORICKÝ KONTEXT PROBLEMATIKY

Nahlédneme-li do dějin matematiky, narazíme jistě na celou řadu matematických problémů, které více či méně fascinovaly filosofy, matematiky či v moderní době informatiky i další vědce z různých oborů. V této souvislosti lze například uvést hledání přesné hodnoty Ludolfova čísla  $\pi$ , které kdysi představovalo náročnou úlohu a správné určení každé další cifry desetinného rozvoje mnohdy znamenalo několikaleté úsilí badatele. S rozvojem počítačových technologií a matematického softwaru v moderní době pak zpřesňování hodnoty této matematické konstanty vyústilo doslova v závod „lovců čísel“, kteří se snaží správně určit cifry na velmi vzdálených pozicích desetinného rozvoje. V současné době proto již známe číslo  $\pi$  s přesností na 50 bilionů desetinných míst (tj. současný světový rekord ve výpočtu této matematické konstanty s využitím „superpočítače“; leden 2020). Otázkou zůstává praktická využitelnost těchto poznatků, její posouzení však není předmětem této práce. Problém ovšem poukazuje na úzkou provázanost matematiky a počítačových technologií, kdy s rozvojem počítačového hardwaru i softwaru v 80. letech 20. století bylo v krátké době pokořeno několik rekordů ve zpřesňování hodnoty čísla  $\pi$  a dokonce byla překonána „magická“ hranice jednoho milionu desetinných míst. Nejinak tomu je i u dalších složitých matematických problémů i ve školské matematice na základních a středních školách (zde můžeme v souvislosti se zaváděním kognitivních technologií do výuky například zmínit využití programů dynamické geometrie). Informační a komunikační technologie (ICT) v součinnosti s matematickým softwarem nám tak umožňují nahlížet na klasické matematické problémy optikou moderních technologií a řešit je inovativním způsobem. Takových problémů by bylo možné uvést celou řadu, pochopitelně ne každý je však tak všeobecně známý jako výše uvedený příklad.

Jedním z takových významných základních matematických problémů je dokázat, že jistý reálný polynom  $f$  je pozitivně semidefinitní, v češtině lze též užívat označení, že je polynom  $f$  nezáporný. Jedná se o jeden z pěti možných případů, které mohou pro polynom  $f$  nastat, kdy platí, že pro všechny reálné hodnoty neurčitých  $x$  nabývá tento polynom pouze nezáporných hodnot. Pokud uijeme terminologii známou z určování druhů kvadratických forem, můžeme prostřednictvím definice vymežit všechny případy následovně.

### Definice 1:

Označme  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y_i = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Polynom  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se nazývá:

- a) **pozitivně definitní**  $\Leftrightarrow \forall x_i \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$
- b) **pozitivně semidefinitní**  $\Leftrightarrow \forall x_i \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$
- c) **negativně definitní**  $\Leftrightarrow \forall x_i \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$
- d) **negativně semidefinitní**  $\Leftrightarrow \forall x_i \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$
- e) **indefinitní**  $\Leftrightarrow \exists x_i, y_i \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0 < f(y_1, y_2, \dots, y_n)$

Z definice 1 je zřejmý vztah, že každý pozitivně definitní polynom je zároveň i pozitivně semidefinitní a analogicky – negativně definitní polynom je zároveň negativně semidefinitní. Svou roli zde hraje ostrost uvedených nerovností, kdy semidefinitní případy připouští rovnost nule. Zároveň je na tomto místě nutné dále zmínit, že pozitivní definitnost, negativní definitnost a indefinitnost se vzájemně vylučují. [2], [4]

Vraťme se nyní k problému, jak dokázat, že je daný reálný polynom  $f$  pozitivně semidefinitní. Jednou z metod, kterou lze při tomto důkazu využít, je rozklad polynomu  $f$  na součet čtverců (též druhých mocnin) polynomů. Tento způsob důkazu úzce souvisí s tzv. Hilbertovými problémy, konkrétně pak se zněním 17. Hilbertova problému. Dostáváme se tak o více než 100 let nazpět – na přelom 19. a 20. století. U zrodu této problematiky stáli významní matematici Hermann Minkowski a David Hilbert. [27]

#### 1.1 HERMANN MINKOWSKI (1864–1909)

Hermann Minkowski (obrázek 1) byl významný německý matematik žijící na přelomu 19. a 20. století a působící na celé řadě univerzit, konkrétně můžeme zmínit například Bonn, Curych, Göttingen nebo Königsberg. Narodil se v červnu roku 1864 ve městě Aleksotas na území Ruské říše (oblast dnešního Kaunasu, Litva) jako třetí syn do rodiny podnikatele Lewina Minkowského. Rodina byla původem z Německa, kam se v Minkowského osmi letech vrátila a usadila se v Königsbergu.



**Obrázek 1 - Hermann Minkowski v různých životních etapách**  
(zdroj: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>)

Nadání pro matematiku se u Hermanna Minkowského projevilo již při studiu na gymnáziu v Königsbergu, kdy už v této etapě vzdělávání četl práce od Dedekinda, Dirichleta či Gausse. Následně byl přijat a v dubnu roku 1880 nastoupil na univerzitu v Königsbergu, ale tři semestry strávil též na univerzitě v Berlíně. Jeho blízkým přítelem se stal David Hilbert, který byl v témže období také studentem na univerzitě v Königsbergu. Později se vzájemně ve své vědecké práci ovlivňovali, což se odrazilo i v problematice rozkladu reálných polynomů na součet čtverců polynomů. Z dalších významných matematiků, se kterými Hermann Minkowski, ale i David Hilbert, navázal ještě v období studií spolupráci, můžeme uvést Adolfa Hurwitze, který v roce 1884 přijal místo profesora na univerzitě v Königsbergu. V průběhu vysokoškolského studia se Minkowski začal zajímat o kvadratické formy, díky čemuž získal v roce 1885 doktorát za svou práci *Untersuchungen über quadratische Formen, Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält*. [23]

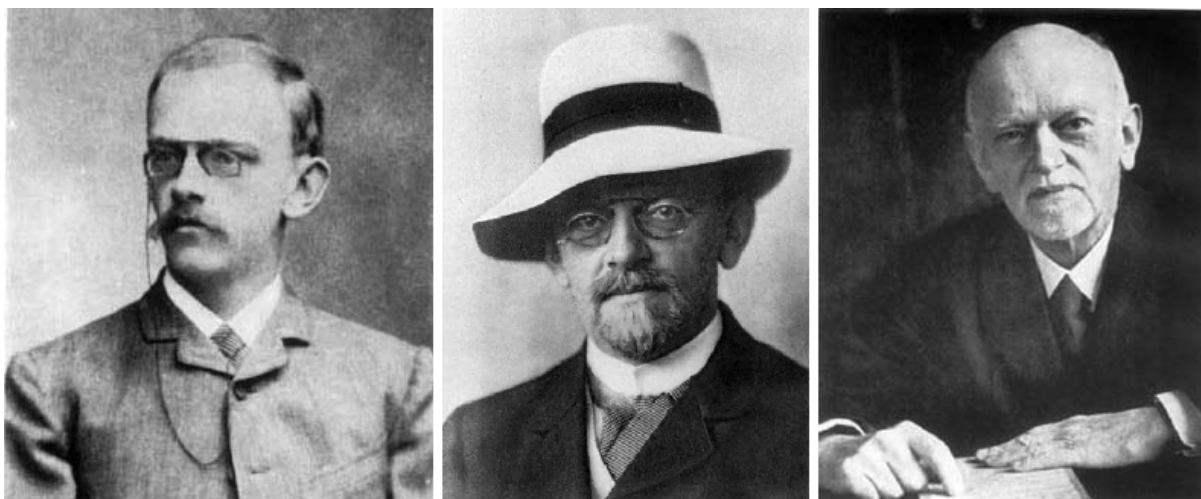
Po ukončení studií se Minkowski zabýval celou řadou otázek v oblasti matematiky i fyziky. Pomineme-li pokrok v oboru kvadratických forem, můžeme dále zmínit objevy na poli geometrické teorie čísel nebo odhalení důsledků speciální teorie relativity, kdy navázal na myšlenky svého bývalého studenta Alberta Einsteina. Hermann Minkowski umírá v lednu roku 1909 ve věku 44 let na zánět slepého střeva. [23]

## **1.2 DAVID HILBERT (1862–1943)**

David Hilbert (obrázek 2) byl matematik německého původu a lze jej bezesporu považovat za jednoho z nejvýznamnějších matematiků 20. století. Narodil se v lednu roku 1862 ve Wehlau poblíž Königsbergu na území Pruska (oblast dnešního Kaliningradu, Rusko).



Zde také vystudoval gymnázium a následně byl přijat na univerzitu v Königsbergu, na které získal pod vedením Ferdinanda von Lindemanna v roce 1885 doktorát za svou práci *Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen*. V následujících letech působil na univerzitě v Königsbergu, kde byl také v roce 1893 jmenován řádným profesorem. V roce 1895 pak odchází působit na katedru matematiky na univerzitě v německém Göttingenu, kde setrval až do konce své kariéry. David Hilbert zemřel v únoru roku 1943.



Obrázek 2 - David Hilbert v letech 1886, 1912 a 1937  
(zdroj: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>; <https://cs.wikipedia.org>)

V průběhu života se David Hilbert věnoval celé řadě otázek v oblasti matematiky a stal se uznávaným odborníkem. Učinil například významný pokrok v teorii invariantů (r. 1888), v práci *Zahlbericht* se zabýval teorií čísel (r. 1897) a v publikaci *Grundlagen der Geometrie* popsal vlastní axiomatický přístup ke geometrii (r. 1899). [23], [29]

V srpnu roku 1900 vystoupil David Hilbert na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži s dnes již slavnou přednáškou *Problémy matematiky*. Hilbertova řeč o matematice 20. století byla plná optimismu, cítil však, že existuje stále řada otázek, které je třeba objasnit. Ve své řeči vymezil celkem 23 matematických problémů, které měly představovat výzvu pro matematiku 20. století, aby zůstala moderní vědou. Tyto problémy dnes známe pod označením *Hilbertovy problémy*. [23] K těmto problémům je nutno podotknout, že celá řada z nich již byla vyřešena, některá Hilbertova uvedená tvrzení byla vyvrácena a některé z problémů jsou dodnes výzvou pro matematiky a informatiky. Jedním z otevřených Hilbertových problémů je nalezení důkazu Riemannovy hypotézy,

který se v současnosti řadí mezi tzv. problémy tisíciletí, na jejichž vyřešení je vypsána odměna jeden milion amerických dolarů. [8]

### 1.3 17. HILBERTŮV PROBLÉM

Před vymezením samotného 17. Hilbertova problému uveďme na tomto místě nejprve tzv. Bachetovu–Lagrangeovu větu (též Lagrangeova věta o čtyřech čtvercích) známou z teorie čísel, která tvrdí, že každé přirozené číslo lze vyjádřit součtem čtyř čtverců nezáporných celých čísel. [22] Platí tedy, že pro každé číslo  $n \in \mathbb{N}$  existují taková čísla  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , že  $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Poprvé tuto větu uvádí již Diofantos z Alexandrie (3. století n. l.) ve svém díle *Aritmetika*. V roce 1621 pak publikoval toto dílo přeložené do latiny a s poznámkami Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638) a její důkaz provedl v roce 1770 Joseph L. Lagrange (1736–1813). [13] V souvislosti s touto větou můžeme též zmínit, že existují taková přirozená čísla, která nelze vyjádřit jako součet tří čtverců nezáporných celých čísel. Jedná se o čísla, která lze vyjádřit ve tvaru  $4^a(8b+7)$ , kde hodnoty  $a, b$  jsou nezáporná celá čísla. David Hilbert svým problémem tuto problematiku přenesl na polynomy a racionální funkce. Nebyl však jediný, kdo se touto otázkou již před rokem 1900 zabýval. [23]

V červenci roku 1885 uvedl Hermann Minkowski při veřejné obhajobě své disertační práce týkající se kvadratických forem odvážnou domněnku, že musí existovat takový reálný, homogenní, pozitivně semidefinitní polynom libovolného stupně vyššího dva ve více než dvou neurčitých, který není možné vyjádřit jako součet čtverců homogenních, reálných polynomů. Jeho oponentem byl David Hilbert, který na závěr obhajoby prohlásil, že je na základě Minkowského výkladu přesvědčen o existenci takových pozoruhodných forem již ve třech neurčitých, které není možné vyjádřit ve tvaru součtu čtverců. Hilbert na Minkowského domněnku navázal a v roce 1888 provedl její důkaz, který potvrdil, že skutečně existují takové reálné pozitivně semidefinitní polynomy, které není možné zapsat jako součet čtverců polynomů. Konkrétní příklad takového polynomu však neuvedl. Problematikou se ovšem zabýval i nadále a zvažoval problém, jak zapsat libovolný pozitivně semidefinitní polynom  $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  jako součet čtverců racionálních funkcí s prvky z  $\mathbb{R}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Důkaz tohoto tvrzení provedl v roce 1893 pro hodnotu  $n=2$ , což korespondovalo i s původní Minkowského domněnkou a homogenním případem polynomu ve třech neurčitých. V roce 1899 pak Hilbert uvedl zajímavý

výsledek, že libovolný segment délky  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , který může být zkonstruován z daných délek  $x_1, x_2, \dots, x_n$  s použitím pravítka a kružítka, je možné sestrojít též bez použití kružítka, pokud je  $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$  reálné algebraické číslo pro libovolné  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{Q}$ . Důkaz obecné platnosti tohoto výsledku ovšem vyžadoval pravdivost v té době nedokázaného tvrzení, že libovolnou pozitivně semidefinitní racionální funkci  $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je možné vyjádřit jako součet čtverců racionálních funkcí  $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Tento fakt a dříve získané výsledky byly pro Davida Hilberta zřejmě motivací, aby zformuloval svůj 17. problém. [26], [28]

**Znění 17. Hilbertova problému:**

*Nalezněte způsob, jak vyjádřit definitní racionální funkci  
jako součet čtverců racionálních funkcí.*

K výše uvedené formulaci 17. Hilbertova problému je nutné dodat, že Hilbert za definitní racionální funkci považoval funkci nezápornou, tedy dle dříve uvedené terminologie pozitivně semidefinitní racionální funkci. [14]

Pozitivní odpověď na 17. Hilbertův problém našel poměrně brzy rakouský matematik arménskému původu vyrůstající v Liberci (dříve Reichenberg) Emil Artin (1898–1962). Ten využil tzv. Artin-Schreierovy teorie o reálně uzavřených tělesech a provedl existenční důkaz uvedeného tvrzení (17. Hilbertova problému). Závěry publikoval již v roce 1927 ve svém článku *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate* (viz [1]). Artinovy postupy ovšem nebyly konstruktivní (algoritmizovatelné) a jeho řešení nám neposkytuje žádnou konkrétní formu  $f$  ve tvaru součtu čtverců racionálních funkcí. [10], [30] Konstruktivní řešení 17. Hilbertova problému našel až v roce 1984 Charles N. Delzell (1953–). [7]

Vraťme se nyní krátce zpět k Davidu Hilbertovi a problematice pozitivně semidefinitních polynomů, které není možné vyjádřit ve tvaru součtu čtverců polynomů. Již bylo uvedeno, že Hilbert sám dokázal existenci takových polynomů, nicméně konkrétní příklad nevedl. První jednoduchý příklad pozitivně semidefinitního polynomu, který není možné rozložit na součet čtverců polynomů, uvedl až v roce 1967 Theodor S. Motzkin (1908–1970). Jedná se o polynom dvou neurčitých v následujícím tvaru, který dnes běžně označujeme jako *Motzkinův polynom*. [26]

**Motzkinův polynom (1967):**

$$F(x, y) = x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) + 1$$

Z výše uvedeného vyjádření je zřejmé, že se jedná o polynom stupně 6, což by se snadno dalo ukázat roznásobením závorek, čímž bychom získali členy  $x^4 y^2$  a  $x^2 y^4$ , které stupeň tohoto polynomu určují. Nyní je třeba ukázat, že je uvedený polynom  $F(x, y)$  skutečně pozitivně semidefinitní. To lze několika způsoby, ujmeme na tomto místě experimentální metodu, kterou můžeme považovat za jistý středoškolský postup. V polynomu se vyskytují výhradně neurčité v sudých mocninách, budou tedy nabývat vždy pouze kladných hodnot. Otázkou zůstává, zda posun ve směru osy  $z$  nezpůsobí protnutí roviny vymezené osami  $x, y$ , čímž by pro některé dvojice čísel nabýval polynom záporných hodnot. Volme nyní několik  $x, y \in \mathbb{Z}$  a výsledné hodnoty zanesme přehledně do tabulky.

**Tabulka 1 - Dosazování celočíselných hodnot za neurčité  $x, y$**

$x$	0	0	1	1	-1	1	-1	2	2	-2	2	3
$y$	0	1	0	1	-1	-1	1	1	2	-2	3	3
$F(x, y)$	1	1	1	0	0	0	0	9	81	81	361	1216

Výsledky vypočtené v tabulce 1 poukazují na skutečnost, že znaménko neurčitých  $x, y$  nemá vliv na výslednou hodnotu polynomu. Platí tedy  $F(x, y) = F(-x, y) = F(x, -y) = F(-x, -y)$ . Polynom  $F(x, y)$  navíc nabývá pouze nezáporných hodnot, přičemž s rostoucími hodnotami neurčitých  $x, y$  (bez ohledu na znaménko) roste i hodnota polynomu  $F(x, y)$ . Minimum pak nastává pro hodnoty neurčitých  $x = \pm 1 \wedge y = \pm 1$ , pro které se polynom  $F(x, y) = 0$ . Pokud neurčité  $x, y \in (-1; 1)$ , pak s blížícími se hodnotami neurčitých k nule se polynom  $F(x, y)$  postupně blíží k jedné. Závěrem lze tedy konstatovat, že Motzkinův polynom je skutečně pozitivně semidefinitní. Zbývá dokázat, že není možné tento polynom vyjádřit ve tvaru součtu čtverců. Techniky potřebné k důkazu ovšem přesahují úroveň běžné střední školy. Ukončeme tedy na tomto místě středoškolskou vsuvku a provedme s využitím literatury [9], [26] řádný důkaz, že Motzkinův polynom není možné vyjádřit ve tvaru součtu čtverců polynomů.

**Důkaz 1:** Mějme Motzkinův polynom v dříve uvedeném tvaru:

$$F(x, y) = x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) + 1$$

V prvním kroku je nutné ověřit, že polynom  $F(x, y) \geq 0$ . Pokud je  $x = 0 \vee y = 0$ , pak pro funkční hodnotu zadaného polynomu platí  $F(x, y) = 1$ . Uvažujme nyní situaci, že součin  $xy \neq 0$ . Pak platí, že  $x^2$ ,  $y^2$  a  $x^{-2}y^{-2}$  nabývají kladných hodnot a jejich součin  $x^2 y^2 x^{-2} y^{-2}$  je roven 1. Z tohoto důvodu a na základě nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem musí platit vztah:

$$x^2 + y^2 + x^{-2} y^{-2} \geq 3$$

Provedeme následující úpravy:

$$x^2 + y^2 - 3 + \frac{1}{x^2 y^2} \geq 0$$

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) + 1 \geq 0$$

Na levé straně nerovnosti se nyní vyskytuje Motzkinův polynom v původním zadaném tvaru, kdy musí nutně platit, že  $x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) + 1 \geq 0$ . Dokázali jsme tedy, že tento polynom je pozitivně semidefinitní.

Předpokládejme nyní, že je možné vyjádřit Motzkinův polynom ve tvaru součtu čtverců, tedy, že  $F(x, y) = \sum f_i(x, y)^2$ , kde  $f_i$  jsou polynomy s reálnými koeficienty. Pak zřejmě platí vztah  $\sum f_i(x, 0)^2 = F(x, 0) = 1$ . Odsud vyplývá, že  $f_i(x, 0) = c_i$  je konstanta a tudíž platí, že  $f_i(x, y) = c_i + y g_i(x, y)$ . Analogicky postupujeme pro druhou neurčitou, čímž získáme vztah ve tvaru  $f_i(x, y) = c'_i + x g'_i(x, y)$ . Je zřejmé, že pro konstanty platí  $c_i = c'_i$ . Hledaný polynom tedy musí být ve tvaru  $f_i(x, y) = c_i + xy h_i(x, y)$ . Nyní je nutné umocnit tento polynom dle vzorce  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  a zohlednit součet všech čtverců polynomů, čímž získáme rovnost:

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) + 1 = x^2 y^2 \sum h_i^2 + 2xy \sum c_i h_i + \sum c_i^2$$

Po úpravách:

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) - x^2 y^2 \sum h_i^2 = 2xy \sum c_i h_i + \sum c_i^2 - 1$$

Zaměříme-li se nyní na stupně jednotlivých monomů v uvedené rovnosti, pak všechny monomy na pravé straně nejsou vyššího stupně než 3 a monomy na levé straně nejsou nižšího stupně než 4. Uvážíme-li, že zadaný polynom  $F$  je stupně 6, pak polynom  $f_i$  nemůže být vyššího stupně než 3. Pokud se nyní vrátíme ke vztahu  $f_i(x, y) = c_i + xyh_i(x, y)$ , je zřejmé, že o výsledném stupni polynomu  $f_i$  rozhoduje součin  $xyh_i(x, y)$ . Díky tomu můžeme určit stupeň polynomu  $h_i$ . Pokud bude stupeň polynomu  $f_i$  roven 3, pak stupeň polynomu  $h_i$  musí být 1, a v případě, že stupeň polynomu  $f_i$  je 2, pak bude polynom  $h_i$  nultého stupně. Můžeme tedy zapsat:

$$\text{st } f_i \leq \frac{1}{2} \text{st } F$$

$$\text{st } h_i = \text{st } f_i - 2 \leq \frac{1}{2} \text{st } F - 2 = 1$$

Z toho důvodu musí pro levou stranu rovnosti platit  $x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) - x^2 y^2 \sum h_i^2 = 0$ , tedy po úpravě  $x^2 + y^2 - 3 = \sum h_i^2$ . Tím ovšem získáme spor, protože pro hodnoty neurčitých  $x = y = 0$  je  $x^2 + y^2 - 3 < 0$  a mělo by platit, že  $-3 = \sum h_i^2$ , což zřejmě není možné.  $\square$

Ukázali jsme tedy, že Motzkinův polynom, i přes to, že je pozitivně semidefinitní, není možné vyjádřit ve tvaru součtu čtverců s reálnými koeficienty. Nejedná se ovšem o jediný případ takového polynomu. Jako další příklad uveďme na tomto místě polynomy nalezené americkým matematikem Raphaellem M. Robinsonem (1911–1995) v roce 1973 ve tvaru:

$$f(x, y) = x^2 (x^2 - 1)^2 + y^2 (y^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1)$$

$$g(x, y, z) = x^2 (x - 1)^2 + y^2 (y - 1)^2 + z^2 (z - 1)^2 + 2xyz(x + y + z - 2)$$

[26]

Z povahy výše uvedených polynomů, samotného zápisu důkazu 1 i jeho struktury je patrné, že obtížnost problematiky přesahuje možnosti běžných středoškolských studentů.

Počítačové technologie nám ovšem umožňují jim problematiku přiblížit, studovat některé jednodušší případy pozitivně semidefinitních polynomů a s využitím matematického softwaru prostřednictvím počítačové simulace různých situací společně vyvozovat závěry, byť se zrovna nebude jednat o formálně přesné důkazy.

Přejděme ovšem nyní k samotnému rozkladu polynomu na součet čtverců.

## 2 ROZKLAD POLYNOMU NA SOUČET ČTVERCŮ S VYUŽITÍM POČÍTAČE

Rozklad jistého polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů (zkráceně SOS z anglického *sum of squares*) představuje jednu z možných metod důkazu, že je tento polynom pozitivně semidefinitní (též nezáporný). V případě polynomů jedné neurčité se zpravidla jedná o poměrně jednoduché příklady řešitelné i na úrovni středních škol, kdy při hledání požadovaného rozkladu často vystačíme se znalostmi základních algebraických vzorců a s běžně vyučovanými technikami úprav polynomů. Opačným případem jsou polynomy vyšších stupňů ve více neurčitých. Při hledání rozkladu jsou zde nezbytné hlubší znalosti vyšší matematiky, kupříkladu můžeme zmínit maticový počet a determinanty, určení charakteristického polynomu a výpočet vlastních čísel matice, případně nalezení Choleského dekompozice nebo aplikace Descartova znaménkového pravidla. Řada těchto úloh je navíc tak rozsáhlých a komplikovaných, že není v lidských možnostech najít rozklad klasickými metodami a je nutné využít počítačových technologií – matematického softwaru jakým je například MATLAB v součinnosti s balíčky SeDuMi a SOSTOOLS, Wolfram Mathematica nebo GeoGebra coby zástupce programů dynamické geometrie. Pomocí uvedeného softwaru můžeme realizovat kompletní výpočet nebo nám může být oporou při řešení dílčích kroků. Ve školním prostředí pak představuje matematický software ideální prostředek, jak názorně prezentovat studentům, ať na střední škole nebo v rámci kurzů (počítačové) algebry na škole vysoké, problematiku rozkladu polynomu na SOS, přičemž tento přístup může vést k lepšímu osvojení si vybraných postupů, které se na úrovni středních škol mohou hodit například řešitelům matematických olympiád. Podívejme se nyní stručně na obecný princip rozkladu a podmínky nutné pro jeho existenci.

**Princip rozkladu polynomu na SOS:** Reálný polynom  $f$  je pozitivně semidefinitní pokud existují takové reálné polynomy  $g_1, g_2, \dots, g_t$ , že platí rovnost:

$$f = \sum_{i=1}^t g_i^2$$

[16]

Zde by ovšem mohlo vyvstat několik otázek:

1. Lze každý pozitivně semidefinitní polynom rozložit na součet čtverců polynomů?
2. Jaké jsou nutné podmínky existence rozkladu polynomu na SOS?
3. Jakým způsobem (jednoduše) nalézt požadované polynomy  $g_i$ ?
4. Je získaný rozklad polynomu na součet čtverců polynomů jedinečný?

Odpověď na první z uvedených otázek našel již David Hilbert v roce 1888, který navázal na domněnku Hermanna Minkowského, a dokázal, že skutečně existují takové reálné, pozitivně semidefinitní polynomy, které nelze rozložit na součet čtverců polynomů s reálnými koeficienty. Ostatně jako konkrétní příklady takových polynomů můžeme uvést již zmíněný Motzkinův polynom a polynomy nalezené R. M. Robinsonem. Zaměřme se nyní na druhou z otázek týkající se podmínek existence rozkladu, a to i v jistém kontextu školské matematiky.

## 2.1 NUTNÉ PODMÍNKY EXISTENCE ROZKLADU POLYNOMU NA SOS

Jednou ze základních podmínek existence rozkladu polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů je, aby byl tento polynom sudého stupně  $2m$ , kde  $m \in \mathbb{N}$ . Druhou (obecnější) z podmínek pak představuje vlastnost, že daný polynom  $f$  je pozitivně semidefinitní. Této podmínky se právě využívá při důkazu, že je polynom pozitivně semidefinitní, platí totiž implikace:

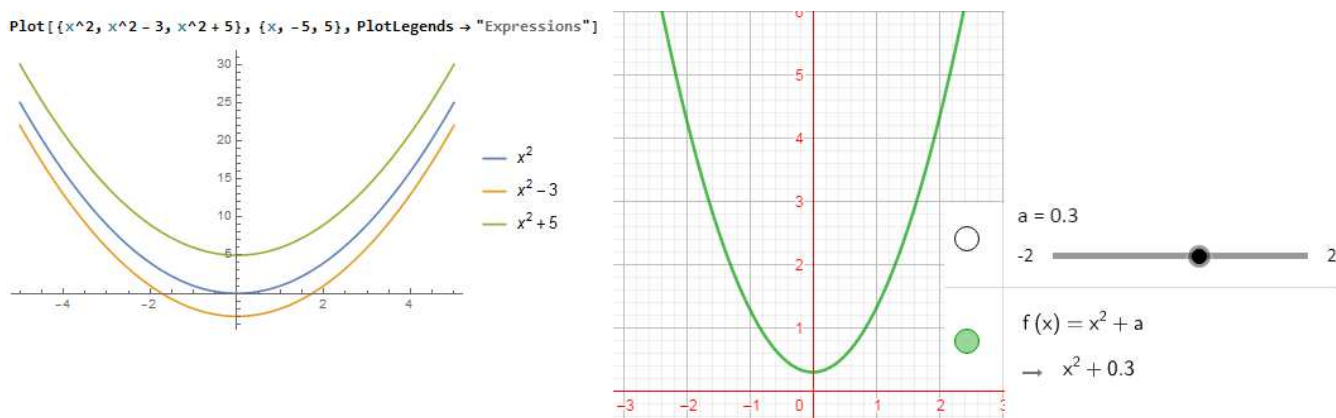
*existence rozkladu polynomu  $f$  na SOS  $\Rightarrow$  polynom  $f$  je pozitivně semidefinitní*

Nutné je na tomto místě ovšem upozornit, že výše uvedenou implikaci nelze obrátit, což je na základě dříve uvedených informací a konkrétních příkladů zřejmé. Z dalších podmínek můžeme rovněž poznamenat, že i Gramova matice daného polynomu  $f$  musí být pozitivně semidefinitní, čehož lze efektivně využít převážně při volbě klasických metod pro hledání rozkladu. [25]



Pokud bychom chtěli přiblížit uvedené pojmy studentům a zdůraznit důležitost sudosti stupně polynomu při hledání jeho rozkladu na SOS, pak můžeme využít dynamických možností programu GeoGebra, kdy se navíc nabízí příležitost využít badatelského přístupu k výuce matematiky. Studenti tak mohou sami praktickou manipulací s dynamickými prvky pochopit pojem *být pozitivně semidefinitní* a nalézt úzký vztah mezi uvedenými vlastnostmi. Pro demonstraci základních pojmů je též možné využít program Wolfram Mathematica.

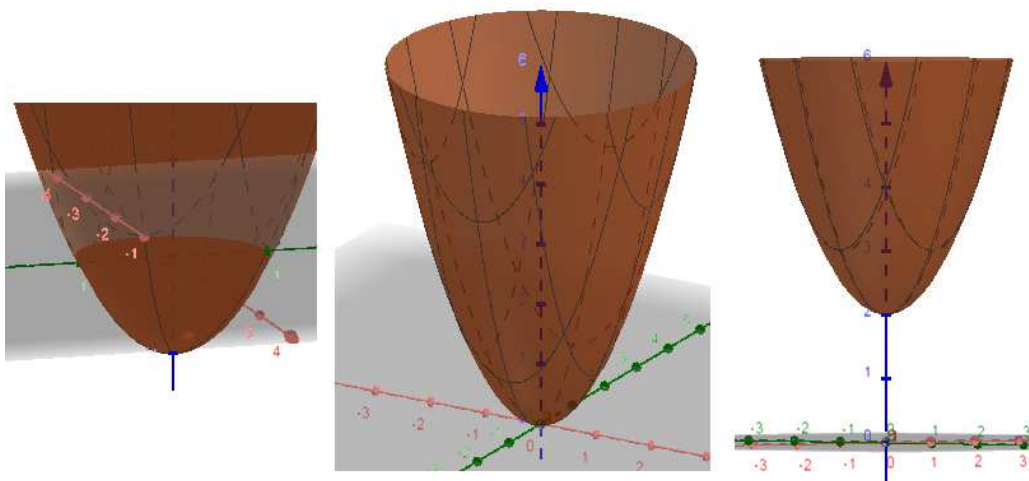
Zabývejme se nejprve možnostmi, jak studentům prezentovat dříve uvedenou definici 1, tedy jakým způsobem se chová pozitivně (negativně) semidefinitní polynom. Obdobně jako u jiných pasáží učiva, je nezbytné navázat na dosavadní znalosti studentů. Využití můžeme elementárních funkcí, konkrétně základní paraboly ve tvaru  $y = x^2$  a jejího posunu ve směru osy  $y$ . V programu Wolfram Mathematica pak můžeme do jednoho obrázku zanechat grafy funkcí v různých polohách, které mohou nastat, a pro přehlednost je barevně odlišit (obrázek 3 vlevo). Nicméně se jedná pouze o stacionární model. Dynamiky můžeme docílit s využitím programu GeoGebra. Parabola by byla zadána ve tvaru  $y = x^2 + a$  s parametrem  $a$ , který je vázán na posuvník (obrázek 3 vpravo). Změnami parametru  $a$  dochází k posunu vrcholu paraboly ve směru osy  $y$  a je možné diskutovat vlastnosti v jednotlivých polohách.



**Obrázek 3 - Problematika pozitivní semidefinitnosti demonstrovaná na základní parabole**

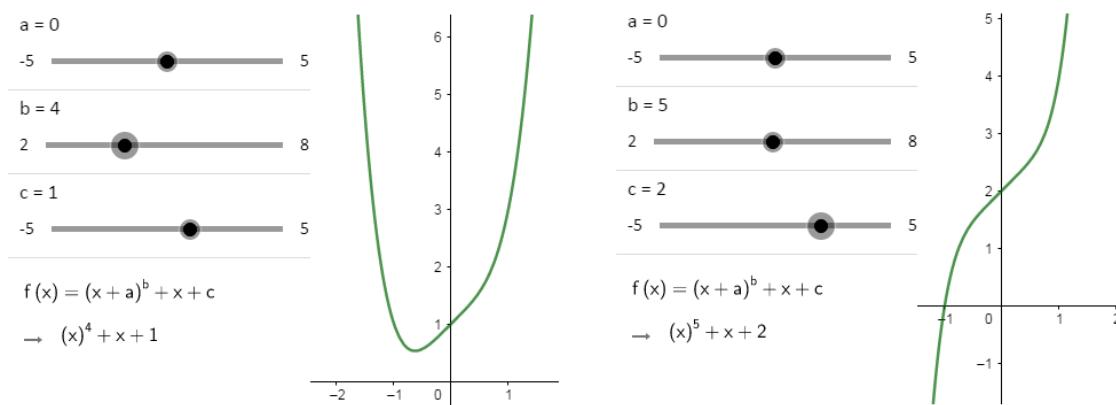
Obdobně bychom postupovali v případě polynomů dvou neurčitých, kdy se celá problematika přesune do trojrozměrného prostoru. Pro demonstraci pozitivní semidefinitnosti můžeme využít 3D grafiky programu GeoGebra a parabola nám přejde v rotační paraboloid daný rovnicí  $f(x, y) = x^2 + y^2 + a$ , kde  $a$  je opět parametr vázaný na

posuvník a jeho změnami dochází k posunu vrcholu paraboloidu ve směru osy  $z$  (obrázek 4). Student může na paraboloid nahlížet z různých směrů a identifikovat okamžik, kdy se jedná o pozitivně (semi)definitní případ a kdy jej naopak protne rovina vymezená osami  $x, y$ .



Obrázek 4 - Problematika pozitivní semidefinitnosti v trojrozměrném prostoru

Vraťme se nyní k nutné podmínce existence rozkladu, že daný polynom  $f$  musí být sudého stupně. Čtenář by mohl namítnout, že tato podmínka je již obsažena ve vlastnosti pozitivní semidefinitnosti polynomu  $f$ . Zde je ovšem nutné upozornit, že rozkladem polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů se právě snažíme dokázat, že je tento polynom pozitivně semidefinitní a na počátku řešení tuto informaci nemáme. Oproti tomu určení stupně polynomu je snadnou záležitostí a můžeme jej vnímat jako výchozí bod při hledání rozkladu. Pokud bychom chtěli od studentů vyvodit, proč musí být pro existenci rozkladu polynom sudého stupně, můžeme opět využít program GeoGebra. Celou situaci demonstrujeme na polynomu jedné neurčité s parametry vázanými na posuvníky způsobující změnu stupně, ale i posun ve směrech os  $x$  a  $y$ .



Obrázek 5 - Grafy polynomů sudých a lichých stupňů v programu GeoGebra

Z obrázku 5 je odpověď zřejmá. Grafy polynomů sudých stupňů jsou v tomto smyslu vždy konvexní a záleží už pouze na poloze vzhledem k ose  $x$ . Oproti tomu u polynomů lichých stupňů jsou zřejmě vždy obě limity v nevlastních bodech nevlastní a různé. Automaticky tudíž není tento polynom pozitivně semidefinitní a rozklad nemůže existovat. V případě, že je tedy zadán polynom lichého stupně, můžeme na základě tohoto pozorování automaticky konstatovat, že tento polynom není možné rozložit na součet čtverců polynomů. Obdobně postupuje při hledání rozkladu i počítačový software, kdy v případě programu MATLAB v součinnosti s balíčky SeDuMi a SOSTOOLS nám po zadání polynomu  $f$  a vyvolání příkazu `findsos` v uvedené syntaxi počítač vrátí hlášení, že polynom nemůže být rozložen na SOS:

```
>> syms x;
>> f=x^3+x^2+x+10;
>> [Q,Z]=findsos(f)
Degree in x is not even. The polynomial cannot be a sum of squares
```

Přejdeme nyní ke zbývajícím dvěma otázkám a zabývejme se samotným postupem rozkladu daného polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů a jeho jedinečnosti.

## 2.2 ZPŮSOB ROZKLADU POLYNOMU NA SOS A JEDINEČNOST VÝSLEDKU

Pro demonstraci klasického i počítačového postupu rozkladu zvolme záměrně jednoduchý příklad, který by bylo možné zadat i studentům na středních školách.

### Příklad 1 (SŠ):

V oboru reálných čísel rozhodněte o řešitelnosti rovnice  $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$ .

### Řešení:

Zadáním je požadováno rozhodnout o řešitelnosti uvedené polynomiální rovnice bez nutnosti hledat případné konkrétní řešení. Vyřešme tento příklad s pomocí metody rozkladu na součet čtverců. Nejprve si označme levou stranu rovnice následovně:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x + 8$$

Vidíme, že polynom  $f(x)$  je polynomem stupně 4, splňuje tedy podmínku na sudost stupně. Nyní začneme polynom postupně upravovat.

Nejprve z prvních tří členů vytkneme  $x^2$  s tím, že člen  $2x^2$  „roztrhneme“ a ponecháme si  $x^2$  pro další úpravy:

$$f(x) = x^2(x^2 - 2x + 1) + x^2 + 4x + 8$$

Využijeme znalosti jednoho ze základních algebraických vzorců  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  pro úpravu závorky a zároveň součet  $x^2 + 4x$  doplníme na čtverec podle druhého ze vzorců, tj.  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Při doplnění nesmíme zapomenout odečíst hodnotu 4, aby zůstal výraz beze změny:

$$f(x) = x^2(x-1)^2 + (x+2)^2 - 4 + 8$$

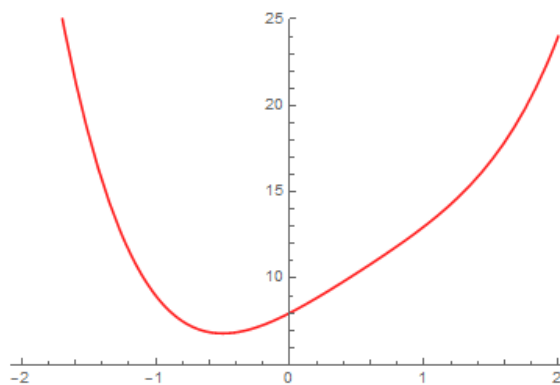
V polynomu se již postupně začínají objevovat druhé mocniny. Nyní využijeme vztahu  $(ab)^r = a^r b^r$  a „vnoříme“  $x^2$  do závorky a po další úpravě získáme polynom ve tvaru:

$$f(x) = (x^2 - x)^2 + (x+2)^2 + 4$$

Odmocněním čísla 4 získáme finální podobu rozkladu polynomu  $f(x)$  na součet čtverců:

$$f(x) = (x^2 - x)^2 + (x+2)^2 + 2^2$$

Získali jsme vyjádření výchozího polynomu  $f(x)$  ve tvaru součtu tří čtverců. Uvážíme-li, že pro hodnoty neurčitých  $x$  platí, že  $x \in \mathbb{R}$  a jejich čtverce (druhé mocniny) jsou vždy kladná čísla, pak docházíme k závěru, že výsledný rozklad představuje součet tří kladných čísel. Na základě toho je zřejmé, že polynom  $f(x)$  je pozitivně definitní. Nikdy tudíž nenastane rovnost nule, z čehož vyplývá závěr, že původní zadaná polynomiální rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení. To je možné si ověřit též konstrukcí grafu polynomu  $f(x)$ , kdy tento graf nikdy neprotne osu  $x$  (obrázek 6). Vyřešením příkladu 1 jsme zároveň objevili důležitou vlastnost reálných polynomů jedné neurčité, pro které pojmy *být pozitivně definitní* a *být součtem čtverců* splývají.



Obrázek 6 - Graf pozitivně definitního polynomu  $f(x)$

Řešení příkladu 1 poskytuje poměrně jednoduchý klasický středoškolský způsob rozkladu polynomu na součet čtverců, čímž jsme získali jistou odpověď na třetí z otázek. Pracovali jsme ovšem pouze s polynomem čtvrtého stupně v jedné neurčité a postup není univerzální.

V případě polynomů vyšších stupňů ve více neurčitých tato technika řešení nestačí. Ponechme si nicméně tento jednoduchý polynom  $f(x)$  ve stávajícím tvaru a pokusme se najít s oporou literatury [16], [20], [25] a s využitím matematického softwaru univerzální způsob rozkladu polynomu na SOS. Konkrétně využijeme program MATLAB v součinnosti s balíčky SeDuMi a SOSTOOLS, které je možné bezplatně stáhnout z internetu, a program Wolfram Mathematica 11. Při řešení se pak budeme zároveň snažit najít odpověď na čtvrtou z položených otázek, tedy, zda je rozklad jedinečný.

Abychom mohli realizovat výpočet s využitím matematického softwaru, je nutné nejprve celou problematiku převést do jazyka programů počítačové algebry a do podoby, se kterou vůbec můžeme s využitím výpočetní techniky provádět požadované kroky výpočtu. Ideální prostředek pro práci v matematickém softwaru představuje maticový počet, kdy se můžeme opřít o řadu známých algoritmů z oblasti lineární algebry a je zde patrná provázanost klasické a počítačové matematiky. Prvním krokem hledání rozkladu polynomu na SOS tedy bude určit již dříve zmíněnou Gramovu matici tohoto polynomu.

Nejprve musíme do programu MATLAB zavést neurčitou  $x$  a zadaný polynom  $f(x)$ , pak zadáme příkaz *findsos* v níže uvedené syntaxi:

```
>> syms x;
>> f=x^4-2*x^3+2*x^2+4*x+8;
>> [Q,Z,D]=findsos(f,'rational')
```

Program po spuštění příkazu nalezne celočíselnou Gramovu matici  $Q$ , vektor  $z$  skládající se z monomů hledaného rozkladu a hodnotu  $D$ , kdy platí vztah:

$$z \cdot Q \cdot z^T = D \cdot f(x)$$

V tomto konkrétním případě vypadá výstup následovně:

$$\begin{array}{r}
 Q = \\
 \begin{array}{ccc}
 8 & 2 & -1 \\
 2 & 4 & -1 \\
 -1 & -1 & 1
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 z = \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 x \\
 x^2
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 D = \\
 \begin{array}{c}
 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Poznamenejme na tomto místě, že program MATLAB vydá hledaný vektor monomů  $z$  v podobě sloupcového vektoru, v práci jej však budeme automaticky vnímat jako vektor řádkový a vektor k němu transponovaný  $z^T$  bude standardně vektor sloupcový. Dosazením získaného výstupu do výše uvedené rovnosti získáme vztah ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1, & x, & x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$$

Čtenář by roznásobením snadno ověřil, že výše uvedená rovnost platí. Pozastavme se ovšem nyní v této fázi výpočtu a zamysleme se nad získaným výstupem, včetně komentáře algoritmu běžícího na pozadí. Již bylo řečeno, že obecně pro rozklad reálného polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů platí vztah  $f = \sum_{i=1}^t g_i^2$ . Umocněním jednotlivých polynomů  $g_i$  musíme tedy zpětně získat původní polynom  $f$ . V tomto konkrétním jednoduchém případě zadaného polynomu  $f(x)$  tedy snadno nahlédneme, že hledané monomy musí být právě  $1, x, x^2$ . Obecně pak musí platit, že máme-li polynom  $f$  stupně  $2m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), potom všechny monomy obsažené v získaném vektoru  $z$  musí být stupně rovného nebo menšího  $m$ .

Přejdeme nyní k získané matici  $Q$  a pro další výpočty uijme značení shodné s článkem [25]. Matice  $Q = (q_{i,j})$  je symetrická, čtvercová matice typu  $k \times k$  s prvky chápanými jako proměnné. Pro výpočet konkrétních prvků této matice musíme nejprve určit množinu  $\Lambda_m = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$ , kde hodnoty  $\beta_k$  představují hodnoty exponentů u jednotlivých

monomů. V tomto případě se jedná po řadě o hodnoty  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 = 2$ . Je zřejmé, že výsledná matice musí být tedy symetrická typu  $3 \times 3$  v obecném tvaru:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

Následně musíme vyřešit systém lineárních rovnic vycházející z obecného vztahu pro zadaný polynom  $f = z.Q.z^T$ , tedy pro určení jednotlivých hodnot  $q_{i,j}$  musíme vyřešit systém lineárních rovnic ve tvaru  $\sum_{\beta_i+\beta_j=\alpha} q_{i,j} = a_\alpha$  s jednou rovnicí pro každé  $\alpha \in \Lambda_{2m}$ , kde hodnota  $\alpha$  představuje exponenty a  $a_\alpha$  koeficienty příslušných členů zadaného polynomu  $f$ .

Rozepišme nyní podrobně výpočet konkrétní matice  $Q$  pro zadaný polynom  $f(x)$ :

$$\begin{array}{lll} q_{11} : & \beta_1 + \beta_1 = 0 + 0 = 0 & \Rightarrow q_{11} = 8 \\ q_{12} = q_{21} : & \beta_1 + \beta_2 = \beta_2 + \beta_1 = 0 + 1 = 1 + 0 = 1 & \Rightarrow 2q_{12} = 2q_{21} = 4; q_{12} = q_{21} = 2 \\ q_{13} = q_{31} : & \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1 = \beta_2 + \beta_2 = 0 + 2 = 2 + 0 = 1 + 1 = 2 & \Rightarrow 2q_{13} + q_{22} = 2q_{31} + q_{22} = 2 \\ q_{22} : & \beta_2 + \beta_2 = \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1 = 1 + 1 = 0 + 1 = 1 + 0 = 2 & \Rightarrow q_{22} + 2q_{13} = q_{22} + 2q_{31} = 2 \\ q_{23} = q_{32} : & \beta_2 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_2 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3 & \Rightarrow 2q_{23} = 2q_{32} = -2; q_{23} = q_{32} = -1 \\ q_{33} : & \beta_3 + \beta_3 = 2 + 2 = 4 & \Rightarrow q_{33} = 1 \end{array}$$

Matice se nám již začíná rýsovat, nicméně si nyní všimněme problému, který nastal u prvků  $q_{13}$  a  $q_{22}$  (analogicky platí pro prvek  $q_{31}$ , je ovšem zřejmé, že  $q_{13} = q_{31}$  a proto se stačí zabývat pouze uvedenou dvojicí). Z uvedené lineární rovnice o dvou neznámých nelze jednoznačně určit obě neznámé. Bude zde existovat nekonečně mnoho řešení, která je nutná zapsat pomocí parametru. Označme jej  $\lambda$  a položme kupříkladu  $q_{22} = \lambda$ .

Po úpravách pak získáme prvek  $q_{13}$  ve tvaru  $q_{13} = \frac{2-\lambda}{2}$ . Získali jsme hledanou matici  $Q$

ve výsledném tvaru:

$$Q = \begin{pmatrix} 8 & 2 & \frac{2-\lambda}{2} \\ 2 & \lambda & -1 \\ \frac{2-\lambda}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nalezená Gramova matice  $Q$  zadaného reálného polynomu  $f(x)$  obsahuje parametr  $\lambda \in \mathbb{R}$  a je zřejmé, že pro volbu  $\lambda = 4$  bychom se vrátili zpět k celočíselnému tvaru matice, který vydal program MATLAB. Na tomto místě je ovšem nutné upozornit, že není zpravidla možné volit parametr  $\lambda$  libovolně – matice  $Q$  musí splňovat dříve uvedenou podmínku, že je pozitivně semidefinitní. Vymežeme proto nyní formou zkrácené věty, která nám umožní ověřit, zda daná matice  $Q$  splňuje podmínku pozitivní semidefinitnosti, pojem *pozitivně semidefinitní matice*. Celé znění věty 1 včetně důkazu nalezne čtenář v [3] nebo [11].

**Věta 1:** Necht'  $M$  je čtvercová, symetrická matice  $n$ -tého řádu. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

- i) matice  $M$  je pozitivně definitní (semidefinitní)
- ii) všechna vlastní čísla matice  $M$  jsou kladná (nezáporná)
- iii) všechny hlavní minory matice  $M$  jsou kladné (nezáporné)
- iv) platí Sylvesterovo kritérium, tzn.:

$$|m_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad |M| > 0$$

**Poznámka:** Sylvesterovo kritérium uvedené v bodě *iv*) platí pouze pro pozitivně definitní matice. Pro pozitivně semidefinitní matice neplatí analogie Sylvesterova kritéria. [33]

Rozhodněme nyní, pro které hodnoty parametru  $\lambda$  je matice  $Q$  pozitivně (semi)definitní. Využijeme výše uvedené věty 1, konkrétně pak druhé z ekvivalentních vlastností, a s pomocí programu Wolfram Mathematica určíme nejprve charakteristický polynom, následně budeme zvažovat nezápornost vlastních čísel. Nejdříve do programu Mathematica zavedeme matici  $Q$ , následně budeme chtít určit její charakteristický polynom (příkaz *CharacteristicPolynomial*) se srovanými koeficienty u zavedené neurčité  $x$  (příkaz *Collect*). Získáme tak polynom v následujícím tvaru:

```
In[14]:= Q = {{8, 2, (2 - λ) / 2}, {2, λ, -1}, {(2 - λ) / 2, -1, 1}};
Collect[CharacteristicPolynomial[Q, x], x]
Out[15]= -x3 +  $\frac{1}{4}x^2(36 + 4\lambda) + \frac{1}{4}x(-8 - 40\lambda + \lambda^2) + \frac{1}{4}(-64 + 36\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3)$ 
```

Vlastní čísla matice  $Q$  představují kořeny nalezeného charakteristického polynomu  $p(x)$ , hledáme tedy takové hodnoty parametru  $\lambda$ , pro které má tento polynom pouze nezáporné



kořeny, resp. nemá žádný záporný kořen. Zde lze vhodně využít Descartova znaménkového pravidla, které říká, že maximální možný počet kladných reálných kořenů je roven počtu znaménkových změn u koeficientů polynomu  $p(x)$ , analogicky pak je maximální možný počet záporných kořenů roven počtu znaménkových změn v polynomu  $p(-x)$ . Tento polynom je po úpravách zřejmě ve tvaru:

$$p(-x) = x^3 + x^2(\lambda + 9) + \frac{1}{4}x(-\lambda^2 + 40\lambda + 8) + \frac{1}{4}(-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 36\lambda - 64)$$

Matice  $Q$  je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když nenastanou ve výše uvedeném polynomu  $p(-x)$  žádné znaménkové změny. Musí tedy nutně platit, že:

$$\lambda + 9 \geq 0 \wedge -\lambda^2 + 40\lambda + 8 \geq 0 \wedge -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 36\lambda - 64 \geq 0$$

Vidíme, že je nutné vyřešit tři nerovnice, přičemž jedna z nich je dokonce kubická. Bylo by sice možné při jejich řešení využít známých vztahů a vzorců (např. Vietovy vzorce v řešení kvadratické nerovnice, Cardanovy vzorce pro vyřešení kubické nerovnice či užití Hornerova schématu s jistou experimentální metodou a uhádnutím kořene), nicméně by se jednalo o náročný a poměrně rozsáhlý proces. Pro urychlení výpočtu proto opět využijeme program Wolfram Mathematica, do kterého zadáme všechny podmínky na parametr  $\lambda$  a pomocí příkazu *Reduce* získáme požadovaný interval, ve kterém je matice  $Q$  pozitivně semidefinitní:

```
In[16]:= N[Reduce[ $\lambda + 9 \geq 0 \ \&\& \ -\lambda^2 + 40 \lambda + 8 \geq 0 \ \&\& \ -\lambda^3 + 4 \lambda^2 + 36 \lambda - 64 \geq 0$ ,  $\lambda$ ]]
Out[16]:= 1.60623 ≤  $\lambda$  ≤ 7.62164
```

V případě, že bychom chtěli dosazovat pouze celočíselné hodnoty, pak se jedná o množinu  $\lambda \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Ukončeme ovšem na tomto místě zamyšlení nad postupem výpočtu Gramovy matice polynomu  $f$  a vraťme se k počítačovému řešení zadaného problému a původní matici  $Q$ , kterou na začátku řešení vydal program MATLAB.

