ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

POMĚR A MĚŘÍTKO VE VÝUCE MATEMATIKY NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Tereza Činčerová

Učitelství pro základní školy, obor Učitelství matematiky pro základní školy

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň 2021

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 21. dubna 2021

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala své vedoucí práce Mgr. Martině Kašparové, Ph.D. za spolupráci, odborné vedení a cenné rady při tvorbě práce.

Dále bych ráda poděkovala svým blízkým za podporu a pomoc v průběhu celého studia.

OBSAH

SEZNAM ZKRATEK ... 2
ÚVOD ... 3
1 POMĚR V HODINÁCH MATEMATIKY ... 4
1.1 POJEM POMĚR ... 6
1.2 ÚKONY S POMĚREM ... 9
1.2.1 Poměr v základní tvaru ... 9
1.2.2 Vyjádření poměru zlomkem ... 10
1.2.3 Převrácený poměr ... 10
1.2.4 Porovnávání členů poměru ... 10
1.2.5 Rozšiřování a krácení poměru ... 11
1.2.6 Porovnávání a rovnost dvou poměrů ... 14
1.2.7 Zvětšení a zmenšení hodnoty v daném poměru ... 16
1.2.8 Rozdělení celku v daném poměru ... 18
1.3 TYPOVÉ ÚLOHY A METODY JEJICH ŘEŠENÍ ... 21
1.3.1 Úkony s poměrem ... 21
1.3.2 Slovní úlohy ... 23
1.3.3 Výsledky a komentáře k typovým a slovním úlohám ... 24
1.4 POSTUPNÝ POMĚR ... 31
2 ÚMĚRA ... 36
2.1 POJEM ÚMĚRA ... 36
2.2 TROJČLENKA ... 36
2.3 PŘÍMÁ ÚMĚRNOST ... 37
2.3.1 Slovní vyjádření přímé úměry ... 37
2.3.2 Přímá úměra daná tabulkou ... 39
2.3.3 Přímá úměra zadaná grafem ... 40
2.4 NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST ... 41
2.4.1 Slovní vyjádření nepřímé úměry ... 42
2.4.2 Nepřímá úměra daná tabulkou ... 43
2.4.3 Nepřímá úměra zadaná grafem ... 45
3 MĚŘÍTKO MAPY A PLÁNU ... 47
3.1 POJEM MĚŘÍTKO ... 48
3.2 TYPOVÉ ÚLOHY A METODY JEJICH ŘEŠENÍ ... 53
3.2.1 Typové úlohy ... 53
3.2.2 Řešení typových úloh a metody jejich řešení ... 54
4 PRACOVNÍ LISTY A AKTIVITY ... 56
4.1 PRACOVNÍ LISTY ... 58
4.2 AKTIVITY ... 59
5 VÝZKUM ZNALOSTÍ ŽÁKŮ 9. ROČNÍKU ZÁKLADNÍ ŠKOLY ... 62
5.1 ZADÁNÍ ÚLOH ... 62
5.2 HODNOCENÍ KVÍZU ... 65
5.3 ZÁVĚR VÝZKUMU ... 70
ZÁVĚR ... 71
RESUMÉ ... 72
SEZNAM LITERATURY ... 73
SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ ... 75
PŘÍLOHY ... I

SEZNAM ZKRATEK

RVP ZV – Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

ZŠ – Základní škola

NSD – Největší společný dělitel

PL – Pracovní list/y

ÚVOD

Poměr je díky svému širokému využití v každodenním životě důležitým učivem základní školy. Znalosti získané při práci s poměrem využijí žáci při běžných činnostech života, jako je vaření, malování bytu, směňování peněz apod.

S poměrem se žáci setkají také při používání map a jejich měřítek. Ty souvisí s dalším vyučovaným předmětem na základní škole, a to zeměpisem. S mapami pracují lidé téměř denně, aniž by si to uvědomovali – vyhledávají polohy a adresy míst, plánují výlety, vyhledávají aktuální dopravní informace… Proto je třeba s nimi umět pracovat.

Při práci s poměrem se neobejdeme bez znalostí a dovedností souvisejícími s racionálními čísly a operacemi s nimi. Předpokladem pro úspěšné zvládnutí tématu je také pochopení pojmů *celek* a *část*.

Cílem této práce je shrnout základní informace o tématu *Poměr* a s ním souvisejícím *Měřítkem mapy*. Vysvětlit úkony s poměry a měřítky, vytvořit motivační úlohy, sestavit soubor typových úloh a vytvořit pracovní listy, které procvičují či shrnují dané téma. Dalším cílem je také prozkoumat, jaké mají znalosti o tématu žáci 9. ročníků základních škol.

Zároveň je mým cílem, aby materiály, které v diplomové práci vytvořím, mohli snadno využít ostatní vyučující. Ti mohou čerpat základní informace o tématech práce, motivační úlohy, typové příklady a aktivity, jež najdou v těle práce. Dále jim jsou k dispozici pracovní listy, které jsou i s řešením připojeny v přílohách této práce. Vzhledem k tomu, že je práce směřována pro praktické využití na základní škole, jsou informace předkládány ve formě pochopitelné pro žáky 2. stupně základních škol. Tato vysvětlení pojmů, někdy doprovázená ilustrujícím příkladem, jsou zvýrazněna rámečkem. Informace v rámečcích lze zároveň použít jako zápisky do žákovských sešitů.

1 POMĚR V HODINÁCH MATEMATIKY

Poměr je důležitým učivem základní školy (dále jen ZŠ). Jeho užití v praktickém životě je velmi široké, proto se s ním během života setká většina žáků. Při některých činnostech člověka je nezbytné umět pracovat s poměrem. Znalosti o poměru využijeme v praktickém životě například při malování bytu, kdy je nutné vědět v jakém poměru namíchat barvu s vodou nebo při vaření, kdy je poměrem vyjádřené množství surovin ve výsledné směsi a v neposlední řadě užití poměru jako měřítka mapy.

Předpokládanými znalostmi a dovednostmi při práci s poměrem jsou racionální čísla, speciálně zlomky a operace s nimi - sčítání, odčítání, násobení a dělení, rozšiřování a krácení zlomků. Dalšími nutnými znalostmi je pochopení pojmů celek a část, a také znalost výpočtu největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku.

Poměr v Rámcovém vzdělávacím programu

Poměr je dle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV) učivem druhého stupně ZŠ [1]. Bývá vyučován v 7. ročníku ZŠ nebo odpovídajících ročnících víceletých gymnázií.

Poměr je zařazen v RVP ZV do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace a tematického okruhu Číslo a proměnná. Očekávané výstupy dle RVP ZV jsou:

- *„M-9-1-04 žák užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)“* ([1], str. 34)
- *„M-9-1-05 žák řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem, pracuje s měřítky map a plánů.“* ([1], str. 34)

Učivem je dle RVP ZV poměr a jeho formy – *„měřítko, úměra a trojčlenka*“. [1]

V minimální doporučené úrovni je vyjádření vztahu celek-část pomocí poměru vynecháno. Očekává se však, že žák používá měřítko mapy a plánu.

V tématu poměr a měřítko mapy se naplňuje několik cílů definovaných v RVP ZV. Žáci si rozšiřují zásobu matematických nástrojů, učí se novým algoritmům a metodám řešení úloh. Využívají matematické znalosti a dovednosti v praktických činnostech. Odhadují, měří a porovnávají vzdálenosti a velikosti objektů, procvičují se v orientaci. Provádí rozbory problémů, sestavují plány řešení. Volí správné postupy k řešení problémů a vyhodnocují správnosti výsledků. Během skupinových prací rozvíjí schopnosti spolupráce. Zjišťují také, že k výsledku je možné dospět více způsoby. Žáci také podporují důvěru ve vlastní schopnosti, sebekontrolu během postupu řešení, cvičí se v systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti. [1]

1.1 POJEM POMĚR

Před uvedením každého nového tématu bývá dobré žáky motivovat. V matematice toho lze dosáhnout třeba pomocí úloh, které jsou zaměřené na praktické využití učiva v reálném životě. V případě poměru můžeme zvolit některé z následujících námětů. Pokud vyučující žáky dobře zná, vystačí si s jednou nebo dvěma úlohami, o kterých ví, že žáky zaujmou.

Náměty motivačních úloh pro žáky

- Malování bytu – míchání barvy s vodou či tónovací barvou v daném poměru.
- Vaření – želírovací přípravek je třeba smíchat s cukrem v určitém poměru.
- Chemie – poměr přísad ve výsledné směsi.
- Sport – výsledky zápasů.
- Poměřování měn – kurzy měn.
- Měřítko mapy – vzdálenost na mapě vzhledem ke skutečné vzdálenosti.
- Míchání pohonných hmot – množství oleje, které je třeba přidat do benzínu v motorové pile.
- Zlatý řez[1] – je označován za ideální poměr, v němž je vhodné rozdělit úsečku nebo jemuž mají vyhovovat rozměry nějakého útvaru. Vyskytuje se přirozeně v přírodě ve formě Fibbonacciho posloupnosti. Využívá se zejména v umění.

Motivační aktivita

Pro motivaci žáků k tomuto tématu volím praktickou činnost, která navíc slouží k jejich aktivizaci a zpřístupnění tématu. Během aktivity žáci objevují, že téma znají z běžného života. Aktivitu lze provést ve skupinách nebo ji může demonstrovat vyučující před třídou. Osobně preferuji kombinaci obou možností.

[1]Zlatý řez vznikne rozdělením úsečky na dvě části tak, že poměr delší části ke kratší je stejný jako poměr celé úsečky k delší části.
Zlatý řez nelze vyjádřit jako poměr dvou přirozených čísel. Pokud je jeden člen poměru přirozené číslo, musí být druhý člen iracionální číslo. Zlatý řez je vyjádřen poměrem $1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $resp.$ $\frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1$.

Pomůcky

- ✓ větší nádoba (lahev) o objemu minimálně $2\ l$,
- ✓ trychtýř,
- ✓ voda,
- ✓ sirup v originálním obalu – pro všechny skupiny stejný typ a značku,
- ✓ libovolné malé nádobky neznámého objemu, ale menšího než $0{,}25\ l$ – kelímek, víčko od obalu pracího gelu, naběračka, malý hrnek, sklenička apod.

Úkol

Smíchej sirup a vodu v poměru zadaném na etiketě.

Průběh aktivity

Žáci se rozdělí do tolika skupin, kolik máme druhů malých nádobek. V každé skupině mají jednu malou nádobku (každá skupina jinou) a všechny další zmíněné potřeby – lahev, trychtýř, voda, sirup.

1. *krok – Zjištění poměru.*

Vyučující zadává žákům první úkol: „Na obalu sirupu najděte, jak jej máme míchat s vodou, aby měl nejlepší chuť.“ Žáci vyhledají informaci na etiketě a napíšou na tabuli poměr, který našli[2]. Poté se vyučující žáků ptá, jestli ví, jak se tento zápis nazývá? (Většina značek sirupů má na etiketě napsáno přímo: „Míchejte v poměru $x : y$“, žákům tedy stačí tuto větu pouze vyhledat.).

2. *krok – Pojem díl, dílek.*

Budeme pracovat s ilustračním poměrem $1 : 7$. Vyučující společně s žáky odvodí, co zápis znamená. „Smícháme jeden dílek sirupu se sedmi dílky vody“. Dále vyučující zjišťuje, zda žáci vědí, co může být daným dílkem. Pokud by žáci nevěděli, může je směřovat otázkou: „Dílek znamená nějaké množství. Jak zajistíme, aby jeden dílek byl vždy stejné množství?“. Odpovědí může být více, např. kelímek, hrneček, mililitr, litr, celá lahev apod. Je třeba zdůraznit, že při míchání jedné směsi je nutné za jeden dílek považovat stále stejné množství.

[2] Je dobré vybrat takovou značku sirupu, která má míchání surovin napsáno ve tvaru poměru. Některé značky uvádějí výslednou směs ve tvaru 1+10, což by nebylo pro demonstraci poměru vhodné.

Určíme, že jeden dílek bude vždy malá nádobka, kterou má daná skupina k dispozici.

3. *krok – Míchání tekutin.*

Z předchozího kroku víme, že máme smíchat jeden dílek sirupu se sedmi dílky vody. Každá skupina odměří a důkladně smíchá tekutiny ve velké nádobě.

4. krok – Kontrola chuti.

Zvolíme několik ochutnavačů, kteří ochutnají směsi všech skupin a porovnají jejich chuť. Měli by dojít k závěru, že všechny směsi chutnají stejně, jelikož jsme je míchali ve stejném poměru. Všechny skupiny dostali stejný sirup[3], a tak by se pokus měl zdařit.

5. *krok – Pořadí členů v poměru.*

V této části je také dobré žáky nasměrovat na to, že pořadí členů v poměru je důležité. „Co by se stalo, kdybychom členy poměru vyměnili a místo poměru $1 : 7$ jsme měli poměr $7 : 1$? Jak bychom míchali?“ Dojdeme k závěru, že bychom míchali 7 dílků sirupu s jedním dílkem vody a tím by směs nechutnala, jak má.

Po provedení aktivity by žákům mělo být zřejmé, čemu se budeme v dalších hodinách věnovat.

V následujícím textu zpřesníme pojem poměr. V celé práci píšeme do rámečků návrhy na vysvětlení pojmů žákům 7. ročníku, které jsou přizpůsobeny jejich věku a znalostem. Ve vhodných případech jsou v rámečcích i ilustrační příklady. Orámované texty lze zároveň využít jako zápisky do žákovských sešitů.

Poměr

Podíl $a : b$, kde a, b jsou kladná racionální[4] čísla, nazýváme poměr čísel *a* a *b*. Číslo *a* nazýváme první člen poměru, číslo *b* je jeho druhý člen. [2]

Poměr čteme „a ku b“.

[3] Pokud bychom zvolili různé sirupy pro různé skupiny, nemusel by pokus vyjít. Každá značka má jinak sladké sirupy a proto, i kdybychom míchali v poměrech určených výrobci, nemusel by pokus vyjít.

[4] V sedmém ročníku volíme pouze obor racionálních čísel, jelikož žáci ještě nemají zkušenosti s iracionálními čísly. Obecně by mohla být členy poměru kladná reálná čísla, příkladem takového poměru je tzv. zlatý řez.

Například

3 ∶ 7 – čteme „tři ku sedmi“

Členy poměru zapisujeme ve stejném pořadí, v jakém o nich mluvíme.

Například

Poměr „pět a devět“ nebo „pět ku devíti“ zapíšeme jako $5 : 9$.

Anglická literatura rozlišuje dva pojmy pro poměr – „Rate“ a „Ratio“. Rate je vyjádření poměrů veličin v různých jednotkách. Ratio vyjadřuje kolikrát je první člen menší než druhý člen poměru, musí tedy být ve stejných jednotkách. V české literatuře zpravidla odpovídá poměr anglickému „ratio“. Poměr ve významu „Rate“ většinou napíšeme slovním vyjádřením, např. $2\ km$ za hodinu, jeden automobil na tři osoby.

1.2 ÚKONY S POMĚREM

1.2.1 POMĚR V ZÁKLADNÍ TVARU

Podobně jako zlomky mají i poměry základní tvar. Pokud to neodporuje kontextu úlohy, měly by se výsledné poměry uvádět v základním tvaru. Základní tvar také využijeme při porovnávání poměrů a dalších úkonech s poměrem.

Základní tvar poměru

Poměr je v základním tvaru, pokud jsou jeho členy přirozená čísla a tato čísla jsou nesoudělná. [2]

Například

$5 : 3$ - Poměr je v základním tvaru, protože čísla 5 a 3 jsou nesoudělná.

$2 : 4$ - Poměr není v základním tvaru, jelikož čísla 2 a 4 jsou soudělná (největším společným dělitelem je číslo 2).

1.2.2 VYJÁDŘENÍ POMĚRU ZLOMKEM

Poměr lze vyjádřit zlomkem. Zápis poměru pomocí zlomku je vhodný při změně zadané hodnoty v daném poměru (viz kapitola 1.2.7).

Vyjádření poměru zlomkem

Poměr je roven zlomku, v jehož čitateli je první člen poměru a ve jmenovateli druhý člen poměru, tj. $a : b = \frac{a}{b}$

Příklad

$$7 : 11 = \frac{7}{11}$$

1.2.3 PŘEVRÁCENÝ POMĚR

Pořadí členů v poměru je důležité. Poměry $a : b$ a $b : a$ se nerovnají. Pokud bychom poměrem vyjádřili například množství surovin ve výsledné směsi, bylo by množství jednotlivých přísad obráceně.

Převrácený poměr

Poměr $a : b$ je zadaný poměr. Poměr $b : a$ se nazývá *převrácený poměr*.

Zadaný poměr

$$a : b = 7 : 9$$

Převrácený poměr

$$b : a = 9 : 7$$

1.2.4 POROVNÁVÁNÍ ČLENŮ POMĚRU

Z poměru lze poznat, které veličiny je více nebo méně a kolikrát. Porovnávat členy poměru můžeme i přesto, že je poměr vyjádřen v blíže nespecifikovaných dílech.

Členy poměru lze porovnávat následujícími způsoby:

a) Porovnání, který z členů poměru je větší/menší. Porovnáme dvě přirozená čísla.

b) O kolik je daný člen poměru větší/menší. Toto porovnání členů poměru má však smysl určovat pouze ve specifických případech, kdy poměrem vyjadřujeme například výsledky sportovních utkání. Pracujeme s neupraveným poměrem, jelikož krácením nebo rozšířením by došlo ke změně skutečnosti. Užijeme matematickou operaci odčítání.

c) Kolikrát je daný člen poměru větší/menší. Užijeme matematickou operaci dělení.

Příklad

Fotbalové utkání FC Slunce s FC Hvězda skončilo $3 : 1$.

a) Který klub vyhrál?

b) O kolik gólů vyhrál vítězný klub?

c) Kolikrát více gólů dal vítězný klub?

Řešení

a) Vyhrál klub, který měl v poměru vyšší hodnotu členu, $3 > 1$, vyhrál klub FC Slunce.

b) O kolik gólů vyhrál, zjistíme, když od vyššího počtu gólů odečteme nižší počet. V tomto případě $3 - 1 = 2$. Klub FC Slunce vyhrál o dva góly nad druhým klubem.

c) Vydělíme větší člen poměru menším členem, tj. $3 : 1 = 3$. Fotbalisté FC Slunce dali $3krát$ více gólů než hráči FC Hvězda.

1.2.5 ROZŠIŘOVÁNÍ A KRÁCENÍ POMĚRU

Lahev přísady do motorového oleje ($300\ ml$) vystačí na $5\ l$ oleje. Potřebujeme však zředit pouze $2\ l$ oleje.

Úkol

Jaké množství aditiva přidáme do oleje?

1. *krok - Vyjádření poměru.*

Zjistíme, v jakém poměru mícháme přísadu s olejem (ve stejných jednotkách).

$$0{,}3 : 5$$

2. krok – Výpočet množství přísady na $1\ l$ oleje.

$$0{,}3 : 5 = 0{,}06\ l$$

3. krok – Výpočet množství přísady na 2 l oleje.

$$0{,}06 \cdot 2 = 0{,}12\ l$$

4. krok – Vyjádření poměru aditiva přidaného do 2 l oleje.

$$0{,}12 : 2$$

5. krok – Porovnání poměrů.

Porovnáme poměr s 5 l oleje s poměrem s 2 l oleje.

$$0{,}3 : 5 = 0{,}12 : 2$$

Zjistíme, že jsme vlastně poměr vyjadřující množství aditiva a 5 l oleje zkrátili číslem 2,5 (podílem druhých členů) a získali jsme poměr vyjadřující množství aditiva a 2 l oleje.

Z motivační úlohy vyplývá, že abychom získali v některých úlohách odpověď, je možné poměr upravit rozšiřováním či krácením. Takovýto způsob řešení úlohy je jednoduchý a rychlý.

V matematickém světě je nutné poměr rozšířit či zkrátit třeba pokud je naším úkolem vyjádřit výsledek v základním tvaru, porovnáváme poměry, nebo když sestavujeme postupný poměr ze dvou či více poměrů (viz kapitola 1.4).

Rozšiřování poměru

Rozšiřování poměru znamená násobení prvního i druhého členu stejným číslem různým od nuly.

Obecný postup

Rozšíření zadaného poměru $a : b$ číslem c.

$$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$$

Příklad

Poměr 5,1 : 9,2 rozšiřte číslem 10.

Řešení

$$(5{,}1 \cdot 10) : (9{,}2 \cdot 10) = 51 : 92$$

Krácení poměru

Krácení poměru znamená dělení prvního i druhého členu stejným nenulovým číslem.

Obecný postup

Zkrácení zadaného poměru $d : e$ číslem f.

$$d : e = (d : f) : (e : f)$$

Příklad

Zkraťte poměr na základní tvar 27 : 18.

Řešení

Zde máme dvě možnosti

a. Postupné krácení

Poměr opakovaně krátíme libovolným společným dělitelem, až dojdeme k číslům nesoudělným. V tomto případě se nabízí krátit opakovaně číslem tři.

$$27 : 18 = (27 : 3) : (18 : 3) = 9 : 6$$

$$9 : 6 = (9 : 3) : (6 : 3) = 3 : 2$$

b. Krácení největším společným dělitelem

Abychom získali poměr v základním tvaru neboli, aby jeho členy byla čísla nesoudělná, je třeba poměr zkrátit největším společným dělitelem (dále jen NSD) prvního a druhého členu poměru. Hledat NSD můžeme více způsoby - volíme způsob pomocí rozkladu na prvočísla.

$$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$D_{(27,18)} = 3 \cdot 3 = 9$$

Zkrátíme poměr největším společným dělitelem $D_{(27,18)} = 9$

$$(27 : 9) : (18 : 9) = 3 : 2$$

1.2.6 POROVNÁVÁNÍ A ROVNOST DVOU POMĚRŮ

V 7. ročníku ZŠ se vyučuje pouze rovnost poměrů. O jiném způsobu porovnávání poměrů se učebnice matematiky nezmiňují. Poměry se porovnávají pouze v zeměpisu, kde je poměrem zastoupeno měřítko mapy. Podle velikosti měřítek se klasifikují mapy – mapy velkých, středních a malých měřítek, dochází tedy k porovnávání měřítek na malé, střední a velké.

Určovat rovnost poměrů lze několika způsoby.

a) Porovnání odpovídajících zlomků (desetinných čísel)

V obou poměrech první člen poměru vydělíme druhým členem. Poté podíly porovnáme.

Příklad

Porovnej poměry $3 : 4$ a $9 : 12$.

