ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ŘEŠENÍ ÚLOH Z FYZIKY UŽITÍM PRŮMĚRŮ A POMĚRŮ – VÝHODY A RIZIKA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Anna Raichlová

Přírodovědná studia, Fyzika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: doc. Mgr. Jiří Kohout, PhD.

Plzeň, 2021

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené litaratury a zdrojů informací.

V Plzni, ...

Poděkování

Ráda bych poděkovala doc. Mgr. Jiřímu Kohoutovi, Ph.D. za podnětné připomínky a neocenitelnou ochotnou pomoc při psaní této práce. Také děkuji své rodině za podporu během studia.

Obsah

1 Úvod

Mnohé fyzikální úlohy lze řešit pomocí aritmetického nebo váženého průměru, případně pomocí poměrů. Takové řešení bývá jednodušší a rychlejší než tradiční řešení pomocí vzorečků a přitom je fyzikálně správné a zcela v pořádku. Oproti tomu existují úlohy, kde se výpočet průměrem přímo nabízí, ale správně není. Pro rozhodování, zda je použití jednoduššího řešení pomocí průměrů oprávněné, je potřeba rozvinuté fyzikální myšlení, nestačí pouze mechanická znalost vzorečků. Proto považuji používání alternativních řešení úloh ve fyzice za přínosné a zajímalo mne, jak úspěšní jsou studenti v používání takovýchto řešení a jaký k nim zaujímají postoj.

Ve své práci uvádím příklady úloh, které je možné řešit právě pomocí průměrů či poměrů. Dále uvádím některé studie, které se zabývaly zkoumáním chápání konceptu průměru u žáků či studentů, ať už s vazbou na fyziku nebo bez ní. Cílem samotného výzkumu v této práci bylo zjistit, zda studenti SŠ zvládají počítání s průměrem, dále jestli jsou schopni u konkrétních fyzikálních úloh určit, zda je výpočet pomocí průměru v pořádku a také jestli preferují takovýto výpočet nebo spíše tradiční řešení.

Vzhledem k tomu, že v učebnicích převažují úlohy řešené klasickým způsobem, mohou být výsledky výzkumu relevantní při diskuzích, zda a do jaké míry je vhodné zahrnovat zjednodušená řešení úloh pomocí průměrů a poměrů do učebnic a dalších studijních materiálů.

2 Analýza problematiky fyzikálních úloh na SŠ

2.1 Fyzikální úloha jako výuková metoda

Při procesu vyučování fyziky (ale i jiných předmětů) na ZŠ a SŠ používáme tzv. výukové metody, pomocí kterých dosahujeme požadovaných cílů výuky. Tyto metody můžeme obecně rozdělovat podle různých kritérií (Svoboda a Kolářová 2006, kap. 4). Prvním kritériem je zdroj poznání a typ poznatků. Dle tohoto kritéria dělíme výukové metody na metody slovní, názorně demonstrační a praktické. V dalším textu se budu věnovat řešení fyzikálních úloh, které spolu s např. žákovskými pokusy nebo laboratorními úlohami řadíme mezi praktické metody. Dále můžeme výukové metody třídit podle obsahu vzdělání, který mají žáci poznat, zapamatovat si a umět aplikovat ve známých i nových situacích. Takto rozlišujeme metody: informačně receptivní, reproduktivní, metoda problémového výkladu, metoda heuristická, metoda výzkumná.

Skrze řešení fyzikálních úloh rozvíjíme fyzikální myšlení žáka. „Pod pojmem fyzikální myšlení rozumíme speciální nazírání na skutečnost, které se projevuje schopností vyhledávat v jevech skutečnosti jejich fyzikální podstatu, tj. rozpoznávat a určovat fyzikální veličiny a stanovit jednoduché vztahy mezi nimi, vyjadřovat je ve formě fyzikálních zákonů a aplikovat získané zákony ve společenské a technické praxi.“
(Volf 1975, s. 111)

Zadání každé fyzikální úlohy obsahuje dvě základní části, popis situace (zadání údajů, hodnoty fyzikálních veličin, podmínek, předpokladů) a otázku/příkaz. Rozlišujeme úlohy s úplným zadáním, úlohy s neúplným zadáním a problémové úlohy. U prvního typu úloh jsou zadány všechny údaje potřebné k vyřešení úlohy. Takové úlohy se v učebnicích a sbírkách úloh vyskytují nejčasteji (považujeme je za tradiční). Úlohy s neúplným zadáním mohou postrádat některé předpoklady nebo podmínky nutné k řešení, případně je třeba některé údaje dohledat ve fyzikálních tabulkách či učebnicích. Problémové úlohy spadají pod metody problémového výkladu. Takové úlohy navozují problémovou situaci, což představuje pro žáka překážku, kterou nelze překonat okamžitě pomocí známého algoritmu řešení. Hledání nových způsobů řešení vychází ze znalosti fyzikálních zákonů, ale je také potřeba tvůrčí myšlení.

2.2 Strategie procesu řešení fyzikálních úloh

Následující schéma představuje myšlenkový postup pro řešení fyzikálních úloh od zadání po výsledek úlohy. Nevýhodou takového algoritmu může být, že do jisté míry omezuje myšlení řešitele a také, že nelze aplikovat na všechny úlohy. Pokud je úloha zadána tak, že neodpovídá následujícímu schématu, musí řešitel zvolit jiný postup. Nicméně znalost takového schématu pomáhá žákům vytvořit si strategii pro řešení mnoha výpočetních úloh. Jednotlivé etapy procesu řešení fyzikálních úloh vypadají takto (Volf 1975, k. 1):

1. čtení textu
2. zápis textu
3. náčrt situace
4. fyzikální analýza situace
5. obecné řešení úlohy
6. určení jednotky výsledku
7. řešení pro dané hodnoty
8. konstrukce grafu
9. diskuse řešení
10. stanovení odpovědi

Uvedené etapy nejsou pro řešitele závazné, podle charakteru řešení konkrétní úlohy je možné některé z nich vynechat. Zatímco v prvních třech etapách řešitel popisuje zadanou situaci, ve čtvrté etapě, zde označené jako fyzikální analýza situace, si musí uvědomovat zjednodušující podmínky (např. zanedbání tření, rozměrů tělesa, atd.), fyzikální zákony a vztahy, které bude používat pro řešení. Také si v této fázi volí způsob a plán řešení úlohy. Další fáze – obecné řešení úlohy – představuje předpis pro hledanou fyzikální veličinu. Do něj pak teprve žák dosazuje číselné hodnoty veličin ze zadání. Během diskuze řešitel porovnává výsledek se zkušenostmi z reálného života, případně s hodnotami ve fyzikálních tabulkách. Pokud na začátku řešení uvažoval zjednodušující podmínky, lze diskutovat, jak mohly ovlivnit řešení. Je také možné najít výsledek pro určité význačné hodnoty veličin.

2.3 Třídění fyzikálních úloh a metod jejich řešení

Fyzikální úlohy můžeme třídit podle různých hledisek (Svoboda a Kolářová 2006, kap. 6). Již byly zmíněny úlohy **úplné**, **neúplné** a **problémové**.

Podle funkce ve výuce můžeme třídit úlohy na **úvodní** (motivační), **výkladové, procvičovací, opakovací a kontrolní** a také úlohy určené **pro domácí přípravu žáků**.

Dalším hlediskem je způsob řešení úlohy. Tzv. **heuristický rozhovor** představuje ústní řešení úlohy. U takových úloh se nehledá algebraické řešení a je vhodné, aby takové úlohy nebyly komplikované. **Aritmetický** (numerický) způsob se používá převážně v počátečním kurzu fyziky, kdy se žáci s fyzikou seznamují, tedy na základních školách. Jedná se o postupné analytické řešení, kdy žáci spíše usuzují dle vztahů mezi veličinami, než aby používali přímo vzorečky. Neznalost vzorečku tedy nemusí být překážkou. Mnoho takových úloh se dá řešit pomocí trojčlenky, úměrností nebo poměrů. Dalším typem je **geometrický** způsob, kdy využíváme znalosti z geometrie a trigonometrie. Mezi takové úlohy může patřit např. skládání a rozklad sil. K řešení úlohy **grafickým** způsobem používáme konstrukce grafů a následné odečtení či změření hledané veličiny. Mezi takovéto úlohy řadíme kinematické úlohy, optické zobrazování, fázové diagramy apod. Výhodou takového způsobu je názornost fyzikální situace i průběhu řešení. **Alge-**

braický způsob znamená hledání obecného řešení úlohy. Pro žáky to znamená užívání algebraických operací se symboly fyzikálních veličin, někdy bývá potřeba spojit několik fyzikálních vztahů dohromady. Výsledkem je výraz, kdy na jedné straně rovnice stojí hledaná veličina a na druhé všechny známé veličiny. Algebraické řešení vyžadují vyšší míru abstrakce a při seznamování žáků s tímto způsobem používáme nejprve velmi jednoduché úlohy. Existují tři způsoby, které je možno použít při algebraickém způsobu:

- **Užití hotového vzorce** požaduje od žáka provedení analýzy fyzikální situace, nalezení zákonitosti zapsané pomocí jednoho vzorce. Žák užívá přímo definiční vztah, případně nějakou jeho úpravu.
- **Úvahové řešení syntetickým způsobem** odpovídá didaktickému principu od známého k neznámému. Vycházíme při něm ze zadaných veličin a fyzikálních zákonitostí. Ty spojujeme postupně dohromady, až získáme vztah pro neznámou veličinu pomocí známých veličin.
- **Úvahové řesení analytickým způsobem** – zde se začíná vzorcem, který dává odpověď na zadanou otázku a postupně se dosazují vztahy pro neznámé veličiny.

2.3.1 Příklad zadání fyzikální úlohy a řešení různými způsoby

Zadání:

V 8 hodin vyjede z města A do města B automobil rychlostí 40 km $\cdot$ h^{-1} a zároveň z města B do města A vyjede automobil rychlostí 60 km $\cdot$ h^{-1}. Vzdálenost mezi městy je 300 km. V kolik hodin se automobily potkají?

Zápis:

$$\begin{aligned} v_1 &= 40\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1} \\ v_2 &= 60\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1} \\ s &= 300\ \mathrm{km} \\ t &= ? \end{aligned}$$

Řešení heuristickým rozhovorem:

Při heuristickém rozhovoru dospěje žák k řešení úvahou. Takový rozhovor může vypadat např. takto:

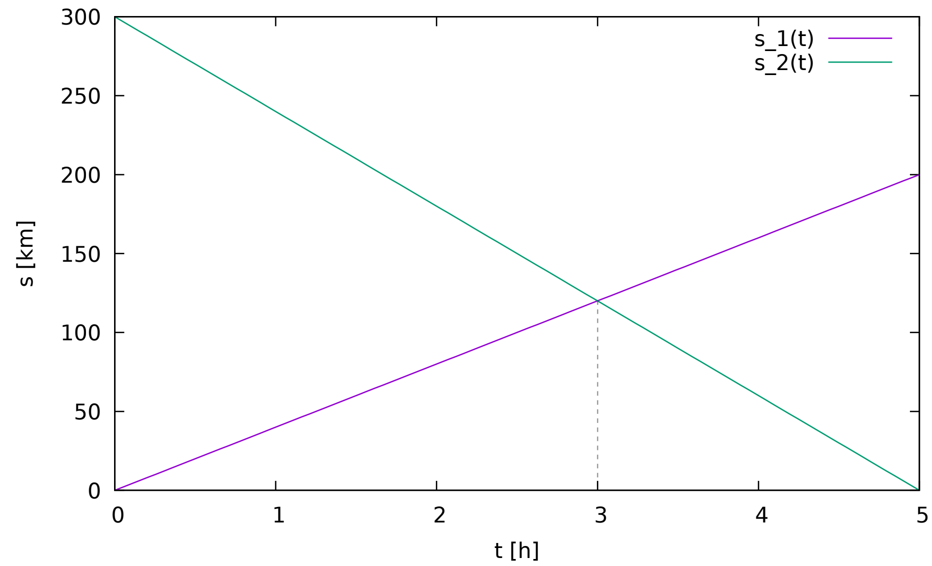
- **Učitel:** „Co můžeme říci o orientaci rychlosti obou aut?“
- **Žák:** „Auta jedou proti sobě, proto mají rychlosti opačnou orientaci.“
- **Učitel:** „Jaká je tedy vzájemná rychlost automobilů?“
- **Žák:** „Je to součet velikostí obou rychlostí, tedy 100 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.“
- **Učitel:** „Co víme o vztahu dráhy, rychlosti a času rovnoměrného pohybu?“
- **Žák:** „Dráha se rovná součinu rychlosti a času.“
- **Učitel:** „Můžeme tedy určit, v kolik hodin se auta ze zadané úlohy potkají?“
- **Žák:** „Jejich vzájemná rychlost je 100 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ a dráha 300 km. Doba tedy bude 3 hodiny. Auta se potkají v 11 hodin.“

Grafické řešení:

Sestavíme předpis funkce pro dráhu pohybu v závislosti na čase pro každé auto. Protože jedou opačným směrem, budou mít jejich rychlosti opačné znaménko. Jejich vzdálenost na počátku je $s = 300$ km.

$$\begin{aligned} s_1(t) &= v_1 t = 40t \\ s_2(t) &= s - v_2 t = 300 - 60t \end{aligned}$$

Pokud tyto funkce načrtneme do grafu (viz graf 1), jejich průsečík představuje čas a místo setkání. Odečtením zjistíme, že se auta potkají po třech hodinách od výjezdu, tedy v 11 hodin.