V dalším kroku je nutné tuto matici  $Q$  převést s využitím symetrických úprav na diagonální matici  $D$ , přičemž současně nalezneme matici  $A$ , kdy platí vztah  $Q = A^T D A$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} Q & & & E & & \\ 8 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} D & & & A^T & & \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Výsledný rozklad daného polynomu  $f(x)$  na SOS získáme ze vztahu  $V \cdot z^T$ . Sloupcový vektor monomů  $z$  již známe, musíme ovšem vypočítat matici  $V$ , která je dána vztahem  $V = \sqrt{D} \cdot A^{-1}$ . V tomto jednoduchém případě by nebylo těžké získat matici  $A$  klasickým postupem, pro demonstraci využití matematického softwaru však přenecháme řešení tohoto problému počítači. V programu Wolfram Mathematica zavedeme matici  $A^T$  a s využitím příkazu *Transpose* v uvedené syntaxi získáme původní matici  $A$ , kterou si necháme zobrazit pomocí příkazu *MatrixForm*.

```
MaticeAT = {{1, 0, 0}, {1, -2, 4}, {0, 1, 2}};
MaticeA = Transpose[MaticeAT];
MatrixForm[MaticeA]
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Stejně tak realizujeme v programu Wolfram Mathematica výpočet matice  $V$ . Matici  $A$  již máme v programu zavedenou a matici inverzní vypočteme pomocí příkazu *Inverse*, zbývá zavést diagonální matici  $D$ . Hledanou matici  $\sqrt{D}$  pak snadno určíme pomocí příkazu *Sqrt*. Obě matice si pro přehlednost a kontrolu výpočtu opět necháme zobrazit.

```
MaticeD = {{8, 0, 0}, {0, 40, 0}, {0, 0, 4}};
OdmocninaD = Sqrt[MaticeD];
InverzniA = Inverse[MaticeA];
MatrixForm[OdmocninaD]
MatrixForm[InverzniA]
```

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Matici  $V$  získáme vynásobením výše uvedených matic. Zároveň zavedeme do programu také sloupcový vektor  $z$  a určíme výsledný součin  $V \cdot z^T$  :

```
MaticeV = OdmocninaD.InverzniA;
zT = {{1}, {x}, {x^2}};
SoucinVzT = MaticeV.zT;
MatrixForm[MaticeV]
MatrixForm[zT]
MatrixForm[SoucinVzT]
```

$$V = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{2}} & \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad z^T = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \quad V \cdot z^T = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{5}{2}}x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x^2 \\ x + \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

Výsledný rozklad polynomu  $f(x)$  na součet čtverců představuje součet druhých mocnin jednotlivých řádků matice  $V \cdot z^T$ . Označme si tento výsledek *SOS1* a nechme dopočít provést v programu Wolfram Mathematica. Rozklad získáme ve tvaru:

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x^2\right)^2$$

Nyní jsme již získali vyjádření zadaného polynomu  $f(x)$  ve tvaru součtu čtverců polynomů. Na první pohled je však patrné, že se jedná o jiný (složitější) rozklad, než který jsme určili středoškolským způsobem, a opět je zřejmé, že vzhledem k neurčité  $x \in \mathbb{R}$  a chování druhé mocniny reálného čísla musí být tento polynom nutně pozitivně definitní. Výpočtem jsme zároveň poukázali na jeden z možných universálních postupů při hledání rozkladu polynomu na součet čtverců a důkazu, že je jistý polynom  $f$  pozitivně semidefinitní. Navíc jsme našli odpověď na čtvrtou položenou otázku – tedy, že rozklad polynomu na součet čtverců není jedinečný. Tato odpověď byla jasná již dříve, konkrétně ve chvíli, kdy ve výpočtu Gramovy matice začal vystupovat parametr  $\lambda$ , od jehož volby se odvíjela její výsledná podoba. Pokud bychom neprovedli pevnou volbu  $\lambda = 4$ , pak by tento parametr vystupoval i ve výsledném rozkladu na SOS a měl by přímý vliv na jeho podobu, která by se odvíjela od volby konkrétní hodnoty  $\lambda$  z vypočteného intervalu.

Obecné hledání rozkladu polynomu na součet čtverců pomocí počítačových technologií úzce souvisí s problematikou semidefinitního programování, rozkladem kvadratických

forem na SOS, ověřováním jejich pozitivní semidefinitnosti a na základě získaných výsledků se zobecněním postupu na homogenní polynomy vyšších stupňů. Pro formy stupně 4 a vyšší ovšem představuje důkaz nezápornosti (pozitivní semidefinitnosti) jeden z třídy NP-těžkých problémů. [20] Tím se okrajově dostáváme k dalšímu z problémů tisíciletí, tj. Problém P versus NP. [8] Není však cílem práce zabývat se tímto problémem, a navíc se jedná o otázku vysoce převyšující běžnou školskou matematiku a informatiku. Uvedme proto nyní ještě jeden z možných způsobů, jak s využitím matematického softwaru efektivně rozkládat polynomy na součet čtverců. Postup využívá již dříve zmíněné Choleského dekompozice a základní myšlenka spočívá v rozkladu získané matice  $Q$  na součin matic  $Q = V.V^T$ , přičemž řádky matice  $V$  označíme  $v_1, v_2, \dots, v_t$ .

V souladu s dříve užívaným označením pak obecně platí:

$$f = zVV^T z^T = \sum_{i=1}^t (v_i^T z^T)^2$$

Zavedeme-li do programu Wolfram Mathematica již dříve získanou celočíselnou matici  $Q$ , je výpočet jednoduchou záležitostí. Příkazem *CholeskyDecomposition* v uvedené syntaxi získáme matici  $V^T$  a vektor  $z$  již známe.

```
MaticeQ = {{8, 2, -1}, {2, 4, -1}, {-1, -1, 1}};
MaticeV = CholeskyDecomposition[MaticeQ];
MatrixForm[MaticeV]
```

$$v^T = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{7}{2}} & -\frac{3}{2\sqrt{14}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{7}} \end{pmatrix}$$

Výsledný rozklad polynomu  $f(x)$  získáme ve tvaru, který je opět odlišný od předcházejících rozkladů. Označme jej pro potřeby ověření správnosti výpočtu *SOS2* a povšimněme si, že počet čtverců v rozkladu je roven  $t$ , což je hodnota Gramovy matice  $Q$  zadaného polynomu.

$$f(x) = \left( \sqrt{\frac{5}{7}} x^2 \right)^2 + \left( 2\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{7}{2}} x - \frac{3x^2}{2\sqrt{14}} \right)^2$$

Závěrem příkladu 1 provedeme ověření, že všechny získané rozklady skutečně reprezentují zadaný polynom  $f(x)$ . Zkoušku provedeme opět pomocí programu Wolfram Mathematica. Nejprve do programu zavedeme původní polynom i získané rozklady

s příslušným označením a následně je prostřednictvím příkazu *Expand* umocníme.

Porovnání provede příkaz *TrueQ* v uvedené syntaxi:

```
In[189]:= fx = x^4 - 2 x^3 + 2 x^2 + 4 x + 8;
SOS = (x^2 - x)^2 + (x + 2)^2 + 2^2;
SOS1 = (x + x^2/2)^2 + (2 Sqrt[2] + x/Sqrt[2] - x^2/(2 Sqrt[2]))^2 + (-Sqrt[5/2] x + 1/2 * Sqrt[5/2] x^2)^2;
SOS2 = (Sqrt[5/7] x^2)^2 + (2 Sqrt[2] + x/Sqrt[2] - x^2/(2 Sqrt[2]))^2 + (Sqrt[7/2] x - (3 x^2)/(2 * Sqrt[14]))^2;
TrueQ[fx == Expand[SOS] == Expand[SOS1] == Expand[SOS2]]

Out[193]= True
```

Výstup *True* potvrzuje, že všechny vypočtené rozklady skutečně reprezentují výchozí polynom  $f(x)$  ze zadané polynomiální rovnice. Zároveň je z nich zřejmé, že je tento polynom pozitivně definitní, pro žádnou hodnotu nenastane rovnost nule, a tudíž nemá zadaná rovnice z příkladu 1 žádné řešení v oboru reálných čísel.

Vraťme se nyní krátce k otázce č. 1 v souvislosti s Motzkinovým polynomem a programy počítačové algebry. Již víme, že tento polynom je pozitivně semidefinitní, ale nelze jej rozložit na součet čtverců polynomů, což bylo ověřeno důkazem 1. Podívejme se nyní na výstup, který získáme prostřednictvím programu MATLAB v případě, že se budeme snažit najít rozklad takového polynomu na SOS.

### Příklad 2 (Motzkinův polynom):

Určete rozklad polynomu  $F(x, y) = x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) + 1$  na součet čtverců polynomů.

### Řešení:

V prvním kroku musíme do programu MATLAB zavést neurčité  $x, y$  a polynom  $F(x, y)$ . Následně se prostřednictvím příkazu *findsos* pokusíme obdobně jako dříve nalézt Gramovu matici  $Q$ . V případě, že rozklad daného polynomu  $F(x, y)$  na součet čtverců neexistuje, vrátí program MATLAB po aktivaci příkazu *findsos(F)* prázdnou matici  $Q$ , prázdný vektor  $z$  a zároveň nás upozorní, že rozklad neexistuje.

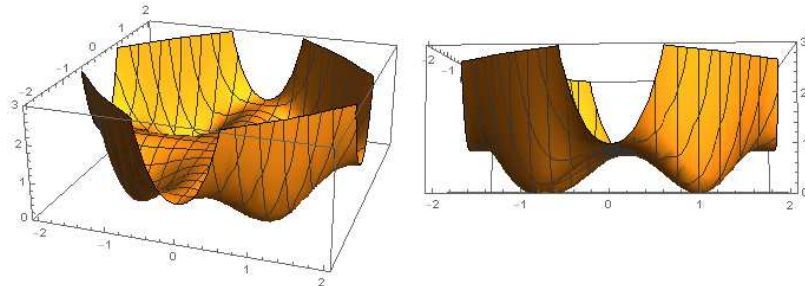
```
>> syms x y;
>> F=x^2*y^2*(x^2+y^2-3)+1;
>> [Q,Z]=findsos(F)

No sum of squares decomposition is found.

Q =          Z =

      []          []
```

Uvedeným výpočtem jsme potvrdili, že pozitivně semidefinitní Motzkinův polynom  $F$  není možné rozložit na součet čtverců polynomů a zároveň jsme tím znovu ukázali, že ne každý pozitivně semidefinitní polynom lze rozložit na SOS. Zařadme k tomuto závěru ještě graf Motzkinova polynomu v programu Wolfram Mathematica, ze kterého je zřejmé, že je tento polynom skutečně pozitivně semidefinitní.



Obrázek 7 - Graf Motzkinova polynomu v programu Wolfram Mathematica

Obdobným způsobem bychom s využitím programu MATLAB mohli postupovat u polynomů nalezených R. M. Robinsonem. Program by opět konstatoval, že je nelze rozložit na součet čtverců polynomů bez dalšího komentáře. Provedme proto s oporou publikace [26] řádný důkaz alespoň u jednoho z těchto polynomů a ukažme, že je pozitivně semidefinitní a přesto jej nelze rozložit na SOS.

**Příklad 3 (Jeden z polynomů nalezených R. M. Robinsonem):**

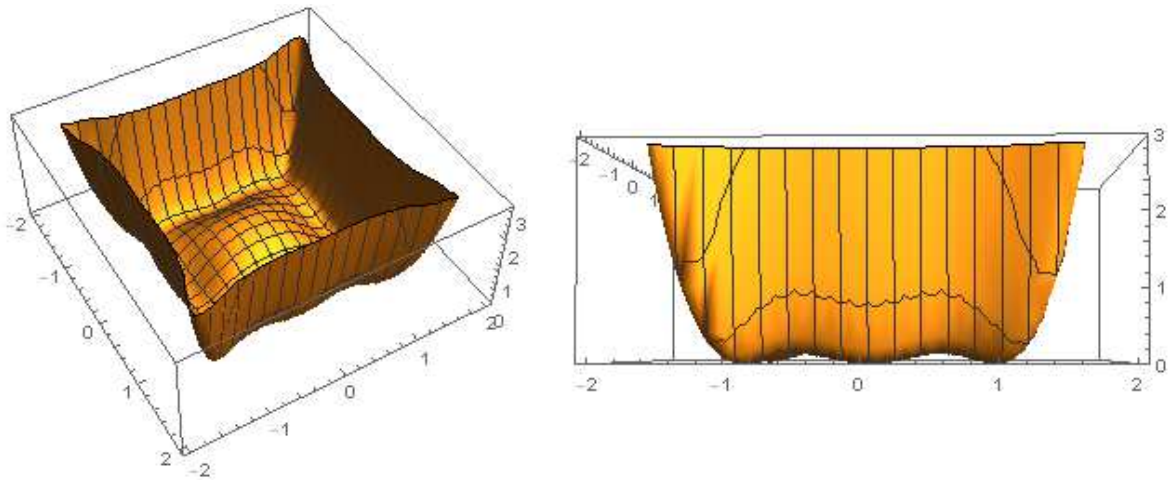
Dokažte, že polynom

$$f(x, y) = x^2(x^2 - 1)^2 + y^2(y^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1)$$

je pozitivně semidefinitní (nezáporný), ale nelze jej zapsat ve tvaru součtu čtverců polynomů s reálnými koeficienty.

**Řešení (důkaz 2):**

V prvním kroku musíme ověřit, že je zadaný polynom skutečně pozitivně semidefinitní, tedy, že  $f(x, y) \geq 0$ . Jistým způsobem nám před zahájením důkazu samotného může napovědět konstrukce grafu tohoto polynomu v programu Wolfram Mathematica (obrázek 8), ze kterého je zřejmé, že polynom  $f(x, y)$  je pozitivně semidefinitní.



Obrázek 8 - Graf jednoho z polynomů nalezených R. M. Robinsonem v roce 1973

Je zřejmé, že pro hodnoty  $x = y = 0$  je polynom  $f(x, y) = 1$  a v případě neurčitých  $x = \pm 1 \wedge y = \pm 1$  pak polynom nabývá hodnoty  $f(x, y) = 0$ , což můžeme vnímat jako jistou paralelu s důkazem pozitivní semidefinitnosti Motzkinova polynomu. Zaměřme se nyní na členy vyskytující se v polynomu  $f(x, y)$  a vliv mocniny na jejich výsledné znaménko. V součinech  $x^2(x^2 - 1)^2$  a  $y^2(y^2 - 1)^2$  se vyskytují pouze sudé mocniny a po dosazení libovolných hodnot  $x, y \in \mathbb{R}$  budou vždy nabývat nezáporných hodnot. Kritickým místem by mohl být výsledný rozdíl po odečtení zbývajících součinů  $(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1)$ . Jistotu máme v případě, že bude výsledný součin záporný – před ním stojící znaménko minus způsobí, že polynom  $f(x, y)$  bude ve tvaru součtu tří nezáporných hodnot. To nastane pokud

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) \geq 0 \wedge (x^2 + y^2 - 1) \leq 0$$

nebo

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) \leq 0 \wedge (x^2 + y^2 - 1) \geq 0.$$

Je ovšem otázkou, zda jsme „vyčerpali“ všechny možné dvojice pro neurčité  $x, y$ . To můžeme bez zdlouhavých výpočtů snadno zjistit s využitím matematického softwaru a vymodelování celé situace. V programu Wolfram Mathematica využijeme příkazy *RegionPlot* a *Show* v uvedené syntaxi:

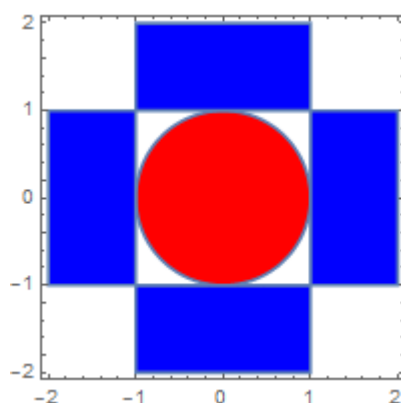
```
g1 = RegionPlot[{(x^2 - 1) * (y^2 - 1) >= 0 && x^2 + y^2 - 1 <= 0}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotStyle -> Red];
g2 = RegionPlot[{(x^2 - 1) * (y^2 - 1) <= 0 && x^2 + y^2 - 1 >= 0}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotStyle -> Blue];
Show[g1, g2]
```

Příkaz *RegionPlot* obecně vykreslí oblast (definiční obor), pro jejíž hodnoty je zadané tvrzení pravdivé. Příkaz *Show* pak spojuje dva grafy do jednoho obrázku. Celá situace je zachycena na obrázku 9, kdy červená oblast se vztahuje k situaci

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) \geq 0 \wedge (x^2 + y^2 - 1) \leq 0$$

a modrá k situaci

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) \leq 0 \wedge (x^2 + y^2 - 1) \geq 0.$$



Obrázek 9 - Hodnoty neurčitých  $x, y$ , pro které je polynom  $f(x, y)$  pozitivně semidefinitní

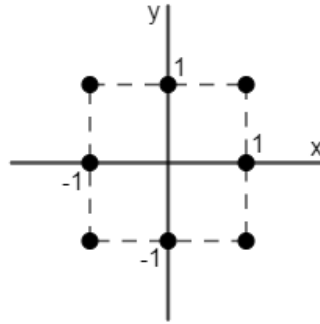
Obrázek 9 stále obsahuje „bílá místa“, tj. dvojice hodnot neurčitých  $x, y$ , pro které nemůžeme o pozitivní semidefinitnosti polynomu  $f(x, y)$  rozhodnout. Pokud ovšem provedeme úpravy a zapíšeme tento polynom ve tvaru

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2)^2 + (x^2 - 1)(y^2 - 1),$$

pak z vyjádření v tomto tvaru je již zřejmé, že i pro všechny hodnoty z bílé oblasti, tedy oblasti vymezené vztahem  $(x^2 + y^2 - 1) \geq 0 \wedge (x^2 - 1)(y^2 - 1) \geq 0$ , je polynom  $f(x, y) \geq 0$ .

Předpokládejme nyní, že je možné tento polynom vyjádřit ve tvaru součtu čtverců reálných polynomů a existují takové polynomy  $g_i$ , že  $f(x, y) = \sum g_i(x, y)^2$ . Zadaný polynom  $f$  nabývá nulové hodnoty celkem v osmi bodech (obrázek 10), čtyři z nich jsme již uvedli dříve. Jedná se o dvojice  $[1;0]$ ,  $[1;-1]$ ,  $[0;-1]$ ,  $[-1;-1]$ ,  $[-1;0]$ ,  $[-1;1]$ ,  $[0;1]$ ,  $[1;1]$ .





Obrázek 10 - Hodnoty neurčitých  $x, y$ , pro které nabývá zadaný polynom  $f$  nulové hodnoty

Protože se ve výše uvedených bodech rovná polynom  $f$  nule, musí se v těchto bodech i každý z hledaných polynomů  $g_i$  výsledného rozkladu rovnat nule. Pokud se ovšem zaměříme na stupně zadaného polynomu  $f$  a hledaných polynomů  $g_i$ , pak musí vzhledem k povaze rozkladu na SOS platit, že  $\text{st } g_i \leq \frac{1}{2} \text{st } f = 3$ , jak by se dalo snadno zjistit umocněním a roznásobením závorek v zadaném polynomu  $f$ . Pokud ovšem máme, v řeči funkcí, křivku stupně menšího nebo rovného třem procházející uvedenými osmi body, musí nutně procházet i počátkem soustavy souřadnic, tedy bodem  $[0;0]$ , již dříve jsme však uvedli, že  $f(0,0)=1$ , což poukazuje na spor. Museli bychom přirozeně uvedené tvrzení obecně dokázat.

Pokusme se najít jednodušší důkaz pro tuto konkrétní konfiguraci bodů. Nejprve přiřaďme váhu jednotlivým nulovým bodům podle následujícího klíče. Váha 1 bodům  $[\pm 1; \pm 1]$ , váha -2 bodům  $[\pm 1; 0]$  a  $[0; \pm 1]$ , váha 4 počátku soustavy souřadnic  $[0;0]$ . Nyní nad těmito body zvažujme součet monomů ve tvaru  $x^m y^n$  vynásobený vždy příslušnou vahou, kde  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Začneme-li určovat součty, pak pro libovolné hodnoty  $mn=0$  je vždy součet roven nule. Pokud budeme studovat situace  $m, n > 0$ , pak nenulový příspěvek do výsledného součtu mají pouze body  $[\pm 1; \pm 1]$ . Výsledný součet je pak nenulový jedine v případě, že exponenty  $m, n$  jsou sudá čísla. Uvážíme-li, že stupeň polynomu  $g_i$  není vyššího než 3, pak je zřejmé, že žádné takové monomy se sudými exponenty  $m, n$  neobsahuje. Z toho vyplývá, že vážený součet polynomu  $g_i$  přes všech devět uvažovaných bodů je roven nule. Konkrétně můžeme uvést závěr, že pokud je polynom  $g_i$  roven nule

v osmi bodech, pak musí být roven nule i v bodě devátém. Pro původní polynom  $f$  musí tedy také platit, že  $f(0,0) = 0$ , což je spor.  $\square$

### 2.3 ROZKLAD NA SOS V ÚLOHÁCH MATEMATICKÝCH OLYMPIÁD

Technika rozkladu reálného polynomu na součet čtverců polynomů coby důkazu, že je daný polynom nezáporný (pozitivně semidefinitní), se začala v různé podobě objevovat v zadáních mezinárodních kol matematických olympiád krátce po objevu Motzkinova polynomu a dodnes představuje elegantní způsob, jak vyřešit některé problémy zadané v matematických soutěžích. Standardně ovšem není vyučována ve zjednodušené podobě na středních školách, ani v obecné na pedagogických fakultách v kurzech připravujících učitele matematiky a/nebo informatiky. Uvedme na tomto místě bez řešení vybrané příklady z kol matematických olympiád vyžadující znalost techniky rozkladu polynomu na SOS.

#### **Příklad 1971/1 (13. mezinárodní matematická olympiáda):**

Dokažte, že následující tvrzení je pravdivé pro  $n = 3$  a  $n = 5$  a že je nepravdivé pro jakékoliv jiné přirozené číslo  $n > 2$ :

*Pokud  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jsou libovolná reálná čísla, potom*

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) + \dots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \geq 0$$

[12]

#### **Úloha č. 325 (15. všesvazová matematická olympiáda, 1981):**

Najděte nejmenší možnou hodnotu mnohočlenu:

$$P(x, y) = 4 + x^2 y^4 + x^4 y^2 - 3x^2 y^2$$

Dokažte, že tento mnohočlen nelze zapsat jako součet čtverců mnohočlenů v proměnných  $x, y$ . [35]

Výše zadaný mnohočlen (též polynom) nápadně připomíná původní Motzkinův polynom, liší se pouze v absolutním členu 4. Uvedme na závěr této kapitoly příklad polynomiální rovnice pocházející z finské přípravy budoucích řešitelů matematických olympiád.

### Finský příklad:

Určete počet reálných kořenů polynomu:

$$f(x) = x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}$$

Uvedený příklad je typickým představitelem úloh, které je možné řešit více způsoby, nicméně rozklad polynomu na SOS zde představuje rychlou a jednoduchou metodu, pomocí které dokáže odpověď nalézt i průměrný počtář. Samozřejmě nelze považovat tuto metodu za všespasitelnou, může ovšem v některých případech značně usnadnit řešení. Zařaďme proto nyní dva odlišné způsoby řešení tohoto příkladu, kdy jeden z nich využívá právě techniky rozkladu polynomu na součet čtverců a druhý nikoliv. Získané výsledky pak opět ověříme prostřednictvím programu počítačové algebry Wolfram Mathematica.

### Řešení I (bez využití rozkladu na SOS):

V prvním kroku vynecháme absolutní člen  $\frac{5}{2}$  způsobující pouze posun ve směru osy  $y$  a nově vzniklý polynom označíme pro další potřeby  $g(x)$ , čímž získáme:

$$g(x) = x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x$$

Nyní je třeba získaný polynom  $g(x)$  zjednodušit a vyjádřit jej ve tvaru, kdy bude možné rozhodnout o jeho chování pro různé hodnoty neurčité  $x \in \mathbb{R}$ . Z poslední dvojice je možné vytknout číslo 4, čímž získáme součin  $4(x^2 - x)$ . Podíváme-li se na předcházející dvojice výrazů, pak je zřejmé, že můžeme vždy vhodně vytknout jistý výraz způsobem, že získáme několik součinů obsahující shodnou závorku  $(x^2 - x)$ . Tedy polynom  $g(x)$  bude ve tvaru:

$$g(x) = x^6(x^2 - x) + 2x^4(x^2 - x) + 3x^2(x^2 - x) + 4(x^2 - x)$$

Po úpravě pak:

$$g(x) = (x^2 - x)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4)$$

Z uvedeného vyjádření je již patrné, že výraz  $(x^2 - x)$  je roven pro hodnoty neurčitých  $x_1 = 0$  a  $x_2 = 1$  nule. Díky tomu se nám obor reálných čísel „rozpadne“ na tři intervaly, ve kterých budeme zvažovat dílčí případy.

- i) V intervalu  $(-\infty, 0)$  je rozdíl  $x^2 - x$  vždy kladný, stejně tak i výraz  $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4$ , který je vzhledem k součtu sudých mocnin dokonce kladný pro libovolnou hodnotu neurčité  $x \in \mathbb{R}$ . Polynom  $g(x)$  je tedy v intervalu  $(-\infty, 0)$  kladný.
- ii) V intervalu  $(1, \infty)$  nastane shodná situace s výše uvedeným případem i) a oba z činitelů nabývají v tomto intervalu pouze kladných hodnot. Tedy i výsledný součin je kladný, z čehož vyplývá, že polynom  $g(x)$  je v intervalu  $(1, \infty)$  kladný.
- iii) V intervalu  $(0, 1)$  je již situace odlišná. Vytkneme-li  $x$  z rozdílu  $x^2 - x$ , pak je zřejmé, že výsledný součin  $x(x-1)$  vydává v tomto intervalu pouze záporné hodnoty. Snadno lze též nahlédnout, že minimum  $-\frac{1}{4}$  nastává pro hodnotu neurčité  $x = \frac{1}{2}$ . Ověřit si toto tvrzení můžeme snadno pomocí programu Wolfram Mathematica následovně:

```
In[1]:= FindMinimum[x (x - 1), {x, 0, 1}]
Out[1]:= {-0.25, {x -> 0.5}}
```

Výraz  $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4$  je ovšem i v tomto intervalu kladný, což má zřejmě vliv na výsledné znaménko polynomu  $g(x)$ . Uvážíme-li však, že pro hodnotu neurčité  $x$  platí  $0 < x < 1$ , pak po dosazení též jistě platí:

$$4 = 0^6 + 2 \cdot 0^4 + 3 \cdot 0^2 + 4 < x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4 < 1^6 + 2 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^2 + 4 = 10$$

$$4 < x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4 < 10$$

Pro činitele polynomu  $g(x)$  tedy v intervalu  $(0, 1)$  platí, že  $(x^2 - x) \geq -\frac{1}{4}$  a současně  $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4 < 10$ . Výsledný součin tedy získáme ve tvaru:

$$g(x) = (x^2 - x)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4) > \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (10) = -\frac{5}{2}$$

Vraťme se nyní k původnímu polynomu  $f(x)$ . Výše uvedené vyjádření polynomu  $g(x)$  totiž vyjasňuje význam vynechaného absolutního členu  $\frac{5}{2}$ , kdy pro polynom  $f(x)$  v posledním zkoumaném intervalu  $(0, 1)$  platí, že  $f(x) > 0$ .

Na základě výsledků získaných v dílčích případech *i)*, *ii)*, *iii)* můžeme konstatovat, že pro všechny hodnoty neurčité  $x \in \mathbb{R}$  je polynom  $f(x) > 0$ . Tudíž neexistují žádné reálné kořeny a tento polynom je pozitivně definitní.

### Řešení II (rozklad na SOS):

Při hledání rozkladu zadaného polynomu  $f(x)$  na SOS budeme postupovat v několika dílčích krocích – obdobně jako tomu bylo v příkladu 1 – s využitím úprav polynomu a algebraických vzorců. Nejprve ověříme, zda se jedná o polynom sudého stupně. To je v případě zadaného polynomu  $f(x)$  splněno, protože se jedná o polynom stupně 8. Nyní jej začneme upravovat. Z prvních tří členů vytkneme  $x^6$  takovým způsobem, že člen  $2x^6$  „roztrhneme“ a ponecháme si  $x^6$  pro další úpravy:

$$f(x) = x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}$$

$$f(x) = x^6(x^2 - x + 1) + x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}$$

Závorku v získaném polynomu upravíme dle vzorce  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ . Při této úpravě nesmíme zapomenout přičíst hodnotu  $\frac{3}{4}$ , aby zůstal výraz beze změny:

$$f(x) = x^6 \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] + x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}$$

Obdobným způsobem upravíme další trojici členů. Ve výše uvedeném polynomu vytkneme  $x^4$  a pro potřeby dalšího výpočtu si ponecháme  $2x^4$ . Analogicky též provedeme doplnění na čtverec dle uvedeného vzorce:

$$f(x) = x^6 \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] + x^4(x-1)^2 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}$$

Přejdeme k další trojici členů a použijeme stejných úprav – tedy vytkneme  $2x^2$ , ponecháme si  $2x^2$  pro následující úpravy a vzniklý výraz doplníme na čtverec jako již dříve:

$$f(x) = x^6 \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] + x^4 (x-1)^2 + 2x^2 \left[ \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} \right] + 2x^2 - 4x + \frac{5}{2}$$

Zbývá upravit poslední trojici členů uvedeného polynomu a pokusit se celý tento polynom převést do tvaru součtu čtverců polynomů. Z poslední trojice proto nejprve vytkneme hodnotu 2 a následně vzniklou trojici doplníme na čtverec dle dříve uvedeného vzorce. Získáme tak polynom ve tvaru:

$$f(x) = x^6 \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] + x^4 (x-1)^2 + 2x^2 \left[ \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} \right] + 2 \left[ (x-1)^2 + \frac{1}{4} \right]$$

Ze zápisu získaného polynomu je zřejmé, že se zatím nejedná o požadovaný zápis ve tvaru součtu čtverců polynomů. S využitím vzorců  $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ ,  $(ab)^r = a^r \cdot b^r$  a  $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$  proto obdobně jako dříve „vnoříme“ hodnoty „ $x$ “ do závorek a čísla odmocníme takovým způsobem, abychom získali „čistý“ zápis ve tvaru součtu čtverců polynomů:

$$f(x) = \left( x^4 - \frac{1}{2} x^3 \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} x^3 \right)^2 + (x^3 - x^2)^2 + \left[ \sqrt{2} \left( x^2 - \frac{3}{4} x \right) \right]^2 + \left( \sqrt{\frac{7}{8}} x \right)^2 + [\sqrt{2}(x-1)]^2 + \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2$$

Výše uvedené vyjádření představuje hledaný rozklad zadaného polynomu  $f(x)$  na součet čtverců polynomů. Uvážíme-li vliv druhé mocniny na výsledné znaménko umocňovaných závorek, je evidentní, že polynom  $f(x)$  nabývá pro všechny neurčité  $x \in \mathbb{R}$  pouze kladných hodnot. Lze tedy konstatovat, že zadaný polynom  $f(x)$  je pozitivně definitní a nemá žádné reálné kořeny. Ověření, že uvedený rozklad skutečně reprezentuje zadaný polynom  $f(x)$ , by opět bylo možné v programu Wolfram Mathematica s využitím příkazu *TrueQ*.

Porovnáme-li oba uvedené způsoby řešení finského příkladu, můžeme konstatovat, že postup využívající rozkladu polynomu na SOS je více mechanický a vystačíme si se znalostí základních algebraických vzorců a jejich vhodnou aplikací. V případě nalezení rozkladu jsme pak schopni rychle rozhodnout o existenci reálných kořenů. Oproti tomu první uvedený postup vyžaduje jisté matematické uvažování, zběhlost v počítání s intervaly a ne všechny úpravy jsou zcela triviální a zřejmé. Jedná se ovšem

o universálnější postup oproti rozkladu polynomu na součet čtverců. Jeho užití však i přesto může být v některých případech vhodnější a řešitelům soutěžní úlohy v matematické olympiádě může ušetřit cenný čas.

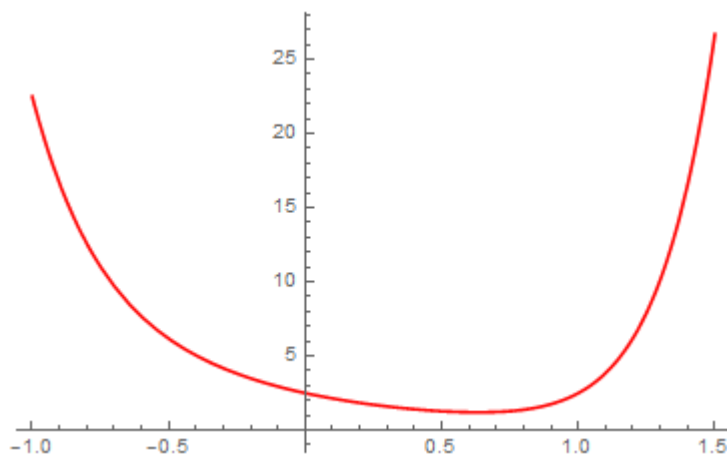
Zařaďme nyní pro ověření správnosti získaných výsledků předchozími postupy stručně počítačové řešení uvedeného problému a sestrojme též graf zadaného polynomu, ze kterého je pozitivní definitnost zřejmá.

### Řešení III (počítačové řešení v programu Wolfram Mathematica):

Nejprve do programu zavedeme polynom  $f(x)$ , poté uijeme příkaz *Solve* v uvedené syntaxi:

```
In[1]:= f = x^8 - x^7 + 2 x^6 - 2 x^5 + 3 x^4 - 3 x^3 + 4 x^2 - 4 x + 5 / 2;  
Solve[f == 0, x, Reals]  
Out[2]= {}
```

Výstupem po aktivaci příkazu je prázdná množina. Žádný reálný kořen polynomu  $f(x)$  tedy neexistuje, což je v souladu s dříve získanými výsledky. Sestrojme nyní graf zadaného polynomu.



Obrázek 11 - Graf pozitivně definitního polynomu  $f(x)$  z finské přípravy řešitelů MO

Graf zadaného polynomu (obrázek 11) v žádném bodě neprotne osu  $x$  a opět jsme tedy potvrdili, že neexistují žádné reálné kořeny tohoto polynomu, jak jsme již vypočetli dříve a též elegantně dokázali pomocí rozkladu polynomu na součet čtverců polynomů.

### 3 OBECNÝ ALGORITMUS ROZKLADU POLYNOMU NA SOUČET ČTVERCŮ

Předcházející kapitoly byly spíše zaměřeny na praktické výpočty, hledání konkrétních rozkladů polynomu na SOS různými způsoby s využitím počítače a vymezení základních pojmů. Zabývejme se proto nyní obecně aplikovanými postupy při hledání požadovaného rozkladu a s oporou literatury [2], [4], [11], [16], [20], [25] vymežeme některé další důležité pojmy a shrňme obecně jeden z možných algoritmů pro nalezení rozkladu reálného polynomu na součet čtverců polynomů s reálnými koeficienty. Tento algoritmus využívá vztahu mezi Gramovou maticí daného polynomu a jeho rozkladem na SOS, kdy jsme již dříve poukázali na význam maticového počtu při (počítačovém) hledání rozkladu polynomu na součet čtverců.

#### 3.1 GRAMOVA MATICE POLYNOMU A ROZKLAD NA SOS

Mějme pevné  $n$  a pro zjednodušení použijeme následující označení  $R := \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  a pro  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  necht'  $x^\alpha$  představuje součin  $x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ . Nutno je na tomto místě upřesnit, že mezi přirozená čísla řadíme pro potřeby algoritmu též nulu, z důvodu lepší přehlednosti však ponecháme stávající označení této množiny. Pro hodnotu  $m \in \mathbb{N}$  označme množinu  $\Lambda_m := \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq m\}$ , potom polynom  $f \in R$  stupně  $m$  lze zapsat ve tvaru  $f = \sum_{\alpha \in \Lambda_m} a_\alpha x^\alpha$  a v případě, že  $f$  je ve tvaru součtu čtverců prvků z  $R$ , nazveme jej rozkladem polynomu na SOS.

Předpokládejme nyní, že polynom  $f$  je rozkladem na SOS a je součtem  $t$  čtverců v  $R$ , pak musí být nutně polynom  $f$  sudého stupně  $2m$  (tj. jedna z dříve uvedených nutných podmínek). Tím pádem  $f = \sum_{i=1}^t g_i^2$ , kde pro každý polynom  $g_i$  platí, že stupeň  $g_i \leq m$ .

Předpokládejme, že  $|\Lambda_m| = k$ , pak lze uspořádat prvky z množiny  $\Lambda_m$  jistým způsobem  $\Lambda_m = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$ . Položme  $\bar{x} := (x^{\beta_1}, x^{\beta_2}, \dots, x^{\beta_k})$  a necht' matice  $A$  je typu  $k \times t$  s  $i$ -tým sloupcem tvořeným koeficienty polynomů  $g_i$ . Pak rovnost  $f = \sum g_i^2$  lze zapsat ve tvaru  $f = \bar{x} \cdot (AA^T) \cdot \bar{x}^T$ .



Symetrickou matici  $B := AA^T$  typu  $k \times k$  nazveme Gramovou maticí polynomu  $f$  a je nutné poznamenat, že se jedná o pozitivně semidefinitní matici. Uvedme nyní na tomto místě větu včetně důkazu, který nám dává návod, jak nalézt rozklad polynomu na součet čtverců.

**Věta 2:** Předpokládejme, že polynom  $f \in R$  je stupně  $2m$  a  $\bar{x}$  ve tvaru uvedeném výše. Potom je polynom  $f$  rozkladem na SOS v  $R$  právě tehdy, když existuje reálná, symetrická, pozitivně semidefinitní matice  $B$  ve tvaru:

$$f = \bar{x}.B.\bar{x}^{-T}$$

S ohledem na hodnotu  $t$  matice  $B$  pak lze konstruovat polynomy  $g_1, g_2, \dots, g_t$  takové, že platí vztah  $f = \sum g_i^2$  a matice  $B$  je Gramova matice polynomu  $f$  asociovaná s polynomy  $g_i$ .

**Důkaz 3:** Pokud  $f = \sum g_i^2$  představuje rozklad na SOS, potom požadujeme matici  $B = AA^T$ , kde  $A$  je matice, jejíž sloupce tvoří koeficienty polynomů  $g_i$ .

Předpokládejme, že existuje reálná, symetrická, pozitivně semidefinitní matice  $B$  taková, že platí vztah  $f = \bar{x}.B.\bar{x}^{-T}$  a hodnota matice  $B$  je rovna  $t$ . Protože  $B$  je reálná, symetrická matice s hodnotou  $t$ , existuje reálná matice  $V$  a reálná, diagonální matice  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_t)$ , kdy platí, že  $B = V.D.V^T$  a  $d_i \neq 0$  pro všechna  $i$ . Potom zřejmě platí vztah:

$$f = \bar{x}.V.D.V^T.\bar{x}^{-T}$$

Předpokládejme, že  $V = (v_{i,j})$ , pak pro  $i = 1, 2, \dots, t$  položme  $g_i := \sqrt{d_i} \sum_{j=1}^k v_{j,i} x^{\beta_j} \in R$ .

Z výše uvedeného vztahu  $f = \bar{x}.V.D.V^T.\bar{x}^{-T}$  pak vyplývá, že  $f = g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_t^2$ .  $\square$

Doplňme k uvedenému důkazu, že k nalezení vyjádření polynomu  $f$  ve tvaru součtu čtverců stačí pouze nalézt matici  $B$  splňující větu 2. V případě, že jsme schopni ukázat, že žádná taková matice  $B$  neexistuje, pak víme jistě, že polynom  $f$  není možné vyjádřit ve tvaru součtu čtverců v  $R$ . Poznamenejme dále, že pokud  $f = \sum a_\alpha x^\alpha$  a matice  $B = (b_{i,j})$  je symetrická matice typu  $k \times k$ , pak při porovnání termů je  $f = \bar{x}.B.\bar{x}^{-T}$  právě tehdy, když pro

všechny  $\alpha \in \Lambda_{2m}$  platí vztah  $\sum_{\beta_i + \beta_j = \alpha} b_{i,j} = a_\alpha$ .

**Poznámka:** Reálná, symetrická, pozitivně semidefinitní matice  $B$  vystupující v obecném algoritmu rozkladu polynomu na SOS představuje ve vztahu k dříve řešeným příkladům Gramovu matici  $Q$ , jak je značena programem MATLAB.

### 3.2 ALGORITMUS ROZKLADU

Při hledání rozkladu polynomu na SOS postupujeme v několika dílčích krocích, které jsou podrobně rozepsány dále. Mějme nyní daný polynom  $f \in R$  sudého stupně  $2m$ .

**Krok 1:** Necht' matice  $B = (b_{i,j})$  je symetrická matice s prvky chápanými jako proměnné.

Nyní musíme vyřešit systém lineárních rovnic vycházející ze vztahu  $f = \bar{x} \cdot B \cdot \bar{x}^T$  a určit prvky matice  $B$ . To znamená, že pro určení hodnot  $b_{i,j}$  musíme vyřešit systém lineárních

rovnic ve výše uvedeném tvaru  $\sum_{\beta_i + \beta_j = \alpha} b_{i,j} = a_\alpha$  s jednou rovnicí pro každé  $\alpha \in \Lambda_{2m}$ , kde

hodnota  $\alpha$  představuje exponenty a  $a_\alpha$  koeficienty příslušných členů zadaného polynomu  $f$ .

Všimněme si, že každá proměnná  $b_{i,j}$  se vyskytuje pouze v jedné rovnici, jsme tedy schopni určit všechny prvky matice  $B$  až na jednu proměnnou v každém z řádků, která je rovna zvolenému parametru a její hodnota závisí na zbývajících prvcích matice. Výsledné řešení je získáno ve tvaru  $B = B_0 + \lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_l B_l$ , kde každá z matic  $B_i$  je reálnou, symetrickou maticí typu  $k \times k$  a hodnoty  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$  jsou parametry. V tomto konkrétním případě platí:

$$l = \frac{k(k+1)}{2} - |\Lambda_{2m}|$$

**Krok 2:** Potřebujeme určit hodnoty parametrů  $\lambda_i$ , pro které platí, že  $B = B_0 + \lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_l B_l$  je pozitivně semidefinitní matice. Již dříve jsme uvedli (viz věta 1), že matice  $B$  je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná. Necht' máme charakteristický polynom matice  $B$  s koeficienty  $b_i \in R[\lambda_1, \dots, \lambda_l]$  ve tvaru:

$$F(y) = y^k + b_{k-1}y^{k-1} + \dots + b_0$$

Vycházejme nyní obecně z Descartova znaménkového pravidla platného pro polynomy s reálnými kořeny. Dle něj má charakteristický polynom  $F(y)$  pouze nezáporné kořeny

právě tehdy, když  $(-1)^{i+k} b_i \geq 0$  pro všechna  $i = 0, \dots, k-1$ . Uvažujme tedy semialgebraickou množinu  $S$  ve tvaru:

$$S := \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l \mid (-1)^{i+k} b_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \geq 0\}$$

Potom je polynom  $f$  rozkladem na SOS právě tehdy, když je množina  $S$  neprázdná a bod množiny  $S$  odpovídá matici splňující podmínky věty 2.

**Krok 3:** Získáme-li matici  $B = (b_{i,j})$  splňující podmínky věty 2, pak využijeme procedury z důkazu této věty k nalezení vyjádření polynomu  $f$  ve tvaru součtu čtverců polynomů.

**Poznámka:** K matici  $B$  je nutné podotknout, že její velikost obecně velmi rychle roste s počtem neurčitých a se stupněm daného polynomu  $f$ , protože  $k = |\Lambda_m| = \binom{n+m}{n}$ .

Ve zvláštních případech polynomů je pak možné někdy zmenšit velikost Gramovy matice  $B$  vypuštěním nepotřebných prvků z množiny  $\Lambda_m$ . Kupříkladu v případě, že  $\alpha \in \Lambda_{2m}$ ,  $\alpha = 2\beta$  a hodnota  $\alpha$  nemůže být zapsána jiným způsobem jako součet prvků z  $\Lambda_m$ , pak v případě, že koeficient u  $\alpha$  je v polynomu  $f$  roven 0, víme, že se nemůže prvek  $x^\beta$  vyskytnout v žádném z polynomů  $g_i$ .

### 3.3 CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM A VLASTNÍ ČÍSLA GRAMOVY MATICE

Charakteristický polynom Gramovy matice potřebujeme určit při hledání rozkladu polynomu na součet čtverců, abychom mohli rozhodnout o hodnotách parametru  $\lambda$ , pro které zůstane matice pozitivně semidefinitní. Dříve jsme tento polynom určili s využitím programu Wolfram Mathematica a příkazu *CharacteristicPolynomial*. Zařadme proto nyní řádnou definici pojmů *charakteristický polynom* a *vlastní číslo matice* a uijme shodné označení s předchozím obecným algoritmem. Matice  $E$  pak standardně představuje jednotkovou matici.

**Definice 2:** Buď  $B = (b_{i,j}) \in T_k$  čtvercová matice řádu  $k$  nad tělesem  $T$ . Polynom  $F(y) = \det(B - yE)$  se nazývá **charakteristický polynom** matice  $B$ . Prvek  $y \in T$  takový, že  $\det(B - yE) = 0$ , tj. kořen charakteristického polynomu, se nazývá **vlastní hodnota**

matice  $B$ . V případě, že  $T$  je číselné těleso, jako například těleso  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ , pak zpravidla používáme místo pojmu vlastní hodnota označení **vlastní číslo** matice  $B$ .

Z definice je zřejmé, že pro získání charakteristického polynomu Gramovy matice  $B$  je nutné vypočítat determinant v obecném tvaru:

$$F(y) = \det(B - yE) = \begin{vmatrix} b_{11} - y & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} - y \end{vmatrix}$$

Dle řádu matice pak pro výpočet determinantu můžeme z klasických metod užít křížového pravidla, Sarrusova pravidla nebo obecného rozvoje determinantu podle řádku/sloupce. V případě počítačového výpočtu determinantu v programu Wolfram Mathematica máme k dispozici příkaz *Det*. Shrňme nyní stručně klasické metody výpočtu determinantu.

### Křížové pravidlo pro matice 2. řádu:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

### Sarrusovo pravidlo pro matice 3. řádu:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

### Rozvoj determinantu podle řádku/sloupce:

Mějme matici  $A = (a_{i,j})$  řádu  $k > 1$ , pak platí:

$$\det A = \sum_{j=1}^k (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad ,$$

$$\det A = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad ,$$

kde  $A_{ij}$  je matice řádu  $k-1$ , která vznikne z matice  $A$  vypuštěním jejího  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce. První z uvedených rovností pak nazýváme rozvojem determinantu podle  $i$ -tého řádku, druhou rozvojem determinantu podle  $j$ -tého sloupce.

### Výpočet determinantu v programu Wolfram Mathematica:

V případě počítačového výpočtu determinantu je obecná syntaxe a výstup následující:

```
In[17]:= A = {{a11, a12, a13}, {a21, a22, a23}, {a31, a32, a33}};  
Det[A]
```

```
Out[18]= -a13 a22 a31 + a12 a23 a31 + a13 a21 a32 - a11 a23 a32 - a12 a21 a33 + a11 a22 a33
```

Zařaďme nyní dvojici příkladů s polynomy více neurčitých, které vyřešíme s využitím uvedeného algoritmu, a zaměříme se na důležitost pozitivní semidefinitnosti Gramovy matice  $B$  ovlivňující existenci rozkladu a její hodnota  $t$  přímo související s výslednou podobou rozkladu polynomu na SOS.

#### Příklad 4 (reálný polynom více neurčitých):

Nalezněte všechny možné rozklady reálného polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů:

$$f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1$$

#### Řešení:

Je zřejmé, že tento polynom je možné vyjádřit jistým způsobem ve tvaru součtu čtverců, nicméně zadáním je požadováno nalézt všechny možné rozklady na SOS tohoto polynomu. Vzhledem k sudému stupni polynomu  $f$  má smysl rozklad hledat a musíme tedy určit monomy výsledného rozkladu a sestavit obecnou Gramovu matici. Je zřejmé, že jediné možné monomy vyskytující se ve výsledném rozkladu mohou být  $xy$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $1$ , což si můžeme ověřit pomocí programu MATLAB, který by nám mohl vydat též jistou Gramovu matici  $Q$  jako již dříve. Pro demonstraci jednotlivých kroků algoritmu a nalezení obecné matice  $B$  s parametrem  $\lambda$  postupujme nyní manuálně. Pro výpočet matice  $B$  potřebujeme nejprve určit množinu  $\Lambda_m$ . Vzhledem k uvedeným monomům a jejich mocninám se po řadě jedná o prvky  $\beta_1 = (1,1)$ ,  $\beta_2 = (1,0)$ ,  $\beta_3 = (0,1)$ ,  $\beta_4 = (0,0)$ . Nyní musíme vyřešit systém lineárních rovnic dle kroku 1, čímž získáme hledanou Gramovu matici  $B$  typu  $4 \times 4$  daného polynomu  $f$ .

$$\begin{array}{ll}
b_{11} : \beta_1 + \beta_1 = (1,1) + (1,1) = (2,2) & \Rightarrow b_{11} = 1 \\
b_{12} = b_{21} : \beta_1 + \beta_2 = \beta_2 + \beta_1 = (1,1) + (1,0) = (1,0) + (1,1) = (2,1) & \Rightarrow 2b_{12} = 2b_{21} = 0; b_{12} = b_{21} = 0 \\
b_{13} = b_{31} : \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1 = (1,1) + (0,1) = (0,1) + (1,1) = (1,2) & \Rightarrow 2b_{13} = 2b_{31} = 0; b_{13} = b_{31} = 0 \\
b_{14} = b_{41} : \beta_1 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_1 = \beta_2 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_2 = \\
= (1,1) + (0,0) = (0,0) + (1,1) = (1,0) + (0,1) = (0,1) + (1,0) = (1,1) & \Rightarrow 2b_{14} + 2b_{23} = 2b_{41} + 2b_{23} = 0; b_{14} + b_{23} = b_{41} + b_{23} = 0 \\
b_{22} : \beta_2 + \beta_2 = (1,0) + (1,0) = (2,0) & \Rightarrow b_{22} = 1 \\
b_{23} = b_{32} : \beta_2 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_2 = \beta_1 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_1 = \\
= (1,0) + (0,1) = (0,1) + (1,0) = (1,1) + (0,0) = (0,0) + (1,1) = (1,1) & \Rightarrow 2b_{23} + 2b_{14} = 2b_{32} + 2b_{14} = 0; b_{23} + b_{14} = b_{32} + b_{14} = 0 \\
b_{24} = b_{42} : \beta_2 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_2 = (1,0) + (0,0) = (0,0) + (1,0) = (1,0) & \Rightarrow 2b_{24} = 2b_{42} = 0; b_{24} = b_{42} = 0 \\
b_{33} : \beta_3 + \beta_3 = (0,1) + (0,1) = (0,2) & \Rightarrow b_{33} = 1 \\
b_{34} = b_{43} : \beta_3 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_3 = (0,1) + (0,0) = (0,0) + (0,1) = (0,1) & \Rightarrow 2b_{34} = 2b_{43} = 0; b_{34} = b_{43} = 0 \\
b_{44} : \beta_4 + \beta_4 = (0,0) + (0,0) = (0,0) & \Rightarrow b_{44} = 1
\end{array}$$

Nastala očekávaná okolnost s provázaností prvků  $b_{14} = b_{41}$  a  $b_{23} = b_{32}$ , kdy musí platit vztah  $b_{14} + b_{23} = 0$ , po úpravě  $b_{14} = -b_{23}$ . Zavedeme tedy parametr  $b_{14} = \lambda$ , čímž získáme výslednou Gramovu matici  $B$  ve tvaru:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přejdeme nyní ke kroku 2 uvedeného algoritmu. Nejprve potřebujeme určit charakteristický polynom  $F(y)$ , to znamená vypočítat determinant v níže uvedeném tvaru:

$$\det(B - yE) = \begin{vmatrix} 1-y & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-y & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1-y & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1-y \end{vmatrix}$$

Vzhledem k řádu matice  $B$  a množství nulových prvků způsobených tvarem zadaného polynomu je vhodným postupem řešení uvedeného determinantu rozvoj dle řádku/sloupce. Pro usnadnění výpočtu a získání bezchybného výsledku ovšem využijeme program Wolfram Mathematica a dříve uvedený příkaz *Det* v součinnosti s příkazem *Collect*.

