ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

PODOBNOST VE VÝUCE MATEMATIKY NA 2. STUPNI ZŠ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Tereza Růžičková
Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma-Ge

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň, 2021

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 28. června 2021

....
vlastnoruční podpis

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala všem, kteří mi poskytli podklady pro vypracování této diplomové práce. Obzvláště pak děkuji vedoucí své diplomové práce Mgr. Martině Kašparové Ph.D. za odborné vedení, trpělivost, cenné rady a poskytnutí podnětných připomínek ke zpracovávanému tématu. Dále bych chtěla poděkovat vyučujícím matematiky, kteří se podíleli na distribuci dotazníků svým žákům – Ing. Libuši Brejchové (Masarykova ZŠ Plzeň), Bc. Miroslavě Duškové (ZŠ Kryry), Mgr. Michalu Fronkovi (ZŠ Tlučná), Mgr. Štěpánce Kaiserové (ZŠ Nová škola Domažlice), Mgr. Blance Matasové (31. ZŠ Plzeň), Mgr. Janě Poláčkové (Církevní gymnázium Plzeň), Mgr. Marii Říkovské (20. ZŠ Plzeň), Mgr. Evě Seidlové (26. ZŠ Plzeň), Mgr. Štěpánce Simbartlové (ZŠ Dobřany), Mgr. Pavle Sýkorové (10. ZŠ Plzeň), Mgr. Lucii Šebiánové (ZŠ Kralovice), Mgr. Kateřině Šmausové (28. ZŠ Plzeň), Mgr. Magdaléně Šťastné (15. ZŠ Plzeň), Mgr. Ivanovi Tafatovi (Gymnázium Plzeň, Mikulášské nám.). Děkuji i Mgr. Marii Machové a Mgr. Václavu Kašpárkovi, kteří mi poskytli užitečné rady při absolvování souvislých pedagogických praxí vykonávaných na ZŠ a MŠ Švihov. Poděkování patří i třem žákům, kteří dobrovolně vyzkoušeli didaktické hry a aktivity uvedené v závěru diplomové práce – Anetě Augustinové, Anetě Bauerové a Adamovi Augustinovi. V neposlední řadě bych také chtěla poděkovat své rodině, mému partnerovi a pracovníkům Pedagogické knihovny ZČU za podporu nejen při tvorbě této práce, ale i po celou dobu studia.

OBSAH

SEZNAM ZKRATEK

MŠ	mateřská škola
RVP	Rámcový vzdělávací program
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
ŠVP	školní vzdělávací program
ZŠ	základní škola

ÚVOD

Podobností se zabývali již ve starověkém Řecku. Thales z Milétu tímto způsobem dokázal změřit výšku slavných pyramid v Gíze. I v dnešních dnech lze využít podobnost například při měření výšek stromů za pomocí lesnických výškoměrů.

Děti se s podobností setkávají již v útlém věku. Již jako malí si hrají s miniaturními hračkami, stavbami zmenšených modelů nebo zvětšují či zmenšují obrázky pomocí čtvercové sítě. Na prvním stupni základních školy dokáží žáci rozlišit mezi vyobrazenými geometrickými obrazci dané útvary, přestože se liší velikostí nebo barvou.

Podobnost je zpravidla zařazována až do posledního ročníku základní školy, jelikož žáci pro osvojení podobnosti musí propojit prostorové a numerické uvažování. Žákům však poskytuje základy pro matematická témata jako je projektivní geometrie a trigonometrie. [1, str. 3]

První kapitola této diplomové práce se věnuje podobnosti v kurikulárních dokumentech – Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) a ve školních vzdělávací programech vybraných škol. Vzdělávací obsah *Matematika a její aplikace* je rozdělen v RVP ZV na čtyři tematické okruhy. Podobnost se nachází v oblasti *Geometrie v rovině a v prostoru*. Jsou zde uvedeny očekávané výstupy týkající se podobnosti.

Žáci se na základní škole nejdříve dozvídají poznatky o shodnosti, což je speciální případ podobnosti. Ve druhé kapitole se proto připomíná shodnost geometrických útvarů.

Třetí kapitola uzavírá teoretickou část práce, je věnována podobnosti. Jsou zde uvedeny nejen definice, ale i poučky, které si žáci osvojují. Dále je zde uvedena i teorie ze středních a vysokých škol.

Čtvrtá kapitola obsahuje vzorové příklady, které jsou řešeny na základních školách při výuce podobnosti. Nejdříve je uvedeno několik příkladů na podobnost geometrických útvarů. Další podkapitola se věnuje větám o podobnosti trojúhelníků a jejich využití při řešení matematických úloh. Do poslední části této kapitoly jsou situovány slovní úlohy a příklady na praktické využití podobnosti.

Kapitola č. 5 se věnuje experimentu uskutečněném na několika základních školách v Plzeňském kraji. Cílem tohoto výzkumu bylo zjištění reálné situace ve školách.

Didaktické hry a aktivity, uvedené v šesté kapitole, měly být původně součástí výzkumného šetření. Z důvodu uzavření škol vlivem celosvětové pandemie Covid - 19 však nebylo možné tyto aktivity ve třídách vyzkoušet. Tři dobrovolní žáci uvedené hry vyzkoušeli doma, a proto je součástí této kapitoly i jejich zpětná vazba či případné náměty na úpravy těchto aktivit.

Text uvedený italikou byl doslovně převzat z uvedeného zdroje.

1 PODOBNOST VE VZDĚLÁVACÍCH PROGRAMECH

1.1 RÁMCOVÝ VZDĚLÁVACÍ PROGRAM PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ

Rámcový vzdělávací program (RVP) předkládá školám obecně závazný rámec, který školy využívají při tvorbě školních vzdělávací programů. RVP pro základní vzdělávání stanovuje očekávanou úroveň vzdělání pro všechny absolventy určité etapy vzdělávání. Klade důraz na klíčové kompetence a jejich provázání se vzdělávacím obsahem a praktickým životem. Zároveň se soustředí na různá průřezová témata jako je například osobnostní, sociální, environmentální či mediální výchova.

Vyučované předměty (vzdělávací obory) ve školách jsou v RVP tříděny do vzdělávacích oblastí. Předmět matematika je zařazen do vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace*.

V jednotlivých vzdělávacích oborech se učivo rozděluje do tematických okruhů. Vzdělávací obor *Matematika a její aplikace* obsahuje celkem čtyři tyto tematické okruhy:

- *Číslo a početní operace* (1. stupeň ZŠ), resp. *Číslo a proměnná* (2. stupeň ZŠ)
- *Závislosti, vztahy a práce s daty*
- *Geometrie v rovině a v prostoru*
- *Nestandardní aplikační úlohy a problémy* [2, str. 30]

Vzdělávací obsahy se dále dělí na učivo a očekávané výstupy.

Téma podobnost je zařazeno v tematickém okruhu *Geometrie v rovině a prostoru*. Tento tematický okruh se zaměřuje na geometrické útvary a modelování geometrie v reálných situacích. Žáci se také naučí uvědomovat si vzájemné polohy různých objektů v rovině či v prostoru. Zároveň by se měli zdokonalovat v odhadování, měření délek a úhlů a výpočtu obvodů a obsahů (resp. povrchů a objemů). Tyto dovednosti by žáci měli aplikovat při řešení úloh a problémů, které matematizují běžné životní situace. (Upraveno podle [2, str. 31])

Vzdělávací obsah Geometrie v rovině a prostoru obsahuje následující očekávané výstupy a učivo týkající se podobnosti.

- Očekávané výstupy
  - Žák
    - M-9-3-01: *zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku*
    - M-9-3-02: *charakterizuje a třídí základní rovinné útvary*
    - M-9-3-07: *užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků*
    - M-9-3-13: *analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu* [2, str. 37]
- Učivo
  - *rovinné útvary – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník (lichoběžník, rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků)* [2, str. 38]

Podobnost je explicitně jmenována pouze v očekávaném výstupu M-9-3-07. Žáci se však kromě jmenovaných vět o shodnosti a podobnosti zabývají také podobnými útvary, které se učí rozlišovat (viz 4.1.2). Měli by také umět zdůvodnit, proč jsou dané geometrické útvary podobné. Dále se zabývají poměrem podobnosti dvou podobných geometrických útvarů. Ze zadaného poměru podobnosti a zadaných rozměrů jistého geometrického útvaru určují rozměry druhého geometrického útvaru (viz 4.1.1, 4.1.3 a 4.1.4). V aplikačních úlohách se žáci učí rozdělit úsečku v určitém poměru či na daný počet dílů (viz 4.3.2).

Rámcový vzdělávací program také uvádí některé cíle vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace*. V rámci tematického celku podobnost se přispívá k naplnění následujících cílů:

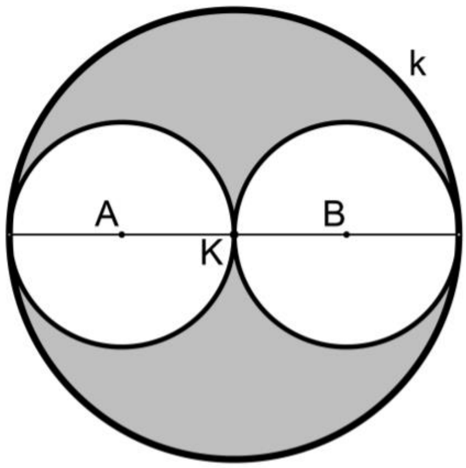
- *využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech – odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace* [2, str. 30]
    - Žáci během výuky využívají při řešení praktických úloh podobnost trojúhelníků. Těmito úlohami může být například měření výšek stromů či budov nebo také nepřístupných vzdáleností. Tyto úlohy jsou uvedeny v kapitole 4.3.
- *rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojování si nezbytných matematických vzorců a algoritmů* [2, str. 30]
    - Žáci si osvojují geometrické algoritmy, které jsou založeny na podobnosti trojúhelníků. Mezi tyto základní postupy patří rozdělení úsečky v daném poměru či na daný počet dílů nebo také změna velikosti úsečky v daném poměru, při kterém se využívá pouze pravítko a kružítko.
- *rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů* [2, str. 31]
    - Žáci se učí věty o podobných trojúhelnících. Tyto věty představují argumenty, které děti používají při dokazování podobnosti trojúhelníků nebo i složitějších geometrických útvarů, které lze na trojúhelníky rozložit. Také je aplikují při rozhodování o pravdivosti či nepravdivosti některých tvrzení.
- *přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu* [2, str. 31]
    - Žáci získávají během výuky mnohé pojmy matematického jazyka, které se týkají podobnosti (např. shodnost, podobnost, vzor, obraz a další). Relace podobnost útvarů se v matematice označuje symbolem „$\sim$“. Žáci tento symbol musí umět správně přečíst, porozumět jeho významu a používat ho všude, kde se stručně vyjadřuje podobnost dvou útvarů.

Téma podobnost je zpravidla vyučováno v posledním ročníku základní školy. Žáci se však setkávají s podobností mnohem dříve. Například již na prvním stupni ZŠ děti vyhledávají mezi znázorněnými geometrickými útvary čtverce. Odhalí je, přestože se jejich modely liší velikostí, polohou nebo i barvou. Děti dokáží abstrahovat od nepodstatných znaků útvarů a zaměřit se na charakterizující vlastnosti čtverců - rovnostrannost a pravoúhlost. Nejpozději na prvním stupni se děti učí zvětšovat a zmenšovat různé obrázky a geometrické útvary pomocí čtvercové sítě.

V dalších ročnících základní školy se učí žáci dalším dovednostem. Získávají nové znalosti, rozvíjí se jim paměť i myšlení a zároveň zpřesňují své myšlenky. Díky práci s dalšími rovinnými i prostorovými útvary zlepšují své představy a prostorovou orientaci.

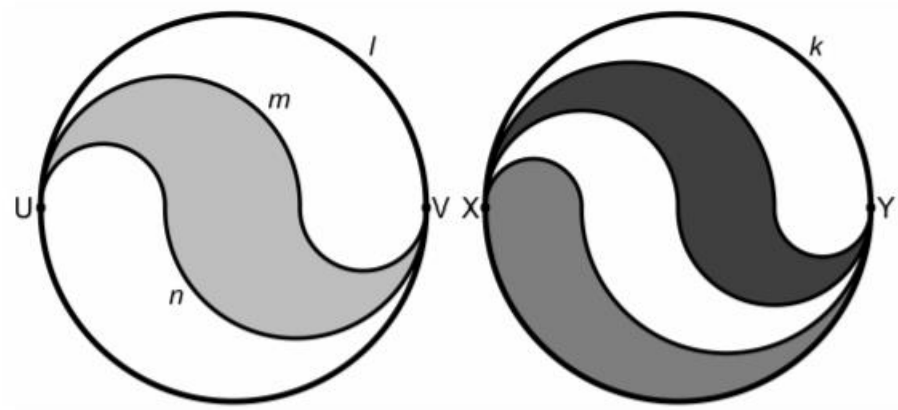
V sedmém ročníku se zpravidla žáci učí pracovat s poměrem. Nejen že modelují reálné situace, v nichž pracují s poměrem, ale také zvětšují či zmenšují útvary v daném poměru výpočtem. V tomto ročníku se také pracuje s měřítkem plánu a mapy.

Žáci se však nevědomky setkávají s podobností geometrických útvarů například při řešení úloh na obsahy útvarů. Příkladem může být dvojice kruhů, které jsou vepsány do kruhu se středem K a které nepřekrývají jeho plochu (na obrázku č. 1 vyznačena šedivě). Žákovým úkolem je určit, jakou část velkého kruhu šedivé plochy pokrývají. Úlohy mohou být složitější, pokud kruh dělíme dalšími křivkami. [3, str. 4]



Obrázek 1 - Dvojice kruhů

(Převzato z [3, str. 4])



Obrázek 2 - Složitější podobné útvary

(Zdroj: [3, str. 5])

V devátém ročníku své dosavadní nabité znalosti žáci precizují. V tematickém celku podobnost řeší zvětšení a zmenšení geometrických útvarů geometricky pomocí pravítka a kružítka. Všímají si vztahů mezi obvody a obsahy podobných útvarů.

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy vydalo v roce 2021 aktualizovanou verzi RVP s platností od 1. 9. 2021. V tematickém celku podobnost nedochází k žádným úpravám očekávaných výstupů vzdělávání ani učiva a původní vzdělávací cíle tak zůstávají v platnosti. [4]

1.2 ŠKOLNÍ VZDĚLÁVACÍ PROGRAMY

Školní vzdělávací program (ŠVP) je kurikulární dokument, který vzniká na každé ze škol individuálně na základě RVP. Škola si tento spis vytváří na základě podmínek, které ovlivňují výuku, a také pedagogických záměrů. Pomocí ŠVP mohou ředitelé spolu s učiteli profilovat svoji školu a také daleko lépe pracovat v rámci mezioborových vazeb. Stále však musí být v souladu s RVP.

Následující text je výsledkem studia školních vzdělávacích programů čtyř základních škol, jejichž žáci se zúčastnili experimentu uvedeného v kapitole č. 5.

Sledované ŠVP většinou více nespecifikovaly vzdělávací cíle a učivo a zůstaly u základních očekávaných cílů a učiva uvedeného v RVP (např. ZŠ a MŠ Švihov). [5] Všechny základní školy zařadily podobnost do výuky v 9. ročníku.

28. základní škola v Plzni však rozšířila očekávaný cíl M-9-3-07 o následující:

- *Rozlišuje shodné a podobné rovinné útvary*
- *Určí poměr podobnosti z rozměru útvaru a naopak (na základě poměru podobnosti určí rozměry útvarů)*
- *Využívá věty o podobnosti trojúhelníků*

Do učiva zařadila: *podobnost, věty o podobnosti trojúhelníků (věta sss, sus, uu) a dělení úseček v daném poměru*. [6, str. 209]

10. základní škola v Plzni svůj ŠVP doplnila o obecné výchovné a vzdělávací strategie a strategie vedoucí k rozvoji kompetencí právě v předmětu matematika. K základnímu učivu podobnost navíc přidala i rozšiřující učivo – goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku. Dílčí výstupy vztahující se k podobnosti:

- *Určí podobné útvary*
- *Užívá poměr podobnosti při práci s plány a mapami*
- *Užívá goniometrické funkce při řešení úloh z praxe a při výpočtech objemů a povrchů těles*

ŠVP této školy je velice propracovaný, neboť ke každému učivu předkládá i očekávané kompetence. Tyto informace jsou uvedeny v následující tabulce č. 1.

Tabulka 1 - Podobnost v ŠVP 10. ZŠ v Plzni

Podobnost v ŠVP 10. ZŠ v Plzni	
Očekávané kompetence	**Učivo**
• Určí podobné útvary v rovině • Určí a používá poměr podobnosti • Sestrojí rovinný obraz podobný danému • Rozdělí úsečku dané délky v daném poměru • Užívá poměr podobnosti při práci s plány a mapami • Řeší slovní úlohy	• Podobnost, určování podobných útvarů v rovině • Poměr podobnosti a jeho určování • Podobnost trojúhelníků - věty o podobnosti sss, sus, uu a jejich užití • Dělení úsečky v daném poměru • Zmenšování a zvětšování rovinných obrazců v daném poměru • Technické výkresy, plány a mapy - užití podobnosti při konstrukci plánů, výpočtů délky tras podle map

(Převzato z [7, str. 222])

Také 20. základní škola v Plzni má svůj ŠVP poměrně propracovaný. Učivo týkající se podobnosti rozdělila na tři části: podobnost, věty o podobnosti trojúhelníků a užití podobnosti. Dále pak definuje výstupy následovně:

- *Rozliší shodné a podobné útvary.*
- *Užívá k argumentaci a při výpočtech věty o podobnosti trojúhelníků v početních a konstrukčních úlohách.*
- *Řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem.* [8, str. 3]

Do průřezových témat a mezipředmětových vazeb zařadili autoři měřítko mapy, které se vyučuje již v 6. ročníku v zeměpise.

I v tomto ŠVP nalezneme rozsáhle zpracované výchovné a vzdělávací strategie vztahující se k předmětu matematika. Na této škole se předmět matematika vyučuje v 9. ročníku celkem 5 hodin týdně a navíc je zde zařazen předmět Seminář z českého jazyka a matematiky v časové dotaci 1 hodina za 14 dní. [8, str. 3]

Ze školních vzdělávacích programů lze vyčíst i chronologii učiva. Například na 20. ZŠ v Plzni následují po výuce podobnosti goniometrické funkce, při jejichž vyučování se zaměřují i na výpočty v pravoúhlém trojúhelníku. Toto učivo navazuje na podobnost, ale je zařazeno do rozšiřujícího učiva. [8, str. 3]

Pokud jsou goniometrické funkce (včetně jejich využití k řešení úloh rovinné i prostorové geometrie a také úloh z praxe) zařazeny v ŠVP, jsou zpravidla zařazeny jako rozšiřující učivo. Goniometrii se však tato diplomová práce věnovat nebude.

Dalším rozšiřujícím učivem, které má vazbu na podobnost, je stejnolehlost (konstrukce podobných útvarů pomocí stejnolehlosti). O stejnolehlosti je stručná zmínka v kapitole 3.3 a v části 4.3.2 je věnovaná úloha.

ŠVP zbývajících základních škol, kde proběhl experiment, nebyly dostupné v online verzi. Jsou přístupné pouze v budovách školy (např. ZŠ Nová škola Domažlice). [9]

2 SHODNOST

Tato diplomová práce se zabývá podobností a podobnými útvary. Jak již bylo zmíněno, žáci se primárně učí o tomto tematickém celku v 9. ročníku základní školy. S podobností se však setkávají již dříve. V 7. ročníku ZŠ se zabývají speciálním případem podobnosti, a to shodností. Kromě toho, že rozliší shodné útvary a rozpoznají, zda je obrazec souměrný podle bodu nebo přímky, naučí se zobrazovat rovinné útvary v osové a středové souměrnosti, případně i v otočení nebo v posunutí (rozšiřující učivo). V této kapitole bude stručně připomenuto to nejdůležitější.

2.1 SHODNOST GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ

Žáci mohou být motivováni pomocí dětské hry „Najdi daný počet rozdílů“. Je to hra, která vyžaduje pozornost, soustředění a systematický přístup k řešení. Díky ní si však žáci lépe zapamatují pojem shodnost.

V učebnicích matematiky se explicitně nenachází definice shodných útvarů. Studenti se s definicí setkávají až na středních a vysokých školách, kde je vysvětlována skrze geometrická zobrazení[1].

Žákům na ZŠ je pojem shodných útvarů vyložen zpravidla pomocí překrývání útvarů (např. *Dva geometrické útvary jsou shodné, jestliže mají stejný tvar a velikost, po přemístění na sebe se překrývají*). [10, str. 4]

Skutečnost, že útvary U_1 a U_2 jsou shodné, se zapisuje $U_1 \cong U_2$.

Existuje velké množství shodných útvarů. Žáci si na základní škole vysvětlují nezbytné vlastnosti některých útvarů, které jsou zapotřebí ke shodnosti.

- Shodné úsečky mají stejnou délku.
- Shodné kružnice mají shodný poloměr (případně průměr).
- Shodné úhly mají stejnou velikost.
- Obecně mají shodné obrazce stejný tvar a shodné strany i úhly.

[1] Definice: *Prosté zobrazení v rovině se nazývá shodným zobrazením (shodností), právě když pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' v tomto zobrazení platí* $|X'Y'| = |XY|$ [11]

2.2 SHODNOST TROJÚHELNÍKŮ

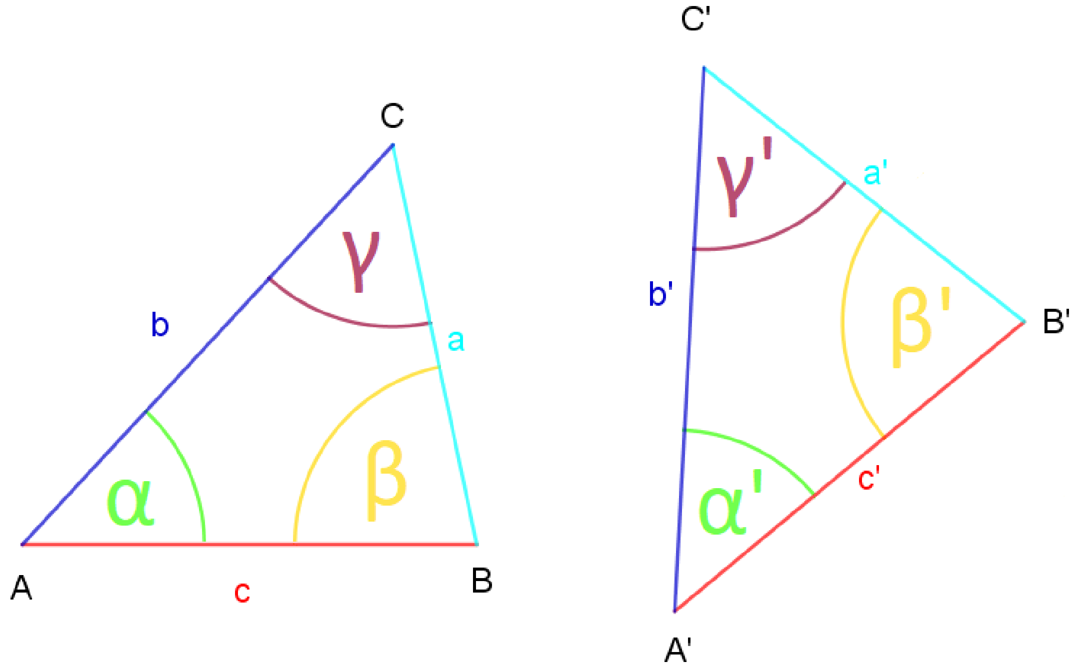
Shodnost útvarů je na ZŠ primárně zaměřována na shodnost trojúhelníků, kterou lze určit pomocí několika vět uvedených níže. Definice a věty uvedené v kapitole 2.2 byly převzaty z [12].

Definice: Shodné trojúhelníky se shodují ve všech třech odpovídajících si stranách a ve všech třech odpovídajících si vnitřních úhlech.

Při zápisu shodnosti dvou trojúhelníků je důležité pořadí vrcholů. Vrcholy v zápisu jednoho trojúhelníku odpovídají vrcholům v zápisu s ním shodného trojúhelníku. Ze zápisu $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ lze vyčíst:

- strana AB (resp. BC, AC) je shodná se stranou EF (resp. FG, EG)
- úhel při vrcholu A (resp. B, C) je shodný s úhlem při vrcholu E (resp. F, G)

Na obrázku č. 3 jsou dva shodné trojúhelníky, shodné prvky jsou vyznačeny stejnou barvou.



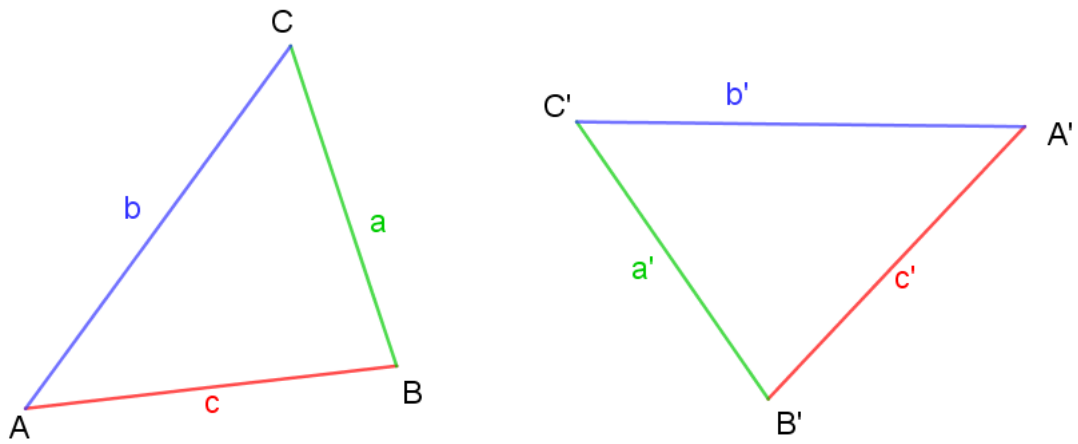
Obrázek 3 - Shodné trojúhelníky

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Věta sss

Dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují ve všech třech odpovídajících si stranách.