Graf 1: Funkce dráhy $s_1(t)$ a $s_2(t)$

Algebraické řešení:

Doba t, za kterou se auta potkají, bude pro obě stejná, protože vyjela ve stejný čas. Označme dráhu prvního automobilu s_1. Protože celková dráha je $s = 300$ km, můžeme dráhu druhého auta označit jako $s - s_1$. Sestavíme dvě rovnice pro dráhu každého auta:

$$\begin{aligned} s_1 &= v_1 t \\ s - s_1 &= v_2 t \end{aligned}$$

Obě rovnice můžeme sečíst a poté vyjádřit čas t:

$$s = (v_1 + v_2)t \to t = \frac{s}{v_1 + v_2}$$

Nyní můžeme dosadit číselné hodnoty ze zadání a určit čas, za který se automobily potkají:

$$t = \frac{300}{40 + 60}\ \mathrm{h} = \frac{300}{100}\ \mathrm{h} = 3\ \mathrm{h}.$$

Automobily se potkají po třech hodinách od výjezdu, tedy v 11 hodin.

3 Soubor úloh řešitelných pomocí průměrů a poměrů

V této kapitole uvádím příklady úloh, které lze řešit několika způsoby. Je vždy uvedeno tradiční řešení pomocí vzorce a oproti tomu alternativní řešení pomocí průměrování. Některé úlohy je mimo to možné řešit graficky či pomocí poměrů. Pohledem do učebnic fyziky zjistíme, že úlohy řešené pomocí průměrů a poměrů v nich bývají uváděny zcela výjimečně. Takovým příkladem je úloha na tepelnou výměnu z učebnice Fyzika 8 (Randa et al. 2018), která je zde uvedena v podkapitole 3.3.

3.1 Určení průměrné rychlosti.

Teoretický úvod

Pro určení dráhy obecného pohybu v časovém úseku t platí vztah

$$s = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{1}$$

kde $v = v(t)$ označuje velikost rychlosti pohybu jako veličinu závislou na čase. Průměrnou rychlost pohybu v_p můžeme zjistit, pokud známe celkovou uraženou dráhu s a celkový čas t, po který pohyb trval. Zapsáno matematicky:

$$v_p = \frac{s}{t}. \tag{2}$$

V některých speciálních případech lze k výsledku dojít méně náročným postupem než integrací. Příkladem takového pohybu může být rovnoměrně zrychlený pohyb, v případě záporného zrychlení se jedná o zpomalený pohyb. Obecný vzorec pro výpočet dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu vypadá takto:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{3}$$

Další možností je zaznamenat graficky závislost rychlosti na času, potom platí, že velikost plochy pod křivkou grafu vyjadřuje uraženou dráhu v odpovídajících jednotkách.

Poslední tvrzení vychází z faktu, že dráhu lze počítat jako určitý intergrál podle vztahu (1).

Úloha - zrychlující automobil

Zadání:

Automobil na dráze rovnoměrně zrychluje z původní rychlosti 20 km$\cdot$h^{-1} na 40 km$\cdot$h^{-1}. Jaká je jeho průměrná rychlost?

Zápis:

$$\begin{aligned} v_1 &= 20\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \\ v_2 &= 40\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \\ v_p &= ? \end{aligned}$$

Řešení podle vzorce:

Pro výpočet průměrné rychlosti použijeme vztah (2). Uraženou dráhu určíme ze vztahu (3), kde položíme $s_0 = 0$. Pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu platí $\Delta v = $ $= at \rightarrow a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v_2 - v_1}{t}$. Tento zlomek dosadíme za a do (3) a tím dostaneme výraz pro dráhu:

$$s = v_1 t + \frac{1}{2}(v_2 - v_1)t = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)t.$$

Tento vztah dosadíme do (2) a dostaneme

$$v_p = \frac{(v_1 + v_2)t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Po dosazení získáme průměrnou rychlost:

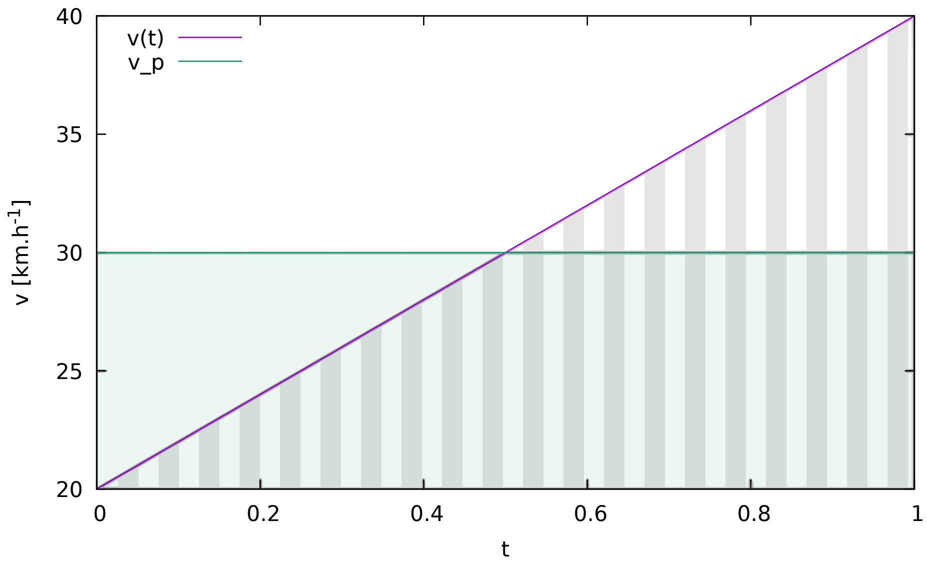
$$v_p = \frac{20 + 40}{2}\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 30\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}.$$

Řešení užitím průměru:

Automobil zrychluje rovnoměrně, což znamená, že jeho rychlost se zvyšuje rovnoměrně, tj. za stejný časový úsek se rychlost zvýší o stejnou hodnotu. Proto můžeme průměrnou rychlost určit jako aritmetický průměr počáteční a koncové rychlosti:

$$v_p = \frac{v_1 + v_2}{2}$$
$$v_p = \frac{20 + 40}{2}\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$
$$v_p = 30\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Grafické řešení:



Graf 2: Průběh rychlosti $v(t)$ v porovnání s průměrnou rychlostí v_p

Z grafu 2 je zřejmé, že obsahy ploch pod křivkami $v(t)$ a v_p jsou stejné. Dráha kterou urazí zrychlující automobil je tedy stejná jako dráha, kterou by urazil během jízdy průměrnou rychlostí. Průměrná rychlost je aritmetickým průměrem počáteční a koncové rychlosti. Dokonce nezáleží na velikosti zrychlení, tudíž ani na čase, během kterého automobil dosáhne koncové rychlosti.

Závěr

Všechny tři metody řešení vedou ke správnému výsledku. Metoda řešení úlohy podle vzorce přestavuje pro studenty „bezpečnou“ cestu k výsledku, ale je poměrně časově náročná. Kvůli delším výpočtům představuje také větší riziko chyby ve výpočtu. Při řešení průměrováním početně i graficky nalezneme řešení téměř okamžitě. Je nutné si ale takovéto řešení fyzikálně zdůvodnit. Další úloha ukazuje nesprávné užití průměrování.

Úloha - průměrná rychlost

Zadání:

Automobil jede první polovinu trasy rychlostí 20 km $\cdot$ h^{-1} a druhou polovinu rychlostí 40 km $\cdot$ h^{-1}. Jaká je průměrná rychlost na celé trase?

Zápis:

$$\begin{aligned} v_1 &= 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}, s_1 \\ v_2 &= 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}, s_1 \\ s &= 2 \cdot s_1 \\ v_p &= ? \end{aligned}$$

Řešení podle vzorce:

Při výpočtu opět vyjdeme vztahu (2). Dobu jízdy v jednotlivých úsecích určíme jako $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$, $t_2 = \frac{s_1}{v_2}$, celkový čas potom jako součet t_1 a t_2:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_1}{v_2} = \frac{s_1 v_2 + s_1 v_1}{v_1 v_2} = s_1 \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} = \frac{s}{2} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}.$$

Poslední rovnost jsme získali díky tomu, že dílčí dráhy s_1 tvoří přesně polovinu celkové dráhy. Získaný vztah dosadíme do rovnice (2):

$$v_p = \frac{s}{\frac{s}{2} \cdot \frac{v_1+v_2}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

$$v_p = \frac{2 \cdot 20 \cdot 40}{20 + 40}\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$$

$$v_p \approx 27\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$$

Řešení užitím průměru:

Užitím aritmetického průměru dostaneme, podobně jako v předchozí úloze, průměrnou rychlost 30 km $\cdot$ h^{-1}, což není správný výsledek. Automobil jede totiž první polovinu trasy delší dobu než druhou část. Úloha by byla řešitelná pomocí průměrování, pouze pokud by byly části trasy ujety automobilem za stejný čas.

3.2 Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici

Teoretický úvod

K popisu pohybu po kružnici používáme veličinu úhlová rychlost ω, která vyjadřuje, o jak velký úhel ϕ (v radiánech) se otočí průvodič za jednotku času, zapsáno vzorcem:

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Perioda T vyjadřuje čas, za který se vykoná jedna otáčka o $360° = 2\pi$ rad. Převrácená hodnota periody, frekvence $f = \frac{1}{T}$, vyjadřuje počet otáček za 1 s. Pro úhlovou rychlost pak platí $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici popisuje úhlové zrychlení, definované jako změna úhlové rychlosti za jednotku času:

$$\epsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{4}$$

Předpis pro úhlovou dráhu potom vypadá takto:

$$\phi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\epsilon t^2 \tag{5}$$

Úloha - počet otáček zrychlující turbíny

Zadání:

Turbína se rovnoměrně roztáčí z klidu až dosáhne za 50 s úhlové rychlosti $\omega = 25\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Kolik během této doby vykoná otáček?