```
In[7]:= MaticeBy = {{1 - y, 0, 0, λ}, {0, 1 - y, -λ, 0}, {0, -λ, 1 - y, 0}, {λ, 0, 0, 1 - y}};
Collect[Det[MaticeBy], y]
```

```
Out[8]= 1 - 4y3 + y4 - 2λ2 + λ4 + y2 (6 - 2λ2) + y (-4 + 4λ2)
```

Nyní potřebujeme rozhodnout o hodnotách parametru  $\lambda$ , pro které má tento polynom pouze nezáporné kořeny. Určíme proto polynom  $F(-y)$  a v souladu s obecným algoritmem uijeme Descartova znaménkového pravidla. Členy polynomu zároveň přeuspořádáme. Aby neexistovaly žádné záporné reálné kořeny, nesmí v tomto polynomu nastat žádná znaménková změna.

$$F(-y) = y^4 + 4y^3 + y^2(-2\lambda^2 + 6) + y(-4\lambda^2 + 4) + (\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1)$$

Pro parametr  $\lambda$  musí tedy platit:

$$-2\lambda^2 + 6 \geq 0 \wedge -4\lambda^2 + 4 \geq 0 \wedge \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 \geq 0$$

Je celkem zřejmé, že poslední z nerovnic je splněna pro libovolnou hodnotu  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Určeme nyní s využitím počítače interval, ve kterém bude matice  $B$  pozitivně semidefinitní, tedy, kdy budou splněny všechny tři výše uvedené podmínky kladené na parametr  $\lambda$ .

```
In[9]:=
Reduce[-2 λ + 6 ≥ 0 && -4 λ^2 + 4 ≥ 0 && λ^4 - 2 λ^2 + 1 ≥ 0, λ]
Out[9]= -1 ≤ λ ≤ 1
```

Poznamenejme k vypočtenému intervalu, že v případě volby krajních bodů  $\lambda = \pm 1$  nastane v matici  $B$  lineární závislost řádků a její hodnota klesne na  $r(B) = 2$ , tedy pro tyto hodnoty bude rozklad na SOS v podobě součtu dvou čtverců. Pro všechny ostatní hodnoty uvnitř uvedeného intervalu je hodnota  $r(B) = 4$  a tudíž i výsledný rozklad bude v podobě součtu čtyř čtverců polynomů.

Nyní zbývá přejít ke kroku 3 a určit konkrétní podobu hledaného rozkladu. Potřebujeme tedy nalézt diagonální matici  $D$  a k ní příslušnou matici  $V$ , aby byl splněn vztah  $B = V.D.V^T$ .

Při hledání těchto matic využijeme tzv. symetrických úprav, které lze vymezit jako svázanou dvojici elementárních úprav následovně:

- Vynásobení  $i$ -tého řádku matice nenulovým prvkem  $p$  a vynásobení  $i$ -tého sloupce tímž prvkem  $p$ .
- Přičtení  $p$ -násobku  $i$ -tého řádku k  $j$ -tému řádku matice a přičtení  $p$ -násobku  $i$ -tého sloupce k  $j$ -tému sloupci.

Nutné je ještě doplnit, že provedení symetrické úpravy odpovídá přechodu od jisté matice  $A$  k matici  $X^T.A.X$  s dvojicí elementárních transformačních matic  $X, X^T$ . Pokud je navíc matice  $A$  symetrická, pak i  $X^T.A.X$  je symetrickou maticí. Zároveň platí, že každou reálnou, symetrickou matici  $A$  lze převést symetrickými úpravami na diagonální matici  $D$ .

Při řešení tohoto konkrétního příkladu tedy nejprve připíšeme matici  $B$  jednotkovou matici  $E$ , tedy budeme vycházet z  $(B|E)$ , a převedeme ji na diagonální matici  $D$ , kdy navíc získáme elementární transformační matice  $X, X^T$  takové, že  $D = X^T.B.X$ . Následně potřebujeme přejít ke vztahu  $B = V.D.V^T$ , kdy zřejmě platí, že  $(X^T)^{-1} = V$  a  $X^{-1} = V^T$ , čehož na závěr využijeme při hledání finální podoby rozkladu ze vztahu:

$$g_i := \sqrt{d_i} \sum_{j=1}^k v_{j,i} x^{j_i}$$

Pro lepší srozumitelnost jednotlivých kroků označíme řádky a sloupce matice římskými I–IV. Poznamenejme, že do přiřpsané jednotkové matice  $E$  zaznamenáváme pouze řádkové úpravy. V zápisu řešení pak budeme pro lepší přehlednost uvádět pouze řádkové úpravy, je zřejmé, že odpovídající úpravu je nutno provést následně též se sloupci.

$$\begin{aligned} (B|E) &= \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + (-\lambda).I \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + \lambda.II \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (D|X^T) \end{aligned}$$



Pomocí symetrických úprav jsme našli hledanou diagonální matici  $D$  a transformační matici  $X^T$  ve výše uvedeném tvaru. Nyní potřebujeme získat transformační matici  $X$  a k ní matici inverzní, abychom mohli využít vztahu  $X^{-1} = V^T$ . Využijme opět pro urychlení výpočtu matematický software a nechme si vypočítat matici  $V^T$ :

```
In[12]:=
Xt = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, λ, 1, 0}, {-λ, 0, 0, 1}};
X = Transpose[Xt];
Vt = Inverse[X];
MatrixForm[Vt]
```

Out[15]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní přejdeme k závěrečné fázi výpočtu odpovídající závěru důkazu 3. Využijeme vztah pro hledané polynomy rozkladu  $g_i := \sqrt{d_i} \sum_{j=1}^k v_{j,i} x^{\beta_j}$ , kdy na základě znalosti množiny  $\Lambda_m$  skládající se z prvků  $\beta_1 = (1,1)$ ,  $\beta_2 = (1,0)$ ,  $\beta_3 = (0,1)$ ,  $\beta_4 = (0,0)$  a diagonální matice  $D$  s prvky na diagonále  $D = \text{diag}(1, 1, 1 - \lambda^2, 1 - \lambda^2)$  získáme jednotlivé polynomy  $g_i$  ve tvaru:

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 \cdot (1 \cdot xy + 0 \cdot x + 0 \cdot y + \lambda \cdot 1) = xy + \lambda \\ g_2 &= 1 \cdot (0 \cdot xy + 1 \cdot x - \lambda \cdot y + 0 \cdot 1) = x - \lambda y \\ g_3 &= \sqrt{1 - \lambda^2} \cdot (0 \cdot xy + 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot 1) = y\sqrt{1 - \lambda^2} \\ g_4 &= \sqrt{1 - \lambda^2} \cdot (0 \cdot xy + 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1) = \sqrt{1 - \lambda^2} \end{aligned}$$

Obecně lze tedy původní polynom  $f(x, y)$  zapsat ve tvaru součtu čtverců  $g_i$  následovně:

$$f(x, y) = (xy + \lambda)^2 + (x - \lambda y)^2 + (y\sqrt{1 - \lambda^2})^2 + (\sqrt{1 - \lambda^2})^2$$

Dosazováním hodnot za parametr  $\lambda \in \langle -1, 1 \rangle$  pak můžeme určit všechny možné rozklady tohoto polynomu. Poznamenejme, že v případě dosazení krajních hodnot  $\lambda = \pm 1$  se bude jednat o vyjádření v níže uvedených tvarech součtu dvou čtverců polynomů, což koresponduje též s hodnotí matice  $r(B) = 2$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (xy + 1)^2 + (x - y)^2 \\ f(x, y) &= (xy - 1)^2 + (x + y)^2 \end{aligned}$$

V ostatních případech se bude vždy jednat o součet čtyř čtverců. Na závěr ještě dodejme, že při volbě parametru  $\lambda = 0$  získáme vyjádření ve tvaru součtu čtyř čtverců, které v podstatě odpovídá výchozímu zadání polynomu  $f$ :

$$f(x, y) = (xy)^2 + (x)^2 + (y\sqrt{1})^2 + (\sqrt{1})^2$$

### Příklad 5 (neexistence rozkladu):

Nalezněte rozklad reálného polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů:

$$f(x, y, z) = x^4 + 2x^2y^2 + 4x^3z + z^4$$

### Řešení:

Nyní je zadán polynom třech neurčitých  $x, y, z$ . Jedná se o homogenní polynom stupně 4, má tedy smysl pokusit se hledat rozklad na SOS. Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu. V polynomech  $g_i$  hledaného rozkladu se mohou zřejmě vyskytovat pouze monomy ve tvaru  $x^2, xy, xz, z^2$ . Množina  $\Lambda_m$  bude tudíž ve tvaru  $\beta_1 = (2, 0, 0)$ ,  $\beta_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\beta_3 = (1, 0, 1)$ ,  $\beta_4 = (0, 0, 2)$  a hledaná Gramova matice  $B$  bude typu  $4 \times 4$ . Nyní musíme opět vyřešit systém lineárních rovnic a rozhodnout o parametru  $\lambda$ . Zvolme pro přehlednost jednodušší zápis než v předcházejícím příkladu, kdy vycházíme z poznatku, že matice  $B$  je symetrická. Nebudeme tudíž zapisovat rovnost odpovídajících si dvojic prvků a celý zápis celkově zestručníme.

$$\begin{aligned} b_{11}: \quad \beta_1 + \beta_1 &= (4, 0, 0) & \Rightarrow & \quad b_{11} = 1 \\ b_{12}: \quad \beta_1 + \beta_2 &= \beta_2 + \beta_1 = (3, 1, 0) & \Rightarrow & \quad 2b_{12} = 0; b_{12} = 0 \\ b_{13}: \quad \beta_1 + \beta_3 &= \beta_3 + \beta_1 = (3, 0, 1) & \Rightarrow & \quad 2b_{13} = 4; b_{13} = 2 \\ b_{14}: \quad \beta_1 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_1 = \beta_3 + \beta_3 = (2, 0, 2) & \Rightarrow & \quad 2b_{14} + b_{33} = 0; 2b_{14} = -b_{33} \\ b_{22}: \quad \beta_2 + \beta_2 &= (2, 2, 0) & \Rightarrow & \quad b_{22} = 2 \\ b_{23}: \quad \beta_2 + \beta_3 &= \beta_3 + \beta_2 = (2, 1, 1) & \Rightarrow & \quad 2b_{23} = 0; b_{23} = 0 \\ b_{24}: \quad \beta_2 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_2 = (1, 1, 2) & \Rightarrow & \quad 2b_{24} = 0; b_{24} = 0 \\ b_{33}: \quad \beta_3 + \beta_3 &= \beta_1 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_1 = (2, 0, 2) & \Rightarrow & \quad b_{33} + 2b_{14} = 0; b_{33} = -2b_{14} \\ b_{34}: \quad \beta_3 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_3 = (1, 0, 3) & \Rightarrow & \quad 2b_{34} = 0; b_{34} = 0 \\ b_{44}: \quad \beta_4 + \beta_4 &= (0, 0, 4) & \Rightarrow & \quad b_{44} = 1 \end{aligned}$$

Volme nyní parametr  $\lambda = b_{14}$ . Výsledná Gramova matice má pak podobu:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nechme si nyní programem Wolfram Mathematica určit charakteristický polynom matice  $B$ :

```
In[24]:= B = {{1, 0, 2, λ}, {0, 2, 0, 0}, {2, 0, -2λ, 0}, {λ, 0, 0, 1}};
Collect[CharacteristicPolynomial[B, y], y]
Out[25]= -8 + y4 - 4λ + 4λ3 + y3 (-4 + 2λ) + y2 (1 - 8λ - λ2) + y (10 + 10λ + 2λ2 - 2λ3)
```

Obdobně jako dříve užitíme nyní při hledání možných hodnot parametru  $\lambda$  Descartova znaménkového pravidla a utvoříme polynom  $F(-y)$ .

$$F(-y) = y^4 + y^3(4 - 2\lambda) + y^2(1 - 8\lambda - \lambda^2) + y(2\lambda^3 - 2\lambda^2 - 10\lambda - 10) + (4\lambda^3 - 4\lambda - 8)$$

V polynomu  $F(-y)$  nesmí dojít ke znaménkové změně, z čehož vyplývají podmínky:

$$4 - 2\lambda \geq 0 \wedge 1 - 8\lambda - \lambda^2 \geq 0 \wedge 2\lambda^3 - 2\lambda^2 - 10\lambda - 10 \geq 0 \wedge 4\lambda^3 - 4\lambda - 8 \geq 0$$

Pokusme se nyní s využitím počítače nalézt reálné hodnoty parametru  $\lambda$ , pro které bude matice  $B$  pozitivně semidefinitní. Musí být tedy splněny všechny výše uvedené podmínky.

```
In[38]:= Reduce[4 - 2λ ≥ 0 && 1 - 8λ - λ2 ≥ 0 && 2λ3 - 2λ2 - 10λ - 10 ≥ 0 && 4λ3 - 4λ - 8 ≥ 0, λ]
Out[38]= False
```

Hlášení *False* nám říká, že uvedené čtyři podmínky neplatí současně, a tudíž neexistuje žádná hodnota parametru  $\lambda$ , pro kterou bude matice  $B$  pozitivně semidefinitní. Zadaný polynom  $f$  tedy nelze vyjádřit ve tvaru součtu čtverců polynomů, což lze ověřit i programem MATLAB.

```
>> syms x y z;
>> f=x^4+2*x^2*y^2+4*x^3*z+z^4;
>> [Q,Z]=findsos(f,'rational')

No sum of squares decomposition is found.
```

### 3.4 CHOLESKÉHO DEKOMPOZICE

Choleského dekompozice, též česky rozklad, představuje jeden z možných postupů, který lze využít při hledání zadaného polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů. Jedná se o metodu, pomocí které lze rozložit reálnou, symetrickou, pozitivně definitní matici  $B$  na součin dolní a horní trojúhelníkové matice. Tyto matice jsou k sobě vzájemně transponované a platí vztah:

$$B = V.V^T$$

Praktické užití Choleského dekompozice s oporou počítače v hledání rozkladu na SOS bylo demonstrováno již ve středoškolském příkladu 1. Obecně se vychází z platnosti vztahu:

$$f = zVV^T z^T = \sum_{i=1}^l (v_i^T z^T)^2,$$

jak již bylo uvedeno dříve, kde vektor  $z$  se skládá z monomů hledaného rozkladu a vektor  $v^T$  představuje v tomto případě řádky matice  $V^T$ .

Obecné vymezení algoritmu Choleského dekompozice ponechme na čtenáři a zaměřme se spíše na konkrétní způsob výpočtu dolní trojúhelníkové matice  $V$  a k ní transponované horní trojúhelníkové matice  $V^T$ .

Vyjděme nyní ze čtvercové matice  $B$  typu  $3 \times 3$  a nenulové prvky hledaných matic  $V$ ,  $V^T$  označme následovně:

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix} \quad V^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Požadujeme platnost vztahu  $B = V.V^T$ , musí tedy platit následující maticová rovnost:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + d^2 & bc + de \\ ac & bc + de & c^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} = V.V^T$$

Po vypuštění součinu uprostřed:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + d^2 & bc + de \\ ac & bc + de & c^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} = V \cdot V^T$$

Odpovídající si dvojice prvků uvedených matic se musí rovnat a lze tedy již snadno vypočítat jednotlivé prvky matic  $V$ ,  $V^T$  z platnosti vztahů:

$$\begin{aligned} b_{11} &= a^2 & b_{12} &= ab & b_{13} &= ac \\ b_{21} &= ab & b_{22} &= b^2 + d^2 & b_{23} &= bc + de \\ b_{31} &= ac & b_{32} &= bc + de & b_{33} &= c^2 + e^2 + f^2 \end{aligned}$$

Uveďme konkrétní příklad s maticí  $B$  v níže uvedeném tvaru. Výpočet prvků hledaných matic budeme pro přehlednost zapisovat do matice  $V \cdot V^T$ . Červeně jsou označené vypočtené prvky:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad V \cdot V^T = \begin{pmatrix} a^2 = 1; a = 1 & ab = -1; b = -1 & ac = 2; c = 2 \\ ab = -1; b = -1 & b^2 + d^2 = 5; d = 2 & bc + de = -2; e = 0 \\ ac = 2; c = 2 & bc + de = -2; e = 0 & c^2 + e^2 + f^2 = 8; f = 2 \end{pmatrix}$$

Hledané matice  $V$ ,  $V^T$  jsou tedy v níže uvedeném tvaru a jejich vynásobením můžeme ověřit správnost výpočtu:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad V^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad V \cdot V^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} = B$$

V případě výpočtu Choleského dekompozice pomocí matematického softwaru Wolfram Mathematica užijeme příkazu *CholeskyDecomposition* v níže uvedené syntaxi. Program pak vrátí horní trojúhelníkovou matici  $V^T$ , kterou je právě potřeba určit při hledání rozkladu polynomu na SOS. Matici  $V$  bychom pak snadno určili příkazem *Transpose*.

```
In[145]:= B = {{1, -1, 2}, {-1, 5, -2}, {2, -2, 8}};
          Vt = MatrixForm[CholeskyDecomposition[B]];
          V = MatrixForm[Transpose[CholeskyDecomposition[B]]];
          Print["VT=" Vt, " V=" V]

          VT =  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  V =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 
```

Programem vypočtené matice se očekávaně shodují s výše uvedeným výsledkem získaným klasickým přístupem. K počítačovému řešení je ovšem nutné podotknout, že zde více než u klasických metod hrají roli vlastnosti matice  $B$  – symetrie a pozitivní definitnost. Pokud totiž matice některou z vlastností nesplní, kupř. vlivem lineární závislosti řádků, počítač automaticky ohlásí chybu a výpočet není možný i přes to, že jistý rozklad na SOS existuje.

### 3.5 ROZKLAD POLYNOMU NA SOS S UŽITÍM NEWTONOVA POLYTOPU

Zaměříme se nyní na jeden poměrně nový a netradiční postup, který je možné při hledání jistého rozkladu daného polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů též využít. Jedná se o postup využívající tzv. Newtonův polytop a jeho aplikace může výpočet značně zkrátit či usnadnit. V kapitole 3.2 (Algoritmus rozkladu) bylo řečeno, že při hledání symetrické matice  $B = (b_{i,j})$  s prvky chápanými jako proměnné nastává potíž, že velikost této matice obecně velmi rychle roste v závislosti na počtu neurčitých a stupni daného polynomu  $f$ . Obecně totiž pro symetrickou matici  $B$  (Gramova matice) typu  $k \times k$  platí, že máme-li polynom stupně  $2m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) v  $n$  proměnných, pak  $k = \binom{n+m}{n}$ . I přes tento fakt je ovšem možné vyjádřit některé polynomy  $f$  pomocí menšího počtu monomů, čímž se sníží řád  $k$  Gramovy matice  $B$  a výpočet se celkově zjednoduší. [6], [31]

Polytopy obecně představují určitou podmnožinu prostoru  $\mathbb{R}^n$ , která je konvexním obalem konečné množiny bodů. [5] Vymežeme nyní nejprve na tomto místě s oporou literatury [17] formou definice pojem *konvexní obal*.

**Definice 3:** O jisté množině bodů řekneme, že je **konvexní**, pokud pro každé dva body obsahuje i celou úsečku mezi nimi. **Konvexní obal** dané množiny bodů  $M$  je nejmenší konvexní množina, která obsahuje všechny body množiny  $M$ .

**Poznámka:** Nejmenší konvexní množina z definice 3 je myšlena vzhledem k inkluzi, tedy jedná se o průnik všech konvexních množin obsahujících body z množiny  $M$ .

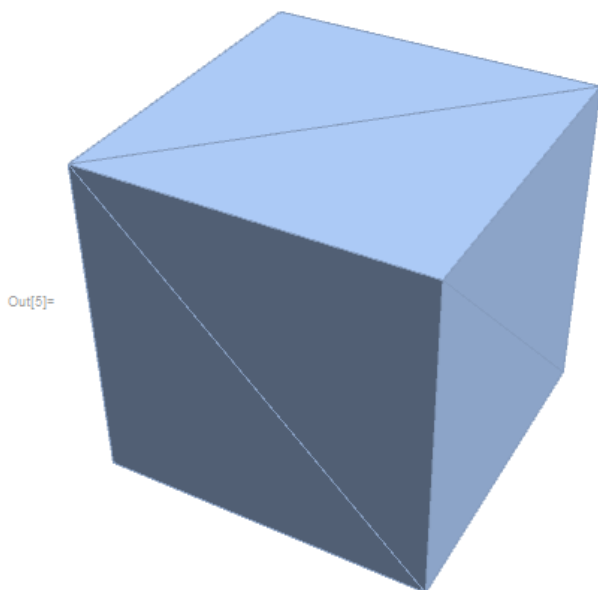
Jednoduchým příkladem v prostoru  $\mathbb{R}^3$  může být konvexní obal množiny bodů:

$$\{[0,0,0],[0,1,0],[0,0,1],[0,1,1],[1,0,0],[1,1,0],[1,0,1],[1,1,1]\}$$

Konvexním obalem je v tomto případě pravidelná krychle. Přesvědčit o pravdivosti tohoto tvrzení se můžeme snadno s využitím programu Wolfram Mathematica. Zanesením dané

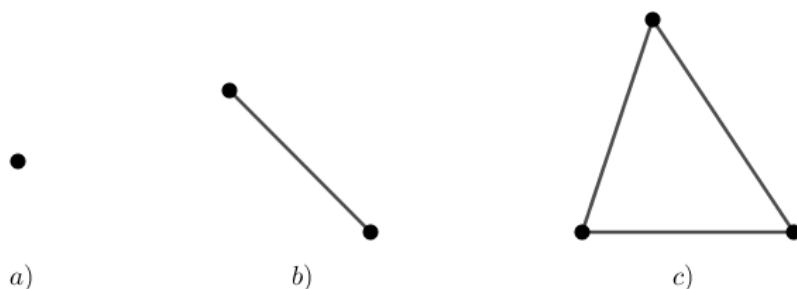
množiny bodů  $M$  a aktivací příkazu *ConvexHullMesh* v příslušné syntaxi program vrátí grafické znázornění konkrétního konvexního obalu, jak je znázorněno na obrázku 12.

```
In[5]= ConvexHullMesh[{{0, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 1}, {1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {1, 0, 1}, {1, 1, 1}}]
```



Obrázek 12 - Konvexní obal v prostoru  $\mathbb{R}^3$

Každý polytop jisté dimenze  $n$  obsahuje stěny, které jsou opět polytope různých dimenzí od 0 do  $n-1$ . V případě prostoru dimenze  $n=0$  se stává z této stěny pouhý bod – vrchol mnohoúhelníku (mnohostěnu). V prostoru o dimenzi  $n=1$  pak hovoříme o hranách. Obecně pak můžeme uvést, že konvexní obal každé konečné množiny bodů  $M$  vždy představuje určitý konvexní mnohoúhelník. Dále pak víme, že vrcholy tohoto mnohoúhelníku leží v některých ze zadaných bodů. Příklady konvexních obalů pro malé počty bodů jsou uvedeny na obrázku 13. [5], [17]



Obrázek 13 - Konvexní obaly malých množin

Vraťme se ovšem nyní k rozkladu polynomu na součet čtverců a možnostem konkrétního využití Newtonova polytopu. Označme si pro další potřeby výpočtu  $conv(M)$  konvexní

obal množiny  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Mějme dále konvexní množinu  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ . Bod  $\alpha \in K$  nazveme extrémním bodem v případě, že nebude náležet žádnému relativnímu vnitřku jistého segmentu  $(\alpha_1, \alpha_2) \subset K$ . Jinými slovy můžeme říci, že pokud  $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in K$  a platí  $0 < \lambda < 1$  takové, že  $\alpha = \lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2$ , potom musí nutně platit rovnost  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Konvexní polytop představuje konvexní obal jisté neprázdné, konečné množiny  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$  a extrémními body tohoto polytopu jsou vrcholy. Řekněme nyní, že množina  $K$  představuje polytop a konečnou množinu všech vrcholů polytopu  $K$  označme  $V$ . Potom zřejmě platí (dle dřívějšího označení), že  $K = \text{conv}(V)$  a množina  $V$  představuje nejmenší vrcholovou reprezentaci polytopu  $K$ . [31], [32]

Newtonův polytop jistého polynomu  $f = \sum_{\alpha \in M} c_\alpha x^\alpha$  je potom definován jako konvexní obal

$K(f) := \text{conv}(M) \subseteq \mathbb{R}^n$  a tzv. redukovaný Newtonův polytop definujeme vztahem:

$$\frac{1}{2}K(f) := \left\{ \frac{1}{2}\alpha : \alpha \in K(f) \right\}$$

[31]

Výše uvedená definice nám již umožňuje vyslovit větu, která představuje nástroj pro redukci počtu monomů vystupujících ve výsledném rozkladu polynomu  $f$  na součet čtverců. Větu uvedeme bez důkazu a zaměříme se raději na její uplatnění při řešení konkrétního příkladu.

**Věta 3:** Pokud lze vyjádřit polynom  $f$  ve tvaru součtu čtverců  $f = \sum_{i=1}^t g_i^2$ , potom vrcholy

$K(f)$  určují vektory, jejichž vstupy musí být sudá čísla, a platí vztah  $K(g_i) \subseteq \frac{1}{2}K(f)$ .

Z výše uvedených vět 3 vyplývá, že libovolný monom  $x^\alpha$  vyskytující se ve vektoru hledaného rozkladu na součet čtverců  $z.Q.z^T = D.f(x)$

musí též vyhovovat vztahu  $\alpha \in \frac{1}{2}K(f) \cap \mathbb{N}^n$ . Tento předpis představuje základ postupu,

jak s využitím Newtonova polytopu snížit počet monomů v hledaném vektoru  $z$ , čímž se zároveň sníží i řád  $k$  Gramovy matice  $B$  (příp. lze užívat i výše uvedené označení  $Q$ , které je zavedeno v programu MATLAB) a celý výpočet hledaného rozkladu polynomu na



součet čtverců se usnadní a urychlí. Nutno na tomto místě poznamenat, že níže uvedený algoritmus (příklad 6) využívá i program MATLAB v součinnosti s balíčkem SOSTOOLS. Počítači pak stačí na výpočet zpravidla zlomek sekundy, v případě klasického přístupu je postup oproti počítači pochopitelně časově náročnější. [6], [31]

Opusťme ovšem nyní teoretickou rovinu celé problematiky a na jednotlivé kroky postupu hledání rozkladu s využitím (redukovaného) Newtonova polytopu se podívejme na konkrétním příkladě.

#### **Příklad 6 (řešení s využitím Newtonova polytopu):**

Rozhodněte, zda je možné níže uvedený reálný polynom  $f$  vyjádřit ve tvaru součtu čtverců polynomů a případně tento rozklad určete:

$$f = 3x^4 - 2x^2y + 7x^2 - 4xy + 4y^2 + 1$$

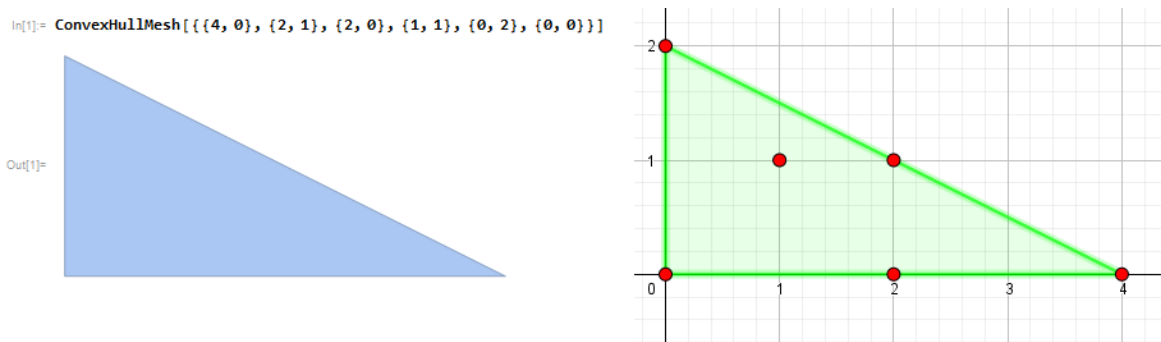
#### **Řešení:**

Zadaný polynom  $f$  je stupně 4 ve dvou proměnných. Vzhledem k tomu má smysl uvažovat o existenci rozkladu polynomu  $f$  na SOS. Všechny potenciální monomy, které by se mohly vyskytovat ve výsledném rozkladu, pak musí nutně být stupně  $m \leq 2$ . Jedná se zřejmě o monomy ve tvaru  $1, x, y, x^2, xy, y^2$ . Obecně bychom tedy mohli uvažovat těchto šest uvedených monomů, což by znamenalo pracovat s Gramovou maticí  $B$  o rozměrech  $6 \times 6$ . Využijme proto nyní Newtonův polytop, kdy díky dříve uvedené větě 3 můžeme počet monomů, které se mohou ve výsledném rozkladu objevit, snížit.

V prvním kroku sestrojíme množinu  $M$ , která se skládá z bodů, jejichž souřadnice určují exponenty jednotlivých členů v původním polynomu  $f$ :

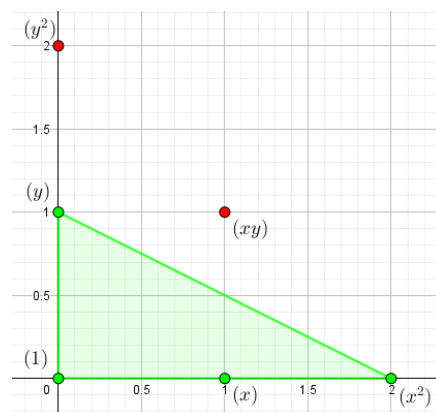
$$M = \{[4,0], [2,1], [2,0], [1,1], [0,2], [0,0]\}$$

Nyní vyjdeme ze vztahu  $K(f) := \text{conv}(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Víme, že Newtonův polytop představuje konvexní obal sestrojené množiny  $M$ . Výpočet a znázornění necháme provést v programu Wolfram Mathematica s využitím příkazu *ConvexHullMesh*, pro přehlednost však situaci též narýsujeme v programu Geogebra (obrázek 14).



Obrázek 14 - Newtonův polytop v programech Wolfram Mathematica (vlevo) a GeoGebra (vpravo)

Hledaný Newtonův polytop  $K(f)$  představuje na obrázku 14 v obou případech sestrojený trojúhelník s vrcholy o souřadnicích  $[4,0]$ ,  $[0,0]$  a  $[0,2]$ . Červeně jsou na obrázku vpravo vyznačeny jednotlivé body z množiny  $M$ . V dalším kroku sestrojíme redukovaný Newtonův polytop dle dříve uvedeného vztahu  $\frac{1}{2}K(f) := \left\{ \frac{1}{2}\alpha : \alpha \in K(f) \right\}$ . Bude se tedy jednat opět o trojúhelník s vrcholy o souřadnicích  $[2,0]$ ,  $[0,0]$ ,  $[0,1]$ . Zároveň do obrázku vyneseme body, jejichž souřadnice určují exponenty šestice „podezřelých“ monomů  $1, x, y, x^2, xy, y^2$ . Jedná se tedy po řadě o body se souřadnicemi  $[0,0]$ ,  $[1,0]$ ,  $[0,1]$ ,  $[2,0]$ ,  $[1,1]$  a  $[0,2]$ . Následně budeme dle vztahu  $K(g_i) \subseteq \frac{1}{2}K(f)$  rozhodovat, zda se může daný monom vyskytnout ve výsledném rozkladu polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů. Pro lepší přehlednost je konstrukce provedena pouze v programu dynamické geometrie GeoGebra a u jednotlivých bodů je v závorce uvedeno, který monom jej reprezentuje. Zároveň jsou barevně odlišeny monomy, které splňují výše uvedenou podmínku a mohou se vyskytovat i ve výsledném rozkladu (zelená barva). Monomy, které ji nespĺňují, jsou zvýrazněny červenou barvou.



Obrázek 15 - Redukovaný Newtonův polytop se zvýrazněnými monomy

Z obrázku 15 je zřejmé, že ve výsledném rozkladu polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů se nemohou vyskytovat monomy  $y^2$  a  $xy$ , protože leží vně zeleného trojúhelníku, který představuje redukovaný Newtonův polytop. Pro souřadnice červeně zvýrazněných bodů tedy platí, že  $[0,2] \notin \frac{1}{2}K(f)$  a  $[1,1] \notin \frac{1}{2}K(f)$ . Výsledný vektor z skládající se z monomů bude tedy obsahovat pouze monomy  $1, x, y, x^2$ , čímž se výpočet celkově zjednoduší, protože budeme pracovat namísto Gramovy matice typu  $6 \times 6$  pouze s maticí  $4 \times 4$ .

Nyní budeme postupovat obdobně jako v předešlých příkladech. V prvním kroku musíme určit množinu  $\Lambda_m = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$  na základě exponentů získaných monomů. Vzhledem k získaným monomům  $1, x, y, x^2$ , které se budou objevovat i ve výsledném rozkladu, a k tomu, že polynom  $f$  je ve dvou proměnných, jedná se po řadě o prvky  $\beta_1 = (0,0)$ ,  $\beta_2 = (1,0)$ ,  $\beta_3 = (0,1)$ ,  $\beta_4 = (2,0)$ .

Nyní musíme vyřešit systém lineárních rovnic a určit tak konkrétní prvky hledané symetrické Gramovy matice  $B$  typu  $4 \times 4$  v obecném tvaru:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} b_{11} : \beta_1 + \beta_1 = (0,0) + (0,0) = (0,0) & \Rightarrow b_{11} = 1 \\ b_{12} = b_{21} : \beta_1 + \beta_2 = \beta_2 + \beta_1 = (0,0) + (1,0) = (1,0) + (0,0) = (1,0) & \Rightarrow 2b_{12} = 2b_{21} = 0; b_{12} = b_{21} = 0 \\ b_{13} = b_{31} : \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1 = (0,0) + (0,1) = (0,1) + (0,0) = (0,1) & \Rightarrow 2b_{13} = 2b_{31} = 0; b_{13} = b_{31} = 0 \\ b_{14} = b_{41} : \beta_1 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_1 = \beta_2 + \beta_2 = (0,0) + (2,0) = (2,0) + (0,0) = (1,0) + (1,0) = (2,0) & \Rightarrow 2b_{14} + b_{22} = 2b_{41} + b_{22} = 7 \\ b_{22} : \beta_2 + \beta_2 = \beta_1 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_1 = (1,0) + (1,0) = (0,0) + (2,0) = (2,0) + (0,0) = (2,0) & \Rightarrow b_{22} + 2b_{14} = b_{22} + 2b_{41} = 7 \\ b_{23} = b_{32} : \beta_2 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_2 = (1,0) + (0,1) = (0,1) + (1,0) = (1,1) & \Rightarrow 2b_{23} = 2b_{32} = -4; b_{23} = b_{32} = -2 \\ b_{24} = b_{42} : \beta_2 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_2 = (1,0) + (2,0) = (2,0) + (1,0) = (3,0) & \Rightarrow 2b_{24} = 2b_{42} = 0; b_{24} = b_{42} = 0 \\ b_{33} : \beta_3 + \beta_3 = (0,1) + (0,1) = (0,2) & \Rightarrow b_{33} = 4 \\ b_{34} = b_{43} : \beta_3 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_3 = (0,1) + (2,0) = (2,0) + (0,1) = (2,1) & \Rightarrow 2b_{34} = 2b_{43} = -2; b_{34} = b_{43} = -1 \\ b_{44} : \beta_4 + \beta_4 = (2,0) + (2,0) = (4,0) & \Rightarrow b_{44} = 3 \end{array}$$

Vidíme, že nastala provázanost prvků  $b_{14}$  (resp.  $b_{41}$ ) a  $b_{22}$ , kdy platí vztah  $2b_{14} + b_{22} = 7$  (resp.  $2b_{41} + b_{22} = 7$  vzhledem k očekávané symetrii matice  $B$ ). Zavedeme tedy parametr  $b_{14} = \lambda$  a vyjádříme  $b_{22}$ , kdy musí platit  $b_{22} = 7 - 2\lambda$ .

Získáme tak hledanou Gramovu matici  $B$  ve tvaru:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 7-2\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ \lambda & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nyní musíme určit charakteristický polynom získané matice  $B$ , abychom mohli rozhodnout o přípustných hodnotách pro parametr  $\lambda$ , kdy po dosazení konkrétní hodnoty zůstane matice  $B$  pozitivně semidefinitní. Využijme opět programu Wolfram Mathematica a příkazu *CharacteristicPolynomial* v kombinaci s příkazem *Collect*.

```
In[4]:= MaticesB = {{1, 0, 0, λ}, {0, 7 - 2 * λ, -2, 0}, {0, -2, 4, -1}, {λ, 0, -1, 3}};
Collect[CharacteristicPolynomial[MaticesB, y], y]
Out[5]= 65 + y4 - 22 λ - 24 λ2 + 8 λ3 + y3 (-15 + 2 λ) + y2 (70 - 16 λ - λ2) + y (-121 + 36 λ + 11 λ2 - 2 λ3)
```

Program určil charakteristický polynom  $F(y)$  zadané matice  $B$  ve výše uvedeném tvaru. Abychom ovšem mohli při rozhodování o přípustných hodnotách parametru  $\lambda$  využít Descartova znaménkového pravidla, potřebujeme získat polynom  $F(-y)$ . Výpočet opět přenecháme programu Wolfram Mathematica a využijeme příkazu *ReplaceAll* opět v kombinaci s příkazem *Collect*.

```
In[7]:= Collect[ReplaceAll[CharacteristicPolynomial[MaticesB, y], {y -> -y}], y]
Out[7]= 65 + y4 + y3 (15 - 2 λ) - 22 λ - 24 λ2 + 8 λ3 + y2 (70 - 16 λ - λ2) + y (121 - 36 λ - 11 λ2 + 2 λ3)
```

Rychlým výpočtem jsme získali vyjádření polynomu  $F(-y)$  ve tvaru:

$$F(-y) = y^4 + y^3(15 - 2\lambda) + y^2(70 - 16\lambda - \lambda^2) + y(121 - 36\lambda - 11\lambda^2 + 2\lambda^3) + (8\lambda^3 - 24\lambda^2 - 22\lambda + 65)$$

Nutnou podmínkou pro neexistenci záporných reálných kořenů ve výše uvedeném polynomu je, aby nenastala mezi jednotlivých členy žádná znaménková změna. Pro parametr  $\lambda$  tedy musí obdobně jako dříve platit:

$$15 - 2\lambda \geq 0 \wedge 70 - 16\lambda - \lambda^2 \geq 0 \wedge 121 - 36\lambda - 11\lambda^2 + 2\lambda^3 \geq 0 \wedge 8\lambda^3 - 24\lambda^2 - 22\lambda + 65 \geq 0$$

Vzhledem k povaze většiny výše uvedených nerovnic necháme výpočet této soustavy opět počítačovému softwaru, který nám po aktivaci příkazu *Reduce* v příslušné syntaxi vydá interval hodnot, kterých může nabývat parametr  $\lambda$ , aby při jejich dosazování byla Gramova matice  $B$  vždy pozitivně semidefinitní.

In[10]:= `N[Reduce[15 - 2 λ ≥ 0 && 70 - 16 λ - λ2 ≥ 0 && 121 - 36 λ - 11 λ2 + 2 λ3 ≥ 0 && + 8 λ3 - 24 λ2 - 22 λ + 65 ≥ 0, λ]]`

Out[10]:= `-1.65019 ≤ λ ≤ 1.63056`

Parametr  $\lambda$  může tedy nabývat hodnot přibližně v intervalu  $\lambda \in \langle -1, 65; 1, 63 \rangle$ . Věnujme se nyní pouze celočíselným hodnotám, kterých může parametr  $\lambda$  nabývat. Jedná se evidentně o množinu tří hodnot  $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$  a vypočteme pro hodnoty těchto parametrů vyjádření zadaného polynomu  $f$  ve tvaru součtu čtverců polynomů. Následně provedeme zkoušku roznásobením, abychom ověřili správnost výpočtu.

Začneme situací pro volbu parametru  $\lambda = 0$ . Matici  $B$  tak získáme po dopočtení ve tvaru:

$$B_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nyní vyjdeme z již dříve uvedeného vztahu  $B = V \cdot V^T$  a pomocí Choleského dekompozice s využitím programu Wolfram Mathematica vypočteme matici  $V^T$ , díky které následně určíme první z možných rozkladů zadaného polynomu  $f$ .

In[2]:= `MatriceB0 = {{1, 0, 0, 0}, {0, 7, -2, 0}, {0, -2, 4, -1}, {0, 0, -1, 3}};`  
`MatriceV0 = CholeskyDecomposition[MatriceB0];`  
`MatrixForm[MatriceV0]`

Out[4]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{7} & -\frac{2}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\frac{6}{7}} & -\frac{\sqrt{\frac{7}{6}}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\frac{65}{6}}}{2} \end{pmatrix}$$

Výsledný rozklad polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů získáme z níže uvedeného součinu. Výpočet opět přenecháme matematickému softwaru, i když se v tomto případě již nejedná o příliš složitou záležitost.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{7} & -\frac{2}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\frac{6}{7}} & -\frac{\sqrt{\frac{7}{6}}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\frac{65}{6}}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

```
In[7]:= z = {{1}, {x}, {y}, {x^2}};
SOS1 = Maticev0.z
MatrixForm[SOS1]
```

```
Out[9]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{7}x - \frac{2y}{\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{6}}x^2 + 2\sqrt{\frac{6}{7}}y \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{65}{6}}x^2 \end{pmatrix}$$

Výsledný rozklad polynomu  $f$  na SOS při volbě parametru  $\lambda = 0$  má následující podobu:

$$f(x, y) = 1^2 + \left(\sqrt{7}x - \frac{2y}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{6}}x^2 + 2\sqrt{\frac{6}{7}}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{65}{6}}x^2\right)^2$$

Je zřejmé, že vyjádření je poměrně komplikované, oproti původně zadanému polynomu  $f$ , nicméně se jedná o vyjádření tohoto polynomu ve tvaru součtu čtverců polynomů a můžeme tedy konstatovat, že zadaný polynom  $f$  je pozitivně semidefinitní. Ověříme nyní správnost výpočtu zpětným umocněním. Vzhledem k povaze vyjádření využijeme opět matematický software, konkrétně Wolfram Mathematica a příkaz *Expand* v součinnosti s příkazem *TrueQ* v příslušné syntaxi.

```
In[16]:=
fx = 3 * x^4 - 2 * x^2 * y + 7 * x^2 - 4 * x * y + 4 * y^2 + 1;
SOSf0 = 1^2 + (Sqrt[7] * x - (2 * y) / Sqrt[7])^2 +
((-1 / 2) * Sqrt[7 / 6] * x^2 + 2 * Sqrt[6 / 7] * y)^2 + (1 / 2 * Sqrt[65 / 6] * x^2)^2;
Expand[SOSf0]
TrueQ[fx == Expand[SOSf0]]
```

```
Out[18]= 1 + 7 x^2 + 3 x^4 - 4 x y - 2 x^2 y + 4 y^2
```

```
Out[19]= True
```

Program vypsal umocněný polynom označený *SOSf0* a zároveň vydal informaci, která potvrzuje, že získané vyjádření ve tvaru součtu čtverců skutečně reprezentuje původní polynom  $f = 3x^4 - 2x^2y + 7x^2 - 4xy + 4y^2 + 1$ . Tím je výpočet i zkouška u konce.

Přejdeme nyní k situaci pro volbu parametru  $\lambda = 1$  a postupujme obdobně jako v předchozím případě. Matici  $B$  získáme pro tuto volbu parametru ve tvaru:

$$B_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nebudeme nyní podrobně uvádět všechny kroky výpočtu – jsou analogické k předchozí situaci. Nejprve vypočteme s využitím počítačového softwaru matici  $V^T$ , následně určíme

součin se sloupcovým vektorem monomů a získáme vyjádření původního polynomu  $f$  ve tvaru součtu čtverců polynomů. Nakonec provedeme zkoušku jako v předchozím případě.

```
In[20]:=
MaticeB1 = {{1, 0, 0, 1}, {0, 5, -2, 0}, {0, -2, 4, -1}, {1, 0, -1, 3}};
MaticeV1 = CholeskyDecomposition[MaticeB1];
MatrixForm[MaticeV1]
z = {{1}, {x}, {y}, {x^2}};
SOS2 = MaticeV1.z;
MatrixForm[SOS2]
```

$$V^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \quad V^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} 1+x^2 \\ \sqrt{5}x - \frac{2y}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{5}x^2 + \frac{4y}{\sqrt{5}} \\ \frac{3\sqrt{3}x^2}{4} \end{pmatrix}$$

Druhé možné vyjádření původního polynomu  $f$  je tedy ve tvaru součtu čtyř čtverců:

$$f(x, y) = (1+x^2)^2 + \left(\sqrt{5}x - \frac{2y}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\sqrt{5}x^2 + \frac{4y}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}x^2}{4}\right)^2$$

Vidíme, že volba parametru má přímý vliv na podobu výsledného rozkladu. Bohužel musíme konstatovat, že se na první pohled nejedná o jednodušší rozklad než v předchozím případě. Provedme nyní ještě zkoušku zpětným umocněním.

```
In[31]:= fx = 3*x^4 - 2*x^2*y + 7*x^2 - 4*x*y + 4*y^2 + 1;
SOSf1 = (1+x^2)^2 + (Sqrt[5]*x - 2*y/Sqrt[5])^2 + ((-1/4)*Sqrt[5]*x^2 + (4*y)/Sqrt[5])^2 + ((3*Sqrt[3]*x^2)/4)^2;
Expand[SOSf1]
TrueQ[fx == Expand[SOSf1]]

Out[33]= 1 + 7 x^2 + 3 x^4 - 4 x y - 2 x^2 y + 4 y^2

Out[34]= True
```

Stejně jako v předchozím případě jsme umocněním získali původní polynom  $f$  a program po porovnání obou vyjádření vydal informaci, že se původně zadaný a umocněný polynom z rozkladu na součet čtverců shodují.

Přejdeme na závěr této kapitoly k poslední celočíselné hodnotě parametru  $\lambda = -1$  a určíme pro tuto hodnotu rozkladu původního polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů.

Matice  $B$  bude mít pro tuto volbu parametru po dopočtení následující podobu:

$$B_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nyní již velmi stručně provedeme výpočet obdobným způsobem jako v předešlých situacích.

```
In[41]:=
MaticеB01 = {{1, 0, 0, -1}, {0, 9, -2, 0}, {0, -2, 4, -1}, {-1, 0, -1, 3}};
MaticеV01 = CholeskyDecomposition[MaticеB01];
MatrixForm[MaticеV01]
z = {{1}, {x}, {y}, {x^2}};
SOS3 = MaticеV01.z;
MatrixForm[SOS3]
```

$$V^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\sqrt{2}}{3} & -\frac{3}{4\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\frac{55}{2}}}{4} \end{pmatrix} \quad V^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} 1 - x^2 \\ 3x - \frac{2y}{3} \\ -\frac{3x^2}{4\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}y}{3} \\ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{55}{2}} x^2 \end{pmatrix}$$

Třetí vyjádření původního polynomu  $f$  ve tvaru součtu čtverců je tedy ve tvaru:

$$f(x, y) = (1 - x^2)^2 + \left(3x - \frac{2y}{3}\right)^2 + \left(-\frac{3x^2}{4\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}y}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{55}{2}} x^2\right)^2$$

Pokud provedeme obdobně jako v předchozích příkladech zkoušku, zjistíme, že se opět jedná o správný rozklad původního polynom  $f$  na součet čtverců polynomů:

```
In[51]:= fx = 3*x^4 - 2*x^2*y + 7*x^2 - 4*x*y + 4*y^2 + 1;
SOSf2 = (1 - x^2)^2 + (3*x - 2*y/3)^2 + (- (3*x^2) / (4*Sqrt[2]) + (4*Sqrt[2]*y) / (3))^2 + ((1/4)*Sqrt[55/2]*x^2)^2;
Expand[SOSf2]
TrueQ[fx == Expand[SOSf2]]

Out[53]= 1 + 7 x^2 + 3 x^4 - 4 x y - 2 x^2 y + 4 y^2

Out[54]= True
```

## 4 NĚKTERÉ ROZDÍLY MEZI KLASICKÝM A POČÍTAČOVÝM ROZKLADEM

Programy počítačové algebry a matematický software obecně může být dobrým prostředkem pro zefektivnění rozsáhlých výpočtů i srozumitelnější prezentaci abstraktních pojmů studentům. Nutno je ovšem poznamenat, že počítač zpravidla přistupuje k řešení zadaných příkladů odlišným způsobem, než jsou klasické metody – můžeme například zmínit aplikaci numerických metod oproti užití jednoduchého vzorce, případně vhodnou volbu celočíselného parametru oproti „nehezkým“ reálným hodnotám ve tvaru zlomků nebo odmocnin. Uvedme jeden takový konkrétní příklad.



Mějme polynom zadaný ve tvaru:

$$f(x, y) = 4x^4 + 4x^3y - 7x^2y^2 - 2xy^3 + 10y^4$$

Potom matice  $B$  je matice s parametrem získaná běžným postupem, matici  $B_1$  vydá program MATLAB v případě, že neklademe žádná omezení na její prvky. Matice  $B_2$  pak představuje počítačem vypočtenou matici, kdy požadujeme takovou volbu parametru  $\lambda$ , aby byla matice celočíselná. Je zřejmé, že v případě čistě počítačového postupu by nám tvar matice  $B_1$  nevalil, pro lidské oko je ovšem jistě příjemnější celočíselný tvar matice  $B_2$ . Je zde tedy patrné, že při výpočtech s využitím matematického softwaru je vyvíjen jistý tlak na preciznost vyjadřování, resp. formulaci vstupní syntaxe.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \lambda \\ 2 & -7 - 2\lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 10 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 4,0000 & 2,0000 & -4,9826 \\ 2,0000 & 2,9652 & -1,0000 \\ -4,9826 & -1,0000 & 10,0000 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Odlíšné vnímání řešeného problému počítačem a člověkem pak může přímo ovlivnit i formulaci závěrů. To bylo naznačeno již dříve (viz závěr kap. 3.4). Podívejme se nyní na odlišný přístup k některým krokům hledání rozkladu polynomu na SOS programy počítačové algebry a člověkem. Příklady uvedené v této kapitole poukazují na skutečnost, že není vždy možné při výpočtech s využitím počítačových technologií pouze bezmyšlenkovitě věřit každému vydanému výsledku a považovat počítačové postupy za nejefektivnější a všespasitelné. Vždy je nutný kritický přístup a znalost studované problematiky, kdy kupříkladu aplikace obecně známého vzorce může výrazně usnadnit a urychlit výpočet v porovnání s universálním (počítačovým) algoritmem.