Pro trojúhelníky na obrázku č. 4 platí $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$. Délky odpovídajících si stran se rovnají: $a = a'$ (zelené), $b = b'$ (modré) a $c = c'$ (červené). Z toho vyplývá: $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.



Obrázek 4 - Shodné trojúhelníky dle věty sss

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Rovnost odpovídajících si stran můžeme zapsat i takto:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 1$$

Tím je lépe vidět, že shodnost trojúhelníků je speciální případ podobnosti trojúhelníků.

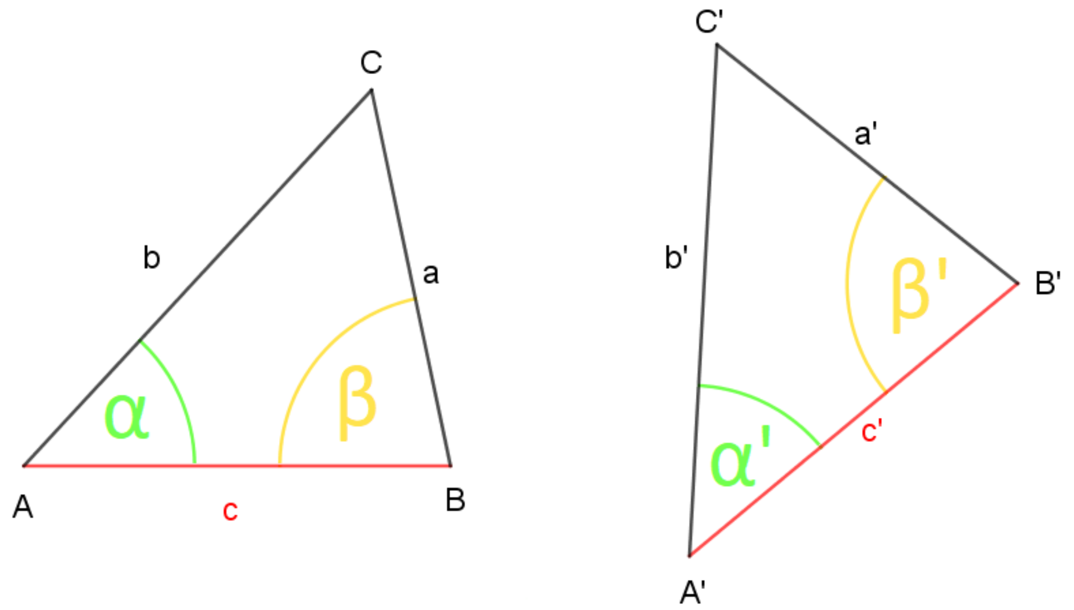
Věta usu

Dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují v jedné straně a v obou úhlech k této straně přilehlých.

Z obrázku č. 5 lze vyčíst, že trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou shodné, neboť se shodují v jedné dvojici stran (vyznačena červeně) a ve dvou úhlech k této straně přilehlých (vyznačeny žlutě a zeleně). Z toho vyplývá: $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.

Protože pro úsečky a úhly platí, že ze shodnosti plyne i rovnost velikostí, můžeme nutné a zároveň postačující podmínky pro shodnost dvou trojúhelníků zapsat i takto:

$$\alpha' = \alpha, \gamma' = \gamma, \frac{c'}{c} = 1$$



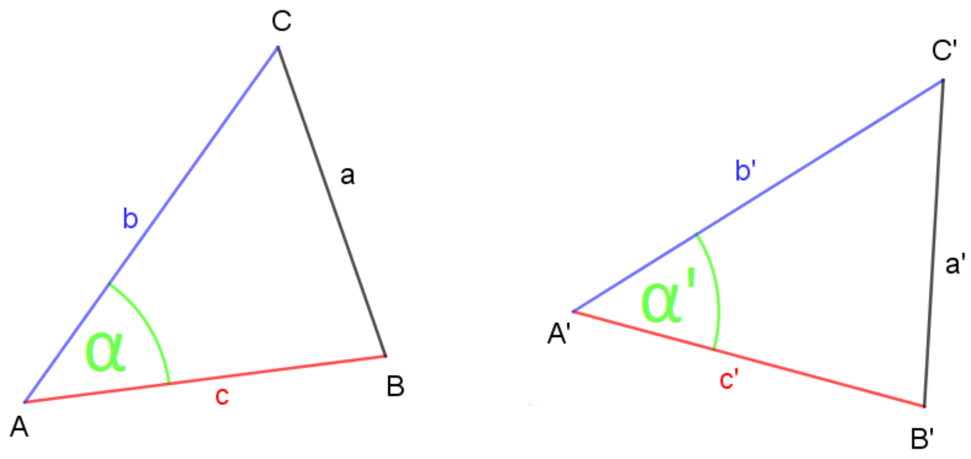
Obrázek 5 - Shodné trojúhelníky dle věty sus

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Věta sus

Dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném.

Opět lze podmínky věty o shodnosti zapsat pomocí velikostí. Délky úseček vyznačených modře (resp. červeně) na obrázku č. 6 se rovnají, tj. odpovídající si strany mají stejné poměry velikostí $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 1$. Zeleně vyznačené úhly v trojúhelnících mají stejnou velikost $\alpha = \alpha'$.



Obrázek 6 - Shodné trojúhelníky dle věty sus

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Zmíněné věty sss, sus a usu se využívají při konstrukcích trojúhelníků. Trojúhelník konstruovaný pomocí věty sss musí splňovat podmínku, že součet dvou libovolných stran je větší než strana třetí. U trojúhelníku konstruovaného větou sus platí, že zadané strany svírají daný úhel a velikost tohoto úhlu musí být menší než 180 °. Při konstrukci trojúhelníku podle třetí zmíněné věty je zapotřebí, aby součet zadaných úhlů při téže straně byl menší než 180 °. [12, str. 157]

3 PODOBNOST

Obsahem této kapitoly je především teorie, která je vyučována na základní škole. Zahrnuje shrnutí všech důležitých poznatků k učivu podobnost. První podkapitola se věnuje podobnosti geometrických útvarů, druhá podkapitola se zabývá podobností trojúhelníků a třetí podkapitola se zaobírá stejnolehlostí.

3.1 PODOBNOST GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ

Žáci se v úvodních hodinách tematického celku podobnost nejdříve seznamují se samotným pojmem podobnost. Žáci se musí naučit odlišit význam pojmu podobnost v matematice a podobnost v běžném životě. S druhou formou se děti setkávají častěji. Lidé jsou si podobní povahou, vzhledem, chováním nebo například stylem oblékání. V minulosti docházelo k napodobování stavebních slohů, uměleckých děl apod. V devátém ročníku ZŠ se žáci ale setkávají s podobností přesně definovanou.

Autoři některých učebnic se při motivaci opírají o znalosti žáků z mateřské školy a z 1. stupně ZŠ. Právě zde se děti učí zvětšovat a zmenšovat různé obrázky a geometrické útvary pomocí čtvercové sítě. Žákům lze například položit otázku, jak by si překreslili nějaký oblíbený obrázek, který by bylo zapotřebí zvětšit, na stěnu svého pokoje. S pomocí čtvercové sítě žáci obdrží dvojici útvarů, které mají stejný tvar, ale různou velikost. Dále může vyučující navázat na znalosti ze 7. ročníku ZŠ, při kterém se vyučuje shodnost. Díky tomuto lze říci, že dva geometrické útvary se nazývají podobné, je-li možné jeden z nich zobrazit pomocí čtvercové sítě tak, že se získá dvojice shodných útvarů. [13, str. 73]

V učebnici [14, str. 15] je podobnost dvou útvarů přesně zavedena zároveň s poměrem podobnosti.

Definice: Útvar U_2 je podobný útvaru U_1, pokud lze všechny jejich body sdružit do dvojic odpovídajících si bodů tak, že pro některé kladné číslo k platí $|X_2Y_2| = k \cdot |X_1Y_1|$, kde X_1, Y_1 jsou libovolné body útvaru U_1 a X_2, Y_2 jsou odpovídající body útvaru U_2.

Číslo k nazýváme poměr podobnosti (koeficient podobnosti útvaru U_2 vzhledem útvaru U_1) [14, str. 15]

Porozumění definici podobných útvarů závisí na tom, zda žák pochopí, co znamená pojem odpovídající si body. Při výuce spoléháme na intuitivní pochopení z několika konkrétních příkladů a na základě analogie odpovídajících si bodů (vzor - obraz) v nějakém shodném zobrazení. Do výuky je vhodné zařadit příklady na procvičení hledání dvojic odpovídajících si bodů (např. úloha č. 4 v dotazníku uvedeném v kapitole č. 5).

Pro praktické potřeby rozhodnutí o tom, zda je útvar podobný jinému, není předchozí definice příliš vhodná. Podle ní je potřeba sdružit do dvojic všechny body útvarů U_1, U_2 a ověřit, že jakákoli úsečka určena nějakými dvěma body útvaru U_2 je vždy právě k-násobkem úsečky v útvaru U_1 s krajními body odpovídající krajním bodům úsečky v útvaru U_2. Musí se tedy zkontrolovat nekonečně mnoho případů, což není proveditelné. Na základní škole žáci vyhledají pouze několik dvojic odpovídajících si úseček a jsou-li jejich poměry stejné, prohlásí útvary za podobné. Ukázat podle uvedené definice, že nějaký útvar není podobný jinému, také není snadné. Vždy lze mít pochybnosti o tom, zda přeci jen nebylo možné body útvarů sdružit do dvojic tak, že platí vlastnost týkající se poměru odpovídajících si úseček. I body dvou útvarů, které podobné jsou, je možné „nešikovně“ sdružit do dvojic tak, že poměry odpovídajících si úseček vychází různě. To bývá častou chybou žáků (viz příklad č. 6 v kapitole č. 5). Ve zmiňovaném příkladu bylo úkolem zjistit, zda jsou zadané dva trojúhelníky podobné či nikoliv. Strany trojúhelníků nebyly zadány v odpovídajícím pořadí. Deset dotazovaných žáků zodpovědělo, že trojúhelníky nejsou podobné. Podobnosti dvou geometrických útvarů se týká i následující věta.

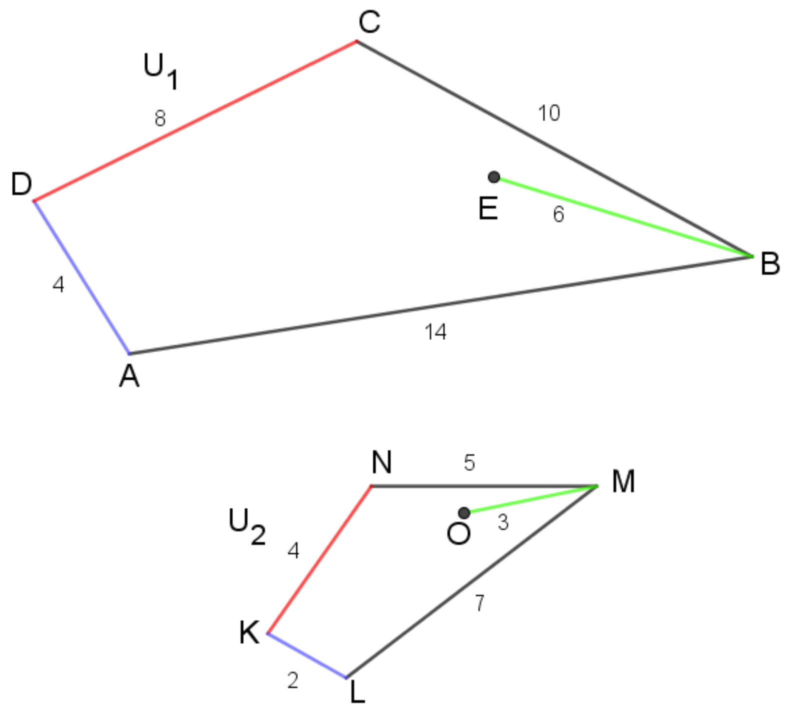
Věta: Pro dva podobné geometrické útvary platí, že každé dva odpovídající si úhly jsou shodné. Naopak, jestliže všechny dvojice sobě odpovídajících úhlů jsou shodné, jsou dané dva útvary podobné. [13, str. 76]

Z obrázků č. 7, č. 8 a č. 9 je patrný vztah $|X_2Y_2| = k \cdot |X_1Y_1|$ z definice uvedené na předchozí straně a zde uvedená věta. Pokud by byly dané velikosti úhlů u vrcholů geometrických útvarů a tyto úhly by se u odpovídajících bodů shodovaly, lze konstatovat, že geometrické útvary jsou podobné.

Na obrázku č. 7 jsou dva čtyřúhelníky s danými rozměry a vnitřními body. Pomocí definice uvedené výše je možné zkontrolovat, zda jsou útvary U_1 a U_2 podobné, přesněji, zda je útvar U_2 podobný útvaru U_1. Po dosazení vzdáleností zvolených dvojic bodů do $|X_2Y_2| = k \cdot |X_1Y_1|$, např. $7 = k \cdot 14$ je vypočten koeficient podobnosti $k = \frac{1}{2}$ útvaru U_2 vzhledem k útvaru U_1. Dále se ověří, zda pro odpovídající si úsečky, které jsou znázorněny stejnou barvou, vychází stejný koeficient podobnosti.

$$\frac{5}{10} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

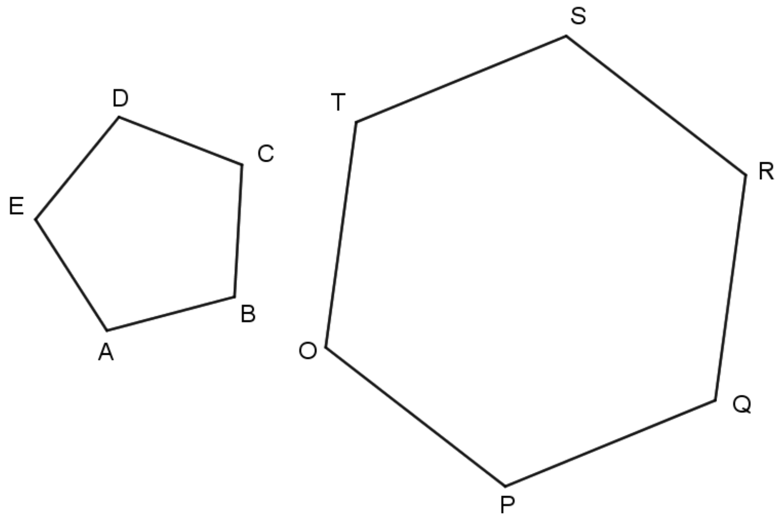
Útvary jsou zřejmě podobné, přestože nebyly prověřeny všechny možné dvojice úseček. Tento závěr vyplývá z přesvědčení, které žáci získávají z vizuálního vnímání útvarů.



Obrázek 7 - Podobné čtyřúhelníky

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

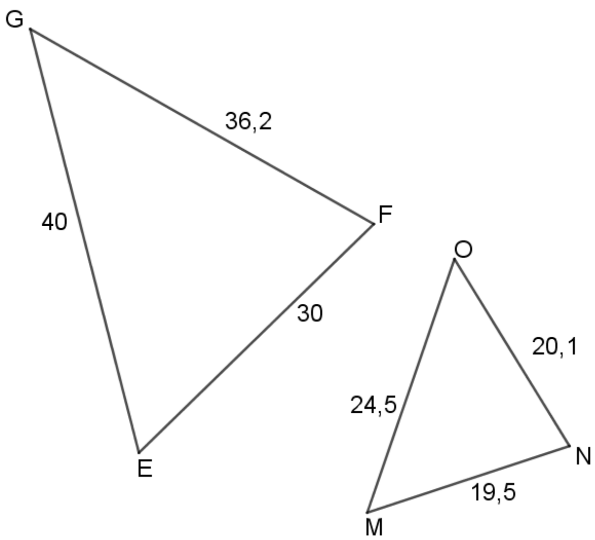
Na následujícím obrázku č. 8 je pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ a pravidelný šestiúhelník $OPQRST$. Tyto dva geometrické útvary nejsou podobné, neboť jejich body nelze sdružit do takových dvojic, aby byl koeficient podobnosti pro všechny odpovídající si úsečky stejný.



Obrázek 8 - Útvary, které nejsou podobné

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Na obrázku č. 9 jsou vyobrazeny dva ostroúhlé trojúhelníky. Při ověřování podobnosti trojúhelníků se zadanými rozměry všech stran se seřadí tyto strany dle délky, protože největší strana případně odpovídá největší straně, nejmenší strana nejmenší straně a zbývající strany by také měly tvořit odpovídající si dvojici. Platí-li, že poměry délek odpovídajících si stran se sobě rovnají, jsou trojúhelníky podobné (viz větu o podobnosti trojúhelníků na str. 27). V situaci na obrázku 9 jsou poměry odpovídajících si stran následující: $\frac{40}{24{,}5}, \frac{36{,}2}{20{,}1}, \frac{30}{19{,}5}$. Protože platí $\frac{36{,}2}{20{,}1} > \frac{30}{19{,}5}$, nejsou trojúhelníky podobné.



Obrázek 9 - Trojúhelníky

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Podobnost útvarů v rovině je binární relací R na množině M všech rovinných útvarů, protože množina R tvořená všemi navzájem podobnými rovinnými útvary je podmnožinou $M \times M$. Tato relace je reflexivní, protože každý útvar je shodný sám se sebou, a tedy je i podobný sám sobě.

Podobnost je symetrická relace. Je-li jeden útvar podobný druhému, pak je druhý podobný prvnímu. Z toho důvodu se místo „U_2 je podobný U_1“ používá „útvary U_1, U_2 jsou podobné“ a odpovídá tomu i symbol „$\sim$“, který se pro vyjádření podobnosti používá. Slovní obrat „U_2 je podobný U_1“ je nezbytné používat, pokud je požadováno upřesnit s jakým poměrem podobnosti je útvar U_2 podobný útvaru U_1.

Podobnost útvarů je tranzitivní relace. Pro jakoukoli trojici útvarů z množiny R totiž platí: je-li první útvar podobný druhému a druhý třetímu, pak je první útvar podobný třetímu.

Podobnost je tedy relací ekvivalence, která rozloží množinu $M \times M$ na třídy navzájem podobných rovinných útvarů. V každé takové třídě lze vybrat rovinný útvar, jehož zmenšením nebo zvětšením a „přemístěním“ lze získat jakýkoli rovinný útvar ze stejné třídy. Zmenšování a zvětšování zajišťuje stejnolehlost, přemístění lze provést pomocí shodného zobrazení. Z toho důvodu bývá stejnolehlost zařazována do učiva ZŠ alespoň jako rozšiřující učivo.

V základním učivu žáci zvětšení nebo zmenšení útvaru určí z poměru podobnosti dvou útvarů a geometricky ho umí provést s pomocí úseček.

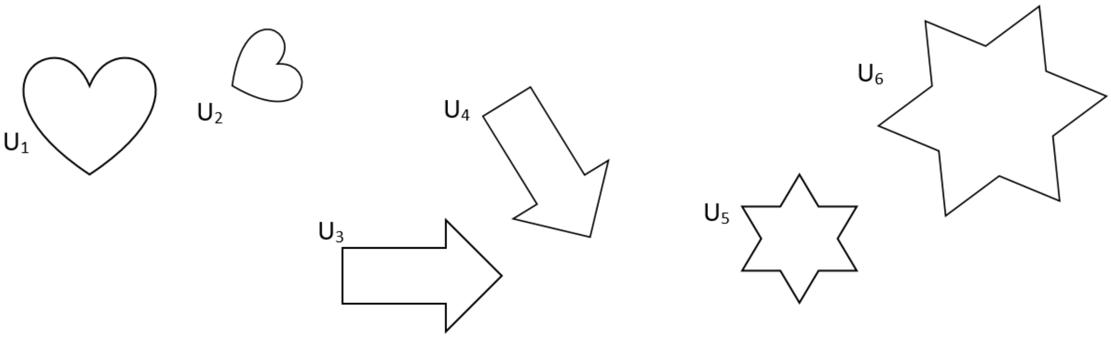
Definice: Poměr podobnosti $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vyjadřuje přímou úměru délek odpovídajících úseček.

Je-li $k > 0$, jedná se o zvětšení.

Je-li $k = 1$, jedná se o zvláštní případ podobnosti, a to shodnost.

Je-li $k < 1$, jedná se o zmenšení. [15, str. 43]

Na obrázku č. 10 jsou zobrazeny celkem tři dvojice podobných útvarů. Útvar U_2 je zmenšením útvaru U_1, útvar U_6 je zvětšením útvaru U_5 a útvary U_3 a U_4 jsou shodné.



Obrázek 10 - Dvojice podobných útvarů

(Zdroj: vlastní zpracování v programu LibreOffice Draw)

V rámci rozšířeného učiva v učebnici [13, str. 78] si žáci osvojují poznatky o obsazích podobných útvarů.

Věta: Jsou-li útvary U_1 a U_2 podobné s poměrem podobnosti k, potom pro jejich obsahy S_1 a S_2 platí: $\frac{S_2}{S_1} = k^2$ neboli $S_2 = k^2 \cdot S_1$

Na středních školách se analogicky vyučuje věta týkající se objemů těles[2].

Na základní škole se zpravidla postupuje při výkladu učiva od konkrétního k obecnému. V sedmém ročníku se žáci učí o shodných útvarech, poté následuje zobrazování v některých shodných zobrazeních (např. osová souměrnost, středová souměrnost apod.). I v případě podobnosti se v 9. ročníku hovoří nejdříve o podobných útvarech a poté v rámci rozšiřujícího učiva o stejnolehlosti. Na vysoké škole se naopak postupuje od obecného ke konkrétnímu. Nejdříve se definují shodná zobrazení. Následně jsou dva útvary považovány za shodné, pokud existuje shodné zobrazení, v němž je obrazem jednoho útvaru útvar druhý. Stejně se pracuje i v případě podobnosti – nejprve se definují podobná zobrazení a poté se definuje podobnost dvou geometrických útvarů, pokud existuje podobné zobrazení, jenž zobrazí útvary vzájemně na sebe[3].

Útvary, které si v zobrazení odpovídají, se nazývají vzor a obraz [16, str. 215]

[2] Věta: Jsou-li tělesa U_1 a U_2 podobná s poměrem podobnosti k, potom pro jejich objemy V_1 a V_2 platí: $\frac{V_2}{V_3} = k^3$ neboli $V_2 = k^3 \cdot V_1$

[3] Definice: Podobné zobrazení se nazývá zobrazení, které každým dvěma bodům A_1, B_1 přiřazuje body A_2, B_2 tak, že $|A_2B_2| = k \cdot |A_1B_1|$, kde kladné číslo k je pro všechny dvojice bodů stejné.

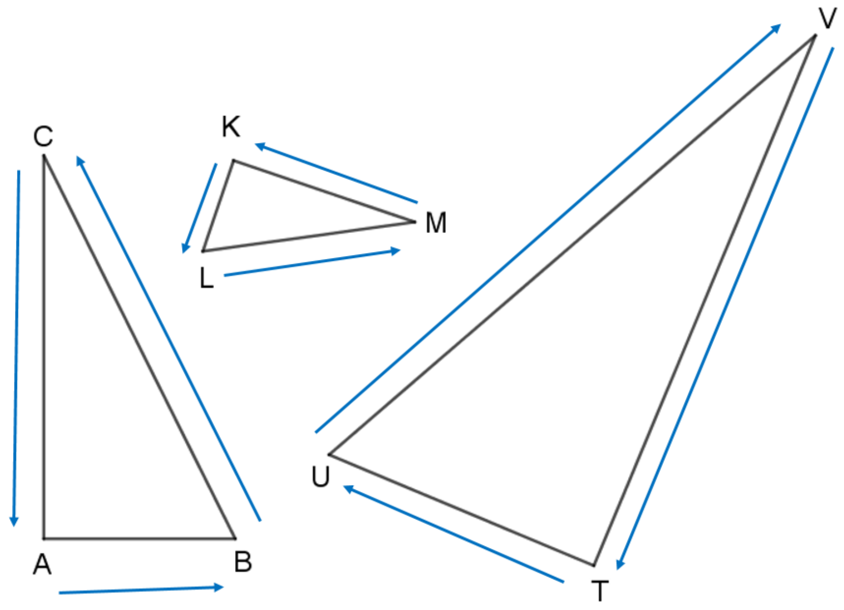
Na základní škole se žáci věnují podobnosti pouze některých útvarů. V rámci výuky zjišťují, že podobné jsou každé dvě úsečky, kružnice, kruhy, čtverce, rovnostranné trojúhelníky nebo pravidelné šestiúhelníky. Někdy se úvod týkající se podobnosti libovolných útvarů vynechává zcela a směřuje se k podobným trojúhelníkům a využití podobnosti při řešení úloh. [17, str. 35] [14, str. 24]

Jestliže se porovnávají dva rovinné útvary pomocí průsvitky, je v některých případech nutné průsvitku obrátit. Potom se tyto útvary nazývají nepřímo podobné útvary. Není-li nutné průsvitku obracet, ale pouze pootočit, potom se tyto útvary nazývají „přímo podobné útvary“. [18, str. 93]

Autoři učebnic pro nižší ročníky gymnázií [14, str. 22] vysvětlují přímo a nepřímo podobné útvary pomocí obíhání vrcholů daných útvarů. U prvního z nich je nutné zvolit určité pořadí vrcholů a toto pořadí vyznačit šipkami. U druhého útvaru se obdobně vyznačí směr odpovídajících vrcholů. Pokud jsou šipky orientovány stejným směrem, pak jsou útvary přímo podobné. V opačném případě se jedná o nepřímo podobné geometrické útvary. Na střední škole se studenti setkávají s následujícím vysvětlením:

Přímá podobnost je zobrazení, které vznikne složením přímé shodnosti a stejnolehlosti. Nepřímá podobnost je pak zobrazení, které vznikne složeném nepřímé shodnosti a stejnolehlosti. Přímo podobné útvary jsou pak takové, pro něž existuje zobrazení, které je přímou podobností a zobrazí jeden útvar na druhý. Nepřímo podobné útvary tvoří vzor a obraz v nějaké nepřímé podobnosti.