Řešení

$$3 : 4 = 0{,}75 \qquad\qquad 9 : 12 = 0{,}75$$

$$0{,}75 = 0{,}75$$

Zadané poměry se sobě rovnají.

b) Rozšiřování a krácení poměrů na základní tvar

Zadání

Rovnají se poměry $9 : 12$ a $0{,}6 : 0{,}8$?

Řešení

Oba poměry vyjádříme v základním tvaru. Základní tvary porovnáme, pokud se sobě rovnají, potom se rovnají i původní poměry.

Poměr $9 : 12$ zkrátíme číslem 3 na základní tvar, což je $3 : 4$.

Poměr $0{,}6 : 0{,}8$ rozšíříme číslem 10 a poté zkrátíme číslem 2 na základní tvar.

$$0{,}6 : 0{,}8 = 6 : 8 = 3 : 4$$

Oba poměry mají stejný základní tvar poměru, proto jsou si rovny.

c) Rozšiřování a krácení poměrů

Zadání

Urči, zda se rovnají poměry $2{,}8 : 4{,}2$ a $48 : 72$.

Řešení

Pomocí rozšiřování a krácení vyjádříme jeden poměr tak, aby byl roven druhému poměru. Pokud to lze, potom jsou si poměry rovny.

Poměr $2{,}8 : 4{,}2$ rozšíříme číslem 10, abychom získali celá čísla. Poté poměr zkrátíme společným dělitelem 7 a v závěru rozšíříme číslem 12, aby se rovnali první členy. Zjistíme, že se rovnají i druhé členy obou poměrů.

$$2{,}8 : 4{,}2 = 28 : 42 = 4 : 6 = 48 : 72$$

Rozšířený první poměr se rovná druhému poměru, jsou si tedy rovny i původní poměry.

d) Využití křížového pravidla

Zjisti, zda se rovnají následující poměry.

$15 : 24$ a $20 : 32$

V tomto případě porovnáváme součiny prvního členu prvního poměru a druhého členu druhého poměru se součinem druhého členu prvního poměru a prvního členu druhého poměru.

Násobíme ve směru šipek.

$$15 : 24$$

$$20 : 32$$

Vypočítáme součiny.

$$15 \cdot 32 = 480$$

$$24 \cdot 20 = 480$$

Porovnáme součiny. $480 = 480$

Součiny jsou si rovny, proto jsou si rovny i poměry.

1.2.7 ZVĚTŠENÍ A ZMENŠENÍ HODNOTY V DANÉM POMĚRU

Zvětšení či zmenšení hodnoty v daném poměru má velmi široké využití. Žákům lze tuto skutečnost přiblížit opět na motivační úloze.

Motivační úloha

S maminkou budete péct muffiny. Recept je plánovaný na 6 porcí. Vy potřebujete deset porcí.

Recept na 6 *porcí*

Hladká mouka……………..$120\ g$

Máslo ……………….………..$60\ g$

Cukr …………………..……… $50\ g$

Vejce ………………….……….$1\ ks$

Mléko ………………………. $3\ lžíce$

Prášek do pečiva…….$0{,}5\ lžičky$

Úkol

Zjisti, jaké množství jednotlivých surovin budete potřebovat?

Průběh

Necháme žáky, aby zkusili vymyslet řešení úlohy samostatně. V případě, že na řešení nepřijdou nebo vymyslí pouze část, nasměrujeme je podle následujícího postupu.

Začneme výpočtem množství jedné ze surovin, postup bude u zbývajících ingrediencí analogický. Jako první vypočítáme množství mouky.

1. *krok - Výpočet množství potřebného na jednu porci.*

Navedeme žáky, aby vypočítali množství mouky, které je třeba na jednu porci. „Když na šest porcí potřebujeme 120 g mouky, kolik gramů je potřeba na jednu porci?“ Očekávanou odpovědí je $20\ g$ mouky (*celkové množství vydělíme počtem porcí.)*

2. *krok - Výpočet množství potřebného na 10 porcí.*

„Když na jednu porci potřebujeme $20\ g$, kolik gramů mouky potřebujeme na deset porcí?“ Vyjde nám $200\ g$ mouky (*množství na jednu porci vynásobíme počtem porcí).*

3. *krok - Výpočet množství dalších surovin.*

Měníme suroviny a jejich množství. Opakujeme 1. a 2. úkol. Postupně dojdeme k následujícím výsledkům.

Máslo …………………… $60\ \cdot \frac{10}{6} = 100\ g$

Cukr ………………………… $50 \cdot \frac{10}{6} \doteq 83\ g$

Vejce ………………………… $1 \cdot \frac{10}{6} \doteq\ 2\ ks$

Mléko ……………………….$3 \cdot \frac{10}{6} = 5\ lžic$

Kypřící prášek…. $\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{6} = \ \frac{5}{6}\ \doteq 1\ lžička$

4. *krok - Odvození obecného postupu.*

Z motivační úlohy vyvodíme následující postup pro změnu hodnoty v daném poměru.

Postup

Sestavíme poměr, v němž se bude množství měnit. Prvním členem poměru bude nový počet porcí a druhým členem bude původní počet porcí, tj.

$$10 : 6 = \frac{10}{6}$$

Připomeneme a zapíšeme si, jaké jsme dělali matematické operace, když jsme počítali množství mouky. „$120\ g$ jsme vydělili původním počtem porcí tedy šesti a poté jsme podíl vynásobili deseti.“ Zapíšeme na tabuli, jelikož zde je důležitá vizuální stránka.

$$(120 : 6)\ \cdot 10$$

Navedeme žáky na úpravy:

$$\frac{120}{6}\ \cdot 10 = \frac{120 \cdot 10}{6} = 120\ \cdot \frac{10}{6}\ (*)$$

V závěru odvodíme, že jsme dané číslo vynásobili poměrem vyjádřeným ve tvaru zlomku.

Obecně platí:

Číslo x změníme v poměru $a : b$. Hledané číslo označíme y.

1. Poměr vyjádříme ve tvaru zlomku

$$a : b = \frac{a}{b}$$

2. Zlomkem $\frac{a}{b}$ násobíme číslo x.

$$y = \frac{a}{b} \cdot x$$

Pokud je zlomek $\frac{a}{b} > 1$, potom $y > x$ a mluvíme o zvětšení čísla x v poměru $a : b$.

Pokud je zlomek $\frac{a}{b} < 1$, potom $y < x$ a říkáme, že jsme číslo x zmenšili v poměru $a : b$.

Výhody x nevýhody

A. Výhody
    a. Možnost objevit postup – Šanci na úspěch mají i slabší žáci.
    b. Mezipředmětové vztahy – Žáci mohou podle receptu v rámci pracovních činností muffiny upéct. Změnu v zadaném poměru si tak vyzkouší při praktické činnosti.
B. Nevýhody
    a. Časová náročnost.
    b. Pro žáky mohou být náročné úpravy (*).

1.2.8 ROZDĚLENÍ CELKU V DANÉM POMĚRU

Rozdělování celku v daném poměru znají žáci již z dětství, jen si toho nejsou vědomi. Nejčastěji se s ním setkají pravděpodobně při rozdělování odměn podle zásluh.

Motivační úloha

Úkol

Při hře na hledání pokladu jeden hráč vyřešil osm indicií, druhý pouze šest. Poklad 28 mincí, za které si později mohou něco nakoupit u stánku, si chtějí rozdělit podle zásluh při hledání.

Pomůcky

Do každé dvojice 28 mincí – mohou jimi být papírové peníze z deskových her nebo je můžeme vytisknout a vystříhat nebo lze mince nahradit jakýmikoli malými předměty.

Do každé dvojice kartičku s číslem 6 a druhou s číslem 8 představující počet vyřešených indicií.

Postup

1. *krok – Příprava pomůcek a zadání úkolu.*

Žáci se rozdělí do dvojic. Každá dvojice dostane výše uvedené pomůcky. Mince nechají uprostřed. Vylosují si kartičky s čísly 6 a 8.

Vyučující žáky uvede do příběhu – „Hráli jste hru na hledání pokladu. Jeden z vás vyřešil šest a druhý osm indicií, to poznáte podle kartiček s čísly. Našli jste poklad a chcete si jej spravedlivě rozdělit podle zásluh ve hře. Na vás je, abyste vymysleli, jak to provést.“

2. *krok - Zjisti, kolik mincí bys dostal/a za jednu indicii.*

Většina žáků je schopna řešení vymyslet samostatně. Ty zbylé nasměrujeme pomocí následujících otázek.

„Kolik indicií jste celkem vyřešili?“

$$8 + 6 = 14$$

„Jaká je odměna za jednu minci, aby za každou byla stejná odměna?“

$$28 : 14 = 2$$

3. *krok – Rozdělení mincí.*

„Kolik každý z vás dostane mincí, když za každou indicii dostane dvě mince?“

První získá $2 \cdot 6 = 12$ mincí,

druhý získá $2 \cdot 8 = 16$ mincí.

4. *krok – Změna množství vyřešených indicií.*

Změníme počet vyřešených indicií na 4 a 3. Opakujeme 2. a 3. krok. Zde bude odměna za jednu indicii čtyři mince. První řešitel dostane 16 mincí a druhý 12.

5. *krok – Ověření správnosti výsledku.*

„Rozdělili jste mince správně?“ „Jak to lze zkontrolovat?“ První možnost kontroly je, že žádná mince v pokladu nezbyla. Druhá, že má úspěšnější řešitel více mincí než méně úspěšný řešitel.

6. *krok – Odvození obecného postupu.*

S žáky odvodíme obecný postup pro dělení celku v daném poměru pomocí první verze zadání. Připomeneme si s žáky, že počet získaných indicií jedním a druhým hráčem lze vyjádřit poměrem $6 : 8$. Poté odvozujeme.

„Jak jsme rozdělili poklad v poměru $6 : 8$?“ Sečetli jsme nejdříve, kolik máme celkem indicií. Poté jsme počet mincí v pokladu vydělili počtem indicií. Tím jsme zjistili odměnu za jednu indicii. Abychom zjistili, kolik každý hráč dostane mincí, museli jsme vynásobit odměnu za jednu indicii počtem získaných indicií.

Obecně:

a) Početní dělení celku v daném poměru

Zadání

Rozdělte číslo *x* v poměru $a : b$.

Postup

1) Sečteme členy poměru → $a + b$.
2) Součtem $a + b$ vydělíme číslo x, tím zjistíme velikost jedné části (v našem případě odměnu za jednu indicii).
3) První část získáme, když velikost jedné části vynásobíme prvním členem poměru.
4) Druhou část získáme, když velikost jedné části vynásobíme druhým členem poměru.

Zkouška

Správnost výsledku ověříme sečtením obou částí. Tento součet musí být shodný se zadaným celkem.

Možná obměna

a. Lze změnit počet mincí a indicií.

b. Je možné zahrát hru v rámci opakování úkonů s poměrem. Například rozmístit po třídě 14 příkladů na různé úkony s poměrem a poklady s mincemi pro každou dvojici. Žáci řeší příklady, rychlejší vyhrává. Počítají si v průběhu, kdo kolikrát vyhrál. Získají poklad, který si rozdělí podle počtu vítězství.

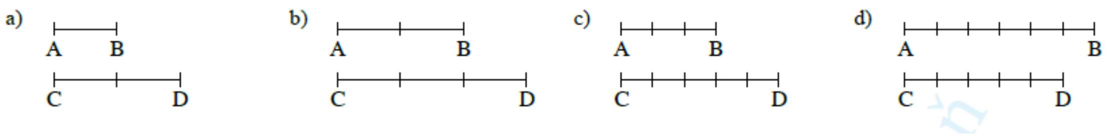
b) Geometrické dělení celku v daném poměru[5]

V 9. ročníku si žáci zopakují početní způsob dělení celku v daném poměru a rozšíří učivo o geometrický způsob dělení celku (úsečky) v daném poměru. Ke zdůvodnění geometrického postupu je nutná znalost věty uu o podobnosti trojúhelníků.

1.3 TYPOVÉ ÚLOHY A METODY JEJICH ŘEŠENÍ

1.3.1 ÚKONY S POMĚREM

Př. 1 - Vyjádři poměrem délky úseček AB a CD.



Obrázek č. 1 – Úsečky. Matematika pro 7. ročník (1))

Př. 2 - Rozhodni, zda jsou následující poměry v základním tvaru.

$18 : 3$ $1 : 5$ $7 : 21$ $125 : 73$ $14 : 17$ $64 : 16$

Př. 3 - Vyjádři zadané poměry pomocí zlomků.

$3 : 15 = -$ $7 : 14 = -$ $9 : 8 = -$

[5] Rozšíření učiva v 9. ročníku základní školy.

Př. 4 – Utvoř převrácený poměr.

Základní tvar	$4 : 9$	$2 : 5$	$15 : 12$	$1 : 13$	$42 : 53$
Převrácený poměr					

Př. 5 – Fotbalové zápasy dopadly podle následující tabulky. Rozhodčímu se však smazaly názvy týmů, které postoupily. Pomůžeš mu je doplnit? Jaký tým vyhrál?

	Tým	Skóre
1.	A	1
2.	B	3

3.	C	0
4.	D	2

5.	E	4
6.	F	1

7.	G	2
8.	H	3

1.		3
2.		4

3.		2
4.		1

1.		3
2.		2

Př. 6 – Rozšiř/zkrať poměr

a) Rozšiř poměr číslem uvedeným v závorce

$(5)\ \ 7 : 8 =$ $(2)\ \ 25 : 12 =$ $(3)\ \ 15 : 30 =$

b) Zkrať poměr číslem uvedeným v závorce

$(7)\ \ 14 : 21 =$ $(6)\ \ 18 : 36 =$ $(15)\ \ 45 : 60 =$

c) Zkrať poměr na základní tvar

$4 : 12 =$ $25 : 5 =$ $49 : 14 =$

$18 : 36 =$ $125 : 25 =$ $15 : 75 =$

Př. 7 – Vyhledej dvojice poměrů, které jsou si rovny.

$2 : 24$	$4 : 5$	$7 : 3$	$21 : 9$	$9 : 2$
$44 : 55$	$11 : 77$	$99 : 22$	$4 : 48$	$84 : 28$

Př. 8 – Změň číslo 14 v poměru $5 : 7$. ……………………

Změň číslo 28 v poměru $6 : 3$……………………

Př. 9 – Rozděl číslo 50 v poměru $2 : 3$.

Rozděl číslo 598 v poměru $4 : 9$.

Př. 10 – Rozděl úsečku dlouhou $14\ cm$ v poměru $3 : 4$.

Délka první části je =

Délka druhé části je =

1.3.2 SLOVNÍ ÚLOHY

S.ú. 1 – O víkendovém dni přečte Klárka $2x$ více stránek knihy než ve školní den. Kniha má 375 stránek. Začala číst v pátek, kdy přečetla 15 stránek. Dnes je středa ráno, takže ještě nestihla nic přečíst. Kolik dní jí zbývá k dočtení knihy, pokud bude číst stejným tempem? [3]

S.ú. 2 - V soutěži „Cesta za pokladem“ bylo skóre týmů $A : B = 20 : 16$. Za každou správně vyřešenou indicii dostal tým dva body. Který tým vyhrál? O kolik víc vyřešených indicií měl vítězný tým?

S.ú. 3 - Obdélník má obvod $76\ cm$. Strany tohoto obdélníka jsou v poměru $6 : 13$. Jaký je obsah tohoto obdélníka? [4]

S.ú. 4 – Na táboře byl poměr dívek a chlapců $21 : 18$. Chlapců bylo 54. Kolik bylo dívek? Kolik dětí bylo celkem na táboře? [4]

1.3.3 VÝSLEDKY A KOMENTÁŘE K TYPOVÝM A SLOVNÍM ÚLOHÁM

Následuje vždy tučně zvýrazněné číslo úlohy a kurzívou řešení úlohy s návodem k řešení. Podrobné postupy jednotlivých kroků jsou popsány v předchozích kapitolách.

Př. 1

Spočítáním dílků určíme délky obou úseček. Poté počet dílků zapíšeme do tvaru poměru $AB : CD$.

a) $1 : 2$ b) $2 : 3$ c) $3 : 5$ d) $6 : 5$

Př. 2

U jednotlivých poměrů určíme, zda jsou členy poměru soudělná či nesoudělná čísla. V případě nesoudělných členů jde o poměr v základním tvaru. Pokud jsou čísla soudělná, poměr není v základním tvaru.

Poměry, které jsou v základním tvaru - $1 : 5;\ 125 : 73;\ 14 : 17$

Poměry, které nejsou v základním tvaru – $18 : 3;\ 7 : 21;\ 64 : 16$

Př. 3

Čitatelem je první člen poměru, jmenovatelem je druhý člen poměru.

$3 : 15 = \frac{3}{15}$ $7 : 14 = \frac{7}{14}$ $9 : 8 = \frac{9}{8}$

Př. 4

První člen poměru je v převráceném poměru druhým členem. Druhý člen poměru je v převráceném poměru prvním členem.

Základní tvar	$\mathbf{4 : 9}$	$\mathbf{2 : 5}$	$\mathbf{15 : 12}$	$\mathbf{1 : 13}$	$\mathbf{42 : 53}$
Převrácený poměr	$9 : 4$	$5 : 2$	$12 : 15$	$13 : 1$	$53 : 42$

Př. 5

Vždy postupuje tým, který dal více gólů.

	Tým	Skóre
1.	A	1
2.	B	3

3.	C	0
4.	D	2

5.	E	4
6.	F	1

7.	G	2
8.	H	3

1.	B	3
2.	D	4

3.	E	2
4.	H	1

1.	D	3
2.	E	2

Postoupily týmy zapsané v tabulce. Vyhrál tým D.

Př. 6

Při rozšiřování a krácení poměrů násobíme/dělíme první a druhý člen poměru stejným nenulovým číslem (číslem v závorce).

Např.

a) *Poměr* $7 : 8$ *rozšíříme* 5 *následujícím způsobem*

$$(7 \cdot 5) : (8 \cdot 5) = 35 : 40$$

b) $14 : 21$ *zkrátíme* 7

$$(14 : 7) : (21 : 7) = 2 : 3$$

c) $4 : \ 12$ *zkrať na základní tvar*

Poměr můžeme zkrátit na základní tvar postupným krácením libovolným společným dělitelem nebo najdeme NSD obou členů poměru a poté jím vydělíme obě čísla[6]*.*

$$4 : 12 = (4 : 2) : (12 : 2) = 2 : 6$$

$$2 : 6 = (2 : 2) : (6 : 2) = 1 : 3$$

[6] Pokud poměr zkrátíme NSD obou členů, stanou se členy nesoudělnými čísly a poměr bude v základním tvaru.

nebo

$$D_{(4,12)} = 4$$

$$4 : 12 = (4 : 4) : (12 : 4) = 1 : 3$$

V dalších příkladech postupujeme analogicky k uvedeným příkladům.

a) *Rozšiř číslem uvedeným v závorce*

$(5)\ \ 7 : 8 = 35 : 40$ $(2)\ \ 25 : 12 = 50 : 24$ $(3)\ \ 15 : 30 = 45 : 90$

b) *Zkrať číslem uvedeným v závorce*

$(7)\ \ 14 : 21 = 2 : 3$ $(6)\ \ 18 : 36 = 3 : 6$ $(15)\ \ 45 : 60 = 3 : 4$

d) *Zkrať poměr na základní tvar*

$4 : 12 = 1 : 3$ $25 : 5 = 5 : 1$ $49 : 14 = 7 : 2$

$18 : 36 = 1 : 2$ $125 : 25 = 5 : 1$ $15 : 75 = 1 : 5$

Př. 7

Všechny poměry převedeme na základní tvar (postup viz příklad č. 6). Poté hledáme poměry se stejným základním poměrem.

$2 : 24$ $4 : 5$ $7 : 3$ $21 : 9$ $9 : 2$

$44 : 55$ $11 : 77$ $99 : 22$ $4 : 48$ $84 : 28$

$2 : 24 = 4 : 48\ (= 1 : 12)$ $7 : 3 = 21 : 9$

$4 : 5 = 44 : 55$ $9 : 2 = 99 : 22$

Zbydou poměry $11 : 77\ a\ 84 : 28$.

Př. 8

Uvedené číslo vynásobíme poměrem vyjádřeným ve tvaru zlomku.

$$14 \cdot \frac{5}{7} = \frac{14 \cdot 5}{7} = \frac{70}{7} = 10$$

$$28 \cdot \frac{6}{3} = \frac{28 \cdot 6}{3} = \frac{168}{3} = 56$$

Př. 9

1. *Sečteme první a druhý člen poměru.*

$$2 + 3 = 5$$

2. *Součtem vydělíme dané číslo, tím zjistíme velikost jednoho dílku.*

$$50 : 5 = 10$$

3. *První a druhý člen poměru zjistíme, když velikost jednoho dílku vynásobíme postupně prvním a druhým členem poměru.*

$$10 \cdot 2 = 20$$

$$10 \cdot 3 = 30$$

4. *Číslo* 50 *jsme rozdělili v poměru* $2 : 3$ *na* 20 *a* 30.

Stejným způsobem vyřešíme i druhý příklad.

1. $4 + 9 = 13$
2. $598 : 13 = 46$
3. $46 \cdot 4 = 184$
   $46 \cdot 9 = 414$
4. *Číslo* 598 *jsme rozdělili v poměru* $4 : 9$ *na* 184 *a* 414.

Př. 10

Zde máme tři možnosti řešení.

a. *Početně*

Velikost úsečky považujeme za celé číslo, které rozdělíme v zadaném poměru. Postup je shodný s postupem výpočtu v příkladu č. 9.

Velikost neboli délku vypočítaných částí poté vyznačíme na úsečce (viz obrázek č. 2).