#### 4.1 HODNOST MATICE A UŽITÍ CHOLESKÉHO DEKOMPOZICE

Hodnost Gramovy matice  $B$  jistého polynomu  $f$  přímo ovlivňuje podobu rozkladu polynomu na součet čtverců způsobem, že hodnost  $t$  představuje celkový počet čtverců ve výsledném rozkladu. Hodnost a případná lineární závislost řádků může mít zároveň vliv na počítačovou řešitelnost zadaného problému, jak jsme již naznačili v kapitole 3.4. Uvedme konkrétní podobu takového příkladu, kdy jeho samotné řešení nebude tak podrobně rozepsáno jako v předcházejících případech. Pro demonstraci rozdílnosti řešení užijeme již výše uvedený polynom dvou neurčitých  $f(x, y)$ .

### Příklad 7 (vliv hodnoty matice na počítačové řešení):

Nalezněte s využitím Choleského dekompozice jistý rozklad zadaného polynomu na SOS:

$$f(x, y) = 4x^4 + 4x^3y - 7x^2y^2 - 2xy^3 + 10y^4$$

#### Řešení:

Jako již dříve nejprve vypočteme obecnou Gramovu matici  $B$  zadaného polynomu a určíme možné hodnoty zavedeného parametru  $\lambda$ , aby tato matice zůstala pozitivně semidefinitní.

Hledaná matice je v již dříve uvedeném tvaru:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \lambda \\ 2 & -7-2\lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Pomocí programu Wolfram Mathematica vypočteme nejprve charakteristický polynom  $F(y)$  a následně s využitím příkazu *ReplaceAll* v uvedené syntaxi určíme polynom  $F(-y)$ .

Na základě Descarova znaménkového pravidla pak stanovíme možné hodnoty parametru  $\lambda$ .

```
In[20]:= B = {{4, 2, λ}, {2, -7 - 2λ, -1}, {λ, -1, 10}};
Collect[ReplaceAll[CharacteristicPolynomial[B, y], {y → -y}], y]
Reduce[(7 - 2λ) ≥ 0 && -63 - 28λ - λ2 ≥ 0 && -324 - 84λ + 7λ2 + 2λ3 ≥ 0, λ]
Out[21]= -324 + y3 + y2 (7 - 2λ) - 84λ + 7λ2 + 2λ3 + y (-63 - 28λ - λ2)
Out[22]= -6 ≤ λ ≤  $\frac{1}{4} (5 - \sqrt{457})$ 
```

Prozkoumejme nyní s využitím příkazu *MatrixRank* hodnost matice  $B$  v krajních bodech určeného intervalu a coby jednoho zástupce vnitřních bodů volme hodnotu  $\lambda = 0$ .

```

In[93]:= B1 = {{4, 2, -6}, {2, -7 - 2 * (-6), -1}, {-6, -1, 10}};
          B2 = {{4, 2, 1/4 (5 - sqrt(457))}, {2, -7 - 2 * (1/4 (5 - sqrt(457))), -1}, {1/4 (5 - sqrt(457)), -1, 10}};
          B3 = {{4, 2, 0}, {2, -7 - 2 * 0, -1}, {0, -1, 10}};
          MatrixRank[B1]
          MatrixRank[B2]
          MatrixRank[B3]

Out[93]= 2

Out[94]= 2

Out[95]= 3

```

Hodnost v krajních bodech intervalu je vlivem lineárně závislých řádků  $r(B) = 2$ , pro vnitřní body je pak hodnost  $r(B) = 3$ . V krajních bodech tedy očekáváme vyjádření ve tvaru součtu dvou čtverců. Podívejme se ovšem na výsledek, který získáme pro volbu parametru  $\lambda = -6$  při užití Choleského dekompozice v programu Wolfram Mathematica.

```

In[2]:= B = {{4, 2, -6}, {2, -7 - 2 * (-6), -1}, {-6, -1, 10}};
          CholeskyDecomposition[B]

... CholeskyDecomposition: The matrix {{4, 2, -6}, {2, 5, -1}, {-6, -1, 10}} is not sufficiently positive
          definite to complete the Cholesky decomposition to reasonable accuracy.

```

Problémem je, že program požaduje pro výpočet striktně pozitivně definitní matici. Nelze ovšem při tomto chybovém hlášení okamžitě tvrdit, že rozklad neexistuje. Již víme, že by měl existovat rozklad ve vyjádření součtu dvou čtverců, kdy vzhledem k povaze zadaného polynomu  $f(x, y)$  se v něm mohou vyskytovat pouze monomy ve tvaru  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$ . Opusťme proto nyní počítačový software a pokusme se manuálním postupem s užitím dříve uvedeného způsobu výpočtu trojúhelníkových matic  $V$ ,  $V^T$  nalézt vyjádření zadaného polynomu ve tvaru součtu dvou čtverců pro hodnotu parametru  $\lambda = -6$ .

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & -1 \\ -6 & -1 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a^2 = 4; a = 2 \\ ab = 2; b = 1 \\ ac = -6; c = -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} b^2 + d^2 = 5; d = 2 \\ bc + de = -1; e = 1 \\ bc + de = -1; e = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} c^2 + e^2 + f^2 = 10; f = 0 \\ c^2 + e^2 + f^2 = 10; f = 0 \end{array} \quad V^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Určíme nyní součin  $V^T \cdot z^T$ :

$$V^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 + xy - 3y^2 \\ 2xy + y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Výsledné vyjádření polynomu  $f$  ve tvaru součtu dvou čtverců je tedy ve tvaru:

$$f(x, y) = (2x^2 + xy - 3y^2)^2 + (2xy + y^2)^2$$

Obdobně jako dříve bychom mohli pochopitelně nacházet další možná vyjádření, a to buď ve tvaru součtu dvou čtverců pro druhý z krajních bodů parametru  $\lambda$  nebo tří čtverců pro hodnoty z intervalu  $\lambda \in \left(-6, \frac{1}{4}(5 - \sqrt{457})\right)$ . Přejděme ovšem nyní k dalšímu specifickému příkladu, který je možné vyřešit oproti standardnímu postupu velmi rychle s využitím známých identit.

#### 4.2 TWO SQUARES IDENTITY V ROZKLADU POLYNOMU NA SOS

Two Squares identity, též Brahmaguptovy–Fibonacciho identity případně Brahmaguptovy identity, představují možnost, jak v algebře vyjádřit součin součtu dvou čtverců jako součet dvou jiných čtverců. Jedná se o následující dvojici vztahů:

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2\end{aligned}\tag{27}$$

Uvedené identity se poprvé objevily již v díle *Aritmetika* od Diofanta z Alexandrie, později pak byly znovuobjeveny indickým matematikem a astronomem Brahmaguptou (598–670), který našel i jejich obecnější vyjádření, a jsou též popsány v publikaci italského matematika Leonarda Fibonacciho (1170–1250) *Book of Squares* z roku 1225. [23]

Podívejme se nyní na jednu, byť omezenou, možnost aplikace těchto dvou identit při hledání rozkladů polynomu na součet čtverců. Dále popsáný postup poukazuje na skutečnost, že nápad a užití „triku“ může být někdy při řešení úlohy rychlejší než moderní technologie. Příklad 8 je záměrně zadaný v jednoduché podobě, která obsahuje již součin součtu dvou čtverců. Obecně by zřejmě musel k tomuto vyjádření přejít řešitel samostatně.

### Příklad 8 (Two Squares identity):

Nalezněte nějaké rozklady zadaného polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů:

$$f(x, y) = x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 + 4y^2)$$

#### Řešení:

Nejprve se při řešení tohoto příkladu zaměříme na možnost využití uvedených identit pro nalezení dvou možných rozkladů na SOS zadaného polynomu, následně pak ověříme získané výsledky pomocí dříve uvedeného algoritmu a zaměříme se též na některé lidské postupy.

V prvním kroku si v souladu se značením v obou z uvedených identit musíme označit prvky zadaného polynomu  $f$ :

$$f(x, y) = \left( \underbrace{x^2}_a + \underbrace{y^2}_b \right) \left( \underbrace{x^2}_c + \underbrace{\left( \frac{2y}{d} \right)^2}_d \right)$$

Pak jistě platí v pořadí na základě uvedených identit:

$$f(x, y) = x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 - 2y^2)^2 + (2xy + yx)^2 = (x^2 - 2y^2)^2 + (3xy)^2$$

$$f(x, y) = x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 + (2xy - yx)^2 = (x^2 + 2y^2)^2 + (xy)^2$$

Pokud provedeme zkoušku umocněním:

$$(x^2 - 2y^2)^2 + (3xy)^2 = x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 + 9x^2y^2 = x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4 = f(x, y)$$

$$(x^2 + 2y^2)^2 + (xy)^2 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 + x^2y^2 = x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4 = f(x, y)$$

Získali jsme tedy dvě možná vyjádření zadaného polynomu  $f$  ve tvaru součtu dvou čtverců polynomů a správnost výsledku jsme ověřili zkouškou. Zařaďme nyní pro porovnání řešení obvyklým způsobem pomocí maticového počtu. Opět nebudeme podrobně rozepisovat celý postup, ale pozastavíme se u některých fází výpočtu, kde jsme dříve postupovali striktně s využitím matematického softwaru a zamysleme se nad klasickými možnostmi řešení bez využití počítačových technologií.

Zadaný polynom  $f$  je homogenní polynom stupně 4 a tudíž má smysl hledat rozklad na SOS. Jediné monomy, které se mohou ve výsledném rozkladu vyskytovat, jsou  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$ .

Gramova matice  $B$  typu  $3 \times 3$  pak má s ohledem na parametr  $\lambda$  níže uvedenou podobu a charakteristický polynom  $F(y)$  získáme výpočtem uvedeného determinantu.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 5-2\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad F(y) = \begin{vmatrix} 1-y & 0 & \lambda \\ 0 & 5-2\lambda-y & 0 \\ \lambda & 0 & 4-y \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu přenechejme matematickému softwaru a zároveň též nechme určit polynom  $F(-y)$  s využitím příkazu *ReplaceAll*. Je zřejmé, že při klasickém výpočtu determinantu bychom vzhledem k řádu matice užili Sarrusova pravidla.

```
In[3]:= Collect[ReplaceAll[Det[{{1-y, 0, λ}, {0, 5-2λ-y, 0}, {λ, 0, 4-y}}], {y → -y}], y]
Out[3]= 20 + y^3 + y^2 (10 - 2 λ) - 8 λ - 5 λ^2 + 2 λ^3 + y (29 - 10 λ - λ^2)
```

Přehledněji bychom polynom  $F(-y)$  zřejmě zapsali:

$$F(-y) = y^3 + y^2(10 - 2\lambda) + y(-\lambda^2 - 10\lambda + 29) + (2\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda + 20)$$

Hledáme nyní takové hodnoty, aby v polynomu  $F(-y)$  nenastala žádná znaménková změna. Musí být tudíž splněna podmínka:

$$10 - 2\lambda \geq 0 \wedge -\lambda^2 - 10\lambda + 29 \geq 0 \wedge 2\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda + 20 \geq 0$$

Opět je nutné vyřešit soustavu tří nerovnic. Dříve jsme přenechávali tuto část výpočtu matematickému softwaru s využitím příkazu *Reduce*. Podívejme se nyní na možnosti, které nám dávají klasické postupy.

V případě první nerovnice je zřejmé, že musí platit  $\lambda \leq 5$ . Druhou nerovnici nejprve šikovně upravíme a následně k ní budeme přistupovat jako ke kvadratické rovnici, jejímž grafem bude konvexní parabola. Vypočteme diskriminant a po nalezení kořenů rozhodneme o přípustných hodnotách pro parametr  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} -\lambda^2 - 10\lambda + 29 &\geq 0 && / \cdot (-1) \\ \lambda^2 + 10\lambda - 29 &\leq 0 \\ D &= 100 + 116 = 216 \end{aligned}$$

Pomocí obecného vzorce  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$  vypočteme kořeny:

$$\lambda_1 = \frac{-10 + \sqrt{216}}{2} = -5 + 3\sqrt{6} \doteq 2,35$$

$$\lambda_2 = \frac{-10 - \sqrt{216}}{2} = -5 - 3\sqrt{6} \doteq -12,35$$

Vzhledem k vypočteným kořenům a povaze grafu paraboly splňuje tato nerovnice zadanou podmínku v intervalu  $\lambda \in \langle -12,35; 2,35 \rangle$ .

Zbývá rozhodnout o podmínkách na interval u kubické nerovnice. Zde máme více možností, ale pokusme se vzhledem k povaze této nerovnice využít jistý středoškolský postup s uhádnutím kořene v kombinaci s Hornerovým schématem (tabulka 2).

Tabulka 2 - Experimentální hledání kořene kubické rovnice a užití Hornerova schématu

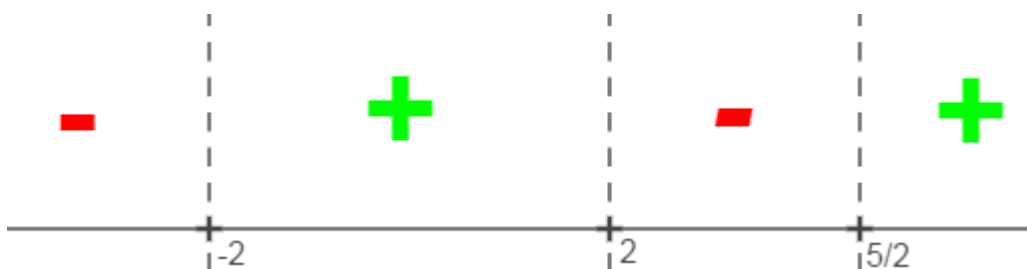
### HLEDÁNÍ KOŘENE

$\lambda$	0	1	2
výsledek	20	9	0

### HORNEROVO SCHÉMA

	2	-5	-8	20
		4	-2	-20
2	2	-1	-10	0

Jedním z kořenů je tedy hodnota  $\lambda_1 = 2$ . Prostřednictvím Hornerova schématu jsme pak navíc určili polynom nižšího stupně, ke kterému budeme přistupovat jako ke kvadratické rovnici ve tvaru  $2\lambda^2 - \lambda - 10 = 0$ . Obdobně jako výše bychom pak našli pomocí diskriminantu a obecného vzorce zbývající dva kořeny  $\lambda_2 = -2$  a  $\lambda_3 = \frac{5}{2}$ . Nyní musíme zvážit znaménko v dílčích intervalech „natrhaného“ oboru reálných čísel (obrázek 16).



Obrázek 16 - Znaménko kubické nerovnice v dílčích intervalech

Přípustný interval parametru  $\lambda$  je tedy pro nerovnici  $2\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda + 20 \geq 0$  sjednocení intervalů  $\lambda \in \langle -2, 2 \rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, \infty \right\rangle$ .

Výsledné hodnoty, kterých může parametr  $\lambda$  nabývat, aby zůstala Gramova matice  $B$  pozitivně semidefinitní, představuje průnik všech tří vypočtených intervalů a je zřejmé, že musí tedy platit  $\lambda \in \langle -2, 2 \rangle$ .

Prozkoumejme nyní, jak vypadají rozklady v krajních bodech parametru  $\lambda = \pm 2$ . Nebudeme zde již uvádět podrobně všechny kroky výpočtu. Pokud ovšem užijeme dříve uvedeného postupu Choleského dekompozice, získáme s ohledem na volbu parametru  $\lambda$  následující matice  $V_{-2}^T$  a  $V_2^T$ :

$$V_{-2}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zbývá určit součiny  $V_{-2}^T \cdot z^T, V_2^T \cdot z^T$  a rozhodnout o vyjádření polynomu  $f(x, y)$  ve tvaru součtu čtverců jako již dříve:

$$V_{-2}^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y^2 \\ 3xy \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2y^2 \\ xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

Výsledná vyjádření ve tvaru součtu čtverců jsou tedy následující:

$$f(x, y) = (x^2 - 2y^2)^2 + (3xy)^2$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)^2 + (xy)^2$$

Je zřejmé, že jsme se tímto rozsáhlým výpočtem vrátili zpět k původnímu rozkladu na SOS, který jsme získali na počátku řešení pomocí čtvercových identit. Jistě, že aplikace těchto identit/vzorců je velmi omezená na úzký okruh příkladů, nicméně toto řešení poukazuje na skutečnost, že dobrý nápad může značně usnadnit a urychlit výpočet, a to i v případě postupu s využitím matematického softwaru. V rámci kompletního řešení pak bylo poukázáno na některé tradiční techniky, které lze využít jako alternativu k čistě počítačovému výpočtu. Podívejme se nyní stručně na algoritmus, který jsme v průběhu



výpočtu s využitím tradičních technik využili, ale nebyl hlouběji vysvětlen, tedy tzv. Hornerovo schéma.

#### **4.2.1 Stručně o Hornerově schématu ve středoškolských souvislostech**

Hornerovo schéma (též Hornerův algoritmus) představuje jednu z metod pro efektivní vyhodnocování polynomů a je možné ji také využít při určování kořenů reálných polynomiálních rovnic, kupříkladu na střední škole. Pokud bychom chtěli Hornerovo schéma zařadit z hlediska matematických disciplín, pak spadá do oblasti numerické matematiky, která se zabývá řešením problémů/úloh pro konkrétní číselné hodnoty. V této souvislosti je opět nutné zmínit jistou provázanost (numerické) matematiky s počítačovými technologiemi, matematickým softwarem a programováním, kdy v současné době je možné celou řadu výpočtů (například s využitím iteračních metod) přenechat zmíněnému softwaru, obdobně jako jsme se přesvědčili při hledání rozkladů polynomů na SOS v předcházejících příkladech s využitím programů počítačové algebry MATLAB a Wolfram Mathematica. Program obvykle provede výpočet velmi rychle a při dodržení vstupní syntaxe vydá bezchybný výsledek. Nejinak tomu je i u Hornerova schématu, kdy mohou studenti středních škol nalézt některé příklady zdrojových kódů v programovacích jazycích Python či C/C# nebo zdrojového kódu pro volně šiřitelný program počítačové algebry Octave na anglické verzi oblíbené otevřené encyklopedie Wikipedia, konkrétně na stránce [www.en.wikipedia.org/wiki/Horner's\\_method](http://www.en.wikipedia.org/wiki/Horner's_method).

Algoritmus je pojmenován po britském matematikovi Williamu G. Hornerovi (1786–1837), který jej publikoval v první polovině 19. století, nicméně se jedná o metodu, která byla zřejmě známá již v 17. století Isaacu Newtonovi (1643–1727) a dokonce i čínským matematikům ve 13. století. [23], [34]

Ve středoškolské matematice nalezneme Hornerovo schéma řadu uplatnění při praktických výpočtech s (reálnými) polynomy a polynomiálními rovnicemi, kdy může být navíc tento algoritmus využit kupříkladu v kombinaci s jistou experimentální metodou – uhádnutím některého z hledaných kořenů rovnice. Jak již bylo uvedeno, jedná se o metodu pro efektivní vyhodnocování polynomů, kdy jedno z praktických (nejen) středoškolských užití představuje určení hodnoty polynomu  $p(x)$  v konkrétním zadaném bodě  $x$ . To je sice možné i přímým dosazením, nicméně v případě polynomu vyššího stupně se může jednat o poměrně náročný výpočet. Hornerovo schéma představuje elegantní a efektivní alternativu

k tomuto výpočtu. Zároveň je možné algoritmus využít k testování potenciálního kořene („podezřelé“ hodnoty). Víme totiž, že číslo  $a$  je kořenem polynomu  $p(x)$  právě tehdy, když platí, že  $p(a) = 0$ , tedy že polynom  $p(x)$  nabývá pro číslo  $a$  hodnoty 0. [18]

Další praktické uplatnění nalezne Hornerovo schéma při dělení dvou polynomů. Nejen, že se může jednat o postup svižnější oproti obvykle vyučovanému způsobu dělení, ale též je možné tohoto přístupu využít při řešení polynomiální rovnice vyššího stupně. V případě, že nalezneme/uhádneme jeden z kořenů zadané rovnice, dochází při jeho ověřování prostřednictvím Hornerova schématu k dělení původního polynomu lineárním polynomem. Po dokončení výpočtu tak získáme nejen informaci, zda nalezená hodnota je skutečně kořenem zadané rovnice, ale též získáme polynom – polynomiální rovnici nižšího stupně a může se jednat o snazší postup řešení než s využitím některých známých vzorců.

Podívejme se nyní na obecný algoritmus výpočtu pomocí Hornerova schématu. Mějme zadaný polynom stupně  $n$  v obecném tvaru:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Požadujeme-li vypočítat hodnotu  $p(x_0)$  polynomu  $p(x)$  v reálném čísle  $x_0$  s využitím Hornerova schématu, pak tabulková podoba algoritmu je následující:

**Tabulka 3 - Obecný algoritmus výpočtu pomocí Hornerova schématu**

	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	...	$a_2$	$a_1$	$a_0$
		$x_0 a_n$	$x_0 b_n$	...	$x_0 b_2$	$x_0 b_1$	$x_0 b_0$
$x_0$	$a_n$	$b_n = a_{n-1} + (x_0 a_n)$	$b_{n-1} = a_{n-2} + (x_0 b_n)$	...	$b_1 = a_2 + (x_0 b_2)$	$b_0 = a_1 + (x_0 b_1)$	$p(x_0) = a_0 + (x_0 b_0)$

Z tabulky 3 je zřejmé, že Hornerovo schéma nám umožňuje určit požadovanou hodnotu  $p(x_0)$  pouze s využitím násobení a sčítání reálných čísel. Okomentujeme-li stručně uvedený algoritmus, pak nejprve do prvního řádku zapíšeme všechny koeficienty zadaného polynomu (včetně nulových!) a do třetího řádku prvního sloupce zaneseme číslo  $x_0$ . Následně postupujeme zleva doprava a příslušné hodnoty násobíme a sčítáme, čímž postupně vyplníme celou tabulku a v třetího řádku posledního sloupce získáme požadovanou hodnotu  $p(x_0)$ .

Dále je nutné upozornit na vypočtené hodnoty  $a_n, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ , které představují koeficienty o stupeň nižšího polynomu  $q(x)$  ve tvaru:

$$q(x) = a_n x^{n-1} + b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

pro který platí, že  $p(x) = (x - x_0)q(x) + p(x_0)$  a hodnota  $p(x_0)$  představuje zbytek po dělení polynomu  $p(x)$  lineárním polynomem  $x - x_0$ . V případě, že  $p(x_0) = 0$ , pak je  $x_0$  kořenem zadaného polynomu  $p(x)$  a výše uvedený lineární polynom představuje jeho kořenový činitel.

Uvedme závěrem této dílčí kapitoly konkrétní středoškolský příklad na užití Hornerova schématu. Máme za úkol určit hodnotu polynomu  $p(x) = 2x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 1$  v bodě  $x_0 = 2$ .

V prvním kroku řešení pomocí Hornerova schématu musíme sestavit tabulku (tabulka 4). Pro lepší názornost je nad/pod tabulkou vždy uvedena též neurčitá  $x$  s příslušným exponentem.

**Tabulka 4 - Konkrétní středoškolský příklad na užití Hornerova schématu**

	$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	
	2	-5	3	-2	1	1
		2.2 = 4	2.(-1) = -2	2.1 = 2	2.0 = 0	2.1 = 2
$x_0 = 2$	2	(-5) + 4 = -1	3 + (-2) = 1	(-2) + 2 = 0	1 + 0 = 1	1 + 2 = 3
	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$		

Hledanou hodnotu máme vypočtenou ve žlutě zvýrazněné buňce a je tedy zřejmé, že pro zadaný polynom  $p(x)$  platí  $p(2) = 3$ . Lze tedy konstatovat, že zadané číslo 2 není kořenem tohoto polynomu a vypočtená hodnota 3 představuje zbytek po dělení polynomu  $p(x)$  lineárním polynomem ve tvaru  $x - 2$ . Polynom  $p(x)$  je tedy možné vyjádřit v níže uvedeném tvaru součinu, což by bylo možné ověřit zpětným roznásobením:

$$p(x) = (x - 2)(2x^4 - x^3 + x^2 + 0 \cdot x + 1) + 3$$

Porovnejme nyní postup s využitím Hornerova schématu a získaný výsledek s metodou dosazení hodnoty  $x_0 = 2$  do polynomu  $p(x)$ :

$$p(2) = 2 \cdot 2^5 - 5 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 2 \cdot 32 - 5 \cdot 16 + 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 + 3 = 64 - 80 + 24 - 8 + 3 = 3$$

Přímým dosazením jsme pochopitelně dospěli ke stejnému výsledku, nicméně nám tento postup nedává možnost nalézt výše uvedené vyjádření polynomu  $p(x)$  ve tvaru součinu. Navíc se v porovnání s hodnotami vyskytujícími se v tabulce při užití Hornerova schématu pohybujeme při dosazení ve vyšších číselných hodnotách a pokud nemáme k dispozici kalkulačku či jiné výpočetní zařízení, pak může být tento postup poměrně zdlouhavý, náročný a též náchylný na chybu.

## 5 NĚKOLIK DALŠÍCH ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ S VYUŽITÍM POČÍTAČE

Předcházející kapitoly práce byly věnovány historickému zakotvení celé problematiky, vymezení nezbytných pojmů nutných pro pochopení algoritmu rozkladu reálného polynomu na součet čtverců polynomů a vybraným možnostem užití programů počítačové algebry (MATLAB, Wolfram Mathematica 11), případně programů dynamické geometrie (GeoGebra), při řešení nebo znázornění dílčích úkolů/kroků a při dokazování, že je daný reálný polynom pozitivně semidefinitní. Řešení jednotlivých úloh bylo podrobně okomentováno a komentář byl doplněn obrázky a grafy pro lepší pochopení. Nejinak tomu je i ve školské matematice, ať na základní, střední či vysoké škole, kdy užití hlavně dynamických figur (například při výkladu geometrických partií učiva) v kombinaci se srozumitelným výkladem a procvičením látky na dostatečném počtu úloh vede zpravidla k lepšímu osvojení si požadovaných vědomostí, dovedností a návyků žáky či studenty.

Tato kapitola je věnována sadě řešených příkladů na ověřování pozitivní semidefinitnosti konkrétních polynomů s využitím metody rozkladu polynomu na součet čtverců, které jsou řazeny od nejjednodušších po nejkomplicovanější (hlavně z hlediska rozsahu a časové náročnosti řešení). Hlavním záměrem je využít dříve uvedené algoritmy a porovnat tradiční lidský přístup s některými počítačovými postupy, nejen je vhodně kombinovat. Zároveň je ovšem snaha poukázat i na další možnosti vybraného matematického softwaru, které mohou například využít nadaní středoškolští studenti při řešení náročnějších úloh nebo studenti vysokoškolští při přípravě na některé zkoušky z matematiky či informatiky. Posledním cílem pak je poukázat na hranici, ke které se s rostoucí náročností zadávaných úloh (rostoucí stupeň polynomu a navyšování počtu neurčitých v něm vystupujících) postupně blížíme, kdy i s běžnou počítačovou technikou dostupnou na středních školách či pedagogických fakultách není hledání rozkladu jistého reálného polynomu na součet čtverců polynomů a důkaz pozitivní semidefinitnosti tohoto polynomu jednoduchou

a rychlou záležitostí, jak by se mohlo z dříve uvedených příkladů jevit. Specifikace zařízení, na kterém budou prováděny strojové výpočty je na obrázku 17.

HP ProBook x360 440 G1		Specifikace Windows	
Název zařízení	DESKTOP-GMBH6VI	Edice	Windows 10 Home
Procesor	Intel(R) Core(TM) i7-8550U CPU @ 1.80GHz 1.99 GHz	Verze	1903
Nainstalovaná paměť RAM	8,00 GB (použitelné: 7,89 GB)	Datum instalace	22.01.2020
ID zařízení	C16DE4A5-A9AB-413B-B3E8-D24AD5BD3F7B	Build operačního systému	18362.959
ID produktu	00325-96622-52099-AAOEM		
Typ systému	64bitový operační systém, procesor pro platformu x64		
Pero a dotykové ovládání	Podpora pera a dotykového ovládání s 10 dotykovými body		

Obrázek 17 - Specifikace počítače používaného při řešení úloh v matematickém softwaru

## 5.1 Řešený příklad 1 – SŠ úloha a užití GeoGebry při řešení soustavy nerovnic

Rozhodněte v oboru reálných čísel o řešitelnosti dané polynomiální rovnice s využitím metody rozkladu reálného polynomu na součet čtverců polynomů:

$$4x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x + 13 = 0$$

### Řešení I (středoškolský postup):

Nejprve se zaměříme na řešení s využitím středoškolského postupu, který byl popsán podrobněji v kapitole 2.2. Následně přejdeme k řešení obecnému s využitím klasických postupů i pomocí matematického softwaru.

V prvním kroku si obdobně jako dříve označíme levou stranu rovnice  $f(x)$ . Jedná se o polynom čtvrtého stupně jedné neurčité  $x$ :

$$f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x + 13$$

Nyní budeme kombinovat vytýkání vybraných členů s doplňováním na čtverec. Nejprve „roztrhneme“ člen  $2x^2$  na součet  $x^2 + x^2$  a následně vytkneme z (nově vzniklých) prvních tří členů polynomu  $x^2$ .

$$f(x) = x^2(4x^2 - 4x + 1) + x^2 + 6x + 13$$

Závorku  $(4x^2 - 4x + 1)$  nyní doplníme na čtverec ve tvaru  $(2x-1)^2$ , obdobně pak doplníme na čtverec také součet  $x^2 + 6x$ ; nesmíme však zapomenout na odečtení hodnoty 9, aby zůstal polynom po případném zpětném umocnění beze změny.

$$f(x) = x^2(2x-1)^2 + (x+3)^2 - 9 + 13$$

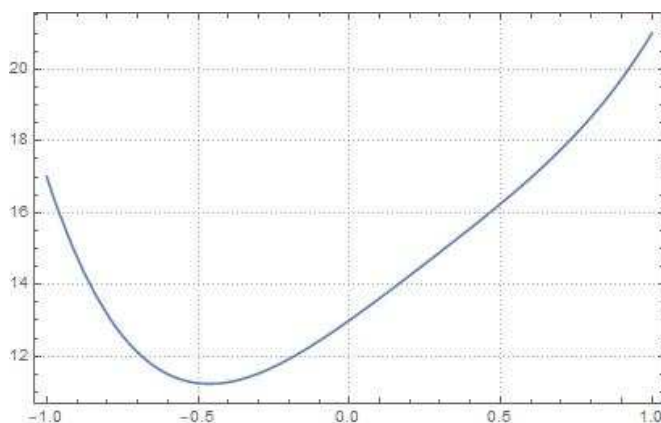
Postupně se začíná rýsovat vyjádření původního polynomu ve tvaru součtu čtverců. Dále „vnoříme“ podle vzorečku  $(ab)^r = a^r b^r$  činitel  $x^2$  prvního součinu do závorky.

$$f(x) = (2x^2 - x)^2 + (x+3)^2 + 4$$

Abychom získali „čisté“ vyjádření polynomu  $f(x)$  ve tvaru součtu čtverců, zbývá zapsat absolutní člen 4 v podobě mocniny:

$$f(x) = (2x^2 - x)^2 + (x+3)^2 + 2^2$$

Získali jsme vyjádření původního polynomu ve tvaru součtu čtverců polynomů, čímž jsme zároveň dostali informaci o řešitelnosti zadané polynomiální rovnice. Zadáním bylo řečeno, že se pohybujeme nad tělesem reálných čísel. Z výše uvedeného vyjádření polynomu  $f(x)$  je zřejmé, že tento polynom je pozitivně definitní. Graf polynomu  $f(x)$  nikde neprotíná osu  $x$  kartézské soustavy souřadnic (obrázek 18) a tudíž neexistují žádné reálné kořeny rovnice  $4x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x + 13 = 0$ . Rovnice nemá řešení v  $\mathbb{R}$ .



Obrázek 18 - Graf polynomu  $f(x)$  v programu Wolfram Mathematica

Pokud bychom chtěli provést zkoušku a ověřit, že skutečně nalezené vyjádření ve tvaru součtu čtverců reprezentuje původní polynom  $f(x)$ , pak bychom v případě tradičního postupu využili základních algebraických vzorců vyučovaných obvykle již v 8. ročníku základní školy (viz např. [24]), tedy vzorce:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Vzhledem k jednoduchosti výpočtu nebudeme postup podrobněji rozepisovat a ověříme správnost výpočtu s využitím matematického softwaru – programu Wolfram Mathematica a příkazů *Expand* a *TrueQ* obdobně jako dříve.

```
In[1]:= fx = 4 x^4 - 4 x^3 + 2 x^2 + 6 x + 13;
SOSfx = (2 x^2 - x)^2 + (x + 3)^2 + 2^2;
Expand[SOSfx]
TrueQ[fx == Expand[SOSfx]]

Out[3]= 13 + 6 x + 2 x^2 - 4 x^3 + 4 x^4

Out[4]= True
```

Vydaný polynom po umocnění se shoduje s původním zadaným, což počítač také potvrdil.

### Řešení II (obecný postup s oporou počítačového softwaru):

Shodně s prvním krokem předcházejícího řešení vyjdeme z polynomu ve tvaru:

$$f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x + 13$$

Polynom je sudého stupně, má tedy smysl hledat rozklad tohoto polynomu na součet čtverců. Trojice monomů vyskytujících se ve výsledném rozkladu je zřejmě  $1, x, x^2$ . Nyní musíme sestrojít na základě mocnin u příslušných monomů hledaného rozkladu Gramovu matici  $B$ . Množina  $\Lambda_m$  bude v tomto případě obsahovat členy  $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$  a  $\beta_3 = 2$ . Matice  $B$  bude tedy symetrickou maticí typu  $3 \times 3$ . Vypočtěme nyní její jednotlivé prvky, přičemž lze (obdobně jako dříve) očekávat provázanost některých prvků a nutnost zavést jistý parametr  $\lambda$ .

$$\begin{aligned}
b_{11} : & \quad \beta_1 + \beta_1 = 0 + 0 = 0 & \Rightarrow b_{11} = 13 \\
b_{12} = b_{21} : & \quad \beta_1 + \beta_2 = \beta_2 + \beta_1 = 0 + 1 = 1 + 0 = 1 & \Rightarrow 2b_{12} = 2b_{21} = 6; b_{12} = b_{21} = 3 \\
b_{13} = b_{31} : & \quad \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1 = \beta_2 + \beta_2 = 0 + 2 = 2 + 0 = 1 + 1 = 2 & \Rightarrow 2b_{13} + b_{22} = 2b_{31} + b_{22} = 2 \\
b_{22} : & \quad \beta_2 + \beta_2 = \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1 = 1 + 1 = 0 + 2 = 2 + 0 = 2 & \Rightarrow b_{22} + 2b_{13} = b_{22} + 2b_{31} = 2 \\
b_{23} = b_{32} : & \quad \beta_2 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_2 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3 & \Rightarrow 2b_{23} = 2b_{32} = -4; b_{23} = b_{32} = -2 \\
b_{33} : & \quad \beta_3 + \beta_3 = 2 + 2 = 4 & \Rightarrow b_{33} = 4
\end{aligned}$$

Získali jsme jednotlivé prvky Gramovy matice  $B$ , nicméně nastala očekávaná okolnost s provázaností prvků  $b_{13}$  a  $b_{22}$  (resp.  $b_{31}$  a  $b_{22}$ ). Zavedeme tedy reálný parametr  $\lambda = b_{22}$ ; pro

prvek  $b_{13}$  (resp.  $b_{31}$ ) platí po úpravě  $b_{13} = \frac{2-\lambda}{2}$ . Matice  $B$  má tedy výslednou podobu:

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 3 & \frac{2-\lambda}{2} \\ 3 & \lambda & -2 \\ \frac{2-\lambda}{2} & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Získali jsme matici, v níž vystupuje parametr  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Tento parametr však není možné volit libovolně – vypočtená matice  $B$  musí po dosazení konkrétní číselné hodnoty zůstat pozitivně semidefinitní. Než však přikročíme k výpočtu intervalu přípustných hodnot parametru  $\lambda$ , nechme nejprve vypočíst stejnou matici v programu MATLAB. Z výše uvedeného postupu je zřejmé, že se v tomto konkrétním případě nejedná o náročné počty, nicméně časová náročnost už je zde značná, navíc je nutné ohlídat, aby byly brány v úvahu všechny možné kombinace, které mohou nastat.

```

SeDuMi 1.3 by AdvOL, 2005-2008 and Jos F. Sturm, 1998-2003.
Alg = 2: xz-corrector, Adaptive Step-Differentiation, theta = 0.250, beta = 0.500
eqs m = 5, order n = 4, dim = 10, blocks = 2
nnz(A) = 6 + 0, nnz(ADA) = 25, nnz(L) = 15
it :   b*y      gap  delta rate  t/tP*  t/tD*   feas cg cg  prec
0 :           5.60E+000 0.000
1 : -1.23E+000 1.14E+000 0.000 0.2036 0.9000 0.9000   1.17 1 1 1.5E+000
2 : -5.01E-002 4.40E-002 0.000 0.0385 0.9900 0.9900   1.36 1 1 7.2E-001
3 : -2.18E-006 3.49E-006 0.218 0.0001 1.0000 1.0000   1.03 1 1 1.5E-003
4 : -1.82E-008 1.42E-008 0.000 0.0041 0.9990 0.9990   1.00 1 1 1.3E-005
5 : -3.90E-015 4.00E-015 0.000 0.0000 1.0000 1.0000   1.00 1 1 3.5E-012

iter seconds digits      c*x          b*y
5      0.1      4.6 0.0000000000e+000 -3.8973143640e-015
|Ax-b| = 2.9e-014, [Ay-c]_+ = 4.2E-016, |x|= 1.7e+001, |y|= 1.3e-015

Q =           z =           D =
13      3      -3           1           1
3       8      -2           x
-3      -2      4          x^2

```

Obrázek 19 - Rychlost výpočtu konkrétní Gramovy matice  $B$  (dle MATLABU označení  $Q$ ) k řešenému příkladu 1



Program MATLAB v součinnosti s balíčky SeDuMi a SOSTOOLS vypočetl konkrétní matici  $B$  (jak bylo již dříve konstatováno, program užívá značení matice  $Q$ ) s dosazením jisté celočíselné hodnoty za parametr  $\lambda$  (konkrétně  $\lambda = 8$ ). Zaměřme se ovšem na rychlost samotného výpočtu. I přes to, že nebyl výpočet realizován na „superpočítači“, proběhl celý výpočet v čase 0,1 sekundy (zvýrazněno černým obdélníkem), což je v porovnání s ručním výpočtem mnohonásobně rychleji. Zároveň máme jistotu (v případě správného zadání úlohy do počítače), že výpočet je bezchybný. Nutno ovšem na tomto místě poznamenat, že program sice správně určil konkrétní matici  $B$ , ale již nevydává informaci o dalších možných přípustných hodnotách parametru  $\lambda$ .

Vraťme se nyní k výpočtu klasickými metodami a určíme přípustný interval reálných hodnot pro parametr  $\lambda$ . V prvním kroku musíme určit charakteristický polynom  $F(y)$  matice  $B$ , tedy vypočítat determinant:

$$F(y) = \det(B - yE) = \begin{vmatrix} 13-y & 3 & \frac{2-\lambda}{2} \\ 3 & \lambda-y & -2 \\ \frac{2-\lambda}{2} & -2 & 4-y \end{vmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že matice  $B$  je čtvercová, symetrická matice řádu  $k = 3$ , je možné aplikovat Sarrusovo pravidlo. V první fázi, tj. před dalšími potřebnými úpravami, bychom tak získali charakteristický polynom  $F(y)$  ve tvaru:

$$F(y) = (13-y)(\lambda-y)(4-y) + 3(-2)\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) + 3(-2)\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) - \left(\frac{2-\lambda}{2}\right)(\lambda-y)\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) - 3 \cdot 3 \cdot (4-y) - (-2)(-2)(13-y)$$

Abychom mohli užít Descartova znaménkového pravidla, potřebujeme získaný polynom upravit, aby byl ve tvaru se srovnanými koeficienty u zavedené neurčité  $y$ . Uvážíme-li povahu získaného polynomu ve výše uvedené „rané“ fázi, výpočet by zřejmě nebyl příliš matematicky náročný, nicméně opět by se jednalo o poměrně značnou časovou náročnost. Přenechme proto případný ruční výpočet čtenáři a využijme pro určení charakteristického polynomu počítačového softwaru Wolfram Mathematica s využitím příkazu *Det* (výpočet zadaného determinantu) v kombinaci s již dříve používaným příkazem *Collect* (srovná koeficienty u požadované neurčité) a zároveň s využitím příkazu *AbsoluteTiming* sledujeme časovou náročnost strojového výpočtu determinantu.

```
In[2]:= AbsoluteTiming[Collect[Det[{{13-y, 3, (2-lambda)/2}, {3, lambda-y, -2}, {(2-lambda)/2, -2, 4-y}}], y]]
```

```
Out[2]:= {0.0005142, -y^3 + 1/4 y^2 (68 + 4 lambda) + 1/4 y (-152 - 72 lambda + lambda^2) + 1/4 (-400 + 228 lambda + 4 lambda^2 - lambda^3)}
```

Celkový výpočet, tj. výpočet determinantu a následné úpravy získaného charakteristického polynomu do podoby se srovnávanými koeficienty u neurčité  $y$ , proběhl v uvedeném čase 0,0005142 sekundy. Je zde tedy patrné, že v případě vhodného užití počítače při řešení daných úloh můžeme významně urychlit celý postup. Charakteristický polynom  $F(y)$  má tedy po provedených úpravách tvar:

$$F(y) = -y^3 + \frac{1}{4}y^2(68 + 4\lambda) + \frac{1}{4}y(-152 - 72\lambda + \lambda^2) + \frac{1}{4}(-400 + 228\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3)$$

Víme, že matice  $B$  je pozitivně semidefinitní v případě, že všechna její vlastní čísla jsou kladná (viz věta 1; kap. 2.2). Pro rozhodnutí o přípustných hodnotách parametru  $\lambda$  tedy musíme nejprve zapsat polynom  $F(-y)$ , abychom mohli následně užít Descartova znaménkového pravidla a zajistit tak, aby všechna vlastní čísla matice  $B$  byly kladné hodnoty. Hledaný polynom  $F(-y)$  bude ve tvaru:

$$F(-y) = y^3 + \frac{1}{4}y^2(4\lambda + 68) + \frac{1}{4}y(-\lambda^2 + 72\lambda + 152) + \frac{1}{4}(-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 228\lambda - 400)$$

Nyní požadujeme takové hodnoty parametru  $\lambda$ , aby v polynomu  $F(-y)$  nenastala žádná znaménková změna – tím bude docíleno stavu, kdy nebude existovat žádný záporný kořen charakteristického polynomu  $F(y)$  a matice  $B$  tak bude při libovolné volbě parametru  $\lambda$  z vypočteného intervalu pozitivně semidefinitní. Je tedy nutné, aby byly současně splněny podmínky:

$$4\lambda + 68 \geq 0 \quad \wedge \quad -\lambda^2 + 72\lambda + 152 \geq 0 \quad \wedge \quad -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 228\lambda - 400 \geq 0$$

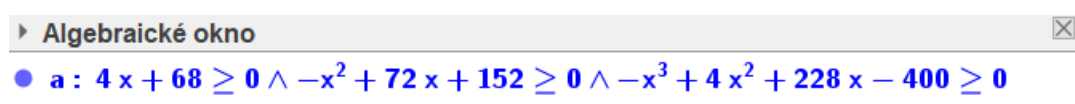
Vidíme, že nyní je třeba řešit tři nerovnice. Řešení první z nich představuje triviální záležitost, kdy snadno nahlédneme, že musí platit  $\lambda \geq -17$ . Problém nastává u kvadratické a kubické nerovnice, kdy i při pokusu o výpočet se nejedná o „hezke“ hodnoty (kupříkladu kořeny kvadratické rovnice  $-\lambda^2 + 72\lambda + 152 = 0$  jsou  $\lambda_1 = 36 - 2\sqrt{362}$ ;  $\lambda_2 = 2(18 + \sqrt{362})$ ).

Než přenecháme výpočet počítačovému softwaru Wolfram Mathematica s využitím příkazu *Reduce*, uveďme stručně na tomto místě jednu dostupnější možnost (grafického) řešení (soustav) rovnic a nerovnic pro středoškolské studenty. Jedná se o možnost využití programu dynamické geometrie GeoGebra.

Program GeoGebra patří v současné době mezi oblíbený matematický software využívaný učiteli na základních, středních i vysokých školách. Hlavními výhodami programu GeoGebra jsou prostředí v češtině (včetně manuálu), intuitivní ovládání a licence typu

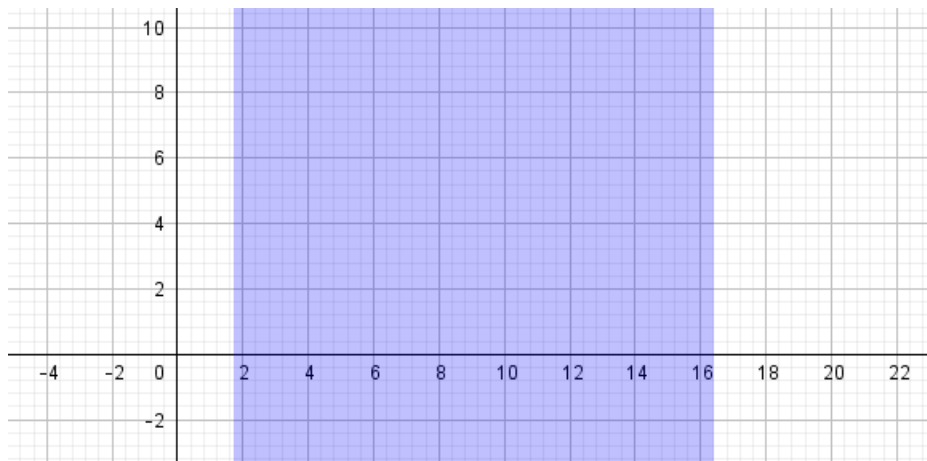
open-source, díky které jeho zavedení do hodin matematiky nepředstavuje pro školu další finanční zátěž. [21] Na internetových stránkách [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) je aktuálně k dispozici ke stažení více verzí tohoto softwaru, a to nejen pro počítače, ale též pro mobilní zařízení se systémem Android nebo iOS. Učitelé se tak nabízejí možnost, v případě velké vytíženosti počítačové učebny, jít cestou tzv. BYOD (zkratka z anglického *Bring Your Own Device*, v překladu přines si své vlastní zařízení), kdy žáci pracují na vlastním mobilním zařízení, kupř. notebook, tablet, smartphone... aj. [19] Výhodou tohoto přístupu může být, že si žáci úlohy z hodin mohou uložit a vrátit se k nim při domácí přípravě. Nevýhodou či problematickým místem může být odlišnost jednotlivých zařízení donesených žáky, tedy rozdíly v ovládání mezi počítačem a tabletem, případně rozdílná výkonnost jednotlivých zařízení. Navíc může nastat situace, kdy některý ze žáků nebude mít k dispozici z nějakého důvodu žádné vlastní zařízení. Učitel se proto musí na tyto situace předem připravit.

Vraťme se ale k možnosti řešení (reálných) nerovnic a určení intervalu přípustných hodnot parametru  $\lambda$ . Pokud máme sadu nerovnic s jednou neznámou, je možné využít program GeoGebra následovně. Po spuštění softwaru aktivujeme tzv. algebraické okno. Pokud pracujeme s verzí programu GeoGebra 5.0, pak v dolní části do políčka označeného *Vstup*: začneme psát jednotlivé nerovnice, přičemž v případě ostré nerovnosti zapisujeme tuto nerovnost stylem „>=“ a konjunkci nahrazujeme symbolem“&&“. Po zanesení všech nerovnic potvrdíme klávesou enter a sada nerovnic se nám již v příslušném matematickém zápisu objeví algebraickém okně (obrázek 20).



Obrázek 20 - Nerovnice v programu GeoGebra 5.0

Označení parametru řeckým písmenem  $\lambda$  bylo při zanášení nerovnic do programu GeoGebra nahrazeno písmenem  $x$ . Již v průběhu zadávání jednotlivých vztahů vykresluje software definiční obor – barevně zvýrazňuje interval (příp. plochu) hodnot, kterých může neznámá (příp. neznámé) nabývat. Situace pro námi aktuálně řešenou trojici nerovnic je znázorněna na obrázku 21. Nutno k této metodě poznamenat, že v případě „ošklivých“ hodnot je velmi obtížné vyčíst konkrétní výsledek (nejinak tomu je v tomto konkrétním případě), nicméně v případě standardních základo-/středoškolských úloh se jedná o postup, kdy je grafické řešení konstrukčně naprosto přesné a odečíst kupříkladu řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých pak není problémem.



Obrázek 21 - Interval přípustných hodnot pro parametr  $\lambda$  v programu GeoGebra 5.0

Opusťme ovšem program GeoGebra a vraťme se k řešení příkladu 1 a určení přípustných hodnot parametru  $\lambda$  s využitím programu Wolfram Mathematica. Opět nás nebude zajímat pouze finální výsledek výpočtu, ale zaměříme se i na časovou náročnost výpočtu počítačem.

```
In[1]:= AbsoluteTiming[N[Reduce[4 λ + 68 ≥ 0 && -λ^2 + 72 λ + 152 ≥ 0 && -λ^3 + 4 λ^2 + 228 λ - 400 ≥ 0]]]
Out[1]:= {0.0127168, 1.7247 ≤ λ ≤ 16.4091}
```

Parametr  $\lambda$  tedy může nabývat reálných hodnot  $\lambda \in \langle 1,7247; 16,4091 \rangle$ , přičemž celý výpočet proběhl v čase pouze 0,0127168 sekundy, což je opět nesrovnatelné s klasickými ručními postupy i při možnosti užití určitého triku. Pokud bychom se zaměřili pouze na celočíselné hodnoty, pak by se jednalo o množinu hodnot  $\lambda \in \{2,3,4,\dots,15,16\}$ .

Volme nyní pevně  $\lambda = 2$  a určíme rozklad původní polynomu  $f(x)$  na součet čtverců v tomto případě (jinou pevnou volbu ponecháme na čtenáři, přičemž postup řešení bude analogický). Matice  $B$  bude mít po dosazení a dopočtení tvar:

$$B_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 13 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Využijeme nyní dříve vymezenou Choleského dekompozici (kap. 3.4), kdy nejprve opět provedeme ruční výpočet a následně jej porovnáme (hlavně z hlediska časové náročnosti) s výpočtem v matematickém softwaru.

Obecně musí pro matici  $B_{\lambda=2}$  platit vztah:

$$B_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 13 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2+d^2 & bc+de \\ ac & bc+de & c^2+e^2+f^2 \end{pmatrix} = V \cdot V^T$$

Nyní potřebujeme postupně vypočítat prvky  $a, b, c, d, e, f$  (vzhledem k jednoduchosti výpočtu nebudeme uvádět všechny dílčí kroky):

$$\begin{aligned} a^2 &= 13 & \Rightarrow & a = \sqrt{13} \\ ab &= 3 & \Rightarrow & b = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ ac &= 0 & \Rightarrow & c = 0 \\ b^2 + d^2 &= 2 & \Rightarrow & d = \sqrt{\frac{17}{13}} \\ bc + de &= -2 & \Rightarrow & e = -2\sqrt{\frac{13}{17}} \\ c^2 + e^2 + f^2 &= 4 & \Rightarrow & f = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{aligned}$$

Výsledný součin matic  $V \cdot V^T$  a hledaná matice  $V^T$  potřebná k určení výsledného rozkladu polynomu  $f(x)$  na součet čtverců polynomů mají podobu:

$$V \cdot V^T = \begin{pmatrix} \sqrt{13} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \sqrt{\frac{17}{13}} & -2\sqrt{\frac{13}{17}} \\ 0 & -2\sqrt{\frac{13}{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} \quad V^T = \begin{pmatrix} \sqrt{13} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{17}{13}} & -2\sqrt{\frac{13}{17}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

Ověřme nyní získaný výsledek v programu Wolfram Mathematica a zaměřme se též na časovou náročnost výpočtu.

```
In[4]:= AbsoluteTiming[MatrixForm[CholeskyDecomposition[{{13, 3, 0}, {3, 2, -2}, {0, -2, 4}}]]]
Out[4]= {0.000245,  $\begin{pmatrix} \sqrt{13} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{17}{13}} & -2\sqrt{\frac{13}{17}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$ }
```

Program vrátil v zanedbatelném čase 0,000245 sekundy přímo matici  $V^T$  ve tvaru, který odpovídá i předcházejícímu ručnímu výpočtu. Dopočtěme nyní rozklad na součet čtverců a následně provedme zkoušku (již pouze pomocí matematického softwaru).