Na obrázku č. 11 lze vidět tři podobné trojúhelníky ABC, KLM a TUV se znázorněnými šipkami představující pořadí vrcholů. Trojúhelníky ABC a KLM jsou podobné přímo, trojúhelníky KLM a TUV jsou podobné nepřímo, třetí dvojice trojúhelníků ABC a TUV je také nepřímo podobná.



Obrázek 11 - Přímo a nepřímo podobné trojúhelníky

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra a MS Word)

Protože se v rámci učiva podobnosti opakuje měřítko mapy a plánu, které je standardně vyučováno v 7. ročníku, a také se pracuje s pojmy poměr a postupný poměr, jsou v následujících řádcích připomenuty definice těchto pojmů.

Definice: Podíl $a\colon b\ (a > 0, b > 0)$ se nazývá *poměr*.

Poměr lze také zapsat pomocí zlomku $\frac{a}{b}$. Oba členy poměru musí být vyjádřeny ve stejných jednotkách. [18, str. 178]

Poměr dvou čísel udává, kolikrát je jedno z čísel větší než druhé. Žáci se setkávají s poměrem i v běžném životě. Například na etiketách sirupů nebo malířských barev, kde je doporučené ředění dvou tekutin. Pokud je ředěno více směsí, pracují žáci s postupným poměrem. Jde o jeden ze způsobů porovnávání tří nebo více čísel, veličin téhož druhu. [19, str. 21]

Zobrazované předměty se musí většinou zmenšit nebo zvětšit. I v případě zobrazování zemského povrchu dochází ke zmenšení. Pokud se mají zrekonstruovat rozměry originálu, je potřebné znát, do jaké míry byl zemský povrch zmenšen. Tento poznatek dává žákům měřítko mapy, které musí uvedeno u každé mapy či plánu. Tato informace vyjadřuje poměr rozměrů na mapě / plánu a reálných rozměrů (viz příklad 4.3.1). [18, str. 184]

3.2 PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ

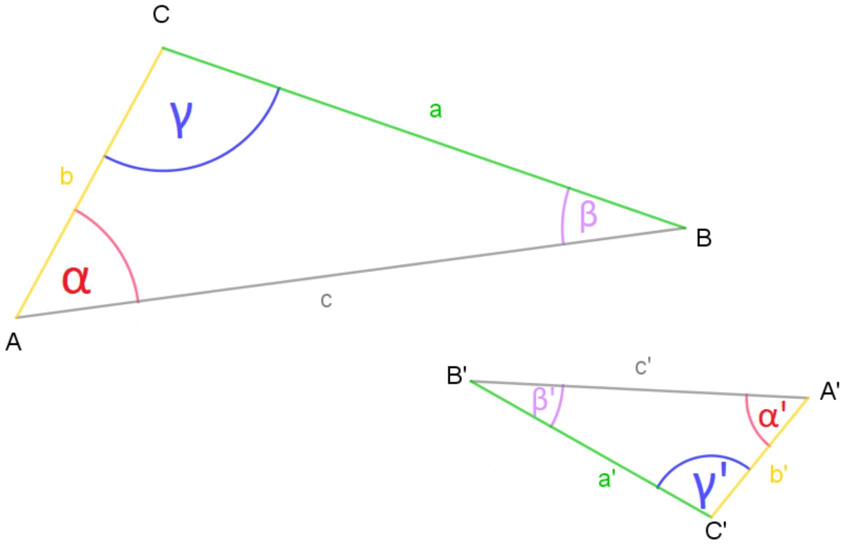
V učebnici [13, str. 79] jsou podobné trojúhelníky definovány následovně.

Definice: Trojúhelníky nazveme podobné, jestliže mají stejný poměr délek všech tří dvojic odpovídajících si stran a tři dvojice shodných vnitřních úhlů.

Skutečnost, že trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC, se zapisuje: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. Číslo k se nazývá poměr podobnosti trojúhelníků.

Ze zápisu $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ vyplývá, že vrcholu A' odpovídá vrchol A (obdobně pro vrcholy B' a C'). Straně $A'B'$ odpovídá straně AB (obdobně pro strany $B'C'$ a $A'C'$) a úhlu při vrcholu A' odpovídá úhel při vrcholu A (obdobně pro úhly při vrcholech B' a C'), přičemž jsou tyto úhly shodné ($\alpha' \cong \alpha, \beta' \cong \beta, \gamma' \cong \gamma$). Na obrázku č. 12 je zaznamenána podobnost dvou trojúhelníků. Odpovídající si prvky jsou vyznačeny stejnou barvou.

Podle předchozí definice stačí prověřit rovnost tří poměrů stran a shodnost tří dvojic úhlů, aby se mohlo prohlásit, že dva trojúhelníky jsou podobné. To je jistě vhodnější než ověřování rovností poměrů nekonečně mnoha dvojic odpovídajících si úseček podle definice podobných útvarů na str. 18.



Obrázek 12 - Podobné trojúhelníky

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

K tvrzení, že dva trojúhelníky jsou podobné, však není nutné ověřovat ani vlastnosti týkající se všech stran a všech úhlů. To je patrné z následujících vět o podobnosti trojúhelníků. [13, str. 79] [18, str. 95]

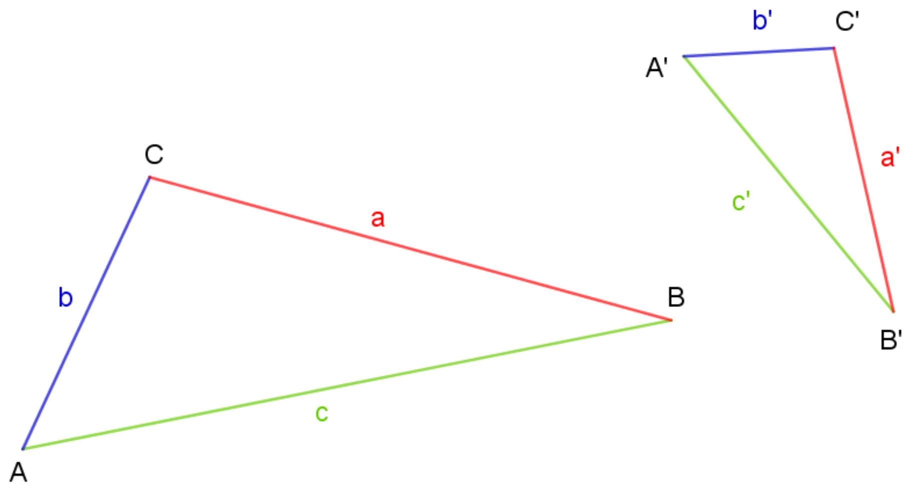
Věta sss

Věta: Dva trojúhelníky jsou podobné, právě tehdy když poměry velikostí odpovídajících si stran trojúhelníků se sobě rovnají.

Důkaz: Nechť jsou dány dva trojúhelníky ABC, A'B'C', pro něž platí $\frac{A\prime B\prime}{AB} = \frac{A\prime C\prime}{AC} = \frac{B\prime C\prime}{BC} = k$. Nechť jsou dále na polopřímkách AB a AC sestrojeny body B" a C" tak, že platí $AB'' \cong A'B'$ a $AC'' \cong A'C'$. Budiž H stejnolehlost se středem v bodě A, která převede bod B v bod B" a bod C na bod C". Tato stejnolehlost má koeficient $k = \frac{A\prime B\prime}{AB}$. Z věty[4] pak plyne $|B''C''| = |k| \cdot |BC|$, neboli $B''C'' \cong B'C'$. Podle věty sss o shodnosti trojúhelníků[5] jsou trojúhelníky AB"C" a $AB'C'$ shodné. To znamená, že podle věty[6] existuje právě jedno zobrazení z, které převede body A', B', C' v body A, B", C". Podobnost $z^{-1}H$ zobrazí body A, B, C na body A', B', C'. Tímto je věta dokázána. (Upraveno podle [20, str. 44])

Na obrázku č. 13 tedy odpovídá strana a straně a' (červeně), straně b odpovídá strana b' (modře) a straně c odpovídá strana c' (zeleně). Z toho vyplývá: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Rovnost poměrů odpovídajících si stran můžeme zapsat i takto: $\frac{a\prime}{a} = \frac{b\prime}{b} = \frac{c'}{c} = k$



Obrázek 13 - Podobné trojúhelníky dle věty sss

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad na ověření podobnosti trojúhelníků pomocí věty sss se nachází v kapitole č. 4.2.

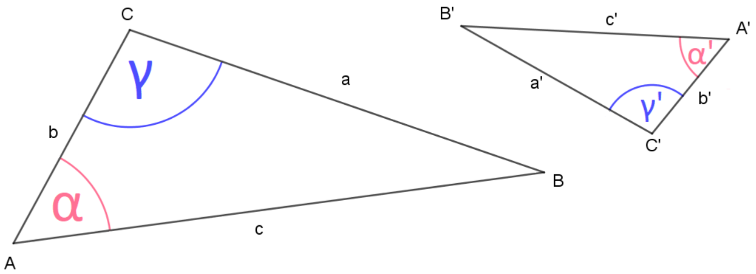
[4] Věta: Ve stejnolehlosti $H_{(S,k)}$ je obrazem úsečka AB úsečka $A'B'$, pro kterou platí: $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.
[5] Věta: Dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují ve všech třech odpovídajících si stranách.
[6] Věta: Nechť jsou dány dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ pro něž platí: $AB \cong A'B', BC \cong B'C', AC \cong A'C'$. Pak existuje právě 1 shodné zobrazení v rovině převádějící bod A v bod A', bod B v bod B' a bod C v bod C'.

Věta uu

Věta: Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když se shodují ve dvou vnitřních úhlech. [15, str. 46]

Důkaz: Nechť jsou dány dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ takové, že úhly při vrcholech B a B' jsou shodné a také úhly při vrcholech A a A' jsou shodné. Nechť jsou dále sestrojeny na polopřímkách AB a AC body B'' a C'' tak, že platí $AB'' \cong A'B'$ a $AC'' \cong A'C'$. Podle věty sus o shodnosti trojúhelníků[7] platí, že trojúhelníky $AB''C''$ a $A'B'C'$ jsou shodné. To znamená, že dle věty o shodných zobrazení (pozn. 6 na str. 27), existuje právě jedno zobrazení z, které převede body A', B', C' v body A, B'', C''. Stejnolehlost H se středem v bodě A, která převede bod B na bod B'', zobrazí bod C na bod C_x, jenž leží na polopřímce AC. Věta o stejnolehlosti úhlů[8] potvrzuje, že $\sphericalangle C_xB''A \cong \sphericalangle CBA$. Dále také platí: $\sphericalangle C''B''A \cong \sphericalangle C'B'A' \cong \sphericalangle CBA$ a tedy $\sphericalangle C_xB''A \cong \sphericalangle C''B''A$. Dle věty usu o shodnosti trojúhelníků[9] platí, že trojúhelníky $AB''C''$ a $AB''C_x$ jsou shodné, tedy $AC_x \cong AC''$. Protože C'' i C_x leží na téže polopřímce AC, platí $C'' = C_x$. Podobnost $z^{-1}H$ tedy zobrazí body A, B, C na body A', B', C'. Tímto je věta dokázána. (Upraveno podle [20, str. 43])

Z obrázku č. 14 lze vyčíst, že trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné, neboť se shodují ve dvou vnitřních úhlech $\alpha' \cong \alpha, \gamma' \cong \gamma$ (vyznačeny modře a růžově). Z toho vyplývá: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.



Obrázek 14 - Podobné trojúhelníky dle věty uu

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad na ověření podobnosti trojúhelníků pomocí věty uu se nachází v kapitole č. 4.2.

[7] Věta: Dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují ve dvou odpovídajících si stranách a úhlu těmito stranami sevřeném.

[8] Věta: Ve stejnolehlosti je obrazem polopřímky AB polopřímka $A'B'$ a obrazem konvexního úhlu AVB je konvexní úhel $A'V'B'$ s daným úhlem shodný.

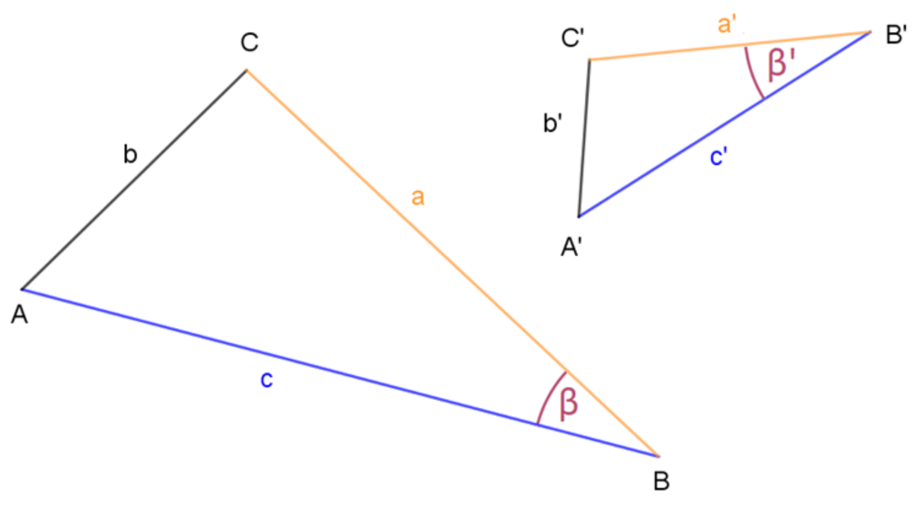
[9] Dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném.

Věta sus

Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když se shodují v jednom vnitřním úhlu a poměry velikosti odpovídajících si stran přilehlých k tomuto úhlu se rovnají.

Důkaz: Nechť jsou dány dva trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ pro něž platí $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = k$ a úhly při vrcholu A a A' jsou shodné. Nechť jsou dále na polopřímkách AB a AC sestrojeny body B'' a C'' tak, že platí $AB'' \cong A'B'$a $AC'' \cong A'C'$. Z věty o shodnosti trojúhelníků (pozn. 9 na str. 29), vyplývá, že trojúhelníky $AB''C''$ a $A'B'C'$ jsou shodné. To znamená, dle věty o shodných zobrazení (pozn. 6 na str. 27), že existuje právě jedno zobrazení z, které převede body A', B', C' v body A, B'', C''. Stejnolehlost $H_{(A,k)}$ převede bod B na bod B'' a bod C zobrazí na bod C''. Podobnost $z^{-1}H$ tedy zobrazí body A, B, C na body A', B', C'. Tímto je věta dokázána. (Upraveno podle [20, str. 43])

Opět lze podmínky věty sus o podobnosti zapsat pomocí velikostí. Délky úseček vyznačených oranžově resp. modře na obrázku č. 15 mají stejný poměr podobnosti $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = k, \;\; k \in \mathbb{R}^+$. Červeně vyznačené úhly mají stejnou velikost $\beta = \beta'$.



Obrázek 15 - Podobné trojúhelníky dle věty sus

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad na podobnost trojúhelníků dle věty sus se nachází v kapitole č. 4.2.

Důsledky vět o podobnosti trojúhelníků:

Věty o podobnosti trojúhelníků lze konkretizovat pro shodné trojúhelníky v případě, pokud koeficient podobnosti k je roven 1 (viz 2.1). Pokud se jedná o speciální typ trojúhelníku (pravoúhlý či rovnoramenný), je možné věty o podobnosti upravit.

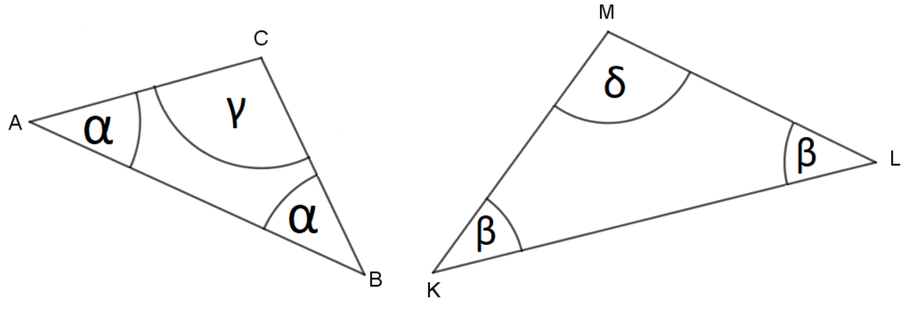
Všechny pravoúhlé trojúhelníky mají stejně velký úhel ležící proti přeponě. Tento úhel je pravý úhel a zbylé dva úhly v těchto trojúhelnících jsou ostré. Pro pravoúhlé trojúhelníky proto stačí, aby byla splněna alespoň jedna rovnost zbývajících úhlů. Následující věta vyplývá z věty uu.

- Věta: Shodují-li se dva pravoúhlé trojúhelníky v ostrém vnitřním úhlu, jsou podobné. [14, str. 39]

V rovnoramenných trojúhelnících jsou úhly při základnách shodné. Na obrázku č. 16 jsou vyobrazeny dva trojúhelníky – ABC a EFG. Úhly u základen jsou v trojúhelníku ABC označeny písmenem α, v trojúhelníku EFG jsou označeny β. Úhel u hlavního vrcholu trojúhelníku ABC je nazván γ, v trojúhelníku EFG δ. Pokud platí $\alpha = \beta$, pak jsou trojúhelníky podobné podle věty uu. Podobnost trojúhelníků bude platit i v případě, že se shodují úhly u hlavních vrcholů.

Součet úhlů v trojúhelníku je 180 ° a proto platí: $\gamma = 180° - 2 \cdot \alpha$ a $\delta = 180° - 2 \cdot \beta$. Pokud platí, že $\gamma = \delta$, pak $180° - 2 \cdot \alpha = 180° - 2 \cdot \beta$. Z toho vyplývá, že $\alpha = \beta$. Pro podobnost rovnoramenných trojúhelníků stačí shodnost úhlů při základnách nebo shodnost úhlů při hlavních vrcholech. I tyto dvě věty vycházejí z věty uu.

- Věta: Shodují-li se dva rovnoramenné trojúhelníky v úhlu při základně, jsou podobné. [14, str. 42]
- Věta: Shodují-li se dva rovnoramenné trojúhelníky v úhlu při hlavním vrcholu, jsou podobné. [14, str. 42]



Obrázek 16 - Podobnost rovnoramenných trojúhelníků

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

3.3 STEJNOLEHLOST

Základním podobným zobrazením je stejnolehlost. Na základních školách je však stejnolehlost zařazena do rozšiřujícího učiva. Z tohoto důvodu není obvykle ani autory učebnic zařazována do kapitoly o podobnosti. V následujících odstavcích je shrnuta teorie o stejnolehlosti. Dále se tato práce nebude stejnolehlostí zabývat.

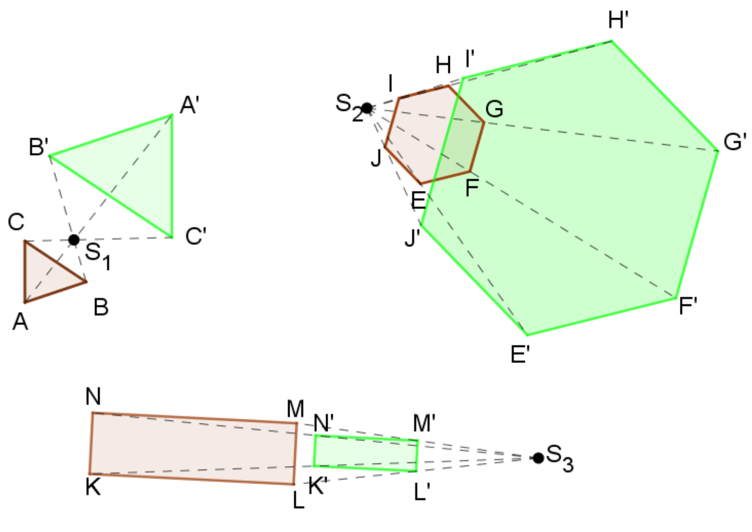
Definice: Je dán bod S a reálné číslo k $(k \neq 0)$. Stejnolehlost (homotetie) se středem S a koeficientem k je zobrazení $H_{(S,k)}$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \neq S$ bod $X‘$ tak, že platí: $|SX‘| = |k| \cdot |SX|$; přitom pro $k > 0$ leží bod $X‘$ na polopřímce SX, pro $k < 0$ je bod $X‘$ bodem polopřímky opačné.
2. bodu $X = S$ bod $X' = S$. [21, str. 161]

V učebnicích matematiky pro základní školy se obvykle nachází zjednodušená definice o stejnolehlých útvarech. Tato definice zavádí pojmy pomocí konstrukce, nikoliv prostřednictvím zobrazení.

Definice: Jsou-li dva podobné geometrické útvary U a $U‘$ umístěny tak, že spojnice všech dvojic odpovídajících si bodů útvarů U a $U‘$ procházejí týmž bodem S, říkáme, že útvary U a $U‘$ jsou stejnolehlé. Bod S nazýváme střed stejnolehlosti. [15, str. 53]

Na obrázku č. 17 je umístěno několik stejnolehlých útvarů. Stejnolehlé útvary se mohou také vzájemně překrývat.



Obrázek 17 - Dvojice stejnolehlých útvarů

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Žákům jsou zmíněny poučky o zobrazovaných útvarech ve stejnolehlosti.

- Obrazem přímky, která neprochází středem stejnolehlosti, je přímka rovnoběžná se svým vzorem.
- Obrazem přímky, která prochází středem stejnolehlosti, je přímka splývající se svým vzorem.
- Obrazem dvou rovnoběžných přímek jsou opět dvě rovnoběžky. [13, str. 89]

Na středních a vysokých školách jsou vlastnosti stejnolehlosti precizovány.

- Každé dva stejnolehlé útvary jsou podobné.
- Samodružný bod stejnolehlosti je samotný střed stejnolehlosti.
- Samodružné přímky jsou přímky, které procházejí středem stejnolehlosti.
- Obrazem libovolné přímky je v stejnolehlosti $H_{(S,k)}$ přímka, která je s danou přímkou rovnoběžná.
- Zobrazením útvaru ve stejnolehlosti se nemění jeho tvar - úsečka se zobrazí na úsečku, přímka na přímku atd. Pro velikost obrazu úsečky AB navíc platí $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$. Úsečka $A'B'$ je rovnoběžná s úsečkou AB.
- Obrazem úhlu je úhel s ním shodný.
- Pro $k = 1$ je stejnolehlost identitou. Pro $k = -1$ je stejnolehlost středová souměrnost. Tyto dvě vlastnosti představují speciální případy stejnolehlosti pro $|k| = 1$. [22, str. 121]

Na středních školách a vysokých školách je studentům dále řečena Mongeova věta o skládání stejnolehlosti $h_{1(S_1,k_1)}$ a $h_{2(S_2,k_2)}$. Pokud součin koeficientů k_1a k_2 je roven 1 a středy stejnolehlosti jsou identické, pak se jedná o identitu. V opačném případě ($S_1 \neq S_2$) vzniká translace (posunutí).

Pomocí stejnolehlosti lze zdůvodnit rozdělení úsečky v daném poměru geometrickým způsobem (viz 4.3.2), zvětšit či zmenšit útvar v daném poměru, při konstrukci trojúhelníků nebo při vepisování útvaru do jiného geometrického útvaru.

4 ÚLOHY ŘEŠENÉ S VYUŽITÍM PODOBNOSTI

V této části diplomové práce se nachází typové příklady, které žáci standardně řeší při výuce podobnosti. U úloh je uvedeno i správné řešení. Některé příklady lze však řešit i jiným než uvedeným způsobem.

Příklady jsou rozděleny do tří částí. V prvním oddíle jsou umístěny příklady na procvičení podobnosti geometrických útvarů. Právě některé z těchto úloh lze řešit pomocí poměru bez použití podobnosti. Tyto příklady lze řešit i v 7. ročníku ZŠ, kde si žáci osvojují práci s poměrem. V této kapitole se nachází i konstrukční úloha využívající podobnost. Druhá část příkladů se zabývá větami o podobnosti trojúhelníků a jejich využitím při řešení matematických úloh. Tato část se především zaměřuje na očekávaný výstup M-9-3-07: *Žák užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků.* [2, str. 37]. Do poslední části této kapitoly jsou situovány slovní úlohy a příklady na praktické využití podobnosti. V této kapitole jsou umístěny i slovní úlohy (4.3.3, 4.3.8 a 4.3.9), které byly zařazeny do výuky při souvislé pedagogické praxi na ZŠ a MŠ Švihov. Původním záměrem bylo žákům představit podobnost přímo v okolí školy. Z důvodu distanční výuky byly vymyšleny tyto úlohy, které žákům ukázaly, že podobnost lze najít i v jejich okolí.

4.1 PODOBNOST GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ

4.1.1 PŘÍKLAD Č. 1

Zadání:

Obdélník $ABCD$ $(a = 4\ cm, b = 5{,}2\ cm)$ byl zvětšen v poměru $5:2$. Určete délky stran a‘, b‘. (Upraveno podle [13, str. 77])

Úloha by mohla být zadána i v 7. ročníku, kde se pracuje s poměrem. Proto by bylo možné rozšířit úlohu na zadání: „Obdélník $ABCD$ $(a = 4\ cm, b = 5{,}2\ cm)$ byl zvětšen v poměru $5:2$. Geometricky určete délky stran a‘, b‘. Dále vypočtěte obsahy obou obdélníků. Ověřte, zda bude mít zvětšený obdélník obsah $(\frac{5}{2})^2$krát větší než původní.“

Tímto si žáci procvičí i vzorec pro obsahy podobných útvarů.

Řešení původní úlohy:

Délka strany a‘:

$$\frac{a'}{a} = \frac{5}{2}$$

$$a' = \frac{5}{2} \cdot a$$

$$a' = \frac{5}{2} \cdot 4$$

$$a' = 10\ cm$$

Délka strany b‘:

$$\frac{b'}{b} = \frac{5}{2}$$

$$b' = \frac{5}{2} \cdot b$$

$$b' = \frac{5}{2} \cdot 5{,}2$$

$$b' = 13\ cm$$

Odpověď:

Obdélník $A’B’C’D$‘ má stranu a‘ = 10 cm a strana b‘ měří 13 cm.