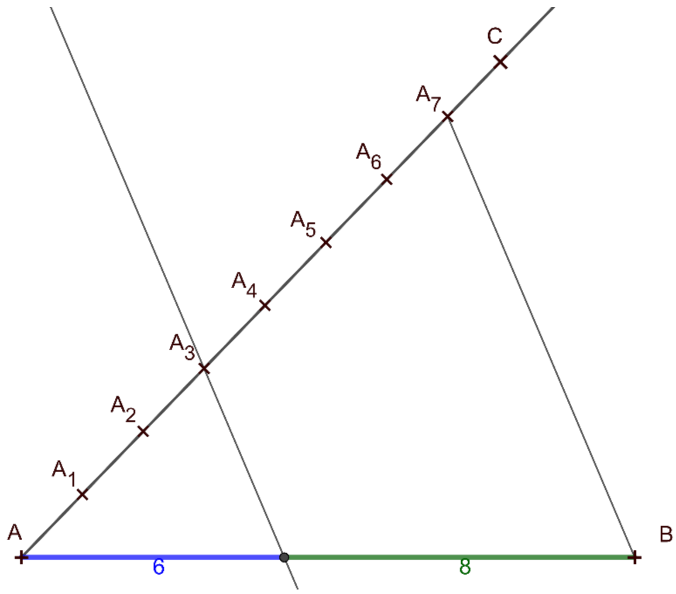
b. *Geometricky (7. ročník)*

Rozdělíme úsečku na sedm shodných dílků (součet členů poměru), každý bude měřit $2\ cm$. *První člen odpovídá třem dílkům, které vyznačíme od levého krajního –> první část úsečky měří* $6\ cm$. *Délku druhé části změříme nebo spočítáme dílky a vynásobíme jejich počet dvěma centimetry (viz obrázek č. 2).*

Obrázek č. 2 – Dělení úsečky v daném poměru. Vlastní zpracování v Geogebra (2)

c. *Geometricky (9. ročník)*

Z krajního bodu A úsečky AB vedeme různoběžnou polopřímku AC. Na této polopřímce vyznačíme od počátečního bodu A polopřímky AC sedm (součet členů poměru) shodných úseček libovolné délky. Body vyznačující shodné úsečky označíme $A_1, A_2, \ldots A_7$. Bod A_7 spojíme s krajním bodem B úsečky AB. Dále vedeme bodem A_3 rovnoběžku s přímkou A_7B. Průsečík této rovnoběžky a úsečky AB dělí úsečku AB v poměru $3:4$ (viz obrázek č. 3).



Obrázek č. 3 - Geometrické dělení úsečky v daném poměru. Vlastní zpracování v Geogebra. (2)

Velikosti obou částí změříme a zapíšeme do odpovědi.

Délka první části je = $6\ cm$

Délka druhé části je = $8\ cm$

Slovní úlohy

S.ú. 1

Využijeme poměru přečtených stránek během pracovního dne a víkendového dne.

$$1 : 2$$

kdy jeden dílek značí 15 *stránek (pátek je školní den). Za týden Klárka přečte* 9 *takových dílků, tedy* 135 *stránek.*

Od celkového počtu stránek odečteme již přečtenou část neboli 105 *stránek.*

$$375 - 105 = 270\ stránek$$

Zbylé stránky vydělíme 135*, které přečte za týden.*

$$270 : 135 = 2\ týdny = 14\ dní$$

<u>*Klárka zbytek knihy dočte přesně za* 14 *dní.*</u>

Uvedený postup nemusí být žáci sami schopni odvodit. Pravděpodobně budou řešit pro ně jednodušším způsobem, který je uveden v následujících řádcích. Je možné však tento postup v závěru srovnat s předchozím a ukázat řešení také formou poměru.

Sečteme již přečtené stránky

$$pá + so + ne + po + út = 15 + 30 + 30 + 15 + 15 = 105$$

Přičteme st a čt, kdy přečte každý den 15 stránek, abychom zjistili, kolik stránek Klárka přečte celkem za týden.

$$105 + 15 + 15 = 135$$

Uděláme rozdíl celkového počtu stránek a již přečtených.

$$375 - 105 = 270\ stránek$$

Zbylé stránky vydělíme 135*, které přečte za týden.*

$$270 : 135 = 2\ týdny = 14\ dní$$

S.ú. 2

Pro zjištění vítězného týmu porovnáme členy poměru a vybereme ten větší.

$$20 > 16$$

Vítězným týmem je tým A.

Za každou správně vyřešenou indicii dostal tým 2 body. Proto pro zjištění počtu vyřešených indicií je třeba počet získaných bodů vydělit dvěma.

$$20 : 2 = 10; \quad 16 : 2 = 8$$

Poté uděláme rozdíl obou hodnot.

$$10 - 8 = 2$$

Vyhrál tým A a měl o 2 vyřešené indicie víc.

S.ú. 3

Pomocí obvodu obdélníku vypočteme velikost menší strany a a větší strany b.

$$76 = 2 \cdot (a + b)$$

$$76 : 2 = 38\ cm.$$

Vypočítaných $38\ cm$ *považujeme za celek, který rozdělíme v poměru* $6 : 13$.

$$6 + 13 = 19$$

$$38 : 19 = 2$$

$$2 \cdot 6 = 12; 2 \cdot 13 = 26$$

Obdélník s rozměry $a = 12\ cm$, $b = 26\ cm$ má obsah

$$S = a \cdot b = 12 \cdot 26 = 312\ cm^2.$$

Obsah obdélníku je $312\ cm^2$*.*

S.ú. 4

Úloha je zaměřena na rozšiřování poměru. Počet chlapců považujeme za rozšířený druhý člen poměru. Musíme zjistit, jakým číslem byl tento člen rozšířen a poté jím rozšířit také první člen, tj.

$$21 : 18 = x : 54.$$

$$54 : 18 = 3$$

$$3 \cdot 21 = 63$$

Dívek bylo na táboře 63*.*

Celkový počet dětí na táboře zjistíme součtem počtu dívek a chlapců,

$$63 + 54 = 117\ d\check{e}t\acute{i}.$$

<u>Celkem bylo na táboře 117 dětí.</u>

1.4 POSTUPNÝ POMĚR

Dosud jsme se zabývali poměry dvou čísel, tzv. dvojčlennými poměry. V poměru může vystupovat i více členů, potom jde o tzv. postupné poměry. Postupným poměrem porovnáváme tři a více hodnot, zapisujeme $a : b : c$, kde a je první člen poměru, b je druhý člen poměru, c je třetí člen poměru.

Postupný poměr
Zápis poměrů $a : b$ a současně $b : c$ můžeme nahradit postupným poměrem $a : b : c$. [2]

Z definice vyplývá, že postupný poměr je souhrnným vyjádřením více poměrů. Postupný poměr $a : b : c$ je vyjádřením poměrů $a : b, b : c$ a také $a : c$.

Postupný poměr lze vyjádřit v základním tvaru, rozšiřovat a krátit stejně jako dvojčlenný poměr. Je možné také dělit celek v daném postupném poměru. Při těchto úpravách je nutné vždy pracovat s celým postupným poměrem.

Kromě výše zmíněných úprav postupného poměru řeší žáci v hodinách matematiky úlohy specifické pro postupný poměr – spojení dvou poměrů do postupného poměru a vyjádření dvojčlenných poměrů z postupného poměru.

1) Spojení dvou poměrů do postupného poměru

Postup

V poměrech mohou nastat dva případy.

a) Druhý člen prvního poměru je stejný jako první člen druhého poměru.

$$\boxed{a : b,\ b : c \rightarrow a : b : c}$$

Motivační úloha

Andrejka našla na internetu recept na čaj proti nachlazení. V receptu bylo uvedeno: Smíchejte bylinky v zadaných poměrech. Šípek k černému rybízu v poměru $6 : 1$ a $černý\ rybíz\ ke\ kopřivě$ v poměru $1 : 2$. Jak připraví čaj?

Úkol

Vyjádřete konkrétní množství přidaných bylinek do směsi na čaj.

1. *krok – Zvolení velikosti jednoho dílku.*

Nejdříve zvolíme velikost jednoho dílku. Ptáme se žáků, jak by odměřovali množství bylinek na čaj. Vhodná velikost jednoho dílku je jedna čajová lžička.

2. *krok – Výpočet množství jednotlivých bylinek.*

Z receptu víme, že máme míchat $š : čr = 6 : 1\ a\ čr : k = 1 : 2$. Všimneme si, že množství dílků černého rybízu je v obou poměrech stejné, tj. jeden dílek. Z toho vyplývá, že nemusíme množství bylinek upravovat. Do konvice, ve které budeme dělat čaj, přidáváme šest lžiček šípku, jednu lžičku černého rybízu a dvě lžičky kopřivy neboli šípek s černým rybízem a kopřivou v poměru $6 : 1 : 2$.

3. *krok – Odvození obecného postupu.*

Pokud je druhý člen prvního poměru stejný jako první člen druhého poměru, potom jednotlivé dvojčlenné poměry nahradíme postupným poměrem, kde druhý člen prvního poměru a první člen druhého poměru považujeme za druhý člen postupného poměru.

$$š : čr = 6 : 1\ a\ čr : k = 1 : 2$$

$$š : čr : k = 6 : 1 : 2$$

b) Druhý člen prvního poměru a první člen druhého poměru se liší.

$$a : b,\ c : d \rightarrow p : q : r,$$

$$q = n(b, c);\ p = a \cdot \frac{q}{b}, r = d \cdot \frac{q}{c}$$

Motivační úloha

Jana má při výrobě drobenky smíchat mouku s cukrem v poměru $2 : 1$ a cukr s máslem $3 : 1$. Jak drobenku připraví, aby byla mouka, cukr i máslo ve správném vzájemném vztahu?

Úkol

Vyjádřete množství jednotlivých přísad.

1. *krok – Zvolení velikosti jednoho dílku.*

Zvolíme, že jeden dílek bude roven jednomu hrnečku. Někteří žáci, možná slyšeli o „hrníčkové“ kuchařce, tak jim to bude blízké.

2. *krok – Interpretace zadání.*

Vyučující žákům pokládá následující otázky. Žáci hledají odpovědi v zadání úlohy.

„Kolikrát více je cukru proti máslu?“ Odpověď: „Trojnásobně.“

„Kolikrát více je mouky vůči cukru?“ Odpověď: „Dvojnásobně.“

„Jaké suroviny je v drobence nejvíce? Jaké nejméně?“ Odpověď: „Nejvíce je mouky, nejméně másla.“

3. *krok – Rozšíření poměru.*

„Co kdybychom poměry rozšířili tak, aby počet dílků cukru byl v obou poměrech stejný? Potom by postup řešení byl stejný jako v předchozí úloze, a to už umíme.“

V prvním poměru je jeden dílek cukru, ve druhém poměru jsou tři dílky. Potřebujeme zjistit, kolikrát je množství cukru v druhém poměru větší.

$$1 \cdot x = 3$$

$$x = 3$$

Když jsme počet dílků cukru v prvním poměru zvýšili třikrát, musíme také třikrát zvětšit počet dílků mouky. První poměr tedy rozšíříme číslem 3.

$$(2 \cdot 3) : (1 \cdot 3) = 6 : 3$$

4. *krok – Vyjádření postupného poměru.*

Po této úpravě máme druhý člen prvního poměru a první člen druhého poměru stejný. Dále postupujeme jako v úloze a).

Dojdeme k závěru, že suroviny smícháme v postupném poměru $mouka : cukr : máslo = 6 : 3 : 1$

5. *krok – Odvození obecného postupu.*

Pomocí motivační úlohy odvodíme následující obecný postup.

Jeden nebo oba poměry je třeba rozšířit takovým číslem, aby druhý člen prvního poměru a první člen druhého poměru byl v obou poměrech stejný. Hledáme nejmenší společný násobek těchto dvou členů. Po rozšíření postupujeme jako v úloze za a).

Postupný poměr je tvořen rozšířenými členy poměrů.

2) Vyjádření dvojčlenných poměrů z postupného poměru

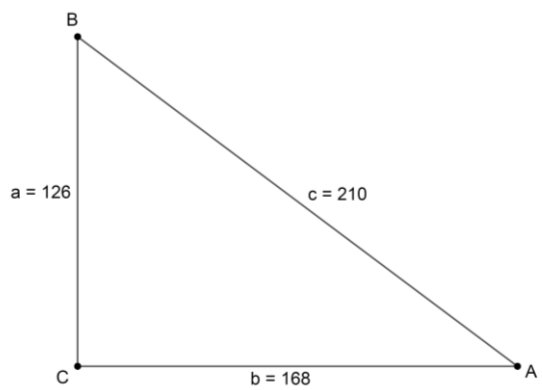
$\mathrm{a : b : c \ \rightarrow a : b, b : c, a : c}$

Motivační úloha

Strany pravoúhlého trojúhelníku s přeponou c jsou $a : b : c = 126 : 168 : 210$. V jakém základním poměru jsou odvěsny vůči přeponě a odvěsny navzájem?

1. *krok - Náčrtek.*

Sestrojíme náčrtek, se kterým budeme dále pracovat.



Obrázek č. 4 – Pravoúhlý trojúhelník. Vlastní zpracování v Geogebra. (2)

2. *krok – Vyjádření poměrů a úprava na základní tvar.*

$$a : c = 126 : 210 = 3 : 5$$

$$b : c = 168 : 210 = 4 : 5$$

$$a : b = 126 : 168 = 3 : 4$$

2 ÚMĚRA

2.1 POJEM ÚMĚRA

Pojem úměra úzce souvisí s rovností poměrů. Pokud jsou si dva poměry rovny, nazveme je úměrou. Úměru dělíme na přímou a nepřímou.

Úměra

je vyjádřením rovnosti dvou poměrů $a : b = c : d$. Kde členy a a d jsou vnější členy, b a c jsou vnitřní členy úměry. Dále platí, že součin vnějších členů úměry je roven součinu vnitřních členů úměry neboli $a \cdot d = b \cdot c$. [2]

Úměra se dělí na dva případy dle závislosti údajů na přímou a nepřímou úměrnost. Každá úměrnost může být vyjádřena třemi způsoby – slovně, tabulkou nebo grafem. Cílem může být z každého vyjádření získat požadované odpovědi nebo sestrojit jiný typ vyjádření. Žáci se během školní docházky postupně naučí všechny tři.

2.2 TROJČLENKA

„*Trojčlenka je postup řešení úlohy, který vede k sestavení rovnosti dvou poměrů s jedním neznámým členem a k výpočtu tohoto neznámého členu*“. ([5], str. 31). Poměr ve dvojicích tvořených odpovídajícími si údaji je stejný (přímá závislost) nebo převrácený (nepřímá závislost).

Žáci se s úměrností v praktických činnostech setkávají od útlého věku, aniž by si toho byli vědomi. Vědí, že do většího kelímku je třeba dát více sirupu než do malého, aby měl nápoj stejnou chuť. [6] Také pokud z domova do školy vyrazili pozdě, je třeba jít rychleji, aby stihli přijít včas na začátek vyučování.

Samotný algoritmus výpočtů v trojčlence je pro žáky velmi užitečný, jelikož s ním dokážou vyřešit více typů úloh.

Úměru trojčlenkou zapíšeme následujícím způsobem.

$$b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; d$$

$$\underline{a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; c[7]}$$

kde a a b je první dvojice údajů a c a d druhá dvojice údajů, která údajům a a b odpovídá.

Podle úměrnosti volíme, v jakých poměrech mají být zadané dvojice údajů, zda Ve stejném poměru, $a : b = c : d$, resp. $b : a = d : c$ - přímá úměrnost či převráceném $a : b = d : c$, resp. $b : a = c : d$ - nepřímá úměrnost. Pro názornost si žáci při výpočtu připisují k zápisu trojčlenky šipky. U přímé úměrnosti jsou šipky na obou stranách ve stejném směru, u nepřímé úměrnosti jsou šipky v opačném směru. Šipky určují pořadí členů v poměru.

2.3 PŘÍMÁ ÚMĚRNOST

Přímá úměrnost je typ úměry, kde je poměr mezi dvojicemi údajů stejný.

Typy úloh na přímou úměrnost

- Nákupy – čím vyšší počet kusů stejného zboží, tím vyšší cena.
- Směsi – čím více směsi potřebujeme, tím větší množství přísad do ní musíme přidat.
- Léky – dávkování léku podle hmotnosti nemocného neboli čím více člověk váží, tím větší množství léku musí užít.
- Matematika – např. Čím větší strana čtverce, tím větší je jeho obvod.
    - Práce s procenty – čím větší počet procent, tím větší část celku.

Z typů úloh lze odvodit jednoduchou slovní pomůcku, kterou se žáci učí na rozpoznání přímé úměrnosti - „Čím více….., tím více…..“.

Přímá úměrnost

je takový vztah dvou veličin, kde platí, že kolikrát se zvětší/zmenší jedna veličina, tolikrát se zvětší/zmenší také druhá veličina. [5]

2.3.1 SLOVNÍ VYJÁDŘENÍ PŘÍMÉ ÚMĚRY

Slovní zadání trojčlenky najdeme nejčastěji ve slovních úlohách. Jde o úlohy typu „Čím více…., tím více…..“. Když se žáci s přímou úměrností seznamují, bývá v zadání úloh pomůcka napsaná. Později se žáci učí přímou úměrnost poznat i bez pomůcky. Pomáhá jim představivost, znalost běžného i matematického světa.

Jakmile žáci poznají, že jde o přímou úměrnost, učí se jí správně zapsat pomocí trojčlenky a přiřadit šipky ve správném směru.

Zápis přímé úměrnosti trojčlenkou

$$\uparrow \quad b\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d \quad \uparrow$$

$$\underline{a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c}$$

$$a : b = c : d$$ [7]

Vzorová úloha

Z 5 kg čerstvých hub získáme 600 g sušených hub. Na zimu potřebujeme zásobu 1 800 g sušených hub. Kolik kilogramů čerstvých hub budeme potřebovat?

Zápis

5 kg čerstvých ……………………… 600 g sušených

<u>x kg čerstvých ……………………… 1 800 g sušených</u>

Řešení

Ze zadání je zřejmé, že čím více čerstvých hub budeme mít, tím více budeme mít i hub sušených, jedná se o přímou úměrnost. Připíšeme šipky na obou stranách trojčlenky ve stejném směru, od neznámé ke známé. Tento směr určuje pořadí členů v poměru.

↑ 5 kg čerstvých ……………………… 600 g sušených ↑

<u>x kg čerstvých ……………………… 1 800 g sušených</u>

Poměr čerstvých hub se rovná poměru suchých hub. Sestavíme rovnici vyjadřující úměrnost tak, že dáme do rovnosti poměry dvojic hodnot v levé části trojčlenky a v pravé části trojčlenky. A rovnici upravíme na součin vnitřních a vnějších členů (viz kapitola 2.1).

$$x : 5 = 1\,800 : 600$$

$$x \cdot 600 = 5 \cdot 1\,800$$

Hledáme takové číslo x, aby násobené 600 se rovnalo 9 000.

$$x \cdot 600 = 9\,000$$

$$\underline{x = 15\ \mathrm{kg}}$$

Abychom získali 1 800 g sušených hub, potřebujeme 15 kg čerstvých hub.

2.3.2 PŘÍMÁ ÚMĚRA DANÁ TABULKOU

V tabulce vyjadřující přímou úměrnost jsou dvě přímo úměrné veličiny například množství zboží a jeho cen.

Množství veličiny x [ks]	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Cena za množství y [Kč]	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Pokud je poměr mezi hodnotami x a y v každém sloupci je stejný,

$y_1 : x_1 = y_2 : x_2 = \cdots = y_5 : x_5 = k$, jde o přímou úměrnost a platí:

$$\frac{y}{x} = k, k > 0, x > 0$$

Číslo k je koeficient přímé úměrnosti.[8]

Z tohoto vztahu lze vyjádřit závislost y na x.

$$y = k \cdot x \text{ [8]}$$

Příklad

V následující tabulce je uvedeno množství pomerančů v kilogramech a odpovídající cena za pomeranče.

Doplň tabulku cen za různé množství pomerančů.

Množství pomerančů $x\ [kg]$	0,5	2	3,5	5	10
Cena za dané množství $y\ [Kč]$	12			120	

Řešení

Ze zadání je zřejmé, že jde o přímou úměrnost. Čím více pomerančů si koupíme, tím vyšší bude cena.

Vypočítat hodnoty, které doplníme do tabulky, lze dvěma způsoby.

a) Postup výpočtu „přes jednotku“

Zjistíme, kolik korun stojí 1 kg pomerančů. Pomocí této informace poté vyplníme zbytek tabulky.

Cenu za 1 kg vypočítáme z jedné ze dvou zadaných dvojic údajů v tabulce. Vybereme údaj s pěti kilogramy.

$$120 : 5 = 24$$

Dále násobíme cenu za jeden kilogram počtem zadaných kilogramů, tj.

$$y = 24 \cdot x$$

$$y_2 = 24 \cdot 2 = 48$$

$$y_3 = 24 \cdot 3{,}5 = 84$$

$$y_5 = 24 \cdot 10 = 240$$

Množství pomerančů x [kg]	0,5	2	3,5	5	10
Cena za dané množství y [$Kč$]	12	**48**	**84**	120	**240**

b) Využijeme rovnosti dvou poměrů

Poměr mezi veličinami v každém sloupci musí být stejný. Například druhý sloupec vypočítáme pomocí prvního.

$$y_1 : x_1 = y_2 : x_2$$

$$12 : 0{,}5 = y_2 : 2$$

Poměr údajů v prvním sloupci je $24 : 1$. Aby byl poměr stejný i ve druhém sloupci, musíme dosadit za y_2 číslo 48. V dalších sloupcích postupujeme analogicky.

2.3.3 PŘÍMÁ ÚMĚRA ZADANÁ GRAFEM

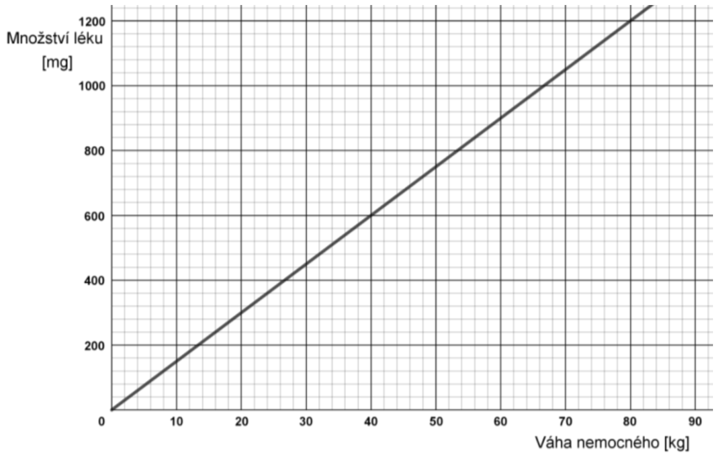
Poslední možností vyjádření přímé úměrnosti je zobrazení v grafu. Cílem je vyčíst z grafu důležité informace a dále s nimi pracovat.

Graf přímé úměrnosti

Všechny body grafu přímé úměrnosti leží na **přímce** procházející počátkem soustavy souřadnic. [5]

Příklad

V grafu je znázorněno kolik mg léku na snížení horečky, je potřeba podat nemocnému v jedné dávce. Množství závisí na hmotnosti nemocného. Pokud onemocníš, kolik mg léku budeš potřebovat?