Hledaný rozklad polynomu  $f(x)$  na součet čtverců určíme jako součin matice  $V^T$  a sloupcového vektoru monomů  $z^T$ :

$$V^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} \sqrt{13} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{17}{13}} & -2\sqrt{\frac{13}{17}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{13} + \frac{3x}{\sqrt{13}} \\ \sqrt{\frac{17}{13}}x - 2\sqrt{\frac{13}{17}}x^2 \\ \frac{4x^2}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

Výsledný rozklad představuje součet druhých mocnin jednotlivých řádků vypočtené matice součinu:

$$f(x) = \left( \sqrt{13} + \frac{3x}{\sqrt{13}} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{17}{13}}x - 2\sqrt{\frac{13}{17}}x^2 \right)^2 + \left( \frac{4x^2}{\sqrt{17}} \right)^2$$

Ověřme na závěr, zda se skutečně jedná o vyjádření původního polynomu  $f(x)$  ve tvaru součtu čtverců polynomů:

```
In[13]:= fx = 4 x^4 - 4 x^3 + 2 x^2 + 6 x + 13;
SOSfx = (Sqrt[13] + 3 x / Sqrt[13])^2 + ((Sqrt[17 / 13] * x) - 2 * (Sqrt[13 / 17]) * x^2)^2 + ((4 x^2) / Sqrt[17])^2;
Expand[SOSfx]
AbsoluteTiming[TrueQ[fx == Expand[SOSfx]]]

Out[15]= 13 + 6 x + 2 x^2 - 4 x^3 + 4 x^4
Out[16]= {0.0002511, True}
```

Program v čase 0,0002511 sekundy zpětně umocnil výše získaný rozklad na součet tří čtverců a zároveň vydal verdikt *True*, že se toto vyjádření shoduje s původně zadaným polynomem  $f(x)$ . Je evidentní, že tento rozklad je ve složitějším tvaru než rozklad získaný středoškolskou metodou. Nicméně i přes povahu získaného rozkladu pro parametr  $\lambda = 2$  je zřejmé, že polynom  $f(x)$  je pozitivně definitní, a tudíž neexistuje žádný reálný kořen původně zadané rovnice – rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení.

## 5.2 Řešený příklad 2 – důkaz neexistence rozkladu středoškolským způsobem

Rozhodněte o existenci reálných kořenů daného polynomu  $p(x)$  v níže uvedeném tvaru.

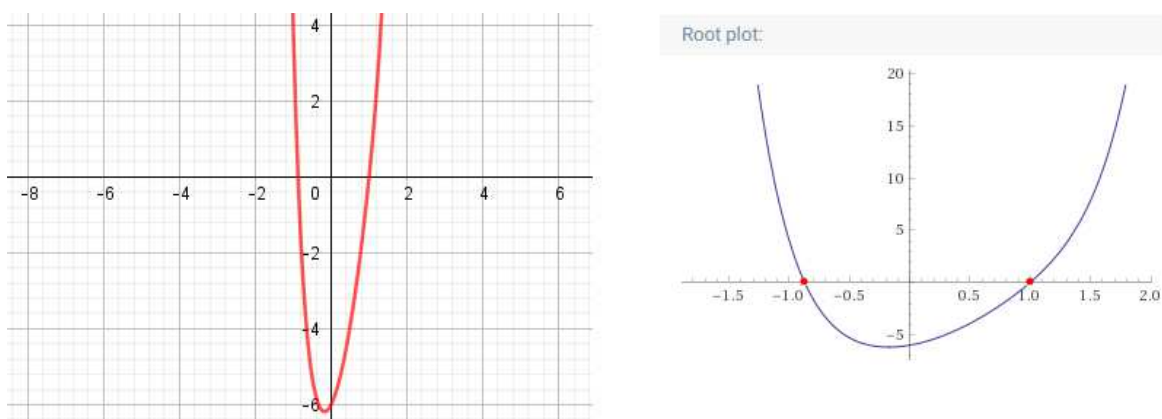
V případě existence reálných kořenů, vypočtěte alespoň jeden z nich.

$$p(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2x - 6$$

## Řešení:

Začneme při řešení zadaného příkladu nyní od konce – sestrojme graf daného reálného polynomu  $p(x)$ , který nám umožní rozhodnout o případné existenci reálných kořenů. Bylo by možné obdobně jako v některých předchozí konstrukcích užít programu Wolfram Mathematica. Při řešení této úlohy se ovšem pokusme opřít o některé (bezplatné) možnosti, které má při řešení této či jiných úloh k dispozici běžný středoškolský student. Jednou z těchto možností je program dynamické geometrie GeoGebra, který byl blíže specifikován v rámci řešení předcházejícího řešení příkladu 1 (kap. 5.1). Dalším oblíbeným a užitečným nástrojem (nejen) při řešení matematických úloh je často již u středoškolských, ale převážně spíše u vysokoškolských, studentů vědomostní engine či odpovídací nástroj Wolfram Alpha. Ten je stejně jako software Mathematica vyvíjen společností Wolfram Research, oproti programu Wolfram Mathematica je ovšem online, není úzce zaměřen na numerické výpočty či řešení algebraických úloh a v základní verzi je bezplatný bez nutnosti si vytvářet uživatelský účet. Výsledky na konkrétní dotaz navíc oproti běžným internetovým vyhledávačům uživateli přehledně shrne a roztřídí do jednotlivých kategorií. V současné době se tak jedná o nástroj, který je možné využít napříč různými obory, a to nejen čistě přírodovědnými. [36]

Vraťme se ovšem k řešení zadaného příkladu. Dvojitá konstrukce grafu zadaného polynomu  $p(x)$  je provedena na obrázku 22. Vlevo je graf vydaný programem GeoGebra, vpravo graf získaný prostřednictvím vědomostního engine Wolfram Alpha.



**Obrázek 22 - Konstrukce grafu polynomu  $p(x)$  v programu GeoGebra 5.0 a vědomostním engine Wolfram Alpha**

Konstrukce na obrázku 22 jsou dokladem, že existují dva reálné kořeny zadaného polynomu. Neměl by tedy být možný rozklad daného polynomu  $p(x)$  na součet čtverců.

Tuto informaci ovšem standardně na počátku výpočtu nemáme. Postupujme nyní dále obdobně jako středoškolský student a pokusme se určit rozklad polynomu  $p(x)$  na součet čtverců polynomů dříve prezentovaným středoškolským způsobem s využitím vhodných úprav a algebraických vzorců.

Vyjdeme z původního tvaru zadaného polynomu  $p(x)$  a v prvním kroku obdobně jako dříve vhodně „roztrhneme“ některé členy na součty:

$$p(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2x - 6$$

$$p(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x^2 + 2x - 6$$

Nyní začneme postupně vytýkat. Z prvních tří členů vytkneme  $x^4$ , obdobně pak z čtvrtého až šestého členu upraveného polynomu  $p(x)$  vytkneme  $x^2$  následovně:

$$p(x) = x^4(x^2 - 2x + 1) + x^2(x^2 - 2x + 4) + x^2 + 2x - 6$$

Získané závorky nyní doplníme na čtverce dle vzorce  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ . Nesmíme zároveň zapomenout na přičtení hodnoty 3 u druhé ze závorek, aby zůstal polynom po případném zpětném umocnění beze změny.

$$p(x) = x^4(x-1)^2 + x^2[(x-1)^2 + 3] + x^2 + 2x - 6$$

Nyní využijeme vztahu  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  a doplníme na čtverec poslední trojici členů polynomu. Nesmíme opět zapomenout na odečtení hodnoty 7, aby opět zůstal výraz beze změny.

$$p(x) = x^4(x-1)^2 + x^2[(x-1)^2 + 3] + (x+1)^2 - 7$$

Z výše uvedeného tvaru je zřejmé, že polynom  $p(x)$  není možné (touto metodou) vyjádřit ve tvaru součtu čtverců. Problém je s hodnotou absolutního členu  $-7$ , kterou není možné vyjádřit v reálných číslech ve tvaru druhé mocniny.

Nyní je nutné se zamyslet. Již dříve bylo řečeno, že pokud existuje rozklad jistého reálného polynomu na součet čtverců polynomů, pak je tento polynom pozitivně semidefinitní. Obráceně ovšem tento vztah neplatí. Zároveň ovšem bylo konstatováno a též na konkrétním případě demonstrováno (kap. 2.2), že pro reálné polynomy jedné



neurčité splývají pojmy *být pozitivně definitní* a *být součtem čtverců*. Vyjdeme-li z tohoto předpokladu, pak pokud není možné daný polynom  $p(x)$  vyjádřit ve tvaru součtu čtverců a nalezneme alespoň jeden reálný kořen, bude se zřejmě jednat o indefinitní případ polynomu, bude existovat alespoň jeden další reálný kořen a další kořeny v oboru  $\mathbb{C}$ .

Vraťme se nyní k zadání řešeného příklad 2, kde je řečeno, že máme rozhodnout o existenci reálných kořenů polynomů  $p(x)$  a alespoň jeden z nich určit. Využijeme upravenou podobu zadaného polynomu z pokusu o nalezení rozkladu na SOS ve tvaru:

$$p(x) = x^4(x-1)^2 + x^2\left[(x-1)^2 + 3\right] + (x+1)^2 - 7$$

Pozorný čtenář snadno nahlédne, že důležitou roli pro existenci reálných kořenů hrají v uvedeném tvaru závorky  $(x-1)^2$  a  $(x+1)^2$ . Po dosazení hodnoty  $x_0 = 1$  platí pro polynom  $p(x_0) = 0$ , jak je prezentováno na výpočtu níže.

$$p(1) = 1^4 \cdot (1-1)^2 + 1^2 \cdot \left[(1-1)^2 + 3\right] + (1+1)^2 - 7 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 4 - 7 = 0$$

Jedním z hledaných reálných kořenů zadaného polynomu  $p(x)$  je hodnota  $x_0 = 1$ . Splnili jsme tak požadavek daný zadáním úlohy a výpočet je u konce. Nutno pochopitelně opět poznamenat, že ne vždy je postup takto jednoduchý, často jsou kořeny z oboru  $\mathbb{Q}$  či  $\mathbb{R}$  a nejedná se o celočíselné hodnoty. Určení konkrétních hodnot kořenů pak rozhodně nelze považovat za triviální záležitost. Prezentovaný postup se nicméně opět může hodit kupříkladu řešitelům matematických olympiád, kdy úlohy zadávané v matematických soutěžích mnohdy „stojí“ na užití jistého triku, nápadu či vhodné úpravě.

Závěrem učinme kontrolu postupu s využitím vědomostního enginu Wolfram Alpha. Ověřme, zda skutečně získané vyjádření polynomu  $p(x)$  ve tvaru

$$p(x) = x^4(x-1)^2 + x^2\left[(x-1)^2 + 3\right] + (x+1)^2 - 7$$

představuje po úpravách polynom  $p(x)$  daný zadáním příkladu a zároveň s využitím příkazu *Solve* (v podobné syntaxi jakou užívá program Wolfram Mathematica) si nechme vypočíst všechny (tzn. reálné i komplexní) kořeny daného polynomu.

Input interpretation:	
solve	$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2x - 6 = 0$
Results:	
$x = 1$	
$x \approx -0.872457$	
$x \approx -0.47568 - 1.40995i$	
$x \approx -0.47568 + 1.40995i$	
$x \approx 1.41191 - 1.05470i$	

Input:
$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2x - 6 = x^4(x-1)^2 + x^2((x-1)^2 + 3) + (x+1)^2 - 7$
Alternate form:
True

**Obrázek 23 - Výpočet všech kořenů polynomu  $p(x)$  a ověření správnosti výpočtu s využitím Wolfram Alpha**

Jak je zřejmé z obrázku 23, vědomostní engine Wolfram Alpha potvrdil, že výpočet středoškolským způsobem byl správný a získané vyjádření skutečně představuje původní polynom  $p(x)$ . Zároveň vydal všechny reálné i komplexní kořeny tohoto polynomu. Pokud bychom chtěli mít skutečně jistotu, že neexistuje žádné vyjádření zadaného polynomu  $p(x)$  ve tvaru součtu čtverců (což je již patrné z existence dvojice reálných kořenů), můžeme na úplný závěr řešení úlohy provést kontrolu s využitím programu MATLAB a pro zajímavost se opět zaměříme i na časovou náročnost výpočtu.

```

SeDuMi 1.3 by AdvOL, 2005-2008 and Jos F. Sturm, 1998-2003.
Alg = 2: xz-corrector, Adaptive Step-Differentiation, theta = 0.250, beta = 0.500
eqs m = 7, order n = 5, dim = 17, blocks = 2
nnz(A) = 10 + 0, nnz(ADA) = 49, nnz(L) = 28
it :      b*y          gap   delta rate  t/tP*  t/tD*   feas cg cg  prec
 0 :              4.62E+000 0.000
 1 :  1.64E+001 9.53E-001 0.000 0.2064 0.9000 0.9000  -0.40  1  1  4.7E+000
 2 :  2.27E+003 3.24E-002 0.000 0.0340 0.9900 0.9900  -1.02  1  1
Primal infeasible, dual improving direction found.
iter seconds |Ax|  [Ay]_+  |x|  |y|
 2      0.0  0.0e+000  0.0e+000  0.0e+000  4.1e-001

```

No sum of squares decomposition is found.

Q = Z =  
[] []

**Obrázek 24 - Ověření neexistence rozkladu polynomu  $p(x)$  na součet čtverců v programu MATLAB**

Program MATLAB také potvrdil v čase kratším než 0,1 sekundy, že zadaný reálný polynom  $p(x)$  nelze rozložit na součet čtverců polynomů.

### 5.3 Řešený příklad 3 – homogenní polynomy a (kvadratické) formy

Určete rozklad daného reálného polynomu  $f(x, y)$  na součet čtverců polynomů:

$$f(x, y) = 13x^2 + 10xy + 13y^2$$

**Řešení:**

Úkolem je určit rozklad reálného homogenního polynomu  $f(x, y)$  sudého stupně 2 na součet čtverců polynomů. Hovoříme-li o homogenních polynomech jistého stupně  $m$ , lze toto označení zaměnit pojmem *formy*, který se v literatuře často užívá. Než se budeme dále věnovat řešení zadaného příkladu 3, uvedme s využitím literatury [15] přesnou definici tohoto pojmu.

**Definice 4:** Označme  $I$  obor integrity. Polynom  $I[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , jehož členy jsou všechny téhož celkového stupně  $m$ , se nazývá **forma** nebo **homogenní polynom  $m$ -tého stupně** v neurčitých  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nad  $I$ .

**Poznámka:** Všechny nenulové prvky z  $I$  jsou formy nultého stupně. Formy prvního až čtvrtého stupně se nazývají po řadě **lineární, kvadratické, kubické a bikvadratické**.

Pokud se nyní vrátíme k řešení zadaného příkladu, můžeme tedy v souladu s výše uvedenou definicí 4 a s ní související poznámkou hovořit o zadaném polynomu  $f(x, y)$  jako o kvadratické formě. Vzhledem k sudému stupni 2 má smysl hledat rozklad na SOS a zřejmě monomy vyskytující se ve výsledném rozkladu bude pouze dvojice  $x, y$ . Hledaná čtvercová matice  $B$  bude tedy typu  $2 \times 2$  a prvky množiny  $\Lambda_m$  budou ve tvaru  $\beta_1 = (1, 0)$ ,  $\beta_2 = (0, 1)$ . Jednotlivé prvky hledané matice  $B$  vypočteme následovně:

$$\begin{aligned} b_{11}: \quad \beta_1 + \beta_1 &= (1, 0) + (1, 0) = (2, 0) && \Rightarrow b_{11} = 13 \\ b_{12}: \quad \beta_1 + \beta_2 &= \beta_2 + \beta_1 = (1, 0) + (0, 1) = (0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \Rightarrow 2b_{12} = 2b_{21} = 10; b_{12} = b_{21} = 5 \\ b_{22}: \quad \beta_2 + \beta_2 &= (0, 1) + (0, 1) = (0, 2) && \Rightarrow b_{22} = 13 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

Získali jsme symetrickou Gramovu matici  $B$ , která neobsahuje žádné parametry, ve výše uvedeném tvaru. Pro existenci rozkladu polynomu  $f(x, y)$  je nezbytné, aby byla matice  $B$

pozitivně semidefinitní. Využijme nyní Sylvesterovo kritérium (viz věta 1, kap. 2.2). Zřejmě je splněna první podmínka, že hodnota determinantu  $|b_{11}| > 0$ , konkrétně  $|13| > 0$ . Vypočtíme tedy nyní hodnotu determinantu matice  $B$ , pro kterou musí nutně platit  $\det B > 0$ . Vzhledem k řádu matice  $k = 2$  využijeme křížového pravidla:

$$\det B = \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 13 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 169 - 25 = 144$$

Hodnota determinantu je  $\det B = 144$  a tudíž je dodržena požadovaná nerovnost  $\det B > 0$ , má smysl pokračovat ve výpočtu, a navíc jsme získali informaci, že matice je vzhledem k uvedeným nerovnostem dokonce pozitivně definitní. Zároveň můžeme díky uvedenému výpočtu již na tomto místě rozhodnout i o definitnosti samotné kvadratické formy  $f(x, y)$ , která je též pozitivně definitní. Platí totiž, že jistou kvadratickou formu  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  považujeme za pozitivně definitní v případě, že pro všechny neurčité  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je tato forma  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ , přičemž alespoň pro jednu z neurčitých platí  $x_i \neq 0$ . Stejný závěr bychom získali užitím výpočtu charakteristického polynomu  $F(y)$  a výpočtu vlastních čísel matice  $B$  (tj. kořenů charakteristického polynomu  $F(y)$ ). Výpočet přenechme nyní počítači a softwaru Wolfram Mathematica obdobně jako již dříve.

```
In[4]:= MaticeB = {{13, 5}, {5, 13}};
CharPol = CharacteristicPolynomial[MaticeB, y]
AbsoluteTiming[Solve[CharPol == 0]]
```

```
Out[5]= 144 - 26 y + y2
```

```
Out[6]= {0.0009218, {{y -> 8}, {y -> 18}}}
```

Využitím příkazů *CharacteristicPolynomial* (výpočet charakteristického polynomu dané matice) a *Solve* (výpočet kořenů dané rovnice) jsme získali vlastní čísla  $y_1 = 8$  a  $y_2 = 18$ , kdy výpočet proběhl v čase 0,0009218 sekundy. Získaný výsledek je opět dokladem, že matice  $B$  a kvadratická forma  $f(x, y)$  jsou pozitivně definitní.

Pokračujeme ovšem v hledání konkrétního vyjádření ve tvaru součtu čtverců. Využijme obdobně jako dříve Choleského dekompozici. Musíme tedy určit prvky  $a, b, c$  ze vztahu:

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{pmatrix} = V \cdot V^T$$

Vzhledem k jednoduchosti výpočtu nebudeme postup podrobněji rozepisovat. Hodnoty prvků  $a, b, c$  jsou následující:

$$\begin{aligned} a^2 = 13 & \Rightarrow a = \sqrt{13} \\ ab = 5 & \Rightarrow b = \frac{5}{\sqrt{13}} \\ b^2 + c^2 = 13 & \Rightarrow c = \sqrt{\frac{144}{13}} = \frac{12}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Matice  $V^T$  nezbytná pro výpočet rozkladu na součet čtverců má tedy následující tvar:

$$V^T = \begin{pmatrix} \sqrt{13} & \frac{5}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{12}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

Zbývá vynásobit získanou maticí sloupcovým vektorem  $z^T$  skládající se z dvojice monomů  $x, y$  a zapsat výsledný rozklad ve tvaru součtu čtverců.

$$V^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} \sqrt{13} & \frac{5}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{12}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\sqrt{13} + \frac{5y}{\sqrt{13}} \\ \frac{12y}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

Hledaný rozklad polynomu  $f(x, y)$  na SOS je zřejmě ve tvaru:

$$f(x, y) = \left( x\sqrt{13} + \frac{5y}{\sqrt{13}} \right)^2 + \left( \frac{12y}{\sqrt{13}} \right)^2$$

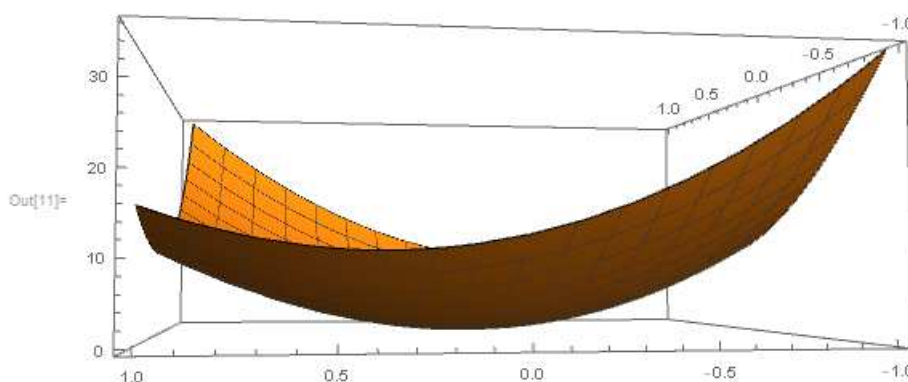
Získali jsme vyjádření ve tvaru součtu čtverců reálných polynomů. Výsledek nyní ověříme pomocí počítačového softwaru a opět se pozastavíme i nad časovou náročností výpočtu.

```
In[46]:= fxy = 13*x^2 + 10*x*y + 13*y^2;
SOSfxy = (x*Sqrt[13] + (5 y) / (Sqrt[13]))^2 + ((12 y) / (Sqrt[13]))^2;
Expand[SOSfxy]
AbsoluteTiming[TrueQ[fxy == Expand[SOSfxy]]]

Out[48]:= 13 x^2 + 10 x y + 13 y^2

Out[49]:= {0.0001541, True}
```

Počítač vydal v čase 0,0001541 sekundy výsledek, že získaný rozklad na součet čtverců reprezentuje původní polynom  $f(x, y)$  daný zadáním příkladu. V průběhu výpočtu jsme zároveň zjistili, že přistupujeme-li k tomuto polynomu jako kvadratické formě, pak je striktně pozitivně definitní a pro všechny hodnoty neurčitých  $(x, y) \neq (0, 0)$  nikdy nenastane rovnost nule. O pravdivosti tohoto tvrzení se můžeme na závěr přesvědčit i konstrukcí grafu kvadratické formy  $f(x, y)$ , která je provedena níže na obrázku 25. Nutno na závěr poznamenat, že pokud bychom postupovali obdobně jako dříve dle vymezené definice 1, hovořili bychom pouze o pozitivně semidefinitním polynomu  $f(x, y)$ , což ovšem není překážkou pro výpočet rozkladu na SOS, který byl zadáním úlohy požadován.



Obrázek 25 - Graf pozitivně definitní kvadratické formy  $f(x, y)$

K zadání řešeného příkladu 3 nutno ještě doplnit, že obdobně jako v případech polynomů jedné neurčité by bylo možné i v tomto konkrétním případě určit rozklad na SOS bez užití počítače s pomocí úprav a běžně vyučovaných matematických vzorců. Pozorný čtenář snadno nahlédne, že již v zadané kvadratické formě se vyskytují čtverce  $13x^2$ ,  $13y^2$  a dále smíšený člen  $10xy$ . Vytknutím hodnoty 13 a následným doplněním na čtverec tak po úpravách dospějeme ke stejnému výsledku jako jsme získali předcházejícím výpočtem.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 13x^2 + 10xy + 13y^2 = 13\left(x^2 + \frac{10}{13}xy + y^2\right) = 13\left[\left(x + \frac{5}{13}y\right)^2 - \frac{25}{169} + y^2\right] = 13\left[\left(x + \frac{5}{13}y\right)^2 + \frac{144}{169}y^2\right] = \\ &= \left(x\sqrt{13} + \frac{5y\sqrt{13}}{13}\right)^2 + \left(\frac{12y\sqrt{13}}{13}\right)^2 = \left(x\sqrt{13} + \frac{5y}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{12y}{\sqrt{13}}\right)^2 \end{aligned}$$

Uvedený postup je názornou ukázkou, kdy v případě jednodušších úloh a „průhledných“ příkladů je možné klasickými postupy dospět k výsledku rychleji než s využitím obecného algoritmu. Pochopitelně, postup není universální a příklad musí být vhodně zadán.

#### 5.4 Řešený příklad 4 – více rozkladů na SOS daného reálného polynomu

Rozhodněte, zda je možné uvedený reálný polynom  $f(x, y)$  vyjádřit ve tvaru součtu čtverců polynomů. Pokud ano, určete alespoň jeden z možných rozkladů.

$$f(x, y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + 2y^4$$

##### Řešení I (tři rozklady):

Zadání úlohy obsahuje reálný polynom  $f$  dvou neurčitých  $x, y$  sudého stupně 4. Hledání rozkladu polynomu  $f(x, y)$  na součet čtverců má tedy smysl. Jediné monomy, které se mohou vyskytnout v potenciálním rozkladu, jsou zřejmě  $x^2, xy, y^2$ . Vzhledem k tomuto faktu bude množina  $\Lambda_m$  obsahovat prvky  $\beta_1 = (2, 0), \beta_2 = (1, 1), \beta_3 = (0, 2)$  a symetrická Gramova matice  $B$  bude čtvercová matice řádu  $k = 3$ . Vzhledem k povaze uvedených prvků lze též očekávat nutnost zavedení parametru  $\lambda$  vlivem provázání dvojice prvků matice  $B$ . Výpočet jednotlivých prvků hledané matice je následující (pozn. vzhledem k symetrii matice  $B$  nebudeme z důvodu lepší přehlednosti výpočtu nyní zapisovat všechny rovnosti vzájemně symetrických prvků – veškeré prvky uvedeme až v konečném zápisu matice  $B$  samotné):

$$\begin{aligned} b_{11} : \beta_1 + \beta_1 &= (2, 0) + (2, 0) = (4, 0) && \Rightarrow b_{11} = 1 \\ b_{12} : \beta_1 + \beta_2 &= \beta_2 + \beta_1 = (2, 0) + (1, 1) = (1, 1) + (2, 0) = (3, 1) && \Rightarrow 2b_{12} = 2; b_{12} = 1 \\ b_{13} : \beta_1 + \beta_3 &= \beta_3 + \beta_1 = \beta_2 + \beta_2 = (2, 0) + (0, 2) = (0, 2) + (2, 0) = (1, 1) + (1, 1) = (2, 2) && \Rightarrow 2b_{13} + b_{22} = 3 \\ b_{22} : \beta_2 + \beta_2 &= \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1 = (1, 1) + (1, 1) = (2, 0) + (0, 2) = (0, 2) + (2, 0) = (2, 2) && \Rightarrow b_{22} + 2b_{13} = 3 \\ b_{23} : \beta_2 + \beta_3 &= \beta_3 + \beta_2 = (1, 1) + (0, 2) = (0, 2) + (1, 1) = (1, 3) && \Rightarrow 2b_{23} = 2; b_{23} = 1 \\ b_{33} : \beta_3 + \beta_3 &= (0, 2) + (0, 2) = (0, 4) && \Rightarrow b_{33} = 2 \end{aligned}$$

Nastala očekávaná provázanost prvků  $b_{13}$  a  $b_{22}$ . Volme tedy reálný parametr  $b_{13} = \lambda$ , čímž získáme Gramovu matici  $B$  typu  $3 \times 3$  ve tvaru:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 3 - 2\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní je nutné rozhodnout o intervalu přípustných reálných hodnot parametru  $\lambda$ , aby byla po jejich dosazení matice  $B$  pozitivně semidefinitní. Předtím ovšem učiníme rychlou kontrolu pomocí programu MATLAB.

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad Z = \begin{matrix} & \begin{matrix} y^2 \\ x*y \\ x^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \\ \end{matrix} & \end{matrix} \quad D =$$

V čase 0,1 sekundy vydal program MATLAB již konkrétní matici  $B$  (program užívá značení matice  $Q$ ) s celočíselnými prvky po dosazení za parametr  $\lambda = 0$ , vektor monomů  $z$  a hodnotu  $D$  vycházející ze vztahu  $z.Q.z^T = D.f(x, y)$ . Nutno poznamenat, že počítačový software oproti lidskému postupu řadí monomy v obráceném pořadí, a tudíž vydaná matice je oproti ručně vypočtené matici  $B$  převrácená podle vedlejší diagonály. To však nemá žádný vliv na výsledek.

Vraťme se nyní k výpočtu přípustných hodnot parametru  $\lambda$ , pro které bude vypočtená matice  $B$  pozitivně semidefinitní. Musíme vypočítat charakteristický polynom matice. Výpočet přenecháme počítačovému softwaru Wolfram Mathematica, nicméně tentokrát provedeme výpočet dvojí. Jednak užijeme příkaz *CharacteristicPolynomial* v příslušné syntaxi, dále ovšem pro porovnání necháme současně počítač určit charakteristický polynom  $F(y)$  výpočtem determinantu

$$\det(B - yE) = \begin{vmatrix} 1-y & 1 & \lambda \\ 1 & 3-2\lambda-y & 1 \\ \lambda & 1 & 2-y \end{vmatrix},$$

který lépe odpovídá i ručnímu výpočtu s využitím Sarrusova pravidla, přičemž u obou z počítačových postupů využijeme obdobně jako dříve též příkaz *Collect*, abychom měli koeficienty srovnané u zavedené neurčité  $y$ , a budeme zkoumat časovou náročnost obou výpočtů.

```
In[1]:= MatB = {{1, 1, λ}, {1, 3 - 2 λ, 1}, {λ, 1, 2}};
MatBy = {{1 - y, 1, λ}, {1, 3 - 2 λ - y, 1}, {λ, 1, 2 - y}};
AbsoluteTiming[Collect[CharacteristicPolynomial[MatB, y], y]]
AbsoluteTiming[Collect[Det[MatBy], y]]

Out[3]= {0.0128284, 3 - y3 + y2 (6 - 2 λ) - 2 λ - 3 λ2 + 2 λ3 + y (-9 + 6 λ + λ2) }

Out[4]= {0.000341, 3 - y3 + y2 (6 - 2 λ) - 2 λ - 3 λ2 + 2 λ3 + y (-9 + 6 λ + λ2) }
```



V obou případech vydal matematický software shodný tvar charakteristického polynomu:

$$F(y) = -y^3 + y^2(6 - 2\lambda) + y(\lambda^2 + 6\lambda - 9) + (2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 3)$$

Zajímavé však je zaměřit se na rychlosti obou výpočtů. V případě užití předpřipravené funkce *CharacteristicPolynomial* proběhl výpočet v čase 0,0128284 sekundy, zatímco při výpočtu determinantu stačilo počítači k výpočtu pouze 0,000341 sekundy. Pomineme-li fakt, že oba výpočty proběhly mnohonásobně rychleji než v případě ručního výpočtu, pak je nutné konstatovat, že v případě některých výpočtů je možná vhodné počítačovému softwaru vstup (například zde matici) předpřipravit. V tomto případě je rozdíl v rychlosti výpočtů zanedbatelný a běžný uživatel jej ani nepostřehne, v případě rozsáhlých strojových výpočtů však již může časové hledisko hrát velmi důležitou roli. Mohli bychom se zabývat tím, kde se první z postupů „natáhl“, nicméně by bylo nutné studovat samotné jádro softwaru Wolfram Mathematica a zabývat se přístupem tohoto programu k oběma zadaným vstupům. To však není předmětem této práce, a proto se vrátíme k řešení zadané úlohy a určení rozkladů polynomu  $f(x, y)$  na součet čtverců.

Abychom mohli rozhodnout o přípustných hodnotách reálného parametru  $\lambda$  pomocí Descartova znaménkového pravidla, musíme zapsat polynom  $F(-y)$ ; ten bude mít zřejmě následující tvar, o čemž bychom se mohli přesvědčit i s využitím počítačového softwaru.

$$F(-y) = y^3 + y^2(6 - 2\lambda) + y(9 - 6\lambda - \lambda^2) + (2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 3)$$

Matice  $B$  bude pozitivně semidefinitní, pokud budou splněny současně podmínky:

$$6 - 2\lambda \geq 0 \quad \wedge \quad 9 - 6\lambda - \lambda^2 \geq 0 \quad \wedge \quad 2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 3 \geq 0$$

Snadno nahlédneme, že pro první z nerovnic musí platit:

$$\begin{aligned} 6 - 2\lambda &\geq 0 \\ -2\lambda &\geq -6 \\ 2\lambda &\leq 6 \\ \lambda &\leq 3 \end{aligned}$$

Označme obor pravdivosti této podmínky  $P_1 = (-\infty, 3)$  a přejděme ke druhé nerovnici.

V prvním kroku bude nutné vypočítat kořeny kvadratické rovnice  $9 - 6\lambda - \lambda^2 = 0$ . Určíme

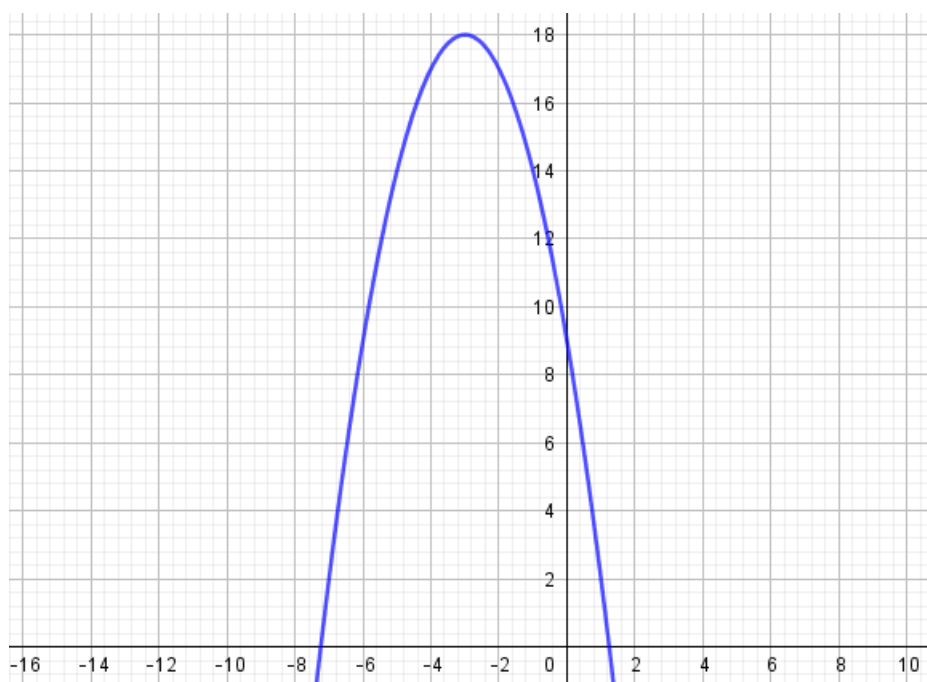
standardně diskriminant ze vzorce  $D = b^2 - 4ac$ , který je běžně vyučován na středních školách. Následně ze vztahu  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$  vypočteme hledané kořeny.

$$\begin{aligned} 9 - 6\lambda - \lambda^2 &= 0 \\ -\lambda^2 - 6\lambda + 9 &= 0 \\ D &= (-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9 = 36 + 36 = 72 \\ D &= 72 \end{aligned}$$

Hledané kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  mají tedy hodnoty:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{6 + \sqrt{72}}{-2} = \frac{6 + 6\sqrt{2}}{-2} = -3 - 3\sqrt{2} \doteq -7,24 \\ \lambda_2 &= \frac{6 - \sqrt{72}}{-2} = \frac{6 - 6\sqrt{2}}{-2} = -3 + 3\sqrt{2} \doteq 1,24 \end{aligned}$$

Díky výše vypočteným kořenům již můžeme určit obor pravdivosti podmínky  $P_2 = \langle -3 - 3\sqrt{2}, -3 + 3\sqrt{2} \rangle$ . Nutno na tomto místě ovšem upozornit, že při stanovení intervalu (oboru pravdivosti podmínky  $P_2$ ) musíme brát v potaz polohu paraboly vůči ose  $x$ . Ta je v tomto případě konkávní, jak je znázorněno na obrázku 26 pomocí programu GeoGebra.



Obrázek 26 - Graf paraboly k oboru pravdivosti podmínky  $P_2$

Početně nejsložitější je poslední, tj. kubická, rovnice. Pochopitelně by bylo možné přenechat výpočet programům počítačové algebry jako předchozích úlohách, postupujme nicméně nyní bez užití počítače, který si necháme až na závěr – pro ověření správnosti výpočtu. Vyjdeme-li z kubické rovnice ve tvaru  $2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ , u které očekáváme tři kořeny  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , může pozorný počtář snadno nahlédnout, že jeden z kořenů musí být roven  $\lambda_1 = 1$ . Díky tomuto zjištění (uhádnutí celočíselného kořene) můžeme nyní aplikovat výpočet pomocí Hornerova schématu a snížit stupeň polynomu na levé straně rovnice.

**Tabulka 5 - Užití Hornerova schématu při řešení kubické rovnice**

	2	-3	-2	3
		2	-1	-3
$\lambda_1 = 1$	<b>2</b>	<b>-1</b>	<b>-3</b>	<b>0</b>

Tučně zvýrazněné hodnoty představují koeficienty o stupeň nižšího polynomu. Přešli jsme tak k řešení rovnice, ze které určíme zbývající kořeny  $\lambda_2, \lambda_3$  ve tvaru:

$$2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$$

Obdobně jako u výpočtu oboru pravdivosti podmínky  $P_2$  použijeme známých vzorců pro výpočet přes diskriminant. Nyní již bez podrobného komentáře.

$$2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$$

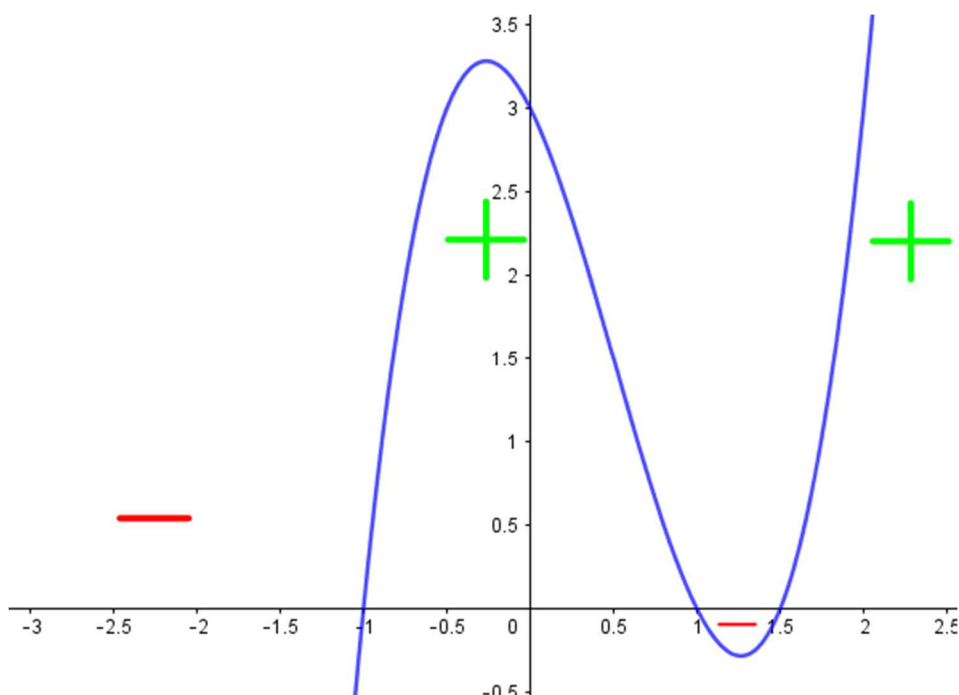
$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$$

$$D = 25$$

$$\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{25}}{4} = \frac{1 - 5}{4} = -1$$

Získali jsme tedy tři kořeny  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \frac{3}{2}$  a  $\lambda_3 = -1$ . Nyní je třeba rozhodnout, ve kterých intervalech nabývá rovnice  $2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 3 \geq 0$  nezáporných hodnot. Pomůžeme si konstrukcí grafu v programu GeoGebra, díky kterému snadno rozhodneme o oboru pravdivosti podmínky  $P_3$ .



Obrázek 27 - Znaménko kubické nerovnice v příslušných intervalech

Obrázek 27 je dokladem, že hledaný obor pravdivosti podmínky  $P_3$  představuje

$$\text{sjednocení } P_3 = \langle -1, 1 \rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}, \infty \right\rangle.$$

Charakteristický polynom  $F(y)$  má nezáporné kořeny pouze v případě, že jsou všechny uvedené podmínky splněny současně – tedy pro výsledný obor pravdivosti  $P$  platí průnik  $P = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ . Je tedy zřejmé, že parametr  $\lambda$  může nabývat pouze reálných hodnot  $\lambda \in \langle -1, 1 \rangle$ . Ověříme získaný výsledek pomocí programu počítačové algebry Wolfram Mathematica a nechme si opět vypsát i čas nutný pro výpočet uvedeného intervalu.

```
In[2]:= AbsoluteTiming[Reduce[6 - 2 λ ≥ 0 && 9 - 6 λ - λ^2 ≥ 0 && 2 λ^3 - 3 λ^2 - 2 λ + 3 ≥ 0, λ]]
Out[2]= {0.0012472, -1 ≤ λ ≤ 1}
```

Rozklad daného polynomu  $f(x, y)$  na součet čtverců polynomů tedy bude existovat a počítač v čase 0,0012472 sekundy potvrdil správnost výpočtu klasickými metodami. Zadáním příkladu je požadováno určit alespoň jeden z rozkladů. Vypočtíme proto rozklady odpovídající celočíselným volbám parametru  $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ , čímž získáme trojici

různých rozkladů daného reálného polynomu na součet čtverců a dokážeme tak, že tento polynom je pozitivně semidefinitní. Při určování rozkladu budeme nyní více postupovat klasickým přístupem a využijeme algoritmu z kapitoly 3.2.

Začněme volbou parametru  $\lambda = 0$ . Matici  $B$  tak získáme ve tvaru s celočíselnými prvky, kterou vydal program MATLAB.

$$B_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní je nutné matici  $B_{\lambda=0}$  převést s využitím symetrických úprav na diagonální matici  $D$ , aby bylo dále možné využít vztahu  $D = X^T B X$ . Připíšeme tedy k matici  $B_{\lambda=0}$  jednotkovou matici  $E$ , do které ovšem budeme při převodu zanášet pouze řádkové úpravy. Konkrétní řádkové úpravy jsou pro lepší srozumitelnost výpočtu vyznačeny.

$$\begin{aligned} (B_{\lambda=0} | E) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-I} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{+II} \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) = (D | X^T) \end{aligned}$$

Pomocí symetrických úprav jsme získali diagonální matici  $D$  a zároveň také elementární transformační matici  $X^T$ , přičemž snadno zapíšeme záměnou řádků za sloupce též transponovanou matici  $X$ :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad X^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Před dalším postupem nyní raději ověříme platnost vztahu  $D = X^T B X$  s využitím počítačového softwaru.

```
In[29]:= B0 = {{1, 1, 0}, {1, 3, 1}, {0, 1, 2}};
          Xt = {{1, 0, 0}, {-1, 1, 0}, {-1, 1, -2}};
          X = {{1, -1, -1}, {0, 1, 1}, {0, 0, -2}};
          MatD = Xt.B0.X;
          MatrixForm[MatD]

Out[33]/MatrixForm=
      1 0 0
      0 2 0
      0 0 6
```

Ověřením pomocí programu Wolfram Mathematica jsme potvrdili správnost postupu s využitím symetrických úprav – vydaná matice získaná z výše uvedeného součinu se shoduje s vypočtenou diagonální maticí  $D$ . Nyní potřebujeme přejít ke vztahu  $B = V.D.V^T$ , kdy platí dvojice vztahů  $X^{-1} = V^T$  a  $(X^T)^{-1} = V$ . Následně pak budeme moci využít vztah v podobě součinu matic  $U = \sqrt{D}.X^{-1} = \sqrt{D}.V^T$  a na závěr určit rozklad polynomu  $f(x, y)$  na součet čtverců polynomů pro pevnou volbu parametru  $\lambda = 0$ .

Vypočteme nyní s využitím Gaussovy eliminační metody (viz např. [2]) inverzní matice  $X^{-1}$ , správnost výpočtu následně ověříme pomocí programů počítačové algebry. Základní myšlenkou je připsat vpravo dané matici  $X$  jednotkovou matici  $E$ , a následně pomocí řádkových elementárních úprav převést původní matici  $X$  na matici jednotkovou, přičemž úpravy zaznamenáváme i do matice vpravo, ze které nám po úpravách vznikne matice inverzní, tedy  $(X|E) \sim \dots \sim (E|X^{-1})$ . Konkrétní úpravy jsou opět naznačeny.

$$(X|E) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+I} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+\frac{1}{2} \cdot II} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{:(-2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) = (E|X^{-1})$$

Hledaná inverzní matice  $X^{-1}$  je tedy ve tvaru:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ověřme nyní výpočet pomocí softwaru Wolfram Mathematica a příkazu *Inverse*, přičemž si opět necháme vypsát i časovou náročnost výpočtu pro porovnání s klasickým postupem.

```
In[1]= X = {{1, -1, -1}, {0, 1, 1}, {0, 0, -2}};
AbsoluteTiming[MatrixForm[Inverse[X]]]
```

```
Out[2]= {0.001523,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ }
```

Počítač v čase 0,001523 potvrdil správnost výpočtu inverzní matice  $X^{-1}$  a můžeme tedy přejít k závěrečné fázi výpočtu pro volbu  $\lambda = 0$ . Nejprve určíme diagonální matici  $\sqrt{D}$ , která má zřejmě tvar:

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Vypočteme součin  $U = \sqrt{D}.X^{-1} = \sqrt{D}.V^T$  a následně určíme také součin  $U.z^T$  matice vypočtené  $U$  a sloupcového vektoru monomů  $z^T$ . Následně pak budeme moci vyjádřit původní polynom  $f(x, y)$  ve tvaru součtu tří čtverců polynomů.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \quad U.z^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ xy\sqrt{2} + \frac{y^2\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{y^2\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

Výsledný rozklad na SOS získáme jako součet druhých mocnin řádků matice  $U.z^T$ :

$$f(x, y) = (x^2 + xy)^2 + \left(xy\sqrt{2} + \frac{y^2\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y^2\sqrt{6}}{2}\right)^2$$

Získali jsme vyjádření původně zadaného reálného polynomu  $f(x, y)$  ve tvaru součtu čtverců reálných polynomů pro pevnou volbu parametru  $\lambda = 0$ , čímž jsme zároveň dokázali, že je tento polynom pozitivně semidefinitní. Závěrem ověříme správnost výpočtu zpětným umocněním získaného rozkladu v programu Wolfram Mathematica.

```
In[1]:= fxy = x^4 + 2 * x^3 * y + 3 * x^2 * y^2 + 2 * x * y^3 + 2 * y^4;
SOSfxy0 = (x^2 + x*y)^2 + (x*y*Sqrt[2] + (y^2*Sqrt[2])/2)^2 + (- (y^2*Sqrt[6])/2)^2;
Expand[SOSfxy0]
TrueQ[fxy == Expand[SOSfxy0]]
Out[3]= x^4 + 2 x^3 y + 3 x^2 y^2 + 2 x y^3 + 2 y^4
Out[4]= True
```

Vydaný verdikt *True* nám dává informaci, že získaný rozklad skutečně představuje původně zadaný polynom  $f(x, y)$  při pevné volbě parametru  $\lambda = 0$ .

Přejdeme nyní k další volbě parametru  $\lambda$ , konkrétně  $\lambda = 1$ , a určíme druhý z možných rozkladů zadaného polynomu na SOS. Postup nebudeme již tak podrobně rozepisovat. Zároveň využijeme jiný z možných přístupů při hledání požadovaného rozkladu na součet čtverců – Choleského dekompozici. Matice  $B$  bude mít pro volbu parametru  $\lambda = 1$  tvar:

$$B_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní musíme určit dvojici trojúhelníkových matic  $V, V^T$  takových, aby platilo  $B = V \cdot V^T$ .

Obdobně jako dříve tedy musí platit maticová rovnost:

$$B_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + d^2 & bc + de \\ ac & bc + de & c^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} = V \cdot V^T$$

Pro dvojice odpovídajících si prvků musí v tomto konkrétním případě tedy platit:

$$\begin{array}{lll} 1 = a^2 & 1 = ab & 1 = ac \\ 1 = ab & 1 = b^2 + d^2 & 1 = bc + de \\ 1 = ac & 1 = bc + de & 2 = c^2 + e^2 + f^2 \end{array}$$

Vypočteme nyní konkrétní hodnoty prvků  $a, b, c, d, e, f$  následujícím způsobem:

$$\begin{array}{ll} a^2 = 1 & \Rightarrow a = 1 \\ ab = 1 & \Rightarrow b = 1 \\ ac = 1 & \Rightarrow c = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 & \Rightarrow d = 0 \\ bc + de = 1 & \Rightarrow e = 0 \\ c^2 + e^2 + f^2 = 2 & \Rightarrow f = 1 \end{array}$$

Hledané trojúhelníkové matice  $V, V^T$  jsou v níže uvedeném tvaru a správnost výpočtu je ověřena jejich zpětným vynásobením:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V \cdot V^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B_{\lambda=1}$$



Vzhledem k povaze prvků matice  $V^T$  je zřejmé, že nyní získáme rozklad na SOS ve tvaru součtu dvou čtverců polynomů. Provedme tedy finální dopočet a určíme matici  $V^T \cdot z^T$ .

$$V^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + xy + y^2 \\ 0 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

Rozklad zadaného polynomu  $f(x, y)$  na součet čtverců pro pevnou volbu  $\lambda = 1$  získáme jako součet druhých mocnin jednotlivých řádků výsledné matice součinu. Nulový člen zapisovat nebudeme. Na první pohled je zřejmé, že se jedná o jednodušší podobu rozkladu na SOS než pro předešlou volbu  $\lambda = 0$ .

$$f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)^2 + (y^2)^2$$

Provedeme-li obdobně jako v předešlém případě zkoušku zpětným umocněním v programu Wolfram Mathematica, získáme následující závěr.

```
In[5]= fxy = x^4 + 2*x^3*y + 3*x^2*y^2 + 2*x*y^3 + 2*y^4;
SOSfxy1 = (x^2 + x*y + y^2)^2 + (y^2)^2;
Expand[SOSfxy1]
TrueQ[fxy == Expand[SOSfxy1]]

Out[7]= x^4 + 2 x^3 y + 3 x^2 y^2 + 2 x y^3 + 2 y^4

Out[8]= True
```

Získaný rozklad na součet dvou čtverců polynomů tedy skutečně reprezentuje původně zadaný polynom a jedná se opět o důkaz, že polynom  $f(x, y)$  je pozitivně semidefinitní.