Řešení upraveného zadání:

Žáci by mohli tuto úlohu řešit geometricky pomocí stejnolehlosti (obrázek č. 17). Poté za pomocí pravítka změřit rozměry nového obdélníku a dále vzorcem pro výpočet obsahu obdélníku $S = a \cdot b$ vypočítat obsah původního a nového obdélníku. Obsahy obdélníků lze vypočítat i v programu GeoGebra. (S_M - obsah menšího obdélníku, S_V - obsah většího obdélníku)

$$S_M = 4 \cdot 5{,}2$$

$$S_M = 20{,}8\ cm^2$$

$$S_V = 10 \cdot 13$$

$$S_V = 130\ cm^2$$

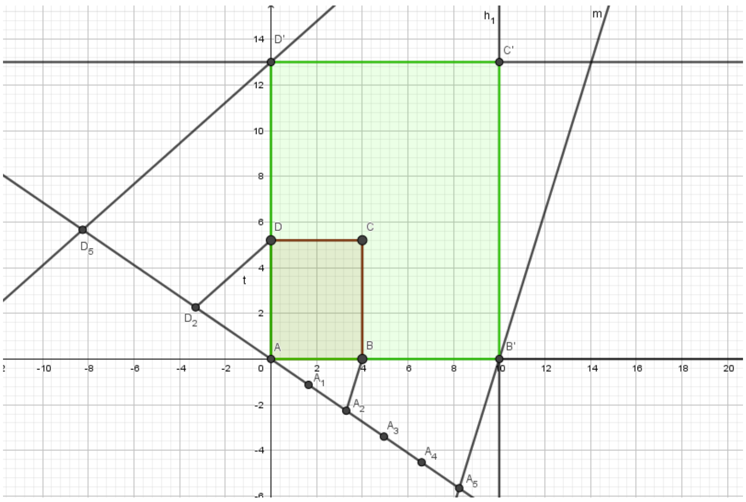
Poslední úkol je zjistit, kolikrát je větší obsah nového obdélníku než původní menší obdélník. A zjistit, zda tato hodnota je rovna $(\frac{5}{2})^2$.

$$\frac{130}{20{,}8} = 6{,}25$$

$$(\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4} = 6{,}25$$

Odpověď:

Hodnoty se rovnají, větší obdélník má $(\frac{5}{2})^2$krát větší obsah než původní obdélník.



Obrázek 18 - Geometrické řešení úlohy

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

4.1.2 PŘÍKLAD Č. 2

Zadání:

Rozhodni, zda jsou obdélníky $KLMN$ a $K'L'M'N'$ podobné. Pokud ano, urči poměr podobnosti. $|KL| = 2{,}5\ m, |LM| = 4\ m, |K'L'| = 0{,}5\ m, |L'M'| = 0{,}8\ m.$

(Převzato z [17, str. 33])

Řešení:

Poměr podobnosti stran KL a $K'L'$

$$\frac{|K'L'|}{|KL|} = k_1$$

$$\frac{0{,}5}{2{,}5} = k_1$$

$$k_1 = \frac{1}{5}$$

Poměr podobnosti stran LM a $L'M'$

$$\frac{|L'M'|}{|LM|} = k_2$$

$$\frac{0{,}8}{4} = k_2$$

$$k_2 = \frac{1}{5}$$

$$k_1 = k_2$$

Odpověď:

Obdélníky $KLMN$ a $K'L'M'N'$ jsou podobné s poměrem podobnosti $\frac{1}{5}$.

4.1.3 PŘÍKLAD Č. 3

Zadání:

Obsahy dvou kruhů jsou v poměru $9:4$. Menší kruh má průměr 20 cm. Vypočítejte obvod většího kruhu. (Převzato z [13, str. 91])

Řešení:

Obsahy dvou kruhů jsou v poměru $9:4$. Tedy $S_1(k_1):S_2(k_2) = 9:4$.

Pomocí vzorce pro obsahy geometrických útvarů vypočítáme poměr podobnosti k:

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2$$

$$k^2 = \frac{9}{4}$$

$$k = \frac{3}{2}$$

Průměr kruhu S_2 je roven 20 cm. Není nutné vypočítat poloměr kruhu S_2. Lze využít vzorec pro obvod kruhu pomocí průměru kruhu.

Výpočet poloměru kruhu S_1:

$$d_1 = d_2 \cdot k$$

$$d_1 = 20 \cdot \frac{3}{2}$$

$$d_1 = 30\ cm$$

Výpočet obvodu většího kruhu:

$$o_1 = \pi \cdot d_1$$

$$o_1 = \pi \cdot 30$$

$$o_1 \doteq 94\ cm$$

Odpověď:

Obvod většího kruhu je 94 cm.

4.1.4 PŘÍKLAD Č. 4

Zadání:

Kolikrát se zmenší objem krychle, zmenšíme-li délku hrany v poměru podobnosti $\mathrm{k} = \frac{1}{2}$?

(Převzato z [15, str. 44])

Řešení:

Objem krychle se vypočte pomocí vzorce $V = a^3$, pokud se označí hrana původní krychle a, pak je objem této krychle roven $V_1 = a^3$. U nové krychle se zmenší hrana v poměru podobnosti $\frac{1}{2}$. a proto bude mít délku hrany $\frac{a}{2}$. Po dosazení této délky hrany do vzorce pro výpočet objemu krychle je vypočten objem nové vytvořené krychle:

$$V_2 = (\frac{a}{2})^3 = \frac{a^3}{8}.$$

V posledním kroku je zapotřebí porovnat objemy krychlí:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3}{\frac{a^3}{8}} = 8.$$

Úlohu lze řešit i úvahou, pokud si žáci představí krychli a položí si otázku, jak se zvětší objem krychle v případě zdvojnásobení délky hrany. K původní menší krychli je zapotřebí přidat dalších sedm stejných krychlí, aby se utvořila krychle s dvojnásobnou hranou. Tato nová krychle bude mít objem odpovídající osminásobku původní krychle.

Odpověď:

Objem krychle se zmenšil 8 krát.

4.1.5 PŘÍKLAD Č. 5

Zadání:

Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li $|BC| = |CD| = |AD|, |AB| = 6\ cm\ a\ v = 4\ cm$. (Převzato z [23, str. 251])

Řešení:

Tato úloha může být pro žáky těžší. Je vhodné ji zařadit jako rozšiřující učivo pro žáky se zájmem o matematiku.

Rozbor: Lichoběžník je osově souměrný, osa strany AB je také osou strany CD. Pokud se označí bod S jako střed strany CD, potom $\triangle SCB$ je podobný jakémukoliv trojúhelníku $SC'B'$, pro nějž platí: $|SC'|:|C'B'| = 1:2$. Bod C‘ tak bude ležet například ve vzdálenosti 1 cm od bodu S na přímce rovnoběžné s úsečkou AB. Bod B‘ bude průsečíkem kružnice $k(C'; 2\ cm)$ a polopřímky SB.

Zápis konstrukce:

1. $AB; |AB| = 6\ cm$

2. $p; p||AB \wedge v(p; AB) = 4\ cm$

3. o_{AB}

4. $S; S \in o_{AB} \cap p$

5. $SC'; |SC'| = 1\ cm\ \wedge SC'||AB$

6. $k; k(C'; 2\ cm)$

7. $\mapsto SB$

8. $B'; B' \in \mapsto SB \cap k$

9. $\triangle SB'C'$

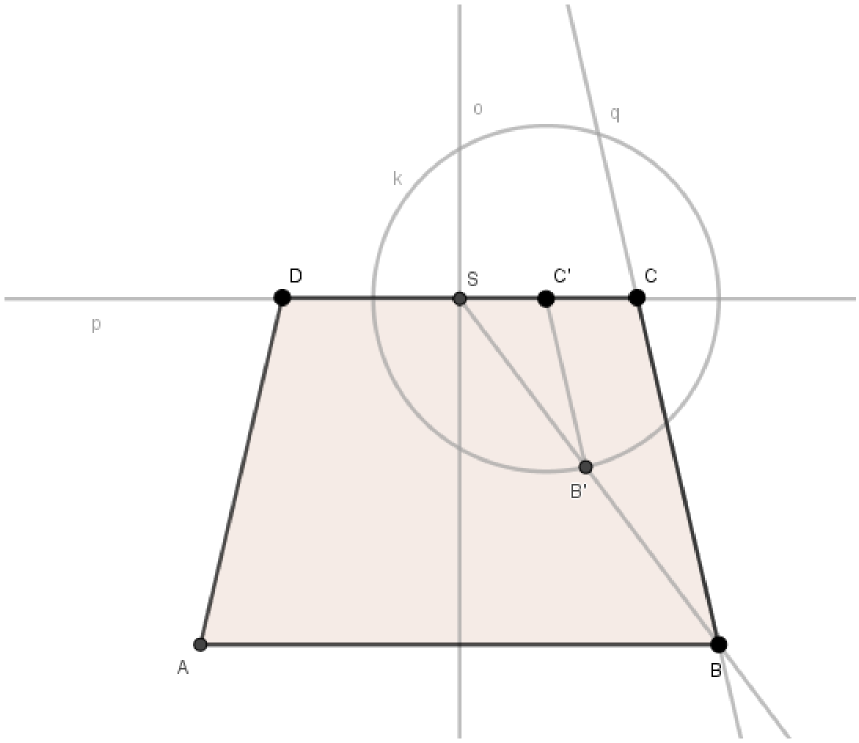
10. $q; q\ ||B'C' \wedge B \in q$

11. $C; C \in q \cap p$

12. $D;\ O(o_{AB}): C \to D$

13. $lichoběžník\ ABCD$

Konstrukce:



Obrázek 19 - Konstrukce příkladu č. 5

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Odpověď:

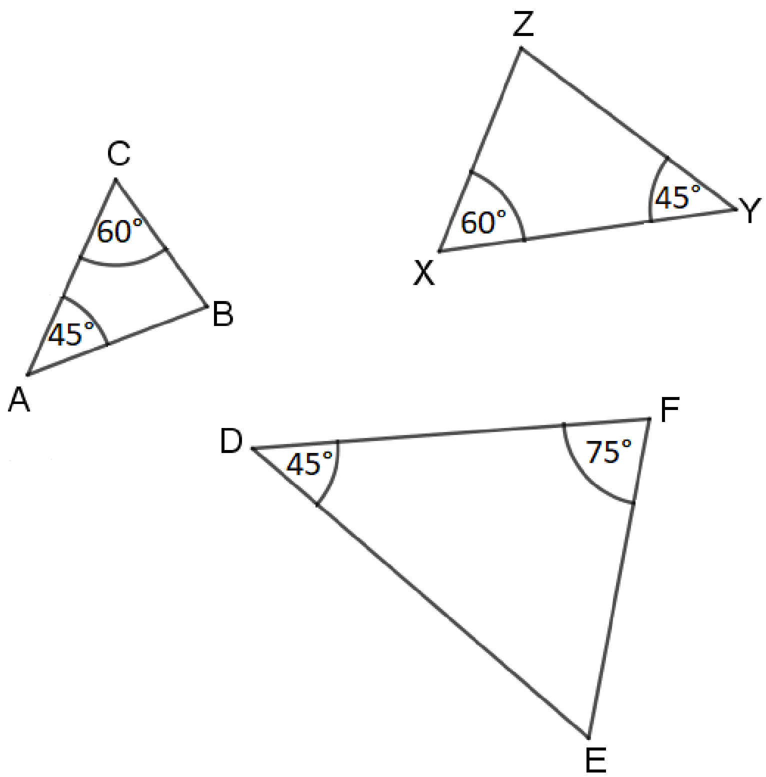
Lichoběžník lze zkonstruovat. Existuje jediné řešení v dané polorovině.

4.2 PODOBNÉ TROJÚHELNÍKY

4.2.1 PŘÍKLAD Č. 1

Zadání:

Na obrázku č. 20 jsou trojúhelníky ABC, DEF a XYZ. Zjistěte, které z nich jsou podobné. Pokud jsou podobné, tak podle které věty o podobnosti trojúhelníků. Podobnost trojúhelníků zapište. [vlastní]



Obrázek 20 - Zadání k příkladu č. 1

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Řešení:

Neboť jsou v trojúhelníku zadány velikosti úhlů, řeší se tento příklad pomocí věty uu: *Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když se shodují ve dvou vnitřních úhlech.* [15, str. 46]

U trojúhelníků ABC a YZX jsou zadány dva vnitřní úhly, které se shodují. V trojúhelníku DEF jsou uvedeny dva vnitřní úhly, pouze jeden se však shoduje s úhly ve dvou předchozích trojúhelnících. Z tohoto důvodu je nutné vypočítat velikost zbývajícího úhlu a ověřit tím, zda se shoduje či nikoliv s velikostí zbývajících úhlů v trojúhelnících ABC a YZX.

$$|\measuredangle DEF| = 180° - 45° - 75°$$

$$|\measuredangle DEF| = 60°$$

Z věty vyplývá podobnost všech trojúhelníků, neboť úhlu při vrcholu E odpovídá úhel při vrcholu X a vrcholu C a obdobně úhel při vrcholu D odpovídá úhlu při vrcholu Y a vrcholu A. Také se shodují úhly při vrcholech F, Z, B. Lze tedy zapsat:

$$\triangle ABC \sim \triangle YZX \sim \triangle DFE.$$

Odpověď:

Trojúhelníky na obrázku č. 20 jsou podobné neboli: $\triangle ABC \sim \triangle YZX \sim \triangle DFE$.

4.2.2 PŘÍKLAD Č. 2

Zadání:

Jsou trojúhelníky $A'B'C'$ a ABC jsou podobné? Zapiš, pomocí které věty o podobnosti to můžeš ověřit, a urči poměr podobnosti k.

$$a = 20\ mm, b = 26\ mm, c = 24\ mm, a' = 60\ mm, b' = 78\ mm, c' = 72\ mm$$

(Upraveno podle [17, str. 39])

Řešení:

Protože jsou zadány rozměry stran trojúhelníků, podobnost se bude ověřovat pomocí věty sss: *Dva trojúhelníky jsou podobné, právě tehdy když poměry velikostí odpovídajících si stran trojúhelníků se sobě rovnají.* [15, str. 45] V zadání úlohy je navíc vyjádřena informace, která strana odpovídá které. Pro řešitele je proto úloha lehčí, neboť počítají pouze poměry.

Výpočet poměru podobnosti odpovídajících si stran:

$$\frac{a'}{a} = \frac{60}{20} = 3$$

$$\frac{b'}{b} = \frac{78}{26} = 3$$

$$\frac{c'}{c} = \frac{72}{24} = 3$$

Trojúhelníky jsou podobné, neboť mají odpovídající si strany shodný poměr podobnosti.

Odpověď:

Trojúhelníky $A'B'C'$ a ABC jsou podobné, $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

4.2.3 PŘÍKLAD Č. 3

Zadání:

Doplň další údaje o trojúhelníku A'B'C' tak, aby trojúhelníky A'B'C' a ABC byly podobné; zapiš, kterou větu o podobnosti trojúhelníků využiješ.

$$a = 22\ cm, \beta = 110°, c = 34\ cm, a' = 44\ cm$$

(Převzato z [17, str. 39])

Řešení:

Jelikož jsou dány rozměry dvou stran a jednoho úhlu, bude se používat věta sus o podobnosti trojúhelníků: *Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když se shodují v jednom vnitřním úhlu a poměry velikosti odpovídajících si stran přilehlých k tomuto úhlu se rovnají.* [15, str. 46]

Nejdříve je zapotřebí vypočítat poměr podobnosti trojúhelníků $A'B'C'$ a ABC:

$$k = \frac{a'}{a}$$

$$k = \frac{44}{22}$$

$$k = 2$$

Výpočet délky strany c':

$$\frac{c'}{c} = k$$

$$c' = k \cdot c$$

$$c' = 2 \cdot 34$$

$$c' = 68\ mm$$

Podobnost zachovává velikost úhlů, proto úhel β' je shodný s úhlem β.

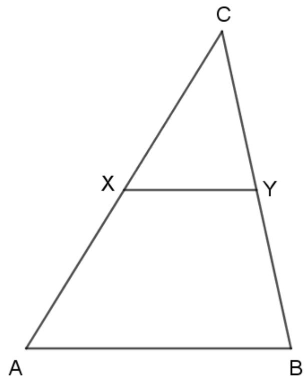
Odpověď:

Trojúhelník $A'B'C'$ má tyto rozměry: $a' = 44\ cm, \beta' = 110°, c' = 68\ cm$.

4.2.4 PŘÍKLAD Č. 4

Zadání:

Trojúhelníky ABC a XYC jsou podobné. Bod X je střed úsečky AC. Určete číslo k tak, aby platilo: $|XY| = k \cdot |AB|$. (Upraveno podle [14, str. 25].)



Obrázek 21 - Zadání k příkladu č. 4

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Řešení:

Délka strany AB se označí neznámou konstantou c. Bod X je střed úsečky AC. Úsečka XY je střední příčkou trojúhelníku ABC a je rovna polovině délky úsečky AB, tedy $\frac{c}{2}$.

Vložení konstant do vzorce a vypočtení poměru podobnosti:

$$|XY| = k \cdot |AB|$$

$$\frac{c}{2} = k \cdot c$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Odpověď:

Poměr podobnosti trojúhelníků ABC a XYC je $\frac{1}{2}$.

4.2.5 PŘÍKLAD Č. 5

Zadání:

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li $|AB|:|BC| = 1:2, |AB|:|AC| = 2:3$ a $t_c = 4\ cm$. (Převzato z [23, str. 251])

Řešení:

Rozbor: Z daných dvou poměrů lze vypočítat postupný poměr: $|AB|:|BC|:|AC| = 2:4:3$. Lze tedy sestrojit trojúhelník $A'B'C'$, který bude mít délky stran v tomto poměru (např. $|A'B'| = 4\ cm, |B'C'| = 8\ cm, |A'C'| = 6\ cm$) s těžnicí $t_c{}'$. Poté se sestrojí těžnice t_c s délkou 4 cm.

Postup konstrukce:

1. $A'B'; |A'B'| = 4\ cm$

2. $k; k(A'; 6\ cm)$

3. $l; l(B'; 8\ cm)$

4. $C'; C' \in k \cap l$

5. $\triangle\ A'B'C'$

6. $S; S - střed\ úsečky\ AB$

7. $\mapsto SC'$

8. $m, m(S; 4\ cm)$

9. $C, C \in \mapsto SC' \wedge m$

10. $\mapsto CX, \mapsto CX || C'A'$

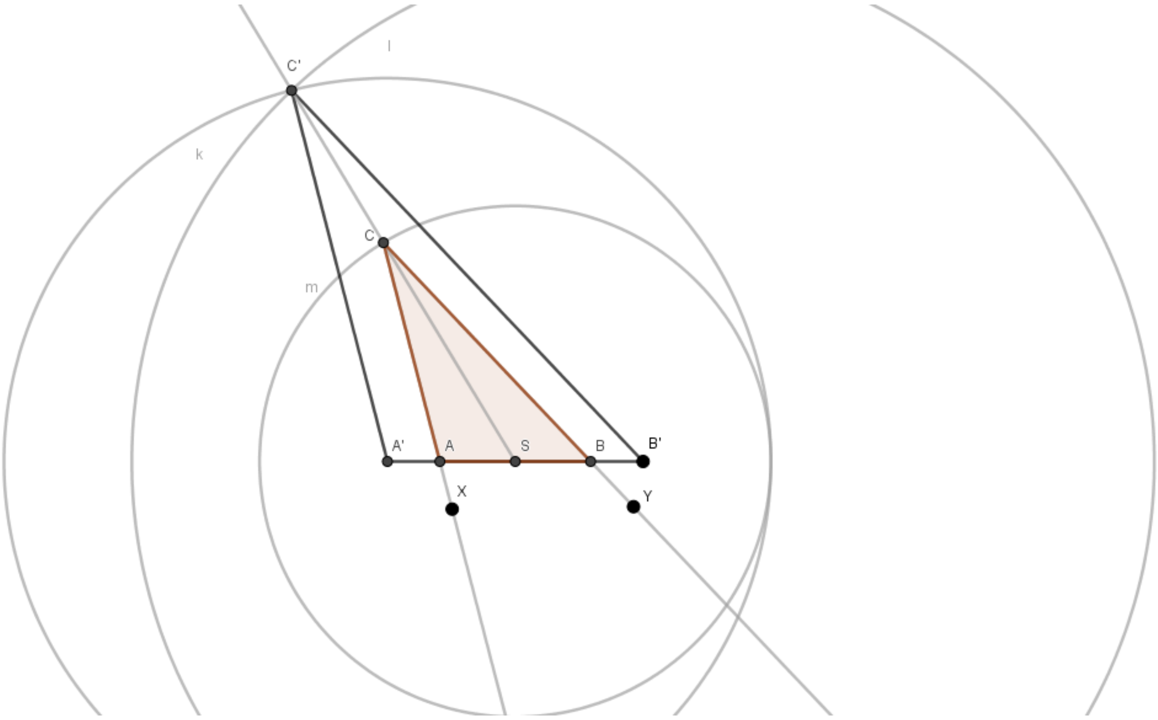
11. $A; A \in \mapsto CX \wedge AB$

12. $\mapsto CY, \mapsto CY || C'B'$

13. $B; B \in \mapsto CY \wedge AB$

14. $\triangle\ ABC$

Konstrukce:



Obrázek 22 - Konstrukce příkladu č. 5

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

<u>Odpověď:</u>

Trojúhelník lze zkonstruovat. Existuje jediné řešení v dané polorovině.

4.3 SLOVNÍ ÚLOHY S VYUŽITÍM PODOBNOSTI

4.3.1 PŘÍKLAD Č. 1

Zadání:

Určete měřítko plánku bytu, jestliže stěna dlouhá 4,20 m má na plánku délku 12 cm. (Převzato z [15, str. 43])

Tento příklad by mohl být zadán i v 7. ročníku, ve kterém se žáci učí pracovat s měřítkem plánu. Tato typová úloha se však vyskytuje v mnohých učebnicích matematiky pro 9. ročník. Z tohoto důvodu byla zařazena i do této kapitoly. Některé pracovní sešity pracují s měřítkem plánu bytu při plánování ložnice - žákovým úkolem je sestavit návrh rozmístění nábytku v ložnici. [24. str. 77]

Řešení:

Převedení délky stěny na stejné jednotky: 4 m 20 cm = 420 cm

Rozměry na plánku …………… 12 cm

Rozměry ve skutečnosti …. 420 cm

Výpočet měřítka $420 : 12 = 35$

Měřítko 1:35

Odpověď:

Měřítko plánku bytu je 1:35.

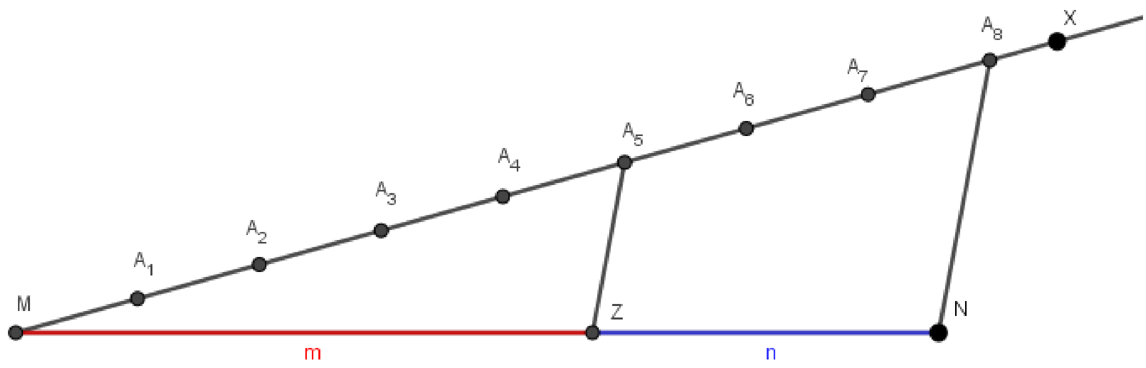
4.3.2 PŘÍKLAD Č. 2

Zadání:

Rozděl úsečku MN délky 7,3 cm v poměru $5:3$. (Upraveno podle [17, str. 43])

Řešení:

Nejdříve je nutné narýsovat úsečku dlouhou 7,3 cm. Poté se narýsuje polopřímka AX, která svírá s úsečkou MN libovolný ostrý úhel. Na této polopřímce se vyznačí n stejných úseček (v tomto případě 8 úseček, neboť $5+3=8$) o libovolné vhodné délce d. Bod A_8 posledního dílu se spojí s bodem N. Koncovým bodem A_5 je vedena rovnoběžka s přímkou NA_8. Tímto postupem je úsečka MN rozdělena v poměru $5:3$.



Obrázek 23 - Grafické řešení příkladu č. 2

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Postup je založen na podobnosti trojúhelníků. Trojúhelník MZA_5 je podobný trojúhelníku MNA_8 podle věty uu o podobnosti trojúhelníků:

- Trojúhelníky se shodují ve společném úhlu u vrcholu M
- Trojúhelníky se shodují v úhlu u vrcholu Z a N (souhlasné úhly)

4.3.3 PŘÍKLAD Č. 3

Zadání:

Deváťák Petr navštívil o prázdninách hrad Švihov, kde se mu líbil výhled z věže. Bohužel si ale nezapamatoval její výšku. Venku však svítilo Slunce a on tak mohl zjistit, že jeho stín měří 3 metry a stín hradní věže je o 62 metrů delší. Jak vysoká je hradní věž, když Petr měří 180 cm? [vlastní]

Řešení:

Ve slovní úloze jsou skryty dva podobné trojúhelníky. První trojúhelník má délky odvěsen - neznámou výšku hradní věže (x) a délku stínu věže (65 m). Druhý trojúhelník má následující délky odvěsen - výšku Petra (180 cm = 1,8 m) a délku jeho stínu (3 m). Jelikož hradní věž i Petr svírají se zemským povrchem pravý úhel, lze úlohu vyřešit pomocí věty sus.