Zápis:

$$\begin{aligned} t &= 50\ \mathrm{s} \\ \omega &= 25\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ n &= ? \end{aligned}$$

Řešení podle vzorce:

Pohyb turbíny popisuje rovnice (5), úhlová rychlost na počátku je nulová, proto lze psát $\phi(t) = \frac{1}{2}\epsilon t^2$. Zrychlení ϵ popisuje rovnice (4). Počet otáček získáme jako podíl celkové úhlové dráhy v radiánech a 2π:

$$n = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}\epsilon t^2}{2\pi} = \frac{\frac{\omega}{t}t^2}{4\pi} = \frac{\omega t}{4\pi}. \tag{6}$$

Číselně:

$$n = \frac{25\cdot 50}{4\pi} \approx 99,5$$

Řešení pomocí průměrování:

Úhlová rychlost a tedy i frekvence se zvyšuje rovnoměrně, počet otáček můžeme tedy spočítat pomocí průměrování počáteční a koncové hodnoty.

$$n = \frac{0 + f}{2}t = \frac{0 + \omega}{2 \cdot 2\pi} = \frac{\omega t}{4\pi}$$

Je vidět, že jsme dospěli ke stejnému výsledku jako v rovnici (6).

3.3 Tepelná výměna.

Teoretický úvod

Úlohy na teplenou výměnu mezi dvěma tělesy o různých teplotách řešíme pomocí kalorimetrické rovnice. Teplejší těleso odevzdává energii chladnějšímu tělesu. Vycházíme z toho, že teplo, které odevzdá teplejší těleso, se rovná teplu, které přijme chladnější těleso. Jakmile se teplota obou těles vyrovná, přenost tepla skončí. Ve školních úlohách zanedbáváme úniky tepla do okolí, tělesa považujeme za izolovanou soustavu. Vyjdeme tedy z rovnosti

$$Q_1 = Q_2,$$

kde Q_1 je teplo odevzdané teplejším tělesem a Q_2 teplo přijaté chladnějším tělesem.

$$c_1 \cdot m_1(t_1 - t) = c_2 \cdot m_2(t - t_2),$$

kde c_1 a c_2 jsou příslušné měrné tepelné kapacity, m_1 a m_2 hmotnosti a t_1 a t_2 počáteční teploty těles. Teplota t je teplota obou těles po vyrovnání teplot. Pokud jde o tělesa ze stejné látky, např. o smísení dvou kapalin, kalorimetrická rovnice se zjednoduší:

$$m_1(t_1 - t) = m_2(t - t_2) \tag{7}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{t - t_2}{t_1 - t}. \tag{8}$$

Potom vidíme, že poměr hmotností odpovídá převrácenému poměru rozdílů teplot. Jinými slovy, mezi hmotností vody a rychlostí teplotní změny platí nepřímá úměrnost, čím větší je hmotnost vody, tím pomaleji se mění její teplota. Následující úloha vychází z učebnice fyziky pro 8. ročník ZŠ (Randa et al. 2018, s. 44).

Úloha - smísení vody o dvou různých teplotách

Zadání:

Smísíme tři kilogramy vody o teplotě 40 °C a jeden kilogram vody o teplotě 20 °C. Jaká bude výsledná teplota, pokud zanedbáme únik tepla do okolí?

Zápis:

$$\begin{aligned} m_1 &= 3\ \mathrm{kg}, t_1 = 40\ ^\circ\mathrm{C} \\ m_2 &= 1\ \mathrm{kg}, t_2 = 20\ ^\circ\mathrm{C} \\ t &= ? \end{aligned}$$

Řešení podle vzorce:

Protože se smísí dvě množství jedné látky, můžeme vyjít rovnou z rovnice (7). Z té vyjádříme neznámou t:

$$\begin{gathered} m_1 t_1 - m_1 t = m_2 t - m_2 t_2 \\ (m_1 + m_2) t = m_1 t_1 + m_2 t_2 \\ t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} \end{gathered} \tag{9}$$

Následně po dosazení číselných hodnot ze zadání dostaneme výslednou teplotu vody.

$$t = \frac{3 \cdot 40 + 1 \cdot 20}{4}\ ^\circ\mathrm{C}$$
$$t = \frac{140}{4}\ ^\circ\mathrm{C}$$
$$t = 35\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Řešení užitím váženého průměru:

Smísíme-li dva stejné díly vody o různých teplotách, výsledná teplota bude aritmetickým průměrem hodnot obou počátečních teplot. Po smísení vody o různých hmotnostech a teplotách se teplota ustálí na hodnotě dané váženým průměrem. V našem případě je teplejší vody třikrát více, započítáme ji tedy třikrát. Váhu tedy představuje hmotnost vody. Součet vah dostaneme jako $m_1 + m_2 = 3 + 1 = 4$. Výsledný vážený průměr vypadá takto:

$$t = \frac{3 \cdot 40 + 1 \cdot 20}{4}\ ^\circ\mathrm{C}$$

Dospěli jsme tedy ke stejnému výpočtu jako v řešení výše. Pohledem na rovnici (9) zjistíme, že představuje předpis pro vážený průměr, tak jak jsme jej nyní vysvětlili, což jen potvrzuje správnost intuitivního řešení pomocí váženého průměru.

Řešení užitím poměru:

Úvaha vychází z faktu, že při tepelné výměně se množství tepla odevzdaného a přijatého rovnají. Teplejší voda je zastoupena v třikrát větším množtví než studenější, tj. odevzdané teplo při ochlazení o 1 °C způsobí ohřátí studené vody o 3 °C. Obecně, pokles teploty teplejší vody způsobí trojnásobný nárůst teploty vody studenější. Rozdíl teplot činí na počátku $(40 - 20)$ °C = 20 °C a tento rozdíl můžeme rozdělit v poměru 1:3. Pro jednotlivé díly dostaneme 20 : (1 + 3) °C = 20 : 4 °C = 5 °C, výsledná teplota leží tedy „ 5 °C od 40 °C “, tj. 35 °C. Tento výsledek odpovídá řešení podle rovnice (7). Alternativním řešením by bylo řešení pomocí tabulky, kde pozorujeme pokles teploty

Tabulka 1: Určení výsledné teploty vody pomocí poměru

t [°C] teplé	t [°C] studené
40	20
39	23
38	26
37	29
36	32
35	35

po 1 °C u teplejší vody, čemuž odpovídá nárůst teploty o 3 °C u studenější vody. Tento postup je zaznamenán v tabulce 1.

Závěr

Smísením vody o dvou různých teplotách dojde k vyrovnání teplot téměř okamžitě, nicméně je možné úlohu řešit jako kdyby docházelo k tepelné výměně mezi oddělenými objemy vody. Řešením podle kalorimetrické rovnice získáváme předpis pro vážený průměr, při řešení úvahou tento krok rovnou přeskočíme a počítáme rovnou vážený průměr. Řešení pomocí poměru a tabulky je v tomto případě velice rychlé, protože teploty jsou nastaveny tak, že počítáme stále s celými čísly. V případě, že by hodnoty nebyly zadány takto „příjemně“, tabulková metoda nemusí vést k přesným výsledkům. Bylo by třeba více kroků a dělit stupně na menší díly nebo se spokojit s aproximativním řešením.

3.4 Hookův zákon a prodloužení tyče.

Teoretický úvod

Hookův zákon popisuje lineární závislost mezi relativním prodloužením $\epsilon = \Delta l / l_0$ (prodloužení tělesa o délce l_0 o délku Δl) a normálovým napětím σ s konstantou úměrnosti

E, nazývanou Youngův modul. Zapsáno matematicky:

$$\sigma = E \cdot \epsilon. \tag{10}$$

Normálové napětí můžeme vyjádřit jako podíl působící síly kolmo na plochu tělesa a této plochy:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{11}$$

Úloha - prodloužení ocelové tyče vlastní tíhou

Určete, o kolik se prodlouží v důsledku působení tíhové síly svisle umístěná ocelová tyč o původní délce $l_0 = 1$ m, když víte, že hustota oceli je $\rho = 7800$ kg $\cdot$ m^{-3} a její Youngův modul je $E = 21 \cdot 10^{10}$ Pa.

Zápis:

$$\begin{aligned} l_0 &= 1 \text{ m} \\ \rho &= 7800 \text{ kg} \cdot \text{ m}^{-3} \\ E &= 21 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \\ \Delta l &= ? \end{aligned}$$

Řešení pomocí průměru:

Na průřez tyče v místě závěsu působí tíhová síla celé hmoty tyče. Tíhovou sílu vyjádříme pomocí zadané hustoty a délky tyče:

$$F_G = m \cdot g = V \cdot \rho \cdot g = S \cdot l_0 \cdot \rho \cdot g, \tag{12}$$

kde obsah průřezu tyče S zůstává jako neznámá. Na průřez tyče v jiném místě ovšem působí pouze tíha hmoty tyče pod tímto průřezem. Tíha a tedy i normálové napětí v každém místě jsou lineárně závislé na vzdálenosti od místa závěsu. Na druhém konci tyče jsou hodnoty tíhy i napětí nulové. Proto můžeme v dalším výpočtu uvažovat hodnotu normálového napětí jako aritmetický průměr hodnot napětí na obou koncích tyče. Porovnáním vztahu (11) a (12) dostaneme vztah pro normálové napětí v místě závěsu

$$\sigma = l_0 \cdot \rho \cdot g$$

a zprůměrováním s nulovou hodnotou dostaneme průměrné normálové napětí

$$\sigma_p = \frac{l_0 \cdot \rho \cdot g + 0}{2} = \frac{l_0 \cdot \rho \cdot g}{2}.$$

Pro prodloužení Δl potom podle (10) platí

$$\Delta l = l_0 \cdot \epsilon = l_0 \cdot \frac{\sigma_p}{E} = \frac{l_0^2 \cdot \rho \cdot g}{2 \cdot E}$$

$$\Delta l = \frac{1^2 \cdot 7800 \cdot 9,81}{2 \cdot 21 \cdot 10^{10}} \text{ m} \approx 1,82 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Řešení pomocí integrace:

Úlohu je možné řešit přes integraci diferenciálů délky tyče, což sice nespadá do středoškolského učiva, ale potvrdí správnost předchozí úvahy. Tyč si po celé délce rozdělíme na diferenciály dl a vyjádříme prodloužení každého diferenciálu analogicky podle předchozího výpočtu:

$$\Delta \, \mathrm{d}l = \mathrm{d}l \cdot \frac{\sigma}{E} = \mathrm{d}l \cdot \frac{l \cdot \rho \cdot g}{E},$$

kde l je poměrná délka části tyče, jejíž hmotnost počítáme. Integrací přes celou délku tyče získáme relativní prodloužení této tyče

$$\Delta l = \int_0^{l_0} \cdot \frac{l \cdot \rho \cdot g}{E} \, \mathrm{d}l = \left[\frac{l^2 \cdot \rho \cdot g}{2 \cdot E} \right]_0^{l_0} = \frac{l_0^2 \cdot \rho \cdot g}{2 \cdot E},$$

což je stejný výsledek jako v předchozím řešení.

Závěr

V tomto případě nemá středoškolák jinou možnost než řešit úlohu pomocí aritmetického průměru. Nestačí pouze „dosadit do vzorečku“, je potřeba i určitý fyzikální náhled a pak se dá úloha vyřešit snadno.