Zbývá určit rozklad na SOS pro pevnou volbu parametru  $\lambda = -1$ . Postup bude analogický. Matici  $B$  získáme pro hodnotu parametru  $\lambda = -1$  ve tvaru:

$$B_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Využijeme opět metodu s využitím Choleského dekompozice. Obdobně jako v předešlém případě musíme určit prvky  $a, b, c, d, e, f$  ze vztahu:

$$B_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + d^2 & bc + de \\ ac & bc + de & c^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} = V \cdot V^T$$

Výpočet nebudeme nyní podrobně rozepisovat a ponecháme jej na čtenáři. Postup je analogický s předcházejícím řešením v případě volby parametru  $\lambda = 1$ . Matice  $V$ ,  $V^T$  jsou v níže uvedeném tvaru; správnost výpočtu potvrzuje jejich vynásobení, kterým přejdeme zpět k původní matici  $B_{\lambda=-1}$ .

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad V^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V.V^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B_{\lambda=-1}$$

Dopočtěme na základě získaných matic výsledný rozklad polynomu  $f(x, y)$  a následně opět ověříme správnost s využitím počítačového softwaru.

$$V^T . z^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + xy - y^2 \\ 2xy + y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že výsledný rozklad bude mít následující podobu ve tvaru součtu dvou čtverců:

$$f(x, y) = (x^2 + xy - y^2)^2 + (2xy + y^2)^2$$

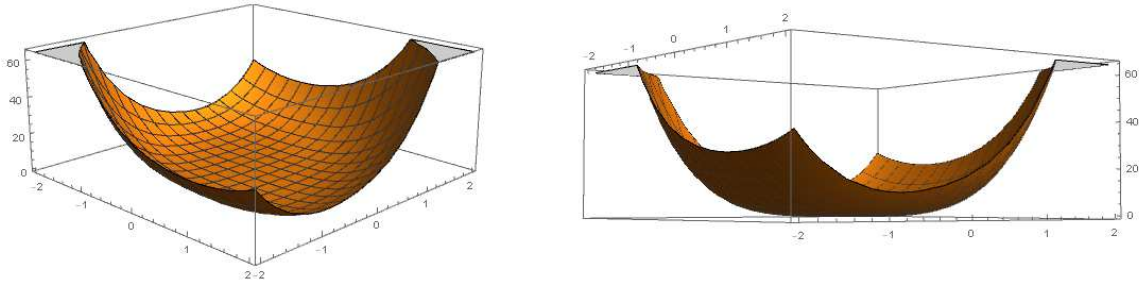
Ověřením v programu Wolfram Mathematica dojdeme k závěru, že uvedený rozklad opět představuje původně zadaný reálný polynom  $f(x, y)$ .

```
In[1]:= fxy = x^4 + 2*x^3*y + 3*x^2*y^2 + 2*x*y^3 + 2*y^4;
SOSfxy01 = (x^2 + x*y - y^2)^2 + (2*x*y + y^2)^2;
Expand[SOSfxy01]
TrueQ[fxy == Expand[SOSfxy01]]

Out[3]= x^4 + 2 x^3 y + 3 x^2 y^2 + 2 x y^3 + 2 y^4

Out[4]= True
```

Shrňme nyní poznatky, které aktuálně máme o zadaném polynomu  $f(x, y)$ . Víme, že tento polynom je pozitivně semidefinitní a podařilo se nám určit trojici konkrétních rozkladů daného polynomu na součet čtverců. Zároveň jsme zjistili, že v krajních bodech intervalu přípustných hodnot pro parametr  $\lambda \in \langle -1, 1 \rangle$  existují poměrně jednoduché rozklady ve tvaru součtu dvou čtverců polynomů, zatímco uvnitř intervalu jsme našli pro hodnotu  $\lambda = 0$  rozklad ve tvaru součtu tří čtverců. Než přejdeme k dalším výpočtům, sestrojme graf uvedeného polynomu  $f(x, y)$ , ze kterého bude též pozitivní semidefinitnost zřejmá.



Obrázek 28 - Graf pozitivně semidefinitního polynomu  $f(x,y)$  daného zadáním řešeného příkladu č. 4

### Řešení II (obecný rozklad):

Než přejdeme k dalšímu řešenému příkladu, pozastavme se nyní ještě u možnosti vyjádřit zadaný polynom  $f(x, y)$  v obecném tvaru součtu čtverců s parametrem  $\lambda$ , za který je možné následně dosazovat libovolné reálné hodnoty z vypočteného intervalu  $\lambda \in \langle -1, 1 \rangle$  a tím prakticky získat nekonečné množství různých vyjádření daného polynomu ve tvaru součtu čtverců reálných polynomů.

Vyjdeme z matice  $B$  v obecném tvaru:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 3-2\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Stejně jako jsme pracovali s maticí  $B$  po dosazení konkrétní hodnoty za parametr  $\lambda$ , potřebujeme nyní určit diagonální matici  $D$  a elementární transformační matici  $X^T$ .

$$\begin{aligned} (B|E) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-2\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-2\lambda & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2-\lambda^2 & -\lambda & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda & 1-\lambda & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2-\lambda^2 & -\lambda & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda^2 - \frac{1-\lambda}{2} & -\lambda + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) = (D|X^T) \end{aligned}$$

Získali jsme tedy matice  $D$ ,  $X^T$  a po transpozici též matici  $X$  v uvedených tvarech:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda^2-\frac{1-\lambda}{2} \end{pmatrix} \quad X^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\lambda+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda+\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočtěme nyní s využitím matematického softwaru Wolfram Mathematica inverzní matici  $X^{-1}$ , abychom mohli obdobně jako dříve využít rovnosti  $X^{-1} = V^T$  a dopočíst rozklad daného polynomu na SOS v obecném tvaru.

```
In[1]:= X = {{1, -1, -λ + (1/2)}, {0, 1, -1/2}, {0, 0, 1}}
AbsoluteTiming[MatrixForm[Inverse[X]]]

Out[1]:= {{1, -1, 1/2 - λ}, {0, 1, -1/2}, {0, 0, 1}}

Out[2]:= {0.0000765, {{1 1 λ}, {0 1 1/2}, {0 0 1}}}
```

V čase 0,0000765 sekundy vydal počítač hledanou inverzní matici v uvedeném tvaru:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přejděme nyní k závěrečné fázi celého výpočtu a využijme finální fáze algoritmu uvedeného v kapitole 3.2. Hledané polynomy výsledného rozkladu na součet čtverců

získáme ze vztahu  $g_i := \sqrt{d_i} \sum_{j=1}^k v_{j,i} x^{\beta_j}$ . Víme, že množina  $\Lambda_m$  se skládá z prvků  $\beta_1 = (2, 0)$ ,

$\beta_2 = (1, 1)$  a  $\beta_3 = (0, 2)$ , a diagonální matice  $D$  obsahuje na diagonále prvky:

$$D = \text{diag} \left( 1, 2-2\lambda, 2-\lambda^2-\frac{1-\lambda}{2} \right)$$

Jednotlivé polynomy  $g_i$  hledaného rozkladu polynomu  $f(x, y)$  na SOS získáme ve tvaru:

$$g_1 = 1 \cdot (x^2 + xy + \lambda y^2) = x^2 + xy + \lambda y^2$$

$$g_2 = \sqrt{2-2\lambda} \cdot \left( xy + \frac{1}{2} y^2 \right)$$

$$g_3 = \sqrt{2-\lambda^2 - \frac{1-\lambda}{2}} \cdot (y^2)$$

Obecně tedy lze zapsat původní polynom  $f(x, y)$  ve tvaru součtu čtverců  $g_i$  následovně:

$$f(x, y) = (x^2 + xy + \lambda y^2)^2 + \left[ \sqrt{2-2\lambda} \cdot \left( xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \right]^2 + \left[ \sqrt{2-\lambda^2 - \frac{1-\lambda}{2}} \cdot (y^2) \right]^2$$

Dosazováním libovolných reálných hodnot za parametr  $\lambda \in \langle -1, 1 \rangle$  je možné určit všechny rozklady zadaného polynomu na součet čtverců polynomů. Pokud bychom kupříkladu dosadili krajní celočíselné hodnoty intervalu  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = -1$ , získáme již známá vyjádření:

$$\lambda = 1: \quad f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)^2 + (y^2)^2$$

$$\lambda = -1: \quad f(x, y) = (x^2 + xy - y^2)^2 + (2xy + y^2)^2$$

Zajímavá okolnost nastane po dosazení hodnoty  $\lambda = 0$  do vypočteného obecného rozkladu.

Po dopočtení totiž získáme konkrétní rozklad polynomu  $f(x, y)$  na SOS ve tvaru:

$$\lambda = 0: \quad f(x, y) = (x^2 + xy)^2 + \left( xy\sqrt{2} + \frac{y^2\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left( y^2\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2$$

Je zřejmé, že se na první pohled jedná o podobné, nicméně nikoliv shodné, vyjádření jako u prvního z výpočtů. Panika ovšem není na místě – pokud provedeme zpětné umocnění, dojdeme k závěru, že i tento rozklad reprezentuje původně zadaný polynom. Výpočet a ověření v programu počítačové algebry Wolfram Mathematica je provedeno níže, čímž uzavírá definitivně řešený příklad 4.

```
In[1]= fxy = x^4 + 2*x^3*y + 3*x^2*y^2 + 2*x*y^3 + 2*y^4;
SOSfxy02 = (x^2 + x*y)^2 + (x*y*Sqrt[2] + (y^2*Sqrt[2])/2)^2 + (y^2*Sqrt[3/2])^2;
Expand[SOSfxy02]
TrueQ[fxy == Expand[SOSfxy02]]

Out[3]= x^4 + 2 x^3 y + 3 x^2 y^2 + 2 x y^3 + 2 y^4

Out[4]= True
```

## 5.5 Řešený příklad 5 – důkaz nerovnosti v oboru $\mathbb{R}$ a vhodné užití rozkladu na SOS

Dokažte, že pro libovolnou volbu  $x, y \in \mathbb{R}$  je uvedený polynom  $f(x, y)$  nezáporný:

$$f(x, y) = x^6 + y^6 + 2x^5y + 5x^2y^4 + 4xy^5 \geq 0$$

**Řešení:**

Úkolem je nyní dokázat, že reálný polynom  $f$  ve dvou neurčitých  $x, y$  sudého stupně 6 je nezáporný, tedy v dříve užívané terminologii – pozitivně semidefinitní. Vhodnou metodou důkazu je na tomto místě rozklad daného polynomu  $f(x, y)$  na součet čtverců polynomů.

Vzhledem k sudému stupni polynomu  $f(x, y)$  má smysl se pokusit rozklad na SOS určit, nicméně výpočet bude náročnější s ohledem na čtveřici monomů  $x^3, x^2y, xy^2, y^3$ , které budou zřejmě vystupovat ve výsledném rozkladu, jak bychom se mohli přesvědčit v programu MATLAB. Nutno tedy očekávat, že Gramova matice  $B$  bude typu  $4 \times 4$ . Důkaz ovšem bude proveden už ve chvíli, kdy nalezneme jeden konkrétní rozklad. V průběhu výpočtu tedy bude možné si práci jistým způsobem usnadnit případnou vhodnou volbou parametru či parametrů.

Zaměříme se nejprve na dvě možnosti, které nám dává matematický software MATLAB. Pokud budeme požadovat obdobně jako v předešlých případech matici s celočíselnými prvky, pak program vydá po zadání příslušného polynomu v odpovídající syntaxi matici  $Q$  a vektor monomů  $z$  splňující vztah  $z.Q.z^T = D.f(x, y)$  v následující podobě:

```
>> syms x y;  
>> f=x^6+y^6+2*x^5*y+5*x^2*y^4+4*x*y^5;  
>> [Q,Z,D]=findsos(f,'rational')
```

Q =	Z =	D =			
6	12	0	-3	y^3	6
12	30	3	-7	x*y^2	
0	3	14	6	x^2*y	
-3	-7	6	6	x^3	

Získaný výsledek nám říká, že jsme sice získali vyjádření Gramovy matice s celočíselnými prvky, ale za cenu přechodu od původního polynomu  $f$  k polynomu  $6f$  a jemu odpovídající celočíselné matici  $6Q$ , jak je zřejmé z uvedené hodnoty  $D = 6$ .

Ponecháme-li vyjádření matice  $Q$  a řazení monomů ve vektoru  $z$  v uvedené podobě, pak musí platit vztah:

$$(y^3 + xy^2 + x^2y + x^3) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 & -3 \\ 12 & 30 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & 14 & 6 \\ -3 & -7 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^3 \\ xy^2 \\ x^2y \\ x^3 \end{pmatrix} = 6 \cdot (x^6 + y^6 + 2x^5y + 5x^2y^4 + 4xy^5)$$

Ověření správnosti uvedeného vztahu ponecháme na čtenáři. Upozorníme ovšem na tomto místě na důležitou okolnost vztahující se k šestinásobkům polynomu  $f$  i matice  $Q$ , které nyní vstoupily do výpočtu. Je nutné si uvědomit, že provádíme-li výpočty s výše uvedenou maticí  $Q$  při hodnotě  $D = 6$ , tak po celý výpočet pracujeme s šestinásobkem  $6Q$ , který se musí odrazit i ve výsledné podobě rozkladu daného polynomu  $f(x, y)$  na součet čtverců. Je-li požadováno explicitní vyjádření jistého polynomu  $f$  ve tvaru součtu čtverců, musíme do výsledného rozkladu pro matici  $6Q$  zpětně „vrátit“  $\frac{1}{6}$ , čímž přejdeme zpět od matice  $6Q$  a polynomu  $6f$  k matici  $Q$  a polynomu  $f$ . Demonstrujme uvedenou skutečnost na výše vypočtené matici v programu Wolfram Mathematica s využitím Choleského dekompozice a určíme jeden možný rozklad na SOS zadaného polynomu  $f(x, y)$ .

```
In[28]:= Q = {{6, 12, 0, -3}, {12, 30, 3, -7}, {0, 3, 14, 6}, {-3, -7, 6, 6}};
Vt = CholeskyDecomposition[Q];
zt = {{y^3}, {x*y^2}, {x^2*y}, {x^3}};
SOS6Q = Vt.zt;
MatrixForm[Vt]
MatrixForm[SOS6Q]
```

$$V^T = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{13}{5\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\frac{143}{6}}}{5} \end{pmatrix} \quad V^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} x^3 + 2\sqrt{6} xy^2 + \sqrt{6} y^3 \\ -\frac{x^3}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{3}{2}} x^2y + \sqrt{6} xy^2 \\ \frac{13x^3}{5\sqrt{2}} + \frac{5x^2y}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{5} \sqrt{\frac{143}{6}} x^3 \end{pmatrix}$$

Program vydal po vyvolání příkazu *CholeskyDecomposition* matici  $V^T$  a následně jsme nechali vypočíst součin  $V^T \cdot z^T$ . Pokud bychom postupovali jako v předešlých případech, kde se při výpočtech obvykle pracovalo s hodnotou  $D = 1$  a „čistou“ maticí  $Q$ , získali

bychom rozklad jako součet druhých mocnin jednotlivých řádků matice součinu  $V^T \cdot z^T$ . Nyní takto ovšem získáme rozklad polynomu  $6f(x, y)$ , jak je ukázáno níže s využitím příkazu *Expand*.

In[34]=

$$\text{Expand}\left[\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}x^3 + 2\sqrt{6}xy^2 + \sqrt{6}y^3\right)^2 + \left(-\frac{x^3}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x^2y + \sqrt{6}xy^2\right)^2 + \left(\frac{13x^3}{5\sqrt{2}} + \frac{5x^2y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{143}{6}}x^3\right)^2\right]$$

Out[34]=  $6x^6 + 12x^5y + 30x^2y^4 + 24xy^5 + 6y^6$

Pokud požadujeme vyjádření samotného polynomu  $f(x, y)$  ve tvaru součtu čtverců, je nutné každý ze čtverců vydělit hodnotou 6, resp. vynásobit zlomkem  $\frac{1}{6}$ , kterou ovšem „vnoříme“ pod druhou mocninu. Výsledný rozklad tak může mít kupříkladu podobu:

$$f(x, y) = \left[ \sqrt{\frac{1}{6}} \left( -\sqrt{\frac{3}{2}}x^3 + 2\sqrt{6}xy^2 + \sqrt{6}y^3 \right) \right]^2 + \left[ \sqrt{\frac{1}{6}} \left( -\frac{x^3}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x^2y + \sqrt{6}xy^2 \right) \right]^2 + \left[ \sqrt{\frac{1}{6}} \left( \frac{13x^3}{5\sqrt{2}} + \frac{5x^2y}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 + \left[ \sqrt{\frac{1}{6}} \left( \frac{1}{5}\sqrt{\frac{143}{6}}x^3 \right) \right]^2$$

Získali jsme poměrně komplikované vyjádření zadaného polynomu  $f(x, y)$  ve tvaru součtu čtyř čtverců reálných polynomů, které je dokladem, že je tento polynom pozitivně semidefinitní (nezáporný), což bylo požadováno dokázat zadáním příkladu. Než přejdeme k druhé z možností, kterou nám dává program MATLAB v součinnosti s balíčky SeDuMi a SOSTOOLS, ověříme pomocí počítače obdobně jako dříve správnost výpočtu.

In[65]=

```
fxy = x^6 + y^6 + 2*x^5*y + 5*x^2*y^4 + 4*x*y^5;
```

```
SOSfxy1 =
```

$$\text{Expand}\left[\left(\text{Sqrt}[1/6]\right) * \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}x^3 + 2\sqrt{6}xy^2 + \sqrt{6}y^3\right)\right]^2 + \left(\text{Sqrt}[1/6]\right) * \left(-\frac{x^3}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x^2y + \sqrt{6}xy^2\right)\right]^2 + \left(\text{Sqrt}[1/6]\right) * \left(\frac{13x^3}{5\sqrt{2}} + \frac{5x^2y}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 + \left(\text{Sqrt}[1/6]\right) * \left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{143}{6}}x^3\right)\right]^2$$

```
TrueQ[fxy == Expand[SOSfxy1]]
```

Out[66]=  $x^6 + 2x^5y + 5x^2y^4 + 4xy^5 + y^6$

Out[67]= True



Druhá z možností, která se při určování rozkladu jistého reálného polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů s využitím matematického softwaru MATLAB nabízí, je nepožadovat striktně matici s celočíselnými prvky, jak je pro tento konkrétní příklad ukázáno níže:

```
>> syms x y;
>> f=x^6+y^6+2*x^5*y+5*x^2*y^4+4*x*y^5;
>> [Q,Z]=findsos(f,'rational')
```

$Q =$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1/2 \\ 2 & 5 & 1/2 & -7/6 \\ 0 & 1/2 & 7/3 & 1 \\ -1/2 & -7/6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$Z =$ $\begin{bmatrix} y^3 \\ x*y^2 \\ x^2*y \\ x^3 \end{bmatrix}$
--	--

Výhodou tohoto přístupu je, že program vždy vydá Gramovu matici  $Q$  pro hodnotu  $D = 1$ , kterou ani při tomto zadání nevypisuje a nepracujeme tedy s žádnými  $n$ -násobky matice  $Q$  ani zadaného polynomu  $f$ . Nevýhodou je, že musíme očekávat ve vypočtené matici hodnoty z oboru racionálních čísel (zlomky), se kterými pak musíme realizovat zbývající kroky výpočtu. Pokud bychom chtěli porovnat časovou náročnost výpočtu matice  $Q$  s prvky z oboru celých čísel s výpočtem výše uvedené matice s prvky z oboru racionálních čísel; program MATLAB v obou případech shodně uvádí čas výpočtu 0,1 sekundy.

Ponechme nyní matici  $Q$  ve stávajícím tvaru s racionálními prvky a určíme s využitím počítače další podobu možného rozkladu daného polynomu  $f(x, y)$  na SOS. Pozorný čtenář by pochopitelně mohl namítnout, že je možné matici vynásobit hodnotou 6, čímž bychom se zbavili všech zlomků. Pak bychom se ovšem vrátili k případu matice  $6Q$ , polynomu  $6f$  a celkově k předešlému řešení.

Využijeme opět softwaru Wolfram Mathematica a Choleského dekompozici. Výpočtem, který proběhl v čase 0,0000504 sekundy, jsme získali matice ve tvaru:

$$V^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2\sqrt{3}} & \frac{13}{10\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{143}}{30} \end{pmatrix} \quad V^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2\sqrt{3}} & \frac{13}{10\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{143}}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^3 \\ xy^2 \\ x^2y \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x^3}{2} + 2xy^2 + y^3 \\ -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2y}{2} + xy^2 \\ \frac{13x^3}{10\sqrt{3}} + \frac{5x^2y}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{143}x^3}{30} \end{pmatrix}$$

Hledaný rozklad polynomu  $f(x, y)$  tedy získáme ve tvaru součtu čtyř čtverců:

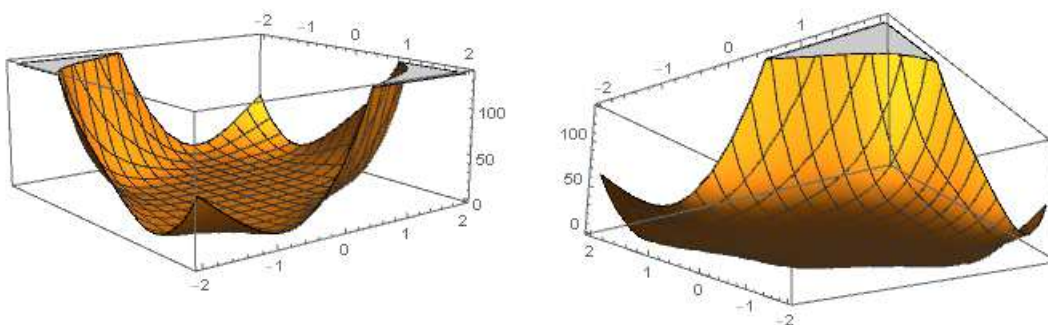
$$f(x, y) = \left(-\frac{x^3}{2} + 2xy^2 + y^3\right)^2 + \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2y}{2} + xy^2\right)^2 + \left(\frac{13x^3}{10\sqrt{3}} + \frac{5x^2y}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{143}x^3}{30}\right)^2$$

Existence druhého rozkladu polynomu  $f(x, y)$  je opět dokladem, že je tento polynom pozitivně semidefinitní – nezáporný.

```
In[20]= AbsoluteTiming[Expand[( $-\frac{x^3}{2} + 2xy^2 + y^3$ )^2 + ( $-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2y}{2} + xy^2$ )^2 + ( $\frac{13x^3}{10\sqrt{3}} + \frac{5x^2y}{2\sqrt{3}}$ )^2 + ( $\frac{\sqrt{143}x^3}{30}$ )^2]]
```

```
Out[20]= {0.0006023,  $x^6 + 2x^5y + 5x^2y^4 + 4xy^5 + y^6$ }
```

Program Wolfram Mathematica vydal v čase 0,0006023 sekundy po aktivaci příkazu *Expand* v příslušné syntaxi umocněné vyjádření získaného rozkladu na SOS, čímž jsme se vrátili k původnímu polynomu  $f(x, y)$  a ověřili jsme tak správnost výpočtu. Než přejdeme k ručnímu výpočtu Gramovy matice, abychom získali představu o (časové) náročnosti klasického přístupu a mohli jsme oba přístupy, tj. s/bez počítače, porovnat, sestrojme nejprve graf zadaného polynomu  $f(x, y)$ , který je stejně jako nalezené rozklady dokladem nezápornosti (pozitivní semidefinitnosti).



Obrázek 29 - Graf nezáporného (pozitivně semidefinitního) polynomu  $f(x, y)$  z řešeného příkladu 5

Vypočteme nyní prostřednictvím klasických postupů Gramovu matici  $B$  (dodržíme tradiční značení oproti softwaru MATLAB) daného reálného polynomu  $f(x, y)$ . Monomy vyskytující se ve výsledném rozkladu jsou po řadě  $x^3$ ,  $x^2y$ ,  $xy^2$ ,  $y^3$ . Množina  $\Lambda_m$  bude tedy obsahovat prvky  $\beta_1 = (3, 0)$ ,  $\beta_2 = (2, 1)$ ,  $\beta_3 = (1, 2)$ ,  $\beta_4 = (0, 3)$ . Výpočet prvků matice  $B$  bude následující (pro lepší přehlednost výpočtu nezapisujeme všechny rovnosti symetrických prvků; všechny prvky uvedeme až v zápisu výsledné matice).

$$\begin{aligned}
b_{11} : \beta_1 + \beta_1 &= (3,0) + (3,0) = (6,0) && \Rightarrow b_{11} = 1 \\
b_{12} : \beta_1 + \beta_2 &= \beta_2 + \beta_1 = (3,0) + (2,1) = (2,1) + (3,0) = (5,1) && \Rightarrow 2b_{12} = 2; b_{12} = 1 \\
b_{13} : \beta_1 + \beta_3 &= \beta_3 + \beta_1 = \beta_2 + \beta_2 = (3,0) + (1,2) = \\
&= (1,2) + (3,0) = (2,1) + (2,1) = (4,2) && \Rightarrow 2b_{13} + b_{22} = 0 \\
b_{14} : \beta_1 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_1 = \beta_2 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_2 = (3,0) + (0,3) = \\
&= (0,3) + (3,0) = (2,1) + (1,2) = (1,2) + (2,1) = (3,3) && \Rightarrow 2b_{14} + 2b_{23} = 0 \\
b_{22} : \beta_2 + \beta_2 &= \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1 = (2,1) + (2,1) = \\
&= (3,0) + (1,2) = (1,2) + (3,0) = (4,2) && \Rightarrow b_{22} + 2b_{13} = 0 \\
b_{23} : \beta_2 + \beta_3 &= \beta_3 + \beta_2 = \beta_1 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_1 = (2,1) + (1,2) = \\
&= (1,2) + (2,1) = (3,0) + (0,3) = (0,3) + (3,0) = (3,3) && \Rightarrow 2b_{23} + 2b_{14} = 0 \\
b_{24} : \beta_2 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_2 = \beta_3 + \beta_3 = (2,1) + (0,3) = \\
&= (0,3) + (2,1) = (1,2) + (1,2) = (2,4) && \Rightarrow 2b_{24} + b_{33} = 5 \\
b_{33} : \beta_3 + \beta_3 &= \beta_2 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_2 = (1,2) + (1,2) = \\
&= (2,1) + (0,3) + (0,3) + (2,1) = (2,4) && \Rightarrow b_{33} + 2b_{24} = 5 \\
b_{34} : \beta_3 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_3 = (1,2) + (0,3) = (0,3) + (1,2) = (1,5) && \Rightarrow 2b_{34} = 4; b_{34} = 2 \\
b_{44} : \beta_4 + \beta_4 &= (0,3) + (0,3) = (0,6) && \Rightarrow b_{44} = 1
\end{aligned}$$

Povšimněme si, že nastala okolnost s nutností zavést tři reálné parametry. Svázány jsou dvojice prvků  $b_{13}$  a  $b_{22}$ ,  $b_{14}$  a  $b_{23}$ ,  $b_{24}$  a  $b_{33}$ .

Zavedeme tedy parametry  $b_{13} = \lambda$ ,  $b_{14} = \omega$ ,  $b_{24} = \sigma$ , čímž po dopočtení získáme hledanou Gramovu matici  $B$  ve tvaru:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \omega \\ 1 & -2\lambda & -\omega & \sigma \\ \lambda & -\omega & 5-2\sigma & 2 \\ \omega & \sigma & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Abychom mohli pokračovat ve výpočtu rozkladu zadaného polynomu  $f(x, y)$  na součet čtverců, musíme určit takovou konkrétní konfiguraci zavedených parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ , pro kterou bude matice  $B$  pozitivně semidefinitní. Musíme tedy nyní vypočítat charakteristický polynom  $F(y)$  této matice a následně přejít k polynomu  $F(-y)$ , ve kterém nesmí nastat znaménkové změny – bude tedy nutné vyřešit soustavu nerovnic o třech neznámých, čímž získáme přípustné hodnoty parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ . Vzhledem k tomu, že se nejedná o triviální úkol, přenecháme výpočet matematickému softwaru, který doprovodíme

komentářem. Charakteristický polynom  $F(y)$  bude ve tvaru (jedná se o kopii výstupu vydaného softwarem, aby se předešlo chybě při přepisování jednotlivých členů):

$$F(y) = -1 + y^4 - 2\lambda + 2\lambda^3 + 2\sigma - 5\sigma^2 + \lambda^2\sigma^2 + 2\sigma^3 + y^3(-7 + 2\lambda + 2\sigma) - 2\lambda\omega - 8\lambda^2\omega + 6\sigma\omega - 4\sigma^2\omega + 3\omega^2 + 10\lambda\omega^2 - 2\lambda\sigma\omega^2 + \omega^4 + y^2(6 - 14\lambda - \lambda^2 - 4\sigma + 4\lambda\sigma - \sigma^2 - 2\omega^2) + y(5 + 14\lambda + \lambda^2 - 2\lambda^3 - 8\lambda\sigma + 6\sigma^2 - 2\sigma^3 - 2\lambda\omega + 2\sigma\omega + 7\omega^2 - 2\lambda\omega^2 - 2\sigma\omega^2)$$

Počítač uvedený výsledek vydal v čase 0,0008293 sekundy. Nyní přejdeme pomocí příkazu *ReplaceAll* k polynomu  $F(-y)$ , který je ve tvaru:

$$F(-y) = -1 + y^4 - 2\lambda + 2\lambda^3 + y^3(7 - 2\lambda - 2\sigma) + 2\sigma - 5\sigma^2 + \lambda^2\sigma^2 + 2\sigma^3 - 2\lambda\omega - 8\lambda^2\omega + 6\sigma\omega - 4\sigma^2\omega + 3\omega^2 + 10\lambda\omega^2 - 2\lambda\sigma\omega^2 + \omega^4 + y^2(6 - 14\lambda - \lambda^2 - 4\sigma + 4\lambda\sigma - \sigma^2 - 2\omega^2) + y(-5 - 14\lambda - \lambda^2 + 2\lambda^3 + 8\lambda\sigma - 6\sigma^2 + 2\sigma^3 + 2\lambda\omega - 2\sigma\omega - 7\omega^2 + 2\lambda\omega^2 + 2\sigma\omega^2)$$

V uvedeném polynomu  $F(-y)$  nesmí dojít ke znaménkovým změnám. Musí tedy současně platit uvedené podmínky  $p_1$  až  $p_4$ .

$$p_1: 7 - 2\lambda - 2\sigma \geq 0$$

$$p_2: 6 - 14\lambda - \lambda^2 - 4\sigma + 4\lambda\sigma - \sigma^2 - 2\omega^2 \geq 0$$

$$p_3: -5 - 14\lambda - \lambda^2 + 2\lambda^3 + 8\lambda\sigma - 6\sigma^2 + 2\sigma^3 + 2\lambda\omega - 2\sigma\omega - 7\omega^2 + 2\lambda\omega^2 + 2\sigma\omega^2 \geq 0$$

$$p_4: -1 - 2\lambda + 2\lambda^3 + 2\sigma - 5\sigma^2 + \lambda^2\sigma^2 + 2\sigma^3 - 2\lambda\omega - 8\lambda^2\omega + 6\sigma\omega - 4\sigma^2\omega + 3\omega^2 + 10\lambda\omega^2 - 2\lambda\sigma\omega^2 + \omega^4 \geq 0$$

Z uvedených podmínek je zřejmé, že výpočet převyšuje lidské síly. Výpočet přenecháme počítačovému softwaru, přičemž se pokusíme pomocí příkazu *FindInstance* v uvedené syntaxi určit některé celočíselné konfigurace parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ .

```
In[25]= AbsoluteTiming[FindInstance[{7 - 2 λ - 2 σ ≥ 0 && 6 - 14 λ - λ^2 - 4 σ + 4 λ σ - σ^2 - 2 ω^2 ≥ 0 &&
- 5 - 14 λ - λ^2 + 2 λ^3 + 8 λ σ - 6 σ^2 + 2 σ^3 + 2 λ ω - 2 σ ω - 7 ω^2 + 2 λ ω^2 + 2 σ ω^2 ≥ 0 &&
- 1 - 2 λ + 2 λ^3 + 2 σ - 5 σ^2 + λ^2 σ^2 + 2 σ^3 - 2 λ ω - 8 λ^2 ω + 6 σ ω - 4 σ^2 ω + 3 ω^2 + 10 λ ω^2 - 2 λ σ ω^2 + ω^4 ≥ 0}, {λ, ω, σ}, Integers, 5]]
Out[25]= {11.3672, {{λ → -2, ω → -1, σ → -1}}}
```

Počítačový software vydal v čase 11,3672 sekundy jedinou celočíselnou trojici, pro kterou je matice  $B$  pozitivně semidefinitní. Jedná se o hodnoty  $\lambda = -2$ ,  $\omega = -1$ ,  $\sigma = -1$ . Výsledná matice  $B$  bude mít po dosazení uvedených hodnot a dopočtení příslušných prvků tvar:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Než budeme pokračovat ve výpočtu rozkladu na SOS ověříme, že je výše uvedená matice  $B$  skutečně pozitivně semidefinitní. Víme, že jistá čtvercová, symetrická matice  $n$ -tého řádu je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná. Nechme tedy počítačový software Wolfram Mathematica vypočítat vlastní čísla matice  $B$  prostřednictvím příkazu *EigenValues*,

```
In[14]= B = {{1, 1, -2, -1}, {1, 4, 1, -1}, {2, 1, 7, 2}, {-1, -1, 2, 1}};
N[Eigenvalues[B], 5]
Out[15]= {7.0791, 4.8785, 1.0424, 0}
```

Vlastní čísla vypočtena s přesností na čtyři desetinná místa jsou uvedena výše v závorce. Je zřejmé, že všechny hodnoty jsou skutečně nezáporné (byť je jedno z vlastních čísel rovno nule) a matice je tedy pozitivně semidefinitní. Vraťme se nyní k ručnímu způsobu výpočtu a převedme s využitím symetrických úprav matici  $B$  na diagonální matici  $D$  a následně využijme vztahu  $D = X^T B X$ .

$$(B|E) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (D|X^T)$$

Symetrickými úpravami jsme dospěli k matici  $D$  o hodnotě  $r(D) = 2$ , z čehož lze usoudit, že výsledný rozklad polynomu  $f(x, y)$  bude ve tvaru součtu dvou čtverců, a k elementární transformační matici  $X^T$ , kdy transpozicí získáme i matici  $X$ .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abychom mohli využít vztahu  $U = \sqrt{D}.X^{-1} = \sqrt{D}.V^T$ , potřebujeme vypočíst inverzní matici  $X^{-1}$ . To by bylo možné pomocí Gaussovy eliminační metody, nicméně přenechme tuto proceduru matematickému softwaru. Ve výpočetním čase 0,0005272 sekundy po spuštění příkazu *Inverse* vydal program Wolfram Mathematica matici  $X^{-1}$  ve tvaru:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici  $U$  tedy vypočteme následovně:

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \sqrt{D}.X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledný rozklad polynomu  $f(x, y)$  na součet čtverců polynomů určíme ze součinu vypočtené matice  $U$  se sloupcovým vektorem monomů  $z^T$ . Vzhledem k jednoduchosti výpočtu není aktuálně třeba ani zapojovat počítačový software.

$$U.z^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2y \\ xy^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3 \\ \sqrt{3}x^2y + \sqrt{3}xy^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zadaný polynom  $f(x, y)$  je tedy možné vyjádřit jako součet dvou čtverců ve tvaru:

$$f(x, y) = (x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3)^2 + (\sqrt{3}x^2y + \sqrt{3}xy^2)^2$$

Je zřejmé, že se jedná o jednodušší vyjádření rozkladu na SOS než v předchozích dvou případech s využitím programu MATLAB při určování Gramovy matice, nicméně k tomuto vyjádření vedla velmi komplikovaná cesta a některé výpočty již nebylo možné vypočítat pouze lidskými postupy. Typickým příkladem je určování konkrétní celočíselné

konfigurace parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ , kdy i počítač potřeboval na výpočet více než 11 sekund. Z lidského pohledu se sice jedná pouze o krátký časový úsek, pokud ovšem vezmeme v potaz, že výpočet provádí specializovaný matematický software, pak je otázkou, kolik času by bylo třeba vynaložit k vypočtení uvedené trojice lidskými postupy. Zároveň oněch 11 sekund poukazuje na omezené možnosti běžné školní techniky, kdy se stále pohybujeme pouze u polynomů dvou neurčitých, nicméně už zde bylo nutné vynaložit výrazně delší časový úsek (v porovnání s rychlostí předešlých výpočtů) na počítačový výpočet dílčího problému. Zařaďme závěrem řešeného příkladu 5 opět ověření v programu Wolfram Mathematica, že i poslední z nalezených rozkladů na součet čtverců reprezentuje původní polynom  $f(x, y)$ .

```
In[71]=
fxy = x^6 + y^6 + 2*x^5*y + 5*x^2*y^4 + 4*x*y^5;
SOSf = (x^3 + x^2*y - 2*x*y^2 - y^3)^2 + (sqrt(3)*x^2*y + sqrt(3)*x*y^2)^2;
Expand[SOSf]
TrueQ[fxy == Expand[SOSf]]

Out[73]= x^6 + 2 x^5 y + 5 x^2 y^4 + 4 x y^5 + y^6

Out[74]= True
```

Je zřejmé, že se po umocnění jedná o původně zadaný polynom  $f$ , což potvrdil i počítačový software. Zároveň jsme rozkladem podali třetí důkaz nezápornosti tohoto polynomu.

## 5.6 Řešený příklad 6 – Gramova matice typu $5 \times 5$ v rozkladu polynomu na SOS

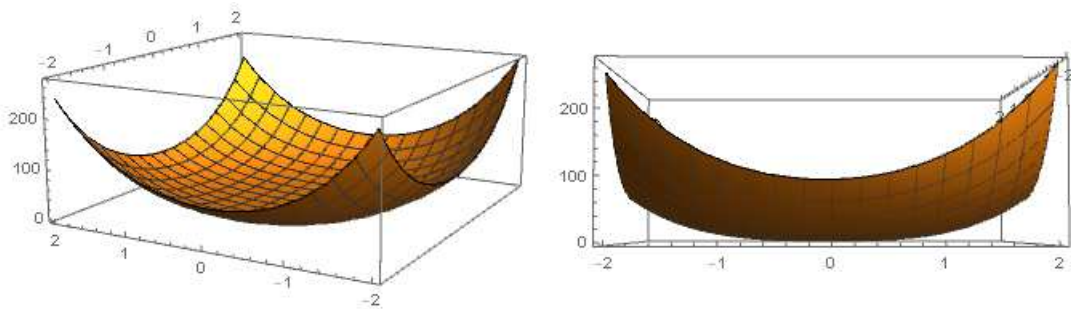
Je dán reálný polynom  $p$  dvou neurčitých  $x, y \in \mathbb{R}$  v níže uvedeném tvaru. Rozhodněte o existenci rozkladu polynomu  $p$  na součet čtverců a určete alespoň jeden z nich.

$$p(x, y) = 3x^4 + 3y^4 - 2y^3 + 6x^2y^2 + 6x^2 + 8y^2 - 2xy$$

### Řešení I (klasický přístup):

Zadáním řešeného příkladu 6 je dán reálný polynom dvou neurčitých sudého stupně 4. Není ovšem na místě činit ukvapené závěry, že výpočet rozkladu na SOS bude jednoduchý a rychlý. Řešení tohoto problému provedeme dvojím způsobem. Nejprve budeme na řešení nahlížet klasickými metodami a budeme se snažit o ruční výpočet až do případné fáze, kdy by již výpočet lidskými postupy nebyl možný (tzn. realizace by byla velmi rozsáhlá a časově náročná). Druhá možnost řešení bude věnována čistě počítačovému softwaru, kdy pro porovnání uvedeme na závěr celkový výpočetní čas, který byl pro vyřešení daného

problému potřebný. Než ovšem přistoupíme k výpočtům konkrétních rozkladů daného reálného polynomu  $p(x, y)$  na součet čtverců, sestrojme nejprve graf tohoto polynomu.



Obrázek 30 - Graf reálného polynomu  $p$  dvou neurčitých  $x, y$  ze zadání řešeného příkladu 6

Obrázek 30 je dokladem, že zadaný polynom  $p(x, y)$  je pozitivně semidefinitní, což je sice nutná, ale nikoliv postačující, podmínka pro existenci rozkladu polynomu na součet čtverců. Konkrétně lze připomenout Motzkinův polynom, který je pozitivně semidefinitní, ale není možné jej vyjádřit ve tvaru součtu čtverců (více viz kap. 1.3). Přejdeme nyní k ověření existence rozkladů daného polynomu  $p$  na součet čtverců a jejich výpočtu.

Uvedený tvar polynomu  $p(x, y)$  nám dává informaci, že výsledný rozklad na SOS se bude zřejmě skládat z monomů  $x^2, y^2, xy, x, y$ . Množina  $\Lambda_m$  bude tedy obsahovat pětici prvků po řadě  $\beta_1 = (2, 0), \beta_2 = (0, 2), \beta_3 = (1, 1), \beta_4 = (1, 0), \beta_5 = (0, 1)$ . Vzhledem k této skutečnosti bude hledaná čtvercová Gramova matice  $B$  typu  $5 \times 5$  v níže uvedeném obecném tvaru a ve výsledném vyjádření lze opět očekávat existenci jednoho nebo více reálných parametrů.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix}$$

Výpočet jednotlivých prvků je následovný, přičemž opět využíváme symetrie matice  $B$  a proto nezapisujeme ve výpočtu všechny odpovídající si dvojice symetrických prvků. Připomeňme, že hodnoty jednotlivých prvků matice představují koeficienty u příslušných mocnin monomů polynomu  $p$ , které odpovídají získaným součtům prvků  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ .



$$\begin{array}{ll}
b_{11} : \beta_1 + \beta_1 = (2,0) + (2,0) = (4,0) & \Rightarrow b_{11} = 3 \\
b_{12} : \beta_1 + \beta_2 = \beta_2 + \beta_1 = \beta_3 + \beta_3 = (2,0) + (0,2) = (0,2) + (2,0) = (1,1) + (1,1) = (2,2) & \Rightarrow 2b_{12} + b_{33} = 6 \\
b_{13} : \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1 = (2,0) + (1,1) = (1,1) + (2,0) = (3,1) & \Rightarrow 2b_{13} = 0; b_{13} = 0 \\
b_{14} : \beta_1 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_1 = (2,0) + (1,0) = (1,0) + (2,0) = (3,0) & \Rightarrow 2b_{14} = 0; b_{14} = 0 \\
b_{15} : \beta_1 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_1 = \beta_3 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_3 = (2,0) + (0,1) = (0,1) + (2,0) = \\
& = (1,1) + (1,0) = (0,1) + (1,1) = (2,1) & \Rightarrow 2b_{15} + 2b_{34} = 0; b_{15} + b_{34} = 0 \\
b_{22} : \beta_2 + \beta_2 = (0,2) + (0,2) = (0,4) & \Rightarrow b_{22} = 3 \\
b_{23} : \beta_2 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_2 = (0,2) + (1,1) = (1,1) + (0,2) = (1,3) & \Rightarrow 2b_{23} = 0; b_{23} = 0 \\
b_{24} : \beta_2 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_2 = \beta_3 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_3 = (0,2) + (1,0) = (1,0) + (0,2) = \\
& = (1,1) + (0,1) = (0,1) + (1,1) = (1,2) & \Rightarrow 2b_{24} + 2b_{35} = 0; b_{24} + b_{35} = 0 \\
b_{25} : \beta_2 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_2 = (0,2) + (0,1) = (0,1) + (0,2) = (0,3) & \Rightarrow 2b_{25} = -2; b_{25} = -1 \\
b_{33} : \beta_3 + \beta_3 = \beta_1 + \beta_2 = \beta_2 + \beta_1 = (1,1) + (1,1) = (2,0) + (0,2) = (0,2) + (2,0) = (2,2) & \Rightarrow b_{33} + 2b_{12} = 6 \\
b_{34} : \beta_3 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_3 = \beta_1 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_1 = (1,1) + (1,0) = (0,1) + (1,1) = \\
& = (2,0) + (0,1) = (0,1) + (2,0) = (2,1) & \Rightarrow 2b_{34} + 2b_{15} = 0; b_{34} + b_{15} = 0 \\
b_{35} : \beta_3 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_3 = \beta_2 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_2 = (1,1) + (0,1) = (0,1) + (1,1) = \\
& = (0,2) + (1,0) = (1,0) + (0,2) = (1,2) & \Rightarrow 2b_{35} + 2b_{24} = 0; b_{35} + b_{24} = 0 \\
b_{44} : \beta_4 + \beta_4 = (1,0) + (1,0) = (2,0) & \Rightarrow b_{44} = 6 \\
b_{45} : \beta_4 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_4 = (1,0) + (0,1) = (1,1) & \Rightarrow 2b_{45} = -2; b_{45} = -1 \\
b_{55} : \beta_5 + \beta_5 = (0,1) + (0,1) = (0,2) & \Rightarrow b_{55} = 8
\end{array}$$

Z výše uvedeného výpočtu je zřejmé, že bude nutné zavést tři reálné parametry  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ , protože jsou spolu svázány dvojice prvků  $b_{12}$  a  $b_{33}$ ,  $b_{15}$  a  $b_{34}$ ,  $b_{24}$  a  $b_{35}$ . Položme tedy prvky  $b_{12} = \lambda$ ,  $b_{34} = \omega$  a  $b_{35} = \sigma$ . Bude pak zřejmě platit  $b_{33} = 6 - 2\lambda$ ,  $b_{15} = -\omega$ ,  $b_{24} = -\sigma$ .

Hledaná matice  $B$  tak bude ve tvaru:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 & 0 & -\omega \\ \lambda & 3 & 0 & -\sigma & -1 \\ 0 & 0 & 6-2\lambda & \omega & \sigma \\ 0 & -\sigma & \omega & 6 & -1 \\ -\omega & -1 & \sigma & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Potřebujeme, aby po dosazení konkrétních hodnot za parametry  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  byla matice  $B$  pozitivně semidefinitní. Abychom mohli využít dříve vyslovené věty 1 (kap. 2.2), je nutné určit charakteristický polynom  $F(y)$ , tedy vypočítat hodnotu determinantu:

$$\det(B - yE) = \begin{vmatrix} 3-y & \lambda & 0 & 0 & -\omega \\ \lambda & 3-y & 0 & -\sigma & -1 \\ 0 & 0 & 6-2\lambda-y & \omega & \sigma \\ 0 & -\sigma & \omega & 6-y & -1 \\ -\omega & -1 & \sigma & -1 & 8-y \end{vmatrix}$$

Úkolem nyní je vypočítat determinant 5. řádu. V případě klasického postupu bychom zřejmě využili rozvoje determinantu dle řádku/sloupce, nicméně vzhledem k náročnosti a rozsahu výpočtu, přenechme tento výpočet počítačovému softwaru. Kopie výstupu programu počítačové algebry Wolfram Mathematica, který vydal charakteristický polynom  $F(y)$  v čase 0,00680066 sekundy, je uvedena níže.

$$\begin{aligned}
F(y) = & 2430 - y^5 + y^4(26 - 2\lambda) - 810\lambda - 282\lambda^2 + 94\lambda^3 - 36\sigma + 12\lambda\sigma - 198\sigma^2 \\
& + 48\lambda\sigma^2 + 6\lambda^2\sigma^2 + 3\sigma^4 + 72\lambda\omega - 24\lambda^2\omega - 18\sigma\omega + 12\lambda\sigma\omega - 2\lambda^2\sigma\omega \\
& - 6\sigma^2\omega - 177\omega^2 + 36\lambda\omega^2 + 8\lambda^2\omega^2 + 6\sigma^2\omega^2 - 2\lambda\omega^3 + 3\omega^4 \\
& + y^3(-259 + 40\lambda + \lambda^2 + 2\sigma^2 + 2\omega^2) + y^2(1233 - 278\lambda - 20\lambda^2 + 2\lambda^3 \\
& - 2\sigma - 29\sigma^2 + 2\lambda\sigma^2 + 2\lambda\omega - 2\sigma\omega - 29\omega^2 + 2\lambda\omega^2) + y(-2799 \\
& + 798\lambda + 131\lambda^2 - 28\lambda^3 + 18\sigma - 4\lambda\sigma + 135\sigma^2 - 22\lambda\sigma^2 - \lambda^2\sigma^2 - \sigma^4 \\
& - 24\lambda\omega + 4\lambda^2\omega + 12\sigma\omega - 2\lambda\sigma\omega + 2\sigma^2\omega + 128\omega^2 - 18\lambda\omega^2 - \lambda^2\omega^2 \\
& - \sigma^2\omega^2 - \omega^4)
\end{aligned}$$

Vyjádření charakteristického polynomu  $F(y)$  obsahuje nejen čtvrté a páté mocniny, ale též se v něm vyskytují poměrně vysoké celočíselné hodnoty. Přejdeme nyní k polynomu  $F(-y)$  se srovanými koeficienty u zavedené neurčité  $y$  a rozhodněme o možných konfiguracích trojice parametrů  $\lambda, \omega, \sigma$ .

$$\begin{aligned}
F(-y) = & 2430 + y^5 + y^4(26 - 2\lambda) - 810\lambda - 282\lambda^2 + 94\lambda^3 - 36\sigma + 12\lambda\sigma - 198\sigma^2 \\
& + 48\lambda\sigma^2 + 6\lambda^2\sigma^2 + 3\sigma^4 + 72\lambda\omega - 24\lambda^2\omega - 18\sigma\omega + 12\lambda\sigma\omega - 2\lambda^2\sigma\omega \\
& - 6\sigma^2\omega - 177\omega^2 + 36\lambda\omega^2 + 8\lambda^2\omega^2 + 6\sigma^2\omega^2 - 2\lambda\omega^3 + 3\omega^4 + y^3(259 \\
& - 40\lambda - \lambda^2 - 2\sigma^2 - 2\omega^2) + y^2(1233 - 278\lambda - 20\lambda^2 + 2\lambda^3 - 2\sigma \\
& - 29\sigma^2 + 2\lambda\sigma^2 + 2\lambda\omega - 2\sigma\omega - 29\omega^2 + 2\lambda\omega^2) + y(2799 - 798\lambda \\
& - 131\lambda^2 + 28\lambda^3 - 18\sigma + 4\lambda\sigma - 135\sigma^2 + 22\lambda\sigma^2 + \lambda^2\sigma^2 + \sigma^4 + 24\lambda\omega \\
& - 4\lambda^2\omega - 12\sigma\omega + 2\lambda\sigma\omega - 2\sigma^2\omega - 128\omega^2 + 18\lambda\omega^2 + \lambda^2\omega^2 + \sigma^2\omega^2 \\
& + \omega^4)
\end{aligned}$$

Aby v uvedeném polynomu nenastaly znaménkové změny a neexistovaly žádné záporné kořeny, musí být současně splněny všechny podmínky:

$$p_1: 26 - 2\lambda \geq 0$$

$$p_2: 259 - 40\lambda - \lambda^2 - 2\sigma^2 - 2\omega^2 \geq 0$$

$$p_3: 1233 - 278\lambda - 20\lambda^2 + 2\lambda^3 - 2\sigma - 29\sigma^2 + 2\lambda\sigma^2 + 2\lambda\omega - 2\sigma\omega - 29\omega^2 + 2\lambda\omega^2 \geq 0$$

$$p_4: 2799 - 798\lambda - 131\lambda^2 + 28\lambda^3 - 18\sigma + 4\lambda\sigma - 135\sigma^2 + 22\lambda\sigma^2 + \lambda^2\sigma^2 + \sigma^4 + 24\lambda\omega - 4\lambda^2\omega - 12\sigma\omega + 2\lambda\sigma\omega - 2\sigma^2\omega - 128\omega^2 + 18\lambda\omega^2 + \lambda^2\omega^2 + \sigma^2\omega^2 + \omega^4 \geq 0$$

$$p_5: 2430 - 810\lambda - 282\lambda^2 + 94\lambda^3 - 36\sigma + 12\lambda\sigma - 198\sigma^2 + 48\lambda\sigma^2 + 6\lambda^2\sigma^2 + 3\sigma^4 + 72\lambda\omega - 24\lambda^2\omega - 18\sigma\omega + 12\lambda\sigma\omega - 2\lambda^2\sigma\omega - 6\sigma^2\omega - 177\omega^2 + 36\lambda\omega^2 + 8\lambda^2\omega^2 + 6\sigma^2\omega^2 - 2\lambda\omega^3 + 3\omega^4 \geq 0$$

Řešení uvedené soustavy nerovnic přenecháme pochopitelně počítačovému softwaru, ale před samotným výpočet uskutečníme krátké zamyšlení. Bylo by pochopitelně možné zadat výpočet pro parametry  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$  z oboru reálných čísel. Hrozí zde ovšem situace, kdy počítač vrátí hodnoty s vysokým počtem desetinných míst, či hodnoty ve tvaru zlomků s odmocninami. Taková reálná čísla nejsou příliš vhodná po další ruční výpočet a bylo by nutné další kroky přenechat matematickému softwaru. Přejdeme tedy z oboru reálných čísel k hledání parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma \in \mathbb{Z}$ . Může pochopitelně nastat okolnost, že celočíselná konfigurace těchto parametrů nebude existovat. Pokud ovšem najdeme alespoň jednu trojici splňující všechny uvedené podmínky, můžeme ji využít při určování rozkladu zadaného polynomu  $p(x, y)$  na součet čtverců polynomů. Obdobně jako dříve využijeme k výpočtu software Wolfram Mathematica s využitím příkazu *FindInstance* v uvedené syntaxi a též necháme vypsat časovou náročnost výpočtu počítačem.

```
In[10]:= AbsoluteTiming[
  FindInstance[
    {26 - 2 λ ≥ 0 && 259 - 40 λ - λ² - 2 σ² - 2 ω² ≥ 0 &&
      1233 - 278 λ - 20 λ² + 2 λ³ - 2 σ - 29 σ² + 2 λ σ² + 2 λ ω - 2 σ ω - 29 ω² + 2 λ ω² ≥ 0 &&
      2799 - 798 λ - 131 λ² + 28 λ³ - 18 σ + 4 λ σ - 135 σ² + 22 λ σ² + λ² σ² + σ⁴ + 24 λ ω - 4 λ² ω - 12 σ ω + 2 λ σ ω -
        2 σ² ω - 128 ω² + 18 λ ω² + λ² ω² + σ² ω² + ω⁴ ≥ 0 &&
      2430 - 810 λ - 282 λ² + 94 λ³ - 36 σ + 12 λ σ - 198 σ² + 48 λ σ² + 6 λ² σ² + 3 σ⁴ + 72 λ ω - 24 λ² ω - 18 σ ω +
        12 λ σ ω - 2 λ² σ ω - 6 σ² ω - 177 ω² + 36 λ ω² + 8 λ² ω² + 6 σ² ω² - 2 λ ω³ + 3 ω⁴ ≥ 0}, {λ, ω, σ}, Integers, 5]]
Out[10]:= {82.36,
  {{λ → 1, ω → -1, σ → 1}, {λ → -2, ω → -2, σ → -2}, {λ → -2, ω → 2, σ → -1}, {λ → -1, ω → 4, σ → 0}, {λ → 0, ω → 0, σ → 1}}}
```

Vstupem do počítačového softwaru bylo požadováno určit pět možných celočíselných konfigurací parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ , pro které budou splněny všechny podmínky  $p_1$  až  $p_5$ . Program vydal výsledek v čase 82,36 sekundy. Vidíme tak opět nárůst časové náročnosti výpočtu.