Poměr výšky hradní věže a Petra a délky stínů:

$$\frac{x}{1{,}8} = \frac{65}{3}$$

$$x = \frac{65}{3} \cdot 1{,}8$$

$$x = 39\ m$$

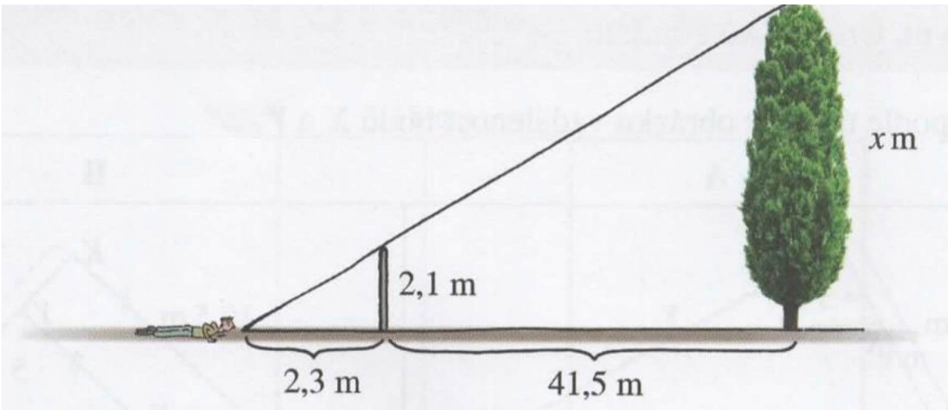
Odpověď:

Věž hradu Švihov měří 39 m.

4.3.4 PŘÍKLAD Č. 4

Zadání:

Jarda chtěl změřit výšku stromu. Bohužel ale zrovna bylo pod mrakem, a proto musel vymyslet jiný způsob měření. Zabodl do země svislou tyč a našel místo, ze kterého jedním okem viděl od země vršek stromu přesně za horním koncem tyče. Změřil, že vzdálenost oka od tyče je 2,3 m. Vzdálenost tyče od stromu je 41,5 m a výška tyče 2,1 m. Urči výšku stromu. (Upraveno podle [17, str. 45])



Obrázek 24 - Obrázek dokreslující zadání příkladu č. 4

(Zdroj: [17, str. 45])

Řešení:

Z obrázku lze vyčíst dva podobné trojúhelníky. Menší trojúhelník má odvěsny - vzdálenost měřící tyče od pozorovatele (2,3 m) a výška tyče (2,1 m). Větší trojúhelník má pak odvěsny - vzdálenost stromu od pozorovatele ($41{,}5\,m + 2{,}3\,m = 43{,}8\,m$) a neznámou výšku stromu (x).

Protože i zde svírá tyč a strom se zemí pravý úhel, lze tento příklad řešit pomocí věty sus:

$$\frac{x}{2{,}1} = \frac{43{,}8}{2{,}3}$$

$$x = \frac{43{,}8}{2{,}3} \cdot 2{,}1$$

$$x \doteq 40\,m$$

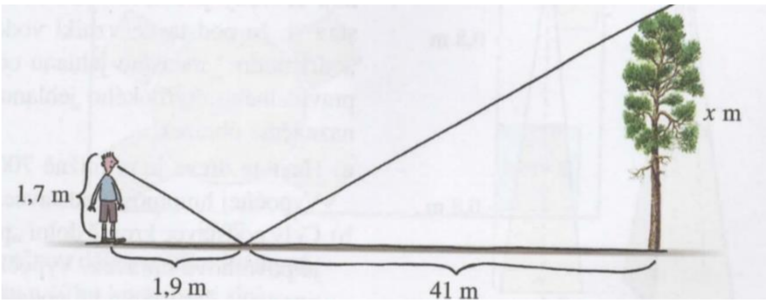
Odpověď:

Jarda vypočetl, že strom má výšku stromu 40 m.

4.3.5 PŘÍKLAD Č. 5

Zadání:

Zdeněk určoval výšku stromu po velkém dešti. Když zahlédl, jak se vršek stromu zrcadlí v kaluži, vzpomněl si na zákon odrazu z fyziky. Jeho vzdálenost od místa odrazu v kaluži je 1,9 m, vzdálenost stromu od tohoto místa je 41 m a vzdálenost očí od země je 1,7 m. Vypočítej výšku stromu. (Upraveno podle [17, str. 45])



Obrázek 25 - Obrázek dokreslující zadání příkladu č. 5

(Zdroj: [17, str. 45])

Řešení:

Zákon odrazu:

- Úhel odrazu se rovná úhlu dopadu.
- Odražený paprsek leží v rovině dopadu.

I v této úloze lze najít dva podobné trojúhelníky. Trojúhelník s odvěsnami - vzdálenost očí od země (1,7 m) a vzdáleností Zdeňka od kaluže (1,9 m). A druhý trojúhelník s odvěsnami - hledanou výškou stromu (x) a vzdáleností stromu od kaluže (41 m). Ze zákona o úhlu dopadu a odrazu lze vyčíst, že tyto dva úhly jsou shodné. Proto se tato úloha počítá pomocí věty sus:

$$\frac{x}{1,7} = \frac{41}{1,9}$$

$$x = \frac{41}{1,9} \cdot 1,7$$

$$x \doteq 36,7\ m$$

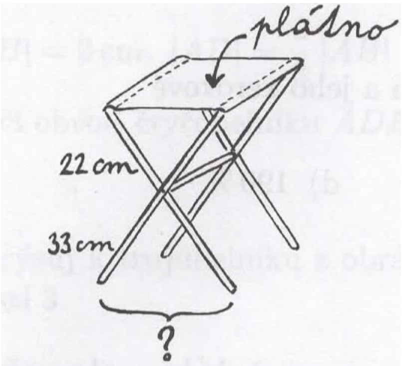
Odpověď:

Výška stromu je přibližně 36,7 m.

4.3.6 PŘÍKLAD Č. 6

Zadání:

Pan Kutil dává novou látku na skládací židli; připevní pruh plátna na horní vodorovné tyče. Šířka pruhu odpovídá délce tyčí, délka pruhu plátna je 45 cm. Přibližně 6 cm z této délky se spotřebuje na připevnění (3 cm na každé straně). Rozhodni podle údajů z obrázku, zda bude po rozložení židle vzdálenost noh alespoň půl metru. (Převzato z [25, str. 98])



Obrázek 26 - Obrázek dokreslující zadání příkladu č. 6

(Zdroj: [25, str. 98])

Řešení:

Na obrázku jsou dva podobné rovnoramenné trojúhelníky. Trojúhelník skládající se z horních částí nohou židle (22 cm) a plátna ($45 - 6 = 39\ cm$). Druhý trojúhelník se skládá z dolní části noh délky 33 cm a neznámé vzdálenosti těchto nohou (x). Horní i dolní část noh svírá shodný úhel, neboť se jedná o vrcholové úhly. Z tohoto důvodu lze vyřešit slovní úlohu za pomocí věty sus:

$$\frac{x}{39} = \frac{33}{22}$$

$$x = \frac{33}{22} \cdot 39$$

$$x = 58{,}5\ cm = 0{,}585m$$

$$0{,}585\ m > 0{,}5\ m$$

Odpověď:

Po rozložení bude vzdálenost nohou větší než 0,5 m.

4.3.7 PŘÍKLAD Č. 7

Zadání:

V historickém kině se promítá ze svitku, na kterém má každé políčko rozměry 66 x 48 mm, na plátno široké 22 m. Jak vysoké je toto plátno? (Převzato z [24, str. 76])

Řešení:

Zadání této slovní úlohy obsahuje dva podobné obdélníky. První představuje svitek s rozměry 66 a 48 mm. Plátno, na které se promítá, představuje druhý z obdélníků s rozměry 22 m a neznámou výškou.

Převádění rozměrů na stejné jednotky není zapotřebí, protože i tak je v podílech zachován poměr podobnosti. Nejdříve je nutné převést rozměry na stejné jednotky.

Výpočet výšky plátna:

$$\frac{x}{48} = \frac{22}{66}$$

$$x = \frac{22}{66} \cdot 48$$

$$x = 16\ m$$

Odpověď:

Promítací plátno má výšku 16 m.

4.3.8 PŘÍKLAD Č. 8

Zadání:

Před vjezdem do nejdelšího českého železničního tunelu Ejpovice je umístěn sklonovník (dopravní značka označující sklon železniční tratě na daném úseku), který strojvedoucím oznamuje, že na následujících 4 742 m mají očekávat stoupání 10 ‰. O kolik metrů přibližně stoupne nadmořská výška tratě při výjezdu vlaku z tunelu, jestliže je dlouhý 4 150 m? [vlastní]

Řešení:

Sklonovník s údajem 10 ‰ udává, že na 1 kilometru železniční trať klesne/stoupne o 10 výškových metrů. I v této úloze jsou v zadání skryty dva podobné pravoúhlé trojúhelníky. První z nich má délky odvěsen 1 000 m (délka úseku) a 10 m (rozdíl výškových metrů při daném sklonu). Druhý trojúhelník má následující délky odvěsen 4 150 m (délka ejpovického tunelu) a x (neznámý počet výškových metrů).

Jelikož oba rozdíly nadmořských výšek svírají se železničními tratěmi pravý úhel, lze úlohu vyřešit pomocí věty sus.

$$\frac{x}{10} = \frac{4\ 150}{1\ 000}$$

$$x = \frac{4\ 150}{1\ 000} \cdot 10$$

$$x = 41{,}5\ m$$

Odpověď:

V železničním tunelu Ejpovice je rozdíl nadmořských výšek při vjezdu a výjezdu roven 41,5 m.

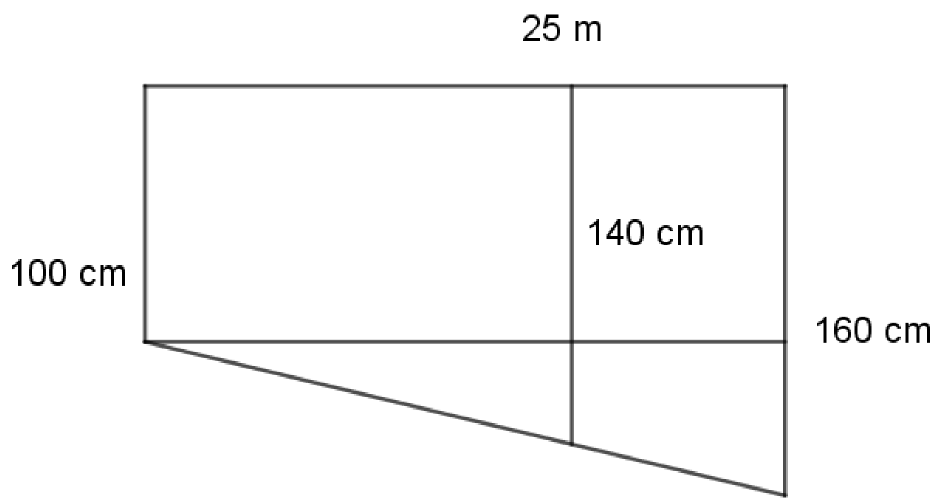
4.3.9 PŘÍKLAD Č. 9

Zadání:

Krytý plavecký bazén v Klatovech má rozměry 25 x 12,5 m. Nejmenší hloubka je 100 cm, na druhém konci je hloubka 160 cm a dno klesá rovnoměrně. Alenka, která měří 140 cm, se bojí plavat. Proto ji zajímá, v jaké vzdálenosti od nejmenší hloubky se celá potopí. Poradíš ji? [vlastní]

Řešení:

Pro řešitele této slovní úlohy je vhodné si nejdříve nakreslit náčrtek situace.

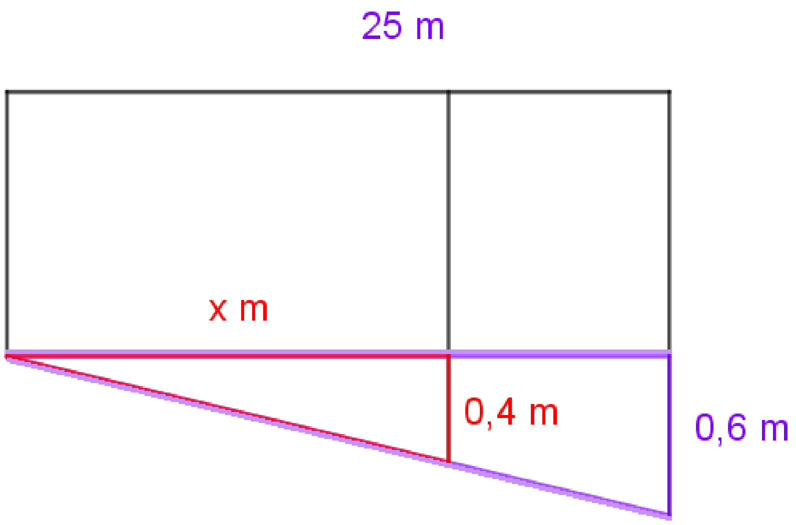


Obrázek 27 - Náčrtek situace k příkladu č. 9

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Z náčrtku lze vidět dva podobné trojúhelníky. První si lze označit červenou barvou, druhý například modrou barvou.

První červený trojúhelník má odvěsny dlouhé 0,4 m $(1{,}4 - 1 = 0{,}4\,m)$ a neznámou vzdálenost od nejmenší hloubky (x). Druhý pak hloubku 0,6 m $(1{,}6 - 1 = 0{,}6\,m)$ a délku bazénu (25 m).



Obrázek 28 - Barevně vyznačené údaje v náčrtku u příkladu č. 9

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Jelikož obě tyto odvěsny svírají pravý úhel, lze úkol vypočítat pomocí věty sus.

$$\frac{x}{25} = \frac{0{,}4}{0{,}6}$$

$$x = \frac{0{,}4}{0{,}6} \cdot 25$$

$$x \doteq 16{,}7\,m$$

<u>Odpověď:</u>

Alenka se celá potopí ve vzdálenosti 16,7 m od nejnižší hloubky.

4.3.10 PŘÍKLAD Č. 10

Zadání:

Horolezci měli za úkol změřit vzdušnou vzdálenost dvou skalních věží Havran a Orel. Věž Havran je od základního tábora vzdálena 2,6 km a Orel 3,9 km. Ze základního tábora vyrazily dvě skupiny A a B pod úhlem, jehož ramena směřují k úpatím skalních věží. Když skupina A urazila 150 m a skupina B urazila 100 m, obě se zastavily a změřily vzdálenost mezi sebou 95,3 m. Pak obě skupiny pokračovaly v přímé cestě k úpatím skalních věží. Mohli horolezci z vytvořeného náčrtku vypočítat vzdálenost věží Orel a Havran? (Upraveno podle [24, str. 79])

Řešení:

U tuto úlohu lze řešit pomocí věty sus o podobnosti trojúhelníků.

1. trojúhelník - ramena

- Vzdálenost základního tábora od Orla (3,75 km + 150 m = 3,9 km)
- Vzdálenost Orla od Havrana (x km)

2. trojúhelník - ramena

- Vzdálenost základního tábora od stanoviště skupiny A (150 m = 0,15 km)
- Vzdálenost stanovišť skupin A a B (95,3 m = 0,0953 km)

Oba trojúhelníky svírají shodný úhel, neboť se jedná o úhly souhlasné.

Výpočet vzdálenosti dvou skalních věží:

$$\frac{x}{0{,}0953} = \frac{3{,}9}{0{,}15}$$

$$x = \frac{3{,}9}{0{,}15} \cdot 0{,}0953$$

$$x \doteq 2{,}5\ km$$

Odpověď:

Vzdálenost dvou skalních věží Orel a Havran je přibližně 2,5 km.

5 EXPERIMENT VE VÝUCE MATEMATIKY

Výzkumné šetření mělo původně probíhat v rámci kontaktní výuky na Základní škole a Mateřské škole Švihov. Každý z žáků měl obdržet papírový dotazník s několika úlohami, které měl během vyučování vypracovat. Bohužel v důsledku vládních opatření, která vedla k uzavření škol, bylo nutné tento dotazník přepracovat do podoby realizovatelné bezkontaktně.

Dotazník byl vytvořen pomocí programu Google Forms. Odkaz[10] na dotazník byl rozeslán v květnu 2020 do 15 základních škol a víceletých gymnázií v Plzeňském kraji. Odpovědi vyplnilo celkem 29 žáků devátých tříd z osmi různých základních škol. V březnu 2021 byl dotazník vyplněn dalšími 18 žáky z původně plánované ZŠ a MŠ Švihov.

Pro experiment byl vytvořen dotazník s 12 otázkami. První část dotazníku tvoří dvě uzavřené úlohy (výběr jedné správné odpovědi, přiřazovací úloha) a pět otevřených úloh. Kvůli uzavření škol bylo do dotazníku přidáno pět dalších otázek, jejichž zodpovězení by umožnilo aspoň omezeně zhodnotit podmínky a okolnosti, které mohly odpovědi žáků ovlivnit.

Žáci řešili a vyplňovali odpovědi v rámci domácí přípravy, pět z nich doplnilo odpovědi do papírové verze dotazníku. Z těchto testů bylo možné vyčíst i postupy řešení některých úloh. Dva žáci neřešili příklady v první části dotazníku, zodpověděli pouze druhou část dotazníku. K jejich odpovědím se tedy nepřihlíželo. Jednotlivé anonymizované odpovědi žáků se nacházejí v příloze č. 1.

5.1 DOTAZNÍK - I. ČÁST

5.1.1 PŘÍKLAD Č. 1

Zadání:

Strana čtverce se zvětšila 2x, jeho obsah se zvětšil

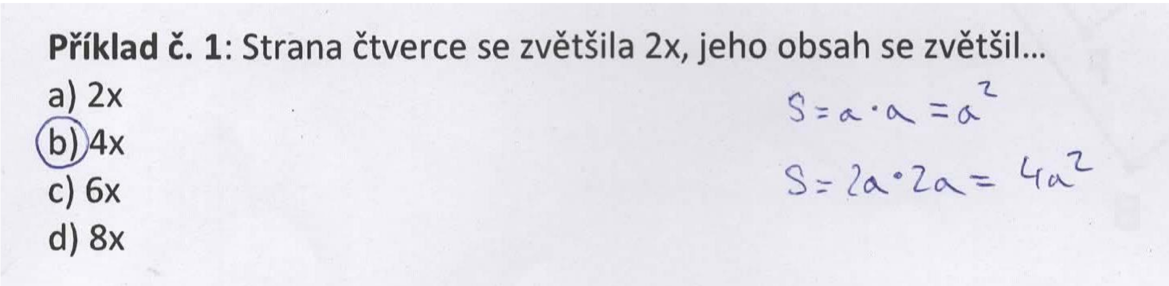
Možnosti: a) 2x, b) 4x, c) 6x, d) 8x (Upraveno podle [15, str. 29])

Žáci, kteří vyplňovali tištěnou verzi dotazníků, si vypomohli volbou konkrétního čtverce se stranou 3 cm, resp. 2 cm. Vypočetli obsah čtverce s takovou stranou a obsah čtverce

[10] Odkaz na dotazník vytvořený v programu Google Forms: https://forms.gle/TCHqwXBhBFnri2VA9

s dvojnásobnou stranou. Výpočet podílu obsahů je dovedl ke správné odpovědi b) 4x. V jednom případě pracoval žák s obsahy čtverců se stranami a, 2a (obrázek č. 29). Žáci mohli k výsledku dojít „geometricky“, na základě náčrtku libovolného čtverce a čtverce s dvojnásobnou stranou.

Nesprávných odpovědí bylo 8. V polovině z nich žáci uvedli, že obsah se změní stejným způsobem jako délka strany (tj. odpověď a) 2x). Stejně početná skupina žáků nesprávně vybrala variantu d), patrně jako součin $2 \cdot 4$. Navíc tedy mohli pracovat s obvodem místo obsahu. Ve dvou případech žák volil odpověď c) 6x. Předpokládalo se, že 6násobné zvětšení obsahu při zdvojnásobení délky strany čtverce žáci vyloučí jako první – jako zcela zřejmou špatnou odpověď.


Příklad č. 1: Strana čtverce se zvětšila 2x, jeho obsah se zvětšil…

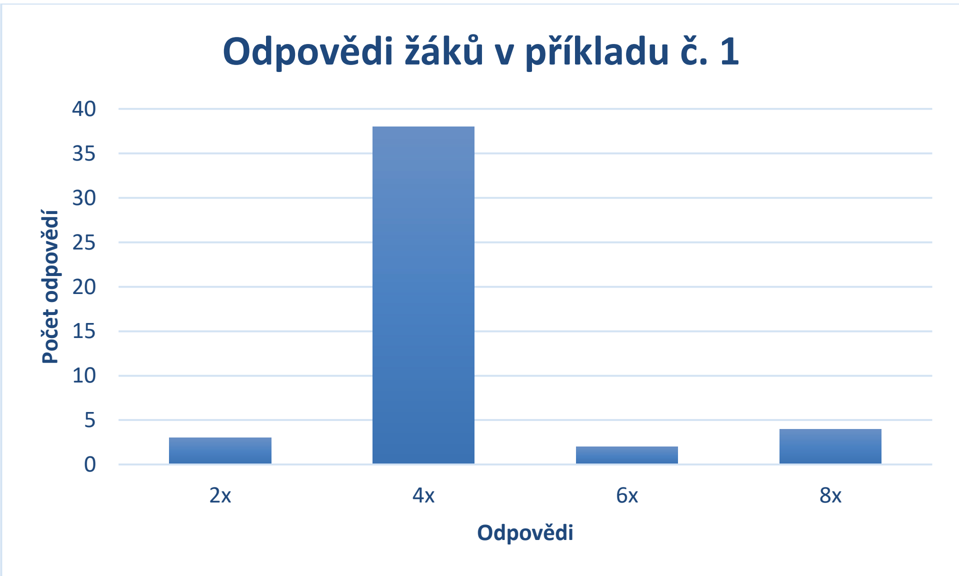
a) 2x
b) 4x
c) 6x
d) 8x

$S = a \cdot a = a^2$

$S = 2a \cdot 2a = 4a^2$

Obrázek 29 - Správné žákovské řešení

(Zdroj: vyplněný tištěný dotazník)



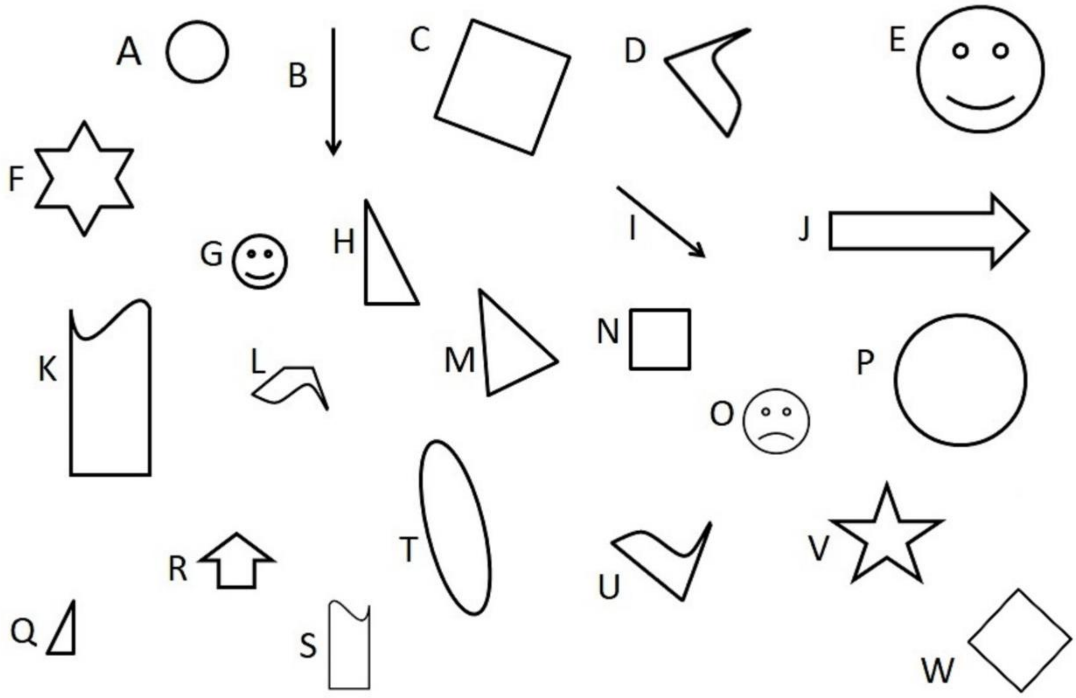
Graf 1 - Odpovědi žáků v příkladu č. 1

(Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel)

5.1.2 PŘÍKLAD Č. 2

Zadání:

Hledejte skupiny podobných útvarů (různou tloušťku čar zanedbejte). Odpovědi zapisujte např.: AB, CDE, FG, … [vlastní]



Obrázek 30 - Zadání k úloze č. 2

(Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Word)

Z řešení tohoto úkolu bylo možné usoudit, nakolik žáci vnímají rozdíl mezi podobností útvarů v matematickém a běžném významu.

Z 23 útvarů bylo 15 v jedné ze skupin podobných útvarů, ostatních 8 útvarů nebylo možné přidat k žádné z těchto skupin. Skupiny podobných útvarů jsou uvedeny v tabulce spolu se stručným pojmenováním a informací, zda útvary ve skupině jsou podobné přímo nebo nepřímo.

Tabulka 2 - Podobné útvary

Útvary	Označení útvarů	Podobnost
Kružnice	A, P	Přímá
„Šipky 1“	B, I	Přímá
Čtverce	C, N, W	Přímá
„Hora“	D, U	Nepřímá
Emotikony	E, G	Přímá
Pravoúhlé trojúhelníky	H, Q	Nepřímá
„Záložky“	K, S	Nepřímá

(Zdroj: vlastní zpracování)

Dvě třetiny respondentů správně uvedly skupinu A, P dvou podobných kružnic. Šest řešitelů do této skupiny přidalo ještě některého z emotikonů a 8krát byla elipsa považována za útvar podobný kružnici. Nesprávné odpovědi přišly pouze od žáků, kteří se s tématem podobnost seznámili alespoň částečně ve škole. Ti, kteří se setkali s podobností při distanční výuce nebo vůbec, uvedli správnou odpověď s výjimkou dvou řešitelů, kteří odpověď vynechali.