Graf č. 1 – Přímá úměrnost. Vlastní zpracování v Geogebra. (2)

Metodická poznámka

V hodině si každý žák vyčte z grafu, kolik léku bude potřebovat. Výsledky žáci zapíšou na tabuli a společně je porovnají. Při správném postupu dojdou k závěru, že těžší spolužák užije více léku.

Ilustrační řešení

Vybraný žák váží $40\ kg$.

Váhu nemocného budeme hledat na ose x, množství léku na ose y. V grafu nalezneme bod $[40, y]$ a vyčteme hodnotu $y = 600\ mg$. Nemocnému je třeba podat $600\ mg$ léku v jedné dávce.

2.4 Nepřímá úměrnost

Nepřímá úměrnost je typ úměry, kde je poměr mezi dvojicemi údajů převrácený.

Typy úloh na nepřímou úměrnost

- Práce – čím více pracujeme, tím méně nám toho zbývá k dokončení.
- Čas zdolání vzdálenosti – čím rychleji půjdeme, tím dříve budeme v cíli.

- Stahování z internetu – čím rychlejší máme internet, tím kratší dobu stahujeme.
- Matematika – čím větší je jmenovatel zlomku, tím menší část celku je zlomkem vyjádřena.

Odvozená slovní pomůcka nepřímé úměrnosti – „Čím více……, tím méně…..“.

Nepřímá úměrnost

je takový vztah dvou veličin x a y, kde platí: Kolikrát se zvětší/zmenší hodnota x, tolikrát se zmenší/zvětší hodnota y. [5]

2.4.1 SLOVNÍ VYJÁDŘENÍ NEPŘÍMÉ ÚMĚRY

Se slovním zadáním nepřímé úměrnosti se podobně jako u přímé úměrnosti setkáme nejčastěji ve slovních úlohách. Hledáme úlohy typu „Čím více……, tím méně………..“. Opět funguje princip, že nejdřív žáci vyhledávají v zadání pomůcku, poté se snaží určit nepřímou úměrnost bez ní.

Zápis nepřímé úměrnosti trojčlenkou

$$\uparrow \quad \begin{array}{c} b \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ d \\ \underline{a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c} \end{array} \quad \downarrow$$

$$a : b = d : c \text{ [7]}$$

Příklad

Je ráno a vlastníci plantáže s jahodami se dozvěděli, že zítra začnou padat kroupy, potřebují tedy sklidit úrodu. V současné době mají 40 brigádníků, kteří by úrodu sklidili za 3 dny. Kolik jich budou potřebovat, aby se vše sklidilo ještě dnes?

Řešení

Úloha je řešitelná jednoduchou úvahou. Pokud je nutné zkrátit počet dní $3krát$, budeme potřebovat $3krát$ více pracovníků. Úvahu společně se žáky převedeme na řešení pomocí trojčlenky. Tím, že žáci znají řešení, budou schopni některé části postupu sami odvodit. Snadná bude také kontrola, zda výsledek dává v reálném světě smysl (nevychází záporný počet pracovníků, počet lidí nevyšel v desetinném čísle apod.)

Víme, že více lidí úrodu rychleji sklidí, jde tedy o nepřímou úměrnost. Zapíšeme údaje do trojčlenky a připíšeme šipky tak, aby druhá šla v opačném směru než první. Sestavíme rovnici poměrů a rozšiřujeme případně krátíme poměry tak, aby došlo k rovnosti.

$$\uparrow\ 40\ lidí \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3\ dny\ \downarrow$$

$$\underline{x\ lidí \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1\ den}$$

$$x : 40 = 3 : 1$$

$$120 : 40 = 3 : 1\ (rozšířili\ jsme\ 40)$$

$$\underline{x = 120\ lidí}$$

Na sklizení úrody za jeden den je potřeba 120 $lidí$.

2.4.2 NEPŘÍMÁ ÚMĚRA DANÁ TABULKOU

V tabulce vyjadřující nepřímou úměrnost se nachází dvě nepřímo úměrné veličiny, například množství času stráveného na cestě a rychlosti.

Rychlost $v\ [km/h]$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
Čas $t\ [h]$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2 = \cdots = v_5 \cdot t_5 = k,$$

k je koeficient nepřímé úměrnosti.[8]

Koeficient nepřímé úměrnosti je v každém sloupci tabulky stejný.

Ze vztahu lze vyjádřit závislost t na v.

$$t = \frac{k}{v}, k > 0, v > 0\ [8]$$

Příklad

Doplňte do následující tabulky čas, který je potřeba ke zdolání vzdálenosti mezi Plzní a Kralovicemi různými způsoby. V tabulce jsou uvedeny průměrné rychlosti těchto dopravních způsobů.

Prostředek	Chůze	Běh	Kolo	Auto
Rychlost $v\ [km/h]$	5	11	20	55
Čas $t\ [h]$			2	

Řešení

a) Postup výpočtu „přes jednotku“

Vypočteme, jakou vzdálenost urazíme. K výpočtu použijeme údaje ze třetího sloupečku „Kolo“. Dosadíme do vzorečku pro výpočet vzdálenosti v závislosti na rychlosti a času.

$$s = v \cdot t$$

$$s = 20 \cdot 2 = 40\ km$$

Dosazujeme do vzorečku pro výpočet času v závislosti na dráze a rychlosti.

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t_1 = \frac{40}{5} = 8$$

$$t_2 = \frac{40}{11} \doteq 3{,}6$$

$$t_4 = \frac{40}{55} \doteq 0{,}7$$

b) Využijeme rovnosti dvou poměrů.

Poměr dvou hodnot v prvním řádku musí být roven převrácenému poměru odpovídajících hodnot v druhém řádku tabulky, tj. např.

$$v_3 : v_1 = t_1 : t_3$$

$$20 : 5 = t_1 : 2$$

$$t_1 = 8$$

Prostředek	Chůze	Běh	Kolo	Auto
Rychlost $v\ [km/h]$	5	11	20	55
Čas $t\ [h]$	**8**	$\mathbf{\frac{40}{11} \doteq 3{,}6}$	2	$\mathbf{\frac{8}{11} \doteq 0{,}7}$

2.4.3 NEPŘÍMÁ ÚMĚRA ZADANÁ GRAFEM

Poslední možností vyjádření nepřímé úměrnosti je, stejně jako u přímě úměrnosti, zobrazení v grafu. Cílem je vyčíst z grafu důležité informace a dále s nimi pracovat.

Na osu x se vynáší hodnoty jedné veličiny, na osu y hodnoty druhé veličiny.

Graf nepřímé úměrnosti

Všechny body grafu nepřímé úměrnosti leží na křivce**,** která se nazývá **hyperbola**. [5]

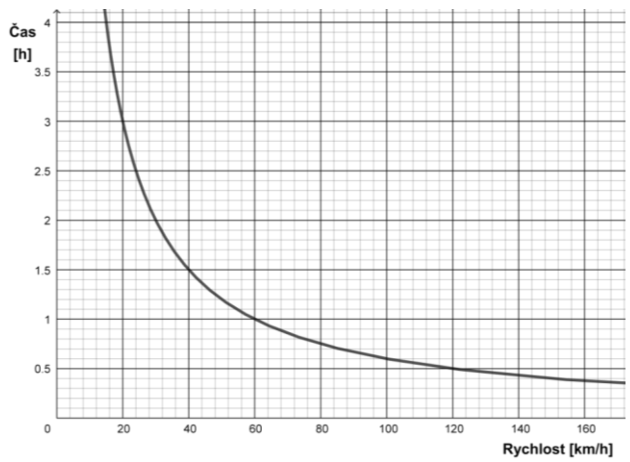
Příklad

V grafu je zobrazen čas potřebný ke zdolání určité vzdálenosti různou rychlostí.

a) O jakou jde vzdálenost?

b) Jak velký bude rozdíl času stráveného na cestě, pokud pojedeš $40\ km/h$ a $60\ km/h$?

c) Jak velký bude rozdíl času stráveného na cestě, pokud pojedeš $60\ km/h$ a $80\ km/h$?



Graf č. 2 – Nepřímá úměrnost. Vlastní zpracování v Geogebra. (2)

Řešení

a) V grafu nalezneme bod $[60,1]$. Z bodu vyčteme, že jedeme-li rychlostí $60\ km/h$, trvá cesta 1 hodinu.

   Pomocí těchto údajů vypočítáme délku cesty. Dosadíme do vzorečku pro výpočet dráhy v závislosti na rychlosti a času.

$$s = v \cdot t = 60 \cdot 1 = 60\ km$$

   Vzdálenost vyjádřená grafem je dlouhá $60\ km$.

b) Čas strávený na cestě při rychlosti $60\ km/h$ máme vyčtený z předchozí otázky neboli $1\ h\ =\ 60\ min$. Stejným způsobem vyčteme z grafu, jak dlouho bude trvat cesta, pokud pojedeme rychlostí $40\ km/h$. Cestu urazíme za 1,5 $hodiny\ =\ 90\ minut$.

   Vypočítáme rozdíl času stráveného na cestě při těchto dvou rychlostech.

$$90 - 60 = 30\ min$$

   Rozdíl času stráveného na cestě při těchto dvou rychlostech je $30\ minut$.

c) Postupujeme stejně jako v otázce za b. Při rychlosti $60\ km/h$ zdoláme vzdálenost za $1\ h\ =\ 60\ min$. Při rychlosti 80 km/h nám to bude trvat 0,75 $h\ =\ 45\ min$.

   Vypočítáme rozdíl času stráveného na cestě při těchto dvou rychlostech.

$$60 - 45 = 15\ min$$

   Rozdíl času na stráveného na cestě při těchto dvou rychlostech je $15\ minut$.

Metodická poznámka

Je dobré udělat se žáky otázku b i c, případně přidat další body, a poté s informacemi pracovat. Všimneme si, že je rozdíl rychlostí v obou případech stejný ($20\ km/h$), ale rozdíl času stejný není. Na toto je velmi důležité upozornit. Právě proto je grafem hyperbola, ne přímka.

Možná obměna - Zadáme úlohu obrácenou. V ní necháme žáky vypočítat čas strávený na cestě při různých rychlostech a zanést do grafu. Body v grafu následně propojíme, křivku nazveme hyperbola. Pro některé z nich bude tento postup přijatelnější.

3 MĚŘÍTKO MAPY A PLÁNU

S mapami se setkáváme v běžném životě téměř denně. Používáme je, když hledáme polohu nebo adresu nějakého místa a cestu k němu. Místa na mapě hledáme v souvislosti s výlety, vyhledáme adresy lékařů, úřadů apod, doručovatelé zásilek hledají adresy příjemců...

Vzhledem k velmi častému užití map v běžném životě, je třeba se umět v mapách vyznat. Mapy obsahují několik základních prvků – mapové pole, název, rok, ke kterému je mapa platná, legendu a měřítko. Poslednímu zmíněnému prvku budou věnovány následující stránky.

Měřítko mapy je na druhém stupni ZŠ vyučováno v předmětech matematika a zeměpis (geografie).

Zařazení v RVP ZV

- Obor Matematika a její aplikace, tematický okruh Číslo a proměnná. Očekávaným výstupem tohoto okruhu je dle RVP ZV: *„M-9-1-05 žák řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem, pracuje s měřítky map a plánů.“* ([1], str. 34) Obvykle se příslušné učivo vyučuje v 7. ročníku ZŠ či odpovídajícím ročníku víceletých gymnázií.
- Obor Zeměpis (Geografie), tematický okruh Geografické informace, zdroje dat, kartografie a topografie. Očekávaným výstupem je: *„Z-9-1-02 používá s porozuměním základní geografickou, topografickou a kartografickou terminologii“*. ([1], str. 77) Učivem je *geografická kartografie a topografie – měřítko glóbusu, měřítko a obsah plánů a map, praktická cvičení a aplikace s dostupnými kartografickými produkty v tištěné i elektronické podobě.*[7] [1] Obvykle je téma vyučované v 6. ročníku ZŠ nebo odpovídajícím ročníku víceletých gymnázií.

Ze zařazení tématu do vzdělávacích oborů a obsahů v RVP ZV vyplývá, že měřítko mapy je vyučováno v zeměpise v 6. ročníku, na některých školách dokonce již na prvním stupni, ale poměr a měřítko mapy v matematice až v 7. ročníku ZŠ. Z tohoto důvodu poměr a měřítko mapy jako první žákům vysvětlují učitelé zeměpisu, aby žákům přiblížili práci s ním.

[7] Z očekávaných výstupů a učiva tohoto okruhu jsou vybrány pouze ty, které souvisí s tématem této práce.

Dle autorů výzkumu [9] je měřítko mapy kritické místo kurikula zeměpisu [9], str. 19]. Důvodem je spojení s matematikou, která je neoblíbeným předmětem, konkrétně tématem převodů jednotek a práce s velkými čísly, na což nejsou žáci zvyklí. Také mají žáci potíže s motivací, jelikož nevidí praktické využití tématu. [9] Žáci se většinou naučí pouze mechanická pravidla při práci s měřítkem, do hloubky se s ním seznamují až o rok později. Proto je větší pravděpodobnost, že si žáci zafixují chybné postupy a vztahy související s prací s poměrem.

Následující stránky budou věnovány měřítku a jeho přiblížení žákům šestých ročníků bez znalosti poměru vyučovaném v předmětu matematika.

3.1 POJEM MĚŘÍTKO

Jak již bylo zmíněno výše, měřítko je jedním ze základních prvků mapy. Měřítko udává zmenšení vzdáleností v mapě proti skutečným vzdálenostem. Bez měřítka bychom tedy pouze věděli polohu míst v mapě vzhledem ke světovým stranám, ale ne jejich vzdálenosti.

Při tvorbě mapy závisí volba velikosti měřítka na druhu mapy – fyzicko-geografická, politická, geologická apod., rozloze zobrazovaného území, přehlednosti a čitelnosti prvků a samozřejmě na velikosti mapového pole.

Motivační aktivita

Porovnávání stejné vzdálenosti na různých mapách se skutečnou vzdáleností.

Pomůcky

Mapa světa, Evropy, České republiky, Plzeňského kraje a Plzně, mapový portál například mapy.cz (na počítači, telefonu či tabletu, po stažení map lze pracovat i bez připojení k internetu), proužek papíru a nůžky.

Úkol

Porovnej stejnou vzdálenost na různých mapách se skutečnou vzdáleností.

1. *krok – Změření vzdálenosti na mapě světa.*

Odměř na papíru 5 cm a ustřihni. Přilož na dvě libovolná místa na mapě světa. Změř v mapovém portálu jejich skutečnou vzdálenost pomocí nástroje *Měření vzdálenosti*. Údaje si zapiš do následující tabulky.

5 cm na mapě	Svět	Evropa	ČR	Plzeňský kraj	Plzeň
Skutečná vzdálenost (km)					

2. *krok – Změření dalších vzdáleností.*

Stejný proužek papíru přilož na mapu Evropy, České republiky, Plzeňského kraje a Plzně a opakuj postup z 1. kroku.

3. *krok – Práce s výsledky měření (tabulkou).*

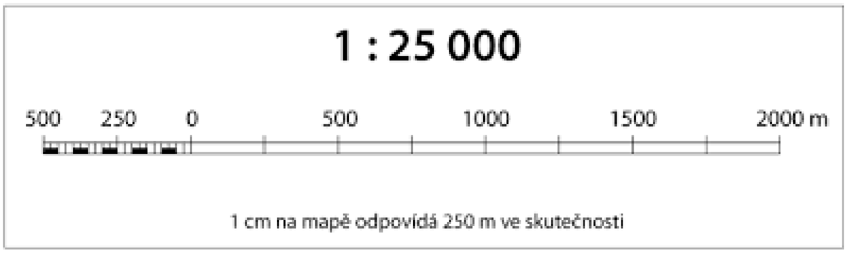
Vyučující s žáky zkontroluje vyplnění tabulky. Vzdálenosti, které vyjdou, závisí na volbě map. Určitě však musí být vzdálenosti seřazené od největší v prvním sloupci (svět) k nejmenší v posledním sloupci tabulky (Plzeň).

Vyučující pokládá žáků otázku: „Jak je možné, že stejná vzdálenost na různých mapách zobrazuje jinou vzdálenost ve skutečnosti?“ Postupně se s odpověďmi žáků dopracujeme k odpovědi, že důvodem je odlišné měřítko jednotlivých map.

„Proč je měřítko mapy důležité?“ S žáky odvodíme, že bez měřítka mapy bychom věděli pouze polohu míst vzhledem ke světovým stranám (jak již bylo zmíněno v úvodu kapitoly), ale ne jejich vzdálenost.

Měřítko mapy

vyjadřuje kolikrát je vzdálenost na mapě menší než ve skutečnosti.



Obrázek č. 5 – Měřítko mapy. (3)

Měřítko se vyjadřuje nejčastěji dvěma způsoby – číselně ve tvaru poměru a graficky pomocí úsečky.

a. Číselně

$$vzdálenost\ na\ mapě : vzdálenost\ ve\ skutečnosti$$

$$1 : 25\,000$$

Tradičním formátem je dekadický zápis ($1 : 150\,000$), ale můžeme se setkat také s mapou v nestandardním měřítku například $1 : 234\,567$. Nestandardní formát použijeme většinou v případech, kdy je třeba využit maximální plochu mapového pole. V tomto případě se však dává přednost grafickému měřítku. Prvním členem poměru je v obou případech (dekadický i nestandardní formát) číslo jedna.

b. Graficky

Obrázek č. 6 – Grafické měřítko mapy. Upraveno podle (3)

Grafické měřítko se používá, kromě výše zmíněného případu nestandardního měřítka, zejména v případech, kdy dochází ke kopírování map nebo změně jejich velikosti. A to proto, že se grafické měřítko mění stejně jako vzdálenosti v mapě a nedochází u něj ke ztrátě pravdivosti.

Měřítko udává, jaké skutečné vzdálenosti vyjádřené v centimetrech odpovídá jeden centimetr na mapě.

To znamená, že měřítko mapy $1 : 25\,000$ vyjadřuje, že $1\ cm$ na mapě je $25\,000\ cm = 250\ m = 0{,}25\ km$ ve skutečnosti. Se znalostí měřítka a jedné ze vzdáleností (na mapě nebo ve skutečnosti) lze dopočítat druhou vzdálenost.

A. Mapy

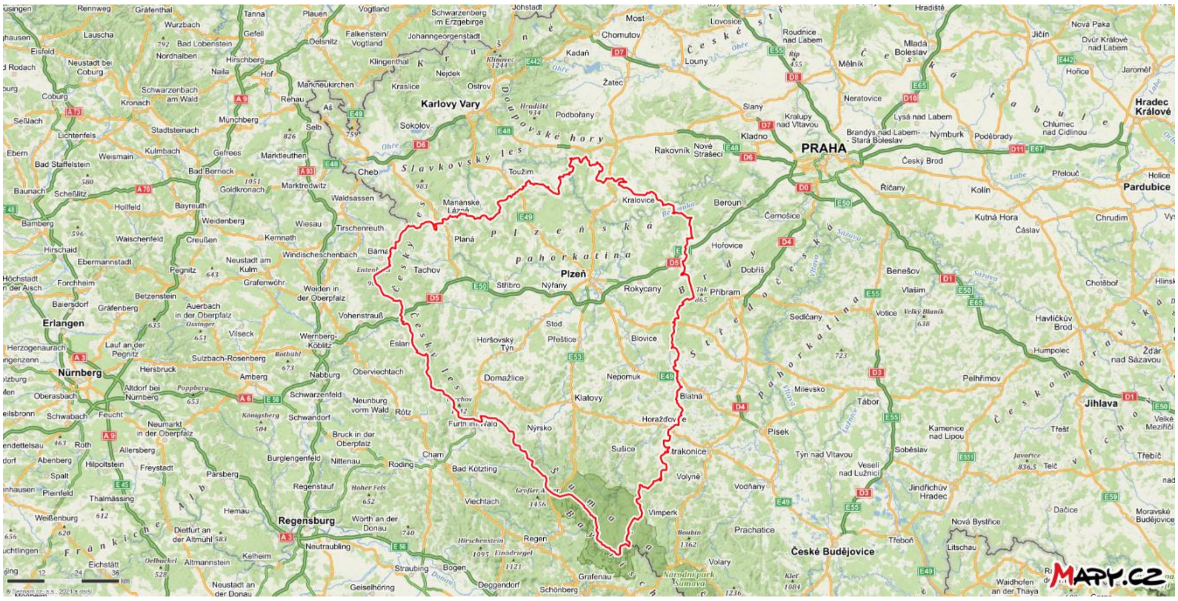
Mapa
je do roviny promítnutý, zmenšený a zjednodušený obraz Země.

Klasifikace map podle měřítka [10]

- Mapy velkého měřítka – do 1 : 200 000. Mapy hodně podrobné, zobrazují malé území. Mezi mapy velkého měřítka řadíme také plány (více v sekci B.). Typickým představitelem jsou turistické mapy či plány měst.

Obrázek č. 7 - Plzeň a okolí v měřítku přibližně 1 : 100 000. Mapy.cz (4)

- Mapy středního měřítka – 1 : 200 000 – 1 : 1 000 000. Mapy nejčastěji zobrazující mapy států nebo krajů v případě malého mapového pole.



Obrázek č. 8 – Plzeňský kraj v měřítku přibližně 1 : 800 000. Mapy.cz (4)

- Mapy malého měřítka – nad $1 : 1\,000\,000$. Mapy málo podrobné zobrazující velké území.

Obrázek č. 9 - Evropa v měřítku přibližně $1 : 25\,000\,000$. Mapy.cz (4)

Metodická poznámka

Častou chybou je záměna typu mapy podle velikosti měřítka. Žáci vidí „velké“ číslo a automaticky určí, že mapa je velkého měřítka a neuvědomí si, že je taková mapa zařazena mezi mapy malého měřítka.

Vysvětlit žákům, proč to tak je, můžeme například pomocí zlomků, ty už znají i žáci šestých ročníků.

Měřítko (poměr) $1 : 50\,000$ vyjádřené ve tvaru zlomku $\frac{1}{50\,000}$ vyjadřuje větší část celku než měřítko $1 : 1\,000\,000 = \frac{1}{1\,000\,000}$. Při výkladu můžeme nejdříve použít menší čísla, poté přejít k větším, které se běžně používají v měřítkách.