Získané možnosti přípustných celočíselných voleb parametrů jsou následující:

- 1)  $\lambda = 1, \quad \omega = -1, \quad \sigma = 1$
- 2)  $\lambda = -2, \quad \omega = -2, \quad \sigma = -2$
- 3)  $\lambda = -2, \quad \omega = 2, \quad \sigma = -1$
- 4)  $\lambda = -1, \quad \omega = 4, \quad \sigma = 0$
- 5)  $\lambda = 0, \quad \omega = 0, \quad \sigma = 1$

Proveďme nyní výpočet rozkladu daného polynomu  $p$  na součet čtverců tradiční metodou pro konfiguraci parametrů  $\lambda = 0, \omega = 0, \sigma = 1$  (možnost č. 5 vydaná počítačem). Matici  $B$  po dosazení a dopočtení získáme ve tvaru:

$$B_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Matici  $B_5$  připsáme vpravo jednotkovou matici  $E$  typu  $5 \times 5$  a s využitím symetrických úprav matici  $B_5$  převedeme na diagonální matici  $D$ , přičemž řádkové úpravy budeme zaznamenávat i do připsané matice  $E$ , která přejde po provedení všech úprav (tj. převedení matice  $B_5$  na diagonální matici) v elementární transformační matici  $X^T$ .

$$\begin{aligned} (B_5|E) &= \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 16 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} & -7 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 16 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} & -7 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & \frac{95}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{733}{102} & 0 & \frac{7}{17} & -\frac{1}{6} & \frac{4}{17} & 1 \end{array} \right) = (D|X^T) \end{aligned}$$

Ověření správnosti je možné ze vztahu  $D = X^T B X$  po určení matice  $X$  transpozicí vypočtené matice  $X^T$ . Tento výpočet přenechme počítači:

```
In[26]=
Xt = {{1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, (1/3), 0, 1, 0}, {0, (7/17), (-1/6), (4/17), 1}};
X = Transpose[Xt];
MatrixForm[Xt.B5.X]

Out[28]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{733}{102} \end{pmatrix}$$

```

Výsledek součinu matic  $X^T B X$  potvrdil, že je matice  $D$  vypočtená správně. Dalším krokem je určit inverzní matici  $X^{-1}$  k matici  $X$ . Vzhledem k rozměrům matic přenecháme tento výpočet počítači. Ruční výpočet by byl pochopitelně možný (obdobně jako dříve) s využitím Gaussovy eliminační metody. Zároveň zapíšeme matici  $\sqrt{D}$  nezbytnou pro další výpočet.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{17}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{733}{102}} \end{pmatrix}$$

Výsledný rozklad polynomu  $p(x, y)$  na součet čtverců polynomů získáme jako součin matice  $U = \sqrt{D}.X^{-1} = \sqrt{D}.V^T$  a vektoru monomů  $z$ . Výpočet matice  $U$  přenechme počítači.

$$U = \sqrt{D}.X^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{17}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{733}{102}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{17}{3}} & -\frac{4}{\sqrt{51}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{733}{102}} \end{pmatrix}$$

Vidíme, že výsledné vyjádření matice  $U$  je poměrně komplikované a obsahuje též několik vysokých hodnot pod druhou odmocninou. Výpočet lidskými postupy by byl tedy značně obtížný a časově náročný. Zbývá dopočítat rozklad daného polynomu  $p$  na součet čtverců vynásobením získané matice vektorem monomů  $z$ .

$$U \cdot z^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{17}{3}} & -\frac{4}{\sqrt{51}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{733}{102}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x^2 \\ -\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}y^2 \\ \frac{y}{\sqrt{6}} + \sqrt{6}xy \\ \sqrt{\frac{17}{3}}x - \frac{4y}{\sqrt{51}} \\ \sqrt{\frac{733}{102}}y \end{pmatrix}$$

Výsledný rozklad na SOS je tedy ve tvaru součtu pěti čtverců:

$$p(x, y) = (\sqrt{3}x^2)^2 + \left(-\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}y^2\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{6}} + \sqrt{6}xy\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{17}{3}}x - \frac{4y}{\sqrt{51}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{733}{102}}y\right)^2$$

Výsledek můžeme ověřit zpětným umocněním a porovnáním se zadaným polynomem  $p$ :

```
In[154]:= p = 3*x^4 + 3*y^4 - 2*y^3 + 6*x^2*y^2 + 6*x^2 + 8*y^2 - 2*x*y;
```

```
Expand[SOSp = (\sqrt{3} x^2)^2 + (-\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} y^2)^2 + (\frac{y}{\sqrt{6}} + \sqrt{6} x y)^2 + (\sqrt{\frac{17}{3}} x - \frac{4 y}{\sqrt{51}})^2 + (\sqrt{\frac{733}{102}} y)^2]
```

```
TrueQ[p == Expand[SOSp]]
```

```
Out[155]:= 6 x^2 + 3 x^4 - 2 x y + 8 y^2 + 6 x^2 y^2 - 2 y^3 + 3 y^4
```

```
Out[156]:= True
```

Nalezením konkrétních celočíselných hodnot parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$  a následným výpočtem jistého rozkladu daného polynomu  $p$  na SOS jsme tak zadaný úkol právě vyřešili – rozklad existuje a zároveň jsme jedno možné vyjádření zapsali a ověřili počítačovým softwarem.

Před přechodem ke druhému, čistě počítačovému, řešení s využitím programů počítačové algebry MATLAB a Wolfram Mathematica, demonstrováme výpočet s využitím jiné trojice parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$  v kombinaci s Choleského dekompozicí, kterou pro urychlení výpočtu provedeme pomocí matematického softwaru. Volme kupříkladu počítačem vydanou možnost č. 1 pro hodnoty  $\lambda = 1$ ,  $\omega = -1$  a  $\sigma = 1$ . Matice  $B$  pak bude po dosazení zřejmě v následujícím tvaru.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Aplikací příkazu *CholeskyDecomposition* dojdeme v čase 0,0002913 sekundy k výsledné matici  $V^T$ , kterou vynásobíme vektorem monomů  $z$ :

$$V^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 2\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{43}}{2} & -\frac{5}{\sqrt{86}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{1111}}{2\sqrt{43}} \end{pmatrix} \quad z^T = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad V^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 2\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{43}}{2} & -\frac{5}{\sqrt{86}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{1111}}{2\sqrt{43}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x^2 + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}x - \sqrt{\frac{2}{3}}y + 2\sqrt{\frac{2}{3}}y^2 \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 2xy \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{43}{2}}x - \frac{5y}{\sqrt{86}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1111}{43}}y \end{pmatrix}$$

Získáme tak vyjádření polynomu  $p(x, y)$  ve tvaru součtu pěti čtverců:

$$p(x, y) = \left( \sqrt{3}x^2 + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}x - \sqrt{\frac{2}{3}}y + 2\sqrt{\frac{2}{3}}y^2 \right)^2 + \left( -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 2xy \right)^2 + \left( \frac{1}{2}\sqrt{\frac{43}{2}}x - \frac{5y}{\sqrt{86}} \right)^2 + \left( \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1111}{43}}y \right)^2$$

Snadno pak můžeme nahlédnout, že se jedná o další možné vyjádření zadaného polynomu ve tvaru součtu čtverců polynomů, které je dokladem jeho pozitivní semidefinitnosti:

```
In[59]:= p = 3*x^4 + 3*y^4 - 2*y^3 + 6*x^2*y^2 + 6*x^2 + 8*y^2 - 2*x*y;
SOSp2 = Expand[ (sqrt(3)*x^2 + y/sqrt(3) + y^2/sqrt(3))^2 + (-1/2*sqrt(3/2)*x - sqrt(2/3)*y + 2*sqrt(2/3)*y^2)^2 + (-x/2 + y/2 + 2*x*y)^2 + (1/2*sqrt(43/2)*x - 5*y/sqrt(86))^2 + (1/2*sqrt(1111/43)*y)^2 ]
TrueQ[p == SOSp2]
Out[60]= 6 x^4 + 3 x^4 - 2 x y + 8 y^2 + 6 x^2 y^2 - 2 y^3 + 3 y^4
Out[61]= True
```

## Řešení II (ryze počítačové řešení):

Klasickým přístupem v kombinaci s matematickým softwarem při řešení dílčích výpočtů jsme zatím dospěli ke dvěma konkrétním vyjádřením zadaného reálného polynomu  $p$  ve tvaru součtu čtverců polynomů. Tato část řešení je věnována ryze počítačovému přístupu. Nejprve využijeme softwaru MATLAB v součinnosti s balíčky SeDuMi a SOSTOOLS pro určení jisté celočíselné matice  $Q$  (tj. Gramova matice  $B$ ) a příslušného sloupcového vektoru monomů  $z$ . Následně s využitím Choleského dekompozice v programu Wolfram

Mathematica dopočteme matici  $V^T$  a ze součinu  $V^T \cdot z^T$  určíme výsledný rozklad na SOS. Závěrem vyhodnotíme celkovou časovou náročnost strojového výpočtu (bez zohlednění času nutného k zavedení proměnných, polynomů a matic do počítače).

Zanesením polynomu  $p$  do programu MATLAB a aktivací příkazu *findsos* s požadavkem na celočíselné prvky matice  $Q$  v příslušné syntaxi získáme následující výsledky v celkovém čase 0,1 sekundy:

```
>> syms x y;
>> p=3*x^4+3*y^4-2*y^3+6*x^2*y^2+6*x^2+8*y^2-2*x*y;
>> [Q,Z,D]=findsos(p,'rational')
```

$Q =$	$Z =$	$D =$
$\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y \\ y^2 \\ x \\ x*y \\ x^2 \end{bmatrix}$	$1$

Vzhledem k hodnotě  $D = 1$  můžeme pracovat s polynomem  $p$  i vypočtenou maticí  $Q$  ve stávajícím tvaru bez nutnosti později zvažovat  $n$ -násobky matice  $Q$  či polynomu  $p$ .

Zavedeme tedy do počítače získanou matici  $Q$  a vektor  $z$  (ve stávajícím řazení jednotlivých monomů). Následně aktivujeme příkaz *CholeskyDecomposition*, čímž určíme hledanou matici  $V^T$  nezbytnou pro další výpočet.

In[15]=

```
Q = {{8, -1, -1, 0, 0}, {-1, 3, 0, 0, 0}, {-1, 0, 6, 0, 0}, {0, 0, 0, 6, 0}, {0, 0, 0, 0, 3}};
zt = {{y}, {y^2}, {x}, {xy}, {x^2}};
ChD = CholeskyDecomposition[Q]
```

Out[17]=  $\left\{ \left\{ 2\sqrt{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{\sqrt{\frac{23}{2}}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{46}}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 3\sqrt{\frac{15}{23}}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, \sqrt{6}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, 0, \sqrt{3} \right\} \right\}$



V čase 0,000452 sekundy tedy vypočetl počítač trojúhelníkovou matici  $V^T$  ve tvaru:

$$V^T = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\frac{23}{2}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{46}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{\frac{15}{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Z uvedeného vyjádření je zřejmé, že se jedná o odlišnou matici oproti oběma předchozím postupům řešení s využitím klasických metod v kombinaci s počítačovým softwarem.

Nyní určíme součin  $V^T \cdot z^T$  a opět si poznamenáme jeho časovou náročnost výpočtu:

$$V^T \cdot z^T = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\frac{23}{2}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{46}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{\frac{15}{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y^2 \\ x \\ xy \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}y - \frac{y^2}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{x}{2\sqrt{46}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{2}}y^2 \\ 3\sqrt{\frac{15}{23}}x \\ \sqrt{6}xy \\ \sqrt{3}x^2 \end{pmatrix}$$

V čase 0,0000712 vydal počítač matici součinu, ze které je podoba rozkladu zadaného polynomu  $p(x, y)$  na SOS zřejmá. Jedná se opět o vyjádření ve tvaru součtu pěti čtverců:

$$p(x, y) = \left(-\frac{x}{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}y - \frac{y^2}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{x}{2\sqrt{46}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{2}}y^2\right)^2 + \left(3\sqrt{\frac{15}{23}}x\right)^2 + (\sqrt{6}xy)^2 + (\sqrt{3}x^2)^2$$

Můžeme tedy znovu odpovědět, že rozklad zadaného reálného polynomu  $p$  na součet čtverců polynomů existuje, což bylo jasné již v okamžiku, kdy program MATLAB vydal celočíselnou Gramovu matici  $Q$ , a jedno možné vyjádření rozkladu je uvedeno výše. Před závěrečným shrnutím ještě ověříme umocněním, zda jsme postupovali správně a nalezený rozklad reprezentuje zadaný polynom  $p(x, y)$ .

```

In[54]=
p = 3*x^4 + 3*y^4 - 2*y^3 + 6*x^2*y^2 + 6*x^2 + 8*y^2 - 2*x*y;
S0Sp3 = ((-x / (2*Sqrt[2])) + 2*Sqrt[2]*y - ((y^2) / (2*Sqrt[2])))^2 +
((-x / (2*Sqrt[46])) + (1/2)*Sqrt[23/2]*y^2)^2 + (3*Sqrt[15/23]*x)^2 + (Sqrt[6]*x*y)^2 +
(Sqrt[3]*x^2)^2;
Expand[S0Sp3]
AbsoluteTiming[TrueQ[p == Expand[S0Sp3]]]
Out[56]= 6 x^2 + 3 x^4 - 2 x y + 8 y^2 + 6 x^2 y^2 - 2 y^3 + 3 y^4
Out[57]= {0.0004335, True}

```

Výsledný verdikt *True*, že vypočtený rozklad na součet čtverců skutečně reprezentuje původně zadaný polynom  $p$ , vydal počítač v čase 0,0004335 sekundy. Celková časová náročnost ryze počítačového výpočtu (vč. ověření správnosti) tedy je 0,1009567 sekundy.

Závěrem řešeného příkladu 6 je nutné konstatovat, že úlohami této náročnosti se již dostáváme na hranici lidských možností a klasických postupů při určování rozkladu jistého reálného polynomu na součet čtverců. Zároveň je nutno upozornit, že i běžná školská technika, na které jsou prováděny v rámci této práce počítačové výpočty, může mít v případě řešení některých dílčích úkolů již u úloh takové úrovně problémy (lze kupříkladu zmínit hledání celočíselné konfigurace trojice parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ , které proběhlo v čase 82,36 sekundy a počítač musel být následně po tomto výpočtu z důvodu nestandardního chování restartován). Zadáním příkladu byl sice dán „pouze“ polynom dvou neurčitých sudého stupně 4, nicméně se ukázalo, že již u úloh takové povahy může s ohledem na monomy vyskytující se ve výsledném rozkladu na SOS a jejich počet, nastat okolnost, kdy je nutné provádět výpočet s několika reálnými parametry a řešit soustavu pěti nerovnic v nichž se vyskytují až čtvrté mocniny neznámých a případně vysoké celočíselné hodnoty. Je tedy nutné na tomto místě upozornit, ale to platí obecně již při vytváření vlastních úloh do testů na základní škole, že v případě zadávání příkladů na určování rozkladu reálného polynomu na součet čtverců studentům středních či vysokých škol, se musí vyučující vždy pečlivě zamyslet nad povahou zadávané úlohy a nejlépe si příklad předem vyřešit, ať ručně nebo pomocí matematického softwaru, který mu též vydanými výsledky dá jistou informaci o náročnosti řešení celé úlohy.

### 5.7 Řešený příklad 7 – reálný polynom tří neurčitých a chytrá volba parametrů v $\mathbb{Z}$

Rozhodněte v  $\mathbb{R}$  o existenci rozkladu daného polynomu  $f$  na součet čtverců polynomů a rozklad запиšte:

$$f(x, y, z) = x^6 + y^6 + 4z^6 + 2y^4z^2 + y^2z^4 + 4x^3y^2z$$

## Řešení:

Zadáním řešeného příkladu 7 je požadováno rozhodnout v oboru reálných čísel o existenci rozkladu polynomu  $f$  tří reálných neurčitých  $x, y, z$  sudého stupně 6 na součet čtverců reálných polynomů. Postupujme obdobně jako v předchozím příkladu nejprve s využitím klasických metod a v případě potřeby přenecháme vybrané pasáže počítačovému softwaru. Nejprve je nutné určit množinu  $\Lambda_m$ , přičemž s ohledem na tvar polynomu  $f(x, y, z)$  bude přípustná a pro rozklad na SOS dostačující pětice monomů ve tvaru  $x^3, y^3, z^3, y^2z, yz^2$ .

Z nich snadno určíme po řadě prvky  $\beta_1 = (3, 0, 0), \beta_2 = (0, 3, 0), \beta_3 = (0, 0, 3), \beta_4 = (0, 2, 1), \beta_5 = (0, 1, 2)$ , ze kterých vypočteme čtvercovou Gramovu matici  $B$ , která bude řádu  $k = 5$ .

$$\begin{aligned} b_{11} : \beta_1 + \beta_1 &= (3, 0, 0) + (3, 0, 0) = (6, 0, 0) && \Rightarrow b_{11} = 1 \\ b_{12} : \beta_1 + \beta_2 &= \beta_2 + \beta_1 = (3, 0, 0) + (0, 3, 0) = (0, 3, 0) + (3, 0, 0) = (3, 3, 0) && \Rightarrow 2b_{12} = 0; b_{12} = 0 \\ b_{13} : \beta_1 + \beta_3 &= \beta_3 + \beta_1 = (3, 0, 0) + (0, 0, 3) = (0, 0, 3) + (3, 0, 0) = (3, 0, 3) && \Rightarrow 2b_{13} = 0; b_{13} = 0 \\ b_{14} : \beta_1 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_1 = (3, 0, 0) + (0, 2, 1) = (0, 2, 1) + (3, 0, 0) = (3, 2, 1) && \Rightarrow 2b_{14} = 4; b_{14} = 2 \\ b_{15} : \beta_1 + \beta_5 &= \beta_5 + \beta_1 = (3, 0, 0) + (0, 1, 2) = (0, 1, 2) + (3, 0, 0) = (3, 1, 2) && \Rightarrow 2b_{15} = 0; b_{15} = 0 \\ b_{22} : \beta_2 + \beta_2 &= (0, 3, 0) + (0, 3, 0) = (0, 6, 0) && \Rightarrow b_{22} = 1 \\ b_{23} : \beta_2 + \beta_3 &= \beta_3 + \beta_2 = \beta_4 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_4 = (0, 3, 0) + (0, 0, 3) = \\ &= (0, 0, 3) + (0, 3, 0) = (0, 2, 1) + (0, 1, 2) = (0, 1, 2) + (0, 2, 1) = (0, 3, 3) && \Rightarrow 2b_{23} + 2b_{45} = 0; b_{23} + b_{45} = 0 \\ b_{24} : \beta_2 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_2 = (0, 3, 0) + (0, 2, 1) = (0, 2, 1) + (0, 3, 0) = (0, 5, 1) && \Rightarrow 2b_{24} = 0; b_{24} = 0 \\ b_{25} : \beta_2 + \beta_5 &= \beta_5 + \beta_2 = \beta_4 + \beta_4 = (0, 3, 0) + (0, 1, 2) = (0, 1, 2) + (0, 3, 0) = \\ &= (0, 2, 1) + (0, 2, 1) = (0, 4, 2) && \Rightarrow 2b_{25} + b_{44} = 2 \\ b_{33} : \beta_3 + \beta_3 &= (0, 0, 3) + (0, 0, 3) = (0, 0, 6) && \Rightarrow b_{33} = 4 \\ b_{34} : \beta_3 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_3 = \beta_5 + \beta_5 = (0, 0, 3) + (0, 2, 1) = (0, 2, 1) + (0, 0, 3) = \\ &= (0, 1, 2) + (0, 1, 2) = (0, 2, 4) && \Rightarrow 2b_{34} + b_{55} = 1 \\ b_{35} : \beta_3 + \beta_5 &= \beta_5 + \beta_3 = (0, 0, 3) + (0, 1, 2) = (0, 1, 2) + (0, 0, 3) = (0, 1, 5) && \Rightarrow 2b_{35} = 0; b_{35} = 0 \\ b_{44} : \beta_4 + \beta_4 &= \beta_2 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_2 = (0, 2, 1) + (0, 2, 1) = (0, 3, 0) + (0, 1, 2) = \\ &= (0, 1, 2) + (0, 3, 0) = (0, 4, 2) && \Rightarrow b_{44} + 2b_{25} = 2 \\ b_{45} : \beta_4 + \beta_5 &= \beta_5 + \beta_4 = \beta_2 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_2 = (0, 2, 1) + (0, 1, 2) = \\ &= (0, 1, 2) + (0, 2, 1) = (0, 3, 0) + (0, 0, 3) = (0, 0, 3) + (0, 3, 0) = (0, 3, 3) && \Rightarrow 2b_{45} + 2b_{23} = 0; b_{45} + b_{23} = 0 \\ b_{55} : \beta_5 + \beta_5 &= \beta_3 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_3 = (0, 1, 2) + (0, 1, 2) = (0, 0, 3) + (0, 2, 1) = \\ &= (0, 2, 1) + (0, 0, 3) = (0, 2, 4) && \Rightarrow b_{55} + 2b_{34} = 1 \end{aligned}$$

Připomeňme, že při výpočtu konkrétních hodnot prvků matice  $B$  vycházíme z jednotlivých prvků  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  množiny  $\Lambda_m$ . Pokud kupříkladu určujeme prvek  $b_{11}$ , potom z výše uvedeného postupu je zřejmé, že výpočtem  $\beta_1 + \beta_1 = (3, 0, 0) + (3, 0, 0) = (6, 0, 0)$  získáme

informaci o hodnotě  $b_{11} = 1$ , která vychází z koeficientu u monomu  $x^6$  daného polynomu  $f(x, y, z)$ . Musíme dát ovšem pozor na možné kombinace prvků  $\beta$ , jak je kupříkladu zřejmé z výpočtu prvku  $b_{25}$ . Stejný výsledek jako kombinace  $\beta_2 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_2$  dává též součet  $\beta_4 + \beta_4$ , kdy platí  $\beta_2 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_2 = \beta_4 + \beta_4 = (0, 4, 2)$ , čímž se tato dvojice prvků sváže. Monom  $2x^4y^2$  z původního polynomu  $f(x, y, z)$  nám pak dává informaci, že musí nutně platit vztah  $2b_{25} + b_{44} = 2$ , který nás „odsuzuje“ k zavedení parametru. V případě výpočtu prvku  $b_{35}$  (a při výpočtech v obdobných situacích), kdy dospějeme k závěru  $\beta_3 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_3 = (0, 1, 5)$ , ale monom  $xy^5$  se v zadaném polynomu nevyskytuje, pak k němu přistupujeme jako ke členu s koeficientem rovným nule a zapisujeme  $2b_{35} = 0$ , po dopočtení  $b_{35} = 0$ .

Vraťme se ovšem k výpočtu matice  $B$ . Je zřejmé, že bude nutné zavést trojici reálných parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$  z důvodu provázanosti dvojic  $b_{23}$  a  $b_{45}$ ,  $b_{25}$  a  $b_{44}$ ,  $b_{34}$  a  $b_{55}$ . Položme tedy  $b_{23} = \lambda$ ,  $b_{25} = \omega$  a  $b_{34} = \sigma$ . Po nezbytných úpravách pak získáme matici  $B$  ve tvaru:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \omega \\ 0 & \lambda & 4 & \sigma & 0 \\ 2 & 0 & \sigma & 2-2\omega & -\lambda \\ 0 & \omega & 0 & -\lambda & 1-2\sigma \end{pmatrix}$$

Abychom mohli pokračovat ve výpočtu, musíme rozhodnout o přípustných hodnotách parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ , pro které bude matice  $B$  pozitivně semidefinitní. Obdobně jako dříve je tedy nutné určit charakteristický polynom  $F(y)$  této matice, tedy vypočítat determinant  $\det(B - yE)$ , a následně přejít k polynomu  $F(-y)$ , ze kterého budeme moci na základě Descartova znaménkového pravidla rozhodnout o přípustných hodnotách, respektive o konkrétních možných konfiguracích, parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ . Vzhledem k velikosti matice, přenechme tento výpočet matematickému softwaru a zapišme rovnou polynom  $F(-y)$  se srovnanými koeficienty u zavedené neurčité  $y$  (výstup je z počítačového softwaru opět okopírován, aby se eliminovaly chyby při případném opisování získaného výsledku).

$$\begin{aligned}
F(-y) = & -8 + y^5 - 2\lambda^2 + \lambda^4 + 16\sigma - 4\lambda^2\sigma - \sigma^2 + 2\sigma^3 + y^4(9 - 2\sigma - 2\omega) - 8\omega \\
& + 2\lambda^2\omega + 16\sigma\omega - 2\lambda^2\sigma\omega + 8\omega^2 + \sigma^2\omega^2 + 8\omega^3 + y^3(25 - 2\lambda^2 - 16\sigma \\
& - \sigma^2 - 14\omega + 4\sigma\omega - \omega^2) + y^2(19 - 10\lambda^2 - 34\sigma + 2\lambda^2\sigma - 3\sigma^2 + 2\sigma^3 \\
& - 30\omega + 2\lambda^2\omega + 24\sigma\omega - 7\omega^2 + 2\omega^3) + y(-6 - 10\lambda^2 + \lambda^4 - 4\sigma \\
& + 6\lambda^2\sigma - 3\sigma^2 + 4\sigma^3 - 26\omega + 4\lambda^2\omega + 36\sigma\omega - 2\lambda^2\sigma\omega - 10\omega^2 + \sigma^2\omega^2 \\
& + 10\omega^3)
\end{aligned}$$

Z výše uvedeného tvaru polynomu  $F(-y)$  je patrné, že znaménkové změny nenastanou, pokud bude současně splněno pět následujících podmínek:

$$p_1: \quad 9 - 2\sigma - 2\omega \geq 0$$

$$p_2: \quad 25 - 2\lambda^2 - 16\sigma - \sigma^2 - 14\omega + 4\sigma\omega - \omega^2 \geq 0$$

$$p_3: \quad 19 - 10\lambda^2 - 34\sigma + 2\lambda^2\sigma - 3\sigma^2 + 2\sigma^3 - 30\omega + 2\lambda^2\omega + 24\sigma\omega - 7\omega^2 + 2\omega^3 \geq 0$$

$$p_4: \quad -6 - 10\lambda^2 + \lambda^4 - 4\sigma + 6\lambda^2\sigma - 3\sigma^2 + 4\sigma^3 - 26\omega + 4\lambda^2\omega + 36\sigma\omega - 2\lambda^2\sigma\omega - 10\omega^2 + \sigma^2\omega^2 + 10\omega^3 \geq 0$$

$$p_5: \quad -8 - 2\lambda^2 + \lambda^4 + 16\sigma - 4\lambda^2\sigma - \sigma^2 + 2\sigma^3 - 8\omega + 2\lambda^2\omega + 16\sigma\omega - 2\lambda^2\sigma\omega + 8\omega^2 + \sigma^2\omega^2 + 8\omega^3 \geq 0$$

Předtím, než přenecháme výpočet uvedené soustavy pěti nerovnic a určení celočíselných konfigurací parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$  matematickému softwaru Wolfram Mathematica, zkusme se zamyslet na lidskými možnostmi nalezení některé trojice hodnot pro příslušné parametry. Nejjednodušší z hlediska ručního výpočtu by byla volba  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 0$ ,  $\sigma = 0$ . Ta však není možná, protože dojde k porušení podmínek  $p_4$  a  $p_5$ , jak je zřejmé ze záporných hodnot absolutních členů, které jsou uvedeny jako první v pořadí. Nicméně stále by se hodilo mít co nejvíce nulových parametrů. Pozorný čtenář již postřehne, že k určení jedné z nenulových hodnot parametru nás může přivést podmínka  $p_5$ , konkrétně pak znaménka u čtveřice členů  $-8$ ,  $-8\omega$ ,  $8\omega^2$ ,  $8\omega^3$ . Pokud bychom totiž položili  $\omega = -1$ , pak se tyto členy po dosazení vzájemně odečtou a zbavíme se tak záporného absolutního členu. Stejně tak bude po dosazení splněna podmínka  $p_4$ , kde se vzájemně odečtou členy  $-6$ ,  $-26\omega$ ,  $-10\omega^2$  a  $10\omega^3$ . Platnost podmínek  $p_1$  až  $p_3$  tato volba nijak nenaruší. Můžeme tedy konstatovat, že úvahou jsme dospěli k jedné trojici hodnot ve tvaru  $\lambda = 0$ ,  $\omega = -1$ ,  $\sigma = 0$ . Jedna konkrétní konfigurace zavedených parametrů je obecně již dostačující k tomu, abychom mohli pokračovat ve výpočtu rozkladu daného polynomu na součet čtverců polynomů, případně v důkazu pozitivní semidefinitnosti tohoto polynomu.

Vraťme se ovšem k řešenému příkladu a ověříme uvedený výsledek pomocí počítačového softwaru. Zároveň budeme vstupem do programu požadovat nalezení dalších možných celočíselných konfigurací parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ , pro které bude získaná matice  $B$  pozitivně semidefinitní, a necháme vypsat čas nutný k určení požadovaných hodnot.

```
In[5]=
AbsoluteTiming[
FindInstance[
{9 - 2 σ - 2 ω ≥ 0 && 25 - 2 λ2 - 16 σ - σ2 - 14 ω + 4 σ ω - ω2 ≥ 0 &&
19 - 10 λ2 - 34 σ + 2 λ2 σ - 3 σ2 + 2 σ3 - 30 ω + 2 λ2 ω + 24 σ ω - 7 ω2 + 2 ω3 ≥ 0 &&
-6 - 10 λ2 + λ4 - 4 σ + 6 λ2 σ - 3 σ2 + 4 σ3 - 26 ω + 4 λ2 ω + 36 σ ω - 2 λ2 σ ω - 10 ω2 + σ2 ω2 + 10 ω3 ≥ 0 &&
-8 - 2 λ2 + λ4 + 16 σ - 4 λ2 σ - σ2 + 2 σ3 - 8 ω + 2 λ2 ω + 16 σ ω - 2 λ2 σ ω + 8 ω2 + σ2 ω2 + 8 ω3 ≥ 0},
{λ, ω, σ}, Integers, 5]]
Out[5]= {20.8798, {{λ→0, ω→-3, σ→-4}, {λ→0, ω→-2, σ→-2}, {λ→0, ω→-1, σ→0}}}
```

Výsledky vydané v čase 20,8798 sekundy potvrdily správnost předcházející úvahy. Počítač našel ovšem pouze tři možné konfigurace celočíselných parametrů:

- 1)  $\lambda = 0, \omega = -3, \sigma = -4$
- 2)  $\lambda = 0, \omega = -2, \sigma = -2$
- 3)  $\lambda = 0, \omega = -1, \sigma = 0$

Volme nyní pro další výpočty možnost č. 3, tedy hodnoty parametrů  $\lambda = 0, \omega = -1, \sigma = 0$ , ke kterým jsme dospěli úvahou a počítač potvrdil jejich správnost. Konkrétní matice  $B$  tak bude po dosazení a dopočtení ve tvaru:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici  $B_3$  nyní připsíme vpravo jednotkovou matici  $E$  a s využitím symetrických úprav převedeme matici  $B_3$  na matici diagonální  $D$  a vypočteme tak též matici  $X^T$  obdobně jako v předešlých úlohách.

$$(B|E) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim (D|X^T)$$

Výpočtem jsme určili diagonální matici  $D$  a elementární transformační matici  $X^T$ , od které přejdeme transpozicí k matici  $X$  a k ní pak následně určíme inverzní matici  $X^{-1}$ . Ruční výpočet inverzní matice i ověření platnosti vztahu  $D = X^T B X$  ponecháme nyní na čtenáři. Inverzní matici  $X^{-1}$  určíme pomocí počítače, který ji vydal v čase 0,0000911 sekundy. Vypočtené matice jsou tedy v níže uvedeném tvaru, přičemž z hodnoty diagonální matice  $D$ , která je rovna  $r(D)=3$ , již vyplývá, že hledaný rozklad na SOS daného polynomu  $f(x, y, z)$  bude ve tvaru součtu tří čtverců polynomů.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Závěrem vypočteme na základě vztahu  $U = \sqrt{D} \cdot X^{-1}$  matici  $U$  a dopočteme rozklad daného polynomu  $f(x, y, z)$  na součet čtverců.

$$U = \sqrt{D} \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Požadovaný rozklad tak určíme ze součinu:

$$U \cdot z^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \\ y^2 z \\ y z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + 2y^2 z \\ y^3 - y z^2 \\ 2z^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rozklad zadaného polynomu  $f(x, y, z)$  se tedy skládá ze součtu tří čtverců ve tvaru:

$$f(x, y, z) = (x^3 + 2y^2z)^2 + (y^3 - yz^2)^2 + (2z^3)^2$$

Správnost výsledku ověříme obdobně jako dříve v programu Wolfram Mathematica.

```
In[33]:=
fxyz = x^6 + y^6 + 4 * z^6 + 2 * y^4 * z^2 + y^2 * z^4 + 4 * x^3 * y^2 * z;
fsos = (x^3 + 2 y^2 z)^2 + (y^3 - y z^2)^2 + (2 z^3)^2;
Expand[fsos]
TrueQ[fxyz == Expand[fsos]]

Out[35]= x^6 + y^6 + 4 x^3 y^2 z + 2 y^4 z^2 + y^2 z^4 + 4 z^6

Out[36]= True
```

Nalezli jsme poměrně „sympatický“ rozklad původního polynomu na SOS a správnost vyjádření potvrdil i počítačový software. Převážnou většinu výpočtu jsme navíc realizovali klasickými metodami v kombinaci s jistými úvahami a výpočetní technika byla pouze jistou oporou a garantem správnosti získaných výsledků – nástrojem pro kontrolu. Zadaný úkol jsme tedy splnili – rozklad na součet čtverců daného polynomu  $f$  existuje a zapsali jsme jedno z jeho možných vyjádření, čímž jsme zároveň dokázali nezápornost (pozitivní semidefinitnost) tohoto polynomu.

Podívejme se nyní, jak k řešení této konkrétní úlohy přistupuje program počítačové algebry MATLAB. V kapitole 4 bylo řečeno, že mezi lidskými a počítačovými postupy jsou jisté rozdíly (hlavně v možnosti úsudku člověka) a ty byly demonstrovány na konkrétních ukázkách. Kapitola 3.5 pak poukázala na skutečnost, že ne všechny potenciální monomy vzhledem k jistému zadanému polynomu  $f$  mají nutně „nárok na život“ ve výsledném rozkladu na SOS. Typickou ukázkou těchto rozdílů v přístupu mezi člověkem a počítačem je určení rozkladu polynomu  $f(x, y, z)$  na součet čtverců. Zatímco klasickými postupy a lidským rozumem jsme určili pětici monomů, které se mohou vyskytovat ve výsledném rozkladu na základě tvaru zadaného polynomu  $f(x, y, z)$ , sestavili jsme matici  $B$  a i dále jsme se snažili volit vhodné celočíselné hodnoty, díky kterým bylo možné takřka celý výpočet realizovat ručně, program MATLAB v tomto případě zahrne do výpočtu již na počátku všechny „podezřelé“ monomy a pracuje se čtvercovou maticí typu  $10 \times 10$ . Výpočet na základě získaných výstupů z programu MATLAB je ryze počítačovou cestou realizován dále.



```
>> syms x y z;
>> f=x^6+y^6+4*z^6+2*y^4*z^2+y^2*z^4+4*x^3*y^2*z;
>> [Q,Z,D]=findsos(f,'rational')
```

$Q =$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>48</td><td>0</td><td>-3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>-10</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>-6</td><td>0</td></tr> <tr><td>-3</td><td>0</td><td>26</td><td>0</td><td>-3</td><td>0</td><td>0</td><td>-3</td><td>0</td><td>9</td></tr> <tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td>12</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>-8</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>-3</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>-8</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>9</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>16</td><td>6</td><td>0</td><td>-7</td></tr> <tr><td>-10</td><td>0</td><td>-3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>6</td><td>16</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>-6</td><td>0</td><td>-8</td><td>0</td><td>9</td><td>0</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>9</td><td>0</td><td>-8</td><td>0</td><td>-7</td><td>0</td><td>0</td><td>12</td></tr> </table>	48	0	-3	0	0	0	3	-10	0	0	0	18	0	-1	0	0	0	0	-6	0	-3	0	26	0	-3	0	0	-3	0	9	0	-1	0	12	0	0	0	0	-8	0	0	0	-3	0	20	0	0	0	0	-8	0	0	0	0	0	18	0	0	9	0	3	0	0	0	0	0	16	6	0	-7	-10	0	-3	0	0	0	6	16	0	0	0	-6	0	-8	0	9	0	0	14	0	0	0	9	0	-8	0	-7	0	0	12	$Z =$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td><math>z^3</math></td></tr> <tr><td><math>y*z^2</math></td></tr> <tr><td><math>y^2*z</math></td></tr> <tr><td><math>y^3</math></td></tr> <tr><td><math>x*z^2</math></td></tr> <tr><td><math>x*y*z</math></td></tr> <tr><td><math>x*y^2</math></td></tr> <tr><td><math>x^2*z</math></td></tr> <tr><td><math>x^2*y</math></td></tr> <tr><td><math>x^3</math></td></tr> </table>	$z^3$	$y*z^2$	$y^2*z$	$y^3$	$x*z^2$	$x*y*z$	$x*y^2$	$x^2*z$	$x^2*y$	$x^3$	$D =$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>12</td></tr> </table>	12
48	0	-3	0	0	0	3	-10	0	0																																																																																																								
0	18	0	-1	0	0	0	0	-6	0																																																																																																								
-3	0	26	0	-3	0	0	-3	0	9																																																																																																								
0	-1	0	12	0	0	0	0	-8	0																																																																																																								
0	0	-3	0	20	0	0	0	0	-8																																																																																																								
0	0	0	0	0	18	0	0	9	0																																																																																																								
3	0	0	0	0	0	16	6	0	-7																																																																																																								
-10	0	-3	0	0	0	6	16	0	0																																																																																																								
0	-6	0	-8	0	9	0	0	14	0																																																																																																								
0	0	9	0	-8	0	-7	0	0	12																																																																																																								
$z^3$																																																																																																																	
$y*z^2$																																																																																																																	
$y^2*z$																																																																																																																	
$y^3$																																																																																																																	
$x*z^2$																																																																																																																	
$x*y*z$																																																																																																																	
$x*y^2$																																																																																																																	
$x^2*z$																																																																																																																	
$x^2*y$																																																																																																																	
$x^3$																																																																																																																	
12																																																																																																																	

Vstupem do programu bylo požadováno, aby vydaná matice obsahovala celočíselné prvky. Výstupem je tedy Gramova matice  $Q$  řádu  $k = 10$  a sloupcový vektor monomů  $z$ , přičemž z důvodu požadavku na celočíselné prvky v matici přešel software od matice  $Q$  k násobku  $12Q$  a tedy i od polynomu  $f$  přešel ke dvanáctinásobku  $12f$ . Nyní aplikujeme Choleského dekompozici, čímž získáme čtvercovou matici  $V^T$  ve tvaru:

$$V^T = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{5}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{413}}{4} & 0 & -\frac{12}{\sqrt{413}} & 0 & \frac{3}{4\sqrt{413}} & -\frac{29}{2\sqrt{413}} & 0 & \frac{36}{\sqrt{413}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{215}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -5\sqrt{\frac{10}{43}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{\frac{2029}{413}} & 0 & \frac{9}{2\sqrt{837977}} & -\frac{87}{\sqrt{837977}} & 0 & -\frac{1436}{\sqrt{837977}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\sqrt{2} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{128323}}{2} & \frac{26993}{\sqrt{260367367}} & 0 & -\frac{28640}{\sqrt{260367367}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{\frac{1020179}{384969}} & 0 & 262037\sqrt{\frac{3}{130912429817}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{145}{86}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\sqrt{\frac{190131}{1020179}} \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že s maticí  $V^T$  ve výše uvedeném tvaru není myslitelné provádět ruční výpočty s využitím klasických metod. Vzhledem k rozměrnosti matic nebudeme dále rozepisovat ani podrobně postup počítačového řešení pro tuto matici. Zapišeme pouze rozklad na SOS,

který s využitím matematického softwaru na základě této matice získáme, přičemž musíme před finálním zápisem přejít zpět od dvanáctinásobku  $12f$  k rozkladu polynomu  $f$ .

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) = & \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{1}{4}\sqrt{3}xy^2 - \frac{5x^2z}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\sqrt{3}y^2z + 4\sqrt{3}z^3 \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( -\sqrt{2}x^2y - \frac{y^3}{3\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}yz^2 \right) \right]^2 + \\
 & + \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{36x^3}{\sqrt{413}} + \frac{3xy^2}{4\sqrt{413}} - \frac{29x^2z}{2\sqrt{413}} + \frac{1}{4}\sqrt{413}y^2z - \frac{12xz^2}{\sqrt{413}} \right) \right]^2 + \\
 & + \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( -5\sqrt{\frac{10}{43}}x^2y + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{215}{2}}y^3 \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( -\frac{1436x^3}{\sqrt{837977}} + \frac{9xy^2}{2\sqrt{837977}} - \frac{87x^2z}{\sqrt{837977}} + 2\sqrt{\frac{2029}{413}}xz^2 \right) \right]^2 + \\
 & + \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{3x^2y}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}xyz \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( -\frac{28640x^3}{\sqrt{260367367}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{128323}{2029}}xy^2 + \frac{26993x^2z}{\sqrt{260367367}} \right) \right]^2 + \\
 & + \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( 262037\sqrt{\frac{3}{130912429817}}x^3 + 2\sqrt{\frac{1020179}{384969}}x^2z \right) \right]^2 + \\
 & + \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \sqrt{\frac{145}{86}}x^2y \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( 3\sqrt{\frac{190131}{1020179}}x^3 \right) \right]^2
 \end{aligned}$$

Získaný výsledek představuje rozklad zadaného polynomu  $f(x, y, z)$  na základě matice  $Q$  vypočtené programem MATLAB. Na první pohled je zřejmé, že se jedná o velmi složité vyjádření obsahující velmi vysoké číselné hodnoty a jejich odmocniny. Řešený příklad 7 je tak opět dokladem, že výpočetní technika může být velmi dobrým sluhou, ale je nutné ke všem získaným výsledkům přistupovat kriticky. Úvodním výpočtem pomocí klasických metod jsme ukázali, že při zamyšlení se, logickém uvažování (a případně užití jistého triku) mohou být lidské postupy velmi efektivní, elegantní a lze jejich prostřednictvím dojít ke správným a „hezkým“ výsledkům, se kterými je možné dále pracovat. Oproti tomu uvedený výpočet ryze pomocí matematického softwaru vycházející z matice  $Q$  vydané programem MATLAB je typickým zástupcem výpočtu, který je sice správný, ale výrazně převyšuje lidské možnosti a lze jej realizovat pouze s využitím výpočetní techniky. Navíc se získaným výsledkem by případně bylo velmi komplikované dále pracovat. Závěrem zařadíme ověření, že i výše uvedený rozklad na SOS představuje původně zadaný reálný polynom  $f(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned} \text{In[25]}- \text{fxyzSOSpc} = & \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{1}{4} \sqrt{3} x y^2 - \frac{5 x^2 z}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \sqrt{3} y^2 z + 4 \sqrt{3} z^3 \right) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( -\sqrt{2} x^2 y - \frac{y^3}{3\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} y z^2 \right) \right)^2 + \\ & \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{36 x^3}{\sqrt{413}} + \frac{3 x y^2}{4\sqrt{413}} - \frac{29 x^2 z}{2\sqrt{413}} + \frac{1}{4} \sqrt{413} y^2 z - \frac{12 x z^2}{\sqrt{413}} \right) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( -5\sqrt{\frac{10}{43}} x^2 y + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{215}{2}} y^3 \right) \right)^2 + \\ & \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( -\frac{1436 x^3}{\sqrt{837977}} + \frac{9 x y^2}{2\sqrt{837977}} - \frac{87 x^2 z}{\sqrt{837977}} + 2\sqrt{\frac{2029}{413}} x z^2 \right) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{3 x^2 y}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} x y z \right) \right)^2 + \\ & \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( -\frac{28640 x^3}{\sqrt{260367367}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{128323}{2029}} x y^2 + \frac{26993 x^2 z}{\sqrt{260367367}} \right) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( 262037 \sqrt{\frac{3}{130912429817}} x^3 + 2\sqrt{\frac{1020179}{384969}} x^2 z \right) \right)^2 + \\ & \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \sqrt{\frac{145}{86}} x^2 y \right) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( 3\sqrt{\frac{190131}{1020179}} x^3 \right) \right)^2; \\ \text{Expand[fxyzSOSpc]} \end{aligned}$$

$$\text{Out[25]}- x^6 + y^6 + 4 x^3 y^2 z + 2 y^4 z^2 + y^2 z^4 + 4 z^6$$

## 5.8 Řešený příklad 8 – počítačový důkaz nerovnosti s využitím rozkladu na SOS

Dokažte platnost uvedené nerovnosti pro všechny hodnoty neurčitých  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

$$3(x^3 y + y^3 z + x z^3) \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

### Řešení:

Abychom mohli užít při důkazu výše uvedené nerovnosti metody rozkladu na součet čtverců, přejdeme po úpravách k reálnému polynomu  $p$  tří neurčitých  $x, y, z$  ve tvaru:

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 3(x^3 y + y^3 z + x z^3) \\ p(x, y, z) &= (x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2 y^2 + 2x^2 z^2 + 2y^2 z^2) - (3x^3 y + 3y^3 z + 3x z^3) \\ p(x, y, z) &= x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2 y^2 + 2x^2 z^2 + 2y^2 z^2 - 3x^3 y - 3y^3 z - 3x z^3 \end{aligned}$$

Nyní postačí ukázat, že je zapsaný polynom  $p(x, y, z)$  možné vyjádřit ve tvaru součtu čtverců polynomů. Rozklad na SOS pak bude důkazem, že je tento polynom nezáporný (tedy pozitivně semidefinitní) a bude tím též dokázána uvedená nerovnost.

Reálný polynom  $p(x, y, z)$  je tří neurčitých sudého stupně 4, který je základní podmínkou pro existenci rozkladu na součet čtverců. Nyní bychom mohli přejít k počítačovému řešení s využitím programu MATLAB, který by vydal jistou (celočíselnou) Gramovu matici  $Q$  a příslušný vektor monomů  $z$ , ze kterých by bylo možné určit jeden konkrétní rozklad polynomu  $p(x, y, z)$  na součet čtverců polynomů, čímž by byl důkaz proveden. Nechme si ovšem tento postup až na závěr řešeného příkladu 8 a pokusme se obdobně jako dříve zprvu využít klasických metod a lidského přístupu k zadanému problému, abychom získali určité porovnání ručního způsobu výpočtu s počítačovým.