Větší úspěšnost byla v nalezení skupiny útvarů B, I, téměř 75 %. Sedm nesprávných řešení obsahovalo ve skupině „šipky 1“ také aspoň jeden z útvarů J, R. V případě dalšího opakování pokusného šetření by skupina útvarů B, I byla vyřazena. Nelze totiž ani z tištěné ani z elektronické verze dotazníku snadno zjistit, zda „krátké úsečky“ udávající směr šipky jsou zkráceny ve stejném poměru jako „hlavní úsečky“ tvořící šipky.

Kromě dvou žáků, kteří příklad vůbec neřešili, všichni poznali podobné čtverce. Dva řešitelé zapomněli ke čtvercům C a N přidat čtverec W. Pravděpodobně je to tím, že je čtverec W vůči čtverci N, který je umístěn v prototypické poloze, pootočen o 45°. Naopak jeden řešitel zapomněl ke dvojici čtverců C a W doplnit čtverec N.

Nepřímo podobné útvary D, U k sobě správně přiřadila zhruba jedna třetina žáků. Další třetina žáků k nim přidala ještě útvar L ohraničený lomenou čarou ze tří úseček a křivou čarou, tj. odlišitelný od útvarů D a U jen na základě jejich hranice. Pět žáků k útvarům D, U, L přidalo ještě útvary K, S nejspíše proto, že část jejich hranice tvoří křivá čára – „vlnka“.

Patnáct žáků utvořilo skupinu podobných útvarů jako skupinu všech emotikonů E, G, O. Zhruba polovina utvořila dvoučlennou skupinu emotikonů E, G, což bylo považováno za správnou odpověď. Čtyři žáci je vůbec nepovažovali za podobné.

Téměř pětina řešitelů zřejmě považuje za navzájem podobné jakékoli trojúhelníky, neboť jako skupinu podobných útvarů zapsala trojici H, Q, M. Deset žáků nepřiřadilo útvaru H žádný podobný útvar. Dvojice H, Q se objevila jako správné řešení v polovině všech odpovědí.

Nalezení dvojice K, S mělo mezi nepřímo podobnými útvary největší úspěšnost, 32 správných odpovědí ze 47. Přiřazení útvarů K, S k útvarům D, U, L bylo zmíněno výše. Ostatní řešitelé nepovažovali útvary K a S za podobné.

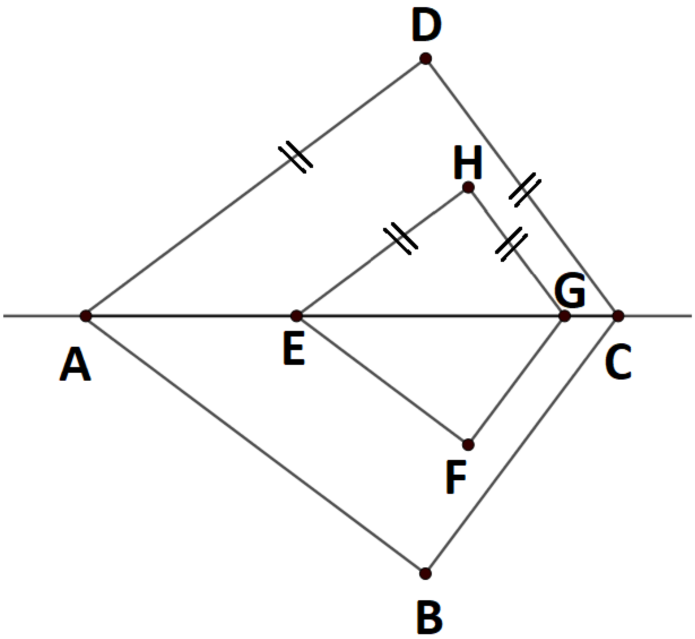
Všechny skupiny podobných útvarů nalezlo celkem 8 žáků. Další 3 respondenti nalezli tyto skupiny, avšak k nim přidali další skupinu útvarů navíc. Nejčastěji považovali za podobné útvary označené písmeny F a V – šesticípou a pěticípou hvězdu. Nejméně 5 skupin podobných geometrických útvarů nalezlo celkem 23 dětí.

Z rozboru žákovských řešení je patrné, že žáci správně vyčlení podobné útvary, jedná-li se o jednoduché geometrické tvary (kružnice, čtverce, pravoúhlé trojúhelníky). Jakmile jsou útvary složitější, méně obvyklé nebo připomínají obrázky něčeho ze skutečnosti, podobnost v matematickém smyslu ustupuje do pozadí. Útvary poté seskupují podle intuice na základě blíže nedefinovatelného pojetí podobnosti v běžném smyslu.

5.1.3 PŘÍKLAD Č. 3

Zadání:

Které trojúhelníky jsou podobné trojúhelníku ABC? Odpovědi pište ve tvaru PQR, TUV, … (Upraveno podle [17, str. 40])



Obrázek 31 - Zadání k úloze č. 3

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Tato jednoduchá úloha byla zadána s cílem mimo jiné zjistit, který z trojúhelníků bude nejčastěji zastoupen jako trojúhelník podobný $\triangle ABC$.

80 % všech odpovědí obsahovaly jako trojúhelník podobný s $\triangle ABC$ trojúhelník $\triangle ADC$, který je s ním dokonce shodný (dvojice vzor a obraz v osové souměrnosti podle přímky AC). Přibližně třetina těchto žáků zapsala vrcholy $\triangle ADC$ ve správném pořadí, polovina uvedla vrcholy trojúhelníku v pořadí A, C, D. Objevil se i zápis vrcholů v pořadí C, A, D a C, D, A.

Trojúhelník $\triangle EFG$ zařadilo mezi trojúhelníky podobné $\triangle ABC$ také 80 % všech žáků. Protože jsou trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle EFG$ podobné přímo, podařil se až na čtyři odpovědi zápis vrcholů trojúhelníku ve správném pořadí, tj. E, F, G.

Pokud řešení obsahovalo pouze jeden trojúhelník (5 respondentů), byly to právě $\triangle ADC$ nebo $\triangle EFG$. Trojúhelníky $\triangle EHG$ a $\triangle ABC$ nikdo neuvedl samostatně jako jediné řešení úlohy, byly vždy ve skupině s nejméně jedním dalším trojúhelníkem.

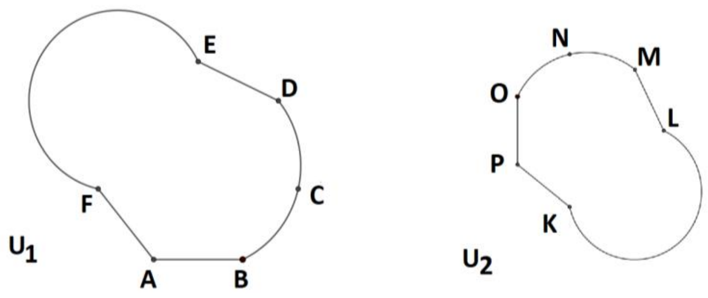
Dvacet devět žáků našlo tři trojúhelníky podobné s $\triangle ABC$ a všichni tito žáci vynechali trojúhelník $\triangle ABC$. Zajímavé bylo sledovat pořadí trojúhelníků v odpovědích. Upřednostnili žáci vliv velikosti útvaru a začali $\triangle ADC$ nebo je zásadnější přímá podobnost a první trojúhelník v řešení bude $\triangle EFG$? V necelé pětině všech odpovědí postupovali žáci „od největšího trojúhelníku“; $\triangle ADC$, $\triangle EHG$, $\triangle EFG$. Pouze 4 respondenti napsali trojúhelníky v opačném pořadí, od přímo podobného $\triangle EFG$, ke shodnému $\triangle ADC$. Nejpočetnější však byla skupina žáků, kteří neupřednostňovali ani přímou podobnost ani velikost – celkem 13 žáků zapsalo pořadí trojúhelníků takto: ADC, EFG, EHG.

Pouze pět žáků považovalo trojúhelník $\triangle ABC$ za podobný sám sobě a zařadili do řešení všechny čtyři trojúhelníky. Trojúhelník $\triangle ABC$ byl uveden buď jako poslední, nebo jako první.

5.1.4 PŘÍKLAD Č. 4

<u>Zadání:</u>

Útvary U_1 a U_2 jsou podobné. Označte navzájem odpovídající si body jednotlivých útvarů v matici. (Pro bod A vyberte odpovídající bod ve sloupci atd.) [vlastní]



Obrázek 32 - Zadání k úloze č. 4

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

	K	L	M	N	O	P
A	☐	☐	☐	☐	☐	☐
B	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐
D	☐	☐	☐	☐	☐	☐
E	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Obrázek 33 - Matice pro zaznamenávání odpovědí

(Zdroj: vlastní zpracování v programu Google Forms)

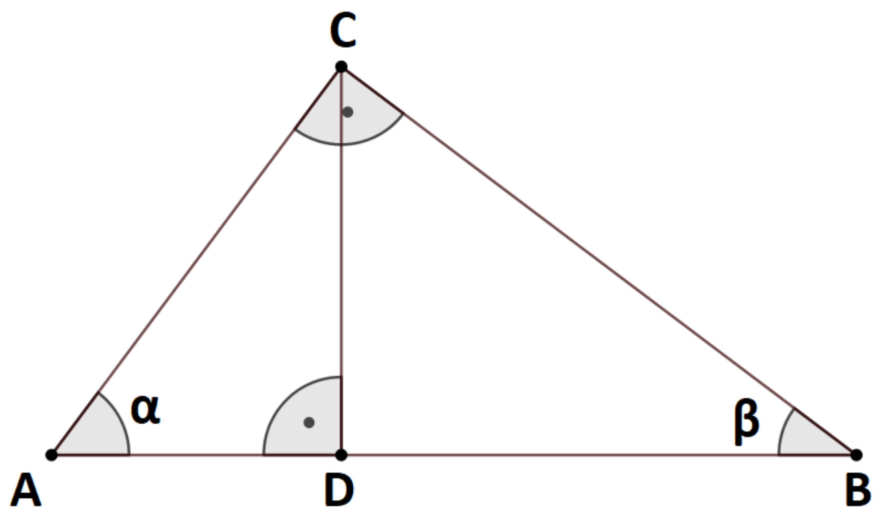
Úloha byla připravena tak, že jako první nabízela k „významnému" bodu útvaru U_1, kterým je bod A, hledat odpovídající bod. V jednom případě byl místo bodu P přiřazen bodu A bod M. Další body řešitel přiřadil tak, jako kdyby útvary U_1 a U_2 přímo podobné, tj. bodu B přiřadil bod N, bodu C bod O atd. Objevila se také 2 řešení, v němž jsou jednomu bodu přiřazeny dva různé body. Dotyční žáci spolu s dalšími čtyřmi, kteří úlohu vůbec neřešili, nejspíš nepochopili zadání úlohy nebo způsob zápisu řešení.

Příklad č. 4 byl zařazen jako přípravný pro další příklad, v němž se požadoval korektní zápis podobných trojúhelníků, tj. s takovým uspořádáním vrcholů trojúhelníku, aby si vrcholy v podobnosti odpovídaly.

5.1.5 PŘÍKLAD Č. 5

<u>Zadání:</u>

Které trojúhelníky z obrázku jsou navzájem podobné? Podobnost trojúhelníků zapište. Dejte pozor na odpovídající si vrcholy. Místo $\triangle KLM \sim \triangle PQR$ pište odpovědi ve tvaru $KLM - PQR$. [vlastní]



Obrázek 34 - Zadání k úloze č. 5

(Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Za úplné řešení byly považovány tři dvojice trojúhelníků zapsané např.: $ABC - ACD$, $ABC - CBD$, $CBD - ACD$. Neočekávalo se, že žáci zařadí dvojice stejných trojúhelníků (např. $ABC - ABC$), i když platí, že každý trojúhelník je tedy podobný sám sobě (reflexivita podobnosti). Také se předpokládalo, že např. dvojice $ABC - ACD$ a $ACD - ABC$ budou žáci považovat za stejné řešení a nebudou proto uvádět obě dvojice (symetričnost podobnosti). Tyto tři dvojice podobných trojúhelníků zapsali pouze 2 žáci.

Větší náročnost úlohy dokládá i větší podíl respondentů (přibližně $\frac{1}{5}$), kteří odpověď vynechali. Dělo se to i přesto, že někteří z nich stihli výklad tématu podobnost ještě prezenční formou ve škole.

Pouze jednu dvojici podobných trojúhelníků našlo 50 % žáků. Zajímavé je sledovat, která z dvojic byla zastoupena nejčastěji a jaká strategie mohla být použita pro to, aby si v zápisu podobných trojúhelníků odpovídaly správné vrcholy.

Označme T_1, T_2, T_3 postupně trojúhelníky ABC, CBD, ACD. Šestnáct žáků poznalo, že jsou podobné trojúhelníky T_2 a T_3, šest odhalilo dvojici $T_1 \sim T_3$ a dva $T_1 \sim T_2$. Třináct z těchto 24 žáků neuvedlo korektní zápis z hlediska odpovídajících si vrcholů.

Předpokládá se, že vhodným postupem pro utvoření správného zápisu podobnosti dvou trojúhelníků je „hlídání" typů stran ve správném pořadí. Např. ke správnému zápisu $ABC - ACD$ lze dospět strategií „přepona → delší odvěsna", k zápisu $ACB - ADC$ postupem „menší odvěsna → větší odvěsna". Postup „přepona – kratší odvěsna" vede k zápisu $BAC - CAD$.

Strategii „přepona → delší odvěsna" použila většina řešitelů. Pouze v jednom případě byla strategie opačná, tj. žák použil pořadí „delší odvěsna → přepona". Všichni ostatní použili postup „menší odvěsna → větší odvěsna", a to v tomto pořadí. Strategii „přepona →kratší odvěsna" ani k ní opačnou" nepoužil nikdo.

Dvě dvojice podobných trojúhelníků, $T_1 \sim T_3$, $T_2 \sim T_3$ našel jen jeden řešitel. Bohužel neuvedl korektní zápis z hlediska odpovídajících si vrcholů. Tři řešení (tři dvojice podobných trojúhelníků) nebo jejich náznak (jedna trojice podobných trojúhelníků) se projevil celkem u 11 žáků. Pouze již dva zmínění žáci zapsali výsledek zcela správně jako tři dvojice podobných trojúhelníků včetně odpovídajících si vrcholů. Zbylých osm žáků uvedlo jednu trojici, např. $ADC - ACB - CDB$. Správný zápis s ohledem na odpovídající si vrcholy měli jen ti, kteří postupovali strategií „menší odvěsna → větší odvěsna" (pět dětí).

Úspěšný postup „menší odvěsna → větší odvěsna" použili žáci různých škol. Nakolik je to postup, k němuž byli vedeni svými učiteli, nebylo zkoumáno. Tento výsledek pokusného šetření by ale mohl být dobrým vodítkem pro začínající učitele matematiky, jak dát návod žákům, aby nepokazili zápis podobných pravoúhlých trojúhelníků.

5.1.6 PŘÍKLAD Č. 6

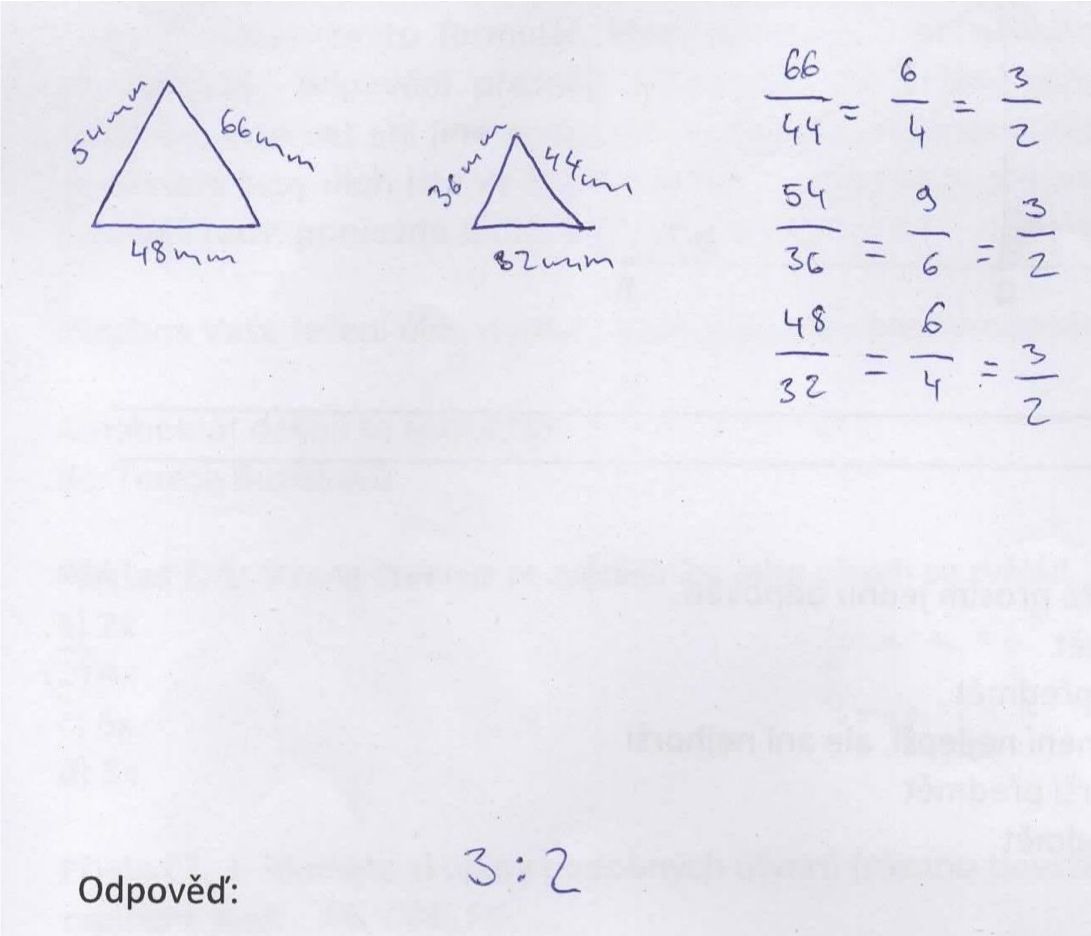
Zadání:

Rozměry stran prvního trojúhelníku jsou 54 mm, 48 mm a 66 mm. Rozměry druhého trojúhelníku jsou 32 mm, 36 mm a 44 mm. Jsou trojúhelníky podobné nebo ne? V případě, že jsou trojúhelníky podobné, podle jaké věty a jaký je poměr podobnosti? (Upraveno podle [26, str. 163])

I když úloha cílí na jeden z očekávaných výstupů stanovených v RVP, 28 % respondentů se ani nepokusilo na žádnou ze tří otázek odpovědět. Otázky nejsou zcela nezávislé. Pokud někdo do dotazníku napsal např. „usu“ nebo „$3:2$“, bylo to interpretováno jako správná odpověď na otázku, zda jsou trojúhelníky podobné bez ohledu na věcnou správnost z hlediska dalších otázek. S přihlédnutím k tomu mělo aspoň jednu správnou odpověď 22 žáků, tj. méně než polovina. Deset respondentů poznamenalo, že trojúhelníky nejsou vůbec podobné. Příslušní řešitelé nejspíše nevytvářeli podíly velikostí odpovídajících si stran trojúhelníků, ale podíly velikostí stran v pořadí, v jakém byly uvedeny v zadání. V jednom řešení zapsaném ve vytištěném dotazníku autor místo podílů velikostí stran utvářel jejich rozdíly. Pokud by místo 36 mm bylo zadáno 26 mm, považoval by trojúhelníky za podobné, protože $54 - 32 = 48 - 26 = 66 - 44 = 22$.

Zcela správně odpovědělo jen 9 žáků, kteří uvedli, že trojúhelníky jsou podobné s koeficientem $\frac{2}{3}$ (případně $\frac{3}{2}$) podle věty sss. Ve zbývajících zápisech žáků, z jejichž odpovědí bylo možné usoudit, že zadané trojúhelníky jsou podobné, měli jen čtyři správně koeficient podobnosti a jiní čtyři správnou větu o podobnosti trojúhelníků. V ostatních nesprávných odpovědích se objevily poměry $9:8:11$ nebo $3:5$ jako koeficienty podobnosti. V prvním případě jde o základní tvar poměru velikostí stran prvního trojúhelníku. V druhém případě $3:5$ se domníváme, že žák hodnoty nějakým způsobem zaokrouhlil. Podobnost trojúhelníků větou usu místo věty sss zdůvodnilo celkem pět žáků. K závěru mohli dojít porovnáním odpovídajících si úhlů v narýsovaných trojúhelnících, jak dokládá jedno z písemných řešení.

Neúspěšnost příkladu 6 (vynechané odpovědi, nesprávné postupy nebo chyby) nelze přičítat uzavření škol a distanční výuce během pandemie. Nedostatky se projevily v řešení školáků, kteří vše stihli před uzavřením, i v řešení žáků, kteří část tématu podobnost zvládli ve škole a část doma.



Obrázek 35 - Správné žákovské řešení úlohy č. 6

(Zdroj: vyplněný tištěný dotazník)

5.1.7 PŘÍKLAD Č. 7

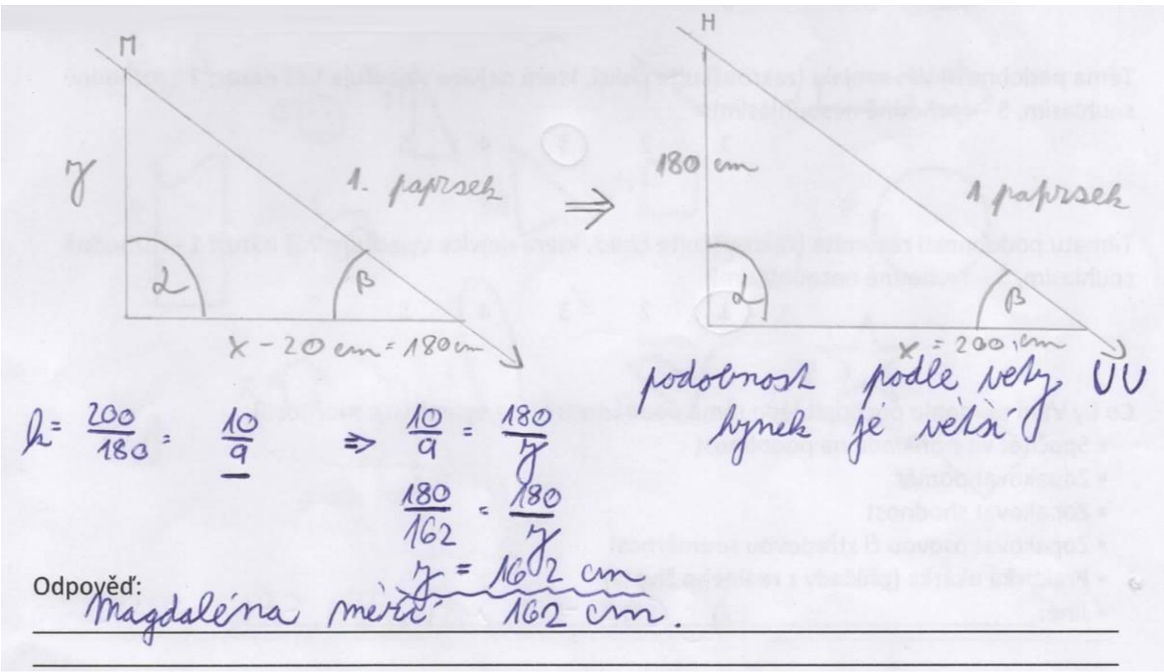
Zadání:

Hynek zjišťuje, kolik měří jeho přítelkyně Magdaléna. Změřil, že když stojí vedle sebe, její stín je o 20 cm kratší. Hynek je vysoký 180 cm a jeho stín je dlouhý 200 cm. Kolik měří Magdaléna? Tip: Zkuste si celou situaci nakreslit. (Převzato z [24, str. 76])

Úlohu neumělo uchopit celkem 10 žáků. Je ovšem možné, že řešitele odradilo doporučení týkající se náčrtku, tj. nutnost strávit s příkladem trochu více času, a také slovní formulace problému s praktickým námětem.

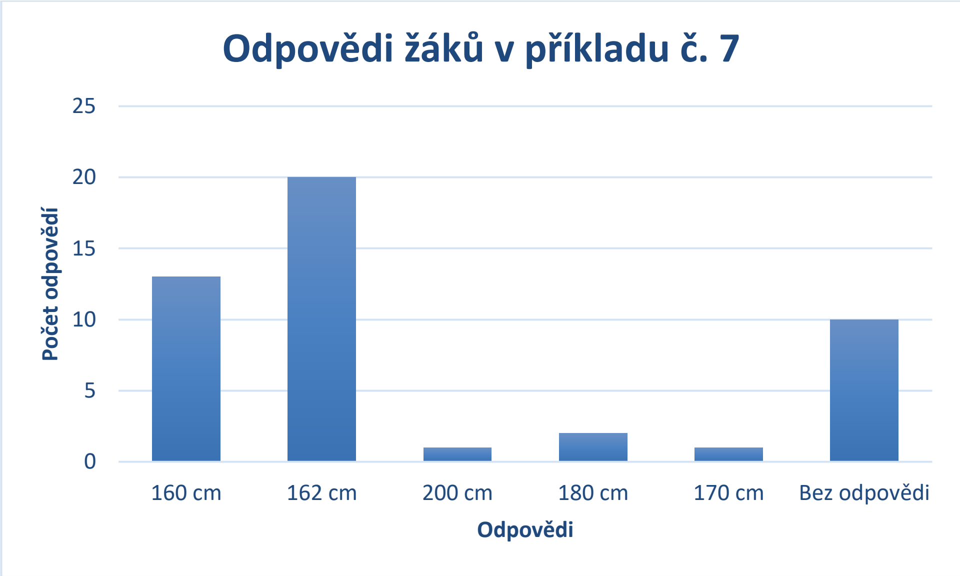
Odpověď třetiny těch, kteří se pokusili příklad řešit, byla nesprávná (160 cm). K výsledku nejspíše dospěli tak, že rozdíl mezi délkou Hynkova stínu a jeho výškou odečetli od délky Magdalénina stínu. Tento postup byl několikrát zapsán v tištěné formě dotazníků.