3.5 Odvození vztahů pro energii E_k, E_p, E_C, E_L

3.5.1 Kinetická energie

Úloha - odvoďte vztah pro kinetickou energii rovnoměrně zrychlujícího tělesa

Pokud na těleso o hmostnosti m působí konstantní síla o velikosti F, pohybuje se těleso rovnoměrně zrychleně. Vztah mezi velikostí zrychlení tělesa a velikostí působící síly popisuje druhý Newtonův pohybový zákon: $F = ma$. V čase t od začátku pohybu získá těleso rychlost $v = at$. Pro uraženou dráhu platí obecný vztah $s = vt$. Na počátku pohybu má těleso rychlost nulovou, ta se během pohybu rovnoměrně zvětšuje a na konci je maximální. Díky tomu, že je pohyb rovnoměrný lze dráhu určit z aritmetického průměru:

$$s = \frac{0 \cdot t + vt}{2} = \frac{1}{2}vt.$$

Kinetická energie se rovná vykonané práci:

$$E_k = W = Fs = ma \cdot \frac{1}{2}vt$$
$$E_k = m\frac{v}{t} \cdot \frac{1}{2}vt$$
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

V případě obecného pohybu můžeme odvodit práci, kterou vykoná hmotný bod v časovém intervalu $\hat{t}$. Sílu a rychlost zde už uvažujeme jako vektorové veličiny. Pro práci platí obecný vztah

$$W = \int_{\hat{t}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, \mathrm{d}t\,.$$

Pokud vyjádříme vektor síly jako $\vec{\mathbf{F}} = m\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t}$ a využijeme pravidlo pro derivaci součinu ($(\phi\psi)' = \phi'\psi + \phi\psi'$) dostaneme vztah

$$W = m \int_{\hat{t}} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}m \int_{\hat{t}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}m \int_{\hat{t}} \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}mv^2(t)\bigg|_{\hat{t}}$$

Vykonaná práce se tedy rovná rozdílu hodnot $\frac{1}{2}mv^2$ pro rychlosti na počátku a konci pohybu, což přestavuje změnu kinetické energie tělesa.

3.5.2 Potenciální energie pružnosti

Úloha - odvoďte vztah pro pot. energii pružnosti pružiny o tuhosti k

Při vychýlení pružiny z rovnovážné polohy vzniká síla pružnosti o velikosti

$$\left|\vec{\mathbf{F}}_p\right| = ky,$$

kde k je tuhost pružiny a y je výchylka z rovnovážné polohy. Při natahování pružiny konáme práci, pružina získá potenciální energii pružnosti. Síla, kterou musíme vynaložit, je přímo úměrná výchylce. V rovnovážné poloze je nulová, na konci natahování maximální. Energii, kterou pružina získá, můžeme spočítat jako aritmetický průměr na začátku a na konci natahování.

$$W = F_p s = ky \cdot y$$

$$E = \frac{k \cdot 0 + ky^2}{2} = \frac{1}{2}ky^2.$$

Pro vektor síly pružnosti platí $\vec{\mathbf{F}}_p = -k\vec{\mathbf{r}}$, proto můžeme práci, resp. změnu potenciální energie také spočítat jako

$$\Delta E_p = W = \int_{\hat{r}} \vec{\mathbf{F}}_p \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} = -\int_{\hat{r}} k\vec{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}\,.$$

Protože vektory $\vec{\mathbf{r}}$ a $\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}$ jsou kolineární, můžeme místo skalárního součinu psát prostý součin, až na znaménko. To závisí na tom, zda probíhá pohyb směrem od rovnovážné polohy ($-k\vec{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} > 0$) nebo k ní ($-k\vec{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} < 0$). Dále můžeme výpočet provést pro jeden směr, např. ve směru osy y. Pro velikost změny potenciální energie pružnosti tedy platí:

$$|\Delta E_p| = \int_{\hat{y}} ky \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} ky^2 \bigg|_{\hat{y}}$$

3.5.3 Enerie el. pole kondenzátoru

Úloha - odvoďte vztah pro energii el. pole kondenzátoru o kapacitě C

Při nabíjení kondenzátoru koná práci $W = QU$ elektrostatická síla při přemísťování náboje Q při napětí U. Napětí kondenzátoru o kapacitě C je přímo úměrné náboji $U = \frac{Q}{C}$. Na začátku nabíjení je nulové, na konci maximální. Energii získáme jako aritmetický průměr těchto hodnot.

$$\begin{aligned} W &= QU \\ E &= \frac{0 + QU}{2} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2. \end{aligned}$$

Obecně lze vyjádřit diferenciál práce v elektrickém poli jako

$$\mathrm{d}W = U(Q) \, \mathrm{d}Q \, .$$

Potom lze spočítat práci vykonanou při přemístění náboje jako

$$W = \int_{\hat{Q}} U(Q) \, \mathrm{d}Q = \int_{\hat{Q}} \frac{Q}{C} \, \mathrm{d}Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \bigg|_{\hat{Q}} = \frac{1}{2} CU^2 \bigg|_{\hat{U}},$$

což opět chápeme jako změnu energie pro krajní hodnoty intervalu Q, resp U.

3.5.4 Enerie mag. pole cívky

Úloha - odvoďte vztah pro energii mag. pole cívky o indukčnosti L

Při sepnutí zdroje el. napětí začne cívkou procházet proud. Zároveň vzniká magnetické pole a na cívce se indukuje elektromotorické napětí $U = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Elektrony konají práci při překonání tohoto napětí. Magnetický indukční tok je přímo úměrný procházejícímu proudu $\Phi = LI$. Při sepnutí obvodu je nulový, po ustálení je maximální. Vykonanou práci určíme takto:

$$\Delta W = P\Delta t = UI\Delta t = L\frac{\Delta I}{\Delta t}I\Delta t = LI\Delta I = \Phi\Delta I.$$

Protože Φ roste lineárně s proudem, stačí vzít jeho nejnižší a nejvyšší hodnotu a zprůměrovat.

$$W = \frac{0 \cdot I + \Phi I}{2} = \frac{1}{2}\Phi I = \frac{1}{2}LI^2$$

Opět lze energii magnetického pole cívky vyjádřit obecněji. Indukované elektromotorické napětí na cívce zapíšeme pomocí diferenciálů takto:

$$U = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Pak lze pro práci (změnu energie) vykonanou elektrickým proudem psát:

$$W = \int_{\hat{I}} P\,\mathrm{d}t = \int_{\hat{I}} UI\,\mathrm{d}t = \int_{\hat{I}} L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}I\,\mathrm{d}t = \int_{\hat{I}} LI\,\mathrm{d}I = \frac{1}{2}LI^2\bigg|_{\hat{I}}$$

Shrnutí: Porovnáním výše uvedených vztahů pro kinetickou energii, potenciální energii pružnosti, energii pole kondenzátoru a cívky zjistíme, že jsou analogické. Energie vždy představuje součin 1/2 s charakteristikou (ch) a kvadrátem stavu systému (s), tedy $1/2 \cdot ch \cdot s^2$. Jako charakteristiku uvažujeme vlastnost systému, v předchozích úlohách je tedy charakteristikou hmotnost tělesa m, tuhost pružiny k, kapacita kondenzátoru C, resp. indukčnost cívky L. Aktuální stav popisuje v těchto případech okamžitá rychlost v, výchylka z rovnovážné polohy y, napětí na kondenzátoru U a proud procházející cívkou I.

4 Studie zaměřené na zkoumání pochopení konceptu průměru

Existují studie, které zkoumají chápání konceptu průměru a schopnost jeho určování. Některé studie se zaměřují na učitele, některé přímo na žáky nebo studenty. Autor případové studie *„Elementary school teachers' understanding of the mean and median"* (Jacobbe 2012) provedl rozhovor se třemi učitelkami základních škol v USA. Zkoumal míru chápání pojmů průměr a medián. Kromě ověření znalosti definice a algoritmu pro výpočet průměru a mediánu zjišťoval také, jestli umí učitelky výsledky správně interpretovat.

„Pre-service elementary teachers' conceptual understanding of average speed" (Subramanian et al. 2020) zkoumala chápání konceptu průměrné rychlosti u 84 studentů učitelství pro základní školy na americkém jihozápadu. Byla zjišťována nejen znalost definice a výpočtu průměrné rychlosti, ale také znalost pojmů souvisejících s konceptem průměrné rychlosti. Dále studenti uváděli návrhy, jak by chtěli v budoucnu pojem průměrná rychlost vyučovat.

V obou výše zmíněných studiích byly u některých účastníků zjištěny miskoncepce. V první studii se jednalo např. o zaměňování průměru a mediánu. Autor navrhoval jako zlepšení zahrnutí sofistikovanějších témat z oblasti statistiky ve vzdělávání budoucích učitelů. Ve druhé studii odhalili autoři nedostatky jako je nepřesná definice průměrné rychlosti, zaměňování konceptu průměrné rychlosti s konceptem okamžité rychlosti nebo konstantní rychlosti. Některé studentky uváděly výpočet průměrné rychlosti nesprávně jako průměr několika měření rychlosti.

„Children's concepts of average and representativeness" (Mokros et al. 1995) je studie provedená v USA mezi 21 žáky základní školy, navštěvujícími čtvrtý, šestý nebo osmý ročník, která ověřovala chápaní průměru v konkrétních situacích. Žáci v závislosti na ročníku preferovali různé způsoby hledání hodnoty, kterou považovali za aritmetický

průměr. Jako způsob řešení žáci používali např. hledání modusu, mediánu (střední bod), bodu rovnováhy[1], řešení úvahou nebo výpočet vzorečkem.

„Making the mean meaningful: an instructional study“ (Cai et al. 1999) představuje studii provedenou v USA ve dvou šestých třídách. Žáci absolvovali několikahodinovou výuku, kde si osvojili konceptuální porozumění průměru a naučili se několik metod, jak jej určovat. Byla popsána např. metoda vyrovnávání (leveling strategy), která objasňuje proces průměrování lépe než klasický výpočet. Pomocí pre-testu a post-testu byly zjišťovány pokroky u žáků.

V práci *„A study on the misconceptions of average velocity from teaching and learning approaches”* (Chiu 2008), pocházející z Taiwanu, jsou představeny úlohy na průměrnou rychlost. Studie se zaměřuje na rozdílné pojmy rychlosti jako skalární a vektorové veličiny. Tyto dva pojmy se v běžném životě zaměňují, kdežto ve fyzice mají různý význam.

V těchto studiích se tedy autoři zaměřovali na pochopení konceptu průměru z čistě matematického hlediska, případně ve spojení s pojmem průměrná rychlost. V odborné literatuře nebyla doposud věnována pozornost výzkumu možností a rizik spojených s využitím průměru v dalších oblastech fyziky.

[1]Hledání bodu rovnováhy (balance point) je algoritmus pro určení aritmetického průměru prvků s celočíselnými hodnotami. Všechny prvky umístíme jako body na číselnou osu, stejné prvky umístíme nad sebe. Získáme takto zjednodušený histogram. Při každém kroku posuneme nejvyšší, resp. nejnižší prvek o jednu hodnotu doleva, resp. doprava. Histogram se tak zužuje, až se všechny body ocitnou u jedné hodnoty a ta představuje právě aritmetický průměr. Tento algoritmus lze využít pouze pokud je průměr celočíselná hodnota. Hodí se tedy spíše pro výuku aritmetického průměru než pro reálné použití. Postup lze vidět např. zde na videu: `https://www.youtube.com/watch?v=9of5gI9Yg00`

5 Výzkumné šetření týkající se využití průměru při řešení fyzikálních úloh

5.1 Cíle průzkumu

Výzkumný problém: Jaké jsou perspektivy a rizika zjednodušeného řešení fyzikálních úloh pomocí (váženého) průměru?

Cílem tohoto průzkumu bylo odpovědět na následující **výzkumné otázky:**

1. Jak žáci zvládají konstrukt průměru a váženého průměru bez přímé vazby na fyziku?
2. Jak žáci dokáží v konkrétních fyzikálních situacích rozhodnout, zda je řešení pomocí (váženého) průměru korektní?
3. Do jaké míry žáci preferují zjednodušená řešení pomocí průměru oproti klasickému učebnicovnému přístupu a do jaké míry je pokládají za slučitelná s fyzikou jako oborem a požadavky učitelů?

Vzhledem k deskriptivní povaze výzkumu nebyly zvoleny a ověřovány specifické hypotézy. S přihlédnutím k tomu (jak jsem již uváděla v předchozí kapitole), že alternativní přístupy k řešení úloh se vyskytují v učebnicích jen výjimečně, může být partikulárním cílem tohoto výzkumu i odpověď na otázku, do jaké míry by bylo možné tento stav změnit a do učebnic zahrnout alternativní přístupy více. S ohledem na komplexnost studované problematiky jsme se v průzkumu zaměřili „pouze“ na využití průměrování, nikoliv na poměry, které byly rovněž součástí původního zadání bakalářské práce.