Vzhledem k uvedenému vyjádření polynomu  $p$  představuje očekávané členy hledaného rozkladu na SOS šestice monomů  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$ ,  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ . Můžeme tedy zapsat množinu  $\Lambda_m$  skládající se z prvků  $\beta_1 = (2, 0, 0)$ ,  $\beta_2 = (0, 2, 0)$ ,  $\beta_3 = (0, 0, 2)$ ,  $\beta_4 = (1, 1, 0)$ ,  $\beta_5 = (1, 0, 1)$ ,  $\beta_6 = (0, 1, 1)$ . Vzhledem k uvedeným prvkům bude Gramova matice  $B$  typu  $6 \times 6$  v obecném vyjádření:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{pmatrix}$$

Z výše uvedeného zápisu matice  $B$  je zřejmé, že celková náročnost výpočtu opět vzrostla. Operace s maticemi takových rozměrů nemusí být vždy triviální záležitost, a to i v případě výpočtů s celočíselnými hodnotami a bez zavedených parametrů. Vypočteme proto ručně již pouze konkrétní prvky uvedené matice pro daný polynom  $p$ , zavedme parametry a další kroky výpočtu přenechme počítači a příslušnému matematickému softwaru. Zápis výpočtu jednotlivých prvků uvedeme ve zkrácené podobě – stejně jako dříve nebudeme zapisovat všechny rovnosti vzájemně symetrických prvků matice  $B$  a zároveň v případě provázanosti některých konkrétních prvků uvedeme vztah pouze jednou. Při dopočtu výsledné podoby Gramovy matice  $B$  pak vyjdeme z komutativity sčítání v  $\mathbb{R}$ , tedy vztahu  $a + b = b + a$ .

$$\begin{aligned} b_{11} : \beta_1 + \beta_1 &= (2, 0, 0) + (2, 0, 0) = (4, 0, 0) && \Rightarrow b_{11} = 1 \\ b_{12} : \beta_1 + \beta_2 &= \beta_2 + \beta_1 = \beta_4 + \beta_4 = (2, 0, 0) + (0, 2, 0) = (0, 2, 0) + (2, 0, 0) = (1, 1, 0) + (1, 1, 0) = (2, 2, 0) && \Rightarrow 2b_{12} + b_{44} = 2 \\ b_{13} : \beta_1 + \beta_3 &= \beta_3 + \beta_1 = \beta_5 + \beta_5 = (2, 0, 0) + (0, 0, 2) = (0, 0, 2) + (2, 0, 0) = (1, 0, 1) + (1, 0, 1) = (2, 0, 2) && \Rightarrow 2b_{13} + b_{55} = 2 \\ b_{14} : \beta_1 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_1 = (2, 0, 0) + (1, 1, 0) = (1, 1, 0) + (2, 0, 0) = (3, 1, 0) && \Rightarrow 2b_{14} = -3; b_{14} = -\frac{3}{2} \\ b_{15} : \beta_1 + \beta_5 &= \beta_5 + \beta_1 = (2, 0, 0) + (1, 0, 1) = (1, 0, 1) + (2, 0, 0) = (3, 0, 1) && \Rightarrow 2b_{15} = 0; b_{15} = 0 \\ b_{16} : \beta_1 + \beta_6 &= \beta_6 + \beta_1 = \beta_4 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_4 = (2, 0, 0) + (0, 1, 1) = (0, 1, 1) + (2, 0, 0) = \\ &= (1, 1, 0) + (1, 0, 1) = (1, 0, 1) + (1, 1, 0) = (2, 1, 1) && \Rightarrow 2b_{16} + 2b_{45} = 0; b_{16} + b_{45} = 0 \\ b_{22} : \beta_2 + \beta_2 &= (0, 2, 0) + (0, 2, 0) = (0, 4, 0) && \Rightarrow b_{22} = 1 \\ b_{23} : \beta_2 + \beta_3 &= \beta_3 + \beta_2 = \beta_6 + \beta_6 = (0, 2, 0) + (0, 0, 2) = (0, 0, 2) + (0, 2, 0) = (0, 1, 1) + (0, 1, 1) = (0, 2, 2) && \Rightarrow 2b_{23} + b_{66} = 2 \\ b_{24} : \beta_2 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_2 = (0, 2, 0) + (1, 1, 0) = (1, 1, 0) + (0, 2, 0) = (1, 3, 0) && \Rightarrow 2b_{24} = 0; b_{24} = 0 \\ b_{25} : \beta_2 + \beta_5 &= \beta_5 + \beta_2 = (0, 2, 0) + (1, 0, 1) = (1, 0, 1) + (0, 2, 0) = (1, 2, 1) && \Rightarrow 2b_{25} = 0; b_{25} = 0 \\ b_{26} : \beta_2 + \beta_6 &= \beta_6 + \beta_2 = (0, 2, 0) + (0, 1, 1) = (0, 1, 1) + (0, 2, 0) = (0, 3, 1) && \Rightarrow 2b_{26} = -3; b_{26} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{33} : \beta_3 + \beta_3 &= (0, 0, 2) + (0, 0, 2) = (0, 0, 4) && \Rightarrow b_{33} = 1 \\
b_{34} : \beta_3 + \beta_4 &= \beta_4 + \beta_3 = \beta_5 + \beta_6 = \beta_6 + \beta_5 = (0, 0, 2) + (1, 1, 0) = (1, 1, 0) + (0, 0, 2) = \\
&= (1, 0, 1) + (0, 1, 1) = (0, 1, 1) + (1, 0, 1) = (1, 1, 2) && \Rightarrow 2b_{34} + 2b_{56} = 0; b_{34} + b_{56} = 0 \\
b_{35} : \beta_3 + \beta_5 &= \beta_5 + \beta_3 = (0, 0, 2) + (1, 0, 1) = (1, 0, 1) + (0, 0, 2) = (1, 0, 3) && \Rightarrow 2b_{35} = -3; b_{35} = -\frac{3}{2} \\
b_{36} : \beta_3 + \beta_6 &= \beta_6 + \beta_3 = (0, 0, 2) + (0, 1, 1) = (0, 1, 1) + (0, 0, 2) = (0, 1, 3) && \Rightarrow 2b_{36} = 0; b_{36} = 0 \\
b_{46} : \beta_4 + \beta_6 &= \beta_6 + \beta_4 = (1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (0, 1, 1) + (1, 1, 0) = (1, 2, 1) && \Rightarrow 2b_{46} = 0; b_{46} = 0
\end{aligned}$$

Výpočtem konkrétní Gramovy matice  $B$  došlo ke svázání dokonce pěti dvojic prvků, konkrétně prvků  $b_{12}$  a  $b_{44}$ ,  $b_{13}$  a  $b_{55}$ ,  $b_{16}$  a  $b_{45}$ ,  $b_{23}$  a  $b_{66}$ ,  $b_{34}$  a  $b_{56}$ . Musíme tedy zavést pět reálných parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\tau$ . Položme proto  $b_{12} = \lambda$ ,  $b_{13} = \omega$ ,  $b_{16} = \sigma$ ,  $b_{23} = \varepsilon$  a  $b_{34} = \tau$ . Získáme tak po dosazení a dopočtení matici  $B$  ve tvaru:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \omega & -\frac{3}{2} & 0 & \sigma \\ \lambda & 1 & \varepsilon & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ \omega & \varepsilon & 1 & \tau & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \tau & 2-2\lambda & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\sigma & 2-2\omega & -\tau \\ \sigma & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\tau & 2-2\varepsilon \end{pmatrix}$$

Abychom mohli určit jistý rozklad uvažovaného polynomu  $p(x, y, z)$  na součet čtverců, musíme rozhodnout o přípustných hodnotách parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\tau$ , resp. vypočítat možné konfigurace těchto parametrů, při kterých zůstane matice  $B$  pozitivně semidefinitní. Obdobně jako dříve musíme na základě determinantu  $\det(B - yE)$  určit charakteristický polynom  $F(y)$ , následně přejít k polynomu  $F(-y)$  s koeficienty srovnanými u zavedené neurčité  $y$  a na závěr rozhodnout, pro které hodnoty parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\tau$  nenastane v polynomu  $F(-y)$  žádná znaménková změna. Jak bylo již dříve uvedeno, výpočet nyní přenecháme počítačovému softwaru, kdy obdobně jako dříve zapíšeme získaný výstup z programu a pokusíme se určit, budou-li existovat, některé přípustné celočíselné konfigurace zavedených parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\tau$ . Zapíšeme též časovou náročnost počítačového výpočtu a na závěr pro vybranou konfiguraci dopočteme rozklad na SOS.

$$\begin{aligned}
F(-y) = & y^6 + \frac{1}{64}y^5(576 - 128\epsilon - 128\lambda - 128\omega) + \frac{1}{64}y^4(1680 - 896\epsilon - 64\epsilon^2 - 896\lambda + 256\epsilon\lambda \\
& - 64\lambda^2 - 128\sigma^2 - 128\tau^2 - 896\omega + 256\epsilon\omega + 256\lambda\omega - 64\omega^2) + \frac{1}{64}y^3(1440 - 1856\epsilon \\
& - 448\epsilon^2 + 128\epsilon^3 - 1856\lambda + 1280\epsilon\lambda + 128\epsilon^2\lambda - 448\lambda^2 + 128\epsilon\lambda^2 + 128\lambda^3 - 192\lambda\sigma \\
& - 704\sigma^2 + 128\epsilon\sigma^2 + 128\lambda\sigma^2 + 192\sigma\tau - 704\tau^2 + 128\epsilon\tau^2 + 128\lambda\tau^2 - 1856\omega \\
& + 1280\epsilon\omega + 128\epsilon^2\omega + 1280\lambda\omega - 384\epsilon\lambda\omega + 128\lambda^2\omega + 128\sigma^2\omega - 192\tau\omega + 128\tau^2\omega \\
& - 448\omega^2 + 128\epsilon\omega^2 + 128\lambda\omega^2 + 128\omega^3) + \frac{1}{64}y^2(-420 - 896\epsilon - 1008\epsilon^2 + 640\epsilon^3 \\
& - 896\lambda + 1728\epsilon\lambda + 640\epsilon^2\lambda - 256\epsilon^3\lambda - 1008\lambda^2 + 640\epsilon\lambda^2 + 640\lambda^3 - 256\epsilon\lambda^3 \\
& - 960\lambda\sigma + 384\lambda^2\sigma - 1120\sigma^2 + 384\epsilon\sigma^2 + 128\epsilon^2\sigma^2 + 512\lambda\sigma^2 + 64\lambda^2\sigma^2 + 64\sigma^4 \\
& + 288\epsilon\tau + 192\epsilon\lambda\tau + 768\sigma\tau - 384\epsilon\sigma\tau + 192\sigma^2\tau - 1120\tau^2 + 512\epsilon\tau^2 + 64\epsilon^2\tau^2 \\
& + 384\lambda\tau^2 + 128\lambda^2\tau^2 + 64\sigma^2\tau^2 + 64\tau^4 - 896\omega + 1728\epsilon\omega + 640\epsilon^2\omega - 256\epsilon^3\omega \\
& + 1728\lambda\omega - 768\epsilon\lambda\omega - 512\epsilon^2\lambda\omega + 640\lambda^2\omega - 512\epsilon\lambda^2\omega - 256\lambda^3\omega + 288\sigma\omega \\
& + 192\epsilon\sigma\omega + 384\lambda\sigma\omega + 512\sigma^2\omega - 256\lambda\sigma^2\omega - 960\tau\omega + 384\epsilon\tau\omega - 192\sigma\tau\omega \\
& + 512\tau^2\omega - 256\epsilon\tau^2\omega - 1008\omega^2 + 640\epsilon\omega^2 + 640\lambda\omega^2 - 512\epsilon\lambda\omega^2 + 64\sigma^2\omega^2 \\
& + 384\tau\omega^2 + 64\tau^2\omega^2 + 640\omega^3 - 256\epsilon\omega^3 - 256\lambda\omega^3) + \frac{1}{64}y(36 + 184\epsilon - 704\epsilon^2 \\
& + 736\epsilon^3 + 184\lambda + 640\epsilon\lambda + 1024\epsilon^2\lambda - 768\epsilon^3\lambda - 704\lambda^2 + 736\epsilon\lambda^2 + 736\lambda^3 - 768\epsilon\lambda^3 \\
& - 1104\lambda\sigma - 288\epsilon\lambda\sigma + 1152\lambda^2\sigma - 496\sigma^2 + 384\epsilon\sigma^2 + 448\epsilon^2\sigma^2 - 128\epsilon^3\sigma^2 + 352\lambda\sigma^2 \\
& - 128\epsilon^2\lambda\sigma^2 + 192\lambda^2\sigma^2 - 128\epsilon\lambda^2\sigma^2 + 192\lambda\sigma^3 + 128\sigma^4 + 864\epsilon\tau + 192\epsilon\lambda\tau \\
& - 384\epsilon^2\lambda\tau + 528\sigma\tau - 480\epsilon\sigma\tau + 288\lambda\sigma\tau + 192\epsilon\lambda\sigma\tau - 192\lambda^2\sigma\tau + 384\sigma^2\tau - 192\sigma^3\tau \\
& - 496\tau^2 + 640\epsilon\tau^2 + 192\epsilon^2\tau^2 + 384\lambda\tau^2 - 128\epsilon^2\lambda\tau^2 + 448\lambda^2\tau^2 - 128\epsilon\lambda^2\tau^2 \\
& - 128\lambda^3\tau^2 - 288\sigma\tau^2 - 192\epsilon\sigma\tau^2 + 192\lambda\sigma\tau^2 + 192\sigma^2\tau^2 + 128\tau^4 + 184\omega + 640\epsilon\omega \\
& + 736\epsilon^2\omega - 768\epsilon^3\omega + 640\lambda\omega - 1792\epsilon^2\lambda\omega + 512\epsilon^3\lambda\omega + 1024\lambda^2\omega - 1792\epsilon\lambda^2\omega \\
& + 512\epsilon^2\lambda^2\omega - 768\lambda^3\omega + 512\epsilon\lambda^3\omega + 864\sigma\omega + 192\epsilon\sigma\omega + 1152\lambda\sigma\omega - 384\epsilon\lambda\sigma\omega \\
& - 768\lambda^2\sigma\omega + 640\sigma^2\omega - 128\epsilon^2\sigma^2\omega - 512\lambda\sigma^2\omega - 128\epsilon\lambda\sigma^2\omega - 1104\tau\omega + 1152\epsilon\tau\omega \\
& - 288\lambda\tau\omega - 384\epsilon\lambda\tau\omega - 576\sigma\tau\omega + 384\lambda\sigma\tau\omega + 352\tau^2\omega - 512\epsilon\tau^2\omega - 128\epsilon\lambda\tau^2\omega \\
& - 128\lambda^2\tau^2\omega + 192\tau^3\omega - 704\omega^2 + 1024\epsilon\omega^2 + 736\lambda\omega^2 - 1792\epsilon\lambda\omega^2 + 512\epsilon^2\lambda\omega^2 \\
& + 512\epsilon\lambda^2\omega^2 - 384\epsilon\sigma\omega^2 + 192\sigma^2\omega^2 - 128\epsilon\sigma^2\omega^2 + 1152\tau\omega^2 - 768\epsilon\tau\omega^2 + 192\tau^2\omega^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -128\lambda\tau^2\omega^2 + 736\omega^3 - 768\epsilon\omega^3 - 768\lambda\omega^3 + 512\epsilon\lambda\omega^3) + \frac{1}{64}(-1 - 8\epsilon + 64\epsilon^2 \\
& - 64\epsilon^3 - 8\lambda - 64\epsilon\lambda + 512\epsilon^2\lambda - 512\epsilon^3\lambda + 64\lambda^2 - 64\epsilon\lambda^2 - 64\lambda^3 + 64\epsilon\lambda^3 + 96\lambda\sigma \\
& - 576\epsilon\lambda\sigma + 576\epsilon^2\lambda\sigma - 96\lambda^2\sigma + 48\sigma^2 - 304\epsilon\sigma^2 + 384\epsilon^2\sigma^2 - 128\epsilon^3\sigma^2 - 32\lambda\sigma^2 \\
& - 256\epsilon^2\lambda\sigma^2 + 128\lambda^2\sigma^2 - 128\epsilon\lambda^2\sigma^2 + 192\lambda\sigma^3 + 64\sigma^4 - 64\epsilon^2\sigma^4 - 72\epsilon\tau + 192\epsilon\lambda\tau \\
& - 768\epsilon^2\lambda\tau - 48\sigma\tau + 192\epsilon\sigma\tau + 288\lambda\sigma\tau + 384\epsilon\lambda\sigma\tau - 384\lambda^2\sigma\tau + 192\sigma^2\tau - 192\epsilon^2\sigma^2\tau \\
& - 576\lambda\sigma^2\tau - 192\sigma^3\tau + 48\tau^2 + 256\epsilon\tau^2 - 16\epsilon^2\tau^2 - 304\lambda\tau^2 - 128\epsilon^2\lambda\tau^2 + 384\lambda^2\tau^2 \\
& - 256\epsilon\lambda^2\tau^2 - 128\lambda^3\tau^2 - 288\sigma\tau^2 - 192\epsilon\sigma\tau^2 + 384\lambda\sigma\tau^2 + 128\sigma^2\tau^2 - 128\epsilon\lambda\sigma^2\tau^2 \\
& - 192\epsilon\lambda\tau^3 + 64\tau^4 - 64\lambda^2\tau^4 - 8\omega - 64\epsilon\omega - 64\epsilon^2\omega + 64\epsilon^3\omega - 64\lambda\omega + 512\epsilon\lambda\omega \\
& - 1536\epsilon^2\lambda\omega + 512\epsilon^3\lambda\omega + 512\lambda^2\omega - 1536\epsilon\lambda^2\omega + 1024\epsilon^2\lambda^2\omega - 512\lambda^3\omega + 512\epsilon\lambda^3\omega \\
& - 72\sigma\omega + 192\epsilon\sigma\omega + 768\lambda\sigma\omega - 768\epsilon\lambda\sigma\omega - 768\lambda^2\sigma\omega + 256\sigma^2\omega - 256\epsilon^2\sigma^2\omega \\
& - 256\lambda\sigma^2\omega - 256\epsilon\lambda\sigma^2\omega + 512\epsilon^2\lambda\sigma^2\omega - 192\epsilon\sigma^3\omega + 96\tau\omega + 768\epsilon\tau\omega - 576\lambda\tau\omega \\
& - 768\epsilon\lambda\tau\omega + 768\epsilon^2\lambda\tau\omega + 576\lambda^2\tau\omega - 384\sigma\tau\omega - 864\epsilon\sigma\tau\omega + 384\lambda\sigma\tau\omega - 32\tau^2\omega \\
& - 256\epsilon\tau^2\omega - 256\epsilon\lambda\tau^2\omega - 256\lambda^2\tau^2\omega + 512\epsilon\lambda^2\tau^2\omega - 192\lambda\sigma\tau^2\omega + 192\tau^3\omega + 64\omega^2 \\
& + 512\epsilon\omega^2 - 64\lambda\omega^2 - 1536\epsilon\lambda\omega^2 + 1024\epsilon^2\lambda\omega^2 + 1024\epsilon\lambda^2\omega^2 - 1024\epsilon^2\lambda^2\omega^2 \\
& - 768\epsilon\sigma\omega^2 + 768\epsilon\lambda\sigma\omega^2 - 16\sigma^2\omega^2 - 128\epsilon\sigma^2\omega^2 - 96\tau\omega^2 - 768\epsilon\tau\omega^2 + 128\tau^2\omega^2 \\
& - 128\lambda\tau^2\omega^2 - 64\omega^3 - 512\epsilon\omega^3 + 64\lambda\omega^3 + 512\epsilon\lambda\omega^3)
\end{aligned}$$

Výše uvedené vyjádření polynomu  $F(-y)$  je dokladem, že výpočet charakteristického polynomu a jeho následné úpravy v tomto případě již výrazně převyšují lidské možnosti výpočtu klasickými postupy. Dalším krokem je určení přípustné (celočíslné) konfigurace zavedených parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\tau$ . Pozorný čtenář snadno nahlédne, že polynom  $F(-y)$  obsahuje celkem šest podmínek, které musí být splněny současně. Konkrétně se jedná o výrazy v závorkách, které musí být nutně všechny větší nebo rovny nule. Zápis jednotlivých podmínek (vzhledem k jejich rozsahu) nyní vynecháme. Problém ovšem nyní nastal i při řešení pomocí programu počítačové algebry Wolfram Mathematica a pokusu určit některé možné celočíselné konfigurace zavedených parametrů s využitím dříve uvedené školské výpočetní techniky. V případě vstupu s požadavkem určit až pět možných celočíselných konfigurací parametrů  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\tau$  nevydal počítač výsledek ani po více než 60 minutách výpočtu. Obdobná situace nastala i po omezení požadavku na nalezení alespoň jedné celočíselné konfigurace – program výsledek v rozumném časovém horizontu nevydal. Řešeným příkladem 8 jsme se tak dostali nejen za hranice lidských možností, kdy není myslitelné klasickými postupy nalézt konkrétní rozklad na SOS, natož pak obecný předpis pro „všechny“ rozklady, ale překonali jsme též hranici možností školské výpočetní techniky při řešení některého z dílčích problémů rozkladu polynomu na součet čtverců.

V úvodu tohoto řešeného příkladu bylo ovšem řečeno, že po pokusu o výpočet matice  $B$  a nalezení rozkladu zapsaného polynomu  $p(x, y, z)$  klasickými metodami přejdeme k počítačovému řešení s výchozí maticí  $Q$  a vektorem monomů  $z$ , které vydá program MATLAB. Po zavedení polynomu  $p$  do počítače a aktivaci příkazu `findsos` s požadavkem o výpočet matice s celočíselnými prvky v uvedené syntaxi, získáme následující výsledek:

```
>> syms x y z;
>> f=x^4+y^4+z^4+2*x^2*y^2+2*x^2*z^2+2*y^2*z^2-3*x^3*y-3*y^3*z-3*x*z^3;
>> [Q,Z,D]=findsos(f,'rational')
```

Q =	Z =	D =
2	z^2	2
0	y*z	
-1	y^2	
-3	x*z	
3	x*y	
-1	x^2	

Program přešel ke dvojnásobku matice  $Q$  a polynomu  $p$ , čímž došlo k eliminaci zlomků. Vycházíme tedy ze vztahu:

$$(z^2, yz, y^2, xz, xy, x^2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & -3 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 3 & 6 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z^2 \\ yz \\ y^2 \\ xz \\ xy \\ x^2 \end{pmatrix} = 2(x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - 3x^3y - 3y^3z - 3xz^3)$$

Před finálním zápisem vyjádření výsledného rozkladu polynomu  $p$  ve tvaru součtu čtverců polynomů do něj tedy budeme muset „vrátit dluh“ v podobě  $\frac{1}{2}$ . Problematická pasáž z hlediska počítačového řešení problému nastane ve chvíli, kdy se pokusíme obdobně jako dříve využít Choleského dekompozice v programu Wolfram Mathematica. Program totiž požaduje striktně pozitivně definitní matici, jinak výpočet zamítne, jak bylo již uvedeno dříve. Vydaný výstup a též výpočet hodnosti matice  $Q$  je uveden níže.

```
In[11]= Q = {{2, 0, -1, -3, 3, -1}, {0, 6, -3, -3, -3, 3}, {-1, -3, 2, 3, 0, -1}, {-3, -3, 3, 6, -3, 0}, {3, -3, 0, -3, 6, -3},
{-1, 3, -1, 0, -3, 2}};
CholeskyDecomposition[Q]
MatrixRank[Q]
CholeskyDecomposition: The matrix {{2, 0, -1, -3, 3, -1}, {0, 6, -3, -3, -3, 3}, {-1, -3, 2, 3, 0, -1}, {-3, -3, 3, 6, -3, 0}, {3, -3, 0, -3, 6, -3}, {-1, 3, -1, 0, -3, 2}}
is not sufficiently positive definite to complete the Cholesky decomposition to reasonable accuracy.
Out[12]= CholeskyDecomposition[{{2, 0, -1, -3, 3, -1}, {0, 6, -3, -3, -3, 3},
{-1, -3, 2, 3, 0, -1}, {-3, -3, 3, 6, -3, 0}, {3, -3, 0, -3, 6, -3}, {-1, 3, -1, 0, -3, 2}}]
Out[13]= 2
```



Pozitivně semidefinitní matice  $Q$  vydaná programem MATLAB má hodnotu  $r(Q)=2$ , z čehož lze usoudit, že i výsledný rozklad polynomu  $p$  bude ve tvaru součtu dvou čtverců. Abychom rozklad určili a dokázali platnost nerovnosti ze zadání řešeného příkladu 8, užijeme nyní obecného rozkladu na SOS z kapitoly 3. Nebudeme však nyní podrobně zapisovat všechny kroky výpočtu. Symetrickými úpravami nejprve získáme diagonální matici  $D$  a elementární transformační matice  $X, X^T$  ve tvaru:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Směrujeme k aplikaci vztahu  $U = \sqrt{D}.X^{-1}$ , na základě kterého již dopočteme hledaný rozklad daného polynomu  $p(x, y, z)$  na součet čtverců. Inverzní matice  $X^{-1}$ , matice  $\sqrt{D}$  a počítačem získaný výpočet součinu matic, tj. výsledná matice  $U$ , jsou uvedeny níže.

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \sqrt{D}.X^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{6} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyní již snadno dopočteme hledaný rozklad polynomu  $p$  na součet čtverců, čímž bude podán důkaz, že je tento polynom pozitivně semidefinitní, a zároveň tím bude dokázána platnost původní nerovnosti. Vektor monomů  $z$  se skládá z prvků  $z^2, yz, y^2, xz, xy, x^2$  řazených dle vydaného výstupu programem MATLAB.

$$U \cdot z^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{6} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^2 \\ yz \\ y^2 \\ xz \\ xy \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{3xy}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - \frac{3xz}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}x^2 - \sqrt{\frac{3}{2}}xy - \sqrt{\frac{3}{2}}y^2 - \sqrt{\frac{3}{2}}xz + \sqrt{6}yz \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hledaný rozklad polynomu  $p(x, y, z)$  je po „vrácení“  $\frac{1}{2}$  ve tvaru součtu dvou čtverců:

$$p(x, y, z) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{3xy}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - \frac{3xz}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2 \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{3}{2}}x^2 - \sqrt{\frac{3}{2}}xy - \sqrt{\frac{3}{2}}y^2 - \sqrt{\frac{3}{2}}xz + \sqrt{6}yz \right) \right]^2$$

Závěrem ještě ověříme umocněním, že uvedený rozklad skutečně představuje původně zadaný polynom  $p$ .

```
In[71]=
p = x^4 + y^4 + z^4 + 2*x^2*y^2 + 2*x^2*z^2 + 2*y^2*z^2 - 3*x^3*y - 3*y^3*z - 3*x*z^3;
SOSp = ((1/Sqrt[2]*(-x^2/sqrt[2] + 3*x*y/sqrt[2] - y^2/sqrt[2] - 3*x*z/sqrt[2] + sqrt[2]*z^2))^2) + ((1/Sqrt[2]*(sqrt[3/2]*x^2 - sqrt[3/2]*x*y - sqrt[3/2]*y^2 - sqrt[3/2]*x*z + sqrt[6]*y*z))^2);
Expand[SOSp]
TrueQ[p == Expand[SOSp]]
Out[73]= x^4 - 3 x^3 y + 2 x^2 y^2 + y^4 - 3 y^3 z + 2 x^2 z^2 + 2 y^2 z^2 - 3 x z^3 + z^4
Out[74]= True
```

Je zřejmé, že polynom získaný umocněním pomocí příkazu *Expand* se shoduje s výchozím polynomem  $p$ , což potvrdil i počítačový softwarem výstupem *True*. Důkaz je tedy u konce. Nalezli jsme jedno možné vyjádření polynomu  $p(x, y, z)$ , což znamená, že tento polynom je pozitivně semidefinitní (nezáporný), čímž je též dokázána platnost zadané nerovnosti, ke které by bylo možné zpětně od polynomu  $p$  přejít.

Řešený příklad 8 rozhodně není možné považovat za triviální, a to ať z hlediska klasických postupů, tak z hlediska počítačových metod. Jedná se o úlohu, která povahou svého zadání vypadá jednoduše, nicméně jsme poukázali na řadu problematických pasáží výpočtu, kdy jsme se pohybovali na hranici (nebo za hranicí) lidských i (z hlediska školské techniky) počítačových možností. Ukázalo se, že ne vždy se lze spolehnout pouze na techniku, nad získanými výsledky je nutné se vždy zamyslet a někdy užití úsudku a obecně lidského rozumu může celý, byť počítačem podporovaný výpočet nebo důkaz, výrazně usnadnit nebo dokonce vůbec umožnit.

## 6 ZÁVĚR

Důkaz pozitivní semidefinitnosti reálného polynomu  $f$  představuje klasický matematický problém, který lze efektivně vyřešit pomocí metody rozkladu polynomu na součet čtverců polynomů. Jedná se ovšem o techniku, která dnes obvykle nebývá vyučována na českých středních školách, ani v kurzech (počítačové) algebry na pedagogických či jiných fakultách připravujících učitele matematiky a/nebo informatiky. Moderní počítačové technologie nám dnes umožňují nahlížet na takové klasické problémy, tradiční postupy řešení a dříve objevené algoritmy nekonvenčně a s využitím matematického softwaru je možné řešit úlohy, které by byly dříve vzhledem k rozsahu, obtížnosti řešení a časové náročnosti výpočtu prakticky neřešitelné. Navíc prostřednictvím tohoto matematického softwaru, tedy programů počítačové algebry či dynamické geometrie, je možná jistá didaktická transformace celé problematiky a ve zjednodušené podobě pak mohou být postupy a získané výsledky prezentovány nejen studentům učitelství na vysokých školách, případně stávajícím učitelům matematiky nebo informatiky, ale i nadaným studentům středních škol, kteří mohou tyto postupy využít hlavně při řešení náročných úloh kupříkladu ve vyšších kolech matematických olympiád nebo obdobných matematických či informatických soutěžích. Problematika ovšem nabízí možnost užití i při řešení jistého okruhu středoškolských příkladů a důkazu nezápornosti polynomů jedné neurčité.

Rozklad reálného polynomu jedné neurčité na součet čtverců polynomů představuje zpravidla jednoduchou středoškolskou úlohu, kterou lze řešit i bez hlubších znalostí vyšší matematiky a počítačového softwaru. Opačným případem jsou pak rozklady reálných polynomů více neurčitých. Motzkinův polynom a další nalezené konstrukce, například R. M. Robinsonem, navíc naznačují nebezpečí – rozklad vůbec nemusí existovat. Jistotu nemáme, matematický software, jako například programy počítačové algebry MATLAB v součinnosti s balíčky SeDuMi a SOSTOOLS nebo Wolfram Mathematica, případně program dynamické geometrie GeoGebra, nám ovšem dává možnost rychle takový polynom identifikovat a případně využít jiných metod pro rozhodnutí, zda je daný polynom pozitivně semidefinitní (nezáporný).

V jednotlivých kapitolách disertační práce bylo prezentováno historické zakotvení i současné poznatky o stavu řešené problematiky, tj. teoretická východiska. Řešené příklady pak poukazují na možnost zjednodušené prezentace vybraných pojmů středoškolským studentům s podporou ICT, respektive kognitivních technologií, a využití

této problematiky v řešení úloh obsahujících polynomiální rovnice – ať se jedná o řešitelnost rovnice jako takové, určení počtu kořenů nebo hledání rozkladu samotného. Zároveň je z řešení uvedených příkladů zřejmá úzká provázanost matematiky a počítačových technologií (informatiky), kdy je možné tradiční problémy řešit inovativním způsobem s využitím matematického softwaru a počítač nám umožňuje výrazně celý výpočet urychlit. Výsledky vydané počítačovým softwarem jsou navíc, při dodržení správné vstupní syntaxe, bezchybné. Hlavní uplatnění najde studovaná problematika tak ve vysokoškolských kurzech (počítačové) algebry a v oborech připravující učitele matematiky a/nebo informatiky, kdy v současné době neexistuje ucelený česky psaný materiál pojednávající o rozkladech na SOS v kontextu přípravy učitelů na pedagogických fakultách. Sbíрка podrobně řešených úloh (tj. kap. 5) pak může nejen studentům pomoci pochopit celou techniku rozkladu polynomu na součet čtverců nebo její dílčí postupy. Zároveň tato pasáž poukazuje na hranici, kdy již není prakticky myslitelné užívat při výpočtu (nebo jeho dílčích částech) pouze klasické, lidské postupy a je nutné přenechat výpočet výpočetní technice a programům počítačové algebry. Též je ale demonstrována hranice možností výpočetních kapacit běžně užívané školské techniky (počítače).

Případné navazující studie by se mohly více zaměřit na specifické případy homogenních polynomů či kvadratických forem a další (počítačové) postupy výpočtu rozkladu daného polynomu na součet čtverců. Případně je možné též hlouběji studovat geometrickou stránku celé problematiky. Technické (odborné) fakulty s dostatečnou výpočetní kapacitou by se pak mohly věnovat dále polynomům vyšších stupňů ve více neurčitých, jejichž řešení klasickými postupy je prakticky nemyslitelné a na pedagogických fakultách i jiných fakultách připravující učitele matematiky nebo informatiky nenalezne praktické uplatnění.

## RESUMÉ V ČESKÉM JAZYCE

Rozklad polynomu na součet čtverců polynomů (zkr. SOS) představuje jednu z klasických metod, jak dokázat, že je jistý polynom  $f$  pozitivně semidefinitní. Jedná se o způsob důkazu úzce související se 17. Hilbertovým problémem předneseným Davidem Hilbertem v rámci přednášky *Problémy matematiky* na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži v roce 1900. V současné době se ovšem jedná o problematiku, která není obvykle vyučována na českých středních školách, ani v kurzech (počítačové) algebry v rámci přípravy učitelů matematiky a/nebo informatiky na pedagogických fakultách. Rozklad samotný může být přitom v případě polynomů jedné neurčité jednoduchou záležitostí a může se jednat o techniku, kterou mohou využít řešitelé matematických olympiád. Opačným případem jsou polynomy vyšších stupňů ve více neurčitých, při jejichž řešení se neobejdeme bez výpočetní techniky a matematického softwaru. Díky tomuto softwaru je možné nahlížet na klasické problémy nekonvenčním-inovativním způsobem optikou počítačových technologií a řešit úlohy, které by svým rozsahem byly v minulosti takřka neřešitelné. Kognitivní technologie nám navíc umožňují náročnější pasáže této problematiky a abstraktní pojmy přiblížit i studentům středních škol a současným učitelům na základních a středních školách.

Disertační práce je proto věnována nejen vymezení daného problému (vč. historických souvislostí), možnostem jeho řešení a obecným matematickým algoritmům, ale je též zaměřena na možnosti užití matematického softwaru a obecně výpočetní techniky při určování rozkladu reálného polynomu na součet čtverců polynomů. Poukazuje na limity lidských výpočtů, ale i těch realizovaných s využitím obvyklého školského vybavení. Sada podrobně řešených příkladů s postupně rostoucí úrovní náročnosti od středoškolských úloh po problémy obtížně řešitelné i s využitím počítače, pak navíc dává možnost (nejen) studentům princip rozkladu na SOS, jeho dílčí kroky i jistá omezení lépe pochopit.

### **Klíčová slova**

pozitivně semidefinitní polynom, 17. Hilbertův problém, rozklad na součet čtverců (SOS), matematický software, kognitivní technologie, Choleského dekompozice, čtvercové identity, Hornerovo schéma, řešené úlohy

## SUMMARY IN ENGLISH

Decomposition of a polynomial as a Sum of squares of polynomials (SOS) is one of the classical methods how to prove that certain polynomial  $f$  is a positive semidefinite polynomial. This is a way of proof that is closely related to the 17<sup>th</sup> Hilbert problem. David Hilbert defined this problem in his lecture *Mathematical Problems* at the 2<sup>nd</sup> International Congress of Mathematicians in Paris in 1900. At present, this is a technique that is not usually taught at Czech high schools or in (Computer) Algebra courses in the preparation of mathematics and/or computer science teachers at the faculties of education. In the case of polynomials of one variable, sum of squares decomposition could be a simple problem and this technique could be used by mathematical olympics solvers. The opposite case represents higher degree polynomials in multiple variables. Here we cannot solve the problem without computer technology and mathematical software. Thanks to this software, it is possible to look at the classical problems in an innovative way through the optics of computer technologies, and it is possible to solve problems which were almost impossible to solve in the past. Through the cognitive technologies, we can also bring near the more difficult parts of this issue and more abstract concepts to high school students and teachers at elementary and high schools.

This dissertation thesis is therefore devoted not only to the definition of the problem (including historical context), the possibilities of its solution and general mathematical algorithms, but is also focused on the possibilities of using mathematical software and computer technology in general in the sums of squares decomposition of real polynomials. The work points to the limits of human calculations, but also those realized using the usual school equipment. A set of solved problems with a gradually increasing level of difficulty from high school tasks to problems that are difficult to solve even with the use of a computer, then they also give students (not only) the principle of SOS decomposition, its partial steps and certain limitations to better understand.

### **Key words**

positive semidefinite polynomial, 17<sup>th</sup> Hilbert's problem, sum of squares decomposition (SOS), mathematical software, cognitive technology, Cholesky decomposition, square identities, Horner's method, solved problems

## LITERATURA

- [1] ARTIN, E. Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. 1927.
- [2] BEČVÁŘ, J. *Lineární algebra*. Vyd. 3. Praha: Matfyzpress, 2005. ISBN 80-86732-57-6.
- [3] BHATIA, R. *Positive definite matrices*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 2007. ISBN 978-0-691-12918-1.
- [4] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9.
- [5] XIA, B. a YANG L. *Automated Inequality Proving and Discovering*. Singapore: World Scientific Publishing, 2016. ISBN 9789814759113.
- [6] DAVÍDEK, O. Using Newton polytopes for solving SOS problem. In: *31. konference o geometrii a grafice (31st Conference on Geometry and Graphics)*. Ostrava: Vysoká škola Báňská – Technická univerzita Ostrava, 2011, s. 55-62. ISBN 978-80-248-2524-3.
- [7] DELZELL, CH. N. A continuous, constructive solution to Hilbert's 17th problem. In: *Inventiones mathematicae*. Springer-Verlag, 1984, **76**(3), s. 365-384.
- [8] DEVLIN, K. J. *Problémy pro třetí tisíciletí: sedm největších nevyřešených otázek matematiky*. Přeložil Luboš PICK. Praha: Dokořán, 2005. ISBN 80-7363-016-8.
- [9] FERNANDO J. F., GAMBOA J. M. *Real algebra from Hilbert's 17th* [online]. Pisa & Madrid, 2012 [cit. 2. 8. 2020].  
Dostupné z: <http://www.mat.ucm.es/~josefer/articulos/rgh17.pdf>
- [10] FIALA, J. Papírová geometrie v devíti jednáních. In: *Historie matematiky: sborník z 32. mezinárodní konference konané ve dnech 26. až 30. 8. 2011 v Jevíčku*. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 978-80-7378-172-9.
- [11] FIEDLER, M. *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. Praha: SNTL, Nakladatelství technické literatury, 1981.
- [12] GREITZER, S. L. *International mathematical olympiads 1959–1977*. Washington: Mathematical Association of America, 1978. ISBN 0-88385-627-1.

- [13] HEATH, T. L. *A history of Greek mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1921.
- [14] HILBERT, D. *Mathematical Problems* [online]. Paris, 1900 [cit. 2. 8. 2020]. Dostupné z: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>
- [15] KOŘÍNEK, V. *Základy algebry*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd (ČSAV), 1953, 488 s.
- [16] LALL, S. *Sums of Squares* [online]. Stanford University, 2011 [cit. 2. 8. 2020]. Dostupné z: [https://stanford.edu/class/ee364b/lectures/sos\\_slides.pdf](https://stanford.edu/class/ee364b/lectures/sos_slides.pdf)
- [17] MAREŠ, M. 6. *Geometrické algoritmy* [online]. 2011 [cit. 2. 8. 2020]. Dostupné z: <https://mj.ucw.cz/vyuka/1112/ads2/6-geom.pdf>
- [18] MOUČKA, J., RÁDL, P. *Matematika pro studenty ekonomie*. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2010. 272 s. ISBN 978-80-247-3260-2.
- [19] NEUMAJER, O. BYOD - přineste si vlastní počítačové zařízení do školy. In: *Řízení školy: odborný měsíčník pro ředitele škol*. Praha: Wolters Kluwer ČR, 2016, (12), 20-22. ISSN 1214-8679.
- [20] PARRILO, P. A. Sum of squares programs and polynomial inequalities. In: *SIAG/OPT Views-and-News: A Forum for the SIAM Activity Group on Optimization*, 2004, s. 7-15.
- [21] PECH, P., ČINČUROVÁ, L., GÜNZEL, M. et al. *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2015. ISBN 978-80-7394-531-2.
- [22] NOVÁK, B. O sedmnáctém Hilbertově problému. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* [online]. Praha, roč. 20 (1975), č. 3, str. 154–158 [cit. 2. 8. 2020]. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/139867>
- [23] O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. University of St. Andrews, 2018 [cit. 2. 8. 2020]. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>
- [24] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 2., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-434-6.



- [25] POWERS, V., WÖRMANN, T. An algorithm for sums of squares of real polynomials. In: *Journal of Pure and Applied Algebra*. (Sept.) 1995, **127**(1), s. 99-104.
- [26] PRASOLOV, V. V. *Polynomials*. New York: Springer, 2004.
- [27] PRESTEL, A., DELZELL CH. N. *Positive polynomials: from Hilbert's 17th problem to real algebra*. Berlin: Springer, 2001. ISBN 978-3-642-07445-5.
- [28] QUDDUS, S. *Positive polynomials – Hilbert's 17th problem* [online]. Indian Statistical Institute Bangalore [cit. 2. 8. 2020].  
Dostupné z: <http://www.isibang.ac.in/~sury/hilbert17.pdf>
- [29] RAŠEVSKIJ, P. K. Geometrie a její axiomatika. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* [online]. Praha, roč. 5 (1960), č. 5, s. 520-537 [cit. 2. 8. 2020].  
Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/137376>
- [30] REZNICK, B. Some Concrete Aspects of Hilbert's 17th Problem. In: *Contemporary Mathematics. American Mathematical Society*, 1998.
- [31] SEILER, P., ZHENG, Q., BALAS G. *Simplification Methods for Sum-of-Squares Programs* [online]. 6 Mar 2013, [cit. 2. 8. 2020].  
Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1303.0714v2>
- [32] STURMFELS, B. Polynomial Equations and Convex Polytopes. In: *The American Mathematical Monthly*. Mathematical Association of America, (Dec.) 1998, **10**(105), s. 907-922.
- [33] TURZÍK, D. *Matematika III: základy optimalizace*. Vyd. 3. Praha: Vydavatelství VŠCHT, 1999. ISBN 80-7080-363-0.
- [34] UNOB. *Hornerovo schéma, znaménko polynomu a znaménko racionální funkce* [online]. 2018, [cit. 2. 8. 2020].  
Dostupné z: <https://www.unob.cz/fvt/struktura/k215/Documents/M1-dodatek.pdf>
- [35] VASILJEV, H. B, JEGOROV, A. A. *Zadači vsesojuznykh matematičeskich olympiad*. Moskva: Nauka, 1988.
- [36] WOLFRAM, S. *An elementary introduction to the Wolfram Language/Stephen Wolfram*. Champaign, IL, USA: Wolfram Media, 2015. ISBN 978-1-944183-01-1.

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1 - Hermann Minkowski v různých životních etapách.....	- 8 -
Obrázek 2 - David Hilbert v letech 1886, 1912 a 1937.....	- 9 -
Obrázek 3 - Problematika pozitivní semidefinitnosti demonstrována na základní parabole .....	- 17 -
Obrázek 4 - Problematika pozitivní semidefinitnosti v trojrozměrném prostoru.....	- 18 -
Obrázek 5 - Grafy polynomů sudých a lichých stupňů v programu GeoGebra.....	- 18 -
Obrázek 6 - Graf pozitivně definitního polynomu $f(x)$ .....	- 21 -
Obrázek 7 - Graf Motzkinova polynomu v programu Wolfram Mathematica .....	- 30 -
Obrázek 8 - Graf jednoho z polynomů nalezených R. M. Robinsonem v roce 1973.....	- 31 -
Obrázek 9 - Hodnoty neurčitých $x, y$ , pro které je polynom $f(x, y)$ pozitivně semidefinitní.....	- 32 -
Obrázek 10 - Hodnoty neurčitých $x, y$ , pro které nabývá zadaný polynom $f$ nulové hodnoty .....	- 33 -
Obrázek 11 - Graf pozitivně definitního polynomu $f(x)$ z finské přípravy řešitelů MO .....	- 39 -
Obrázek 12 - Konvexní obal v prostoru $\mathbb{R}^3$ .....	- 55 -
Obrázek 13 - Konvexní obaly malých množin.....	- 55 -
Obrázek 14 - Newtonův polytop v programech Wolfram Mathematica (vlevo) a GeoGebra (vpravo).....	- 58 -
Obrázek 15 - Redukovaný Newtonův polytop se zvýrazněnými monomy.....	- 58 -
Obrázek 16 - Znaménko kubické nerovnice v dílčích intervalech .....	- 71 -
Obrázek 17 - Specifikace počítače používaného při řešení úloh v matematickém softwaru .....	- 77 -
Obrázek 18 - Graf polynomu $f(x)$ v programu Wolfram Mathematica.....	- 78 -
Obrázek 19 - Rychlost výpočtu konkrétní Gramovy matice $B$ (dle MATLABU označení $Q$ ) k řešenému příkladu 1 ..	- 80 -
Obrázek 20 - Nerovnice v programu GeoGebra 5.0.....	- 83 -
Obrázek 21 - Interval přípustných hodnot pro parametr $\lambda$ v programu GeoGebra 5.0 .....	- 84 -
Obrázek 22 - Konstrukce grafu polynomu $p(x)$ v programu GeoGebra 5.0 a vědomostním enginu Wolfram Alpha....	- 87 -
Obrázek 23 - Výpočet všech kořenů polynomu $p(x)$ a ověření správnosti výpočtu s využitím Wolfram Alpha .....	- 90 -
Obrázek 24 - Ověření neexistence rozkladu polynomu $p(x)$ na součet čtverců v programu MATLAB .....	- 90 -
Obrázek 25 - Graf pozitivně definitní kvadratické formy $f(x, y)$ .....	- 94 -
Obrázek 26 - Graf paraboly k oboru pravdivosti podmínky $P_2$ .....	- 98 -
Obrázek 27 - Znaménko kubické nerovnice v příslušných intervalech .....	- 100 -
Obrázek 28 - Graf pozitivně semidefinitního polynomu $f(x,y)$ daného zadáním řešeného příkladu č. 4 .....	- 107 -
Obrázek 29 - Graf nezáporného (pozitivně semidefinitního) polynomu $f(x,y)$ z řešeného příkladu 5 .....	- 114 -
Obrázek 30 - Graf reálného polynomu $p$ dvou neurčitých $x, y$ ze zadání řešeného příkladu 6 .....	- 120 -

## SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 - Dosazování celočíselných hodnot za neurčité $x, y$ .....	- 12 -
Tabulka 2 - Experimentální hledání kořene kubické rovnice a užití Hornerova schématu.....	- 71 -
Tabulka 3 - Obecný algoritmus výpočtu pomocí Hornerova schématu.....	- 74 -
Tabulka 4 - Konkrétní středoškolský příklad na užití Hornerova schématu.....	- 75 -
Tabulka 5 - Užití Hornerova schématu při řešení kubické nerovnice.....	- 99 -

## PŘEHLED PUBLIKAČNÍ ČINNOSTI

### Tuzemské recenzované časopisy a sborníky

- [1] FRANK, J. Počítačová dekompozice polynomu na součet čtverců v historických souvislostech. *South Bohemia Mathematical Letters*, 2017, roč. 25, č. 1, s. 17-27. ISSN: 2336-2081
- [2] FRANK, J. Počítačová dekompozice polynomu na součet čtverců v historických souvislostech. In *Sborník příspěvků 8. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2017. s. 17-18. ISBN: 978-80-7394-677-7
- [3] FRANK, J., VRBÍK, V. Jedno méně obvyklé užití programu GeoGebra. *Matematika-fyzika-informatika*, 2018, roč. 27, č. 4, s. 300-305. ISSN: 1210-1761
- [4] FRANK, J. Pozitivita polynomů včetně školských souvislostí. In *Information and Communication Technology in Education 2018*. Ostrava: Ostravská univerzita, 2018. s. 25-47. ISBN: 978-80-7599-029-7
- [5] FRANK, J. Jedno užití rozkladu polynomu na SOS v přípravě řešitelů matematických olympiád. In *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2018*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2018. s. 55-60. ISBN: 978-80-86843-64-3
- [6] FRANK, J. Jedno užití rozkladu polynomu na SOS v přípravě řešitelů matematických olympiád. In *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2018: sborník abstraktů*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2018. s. 5. ISBN: 978-80-86843-61-2
- [7] FRANK, F., FRANK, J. Podpora inforatického myšlení s využitím Lego robotů. *Matematika-fyzika-informatika*, 2019, roč. 28, č. 1, s. 74-80. ISSN: 1805-7705
- [8] HONZÍK, L., FRANK, J. Chybné předpoklady v geometrických důkazech. *Inovace a technologie ve vzdělávání*, 2019, roč. 2019, č. 1, s. 73-79. ISSN: 2571-2519

### Zahraniční recenzované časopisy a sborníky

- [9] BATKOVÁ, D., FRANK, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š. Matematická soutěž na 1. stupni základní školy. *Edukácia*, 2019, roč. 3, č. 1, s. 8-12. ISSN: 1339-8725

- [10] BATKOVÁ, D., FRANK, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š. Matematická soutěž na 1. stupni základní školy. In *Výchova a vzdelávanie 2018: Pedagóg 21. storočia a jeho perspektívy v edukačnej praxi: zborník abstraktov z medzinárodnej vedeckej konferencie: 12. september 2018*. Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, 2018. s. 7-8. ISBN: 978-80-8152-638-1
- [11] ERETOVÁ, K., FRANK, J., HONZÍK, L., PĚCHOUČKOVÁ, Š. Project based learning in mathematics at elementary school level. In *Technical creativity in school's curricula with the form of project learning "From idea to the product" - from the kindergarten to the technical faculty: 22nd International science symposium: proceedings*. Portorož: Association of technical creativity educators Slovenia, 2019. s. 27. ISBN: 978-961-6728-62-1

Tuzemské/zahraníční recenzované časopisy a sborníky indexované ve WoS nebo Scopus  
(*pozn.: Uvedeny jsou publikace již zařazené i čekající na zařazení do uvedených databází.*)

- [12] HONZÍK, L., FRANK, J. Examination of properties and important elements of binary operations in future mathematics teachers' education. In *18th conference on applied mathematics: Aplimat 2019 proceedings*. Bratislava: Slovak University of Technology, 2019. s. 508-515. ISBN: 978-80-227-4884-1
- [13] HONZÍK, L., FRANK, J. Mathematical Courses on Children's University at Faculty of Education. In *EDULEARN19 Proceedings*. Valencia: IATED Academy, 2019. s. 277-283. ISBN: 978-84-09-12031-4, ISSN: 2340-1117
- [14] FRANK, J., FRANK, F., HONZÍK, L., JAKEŠ, T. Safety of Czech elementary school pupils on the Internet. In *ICERI2019 Proceedings*. Valencia: IATED Academy, 2019. s. 4819-4825. ISBN: 978-84-09-14755-7, ISSN: 2340-1095
- [15] FRANK, J., HONZÍK, L. Positivity of polynomial in the context of Czech education. In *19th conference on applied mathematics: Aplimat 2020 proceedings*. Bratislava: Slovak University of Technology in Bratislava, 2020. ISBN: 978-80-227-4983-1
- [16] FRANK, J., HONZÍK, L., PĚCHOUČKOVÁ, Š., ŠIKOVÁ, L. Using of natural science knowledge in teaching mathematics at elementary school. In *EDULEARN20 Proceedings*. Valencia: IATED Academy, 2020. s. 1110-1119. ISBN: 978-84-09-17979-4, ISSN: 2340-1117

- [17] HONZÍK, L., FRANK, J. Popularization of Mathematics through geocaching. In *EDULEARN20 Proceedings*. Valencie: IATED Academy, 2020. s. 1101-1109. ISBN: 978-84-09-17979-4, ISSN: 2340-1117
- [18] BENEDIKTOVÁ, L., FRANK, J. Distance learning during the Covid-19 pandemic and its impact on pupils of primary schools. In *DisCo 2020 Proceedings: Education in the Age of Covid*. Prague, 2020. (*v tisku*)

#### Kapitola v knize

- [19] FRANK, J., HONZÍK, L. Using GeoGebra for correction of incorrect premises in geometric proofs. In *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2019*. Ames, Iowa, USA: ISRES Publishing, 2019, s. 79-89. ISBN: 978-605-69854-0-9

#### Ostatní publikační činnost

- [20] FRANK, J. Využití počítačové simulace v řešení vybraných Apolloniových a Pappových úloh. In *ISVK 2018 FPE: sborník příspěvků 8. Interdisciplinární studentské vědecké konference doktorandů FPE*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2018. s. 10-23. ISBN: 978-80-261-0828-3
- [21] FRANK, J. Hornerovo schéma v řešení reálných polynomiálních rovnic. In *Sborník matematický kemp; Fyzikální kemp: 27.8. - 31.8.2018*. Plzeň: 2018. s. 11-18.
- [22] FRANK, J., HONZÍK, L. Užití programu GeoGebra (nejen) ve výuce matematiky na 2. stupni ZŠ. In *ISVK FPE 2019: sborník příspěvků 9. Interdisciplinární studentské vědecké konference doktorandů FPE*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2019. s. 21-29. ISBN: 978-80-261-0888-7
- [23] FRANK, J. Některé možnosti řešení reciprokových rovnic. In *Sborník matematický kemp: 26.8 -31.8.2019*. Plzeň: 2019. s. 3-12., ISSN: neuvedeno
- [24] FRANK, J. Výuka v čase koronaviru na 2. stupni ZŠ Chlumčany pohledem učitele matematiky. *Chlumčanský občasník*, 2020, roč. 63, č. květen, s. 24-25.