B. Plány

Plán

je zjednodušený, zmenšený obraz zemského povrchu. Je zobrazený ve velkém měřítku a zanedbává zakřivení zemského povrchu. [11]

Z toho vyplývá, že plány se používají pro zobrazení malých rozloh – zhruba do 700 km^2, jelikož se vytváří bez ohledu na zakřivení zemského povrchu. Plány narozdíl od map neobsahují zkreslení vzdáleností, ploch ani úhlů – tyto prvky na nich lze měřit přesně. [11]

V různých textech dochází k používání pojmů *mapa* a *plán* pro stejné kartografické dílo. Jak tedy správně pojmenovávat kartografická díla?

„Lze doporučit dávat přednost pojmu mapa vždy tam, kde obsah kartografického díla vyhovuje výkladu tohoto názvu. Současně je ale třeba přihlédnout k tomu, zda použití termínu mapa neodporuje vžitým zvyklostem (např. plán města, situační plán, územní plán apod.).“ ([12], str. 8)

3.2 TYPOVÉ ÚLOHY A METODY JEJICH ŘEŠENÍ

Mezi obvyklé úlohy patří výpočty vždy jednoho prvku (vzdálenost na mapě, skutečná vzdálenost a měřítko) ze zbylých dvou – viz typové úlohy př. 1, 2,3.

3.2.1 TYPOVÉ ÚLOHY

Př. 1 – Měřítko plánu města je $1 : 150\,000$. Jaké skutečné vzdálenosti odpovídá $1\,cm$ na plánu?

Př. 2 – Skutečná vzdálenost míst je $5\,km$. Jaká je jejich vzdálenost na mapě v měřítku $1 : 50\,000$?

Př. 3 – Na mapě jsou od sebe místa vzdálena $15\,cm$. Ve skutečnosti jsou od sebe vzdálena $300\,km$. Jaké je měřítko mapy?

Př. 4 – Narýsuj půdorys Honzova pokoje v měřítku $1 : 50$. Delší zeď pokojíku měří $8\,m$, kratší $6\,m$. Jaké rozměry bude mít pokojík v půdorysu?

Př. 5 – Urči skutečnou vzdálenost dvou míst, které jsou na mapě od sebe vzdáleny $6\,cm$. Měřítko mapy je

a) $1 : 200$ b) $1 : 1\,000$ c) $1 : 50\,000$

Př. 6 – Tunel je zakreslen na třech různých plánech. Ve kterém plánu bude obraz délky tunelu nejkratší?

a. $1 : 30$ b. $1 : 50$ c. $1 : 100$

3.2.2 ŘEŠENÍ TYPOVÝCH ÚLOH A METODY JEJICH ŘEŠENÍ

Stejně jako v kapitole 1.3.11 uzavíráme následujícím textem část diplomové práce věnovanou řešení typových úloh. Následuje tučně zvýrazněné číslo úlohy a kurzívou řešení úlohy a návod k němu.

Př. 1

Víme, že druhý člen poměru je skutečná vzdálenost vyjádřená v centimetrech. Zvyklostí je výsledné skutečné vzdálenosti vyjadřovat v kilometrech případně metrech, proto převedeme

$$150\,000\ cm\ =\ 1{,}5\ km.$$

V měřítku mapy $1:\ 150\,000$ *odpovídá* $1\ cm$ *na mapě* $1{,}5\ km$ *ve skutečnosti.*

Možné doplňující otázky (dají se použít ke všem typovým úlohám)

1. Do jaké kategorie map zařazujeme mapy s tímto měřítkem?

   Odpověď k př. 1: Mapy velkého měřítka.

2. Jaké mapy patří do této kategorie?

   Odpověď př. 1: Turistické mapy, mapy měst apod. neboli všechny, kde je třeba zobrazované údaje znázornit podrobně.

Př. 2

$1\ cm$ *na mapě odpovídá* $0{,}5\ km$ *ve skutečnosti.*

Skutečná vzdálenost míst je $5\ km.$. *Proto musíme* $5\ km$ *vydělit* $0{,}5\ km$ *odpovídající jednomu centimetru na mapě,*

$$5 : 0{,}5 = 10\ cm$$

Skutečná vzdálenost $5\ km$ *odpovídá na mapě v měřítku* $1:\ 50\,000$ *deseti centimetrům.*

Př. 3

Nejdříve je třeba převést skutečnou vzdálenost na centimetry, tj.

$$300\ km\ =\ 30\,000\,000\ cm.$$

Nyní dáme do poměru vzdálenost na mapě a vzdálenost ve skutečnosti

$$15 : 30\,000\,000.$$

Měřítka map se udávají s prvním členem rovným jedničce, proto obě čísla vydělíme 15.

$$15 : 30\,000\,000 = 1 : 2\,000\,000$$

Poznámka pro vyučující

Dělení obou čísel v měřítku odpovídá krácení poměru. Žáci ještě s poměry neumějí pracovat, ale dělit celá čísla ano. Vysvětlit jim, proč dělíme obě čísla, můžeme pomocí zlomků, které krátit umějí.

Měřítko mapy, na které je $300\ km$ *ve skutečnosti zobrazeno jako* $15\ cm$ *je* $1 : 2\,000\,000$.

Př. 4

Místo mapy zde máme plánek pokoje s velmi malým měřítkem. Z praktických důvodů proto nebudeme skutečnou vzdálenost vyjadřovat v kilometrech ale v metrech,

$$50\ cm\ =\ 0{,}5\ m.$$

Jeden metr ve skutečnosti zobrazíme jako $2\ cm$ *na plánku. Oba rozměry pokojíku proto vynásobíme dvěma a získáme rozměry na plánku.*

$$2\ \cdot 8 = 16\ cm \qquad 2 \cdot 6 = 12\ cm$$

Delší strana pokojíku bude mít $16\ cm$*, kratší* $12\ cm$*. Narýsujeme obdélník s těmito rozměry.*

Př. 5

Vypočítáme všechny skutečné vzdálenosti postupem analogickým řešení př. 1.

a) $0{,}012\ km\ =\ 12\ m$ b) $0{,}06\ km\ =\ 60\ m$ c) $3\ km$

Př. 6

$a.\ \ 1 :\ 30$

Víme, že mapa ve větším měřítku zobrazí kratší skutečnou vzdálenost. Proto najdeme plán s největším měřítkem. V tomto případě je to plán s měřítkem $1 :\ 30$*. Můžeme ověřit výpočtem, kde zvolíme libovolnou skutečnou délku tunelu a vypočteme jeho délku na zadaných mapách.*

4 PRACOVNÍ LISTY A AKTIVITY

Trendem současného školství je aktivně zapojovat žáky do výchovně-vzdělávacího procesu. Úkolem vyučujících je hledat způsoby, techniky a aktivity ve vyučování, které tento styl výuky podporují. Pomoci však mohou také vhodně zvolené pomůcky a pracovní listy (dále jen PL). Právě využití PL výrazně přispívá k aktivizaci žáků, zvyšují zájem o studovaný předmět a rozvíjí jejich samostatnost, tvořivost a kreativitu. [13]

V didaktické literatuře se lze setkat se spoustou definic pracovních listů. ([13], str. 194)

- Pracovní listy jsou všechny tištěné a psané texty, které se používají ve vyučovacím procesu, aby reprezentovaly předmět učení.
- Pracovní sešity jsou učební pomůcky, které zpestřují a zkvalitňují práci žáků na vyučovacích hodinách i doma.
- Pracovní list je považovaný za tištěnou pomůcku, která je věnovaná samostatné práci žáků, aby rozvíjela jejich tvořivost a aktivizovala je ve výchovně vzdělávacím procesu. Tato pomůcka na základě cvičení, zodpovídání otázek, dokreslování apod. motivuje žáka a vzbuzuje u něj zájem o daný předmět.

Pracovní listy lze využít pro žáky v jakémkoli věku, pro jakýkoli předmět a téma. Neměly by však být náhražkou učebnic. Jsou jejím vhodným doplňkem při motivaci, procvičení, aktualizaci informací či jejich rozšíření. [13]

V současné době je nepřeberné množství PL již vytvořených a dostupných pro všechny. Pokud by přesto chtěl vyučující tvořit své vlastní PL, měl by se řídit několika zásadami.

Vybírám pouze některé ze zásad uvedených v [13], kterými se snažím sama řídit při tvorbě pracovních listů.

1. Odstupňování náročnosti práce – začít jednoduššími příklady a postupovat ke složitějším.
2. Zvolit dostatečné množství příkladů.
3. Jednoznačnost a srozumitelná formulace úloh.
4. Zajímavost pracovních listů – snaha vytvořit, co nejzajímavější pracovní listy.

5. Přiměřené používání pracovních listů – při nadměrném používání mohou začít žáky nudit.

RVP ZV pracuje s pojmy „žáci“ (průměrní žáci), „žáci nadaní a mimořádně nadaní“ (nadaní žáci) a „žáci s přiznanými podpůrnými opatřeními“ (neprospívající).

V době inkluzivního vzdělávání na základních školách, kdy se ve třídě vyskytují vedle průměrných žáků také nadaní nebo naopak neprospívající žáci, je nutné individualizovat výuku. Velkou výhodou používání pracovních listů ve vzdělávacím procesu je možnost individualizace práce. Pracovní listy lze poměrně snadno upravit do tří úrovní vědomostí žáků – pro žáky neprospívající, průměrné, nadané.

Zařazení vybraného PL do správné etapy tematického celku závisí především na zaměření pracovního listu, zda je zaměřen na motivaci k nové látce, upevnění nově získaných znalostí a dovedností, jejich procvičení nebo rozšíření. Podle zaměření se poté určuje, do jaké etapy výuky se PL zařadí.

Existuje mnoho úvah, do které části samotné vyučovací jednotky (většinou vyučovací hodiny) pracovní listy zařadit. Která z úvah je ta správná, ještě není zcela jasné, je však nutné dodržovat dva základní principy. [13]

- Pracovní listy by neměly být zařazené na úplný začátek hodiny, vždy by měl předcházet úvod hodiny – přivítání, kontrola domácích úkolů apod. Pokud vyučující zadává pracovní list procvičující znalosti a dovednosti, mělo by předcházet krátké opakování získaných znalostí a dovedností, které se váží k obsahu pracovního listu.
- Vždy by v hodině mělo zbýt dostatek času na kontrolu pracovních listů a zhodnocení práce žáků.

Kontrola správného vyplnění PL je klíčová. Proto je třeba vyhradit si na ni dostatek času. Při kontrole by mělo dojít ke kontrole správnosti výsledků, případně vysvětlení postupů k nim vedoucích. Je také vhodné nechat větší prostor žákům na dotazy a diskusi nad řešením.

Pracovní listy mohou žáci plnit individualizovaně nebo ve skupinách, opět záleží na cíli, který má PL plnit. Po skupinové práci je nutné zajistit, že důležité informace získají všichni žáci. To je možné provést několika způsoby - udělat s žáky zápisky do sešitů, dodat každému kopii pracovního listu, kterou vyplní apod.

4.1 PRACOVNÍ LISTY

Samotné pracovní listy i s řešením se nacházejí v přílohách této diplomové práce a jsou určeny k tisku. V této části následuje pouze několik informací a komentářů k nim.

Pracovní list č. 1

Je vhodné jej zařadit na úvod tématu, po probrání základních úkonů s poměry. Pracovní list obsahuje příklady na procvičení těchto úprav. První pracovní list by měli zvládnout vypracovat všichni žáci včetně těch slabších, jelikož k jeho vypracování stačí znalosti základních úkonů s poměry.

Pracovní list č. 2

Druhý pracovní list je zaměřen na procvičení úkonů s poměry. Oproti předchozímu PL je zadání úloh slovní. U žáků mimo jiné rozvíjí schopnosti porozumění textu. Žáci musí informace v textu hledat, protože nejsou vždy explicitně vyjádřeny. Dále nejsou úlohy zaměřené pouze na úkony s poměrem, ale je třeba, aby žáci měli i znalosti z dalších témat matematiky (obsah čtverce). Z tohoto důvodu může být vyřešení PL pro nejslabší žáky problematické a je možné, že bude třeba jim pomoci vyhledat informace. Ale s určitou pomocí a nasměrováním by většinu úloh měli zvládnout i oni.

Pracovní list č. 3

Obsahuje souhrnné opakování tématu a také jeho rozšíření. Podobně jako v předchozím případě jsou úlohy zadány převážně slovně, a tak je třeba informace v textu hledat. Samozřejmostí jsou znalosti z dalších témat matematiky (obvod a obsah obdélníku, převody jednotek). Průměrní žáci by však neměli mít výrazné problémy s jeho vyřešením.

Pracovní list č. 4

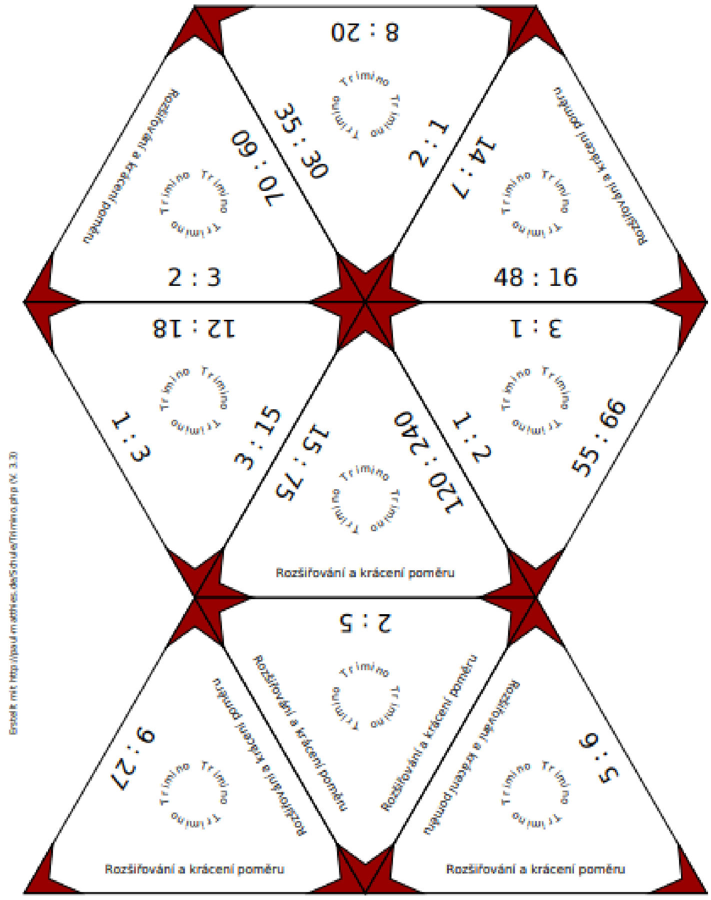
Úlohy nacházející se v tomto pracovním listu jsou převážně zaměřeny na měřítko mapy. Úvodní úlohy (první až čtvrtá) odpovídají úrovni pracovního listu č. 1, měli by je tedy zvládnout všichni žáci. Opět jde o základní typy úloh, k jejichž vyřešení je třeba znát pouze základní úkony s měřítkem mapy. Zbývající úlohy (pátá a další) jsou o něco náročnější. Propojují znalosti úkonů s měřítkem, poměrem i dalšími tématy matematiky *(obvody a obsahy čtverce a obdélníku, převody jednotek včetně čtverečních, vzoreček pro výpočet rychlosti – fyzika 7. ročník).*

4.2 AKTIVITY

Aktivita 1 – Trimino

Trimino je skládačka různých tvarů, jejichž základem jsou trojúhelníky. Úkolem je přiřadit k sobě odpovídající si informace. Záleží na tématu Trimina, mohou to být dvojice příklad + výsledek, různé vyjádření stejné hodnoty, v zeměpisu stát + hlavní město, v cizím jazyce slovíčko + jeho překlad apod.

Například – Trimino zaměřené na rozšiřování a krácení poměru. (Pozn.: Obrázek určený k tisku je dostupný v příloze diplomové práce.)

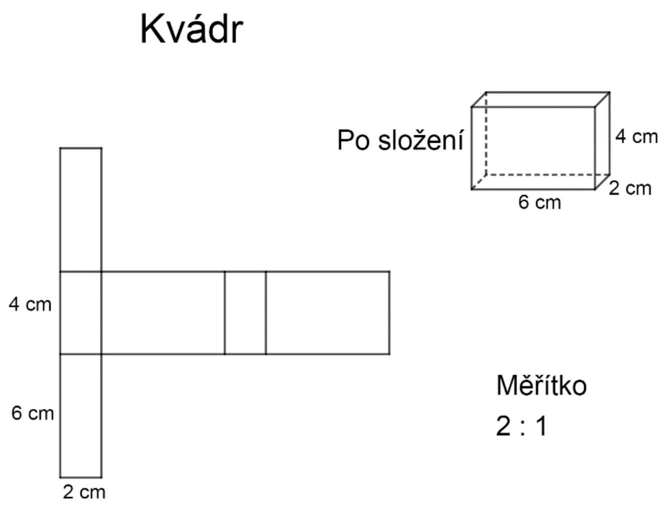


Obrázek č. 10 – Trimino. Vlastní zpracování v Trimino-Generator. (5)

Aktivita 2 – Výroba výrobku v zadaném měřítku podle výkresu.

Je dán nákres výrobku. Narýsuj a vystřihni podle něj síť kvádru ve skutečné velikosti (pozor na měřítko). Přehni potřebné hrany, slož síť do tvaru kvádru a hrany slep izolepou.

Jakou mají mít hrany skutečnou délku? Ověř měřením hran, že mají správnou velikost.



Obrázek č. 11 – Kvádr. Vlastní zpracování v Geogebra. (2)

Skutečné rozměry hran jsou poloviční oproti nákresu (2 cm na plánku odpovídají 1 cm ve skutečnosti) tj. $3\ cm, 2\ cm$ a $1\ cm.$

Možná obměna – Zvolíme jiné měřítko (např. $1 : 2$; $1 : 3$ apod.), ideálně nějaké, kde budeme rozměry oproti plánku zvětšovat, aby žáci viděli rozdíl.

Aktivita 3 – Měření displeje.

Změř úhlopříčku displeje svého mobilního telefonu

a) Pomocí pravítka v cm

b) Pomocí pravítka v $inch$

c) Odvoď měřítko $cm : inch$ [14]

Aktivita 4 – Práce s mapou.

Žáci dostanou známou mapu a dále s ní pracuji

a) Vyznačí známé body A, B (např. A = doma, B = škola).

b) Vyznačí si cestu, kterou chodí mezi těmito dvěma místy.

c) Tipují, kolik kroků ujdou z místa A do místa B.

d) Změří vzdálenost na mapě a pomocí měřítka spočítají vzdálenost ve skutečnosti.

e) Změří délku kroku – spočítají, kolik potřebují kroků.

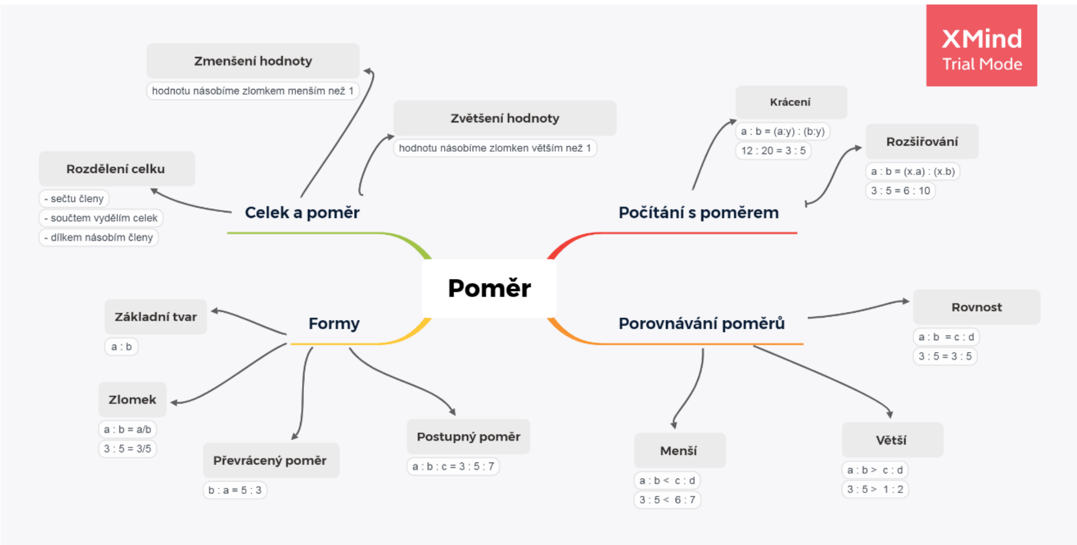
f) Porovnají výsledek s odhadem.

g) Úkol navíc – Kdo má hodinky s krokoměrem, změří si počet kroků na hodinkách. Porovná s vypočítaným výsledkem. [15]

Aktivita 5 – Vytvoření myšlenkové mapy.

Mapa může být zpracována třeba jako v následujícím obrázku. Výsledné myšlenkové mapy různých lidí se obvykle liší. Záleží na každém vyučujícím a každém žákovi, co mu vyhovuje. Rozdíly mohou být v obecnosti či konkrétnosti příkladů, v některých případech větvení tématu, celkově jiné struktuře apod.

Cílem je ukázat žákovi tuto možnost uspořádání myšlenek. Zda mu tato forma bude vyhovovat a bude ji používat, už zjistí sám.



Obrázek č. 12 – Myšlenková mapa. Vlastní zpracování v XMind. (6)

Aktivita 6 – Vytvoř si svou mapu.

Žáci vytvoří svou mapu vybraného malého území (okolí školy či domova). Výtvory žáků určitě nebudou tak přesné jako kartografická díla (měřit vzdálenosti mohou například pomocí kroků). Jejich cílem však nemusí být co nejpřesnější mapa, ale mohou se zaměřit na zobrazování míst a věcí, které jim v klasické mapě chybí – poloha hřišť ve městě, místa, kde se dá jezdit na kolečkových bruslích apod. Výběr toho, co chtějí zobrazit, může být součástí úkolu.

Aktivita 7 – Plán vysněného pokojíčku.

Narýsuj svůj vysněný pokojíček v měřítku 1 : 100.

5 VÝZKUM ZNALOSTÍ ŽÁKŮ 9. ROČNÍKU ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Po rozebrání tématu po teoretické i praktické stránce, zpracování návrhů na motivační úlohy a vytvoření pracovních listů, mě zajímalo, jak dobře umí pracovat s poměrem žáci ukončující základní vzdělávání neboli žáci 9. ročníků ZŠ.