5.2 Metodika průzkumu

Průzkum probíhal prostřednictvím online dotazníku. Dotazník obsahoval tři kategorie otázek. Otázky A1–A4 byly zaměřené na počítání s průměrem obecně, mimo oblast fyziky. Jejich řešení tak dává odpověď na první výzkumnou otázku, uvedenou v předchozí podkapitole. Otázka A1 a A4 se týkala aritmetického průměru a jeho užití, otázky A2 a A3 byly zaměřeny na vlastnosti váženého průměru. Otázky B1–B8 představovaly krátké fyzikální úlohy z mechaniky a termodynamiky. Úlohy byly řešeny pomocí průměrování. Studenti rozhodovali, zda je uvedené řešení korektní, či ne. Vyhodnocení těchto úloh dává poté odpověď na druhou výzkumnou otázku. K otázkám C1–C2 byla přiložena dvě vzorová řešení fyzikální úlohy, první bez použití průměru, druhé s pomocí průměrování, obě se stejným numerickým výsledkem. Druhé prezentované řešení bylo kratší než první řešení „pomocí vzorečků“ a bylo doplněno úvahou, proč je možné si výpočet zjednodušit. Studenti poté odpovídali na otázky, které řešení by preferovali a které by pravděpodobně preferoval jejich učitel, které řešení jim připadá fyzikálně správnější a které by si přáli mít v učebnicích. Hodnocení preference prvního či druhého řešení probíhalo na škále: určitě první – spíše první – obě stejně – spíše druhé – určitě druhé. Tyto výsledky pomáhají odpovědět na třetí výzkumnou otázku. Kompletní dotazník použitý k tomuto průzkumu je uvedený v příloze této práce.

5.3 Realizace průzkumu a analýza dat

Průzkumu se zúčastnilo celkem 53 studentů, z nichž 15 navštěvuje septimu gymnázia (jedna třída) a 38 studentů navštěvuje druhý ročník střední školy dopravní (dvě třídy), dále označené jako SPŠD. Průzkum probíhal online za pomoci dotazníku v Google formulářích. Test byl zadán v online hodinách fyziky učiteli příslušných tříd. Žáci byli seznámeni s účelem výzkumu, který probíhal v souladu s příslušnými etickými pravidly a účast v něm byla zcela dobrovolná a anonymní. Účastníci mohli na konci formuláře dobrovolně uvést své jméno. Data byla analyzována metodami popisné statistiky a výsledky jsou prezentovány ve formě tabulek v následující podkapitole 5.4.

5.4 Výsledky průzkumu

V této části uvádím znění jednotlivých otázek a následně v tabulkách počty (podíly) odpovědí studentů příslušející jednotlivým možnostem. Jsou uvedeny počty (podíly) zvlášť pro gymnázium a SPŠD a také celkové počty (podíly) z obou škol dohromady.

5.4.1 Zadání otázek a odpovědi

Oddíl otázek A1–A4

A1. Žák získal při talentových zkouškách od tří rozhodčích různý počet bodů. Od prvního získal 16 bodů, od druhého 17,5 bodů. Kolik bodů mohl žák získat od třetího rozhodčího, pokud je průměrná hodnota z těchto tří hodnocení vyšší než počet bodů od druhého rozhodčího?

Tato úloha je zaměřena na vlastnosti aritmetického průměru. Jedná se o dopočítání třetího neznámého prvku, pokud známe aritmetický průměr všech tří prvků. Všechny odpovědi[2] studentů včetně četností jsou uvedeny v tabulce 2. Podíl správných odpovědí se v tomto případě výrazně lišil podle školy, kterou studenti navštěvují. U studentů gymnázia odpověděli téměř všichni správně, pouze jeden student odpověděl špatně. Co se týká studentů dopravní školy, správně odpověděla přibližně třetina z nich. Jako nesprávná je považována i odpověď, která spolu se správnou možností obsahuje také jednu či více nesprávných možností. V celkovém součtu za obě školy odpověděla správně přibližně polovina studentů.

[2]Správná odpověď je v tabulce vyznačena tučně. To platí pro všechny tabulky odpovědí na otázky A1–A4 a B1–B8.

Tabulka 2: Odpovědi na otázku A1.

Škola	Možnost odpovědi podle školy	Počet (podíl) odpovědí	Možnost odpovědi celkem	Počet odpovědí celkem
gymnázium	**19,5**	14 (93 %)	18	4 (8 %)
	19; 19,5	1 (7 %)	18,5	4 (8 %)
SPŠD	18	4 (11 %)	18,5; 19	1 (2 %)
	18,5	4 (11 %)	18; 18,5; 19; 19,5	2 (4 %)
	18,5; 19	1 (3 %)	19	11 (21 %)
	18; 18,5; 19; 19,5	2 (5 %)	**19,5**	27 (51 %)
	19	11 (29 %)	19; 19,5	4 (8 %)
	19,5	13 (34 %)		
	19; 19,5	3 (8 %)		

A2. Při volbách získala strana XYZ ve čtyřech různě velkých okrscích postupně 10 %, 15 %, 20 %, 25 % z celkového počtu hlasů. Kolik % může činit průměr hlasů získaných touto stranou v součtu ze všech čtyř okrsků?

U této otázky, zaměřené na vlastnosti váženého průměru, byla úspěšnost nižší. Kompletní správnou odpověď uvedlo pouze 6 studentů gymnázia (40 %) a 1 student SPŠD. Celková úspěšnost činí 13 %. Právě jednu správnou možnost, tedy 17 % nebo 23 %, zvolilo 5 studentů gymnázia (33 %) a 24 studentů SPŠD (63 %), celkově 29 studentů (55 %). Výsledky jsou uvedeny v tabulce 3.

A3. Vytvoříme směs oříšků tak, že smícháme 4 dkg lískových oříšků po 10 Kč/dkg a 1 dkg oříšků kešu. Kolik může stát 1 dkg kešu oříšků, pokud chceme, aby 1 dkg výsledné směsi nebyl dražší než 13 Kč?

Tato úloha je zaměřena na počítání s váženým průměrem, kdy se hledá jeden neznámý prvek, pokud známe celkový vážený průměr. Všechny správné odpovědi uvedlo 9 studentů (60 %) gymnázia a 2 studenti SPŠD (5 %). Alespoň jednu správnou odpověď zvolilo 14 studentů gymnázia (93 %) a 36 studentů SPŠD (95 %). Výsledky jsou uve-

Tabulka 3: Odpovědi na otázku A2.

Škola	Možnost odpovědi podle školy	Počet (podíl) odpovědí	Možnost odpovědi celkem	Počet odpovědí celkem
gymnázium	10 %, 17 %, 23 %	1 (7 %)	10 %	1 (2 %)
	17 %	5 (33 %)	10 %, 17 %, 23 %	1 (2 %)
	17 %, 23 %	6 (40 %)	17 %	25 (47 %)
	17 %, 23 %, 35 %	1 (7 %)	**17 %, 23 %**	7 (13 %)
	23 %, 35 %	1 (7 %)	17 %, 23 %, 35 %	1 (2 %)
	23 %, 35 %, 70 %	1 (7 %)	23 %	4 (8 %)
SPŠD	10 %	1 (3 %)	23 %, 35 %	1 (2 %)
	17 %	20 (53 %)	23 %, 35 %, 70 %	1 (2 %)
	17 %, 23 %	1 (3 %)	35 %	7 (13 %)
	23 %	4 (11 %)	35 %, 70 %	1 (2 %)
	35 %	7 (18 %)	70 %	4 (8 %)
	35 %, 70 %	1 (3 %)		
	70 %	4 (11 %)		

deny v tabulce 4.

A4. Zjišťujeme obsah plochy pod parabolou mezi body x = 0 a x = 2. Fukce y(x) = x^2 má v těchto bodech funkční hodnoty y(0) = 0 a y(2) = 4. Průměrná hodnota je [y(0)+y(2)]/2 = (0+4)/2 = 2. Obsah plochy pod parabolou je 2*2 = 4.

V této úloze studenti rozhodovali o správnosti užití aritmetického průměru při určování plochy pod křivkou, tedy pro konkrétní aplikaci průměrování. U této úlohy je opět velký rozdíl v úspěšnosti studentů v závislosti na škole. Správně odpovědělo 12 (80 %) studentů gymnázia, ale pouze 6 studentů SPŠD (16 %). Celkově odpovědělo správně 18 studentů, což je přibližně třetina z celkového počtu. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 5.

Tabulka 4: Odpovědi na otázku A3.

Škola	Možnost odpovědi podle školy	Počet (podíl) odpovědí	Možnost odpovědi celkem	Počet odpovědí celkem
gymnázium	5 Kč, 15 Kč	3 (20 %)	bez odpovědi	1 (2 %)
	5 Kč, 15 Kč, 20 Kč	9 (60 %)	5 Kč	15 (28 %)
	15 Kč, 20 Kč, 30 Kč	1 (7 %)	5 Kč, 15 Kč	8 (15 %)
	20 Kč	2 (13 %)	**5 Kč, 15 Kč, 20 Kč**	11 (21 %)
SPŠD	bez odpovědi	1 (3 %)	15 Kč	4 (8 %)
	5 Kč	15 (39 %)	15 Kč, 20 Kč, 30 Kč	1 (2 %)
	5 Kč, 15 Kč	5 (13 %)	20 Kč	12 (23 %)
	5 Kč, 15 Kč, 20 Kč	2 (5 %)	30 Kč	1 (2 %)
	15 Kč	4 (11 %)		
	20 Kč	10 (26 %)		
	30 Kč	1 (3 %)		

Tabulka 5: Odpovědi na otázku A4.

Škola	Možnost odpovědi	Počet (podíl) odpovědí	Možnost odpovědi celkem	Počet odpovědí celkem
gymnázium	bez odpovědi	2 (13 %)	bez odpovědi	3 (6 %)
	Uvedená úvaha je chybná, obsah je menší než 4.	12 (80 %)	Takto je to správně, obsah je skutečně 4.	18 (34 %)
	Uvedená úvaha je chybná, obsah je větší než 4.	1 (7 %)	**Uvedená úvaha je chybná, obsah je menší než 4.**	18 (34 %)
SPŠD	bez odpovědi	1 (3 %)	Uvedená úvaha je chybná, obsah je větší než 4.	14 (26 %)
	Takto je to správně, obsah je skutečně 4.	18 (47 %)		
	Uvedená úvaha je chybná, obsah je menší než 4.	6 (16 %)		
	Uvedená úvaha je chybná, obsah je větší než 4.	13 (34 %)		

Oddíl otázek B1–B8

B1. Auto rovnoměrně zrychluje z 5 m/s na 15 m/s za 10 s. Průměrná rychlost je 10 m/s, za 10 s tedy auto urazí dráhu 100 m. Je to pravda?

U této úlohy najdeme větší podíl správných odpovědí u studentů SPŠD. Správně odpovědělo 53 % studentů gymnázia a 68 % studentů SPŠD. V celkovém součtu odpověděly správně asi dvě třetiny studentů. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 6.

Tabulka 6: Odpovědi na otázku B1.

Možnost odpovědi	Počet (podíl) odpovědí – gymnázium	Počet (podíl) odpovědí – SPŠD	Počet (podíl) odpovědí celkem
Ano	8 (53 %)	26 (68 %)	34 (64 %)
Ne	7 (47 %)	12 (32 %)	19 (36 %)

B2. Řidič jede tam a zpátky autem 80 km dlouhou trasu po dálnici. Při cestě jedním směrem uvízl v koloně a palubní počítač ukázal průměrnou rychlost 10 km/h. Při cestě zpět se mu už jelo dobře a průměrná rychlost na tomto úseku byla 110 km/h. Celková průměrná rychlost při cestě tam i zpět je $(10+110)/2 = 60$ km/h. Je výpočet průměrné rychlosti správně?