Správný výsledek 162 cm zapsalo celkem 20 žáků. Ti mohli příklad vypočítat například z rovnosti poměru délek stínů a poměru výšek postav nebo z rovnosti poměru výšky a délky stínu jedné osoby a poměru výšky a délky stínu druhé osoby. S ohledem na způsob zaznamenávání odpovědí nemůžeme sdělit, který postup převažoval. V dotaznících doplňovaných „ručně“ postupovali respondenti jen podle druhé z uvedených možností.



Obrázek 36 - Správné žákovské řešení úlohy č. 7

(Zdroj: vyplněný tištěný dotazník)



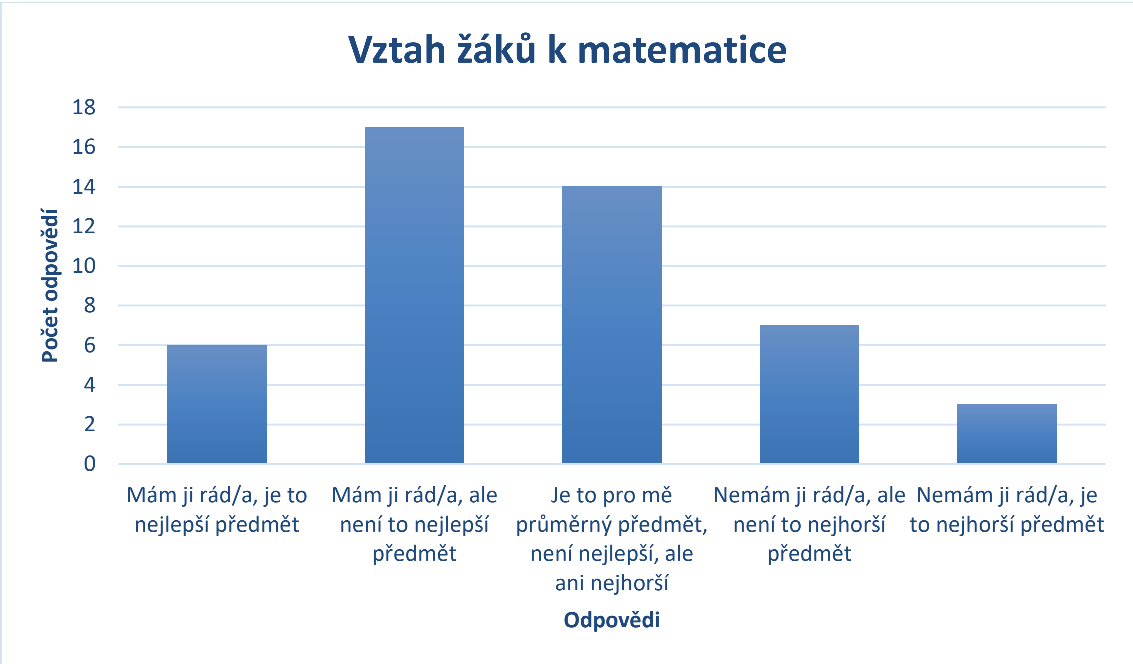
Graf 2 - Odpovědi žáků v příkladu č. 7

(Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel)

5.2 DOTAZNÍK - II. ČÁST

Druhá část dotazníku obsahovala několik otázek, které po zodpovězení umožnily alespoň omezeně zhodnotit podmínky a okolnosti, které mohly odpovědi žáků ovlivnit.

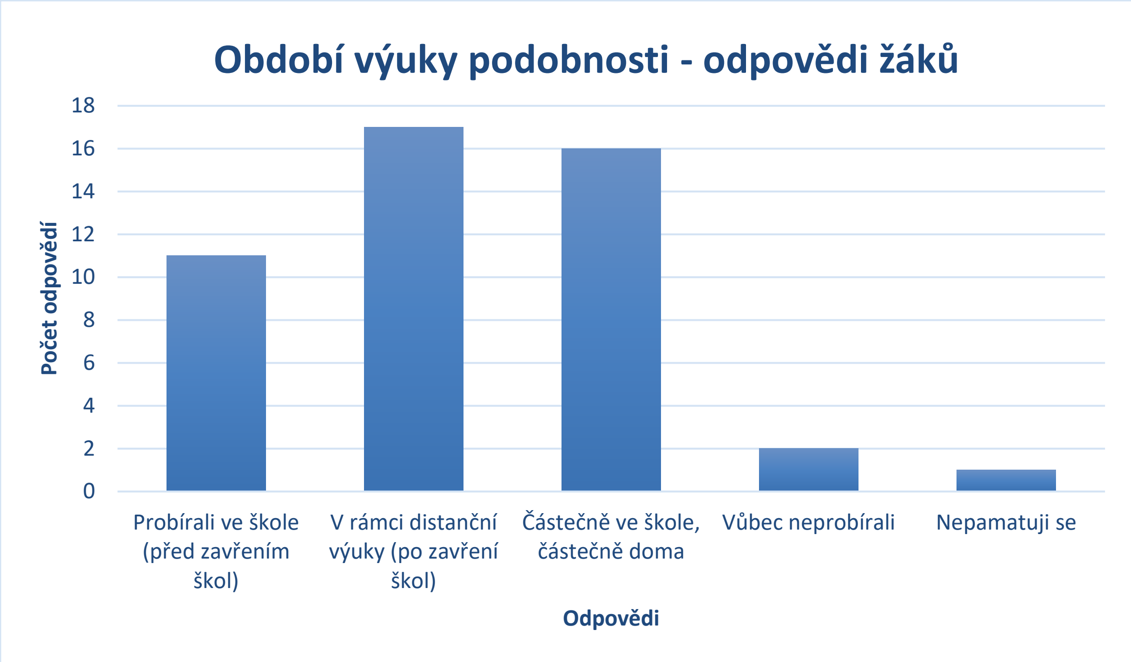
První otázka se týkala žáků a jejich vztahu k matematice. Matematiku má rádo 17 žáků, dalších 6 respondentů označilo předmět dokonce za nejlepší. Třicet procent žáků prohlásilo, že matematika není nejlepší, ale ani nejhorší předmět. Pouze tři mají matematiku jako nejhorší předmět. Z těchto odpovědí vyplývá, že dotazník vyplňovaly spíše děti se zájmem o matematiku.



Graf 3 - Vztah žáků k matematice

(Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel)

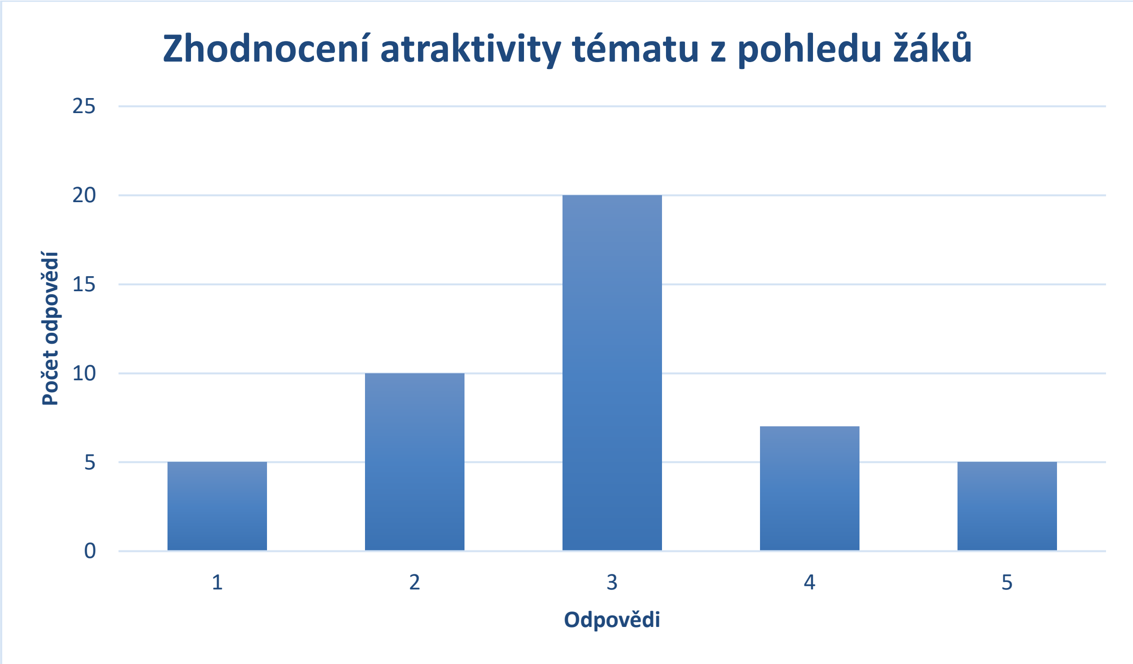
Další otázka se věnovala podmínkám a prostředí, při kterém se učili podobnost. Tato otázka byla do dotazníku přidána z toho důvodu, že část školního roku 2019/2020 probíhala distanční formou. Obdobně z důvodu pandemie Covid-19 byla i výuka ve školním roce 2020/2021 uskutečňována distanční formou. Spojitost mezi obdobím výuky a správností odpovědí byla již vyhodnocována u jednotlivých otázek. V následujícím grafu č. 5 lze vidět rozložení těchto období. Před uzavřením škol se podobností zabývala přibližně čtvrtina žáků. Naopak 36 % dotazovaných mělo podobnost až v rámci distanční formy výuky. Velké množství žáků (16 respondentů) získávalo poznatky o podobnosti v období, ve kterém se přecházelo na distanční výuku. Vzdělávali se tedy částečně ve škole a částečně doma. S tímto počtem nejspíše souvisí to, že podobnost se často vyučuje v 9. ročníku na přelomu měsíců únor a březen. Dne 11. března 2020 však došlo k uzavření všech škol a i o rok později nebyla žákům devátých ročníků umožněna prezenční výuka až do 11. května 2021.



Graf 4 - Období výuky podobnosti

(Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel)

Další dvě otázky se dotazovaly žáků na jejich vztah k tématu podobnosti – jak je podobnost zaujala a zda si myslí, že jí rozumí. Své odpovědi měli ohodnotit 1 až 5 jako ve škole. Hodnotu 1 vyznačilo pouze 5 žáků. Na úrovni 2 nebo 3 však zhodnotilo svoji zaujatost o podobnost více než 60 % žáků. Dalších 5 žáků podobnost vůbec nezaujala. Rozložení hodnocení žáků je téměř souměrné (viz grafy č. 6 a č. 7).



Graf 5 - Zhodnocení atraktivity tématu z pohledu žáků

(Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel)

Graf 6 - Zhodnocení znalostí z pohledu žáků

(Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel)

Obdobně žáci odpovídali i na otázku, v jejíž odpovědi měli ohodnotit svoje znalosti o podobnosti. Zde se však více žáků přesunulo do nižších cifer. Osm žáků si myslí, že podobnosti naprosto rozumí. Známkou 2 by ohodnotilo své znalosti 20 % dětí. Na opačné straně škále ohodnotili své znalosti pouze 3 žáci. Z těchto odpovědí vyplývá, že dotazník vyplňovaly děti se zájmem o matematiku.

Z odpovědí na předchozí 3 otázky vyplývá, že oslovení žáci mají všeobecně kladný vztah k matematice i k tématu podobnost.

Pozornost závěru dotazníku byl věnována možnostem zlepšení výuky podobnosti i vylepšení vztahu žáků k tématu podobnosti. V nabídce měli následující možnosti:

- Spočítat více příkladů na podobnost
- Zopakovat poměr
- Zopakovat shodnost
- Zopakovat osovou či středovou souměrnost
- Praktická ukázka (příklady z reálného života)

Respondenti také měli příležitost přidat i jinou možnost dle jejich uvážení. Zároveň směli vybrat více eventualit. Nejvíce žáci volili „Spočítat více příkladů“. Tuto volbu vybralo 27 žáků. Další eventualitu „Praktická ukázka (příklady z reálného života)“) zvolilo 19 žáků. Je otázkou, do jaké míry tyto odpovědi souvisí s již zmiňovaným uzavřením škol v době pandemie. Pokud by se tento experiment provedl znovu v dalším školním roce, pakliže by nedošlo k uzavření škol, bylo by zajímavé sledovat množství těchto odpovědí. Po několika rozhovorech s učiteli lze však usoudit, že žáci mají obecně problém s tématem podobnost, neboť je podobnost náročná na představivost. Jedna z vyučujících podotkla, že s žáky chodí ven a zde probíhá terénní výuka, při které měří například výšku věže kostel, stromu apod. Pro motivaci žáků je vhodné ukazovat jim konkrétní příklady v přírodě nebo i umění. [27, str. 313] Spojení teorie a praxe splňuje i jednu z didaktických zásad vyučování matematiky, která dává učitelům za úkol ukazovat svým žákům praktické využit matematiky v reálném světe. [28, str. 23] Pokud učitelé nemají možnost terénní výuky matematiky, lze vypočítat několik typových úloh z reálného života.

Zároveň však někteří učitelé zmínili, že se podobností v distanční výuce příliš nezabývali a zaměřili se spíše na kapitoly matematiky, které žáci využili k přípravě na přijímací zkoušky na střední školy. Také se několikrát zmínili o tom, že při této formě výuky proberou méně učiva a také méně „do hloubky“.

Výjimečně se zde objevila eventualita zopakovat shodnost a zopakovat poměr. Tento problém lze vyřešit zadáním několika úloh před vyučovaným tematickým celkem podobnost. Ze své osobní zkušenosti ze souvislých pedagogických praxí mohu říci, že žáci mají problémy s příklady na postupný poměr a na rozdělení nějakého celku v daném poměru. Sporadicky žáci zvolili možnost zopakovat středovou a osovou souměrnost.

Jedna z vlastních odpovědí žáků byla následující: „Nic protože mě to nezaujalo“.

Graf 7 - Návrhy ke zlepšení a zvýšení atraktivity tématu z pohledu žáků

(Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel)

6 DIDAKTICKÉ HRY A DALŠÍ AKTIVITY PRO ŽÁKY

Didaktické hry mají důležitou roli ve výukových metodách, neboť jednou ze základních činností dětí je právě hra. [29, str. 7] Žáky nejen aktivizují a motivují, ale také rozvíjí jejich myšlení a poznávací funkce. Kromě toho také napomáhají k plnění vzdělávacích a výchovných úkolů. Navíc se za nejlepší způsob vzdělávání žáků považuje, když je žák zapojený do určité činnosti, která je pro něj zajímavá a baví ho. V tu chvíli si žák ani příliš neuvědomuje, že odvádí školní práci. [30, str. 6] [31, str. 213] Didaktické hry mohou mít různé formy od dramatizace, hraní rolí až po logické hříčky (kvízy, hádanky, přiřazování apod.) Hry bývají obvykle rozděleny do tří kategorií:

- interakční hry – myšlenkové a strategické hry, společenské hry apod.
- simulační hry – hraní rolí, řešení problémů apod.
- scénické hry – divadelní hry [32, str. 213]

Hodiny se didaktickými hrami oživí a výrazně obohatí. Žákům se rozvíjí paměť, fantazie i myšlení.

Hry ve školním prostředí jsou většinou zařazovány k upevnění učební látky nebo naopak jako úvod do určitého tématu. Hra by se však neměla zařazovat až po výuce veškerého učiva. [32, str. 15]

Žáky by hra měla především bavit, v rámci hodin by se měly hry střídat a zároveň nezařazovat příliš často. Předem však musí mít jasná pravidla a hodnocení. Tím mají u žáků i formativní účinky a podporují i návyky. Musí dodržovat pravidla a ovládat své emoce. Hra by však neměla dosahovat dvou extrémních situací. V první případě by neměl být kladen příliš velký důraz na učební cíle didaktické hry, při které by žák již hru nevnímal jako hru. Ani opačná situace, při které by hra byla bezcílná, by neměla nastat. Úlohy by neposkytovaly dostatečnou příležitost k hlubšímu porozumění a docházelo by k utajenému poznávání. Žáci by si se zaujetím hráli, ale nezískávali by potřebné poznatky.

I „učitel národů“ Jan Ámos Komenský podporoval změnu od školní výuky směrem ke hře, která by žáky aktivizovala. [29, str. 9]

Při volbě hry je vhodné se řídit určitými činiteli, které mají na průběh specifický vliv:

- Zkušenost s organizováním her a práce s dětmi – učitel by se měl neustále rozvíjet. Pokud nastane při hře nějaká chyba, je vhodné hru neodmítnout, ale naopak nalézt příčinu nedostatku a s chybou pracovat.
- Stanovit cíl hry – uvědomit si, k čemu má hra sloužit (úvod do tématu, procvičení učiva, apod.).
- Žáci – učitel by měl znát své žáky (věk, počet, inteligence, apod.) a tomu přizpůsobit danou hru včetně momentální nálady a situace ve třídě.
- Čas – učitel by měl dokázat odhadnout čas potřebný na hru a vytyčit jí potřebný čas.
- Prostředí – učitel si musí stanovit, kde se bude hra provozovat. Nejen zda to bude ve třídě či na hřišti, ale také zda ji budou žáci hrát v lavicích či na koberci ve třídě.

  [29, str. 10]

V rámci tématu podobnost je vhodné zařazovat různé hry sloužící k rozvoji prostorové a geometrické představivosti žáků, k rozvíjení obrazotvornosti a tvořivosti. Tyto dovednosti uplatní žáci i ve svém mimoškolním životě.

V následujících podkapitolách je představeno několik didaktických her a pomůcek, které byly navrženy k většímu pochopení podobnosti v matematice. Tyto hry by žákům měly pomoci s představivostí, ale také s pojmy týkající se podobnosti. Aktivizující prostředky měly být vyzkoušeny na základních školách. Z důvodu epidemické situace způsobené virem Covid-19 a následným přechodem výuky z prezenční formy výuky na distanční způsob nebyly tyto didaktické prostředky ve výuce vyzkoušeny. Přesto je dobrovolně vyzkoušeli tři žáci Základní školy ve Švihově, kteří pro vypracování diplomové práce poskytli zpětnou vazbu o těchto didaktických hrách a pomůckách. Jejich hodnocení se nachází zvlášť u každé hry.

6.1 MATEMATICKÝ MALÍŘ

Tato didaktická hra slouží k upevnění pojmů vztahujících se k tématu podobnosti. Žáci si zopakují dané pojmy, které musí nejen znát, ale také je musí analyzovat a svým spolužákům je pomocí náčrtků co nejlépe aplikovat. Tímto se žáci dostávají k vyšším kognitivním cílům Bloomovy taxonomie. Aktivita může být zařazena ke konci výuky tematického celku podobnost k opakování. Jelikož podobnost nemá velký rozsah pojmů, může být tato hra zařazena jako krátká rozcvička při výuce nebo sloužit pro změnu činnosti při hodině. Při této hře se také rozvíjí důležité klíčové kompetence. Především jde o kompetence k řešení problémů, při kterých se snaží použít co nejlepší strategii k rychlému určení pojmu, nebo komunikace sociální, v rámci kterých se učí nést zodpovědnost za svou práci ve skupině a také zvládat své emoce. Tato hra je obměnou Matematického malíře z knihy Nápadník aktivit a her do hodin matematiky. [33, str. 14]

6.1.1 PRAVIDLA HRY

Třída se rozdělí do dvou družstev. V každé skupině se určí, kdo půjde první k tabuli a vylosuje si kartičku s pojmem. Tento žák se snaží na tabuli co nejvýstižněji tento pojem nakreslit tak, aby členové jeho skupiny uhodli pojem na kartičce. Žák u tabule však při tom nesmí mluvit, gestikulovat ani na tabuli zapsat slovy tento pojem či nápovědy vedoucí k uhádnutí.

Úkolem ostatních hráčů ve skupině je ve stanoveném limitu uhodnout nakreslený pojem. Druhé družstvo nesmí prvnímu napovídat. Pokud družstvo uhodne, získává bod. V případě neuhodnutí nezískává ani neztrácí žádný bod. Poté je na řadě druhá skupina.

Malující žáci se buďto mohou u tabule střídat nebo může skupina vybrat jednoho zastupujícího malíře. Je vhodné si stanovit čas na malování a hádání pojmu (např. 1 minuta) nebo zvolit maximální počet pokusů uhádnutí malovaného pojmu. Na kartičkách, které se rozstříhají a položí rubem nahoru, jsou pojmy jako věta sss, obraz, zvětšení nebo poměr. Hrací karty jsou umístěny v příloze č. 2.

6.1.2 OBMĚNY HRY

Tuto hru je možné různě modifikovat. Lze ji hrát v menších skupinách, ve kterých se zvolí kapitán kreslící jednotlivé pojmy na papír a ostatní ze skupiny se snaží tento pojem uhodnout. Každý z hráčů ale sbírá body pro sebe a ne pro tým. Kapitáni (malíři) se mohou v rámci skupiny střídat. Vyhrává žák, který nasbíral nejvíce bodů. Při této variantě je však důležité zajistit, aby každý z hráčů dobře viděl na nákresy na papíře.

Další možnou obměnou je dodatečné vysvětlování pojmů. Po uhádnutí i neuhádnutí by musel jeden ze skupiny hádajících vysvětlit daný pojem svými slovy a případně se ho pokusit aplikovat na určitý příklad. Pokud by žák tento pojem správně vysvětlil, může získat tato skupina bonusový bod navíc. Při nesprávném vysvětlení by tým nezískal ani neztratil žádný bod.

Žáci si také mohou vytvořit karty sami. Tímto se žáci věnují matematickým pojmům dvakrát – poprvé při vymýšlení a podruhé při hádání. Lze také stanovit, aby si skupiny vzájemně vymyslely několik pojmů, které bude hádat druhá skupina. V tomto případě jsou žáci nuceni vymýšlet složitější pojmy. Při opakování aktivity je vhodné k pojmům z tabulky přidat i další související pojmy, např. rovnoramenný trojúhelník, vnitřní úhel, pravoúhlý trojúhelník, shodnost apod.

Hru by také šlo změnit na hru „policejní výslech". Pachatel jistého trestného činu je pojem, který se týká podobnosti a jeho identitu zná pouze učitel. Vyšetřovatelé – žáci mají za úkol tento případ vyšetřit a viníka odhalit. Učitel si vylosuje jeden pojem z kartiček a žáci se ho dotazují. Snaží se objevit co nejvíce charakteristik pojmu. Učitel ale může odpovídat jen ano nebo ne. [34]

6.1.3 ZHODNOCENÍ HRY

Žáky tato hra zaujala, přestože se jim v domácím prostředí hůře zkoušela. Přesto si myslí, že by jim matematický malíř pomohl lépe pojmy zapamatovat, pochopit je a také by je dokázali snáze interpretovat vlastními slovy. Nevýhodu spatřují v možném úskalí pro méně nadané malíře. Podle nich by byly nejhůře nakreslitelné pojmy: věty sss, sus nebo uu a nejsnáze nakreslitelný pojem zvětšení a zmenšení. Také neví, zda by dokázali kreslit bez mluvení a gestikulace. Žáci podobnou hru hráli při jiných předmětech. Shodli se na tom, že tato hra patří k nejoblíbenějším a *„většinou se nějakým způsobem zapojují bezmála všichni, ačkoli to kvůli zápalu některých dopadá trochu chaoticky a hlasitě"*. Proto se jim více líbila možnost stanovit omezený počet pokusů o uhádnutí pojmů. Tím by se *„snažili systematicky uvažovat, než co nejrychleji hádat možná řešení."*

6.2 TROJÚHELNÍK TARSIA

Aktivita „Trojúhelník Tarsia“ slouží k opakování podobnosti. V této hře si žáci opakují nejenom pojmy související s podobností, ale také věty o podobnosti geometrických útvarů a trojúhelníků a dále tyto pojmy aplikují na některé příklady. Při této aktivitě dochází k rozvíjení geometrické představivosti. Žáci lépe pochopí vlastnosti podobných útvarů a tyto vlastnosti aplikují v jednotlivých příkladech. [1, str. 12] Také tato hra se zaměřuje na vyšší kognitivní cíle. Hra by se měla hrát ve skupině několika žáků. Ti tak spolu musí komunikovat, efektivně spolupracovat a vytvářet společnou diskuzi nad řešením hry. Tímto se posilují vztahy ve třídě a utváří se příjemná atmosféra v týmu. Oproti první zmíněné didaktické hře Matematický malíř však tato hra vyžaduje více času na její provedení. Tato hra byla vytvořena pomocí programu Tarsia. [35]

6.2.1 PRAVIDLA AKTIVITY

Učitel rozdělí třídu do 3 až 5 členných skupin a každé skupině rozdá 16 trojúhelníků, u jejichž stran jsou jednotlivé indicie. Úkolem žáků ve skupinách je složit z těchto menších trojúhelníků jeden velký rovnostranný trojúhelník tak, aby k sobě přiléhaly menší trojúhelníky stranami, u nichž jsou indicie, které k sobě patří.

Úlohy jsou různého druhu a stupně obtížnosti. Jsou zde například věty o podobnosti trojúhelníků, ke kterým žáci hledají znění celých těchto vět. Dále jsou zde rozdělené věty. Na prvním trojúhelníku naleznou žáci začátek věty a na jiném konec věty. Mezi příklady naleznou žáci i několik obrázkových zadání příkladů. K těmto zadáním hledají většinou jiná grafické řešení, která odpovídají podobným útvarům ze zadání.

U některých indicií mají žáci zadaný i poměr podobnosti. Didaktická hra obsahuje i podobný typ úkolů, ale bez grafického zadání. V těchto úlohách jsou zapsány rozměry či vnitřní úhly geometrických útvarů, ke kterým žáci taktéž hledají podobné útvary. V rámci příkladů jsou zde i dva příklady na měřítko mapy, ve kterých žáci vypočítávají vzdálenost na mapě a ve skutečnosti.