Zadala jsem proto žákům jedné z 9. tříd základní školy v Plzni úlohy zjišťující jejich znalosti. Abych zvolila správnou obtížnost úloh, převzala jsem některé úlohy z publikací, které se tématu věnují na základní škole nebo jsem se jimi nechala alespoň inspirovat. První úlohu v kvízu jsem převzala z webových stránek ČT edu [16], druhá a čtvrtá úloha byly inspirovány Pracovním sešitem z matematiky pro 7. ročník ZŠ [17] - úlohy jsem do kvízu upravila změnou čísel případně odebráním či upravením podotázek. Třetí a pátá úloha jsou mou vlastní tvorbou.

5.1 ZADÁNÍ ÚLOH

Jelikož byla v době zadávání úloh výuka vedena distanční formou, byly i úlohy převedeny do online formy a zadány žákům v podobě kvízu. Kvíz byl vytvořen v aplikaci Forms, který je součástí balíčku Microsoft Office. Byl zadán v prostředí komunikační platformy Teams provozovanou rovněž společností Microsoft. V kvízu bylo zadáno pět úloh. Žáci doplňovali do tří otevřených odpovědí a ve dvou úlohách vybírali z uzavřených odpovědí, kde byla jedna či více správných odpovědí – každá z těchto variant se vyskytla jednou.

Všechny úlohy byly zadány jako slovní úlohy, v nichž bylo nutné nejdříve vyhledat potřebné informace a poté s nimi dále pracovat. Žáci počítali na papír a do kvízu psali pouze výsledky. Pro úspěšné zvládnutí kvízu bylo potřeba, aby žáci znali nejen základní úkony s poměrem (viz kapitola 1.2), ale aby uměli také počítat se zlomky a vypočítat obvod a obsah čtverce. Čas na vypracování kvízu měli žáci neomezený.

Následují úlohy zadané v kvízu a jejich řešení, které je tučně zvýrazněno.

1. Stánek s ovocem prodává mandarinky a pomeranče. Mandarinky jsou v košících po $2\,kg$ a pomeranče v košících po $3\,kg$. Na pultu je počet košíků pomerančů a mandarinek v poměru $3 : 4$. (2 body)

Vyber pravdivá tvrzení.

a. Na pultu je více košíků pomerančů než košíků mandarinek.
b. Celková hmotnost mandarinek na pultu je menší než hmotnost pomerančů.
c. Košíky s pomeranči tvoří $\frac{3}{4}$ košíků na pultu.
d. Košíků s pomeranči je o jednu čtvrtinu méně než košíků s mandarinkami.
e. Pokud víme, že na pultu je celkem 140 košíků, pak to znamená, že mandarinek je na pultu celkem $160\ kg$. [18]

Řešení

a. Košíky jsou v poměru $3 : 4$. Větší je druhý člen poměru, na pultu je tedy více košíků mandarinek. NE
b. Mandarinky $2 \cdot 4 = 8\ \mathrm{kg}$, Pomeranče $3 \cdot 3 = 9\ \mathrm{kg}$; $8 < 9$; **ANO**
c. Poměr $3 : 4$ znamená, že 3 košíky ze sedmi jsou košíky s pomeranči, takže jich jsou $\frac{3}{7}$. NE
d. Vydělíme počet košíků s mandarinkami čtyřmi. Odečteme jednu čtvrtinu a vyjdou tři košíky pomerančů. **ANO**
e. Vypočteme, kolik má jeden dílek košíků. $140 : 7 = 20\ \mathrm{ks}$. Mandarinky jsou vyjádřeny $4\ \text{dílky} = 80\ \text{košíky}$. Každý košík má 2 kg, tj. $80 \cdot 2 = 160\ \mathrm{kg}$. **ANO**

2. Majitel objednal do své restaurace nové stoly a židle. Stolů objednal 9 a ke každému přidal 4 židle. (2 body)

a) Kolik objednal židlí?

b) V jakém poměru jsou počty objednaných stolků a židlí? *(uveď poměr v základním tvaru)* [17]

Zadej odpověď.

Řešení

a) $9 \cdot 4 = \mathbf{36}\ \textbf{židlí}$

b) $9 : 36 = \mathbf{1 : 4}$

3. V jakém poměru je obvod a obsah čtverce se stranou $a = 6\,cm$? (*poměr uveď v základním tvaru*) (2 body)

Vyber správnou odpověď.

- $3 : 2$
- $24 : 36$
- $16 : 24$
- $2 : 3$

Řešení

$\mathrm{O} = 4 \cdot \mathrm{a} = 4 \cdot 6 = 24\,\mathrm{cm}$

$\mathrm{S} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{a} = 6 \cdot 6 = 36\,\mathrm{cm}^2$

$24 : 36 = \mathbf{2 : 3}$

4. Rodině Nových přišlo roční vyúčtování za elektřinu v hodnotě $5\,400\,K$č. Měsíčně posílají zálohu $400\,K$č. (3 body)

a) Zapiš poměr měsíční zálohy a celkové ceny.
b) Jakou částku musí rodina doplatit?
c) V jakém poměru by měly být měsíční záloha a celková cena, aby nemusela rodina na konci roku nic doplácet? [17]

Zadej odpověď.

Řešení

a) $400 : 5400 = \mathbf{2 : 27}$
b) $400 \cdot 12 = 4\,800;\ 5400 - 4800 = \mathbf{600\ K}$č.
c) Řešíme úvahou nebo výpočtem. $5400 : 12 = 450;\ 450 : 5400 = \mathbf{1 : 12.}$

5. Čtyři kamarádi Jana, Lenka, Ondra a Pavel si mají spravedlivě rozdělit peníze podle počtu odpracovaných dní během prázdnin. Jana odpracovala 5 dní, Lenka 7, Ondra 4

a Pavel 8 dní. Jakou částku každý dostane, pokud dohromady vydělali 16 800 Kč? (2 body)

Řešení

Dělíme celek v daném poměru. Sečteme členy poměru, vydělíme jimi celkovou částku a poté jeden dílek násobíme danými členy.

$$5 + 7 + 4 + 8 = 24; \ 16\,800 : 24 = 700 \text{ (za den)}$$

Jana - 3 500 Kč; Lenka – 4 900 Kč; Ondra – 2 800 Kč, Pavel - 5 600 Kč

5.2 HODNOCENÍ KVÍZU

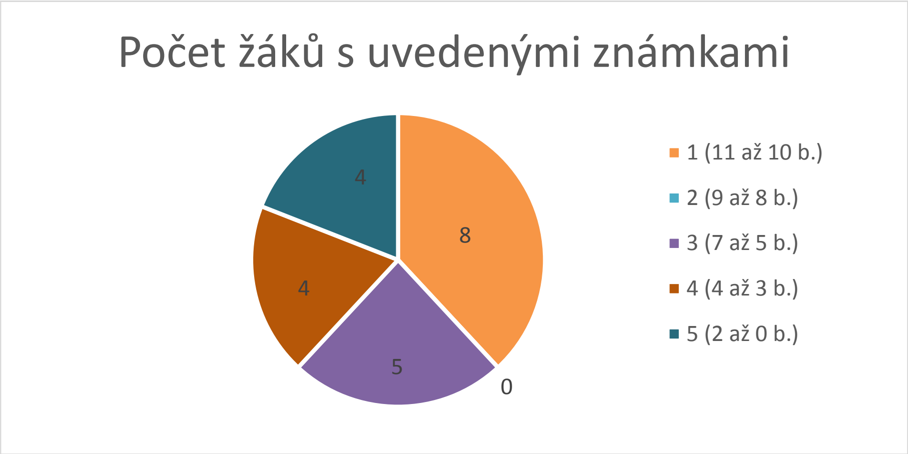
Kvízu se zúčastnilo 21 $žáků$. Maximální počet bodů, který mohli žáci získat, byl 11.

Počty bodů, které žáci získali, jsou zobrazeny v grafu č. 3. Z grafu můžeme vyčíst, že nejčastějším počtem bodů, kterého žáci dosáhli, je plný počet bodů neboli 11, tj. $Mod = 11$.

Přesto průměrný počet bodů získaný v kvízu byl 6,5 $bodů$ čili zhruba polovina. Velké množství žáků s plným počtem bodů vyvažuje poměrně velká skupina žáků s nižším počtem bodů, proto je také $Me = 6$.

Graf č. 3 – Získané počty bodů. Vlastní zpracování v Office 365 - Excel.

Žákům nebyl kvíz oznámkován. Pokud by však měli podle získaných bodů známky dostat podle školního řádu dané školy ($100\ až\ 90\ \% -> 1;\ 89\ až\ 75\ \% -> 2;\ 74 - 45\ \% -> 3;\ 44\ až\ 25\ \% -> 4;\ 24\ \%\ a\ méně -> 5$), byly by počty žáků, kteří jednotlivé známky dostali, následující.



Graf č. 4 – Počet žáků s uvedenými známkami. Vlastní zpracování v Office 365 – Excel.

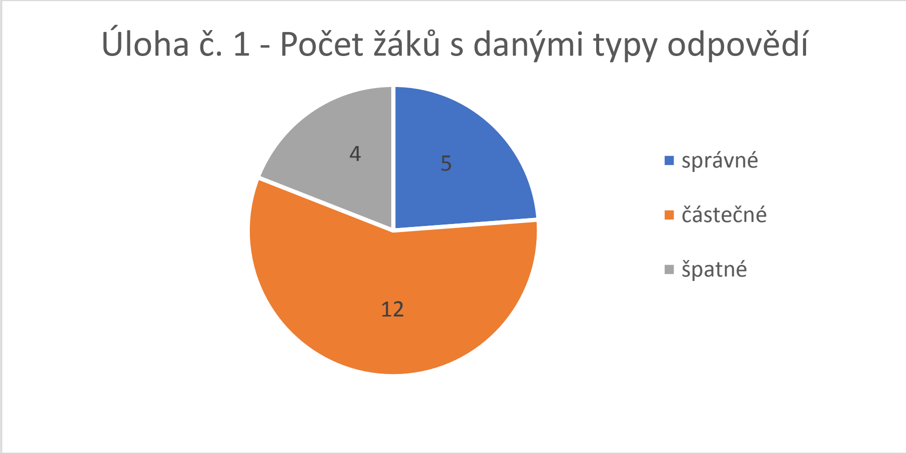
V dalších řádcích rozebereme hodnocení jednotlivých úloh – způsob hodnocení, úspěšnost a v čem byly nejčastější chyby.

Úloha č.1

Za správnou odpověď bylo považováno řešení, kdy žák označil všechny tři správné odpovědi. Jak vyplývá z grafu č. 5, takových žáků bylo pět.

Za částečně správné odpovědi byly označeny všechny odpovědi, kde žák označil jednu až dvě správné odpovědi. Žáků s částečně správnou odpovědí bylo nejvíce. Nejčastějším správně označeným tvrzením bylo tvrzení 2 – „Celková hmotnost mandarinek na pultu je menší než hmotnost pomerančů na pultu“.

Pokud žák neoznačil ani jedno pravdivé tvrzení, jeho odpověď byla brána jako špatná.

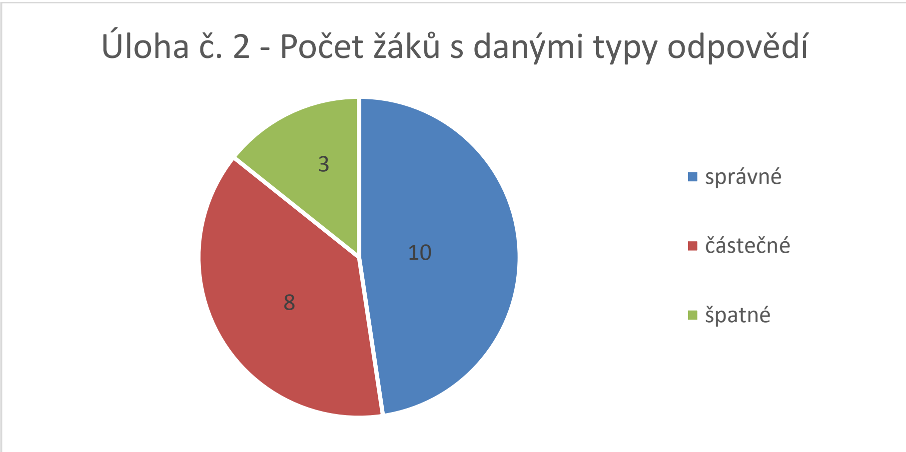


Graf č. 5 – Úloha č. 1 – Počet žáků s danými typy odpovědí. Vlastní zpracování v Office 365 – Excel.

Úloha č. 2

Za správnou odpověď bylo označeno řešení, kdy žák odpověděl správně na obě otázky. Pokud odpověděl správně pouze na jednu otázku, bylo jeho řešení označeno za částečné. Za špatné řešení byly považovány odpovědi s oběma špatnými nebo žádnými odpověďmi.

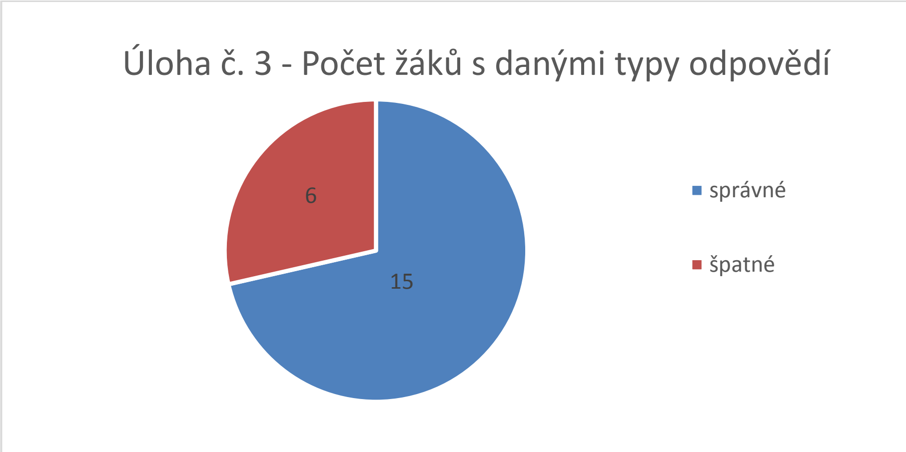
Ve většině případů žáci správně odpověděli na otázku a) „Kolik objednal židlí?“. Řešení otázky b) „V jakém poměru jsou počty objednaných stolků a židlí? *(uveď poměr v základním tvaru)*“ často zapomněli převést na základní tvar nebo odpověděli "9 : 4", kdy zapomněli vynásobit počet židlí počtem stolů.



Graf č. 6 – Úloha č. 2 – Počet žáků s danými typy odpovědí. Vlastní zpracování Office 365 – Excel.

Úloha č. 3

Zde měli žáci vybrat správnou odpověď. Téměř tři čtvrtiny žáků vybraly správnou odpověď. Nejčastější chybnou odpovědí byla první odpověď, kdy žáci zaměnili pořadí členů v poměru.



Graf č. 7 – Úloha č. 3 – Počet žáků s danými typy odpovědí. Vlastní zpracování v Office 365 – Excel.

Úloha č. 4

V této úloze bylo třeba zodpovědět tři otázky. Pokud žák zodpověděl pouze jednu nebo dvě otázky, bylo jeho řešení označeno za částečné. Pokud nezodpověděl správně žádnou otázku, odpověď by považována za špatnou.

Jak vyplývá z grafu č. 8 téměř polovina řešitelů nezískala ani jeden bod. Proto se tato úloha stala nejproblematičtější ze zadaných úloh. Nešlo však o špatné odpovědi, ale žáci neodpověděli vůbec. Proto není zcela zřejmé, proč nebyli schopni žáci tuto úlohu vyřešit.

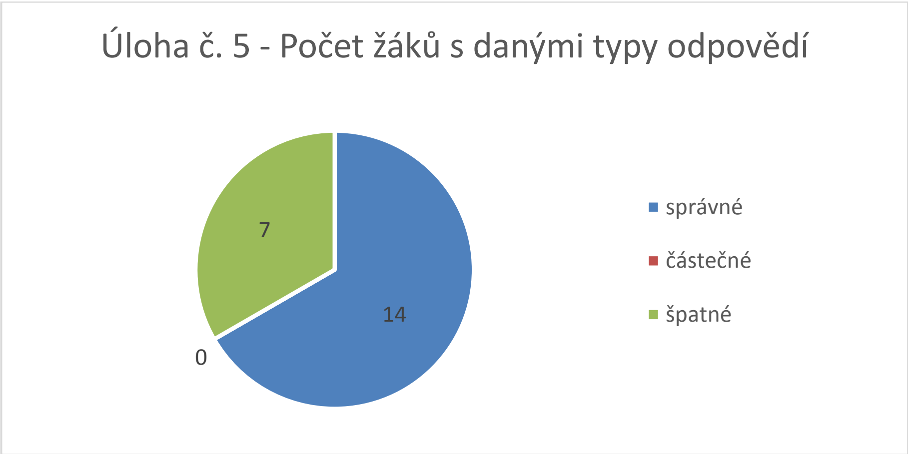
Graf č. 8 – Úloha č. 4 – Počet žáků s danými typy odpovědí. Vlastní zpracování v Office 365 – Excel.

Úloha č. 5

Za správnou odpověď byla považována odpověď, kdy žáci zapsali všechny čtyři částky správně.

Za částečnou by byla označena odpověď, kdy by některé částky byly správně a další ne. Takto však nikdo z žáků neodpověděl.

Za špatnou byly považovány jakékoli jiné odpovědi. Nejčastější chybnou odpovědí bylo řešení, kdy žáci rozdělili peníze rovným dílem na čtyři částky a nezvážili, že rozdělení peněz mělo být spravedlivé podle počtu odpracovaných dnů.



Graf č. 9 – Úloha č. 5 – Počet žáků s danými typy odpovědí. Vlastní zpracování v Office 365 – Excel.

5.3 ZÁVĚR VÝZKUMU

Velká část žáků (38 %) zvládla řešení kvízu velmi dobře. Vyvažovalo je však 24 % žáků, kteří dosáhli maximálně čtvrtiny bodů. Žáků s průměrným počtem bodů nebylo nejvíce, jak by podle Gaussovy křivky mělo být, přestože průměrný počet bodů se střední hodnotě blíží.

Z výzkumu vyplývá, že většina žáků devátých tříd je schopna poměrně dobře vyhledávat v textu potřebné informace a poté s nimi pracovat. Někteří z nich však mají potíže se základními úkony s poměrem. Většinou zhruba vědí, jak by s poměrem měli pracovat, ale už si neuvědomí základní pravidla, například pořadí členů v poměru, převedení na základní tvar, rozdělení celku v daném poměru, kde je potřeba jeden dílek násobit členy poměru apod.

Proto je třeba žáky již v sedmé třídě, kdy je učivo probíráno, důkladně směřovat k zapamatování, upevnění a procvičování základních pravidel při práci s poměrem.

ZÁVĚR

V diplomové práci jsou shrnuty znalosti a dovednosti související s tématy *Poměr* a *Měřítko mapy*. Informace jsou podány v úrovni pochopitelné pro žáky druhého stupně základní školy. V práci se však vyskytují také informace a zajímavosti přesahující znalosti, které mají získat žáci na základní škole, ty jsou určeny vyučujícím.

V textu práce se nachází několik motivačních úloh a aktivit, jež mají žáky motivovat ke studování tématu této práce. Dále se v textu nacházejí typové úlohy na procvičení znalostí a dovedností. Tyto úlohy mohou sloužit také jako ilustrující příklady jednotlivých témat. V přílohách jsou k dispozici pracovní listy i s výsledky a návrhy na jejich řešení. Pracovní listy jsou snadno dostupné pro všechny vyučující.

Jelikož v době tvorby této diplomové práce probíhala výuka na základních školách převážně distanční formou, nebylo možné s žáky vyzkoušet vytvořené materiály (motivační úlohy, pracovní listy, aktivity apod.) a ověřit jejich účinnost. Zároveň nebylo možné zjistit a opravit případné nedokonalosti. Ověření materiálů je tak na každém vyučujícím.

Z testu/kvízu zadaného žákům devátých ročníků vyplývá, že s poměrem umí většina žáků pracovat, potíže však bývají se základními pravidly. Proto je třeba úkony s poměrem a pravidla, jež se na ně vážou, důkladně procvičit a upevnit.

Jak lze vyvodit z textu práce, téma se úzce váže k praktickým činnostem člověka. Proto je důležité umět s poměrem a měřítkem mapy pracovat. Úlohy, které žákům nabídneme při výuce, však mohou být díky této skutečnosti prakticky zaměřené a tím i pro spoustu žáků zajímavé a zábavné. Žáci mohou také spatřit využitelnost tématu v praktickém životě, což pro ně bývá při studiu důležité.

RESUMÉ

Diplomová práce se věnuje tématu poměr a měřítko mapy ve výuce na druhém stupni základní školy. Cílem práce je vytvoření motivačních a typových úloh, aktivit a pracovních listů využitelných vyučujícími při výuce matematiky (poměr) a zeměpisu (měřítko mapy). Obě témata spolu úzce souvisí.

První kapitola je věnována pojmu poměr a úkonům s ním. Ve druhé kapitole jsou připomenuty základní informace o úměře a postupy řešení úloh zaměřených na přímou a nepřímou úměrnost pomocí trojčlenky. Třetí kapitola navazuje měřítkem mapy, základními informacemi a typovými úlohami. Čtvrtá kapitola obsahuje informace související s tvorbou pracovních listů a komentáře k pracovním listům připojeným v přílohách této práce. Závěrečná kapitola je věnována výzkumu znalostí žáků 9. ročníků.

RESUMÉ

The thesis is focused on the topic of teaching the ratio and the map scale at the second stage of elementary school. The aim of the thesis is to create motivational and typical tasks, activities and worksheets, which could be used by teachers for teaching mathematics (ratio) and geography (map scale). These two topics are closely related.

The first chapter is dedicated to the concept of ratio and operations with the ratio. The second chapter contains basic information about the proportion and procedures for solving problems focused on the proportion using the cross-multiplication. The third chapter follows up with the map scale. The fourth chapter contains information related to the creation of worksheets and comments on the worksheets attached in the appendices of this thesis. The final chapter is dedicated to the research of the knowledge of 9th grade pupils.

SEZNAM LITERATURY

[1] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. In: MŠMT. Praha, 2017, s. 165 [cit. 2021-01-30]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/file/43792/

[2] BLAŽKOVÁ, Růžena. *Poměr, úměra, přímá a nepřímá úměrnost, trojčlenka* [online]. In: . [cit. 2021-03-13]. Dostupné z: https://educoland.muni.cz/down-976/

[3] HRICZ, Miroslav. *Matematické-- minutovky: pro vzdělávací oblast Matematika a její aplikace dle RVP ZV : 7. ročník*. Olomouc: Prodos, 2009. ISBN 978-80-7230-251-2.