U této otázky jsou podíly správných a špatných odpovědí u studentů obou škol přibližně stejné. Správně odpověděla jen těsná většina studentů, konkrétně 53 %.

Tabulka 7: Odpovědi na otázku B2.

Možnost odpovědi	Počet (podíl) odpovědí – gymnázium	Počet (podíl) odpovědí – SPŠD	Počet (podíl) odpovědí celkem
Ano	7 (47 %)	18 (47 %)	25 (47 %)
Ne	8 (53 %)	20 (53 %)	28 (53 %)

B3. Cyklista se rozjíždí z klidu rovnoměrným pohybem. První polovinu doby je jeho zrychlení 2 m/s^2, druhou polovinu doby 3 m/s^2. Jeho průměrné zrychlení je $a_p = (2 + 3)/2 = 2,5$ m/s^2.

V této úloze je podíl správných odpovědí opět vyšší u studentů SPŠD (61 %), u studentů gymnázia odpovídala správně dokonce menšina studentů (47 %).

Tabulka 8: Odpovědi na otázku B3.

Možnost odpovědi	Počet (podíl) odpovědí – gymnázium	Počet (podíl) odpovědí – SPŠD	Počet (podíl) odpovědí celkem
Ano	7 (47 %)	23 (61 %)	30 (57 %)
Ne	8 (53 %)	15 (39 %)	23 (43 %)

B4. Cyklista z předchozí otázky se pohybuje s průměrným zrychlením a_p. Dráhu, kterou urazí, spočítáme jako $s = 1/2 * a_p * t$^2. Je to pravda?

Tato otázka vychází z předchozí úlohy a podíl správných odpovědí u studentů SPŠD je podobný jako u předchozí úlohy (63 %). Podíl správných odpovědí u studentů gymnázia je ale nižší, činí zde 40 %. Celkově odpovědělo správně 57 % studentů.

Tabulka 9: Odpovědi na otázku B4.

Možnost odpovědi	Počet (podíl) odpovědí – gymnázium	Počet (podíl) odpovědí – SPŠD	Počet (podíl) odpovědí celkem
Ano	9 (60 %)	14 (37 %)	23 (43 %)
Ne	6 (40 %)	24 (63 %)	30 (57 %)

B5. Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose na konci tyče (1) a uprostřed tyče (3) je vyjádřen na následujícím obrázku. Je níže uvedený výpočet pro moment setrvačnosti vzhledem k ose v jedné čtvrtině tyče (2) správně?

U této úlohy převažuje počet chybných odpovědí u studentů obou škol. U studentů gymnázia odpovědělo správně 47 %, u studentů SPŠD je to ještě méně, a to 37 %. Celkově správné odpovědi tvoří 40 %.

Tabulka 10: Odpovědi na otázku B5.

Možnost odpovědi	Počet (podíl) odpovědí – gymnázium	Počet (podíl) odpovědí – SPŠD	Počet (podíl) odpovědí celkem
Ano	8 (53 %)	24 (63 %)	32 (60 %)
Ne	7 (47 %)	14 (37 %)	21 (40 %)

B6. Železný předmět o hmotnosti 1 kg a teplotě 100 °C vložíme do 4 kg vody o teplotě 20 °C. Výsledná teplota bude (1*100+4*20)/(4+1) = 180/5 = 36 °C. Je to tak?

Zde odpovídali studenti gymnázia ve většině případů správně (60 %), kdežto studenti SPŠD odpovídali správně v menšině případů (37 %). Celkově tvoří podíl správných odpovědí 43 %.

Tabulka 11: Odpovědi na otázku B6.

Možnost odpovědi	Počet (podíl) odpovědí – gymnázium	Počet (podíl) odpovědí – SPŠD	Počet (podíl) odpovědí celkem
bez odpovědi		1 (3 %)	1 (2 %)
Ano	6 (40 %)	23 (61 %)	29 (55 %)
Ne	9 (60 %)	14 (37 %)	23 (43 %)

B7. Smícháme 100 ml 90% roztoku ethanolu a 100 ml 10% roztoku ethanolu. Výsledná směs bude tedy obsahovat (10+90)/2 = 50 % ethanolu. Je to pravda?

Studenti gymnázia odpověděli v tomto případě správně pouze v pětině případů, správných odpovědí studentů SPŠD byla mírná většina (55 %). Celkem tvoří správné odpovědi 45 %.

Tabulka 12: Odpovědi na otázku B7.

Možnost odpovědi	Počet (podíl) odpovědí – gymnázium	Počet (podíl) odpovědí – SPŠD	Počet (podíl) odpovědí celkem
Ano	12 (80 %)	17 (45 %)	29 (55 %)
Ne	3 (20 %)	21 (55 %)	24 (45 %)

B8. Smícháme 50 g vodného roztoku obsahujícího 20 hmotnostních % NaCl a 150 g vodného roztoku s 30 hmotnostními % NaCl. Výsledná koncentrace je (50*0,2+150*0,3)/(50+150) = 0,275, tj. 27,5 %. Je to pravda?

Tato otázka je podobná předchozí úloze, odlišuje se ale v zadané veličině (objem vs. hmotnost). Většina odpovědí byla správná, u studentů gymnázia tvořily správné odpovědi 67 %, u studentů SPŠD 58 %. Celkově tvořily správné odpovědi 60 %.

Tabulka 13: Odpovědi na otázku B8.

Možnost odpovědi	Počet (podíl) odpovědí – gymnázium	Počet (podíl) odpovědí – SPŠD	Počet (podíl) odpovědí celkem
Ano	10 (67 %)	22 (58 %)	32 (60 %)
Ne	5 (33 %)	16 (42 %)	21 (40 %)

Oddíl otázek C1–C2

Kompletní vzorové řešení úloh C1 a C2 je uvedeno v dotazníku v příloze. Úlohy jsou řešeny dvěma způsoby, prvním způsobem je tradiční řešení, druhým je výpočet pomocí průměrování. Zadání otázek vypadalo následovně:

C1. Máme zadanou úlohu: Auto zrychlí během 10 sekund z původní rychlosti na pětinásobek. Urazí přitom dráhu 60 metrů. Jaká byla původní rychlost auta? - Úloha je níže vyřešena dvěma způsoby vedoucími ke stejnému správnému výsledku[3]:

- První způsob – klasicky,
- Druhý způsob – pomocí průměrování

C2. Je zadána úloha: Rotor rovnoměrně zrychluje z frekvence 10 Hz na 20 Hz během 10 s. Kolik otáček během této doby vykoná? Opět vyřešeno dvěma způsoby vedoucími ke stejnému správnému výsledku:

- První způsob – klasicky,
- Druhý způsob – pomocí průměrování

V této sekci studenti hodnotili řešení dvou úloh na rovnoměrné zrychlení, první na přímočarý pohyb, druhou na pohyb po kružnici. Všechny odpovědi jsou uvedené v tabulkách 14 a 15. Studenti gymnázia i SPŠD používali častěji přívlastek „spíše“ než „určitě“ a to téměř ve všech podotázkách. Co se týká preference způsobu řešení samotnými studenty, u první úlohy větší část studentů gymnázia preferuje první způsob, u studentů SPŠD je to půl na půl. U druhé úlohy však většina studentů obou škol preferuje druhý způsob řešení, tedy pomocí průměrování. U obou úloh pouze malá část studentů uvedla, že preferuje oba způsoby stejně. Na otázku, který způsob je fyzikálně správnější, uváděli častěji studenti SPŠD, že oba stejně. Studenti gymnázia se přikláněli k prvnímu způsobu řešení v obou úlohách. U druhé úlohy uvádí větší podíl studentů SPŠD jako fyzikálně správnější první způsob řešení než u první úlohy. Na otázku, který způsob by pravděpodobně preferoval učitel, odpověděla třetina studentů

[3] Celé řešení je uvedeno v příloze.

Tabulka 14: Odpovědi na otázku C1.

Možnost odpovědi	Počet odpovědí – gymnázium	Počet odpovědí – SPŠD	Počet odpovědí celkem
Který způsob řešení preferujete?			
určitě první	3 (20 %)	8 (22 %)	11 (21 %)
spíše první	6 (40 %)	9 (24 %)	15 (29 %)
oba stejně	1 (7 %)	4 (11 %)	5 (10 %)
spíše druhý	5 (33 %)	13 (35 %)	18 (35 %)
určitě druhý	0 (0 %)	3 (8 %)	3 (6 %)
Který způsob je fyzikálně správnější?			
určitě první	3 (20 %)	3 (8 %)	6 (12 %)
spíše první	5 (33 %)	7 (19 %)	12 (23 %)
oba stejně	4 (27 %)	15 (41 %)	19 (37 %)
spíše druhý	3 (20 %)	8 (22 %)	11 (21 %)
určitě druhý	0 (0 %)	4 (11 %)	4 (8 %)
Který způsob si myslíte, že by preferoval Váš učitel?			
určitě první	4 (27 %)	3 (8 %)	7 (13 %)
spíše první	1 (7 %)	10 (27 %)	11 (21 %)
oba stejně	5 (33 %)	8 (22 %)	13 (25 %)
spíše druhý	4 (27 %)	12 (32 %)	16 (31 %)
určitě druhý	1 (7 %)	3 (8 %)	4 (8 %)
Který způsob by měl být v učebnicích?			
určitě první	1 (7 %)	5 (14 %)	6 (12 %)
spíše první	3 (20 %)	7 (19 %)	10 (19 %)
oba stejně	8 (53 %)	13 (35 %)	21 (40 %)
spíše druhý	2 (13 %)	10 (27 %)	12 (23 %)
určitě druhý	1 (7 %)	2 (5 %)	3 (6 %)

Tabulka 15: Odpovědi na otázku C2.

Možnost odpovědi	Počet odpovědí – gymnázium	Počet odpovědí – SPŠD	Počet odpovědí celkem
Který způsob řešení preferujete?			
určitě první	0 (0 %)	4 (11 %)	4 (8 %)
spíše první	3 (20 %)	2 (5 %)	5 (10 %)
oba stejně	2 (13 %)	4 (11 %)	6 (12 %)
spíše druhý	5 (33 %)	19 (51 %)	24 (46 %)
určitě druhý	5 (33 %)	8 (22 %)	13 (25 %)
Který způsob je fyzikálně správnější?			
určitě první	2 (13 %)	6 (16 %)	8 (15 %)
spíše první	8 (53 %)	13 (35 %)	21 (40 %)
oba stejně	3 (20 %)	12 (32 %)	15 (29 %)
spíše druhý	1 (7 %)	4 (11 %)	5 (10 %)
určitě druhý	1 (7 %)	2 (5 %)	3 (6 %)
Který způsob si myslíte, že by preferoval Váš učitel?			
určitě první	0 (0 %)	8 (22 %)	8 (15 %)
spíše první	3 (20 %)	4 (11 %)	7 (13 %)
oba stejně	5 (33 %)	8 (22 %)	13 (25 %)
spíše druhý	5 (33 %)	15 (41 %)	20 (38 %)
určitě druhý	2 (13 %)	2 (5 %)	4 (8 %)
Který způsob by měl být v učebnicích?			
určitě první	0 (0 %)	2 (5 %)	2 (4 %)
spíše první	3 (20 %)	3 (8 %)	6 (12 %)
oba stejně	6 (40 %)	11 (30 %)	17 (33 %)
spíše druhý	4 (27 %)	14 (38 %)	18 (35 %)
určitě druhý	2 (13 %)	7 (19 %)	9 (17 %)

gymnázia u obou úloh, že oba stejně. U druhé úlohy větší část studentů gymnázia i SPŠD uváděla, že spíše druhý způsob. Asi pětina studentů SPŠD uvedla u obou úloh, že by jejich učitel pravděpodobně preferoval oba způsoby řešení stejně. Co se týká poslední otázky, který způsoby by dle studentů měl být v učebnicích, studenti obou škol preferují druhý způsob více u druhé úlohy. V učebnicích by oba způsoby preferovali více studenti gymnázia oproti studentům SPŠD.