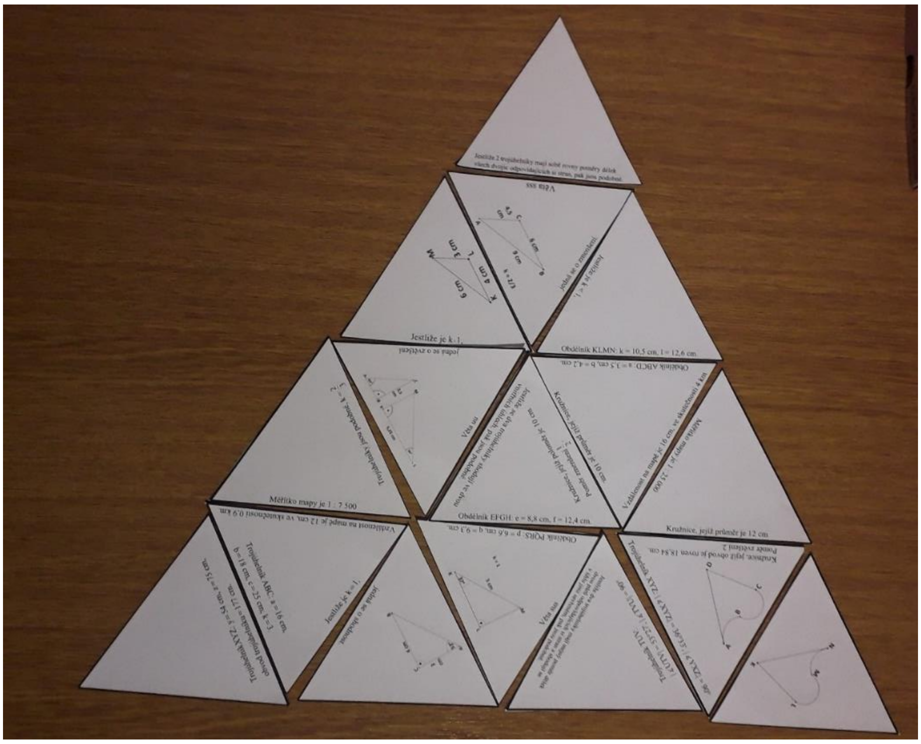
Hrací karty k aktivitě se nacházejí v příloze č. 3. Řešení aktivity je uvedeno v příloze č. 4.

6.2.2 OBMĚNA AKTIVITY

Tuto úlohu lze i zjednodušit. Je možné např. rozstříhat řešení úloh a žáci budou hledat pouze odpovídající si dvojice a nemusí již skládat rovnostranný trojúhelník. Řešení je zapsáno ve shodných obdélnících, takže lze tyto obdélníky vytisknout na tvrdší papír, rozstřihat a hru pozměnit na pexeso. V takovém případě by bylo úkolem nalézt k sobě odpovídající si podobné útvary a správné indicie.

6.2.3 ZHODNOCENÍ AKTIVITY

Žákům se tato aktivita velmi líbila a hrála se jim dobře. Někteří ji označili i jako nejlepší hru. V úvodních minutách aktivity si však nebyli jisti tím, jak k sobě některá tvrzení a útvary patří, neboť v některých případech bylo možné více eventualit. Po přiložení více trojúhelníků k sobě, jim už pravidla aktivity byla srozumitelnější. Z toho plyne i názor, že pokud by skládali trojúhelník ve škole při prezenční výuce, nejspíše by zpočátku potřebovali čas na rozvržení práce (preferovali by menší skupinky). Také by bylo vhodné dát ukázkový příklad toho, jak se trojúhelníky mají k sobě skládat. Žáci si chválili komplexní opakování podobnosti – nejen samotnou teorii, ale také její užití v úlohách.



Obrázek 37 - Trojúhelník Tarsia sestavený žákyní

(Autor: Aneta Baureová)

6.3 HLEDÁNÍ PODOBNÝCH ÚTVARŮ

Tato aktivita by měla žákům pomoci s rozhodnutím, zda jsou či nejsou dané dva útvary podobné. Při této aktivizující výukové metodě tak žáci manipulativní činností snáze heuristicky objevují poznatky z podobnosti a také si mohou experimentálně ověřit dané vlastnosti na konkrétních příkladech. [28, str. 44] Někteří učitelé podílející se na distribuci dotazníků svým žákům tvrdili, že tematický celek podobnost je pro děti obtížný z důvodu náročnosti na představivost. Z tohoto důvodu byla navržena zmíněná aktivita. Bylo by vhodné ji zařadit v úvodních hodinách podobnosti, neboť právě při těchto hodinách se žáci seznamují s pojmem podobnost. Snaží se rozlišit podobnost v matematice a podobnost v reálném životě a také se seznamují s podobnými útvary. Žáci díky této aktivitě lépe pochopí vlastnosti podobných útvarů a dokáží poznat podobné útvary. Dále jsou schopni rozpoznat nepřítomnost entity, která zapříčiní, že dva dané geometrické útvary nejsou podobné.

6.3.1 PRAVIDLA AKTIVITY

Aktivitu lze rozdělit na dvě části. V první fázi žáci obdrží balíček několika karet, na kterých se nachází geometrické útvary. Každý útvar má v tomto balíčku k sobě odpovídající podobný útvar. Žáci mají za úkol nalézt dvojice těchto útvarů. Tyto kartičky mohou žáci umístit proti světelnému zdroji a přikládat k nim ostatní kartičky s geometrickými útvary, které lze různě natočit. Žáci tak snáze poznají dvojice podobných útvarů. Druhá část této aktivity spočívá v přidání dalších kartiček, v rámci kterých už k některým útvarům nelze přiřadit odpovídající podobný útvar (příloha č. 6). Při této aktivizující výukové metodě tak žáci manipulativní činností snáze heuristicky objevují poznatky z podobnosti a také si mohou experimentálně ověřit dané vlastnosti na konkrétních příkladech. [28, str. 44] [36, s. 75]

Všechny úlohy (zadání a řešení) jsou uvedeny v přílohách č. 5 a č. 6.

6.3.2 OBMĚNA AKTIVITY

Kromě možnosti zmíněné v pravidlech, lze aktivitu doplnit dalšími variantami. Žáci mohou po seskupení podobných útvarů určovat jejich poměr podobnosti. Nejdříve by změřili vzdálenost dvou bodů v jednom útvaru a poté by změřili vzdálenost jim odpovídajících bodů v druhém útvaru. Na základě toho mohou říct, zda se jedná o zvětšení či zmenšení. Došlo by tak k procvičení zlomků a desetinných čísel. Zároveň by mohli žáci porovnat tento poměr s jinou skupinou. Je totiž velmi pravděpodobné, že jiné skupině by vyšel převrácený poměr. Tímto by si žáci uvědomovali důležitost pořadí dvou podobných útvarů.

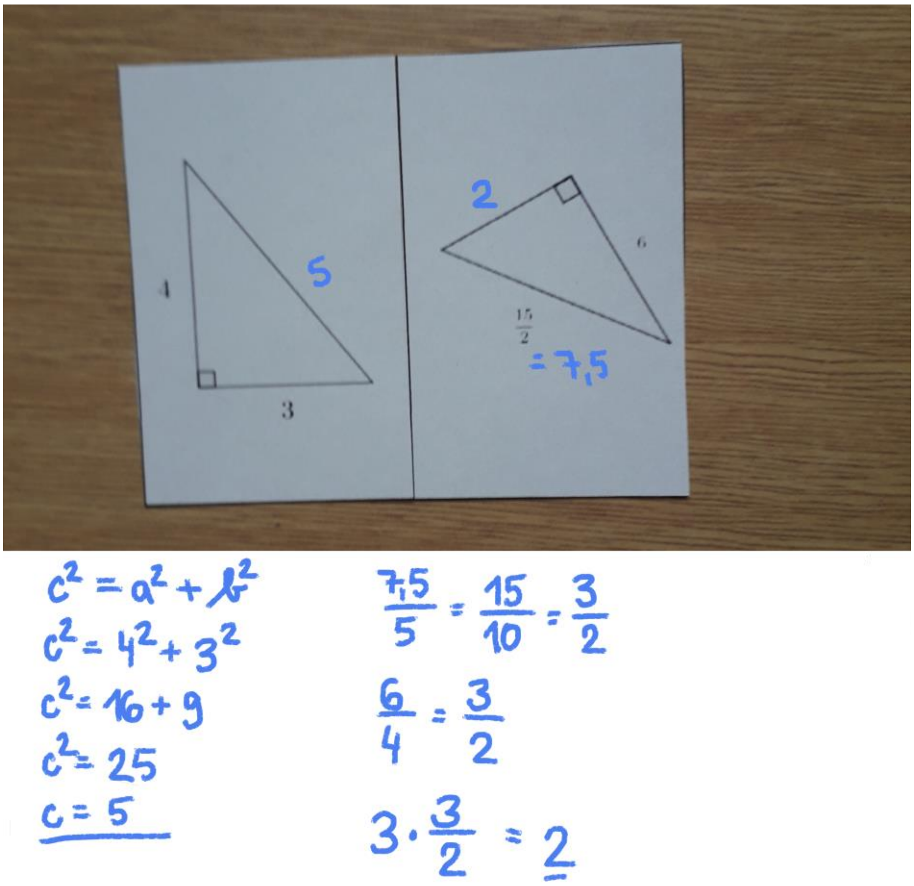
Při jiné obměně by bylo možné vyčlenit podobné trojúhelníky a dále s nimi pracovat. Žáci by zde opět vypočetli poměr podobnosti a poté by mohli říct, podle jaké věty jsou podobné. S těmito větami by dále mohli pracovat a pokusit se je zobecnit pro pravoúhlé a rovnoramenné trojúhelníky.

Pro větší podporu sociálních kompetencí lze hru následovně upravit. Učitel by každému žákovi rozdal 1 kartičku s určitým geometrickým útvarem a na pokyn učitele by se žáci po třídě vzájemně navštěvovali a hledali k sobě odpovídající podobný útvar.

V rámci těchto obměn se hra mění na komplexní aktivitu, která je zaměřená téměř na veškeré příklady týkající se podobnosti, kromě aplikačních úloh.

6.3.3 ZHODNOCENÍ AKTIVITY

Žákům se hra hrála poměrně snadno a také předpokládali, že i jejich spolužákům by nedělala velké problémy s pochopením. Myslí si však, že některé útvary měly drobné rozdíly, kvůli kterým útvary nebyly podobné. Z tohoto důvodu by někteří mohli podobné útvary chybně určit. Kladně hodnotili možnost si kartičky vzájemně promítnout proti světelnému zdroji a tím tak lépe určit, zda útvary jsou nebo nejsou podobné. Na zaslané fotografii lze vidět i postup, při kterém jedna žákyně dopočítávala délky stran pravoúhlého trojúhelníku pomocí Pythagorovy věty. V rámci ostatních didaktických her a aktivit je však hledání podobných útvarů příliš nezaujalo. Přesto se shodli, že by jim více v úvodních hodinách pomohla s větším pochopením podobnosti (dle jednoho žáka: *„Z her si to člověk snáz zapamatuje.“*). Někteří by ke hře přidali více kartiček pro větší možnost procvičení.



Obrázek 38 - Dvojice podobných útvarů - řešení

(Autor: Aneta Bauerová)

6.4 HRA DOBBLE

Mezi nejpopulárnější hry posledních let patří hra Dobble. Tuto hru vymyslel francouzský matematik Jacques Cottereau. Spočívá v nalezení podobného symbolu na kartách

a postupné zbavení se všech svých karet. Didaktickým cílem je opět nalezení podobných útvarů. Jedná se tedy o obměněnou předchozí hru poněkud zábavnější formou.

Tato aktivita by měla žákům také pomoci s rozhodnutím, zda jsou či nejsou dané dva útvary podobné. Zároveň využívá znalostí žáků o této hře a snaží se žákům představit její matematické pozadí a tím matematiku celkově zatraktivnit. Navíc také podporuje obecné myšlení žáků. Hru je vhodné zařadit pro aktivizaci žáků (např. na úvod či závěr hodiny pro zopakování osvojených si vědomostí). Přesto by tato hra neměla vést k nezávaznému hraní a utajenému poznávaní. Naopak by si zde žáci měli uvědomovat vlastnosti podobných útvarů.

6.4.1 PRAVIDLA HRY

Učitel rozdělí třídu do 3 nebo 4 členných skupin a každé skupině rozdá soubor hracích karet. Žáci karty zamíchají, jednu z nich položí do středu stolu rubem nahoru a zbylé karty si rozdělí. Poté se otočí karta uprostřed stolu a hráči hledají co nejrychleji podobný útvar na své a středové kartě. Musí podobné útvary slovy pojmenovat a poté můžou do středu položit svou kartu. Vítězem se stává ten, kdo se první zbaví všech svých karet. Klasické Dobble obsahuje pouze přímo podobné útvary. Na základě podnětu od žáků byla vytvořena varianta, která obsahuje i nepřímo podobné geometrické útvary. Dále bylo přidáno odlišné zbarvení podobných geometrických útvarů. Díky tomu žáci musí abstrahovat geometrické útvary a odhlédnout od vlastností, které nemají vliv na podobnost útvarů.

6.4.2 OBMĚNA HRY

Při druhé variantě této hry obdrží každý hráč 1 kartu. Do středu stolu se dá balíček zbylých karet. Hráči hledají podobný symbol na své a středové kartě. Kdo jej nalezne jako první, může si vzít tuto kartu. Po dobrání středového balíčku karet hra končí. Každý z hráčů si přepočte získané karty a hráč s nejvyšším počtem karet vítězí.

6.4.3 ZHODNOCENÍ HRY

Žáky tato hra velmi zaujala, neboť podobnou hru často hrají. Neuvědomovali si však její matematický princip podobnosti. Shodli se ale na tom, že pro většinu jejich spolužáků by mohlo jít o zajímavou hru a zpestření hodin. Žáci původně pracovali s lehčí verzí, ve které se nacházejí pouze přímo úměrné geometrické útvary a matematické pomůcky. Proto navrhli, že některé obrázky by ve hře Dobble mohly být nepřímo podobné a barevně odlišné. Rozšířená varianta je v příloze č. 7.

ZÁVĚR

V úvodu diplomové práce se analyzuje tematický celek podobnost v kurikulárních dokumentech. Jelikož se tato práce zabývá výukou na základních školách, jedná se především o Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Dále se diplomová práce zabývá studiem školních vzdělávacích programů škol, jejichž žáci se zúčastnili výzkumu uvedeném v kapitole č. 5.

V dalších kapitolách č. 2 a č. 3 byly shrnuty vědomosti, které si žáci během výuky na základní škole osvojují. Tyto poznatky se netýkaly pouze podobnosti, ale i dalších témat, které s podobností úzce souvisejí (např. shodnost či stejnolehlost). Diplomová práce obsahuje i přesah těchto vědomostí, neboť se podobností a podobnými zobrazeními zabývají i studenti středních a vysokých škol.

Na teorii navazuje čtvrtá kapitola s příklady, které žáci standardně řeší při výuce matematiky na základní škole. Tyto příklady byly rozděleny do tří skupin. V první se nacházejí příklady týkající se podobnosti geometrických útvarů, ve druhé skupině jsou umístěny úlohy, které se zabývají podobností trojúhelníků. Do třetí kategorie jsou situovány slovní úlohy s praktickým využitím podobnosti v reálných situacích. Cílem této kapitoly bylo vytvořit menší sbírku příkladů různé obtížnosti, které lze řešit s využitím podobnosti útvarů.

Praktická část diplomové práce se zabývá analýzou znalostí žáků 9. ročníků v Plzeňském kraji. Úlohy, jež měli žáci za úkol vyřešit, byly různé obtížnosti a byly převzaty z několika učebnic matematiky a sbírek příkladů. Výzkum probíhal v průběhu distanční výuky, proto byli žáci dotazováni i na další otázky, které umožnily hlubší analýzu jednotlivých odpovědí. Z výsledků tohoto experimentu vyplývá, že většina žáků si osvojila základní vědomosti týkající se podobnosti a tyto poznatky umí i aplikovat. Především pokud se jedná o úlohy týkajících se základních geometrických útvarů. Pokud se však pracuje se složitějšími útvary, vyskytuje se u žáků větší chybovost. Obzvláště jedná-li se o slovní úlohy, které jsou pro žáky obecně náročnější. Ze závěrečných otázek vyplývá, že žákům by k lepšímu pochopení tématu podobnost pomohlo zařazení většího množství úloh s praktickým využitím podobnosti.

Poslední šestá kapitola představuje několik didaktických her a aktivit, které mají žáky nejen motivovat ke studiu podobnosti, ale především pomoci žákům s osvojením si tématu podobnosti. Tyto aktivity měly být vyzkoušeny během souvislé pedagogické praxe. Z důvodu pandemie Covid-19 a distanční výuky, nebylo možné tyto aktivity vyzkoušet. Přesto je dobrovolně vyzkoušeli tři žáci Základní školy ve Švihově, kteří poskytli zpětnou vazbu o těchto didaktických hrách a pomůckách.

RESUMÉ

Tato diplomová práce se zabývá tematickým celkem podobnost vyučovaném na základních školách. Cílem diplomové práce byla analýza znalostí žáků 9. ročníku základních škol a dále vytvoření didaktických her a aktivit, které žáky nejen motivují, ale také pomohou s osvojením vědomostí týkajících se podobnosti.

První kapitola je věnována rozboru kurikulárních dokumentů - Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání a školních vzdělávacích programů. Následuje shrnutí teorie vztahující se k tomuto tématu. V další kapitole je zařazeno několik úloh, které žáci standardně řeší při výuce. Předposlední kapitola se věnuje průzkumu znalostí žáků 9. ročníků ZŠ. Závěrečná kapitola obsahuje vytvořené didaktické hry a aktivity.

This diploma thesis is focused on the topic of teaching the similarity at elementary schools. The aim of the diploma thesis was to analyse the knowledge of students of the 9th grade of elementary school and create didactic games and activities that not only motivate students, but also help with the acquisition of knowledge related to similarity.

The first chapter is devoted to the analysis of curricular documents - the Framework Educational Program for Basic Education and school educational programs. The following chapter is a summary of the theory related to this topic. The next chapter includes several tasks that students solve by study. The penultimate chapter is devoted to the research of the knowledge of students of the 9th grade of elementary school. The final chapter contains created didactic games and activities.

SEZNAM ZDROJŮ

[1] COX, Dana Christine. *Understanding Similarity: Bridging Geometric and Numeric Contexts for Proportional Reasoning*. Western Michigan University, 2008.

[2] RVP ZV 2017, Národní pedagogický institut České republiky. Národní pedagogický institut České republiky (dříve Národní ústav pro vzdělávání) [online]. Copyright © [cit. 15. 02. 2021]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/4986/

[3] ŠAROUNOVÁ, Alena. *Hrátky s podobností*. Učitel matematiky, 2016, 24(4 (100)), s. 223-230. ISSN 1210-9037.

[4] RVP ZV 2021, Národní pedagogický institut České republiky. Národní pedagogický institut České republiky (dříve Národní ústav pro vzdělávání) [online]. Copyright © [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/4983/

[5] Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání základní školy Švihov. [online]. Copyright © [cit. 21. 02. 2021]. Dostupné z: https://dynaweb.cz/zssvihov/user/2020/Dokumenty/svp_zv_zs_2017_0.pdf

[6] Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání, Tvořivá škola pro všechny. 28. základní škola Plzeň [online]. [cit. 21. 02. 2021] Dostupné z: https://zs28.plzen.eu/skola/svp/svp.aspx

[7] Školní vzdělávací program pro ZV Sluníčko. 10. základní škola Plzeň. [online]. Copyright © 10. základní škola Plzeň [cit. 21. 02. 2021]. Dostupné z: https://zs10.plzen.eu/domu/skolni-vzdelavaci-program/skolni-vzdelavaci-program-7.aspx

[8] Školní vzdělávací program - matematika 9 [online]. Copyright © 20. základní škola Plzeň [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné z: https://zs20.plzen.eu/informace-pro-rodice/dokumenty-ke-stazeni/dokumenty-ke-stazeni.aspx

[9] Školní vzdělávací program. Nová škola Domažlice. [online]. Copyright © 2021 [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné z: https://www.novaskoladomazlice.cz/rodice/skolni-vzdelavaci-program/

[10] JEDLIČKOVÁ, Michaela, KRUPKA, Peter a NECHVÁTALOVÁ, Jana. *Matematika: shodnost geometrických útvarů, souměrnosti: učebnice vytvořená v souladu s RVP ZV.* První vydání. Brno: Nová škola, s.r.o., 2014. 64 s. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-578-6.

[11] Geometrická zobrazení v rovině. Studijní opory planimetrie [online]. [cit. 10. 03. 2021]. Dostupné z: https://homel.vsb.cz/~dol75/StudOpory/ZakladyGeometrie/Planimetrie/GeometrickaZobrazeni/GeometrickaZobrazeni.html

[12] ŘEPÍKOVÁ, Alena. *Přehled matematiky: pro 2. stupeň základní školy.* 1. vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost, 2013. 239 s. ISBN 978-80-7235-516-7.

[13] COUFALOVÁ, Jana et al. *Matematika pro 9. ročník základní školy.* 2. vydání. Praha: Fortuna, 2007. 221 s. ISBN 978-80-7168-995-9.

[14] HERMAN, Jiří et al. *Matematika: [pro nižší třídy víceletých gymnázií - kvarta]. Podobnost a funkce úhlu.* 1. vydání. Praha: Prometheus, 2000. 175 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-206-6.

[15] MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 9: učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc: Prodos, 2001. 127 s. ISBN 80-7230-108-X.

[16] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Přehled matematiky: pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vydání. Praha: Prometheus, 2000. 270 s. ISBN 80-7196-276-7.

[17] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 9. ročník základní školy. (2), Jehlan, kužel, koule, podobnost, goniometrické funkce.* 3., přepracované vydání. Praha: Prometheus, 2013. 90 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 978-80-7196-441-4.

[18] COUFALOVÁ, Jana et al. *Matematika pro sedmý ročník základní školy.* 1. vydání. Praha: Fortuna, 1999. 288 s. ISBN 80-7168-678-6.

[19] PŮLPÁN, Zdeněk, ČIHÁK, Michal a TREJBAL, Josef. *Matematika 9 pro základní školy. Geometrie: s rozšířením o kapitoly statistika a pravděpodobnost pro zájemce.* 1. vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010. 102 s. ISBN 978-80-7235-489-4.

[20] JOUKLOVÁ, Monika. *Shodnost a podobnost v učebnicích matematiky od roku 1935.* [online] Hradec Králové, 2015 [cit. 10. 05. 2021]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/262610/ff_b/Bakalarska_prace_262610.pdf Diplomová práce. Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta. RNDr. Marie Kupčáková, Ph.D.

[21] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie.* 3. vydání. Praha: Prometheus, 2000. 206 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4.

[22] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia. Stereometrie.* 3. vydání. Praha: Prometheus, 2000. 223 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-178-9.

[23] KRUPKA, Peter. *Sbírka úloh z matematiky: pro 2. stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií.* 2. díl. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2012. 367 s. ISBN 978-80-7196-313-4.

[24] PRESOVÁ, Jana, DAVIDOVÁ, Jana a HERMOCHOVÁ, Dana. *Hravá matematika 9: pracovní sešit pro 9. ročník ZŠ a víceletá gymnázia.* 2. vydání. Praha: Taktik, 2017. 120 stran. ISBN 978-80-7563-099-5.

[25] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Pracovní sešit z matematiky: soubor úloh pro 9. ročník základní školy.* 1. vydání. Praha: Prometheus, 2000. 184 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-227-9.

[26] BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 6., přeprac. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. 204 s. Pomocné knihy pro žáky. ISBN 80-04-26365-8.

[27] POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky: Jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. 1. vydání. Plzeň: Fraus, 2014. 431 s. ISBN 978-80-7238-449-5.

[28] POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně. II. část, Obecná didaktika matematiky.* 1. vydání. Plzeň: Fraus, 2016. 158 s. ISBN 978-80-7489-326-1.

[29] RŮŽIČKOVÁ, Bronislava. *Didaktika matematiky.* 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2002. 120 s. ISBN 80-244-0534-2.

[30] KÁROVÁ, Věra. *Didaktické hry ve vyučování matematice v 1. - 5. ročníku základní a obecné školy. Část geometrická.* 3. vydání. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004. 52 s. ISBN 80-7043-303-5.

[31] ČAPEK, Robert. *Moderní didaktika: lexikon výukových a hodnoticích metod.* 1. vydání. Praha: Grada, 2015. 604 stran, 16 nečíslovaných stran obrazových příloh. Pedagogika. ISBN 978-80-247-3450-7.

[32] ČAPEK, Robert. *Líný učitel: jak učit dobře a efektivně*. 1. vydání. Praha: Raabe, společně pro kvalitní vzdělávání, [2017], ©2017. 140 stran. Dobrá škola. ISBN 978-80-7496-344-5.

[33] ETZOLD, Heiko a PETZSCHLER, Ines. *Nápadník aktivit a her do hodin matematiky.* 1. vydání. Brno: Edika, 2013. 120 s. ISBN 978-80-266-0174-6.

[34] SUCHORADSKÝ, Oldřich. *Policejní výslech*. Metodický portál RVP.cz [online]. [cit. 15. 03. 2020]. Dostupné z: http://wiki.rvp.cz/Sborovna/6.Aktivity/ZZruzne/POLICEJN%c3%8d_V%c3%9dSLECH

[35] Tarsia. *Information on Formulator Tarsia.* Hermitech Laboratory. [online]. Copyright © 2003 [cit. 22. 02. 2020]. Dostupné z: http://www.mmlsoft.com/index.php/products/tarsia

[36] Metodický portál RVP - Modul články. Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání. [online]. [cit. 12. 01. 2021]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/wpcontent/upload/prilohy/20617/matematika.pdf

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM GRAFŮ

SEZNAM TABULEK

PŘÍLOHY