[4] Matematika 7. třída - výklad. *Základní škola bratří Fričů Ondřejov* [online]. [cit. 2021-03-13]. Dostupné z: http://www.zsondrejov.cz/index.php?kde=109

[5] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy [2]: Poměr, Přímá a nepřímá úměrnost, Procenta*. 2. Praha: Prometheus, 2004. ISBN 80-7196-285-6.

[6] HEJNÝ, Milan a kolektiv*. Teória vyučovania matematiky2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelstvo, 1988. ISBN 80-08-00014-7.

[7] *Chemické výpočty* [online]. Brno, 2008 [cit. 2021-01-30]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/gfucy/out/ch01s03s01.html

[8] TECLOVÁ, Veronika. Úměrnosti- e-learningová podpora pro žáky se sluchovým postižením [online]. Brno, 2012 [cit. 2021-01-30]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/ugn0u/>. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Jiří Pecl.

[9] PLUHÁČKOVÁ, Markéta, Václav DUFFEK, Václav STACKE a Pavel MENTLÍK. *Kritická místa kurikula zeměpisu na 2. stupni základní školy*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2019-. ISBN 978-80-261-0924-2.

[10] Klasifikace map. *Univerzitní informační systém Mendelovy univerzity* [online]. Brno, 2018 [cit. 2021-01-30]. Dostupné z: https://is.mendelu.cz/eknihovna/opory/zobraz_cast.pl?cast=59988

[11] NOVÁK, Svatopluk. *Zeměpis: učebnice*. Brno: Nová škola, 2007. Duhová řada. ISBN 80-7289-080-8.

[12] ÚLOVEC, Jiří. Metodický pokyn č. 2/2020 pro evidenci a zpřístupňování map v archivech České republiky. In: *Ministerstvo vnitra České republiky* [online]. 2020 [cit. 2021-03-14]. Dostupné z: https://www.mvcr.cz/soubor/metodicky-pokyn-c-2-2020-pro-evidenci-a-zpristupnovani-map-v-archivech-ceske-republiky.aspx

[13] OSVALDOVÁ, Zuzana. Pracovné listy ako prostriedok aktivizácie žiakov vo vyučovacom procese. *Edukácia* [online]. 2017, **2**(1), 194-201 [cit. 2021-03-11]. Dostupné z: https://www.upjs.sk/public/media/15903/Osvaldova_1.pdf

[14] DUŠKOVÁ, Miroslava. *Měření displeje*. Západočeská univerzita - DIZ2. 2020.

[15] TRENČAN, Pavel. *Práce s mapou*. Západočeská univerzita - DIZ2. 2020.

[16] *ČT edu* [online]. Česká televize, 2019 [cit. 2021-03-13]. Dostupné z: https://edu.ceskatelevize.cz/

[17] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Pracovní sešit z matematiky: Soubor úloh pro 7. ročník základní školy*. 2. Praha: Prometheus, 2004. ISBN 80-7196-287-2.

[18] Škola doma (9. tř.): Slovní úloha na poměr. *ČT edu* [online]. Česká televize, 2019 [cit. 2021-03-13]. Dostupné z: https://edu.ceskatelevize.cz/video/5795-skola-doma-9-tr-slovni-uloha-na-pomer?vsrc=predmet&vsrcid=matematika%7E2-stupen-zs

Další litaratura

[19] ŠIMON, Petr, Jana VÁCHOVÁ, Lucie MÜLLEROVÁ, Pavel TAUŠ, Iveta MARTINCOVÁ a Jana GÉRINGOVÁ. *Hravý zeměpis 7*. 3. vydání. Praha: Taktik International, [2016]. ISBN 978-80-87881-79-8.

[20] SOJKOVÁ, Tereza. *Chápání vztahu části a celku u žáků na druhém stupni základní školy*. 2017. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce Novotná, Jarmila.

[21] HÖFFER, Shirley Ann. *Ratio, proportion and scaling* [online]. University of Oregon: Eric, 1975 [cit. 2021-03-10]. ED 183364. Dostupné z: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED183364.pdf

Zdroje obrázků a grafů

(1) KOČÍ, Slavomír a Ladislav KOČÍ. *Matematik pro 7. ročník 2.díl*. Šumperk: TV Graphics.

(2) International GeoGebra Institute. *Geogebra Classic 5* [software]. 19. ledna 2021 [cit. 2021-03-14]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/download?lang=cs.

(3) Měřítko mapy. In: *Informační systém Masarykovy univerzity* [online]. [cit. 2021-01-30]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1441/podzim2015/Ze2RC_KTK1/um/Cviceni_1_meritko.pdf

(4) *Mapy.cz* [online]. Seznam.cz, c1996–2021 [cit. 2021-03-14]. Dostupné z: https://mapy.cz/

(5) Trimino-Generator. Triminos als Übung und Wiederholung [online]. [cit. 2021-01-30]. Dostupné z: http://schule.paul-matthies.de/Trimino.php?style=2&font1=sans&font2=sans&color1=000000&color2=980000

(6) XMind Ltd. *XMaind 2020* [software]. [cit. 2021-03-14]. Dostupné z: https://www.xmind.net/download/.

SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ

Obrázky

Obrázek č. 1 – Úsečky.

Obrázek č. 2 – Dělení úsečky v daném poměru.

Obrázek č. 3 – Geometrické dělení úsečky v daném poměru.

Obrázek č. 4 – Pravoúhlý trojúhelník.

Obrázek č. 5 – Měřítko mapy.

Obrázek č. 6 - Grafické měřítko mapy.

Obrázek č. 7 – Plzeň a okolí v měřítku přibližně 1 : 100 000.

Obrázek č. 8 – Plzeňský kraj v měřítku přibližně 1 : 800 000.

Obrázek č. 9 – Evropa v měřítku přibližně 1 : 25 000 000

Obrázek č. 10 – Trimino.

Obrázek č. 11 – Kvádr.

Obrázek č. 12 – Myšlenková mapa.

Grafy

Graf č. 1 – Přímá úměrnost.

Graf č. 2 – Nepřímá úměrnost.

Graf č. 3 – Získané počty bodů.

Graf č. 4 – Počet žáků s uvedenými známkami.

Graf č. 5 – Úloha č. 1 – Počet žáků s danými typy odpovědí.

Graf č. 6 – Úloha č. 2 – Počet žáků s danými typy odpovědí.

Graf č. 7 – Úloha č. 3 – Počet žáků s danými typy odpovědí.

Graf č. 8 – Úloha č. 4 – Počet žáků s danými typy odpovědí.

Graf č. 9 – Úloha č. 5 – Počet žáků s danými typy odpovědí.

PŘÍLOHY

Pracovní list č. 1 – Poměr

1. Zapiš poměry kuliček v obrázku.

   a) Červené : modré

   b) Zelené : žluté

   c) Žluté : červené

   d) Modré : zelené

2. Rozděl úsečku v zadaných poměrech – každou část vybarvi jinou barvou.

   a) $2 : 5$

   b) $8 : 6$

3. Částku $144\ Kč$ rozděl v poměru:

   $a)\ 1 : 2$ $b)\ 3 : 5$ $c)\ 3 : 1$ $d)\ 8 : 1$

4. Zkrať poměr $18 : 12$

   a) Dvěma …………………………

   b) Třemi ……………………………

   c) Na základní tvar ……………

5. Z osmi a půl kilogramů mouky se upeče 10 kg chleba. Vyjádři v základním tvaru poměr hmotnosti spotřebované mouky a výsledné hmotnosti chleba.

8,5

10

_______ : _______

6. Je poměr v základním tvaru? Pokud ne, uprav jej na základní tvar.

$15 : 25 =$ $\qquad$ $2{,}4 : 6 =$

$6 : 7 =$ $\qquad$ $1 : \frac{5}{8} =$

7. Najdi takové dvojice, aby jejich základní tvary byly navzájem převrácené poměry. Dvojice vybarvi stejnou barvou.

Postupuj podle vzoru: Dvojici utvoří $1{,}3 : 5{,}2$ a $52 : 13$*, protože poměr* $1{,}3 : 5{,}2 = 13 : 52$ *(v základním tvaru). Převrácený poměr k němu je* $52 : 13$*.*

$5 : 8$ $\quad$ $3{,}2 : 7$ $\quad$ $1{,}3 : 5{,}2$ $\quad$ $35 : 16$

$52 : 13$ $\quad$ $8 : 5$ $\quad$ $8 : 15$ $\quad$ $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$

8. Obvod trojúhelníku měří $84\ cm$. Velikosti jeho stran jsou v poměru $6 : 8 : 10$. Urči velikosti stran.

9. Mapa je v měřítku $1 : 200\,000$. Obrazy dvou míst jsou od sebe na mapě vzdáleny $8\ cm$. Jaká je skutečná vzdálenost těchto dvou míst?

a) $1{,}6\ km$ $\qquad$ b) $2\ km$ $\qquad$ c) $16\ km$ $\qquad$ d) $20\ km$

Pracovní list č. 2 – Procvičení

1. Zítra má tatínek na služební cestu trojnásobně více času než dnes. Rozděl mu cestu dlouhou $432\ km$ na části podle času, který na ni má. Kolik kilometrů ujede dnes a kolik zítra?

2. Karel zaplatil v prosinci za 17 obědů $748\ Kč$. Kolik korun zaplatí v lednu za 21 obědů?

3. Jaký průměr má ve skutečnosti matice, která má v technickém výkresu v měřítku $4 : 1$ průměr $12\ cm$?

4. V trojúhelníku ABC platí $a : b : c = 2 : 5 : 4$. Nejdelší strana měří $45\ mm$. Vypočítej velikosti ostatních stran.

5. Potřebuješ získat 1,5 kg sušených hub. Víš, že z 5 kg syrových získáš 750 g sušených. Kolik potřebuješ nasbírat syrových hub?

6. Zpevňovací sloupy se zakopávají do země v poměru $3 : 5$. Kolik metrů sloupů je třeba zakopat, když sloupy měří 12 m?

7. Náměstí je na plánku města v měřítku $1 : 500$ znázorněno čtvercem o straně délky 16 cm. Jaké rozměry má náměstí ve skutečnosti? Jaká je výměra náměstí na plánku a ve skutečnosti?

Pracovní list č. 3 – Souhrnné opakování

1. Pan Nový vozí cihly. Kdyby jel denně třikrát, navozil by cihly na stavbu za 8 dní. Kolikrát za den musí jet, aby byl hotov o dva dny dříve?

2. Fotografie má tvar obdélníku s rozměry $15\ cm$ a $18\ cm$. Delší stranu fotografie potřebujeme zvětšit na $27\ cm$. Kolikrát zvětšíme rozměry fotografie? Jaký bude druhý rozměr fotografie?

3. Vypočítej neznámé členy poměrů

   a) $36 : 24 = 9 : x$
   $x =$

   b) $75 : y = 225 : 333$
   $y =$

4. Rozměry obdélníků jsou v poměru $7 : 5$. V jakém poměru jsou jejich obvody a obsahy? Větší obdélník má rozměry 21 a $14\ cm$.

5. V jakém poměru jsou uvedené veličiny?

$1\,dm\ a\ 1\,m$ =

$1\,kg\ a\ 1\,g\ =$

$1\,hl\ a\ 1\,l\ =$

$1\,km\ a\ 728\,m$ =

0,5 $kg\ a\ 300\,g$ =

$1\,hod\ a\ 45\,min$ =

6. Bronz je slitina mědi a cínu v poměru $41 : 9$. Kolik mědi a cínu je v $10\,kg$ bronzu?

7. Těžiště rozděluje těžnici jdoucí z vrcholu trojúhelníka v poměru $2 : 1$. V jaké vzdálenosti od vrcholu trojúhelníka bude těžiště, pokud je těžnice dlouhá 3,6 cm?

8. Pozemek ve tvaru obdélníku má na plánku v měřítku $1 : 250$ rozměry $7\,cm$ a $12\,cm$. Kolik rolí pletiva musí majitel pozemku koupit, aby ho celý oplotil, když se role prodávají po $25\,m$?

Pracovní list č. 4 – Měřítko mapy

1. Doplň tabulku

Měřítko mapy	$1\ cm$ na mapě = $x\ km$ ve skutečnosti	Vzdálenost na mapě	Skutečná vzdálenost
$1 : 200$		$10\ cm$	
$1 : 5\,000$			$1{,}5\ km$
		$12\ cm$	$36\ km$
$1 : 1\,000\,000$		$2{,}5\ cm$	

2. Města jsou od sebe ve skutečnosti vzdálena $48\ km$. Na mapě je vzdálenost měst $8\ cm$. Jaké je měřítko mapy?

3. Na mapě s měřítkem $1 : 75\,000$ je vzdálenost dvou míst $9\ cm$. Kolik centimetrů od sebe budou stejná místa vzdálena na mapě s měřítkem $1 : 50\,000$?

4. Na turistické mapě v měřítku $1 : 20\,000$ turisté vyznačili trasu dlouhou $32\ cm$. Kolik kilometrů mají v plánu ujít?

5. Pozemek tvaru čtverce má na mapě v měřítku $1 : 50\,000$ plochu $16\ cm^2$. Jaká je jeho plocha ve skutečnosti? Vyjádři v hektarech.

6. Rýsuješ plán zahrádkářské kolonie v měřítku $1 : 500$. První zahrada má tvar obdélníku. Skutečné rozměry zahrady jsou $25\ m$ a $35\ m$. Narýsuj tuto zahradu. Do obdélníku napiš její skutečnou výměru v arech (ar).

7. Trasa letadla z Prahy na Mallorcu na mapě v měřítku $1 : 15\ 000\ 000$ měří $10\ cm$. Letadlo letí průměrnou rychlostí i se vzletem a přistáním $700\ km/h$. Jak dlouho bude trvat let mezi těmito destinacemi? (*zaokrouhli na 2 desetinná místa*)

8. Trasa výletu má na mapě v měřítku $1 : 75\ 000$ délku $20\ cm$. Do výchozího bodu přijedeme vlakem v $9\ h\ 40\ min$. Předpokládáme, že půjdeme průměrnou rychlostí $4\ km$ za hodinu. Na pauzy v průběhu výletu připočteme $1{,}5\ h$. Stihneme vlak z cílového místa, který jede v 15.30?

Řešení pracovních listů

Pracovní list č. 1 – Poměr

1. Zapiš poměry kuliček v obrázku.

a) Červené : modré
$5 : 5 = (1 : 1)$

b) Zelené : žluté
$3 : 7$

c) Žluté : červené
$7 : 5$

d) Modré : zelené
$5 : 3$

2. Rozděl úsečku v zadaných poměrech – každou část vybarvi jinou barvou.

a) $2 : 5$

b) $8 : 6$

Poměr $8 : 6$ lze zkrátit na základní tvar $4 : 3$ a za každý dílek považovat jednu malou úsečku.

Druhou možností je z počtu dílků vypočítat, že každá z malých úseček odpovídá dvěma dílkům.

3. **Částku $144\ K$č rozděl v poměru:**

$a)\ 1 : 2$	$b)\ 3 : 5$	$c)\ 3 : 1$	$d)\ 8 : 1$
$48\ a\ 96$	$54\ a\ 90$	$108\ a\ 36$	$128\ a\ 16$

4. Zkrať poměr $18 : 12$

a) Dvěma $9 : 6$
b) Třemi $6 : 4$
c) Na základní tvar $3 : 2$

5. Z osmi a půl kilogramů mouky se upeče 10 kg chleba. Vyjádři v základním tvaru poměr hmotnosti spotřebované mouky a výsledné hmotnosti chleba.

Mouka : Chleba = $8{,}5\ kg :\ 10\ kg = 85 : 100 = 17 : 20$

6. Je poměr v základním tvaru? Pokud ne, uprav jej na základní tvar.

$15 : 25 = 3 : 5$

$2{,}4 : 6 = 24 : 60 = 2 : 5$

$6 : 7 = ANO$

$1 : \frac{5}{8} = 1 : 0{,}625 = 1000 : 625 = 8 : 5$

7. Najdi k poměru poměr převrácený. Dvojice vybarvi stejnou barvou.

$5 : 8$ $3{,}2 : 7$ $1{,}3 : 5{,}2$ $35 : 16$

$52 : 13$ $8 : 5$ $8 : 15$ $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$

8. Obvod trojúhelníku měří $84\ cm$. Velikosti jeho stran jsou v poměru $6 : 8 : 10$. Urči velikosti stran.

Jde o úlohu typu dělení celku v daném poměru. Součtem členů poměru vydělíme obvod. Tím zjistíme velikost jednoho dílku. Ten poté násobíme jednotlivými členy poměru.

$$6 + 8 + 10 = 24$$

$$84 : 24 = 3{,}5$$

$$\underline{a = 3{,}5 \cdot 6 = 21\ cm, \quad b = 3{,}5 \cdot 8 = 28\ cm, \quad c = 3{,}5 \cdot 10 = 35\ cm}$$

Kontrolu provedeme sečtením všech stran. Musí vyjít zadaný obvod.

9. Mapa je v měřítku $1 : 200\,000$. Obrazy dvou míst jsou na mapě od sebe vzdáleny $8\ cm$. Jaká je skutečná vzdálenost těchto dvou míst?

a) $1{,}6\ km$ b) $2\ km$ c) $\underline{16\ km}$ d) $20\ km$

$1\ cm$ *na mapě odpovídá* $2\ km$ *ve skutečnosti. Tuto vzdálenost násobíme* $8\ cm$.

Pracovní list č. 2 - Procvičení

1. Zítra má tatínek na služební cestu trojnásobně více času než dnes. Rozděl mu cestu dlouhou $432\ km$ na části podle času, který na ni má. Kolik kilometrů ujede dnes a kolik zítra?

Čas na cestu dnes a zítra vyjádříme v poměru $1 : 3$. *V tomto poměru rozdělíme délku cesty.*

$$1 + 3 = 4$$

$$432 : 4 = 108$$

$$1 \cdot 108 = 108\ km, \qquad 3 \cdot 108 = 324\ km$$

<u>První den tatínek ujede $108\ km$, druhý den $324\ km$</u>.

2. Karel zaplatil v prosinci za 17 obědů $748\ Kč$. Kolik korun zaplatí v lednu za 21 obědů?

Vypočteme cenu za jeden oběd.

$$748 : 17 = 44\ Kč$$

Počet lednových obědů vynásobíme cenou jednoho obědu.

$$21 \cdot 44 = 924\ Kč$$

<u>Za lednové obědy Karel zaplatí $924\ Kč$</u>.

3. **Jaký průměr má ve skutečnosti matice, která má v technickém výkresu v měřítku $4 : 1$ průměr $12\ cm$?**

Měřítko výkresu znamená, že nákres je 4krát větší než ve skutečnosti.

Abychom získali skutečnou délku, musíme délku šroubu v technickém výkresu vydělit čtyřmi.

$$12 : 4 = 3\ cm$$

Ve skutečnosti měří šroub $3\ cm$.

4. **V trojúhelníku ABC platí $a : b : c = 2 : 5 : 4$. Nejdelší strana měří $45\ mm$. Vypočítej velikosti ostatních stran.**

Zjistíme velikost jednoho dílku.

$$45 : 5 = 9\ mm$$

Velikost jednoho dílku postupně vynásobíme členy poměru.

$$a = 9 \cdot 2 = 18\ mm$$

$$c = 9 \cdot 4 = 36\ mm$$

Strana $a = 18\ mm$, *strana* $c = 36\ mm$.

5. **Potřebuješ získat $1,5\ kg$ sušených hub. Víš, že z $5\ kg$ syrových získáš $750\ g$ sušených. Kolik potřebuješ nasbírat syrových hub?**

Zde máme tři možnosti řešení

a) *Výpočet pomocí* $1\ kg$ *- Žáci jsou schopni na tento postup přijít sami.*
Vypočteme, jaké množství sušených hub získáme z $1\ kg$ *syrových.*

$$0,75 : 5 = 0,15\ kg$$

Vypočteme, kolik kilogramů syrových hub potřebujeme na $1,5\ kg$ *sušených.*

$$1,5 : 0,15 = 10\ kg$$

Na získání $1,5\ kg$ *sušených hub potřebujeme* $10\ kg$ *syrových.*

b) *Výpočet pomocí rovnosti poměrů „syrové : syrové = sušené : sušené“*

$$x : 5 = 1,5 : 0,75$$

Hledáme takové číslo x, aby došlo k rovnosti poměrů (viz kapitola 1.2.6a).

Vypočítáme podíl prvního a druhého členu druhého poměru.

$$1,5 : 0,75 = 2$$

Podíl členů druhého poměru vyšel 2. Stejný podíl musí vyjít i při dělení členů prvního poměru.

$$x : 5 = 2$$

$$x = 10$$

Na získání $1,5\ kg$ *sušených hub potřebujeme* $10\ kg$ *syrových.*

c) Výpočet pomocí rovnosti poměrů „syrové : sušené = syrové : sušené“ (viz kapitola 1.2.6d).

$$5 : 0{,}75 = x : 1{,}5$$

$$5 : 0{,}75$$

$$x : 1{,}5$$

$$5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$$

$$0{,}75 \cdot x = 7{,}5 \;=>\; x = 10$$

<u>Na získání $1{,}5\ kg$ sušených hub potřebujeme $10\ kg$ syrových.</u>

6. Zpevňovací sloupy se zakopávají do země v poměru $3 : 5$. Kolik metrů sloupů je třeba zakopat, když sloupy měří $12\ m$?

Celkovou délku tyče rozdělíme v zadaném poměru.

$$3 + 5 = 8$$

$$12 : 8 = 1{,}5\ m$$

$$1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5\ m;\ 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5\ m$$

<u>Je třeba zakopat $4{,}5\ m$ tyče.</u>

Poznámka pro vyučující

Délku zakopané tyče lze zjistit i jiným způsobem. Pro žáky sedmého ročníku je následující způsob nevhodný, jelikož ještě neumí pracovat s rovnicemi. Žák devátého ročníku by však neměl mít problém příklad tímto způsobem vyřešit.

Poměr zakopané a nezakopané části tyče lze vyjádřit poměrem $x : (12 - x)$, kde x je délka zakopané části. Víme, že poměr zakopané a nezakopané části má být $3 : 5$, proto dáme oba poměry do rovnosti.

$$3 : 5 = x : (12 - x)$$

Poměry vyjádříme ve tvaru zlomku a vypočteme z rovnice x.