5.5 Diskuze výsledků

U první otázky v první sekci mnoho studentů zahrnulo do odpovědi hodnotu 19 (1 student gymnázia, 17 studentů SPŠD). Pravděpodobně dopočetli tuto hodnotu díky znalosti aritmetického průměru, ale již nedokončili úvahu, že výsledek musí být vyšší než tato hodnota. U druhé úlohy překvapivě mnoho studentů z obou škol zahrnulo mezi správné odpovědi vyšší hodnoty než je nejvyšší hodnota ze zadaných možností. Mezi základní vlastnosti aritmetického průměru přitom patří, že průměr musí ležet mezi nejnižší a nejvyšší hodnotou z množiny zadaných prvků. U třetí otázky bylo u studentů SPŠD častou odpovědí pouze 5 Kč, což je hodnota, která se jeví jako správná i bez výpočtu. U čtvrté otázky byl podíl správných odpovědí u studentů SPŠD překvapivě nízký, přestože byl přiložen obrázek paraboly. Oproti tomu, u studentů gymnázia byl podíl správných odpovědí mnohem větší. Při celkovém pohledu na otázky v části A lze říci, že studenti gymnázia dosahovali mnohem lepších výsledků než studenti SPŠD. Lze tedy u gymnazistů usuzovat, že mají lepší matematický základ v oblasti počítání s průměrem.

První dvě otázky v další sekci, označené jako B1 a B2, jsou obě zaměřeny na počítání s průměrnou rychlostí. U první otázky je průměrování opodstatněné, neboť se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb. Druhá otázka je klasický chyták, kdy oba úseky jízdy trvají různou dobu. Zadaná vzdálenost je ale stejná, což může svádět k oprávněnosti průměrování. Tento chyták odhalila jen těsná většina studentů obou škol. Úlohy B3 a

B4 spolu souvisí. Průměrné zrychlení v otázce B3 je skutečně určeno správně, protože oba úseky trvají stejnou dobu. Pro výpočet dráhy ale nemůžeme použít vzorec z úlohy B4, protože nereflektuje průběh zrychlení. Pokud bychom zaměnili pořadí zrychlení, nejprve by cyklistovo zrychlení bylo $3\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ a poté $2\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, dosáhl by dříve vyšší rychlosti a tedy ve stejném čase by ujel větší dráhu. Úloha B5 se týkala momentu setrvačnosti. Hodnota momentu setrvačnosti závisí na rozložení hmoty vůči ose otáčení, konkrétně roste s druhou mocninou vzdálenosti od osy. Závislost na vzdálenosti od osy tedy není lineární a proto nelze použít průměrování. Správně odpověděla jen menšina studentů. Následující úloha B6 se týká tepelné výměny. Zde výpočet výsledné teploty pomocí váženého průměru není správný, protože se jedná o látky s různou měrnou tepelnou kapacitou. Výsledná teplota bude nižší, protože voda má vyšší měrnou tepelnou kapacitu než železo a k jejímu ohřátí o stejnou teplotu je tedy potřeba větší množství tepla. Pokud by se jednalo o smísení různého množství stejné látky, např. vody, pak je průměrování na místě. Dokonce vede k výsledku rychleji než použití kalorimetrické rovnice. U poslední dvojice úloh, B7 a B8, máme zadané množství látky nejprve pomocí objemu a poté pomocí hmotnosti. Roztoky s rozdílným obsahem ethanolu mají různé hustoty, proto nelze použít průměrování. V úloze zadané pomocí hmotnostních procent hustotu vůbec nemusíme řešit, pomocí podílu hmotností, a tedy váženého průměru, se dostaneme ke správnému řešení. Podíváme-li se celkově na odpovědi na otázky v sekci B, vidíme, že u mnoha otázek se podíl odpovědí blíží k 50 %. Vzledem k pravděpodobnosti zvolení správné odpovědi ze dvou možností, která činí právě 50 %, je tedy možné, že studenti mohli správné odpovědi spíše tipovat. Z tohoto důvodu by bylo do budoucna vhodné sledovat u studentů kromě odpovědí i míru jistoty, která by potvrdila nebo vyvrátila tuto domněnku.

V části C, kde jsme zkoumali postoje studentů k řešení průměrem vs. klasicky, se výsledky u obou úloh liší. To může souviset s rozdílným vnímáním složitosti obou řešení dané úlohy. U druhé úlohy, zaměřené na pohyb po kružnici, se na první pohled řešení průměrováním může zdát ještě jednodušším než u první úlohy. Samotný výpočet je velmi jednoduchý a může se tedy zdát studentům přijatelnější a také ho preferovali častěji. Upřednostňování konkrétního řešení úlohy, popisuje v diplomové práci zaměřené na subjektivní vnímání náročnosti fyzikálních úloh (Laznová 2017) její autorka. Připravila několik vyřešných úloh, z nichž jednu řeší dvěma způsoby, klasickým a pomocí průměru. Zjistila, že studenti dávají přednost řešení průměrováním oproti klasickému řešení (56 vs. 16 studentů). Toto řešení také považují za matematicky a časově méně náročné. Odhad vlastní úspěšnosti byl ale u obou způsobů řešení podobný. U této úlohy byl také největší rozdíl v odhadované úspěšnosti učiteli. Učitelé předpokládali mnohem menší úspěšnost než samotní studenti. Jejich přepodklad může vycházet ze zkušenosti, že netradiční řešení mohou přinášet jistá rizika.

Navzdory tomu, že studenti do určité míry upřednostňují řešení průměrováním a také by ho preferovali v učebnicích, jako fyzikálně správnější častěji uvádí tradiční řešení. Porovnáním odpovědí v oddílech A, B a C zjišťujeme, že studenti gymnázia mají lepší matematické znalosti průměru, avšak při rozhodování o fyzikální správnosti takového řešení je jejich úspěšnost nižší. Přestože studenti SPŠD mají výrazně horší výsledky v části A než gymnazisti, v části B mají výsledky srovnatelné se studenty gymnázia. Což ale může být dáno vysokou mírou pravděpodobnosti správné odpovědi při náhodném výběru, jak bylo zmíněno výše. Studenti obou škol v části C často uvádějí preferenci řešení průměrováním, ať při vlastním výpočtu nebo v učebnicích. A to i přes nepřesvědčivé výsledky v části B.

Řešení pomocí průměrů přináší výhody, ale i rizika. Mezi výhody patří jednodušší algebraické řešení a menší časová náročnost, což může být důvod, proč studenti toto řešení upřednostňují. Dle diplomové práce (Laznová 2017) studenti o něco častěji považují takové řešení za zajímavější, díky čemuž můžeme předpokládat větší motivovanost studentů. Snadnější výpočet není pro studenty tolik abstraktní a umožňuje více se zaměřit na fyzikální podstatu situace. Jak se ukázalo v odpovědích v části B, je fyzikální rozbor v tomto případě dokonce velmi důležitý. Jako jednoznačné riziko se ukázalo, že studenti mnohdy nevědí, kdy je průměrování fyzikálně správné a mohou se nechat zmást zadáním úlohy, které k průměrování vybízí. Zrádnost může spočívat také v tom, že studenti toto řešení preferují, aniž by si uvědomovali své nedostatky ve fyzikálním vnímání situace. Řešení pomocí průměrování se odlišuje od tradičního řešení, které lze do určité míry algoritmizovat, dá se tedy naučit jeho postup a s vyšší jistotou vede k správnému výsledku. Netradiční řešení naproti tomu rozvíjí do větší míry fyzikální myšlení a tvůrčí přístup. Důležitým předpokladem pro úspěšné řešení úloh pomocí průměru je také konceptuální znalost (váženého) průměru. Se špatnou znalostí průměru, může student dojít ke špatnému výsledku, ačkoli chápe správně fyzikální podstatu úlohy.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo ověřit, nakolik zvládají studenti řešit fyzikální úlohy pomocí průměrování a jaký postoj k takovému řešení zaujímají. Prozkoumáním odborné literatury zaměřené na testování znalostí konceptu průměru nacházíme studie z oblasti matematiky, v oblasti fyziky se studie zaměřují výhradně na koncept průměrné rychlosti. V dalších odvětvích fyziky ale podobné studie chybí. Výsledky výzkumu v této práci ukazují, že studenti mnohdy preferují řešení úloh pomocí průměrování, ačkoli v konkrétních fyzikálních úlohách často nerozliší, zda je průměrování správně či nikoli. Ukázalo se také, že znalost výpočtů s průměrem, jakožto základní předpoklad pro úspěšné řešení úloh, se liší podle školy, kterou studenti navštěvují. Limity této studie jsou takové, že se zúčastnil poměrně malý vzorek studentů. Pro další výzkum by mohlo být zajímavé zahrnout větší počet studentů, například i z jiných škol. Při větším rozsahu vzorku by bylo možné překonat současnou deskriptivní povahu výzkumu a formulovat a následně ověřovat i konkrétní hypotézy. Další informace by mohlo přinést zařazení otázek na míru jistoty studentů, zkoumání vlastních řešení studentů (bez předkládání vzorových řešení), nebo otázky na ověření pochopení fyzikální podstaty problému. Výsledky také ukázaly, že v praxi je možné zahrnout alternativní způsoby řešení pomocí průměrování, ale je nutné vždy vysvětlovat fyzikální kontext.

Resumé

The aim of this bachelor thesis was to examine and verify to what extent students managed physics tasks utilizing the average and their attitude to that solution. By looking into literature with focus on proving the concept of mean we find that there exist studies in mathematics, in physics studies focus solely at the concept of average speed. Other physics fields lack similar studies though. Research results in this thesis demonstrate that students prefer solutions based on averaging, although in specific physics assignments they often do not distinguish whether used averaging is correct or not. It also turned out that the knowledge of calculations with an average as a basic prerequisite for successful problem solving varies by school the students attend. Relatively small sample of students participated which is a limitation of this study. It might be interesting for further research to include more students, e.g. students from other schools. With a larger sample size, it would be possible to overcome the current descriptive nature of research and define and then even verify concrete hypotheses. Additional information could provide the inclusion of questions tailored to students' confidence by reviewing individual students' solutions (without putting in sample solutions), or questions to verify the physical nature of the problem. Due to the results, in practice it is possible to include alternative solutions using averaging, but it is always necessary to explain physical context.

Literatura

[1] CAI Jinfa, John C. MOYER, Nancy J. GROCHOWSKI.*Making the Mean Meaningful: An Instructional Study.* Research in Middle Level Education Quarterly (1999), 22:4, 1-24, doi: 10.1080/10848959.1999.11670153

[2] CHIU, Yun-Ju. (2008). *A Study on the Misconceptions of Average Velocity from Teaching and Learning Approaches.* Conference of Asian Science Education, February 20-23, 2008. Kaohsiung, Taiwan

[3] JACOBBE, Tim. *Elementary school teachers' understanding of the mean and median.* International Journal of Science and Mathematics Education 10, 1143–1161 (2012). doi: 10.1007/s10763-011-9321-0

[4] KAŠPAR, Josef, Jozef JANOVIČ a František BŘEZINA. *Problémové vyučování a problémové úlohy ve fyzice.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. Odborná literatura pro učitele.

[5] LAZNOVÁ, Veronika. *Subjektivní vnímání náročnosti fyzikálních úloh učiteli a studenty.* Plzeň, 2017. Diplomová práce. Západočeská univerzita. Fakulta aplikovaných věd. Vedoucí práce Jiří KOHOUT.

[6] MOKROS, Jan, and Susan Jo RUSSELL. *"Children's Concepts of Average and Representativeness."* Journal for Research in Mathematics Education 26, no. 1 (1995): 20-39. doi: 10.2307/749226.

[7] RANDA, Miroslav, Jiří KOHOUT, Václav KOHOUT, Pavel KRATOCHVÍL, Pavel MASOPUST, Josef PETŘÍK, Jitka PROKŠOVÁ a Karel RAUNER. *Fyzika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia.* Plzeň: Fraus, 2018. ISBN 978-80-7489-392-6

[8] SUBRAMANIAN Karthigeyan, Pamela Esprivallo HARRELL, Christopher S. LONG, Nazia KHAN. *Pre-service elementary teachers' conceptual understanding of average speed: the systematicity and persistence of related and unrelated concepts.* Research in Science & Technological Education (2020), doi: 10.1080/02635143.2020.1782880

[9] SVOBODA, Emanuel a Růžena KOLÁŘOVÁ. *Didaktika fyziky základní a střední školy: vybrané kapitoly.* Praha: Karolinum, 2006. ISBN 80-246-1181-3.

[10] VOLF, Ivo. *Metodika řešení úloh ve vyučování fyzice (zejména na základní škole).* Praha, Jednota československých matematiků a fyziků. 1975.

[11] ZNAMENSKIJ, J. A. *Methodika vyučování fysiky na střední škole.* Praha, Ústav dálkového studia – edice, 1952.

Seznam tabulek

Seznam grafů

Příloha

Dotazník - průměry

Vítejte v dotazníku zaměřeném na to, jak je ve fyzice na střední škole možné využívat zjednodušené řešení úloh pomocí průměru. Pozor, u prvních tří otázek, tj. A1 - A3, je možno více správných odpovědí! V části B budete rozhodovat, zda je zde prezentované řešení fyzikálně v pořádku či nikoliv. V části C nám pak jde o čistě Váš subjektivní pohled na věc, žádná možnost není správně nebo špatně.

A1. Žák získal při talentových zkouškách od tří rozhodčích různý počet bodů. Od prvního získal 16 bodů, od druhého 17,5 bodů. Kolik bodů mohl žák získat od třetího rozhodčího, pokud je průměrná hodnota z těchto tří hodnocení vyšší než počet bodů od druhého rozhodčího?

- [ ] 18
- [ ] 18,5
- [ ] 19
- [ ] 19,5

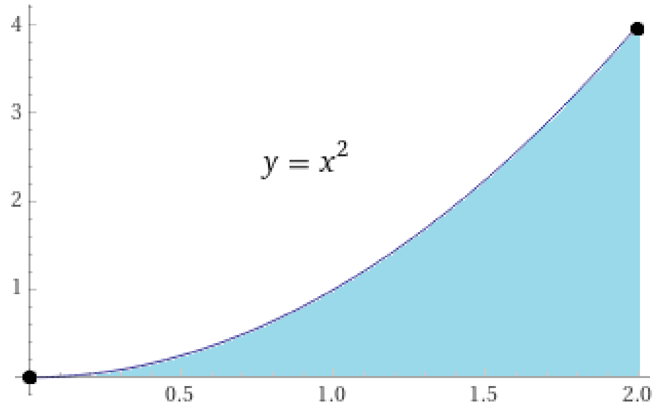
A2. Při volbách získala strana XYZ ve čtyřech různě velkých okrscích postupně 10 %, 15 %, 20 %, 25 % z celkového počtu hlasů. Kolik % může činit průměr hlasů získaných touto stranou v součtu ze všech čtyř okrsků?

- [ ] 10 %
- [ ] 17 %
- [ ] 23 %
- [ ] 35 %
- [ ] 70 %

A3. Vytvoříme směs oříšků tak, že smícháme 4 dkg lískových oříšků po 10 Kč/dkg a 1 dkg oříšků kešu. Kolik může stát 1 dkg kešu oříšků, pokud chceme, aby 1 dkg výsledné směsi nebyl dražší než 13 Kč?

- [ ] 5 Kč
- [ ] 15 Kč
- [ ] 20 Kč
- [ ] 30 Kč

A4. Zjišťujeme obsah plochy pod parabolou mezi body x = 0 a x = 2. Fukce y(x) = x^2 má v těchto bodech funkční hodnoty y(0) = 0 a y(2) = 4. Průměrná hodnota je [y(0)+y(2)]/2 = (0+4)/2 = 2. Obsah plochy pod parabolou je 2*2 = 4.



- ○ Takto je to správně, obsah je skutečně 4
- ○ Uvedená úvaha je chybná, obsah je větší než 4.
- ○ Uvedená úvaha je chybná, obsah je menší než 4.

B1. Auto rovnoměrně zrychluje z 5 m/s na 15 m/s za 10 s. Průměrná rychlost je 10 m/s, za 10 s tedy auto urazí dráhu 100 m. Je to pravda?

- Ano
- Ne

B2. Řidič jede tam a zpátky autem 80 km dlouhou trasu po dálnici. Při cestě jedním směrem uvízl v koloně a palubní počítač ukázal průměrnou rychlost 10 km/h. Při cestě zpět se mu už jelo dobře a průměrná rychlost na tomto úseku byla 110 km/h. Celková průměrná rychlost při cestě tam i zpět je (10+110)/2 = 60 km/h. Je výpočet průměrné rychlosti správně?

- Ano
- Ne

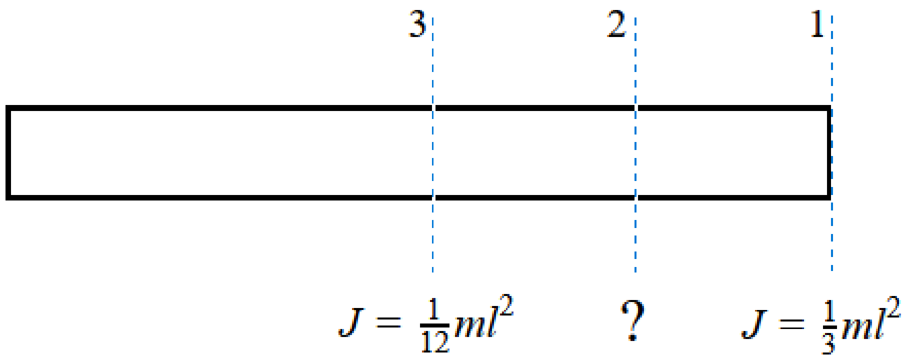
B3. Cyklista se rozjíždí z klidu rovnoměrným pohybem. První polovinu doby je jeho zrychlení 2 m/s^2, druhou polovinu doby 3 m/s^2. Jeho průměrné zrychlení je ap = (2+3)/2 = 2,5 m/s^2.

- Ano
- Ne

B4. Cyklista z předchozí otázky se pohybuje s průměrným zrychlením ap. Dráhu, kterou urazí, spočítáme jako s = 1/2*ap*t^2. Je to pravda?

- Ano
- Ne

B5. Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose na konci tyče (1) a uprostřed tyče (3) je vyjádřen na následujícím obrázku. Je níže uvedený výpočet pro moment setrvačnosti vzhledem k ose v jedné čtvrtině tyče (2) správně?



$$J = \frac{\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{12}ml^2}{2} = \frac{4ml^2 + ml^2}{24} = \frac{5}{24}ml^2$$

- [ ] Ano
- [ ] Ne

B6. Železný předmět o hmotnosti 1 kg a teplotě 100 °C vložíme do 4 kg vody o teplotě 20 °C. Výsledná teplota bude (1*100+4*20)/(4+1) = 180/5 = 36 °C. Je to tak?

- [ ] Ano
- [ ] Ne

B7. Smícháme 100 ml 90% roztoku ethanolu a 100 ml 10% roztoku ethanolu. Výsledná směs bude tedy obsahovat (10+90)/2 = 50 % ethanolu. Je to pravda?

- Ano
- Ne

B8. Smícháme 50 g vodného roztoku obsahující 20 hmotnostních % NaCl a 150 g vodného roztoku s 30 hmotnostními % NaCl. Výsledná koncentrace je (50*0,2+150*0,3)/(50+150)=0,275, tj. 27,5 %. Je to pravda?

- Ano
- Ne

C1. Máme zadanou úlohu: Auto zrychlí během 10 sekund z původní rychlosti na pětinásobek. Urazí přitom dráhu 60 metrů. Jaká byla původní rychlost auta? - Úloha je níže vyřešena dvěma způsoby vedoucími ke stejnému správnému výsledku:

Ze zadání vím, že $s = 60$ m, $t = 10$ s, rychlost na počátku označím v_0 a rychlost na konci $5v_0$.

První způsob:

Sestavím rovnici pro dráhu zrychleného pohybu a rovnici pro rychlost. Řeším jako soustavu dvou rovnic o neznámých a a v_0:

$$\begin{aligned} s &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ 5v_0 &= v_0 + at \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Big| \cdot 2 \\ 0 &= -4v_0 + at \,| \cdot t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s &= 2v_0 t + at^2 \qquad (1) \\ 0 &= -4v_0 t + at^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Od rovnice (1) odečtu rovnici (2) a získám

$$2s = 6v_0 t \quad \rightarrow v_0 = \frac{s}{3t}$$

Dosadím číselně ze zadání a získám počáteční rychlost:

$$v_0 = \frac{60}{3 \cdot 10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 60 : 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Druhý způsob:

Dráhu pohybu můžu určit pomocí průměrné rychlosti. Protože je pohyb rovnoměrně zrychlený, stačí určit průměrnou rychlost jako průměr hodnot rychlosti na začátku a na konci pohybu. Tedy

$$v_p = \frac{v_0 + 5v_0}{2} = \frac{6v_0}{2} = 3v_0.$$

Potom

$$s = v_p t = 3v_0 t \ \rightarrow v_0 = \frac{s}{3t}$$

Počáteční rychlost získám dosazením číselných hodnot do předchozího vztahu

$$v_0 = \frac{60}{3 \cdot 10}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

	určitě první	spíše první	oba stejně	spíše druhý	určitě druhý
Který způsob řešení preferujete?	○	○	○	○	○
Který způsob je fyzikálně správnější?	○	○	○	○	○
Který způsob si myslíte, že by preferoval Váš učitel?	○	○	○	○	○
Který způsob by měl být v učebnicích?	○	○	○	○	○

C2. Je zadána úloha: Rotor rovnoměrně zrychluje z frekvence 10 Hz na 20 Hz během 10 s. Kolik otáček během této doby vykoná? Opět vyřešeno dvěma způsoby vedoucími ke stejnému správnému výsledku:

Mám zadané hodnoty $f_0 = 10$ Hz, $f_1 = 20$ Hz a $t = 10$ s.

První způsob:

Pro úhlovou dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu po kružnici platí vztah

$$\phi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\epsilon t^2.$$

Dále platí $\omega = 2\pi f$ a $\epsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, po dosazení do předchozí rovnice získám:

$$\phi = 2\pi f_0 t + \frac{2\pi(f_1 - f_0)}{2t} t^2 = 2\pi f_0 t + \pi(f_1 - f_0)t = \pi(f_0 + f_1)t$$

Počet otáček získám jako

$$n = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{f_0 + f_1}{2} t$$

A číselně

$$n = \frac{10 + 20}{2} \cdot 10 = 300 : 2 = 150.$$

Druhý způsob:

Protože se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb, můžeme průměrnou frekvenci určit jako průměr f_0 a f_1. To dává

$$f_p = \frac{f_0 + f_1}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

Hodnota frekvence v Hz udává počet otáček za s. Stačí tedy průměrnou frekvenci vynásobit časem t a získáme celkový počet otáček:

$$n = f_p t = 15 \cdot 10 = 150.$$

	určitě první	spíše první	oba stejně	spíše druhý	určitě druhý
Který způsob řešení preferujete?	○	○	○	○	○

Který způsob je fyzikálně správnější?	○	○	○	○	○
Který způsob si myslíte, že by preferoval Váš učitel?	○	○	○	○	○
Který způsob by měl být v učebnicích?	○	○	○	○	○

Pokud chcete, můžete se nyní podepsat:

Vaše odpověď

Děkuji Vám za vyplnění tohoto dotazníku! Pokud máte nějaké komentáře či připomínky, napište je prosím zde:

Vaše odpověď

Odeslat