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{12 - x}$$

$$3 \cdot (12 - x) = 5x$$

$$8x = 36$$

$$x = 4{,}5\ m$$

7. Náměstí je na plánku města v měřítku $1 : 500$, znázorněno čtvercem o straně délky $16\ cm$. Jaké rozměry má náměstí ve skutečnosti? Jaká je výměra náměstí na plánku a ve skutečnosti?

$1\ cm$ na plánku odpovídá $5\ m$ ve skutečnosti.

Vypočteme skutečnou délku náměstí,

$$16 \cdot 5 = 80\ m.$$

Vypočteme výměru neboli obsah náměstí na plánku S_p a ve skutečnosti S_s.

$$S_p = 16 \cdot 16 = 256\ cm^2$$

$$S_s = 80 \cdot 80 = 6\,400\ m^2$$

Ve skutečnosti je náměstí dlouhé 80 m. Skutečná výměra je $6\,400\ m^2$, na plánku je výměra $256\ cm^2$.

Pracovní list č.3 – Souhrnné opakování

1. **Pan Nový vozí cihly. Kdyby jel denně třikrát, navozil by cihly na stavbu za $8\ dn$í. Kolikrát za den musí jet, aby byl hotov o dva dny dříve?**

Zjistíme, kolik navážek celkem pan Nový udělá.

$$3 \cdot 8 = 24\ navážek$$

Celkový počet navážek rozdělíme do $6\ dn$ů.

$$24 : 6 = 4$$

Aby byl pan Nový hotov o $2\ dny$ dříve, musí jet $4krát$ za den.

Úlohu lze řešit také pomocí trojčlenky. Ze zadání je zřejmé, že pokud pan Nový pojede během dne víckrát, navozí cihly rychleji – bude se tedy jednat o nepřímou úměrnost.

Údaje zapíšeme pomocí trojčlenky (viz kapitola 2.2). Jelikož jde o nepřímou úměrnost, připíšeme šipky tak, aby druhá měla opačný směr než první.

$$\uparrow \quad 3krát \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8\ dní \quad \downarrow$$

$$\underline{xkrát \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6\ dní}$$

$$x : 3 = 8 : 6$$

Hledáme takové číslo x, aby došlo k rovnosti poměrů. Porovnáme druhé členy obou poměrů. Druhý člen prvního poměru je poloviční než druhý člen druhého poměru. Ve stejném poměru musí být i první členy obou poměrů.

$$4 : 3 = 8 : 6$$

$$x = 4$$

2. Fotografie má tvar obdélníku s rozměry $15\,cm$ a $18\,cm$. Delší stranu fotografie potřebujeme zvětšit na $27\,cm$. Kolikrát zvětšíme rozměry fotografie? Jaký bude druhý rozměr fotografie?

Vyjádříme rozměry fotografie poměrem

$$15 : 18.$$

Nový poměr fotografie bude

$$x : 27.$$

Poměry dáme do rovnosti

$$15 : 18 = x : 27.$$

Zjistíme kolikrát jsme zvětšili druhý člen poměru

$$27 : 18 = 1{,}5.$$

Kolikrát jsme zvětšili druhý člen poměru, tolikrát musíme zvětšit i první člen.

$$15 \cdot 1{,}5 = 22{,}5\ cm$$

Rozměry fotografie zvětšíme $1{,}5krát$. Druhý rozměr fotografie bude $22{,}5$ cm.

3. Vypočítej neznámé členy poměrů

a) $36 : 24 = 9 : x$

$\underline{x = 6}$

(Zkrátíme 4.)

b) $75 : y = 225 : 333$

$\underline{y = 111}$

(Rozšíříme 3.)

4. Rozměry obdélníků jsou v poměru $7 : 5$. V jakém poměru jsou jejich obvody a obsahy? Větší obdélník má rozměry 21 a $14\,cm$.

Větší obdélník odpovídá 7 *dílkům poměru. Vypočteme velikost jednoho dílku.*

$$21 : 7 = 3\ cm, \qquad 14 : 7 = 2\ cm$$

Menší obdélník odpovídá 5 *dílkům.*

$$5 \cdot 3 = 15\ cm, \qquad 5 \cdot 2 = 10\ cm$$

Nyní vypočteme obvody a obsahy obou obdélníků a dáme je do poměru.

1) Obvody:

$$O_v = 2 \cdot (21 + 14) = 70\ cm$$
$$O_m = 2 \cdot (15 + 10) = 50\ cm$$

$$O_v : O_m = 70 : 50 = 7 : 5$$

2) Obsahy:

$$S_v = 21 \cdot 14 = 294\ cm^2$$
$$S_m = 15 \cdot 10 = 150\ cm^2$$

$$S_v : S_m = 294 : 150 = 49 : 25$$

Obvody obdélníků jsou v poměru 7 : 5, obsahy v poměru $49 : 25$.

5. **V jakém poměru jsou uvedené veličiny?**

$1\,dm\ a\ 1\,m = 1:\ 10$

$1\,kg\ a\ 1\,g\ = 1\,000 : 1$

$1\,hl\ a\ 1\,l\ = 100 : 1$

$1\,km\ a\ 728\,m = 1000 : 728 = 125 : 91$

$0{,}5\,kg\ a\ 300\,g = 500 : 300 = 5 : 3$

$1\,hod\ a\ 45\,\min = 60 : 45 = 4 : 3$

Převedeme oba údaje na stejné jednotky.

6. **Bronz je slitina mědi a cínu v poměru $41 : 9$. Kolik mědi a cínu je v $10\,kg$ bronzu?**

Celek $10\,kg$ rozdělíme v zadaném poměru a získáme velikost jednoho dílku.

$$41 + 9 = 50$$

$$10 : 50 = 0{,}2\,kg$$

Jedním dílkem postupně násobíme oba členy poměru.

$$0{,}2 \cdot 41 = 8{,}2\,kg\ mědi$$

$$0{,}2 \cdot 9 = 1{,}8\,kg\ cínu$$

<u>*V $10\,kg$ bronzu je $8{,}2\,kg$ mědi a $1{,}8\,kg$ cínu.*</u>

7. **Těžiště rozděluje těžnici jdoucí z vrcholu trojúhelníka v poměru $2 : 1$. V jaké vzdálenosti od vrcholu trojúhelníka bude těžiště, pokud je těžnice dlouhá $3{,}6\,cm$?**

Délku těžnice rozdělíme v poměru $2 : 1$.

$$3{,}6 : 3 = 1{,}2$$

Vzdálenost od vrcholu odpovídá prvnímu členu poměru, tj.

$$1{,}2 \cdot 2 = 2{,}4\,cm$$

<u>*Těžiště bude od vrcholu vzdálené 2,4 cm.*</u>

8. **Pozemek ve tvaru obdélníku má na plánku v měřítku $1 : 250$ rozměry $7\,cm$ a $12\,cm$. Kolik rolí pletiva musí majitel pozemku koupit, aby ho celý oplotil, když se role prodávají po $25\,m$?**

Vypočteme skutečné rozměry pozemku.

$1\,cm$ *na mapě odpovídá 250 cm =* $2{,}5\,m$ *ve skutečnosti.*

$$7 \cdot 2{,}5 = 17{,}5\,m$$

$$12 \cdot 2{,}5 = 30\,m$$

Vypočítáme obvod pozemku.

$$O = 2 \cdot (17{,}5 + 30) = 95\,m$$

Obvod pozemku vydělíme délkou role a získáme počet rolí, které je třeba koupit. (V takovýchto případech vždy zaokrouhlujeme nahoru.)

$$95 : 25 = 3{,}8\ \doteq 4\,role$$

<u>*Majitel musí koupit 4 role pletiva na oplocení celého pozemku.*</u>

Pracovní list č. 4 - Měřítko

1. **Doplň tabulku**

Měřítko mapy	$1\ cm$ na mapě = $x\ km$ ve skutečnosti	Vzdálenost na mapě	Skutečná vzdálenost
$1:\ 200$	$0{,}002\ km\ (=\ 2\ m)$	$10\ cm$	$20\ m$
$1:\ 5\ 000$	$0{,}05\ km\ (=\ 50\ m)$	$30\ cm$	$1{,}5\ km$
$1:\ 300\ 000$	$3\ km$	$12\ cm$	$36\ km$
$1:\ 1\ 000\ 000$	$10\ km$	$2{,}5\ cm$	$25\ km$

2. **Města jsou od sebe ve skutečnosti vzdálena $48\ km$. Na mapě je vzdálenost měst $8\ cm$. Jaké je měřítko mapy?**

Porovnáme vzdálenost na mapě a ve skutečnosti převedenou na centimetry.

$$8 : 4\ 800\ 000$$

Poměr zkrátíme tak, aby prvním členem bylo číslo jedna, v tomto případě krátíme číslem osm.

$$\underline{1:\ 600\ 000}$$

3. **Na mapě s měřítkem $1:\ 75\ 000$ je vzdálenost dvou míst $9\ cm$. Kolik centimetrů od sebe budou stejná místa vzdálena na mapě s měřítkem $1:\ 50\ 000$?**

Zde máme dvě možnosti řešení.

A. *Počítáme pomocí skutečné vzdálenosti.*
   $1\ cm$ *na mapě odpovídá* $75\ 000\ cm =\ 0{,}75\ km$ *ve skutečnosti, potom je skutečná vzdálenost:*

$$0{,}75\ \cdot 9 = 6{,}75\ km = 6\ 750\ m.$$

Pomocí skutečné vzdálenosti vypočteme vzdálenost na mapě v druhém měřítku:

$$1\ cm \textit{ na mapě je } 50\ 000\ cm =\ 500\ m.$$

Vydělíme celkovou vzdálenost skutečnou vzdáleností, která je zobrazena $1\ cm$ *na mapě neboli:*

$$6\ 750 : 500 =\ 13{,}5\ cm$$

B. Porovnáme měřítka
   Kolikrát se zmenšil druhý člen poměru (měřítka), tolikrát se musí zvětšit vzdálenost na mapě.

$$\frac{75\,000}{50\,000} = 1{,}5$$

Vzdálenost na mapě vynásobíme vypočítaným podílem.

$$9 \cdot 1{,}5 = 13{,}5\ cm$$

<u>*Místa od sebe budou vzdálena* $13{,}5\ cm$.</u>

4. **Na turistické mapě v měřítku $1 : 20\,000$ turisté vyznačili trasu dlouhou $32\ cm$. Kolik kilometrů mají v plánu ujít?**

$1\ cm$ *na mapě odpovídá* $20\,000\ cm = 0{,}2\ km$ *ve skutečnosti. Uděláme součin skutečné délky a délky trasy, kterou jsme naměřili na mapě, tj.*

$$0{,}2 \cdot 32 = 6{,}4\ km$$

<u>*Turisté mají v plánu ujít* $6{,}4\ km$.</u>

5. **Pozemek tvaru čtverce má na mapě v měřítku $1 : 50\,000$ plochu $16\ cm^2$. Jaká je jeho plocha ve skutečnosti? Vyjádři v hektarech**.

Z obsahu vypočteme velikost strany čtverce v mapě. Žáci ještě neumí odmocniny, proto musíme jít jinou cestou. Hledáme takové číslo, které když vynásobíme samo sebou, dá výsledek 16. Pokud žáky výsledek nenapadne, řešíme metodou pokus omyl.

$$4 \cdot 4 = 16 \ => \ a = 4\ cm.$$

$1\ cm$ *na mapě je* $50\,000\ cm = 0{,}5\ km$ *ve skutečnosti.*

Pozemek má ve skutečnosti stranu dlouhou

$$4 \cdot 0{,}5 = 2\ km.$$

$$\textit{Skutečná rozloha} = 2 \cdot 2 = 4\ km^2 = 400\ ha$$

<u>*Pozemek má ve skutečnosti plochu* $400\ ha$.</u>

6. **Rýsuješ plán zahrádkářské kolonie v měřítku $1 : 500$. První zahrada má tvar obdélníku. Skutečné rozměry zahrady jsou $25\ m$ a $35\ m$. Narýsuj tuto zahradu. Do obdélníku napiš její skutečnou výměru v arech (ar).**

$1\ cm\ na\ mapě\ odpovídá\ 500\ cm = 5\ m$ *ve skutečnosti*
Rozměry na plánu:

$$\textit{Strana}\ a => 25 : 5 = 5\ cm\ \textit{, strana}\ b => 35 : 5 = 7\ cm\ .$$

Výpočet výměry neboli obsahu pozemku:

$$S = a \cdot b = 25 \cdot 35 = 875\ m^2 = 8{,}75\ ar$$

<u>*Rozměry pozemku na plánu jsou* $5\ cm$ *a* $7\ cm$. *Skutečná výměra je* $8{,}75\ ar$.</u>

7. **Trasa letadla z Prahy na Mallorcu na mapě v měřítku $\mathbf{1 : 15\,000\,000}$ měří $\mathbf{10\ cm}$. Letadlo letí průměrnou rychlostí i se vzletem a přistáním $\mathbf{700\ km/h}$. Jak dlouho bude trvat let mezi těmito destinacemi?** (*zaokrouhli na 2 desetinná místa*)

$1\ cm$ *na mapě odpovídá* $15\,000\,000 = 150\ km$ *ve skutečnosti.*

Touto vzdáleností vynásobíme počtem centimetrů na mapě, tj.

$$10 \cdot 150 = 1\,500\ km$$

Pro výpočet doby letu využijeme vzoreček pro výpočet času v závislosti na dráze a rychlosti:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1500}{700} \doteq 2{,}14\ h.$$

<u>*Letadlo z Prahy na Mallorcu přeletí za zhruba 2,14 h.*</u>

8. **Trasa výletu má na mapě v měřítku $\mathbf{1 : 75\,000}$ délku $\mathbf{20\ cm}$. Do výchozího bodu přijedeme vlakem v $\mathbf{9\ h\ 40\ min}$. Předpokládáme, že půjdeme průměrnou rychlostí $\mathbf{4\ km}$ za hodinu. Na pauzy v průběhu výletu připočteme $\mathbf{1,5\ h}$. Stihneme vlak z cílového místa, který jede v 15.30?**

$1\ cm$ *na mapě odpovídá* $75\,000\ cm = 0{,}75\ km$ *ve skutečnosti.*

$20\ cm$ *na mapě je* $15\ km$ *ve skutečnosti.*

$$t = \frac{s}{v} = \frac{15}{4} = 3{,}75\ h$$

K času cesty přičteme čas na pauzy $3{,}75 + 1{,}5 = 5{,}25\ h$. *Převedeme na* $5\ h\ a\ 15\ min.$

Celkový čas na výlet přičteme k času příjezdu do výchozího bodu,

$$9\ h\ 40\ min + 5\ h\ a\ 15\ min = 14\ h\ 55\ min.$$

<u>*Vlak jede v* 15.30*, takže cestovatelé vlak stihnou a ještě mají* 35 *minut rezervu.*</u>

Zdroje pracovních listů

Pracovní list č. 1

Příklady inspirovány příklady a cvičeními z následujících publikací

Př. 3 - ŽENATÁ, Emílie. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník*. Praha: Blug, 1999, s. 65. ISBN 80-85635-42-9.

Př. 5 - ŽENATÁ, Emílie. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník*. Praha: Blug, 1999, s. 62. ISBN 80-85635-42-9.

Př. 6 - SEDLÁČKOVÁ, Ivana. *Kontrolní prověrky z matematiky - 7. ročník*. Blug. ISSN 98-00-97.

Zdroje obrázků:

Př. 1 - Teddies Kuličky. In: *Zboží.cz* [online]. c1996-2021 [cit. 2021-02-02]. Dostupné z: https://www.zbozi.cz/vyrobek/teddies-kulicky-cvrnkaci-nerozbitne-20-ks/

Př. 2 - Úsečky. Zdroj: vlastní zpracování v Geogebra.

Př. 5 - Kváskový chleba. In: *Receptyonline.cz* [online]. c2005-2021 [cit. 2021-02-02]. Dostupné z: https://www.receptyonline.cz/upecte-si-kvaskovy-chleba-podle-receptu-kuchare-huga-hromase/

Př. 5 - GRIZLY Pšeničná mouka. In: *Grizly* [online]. c2014-2021 [cit. 2021-02-02]. Dostupné z: https://www.grizly.cz/grizly-psenicna-mouka-hladka-bio-1000-g?gclid=Cj0KCQiAlsv_BRDtARIsAHMGVSYsK2SDFH73scGYodc22JfFY1K2fJKUsk-eP7FJXC0BCuG9Jk70CSkaArD7EALw_wcB

Pracovní list č. 2

Příklady inspirovány příklady a cvičeními z následujících publikací

Př. 4 - ŽENATÁ, Emílie. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník*. Praha: Blug, 1999, s. 66. ISBN 80-85635-42-9.

Zdroje obrázků

Př. 3 - Matice M16. In: *Landsmann s.r.o.: Nářadí a nástroje* [online]. 2021 [cit. 2021-04-01]. Dostupné z: https://www.landsmann.cz/matice-m16-sestihranna-presna-din-934-ocel-tr-8-8-povrch-zinek-bily-100ks-_d16609.html

Př. 5 - Košík hub. In: *Depositphotos Inc* [online]. c2009-2021 [cit. 2021-02-02]. Dostupné z: https://cz.depositphotos.com/vector-images/houby.html?qview=2565080

Pracovní list č. 3

Příklady inspirovány příklady a cvičeními z následujících publikací

Př. 2 – BĚLOUN, František, Vlastimil MACHÁČEK a Květa SOVÍKOVÁ. *SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY pro základní školu*. 8. doplněné vydání. Praha: Prometheus, 2009, s. 38. ISBN 978-80-7196-104-8.

Př. 4 - ŽENATÁ, Emílie. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník*. Praha: Blug, 1999, s. 64. ISBN 80-85635-42-9.

Př. 5 - ŽENATÁ, Emílie. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník*. Praha: Blug, 1999, s. 62. ISBN 80-85635-42-9.

Př. 7 - TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika s nadhledem 7: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2019. Škola s nadhledem, s. 79. ISBN 978-80-7489-479-4.

Zdroje obrázků

Př. 1 - Cihla. In: *Depositphotos Inc* [online]. c2009-2021 [cit. 2021-04-01]. Dostupné z: https://st.depositphotos.com/1742172/1490/v/950/depositphotos_14907315-stock-illustration-cartoon-bricks.jpg%20cihla%2025

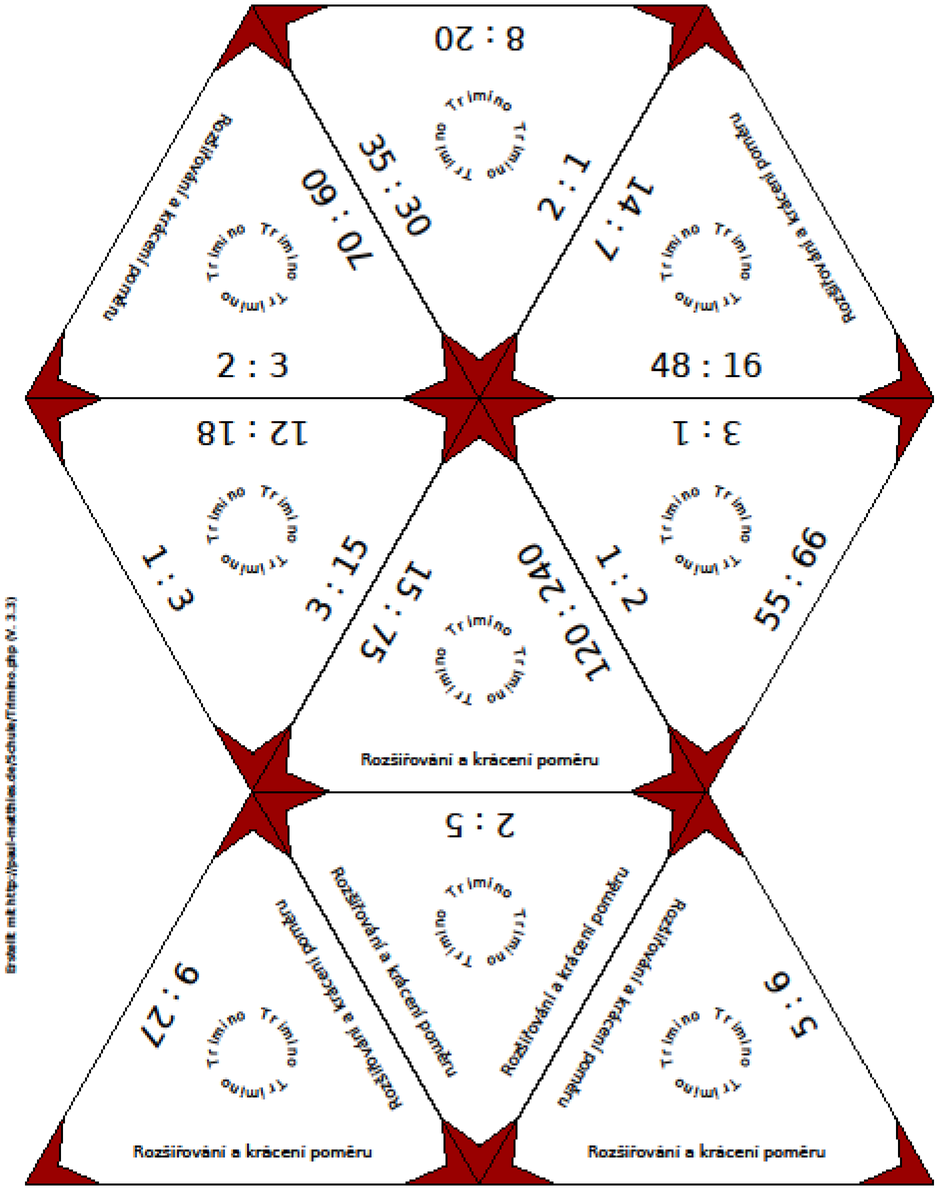
Př. 6 - Kovová medaile za 3. místo. In: *Hubatá černoška* [online]. 2021 [cit. 2021-04-01]. Dostupné z: https://www.hubatacernoska.cz/kovova-medaile-za-3-misto

Pracovní list č. 4

Příklady inspirovány příklady a cvičeními z následujících publikací

Př. 1 - TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika s nadhledem 7: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2019. Škola s nadhledem, s. 83. ISBN 978-80-7489-479-4.

Trimino


8 : 20
35 : 30
2 : 1
70 : 60
14 : 7
2 : 3
48 : 16
12 : 18
3 : 1
1 : 3
3 : 15
15 : 75
120 : 240
1 : 2
55 : 66
2 : 5
9 : 27
5 : 6
Rozšiřování a krácení poměru
Trimino