

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA PEDAGOGICKÁ  
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

**SOUBOR INTERAKTIVNÍCH ÚLOH KRUHOVÉ INVERZE**  
DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Bc. Pavel Trenčan**

*Učitelství základní školy, obor Učitelství matematiky pro základní školy*

Vedoucí práce: Honzík Lukáš, PhDr. Ph.D.

**Plzeň 2021**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně  
s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 21. června 2021

.....  
vlastnoruční podpis

## **Poděkování**

Rád bych těmito řádky poděkoval, panu Lukáši Honzíkovi, PhDr. Ph.D., jenž byl vedoucím této kvalifikační práce. Jeho cenné rady, typy a doporučení pro mě byly velice přínosné a inspirativní. Jakákoliv forma práce je v dnešní „covidové“ době velice časově náročná, a proto jsem rád, že si na mě udělal čas vždy, když jsem potřeboval konzultaci.

Zároveň bych nechtěl zapomenout na členy své rodiny a své přátele. Těm patří veliké díky za podporu, kterou mi prokazovali, během celého vysokoškolského studia.

## OBSAH

SEZNAM ZKRATEK .....	3
ÚVOD .....	4
1 KRUHOVÁ INVERZE – ZÁKLADNÍ POJMY, DEFINICE A VLASTNOSTI .....	6
1.1 DEFINICE A KONSTRUKCE KRUHOVÉ INVERZE .....	7
1.1.1 Příklad .....	8
1.2 VLASTNOSTI KRUHOVÉ INVERZE .....	9
1.3 ZOBRAZENÍ OBJEKTŮ V KRUHOVÉ INVERZI .....	12
1.3.1 Zobrazení kružnice a přímky .....	12
1.4 VYUŽITÍ KRUHOVÉ INVERZE .....	18
1.4.1 Ptolemaiova věta .....	18
1.4.2 Důkaz Pythagorovy věty .....	20
2 KRUHOVÁ INVERZE V PŘÍKLADECH .....	21
2.1 ÚLOHY NA OMEZENÉ NÁKRESNĚ .....	21
2.1.1 Příklad .....	21
2.1.2 Příklad .....	22
2.1.3 Příklad .....	23
2.2 APOLLONIOVY ÚLOHY .....	24
2.2.1 Definice a historie Apolloniových úloh .....	24
2.2.2 Úloha typu BBB .....	26
2.2.3 Úloha typu BBp .....	28
2.2.3.1 Příklad .....	28
2.2.4 Úloha typu Bpp .....	29
2.2.4.1 Příklad .....	30
2.2.5 Úloha typu BBk .....	31
2.2.5.1 Příklad .....	32
2.2.6 Úloha typu Bkk .....	33
2.2.6.1 Příklad .....	34
2.2.6.2 Příklad .....	35
2.2.7 Úloha typu Bpk .....	36
2.2.7.1 Příklad .....	36
2.2.8 Úloha typu ppp .....	37
2.2.9 Úloha typu ppk .....	37
2.2.10 Úloha typu pkk .....	38
2.2.10.1 Příklad .....	39
2.2.11 Úloha typu kkk .....	40
2.2.11.1 Příklad .....	40
2.2.11.2 Příklad .....	41
2.2.12 Pappovy úlohy .....	42
2.3 SPECIÁLNÍ ÚLOHY ŘEŠENÉ POMOCÍ KRUHOVÉ INVERZE .....	43
2.3.1 Pappova věta o kružnicích .....	43
2.3.2 Příklad .....	45
2.3.3 Příklad .....	46
2.3.4 Příklad .....	48
2.3.5 Vznik racionálních čísel a kruhová inverze .....	50
3 KUŽELOSEČKY V KRUHOVÉ INVERZI .....	53
3.1 ZÁKLADNÍ INFORMACE O KUŽELOSEČKÁCH .....	53

---

3.2	ELIPSA .....	54
3.2.1	Zobrazení elipsy v kruhové inverzi.....	55
3.3	PARABOLA.....	60
3.3.1	Zobrazení paraboly v kruhové inverzi.....	60
3.4	HYPERBOLA .....	63
3.4.1	Zobrazení hyperboly v kruhové inverzi .....	64
3.5	SHRNUTÍ KUŽELOSEČKY V KRUHOVÉ INVERZI – PŘEHLED.....	69
4	VYBRANÉ ROVINNÉ KŘIVKY V KRUHOVÉ INVERZI .....	70
4.1	LOGARITMICKÁ SPIRÁLA .....	70
4.2	GONIOMETRICKÉ FUNKCE A KRUHOVÁ INVERZE.....	71
4.3	RŮŽE A KRUHOVÁ INVERZE .....	73
4.3.1	Zobrazení růže v kruhové inverzi.....	75
5	SOUBOR INTERAKTIVNÍCH ÚLOH – ONLINE.....	77
5.1	GEOGEBRA.....	77
5.2	GEOGEBRA KNIHA.....	77
5.3	KRUHOVÁ INVERZE A WOLFRAM MATHEMATICA .....	78
	ZÁVĚR.....	80
	RESUMÉ .....	81
	SEZNAM LITERATURY .....	82
	SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ .....	85
	PŘÍLOHY .....	I

**SEZNAM ZKRATEK**

DP – diplomová práce

$INV(\omega)$  – kruhová inverze podle kružnice  $\omega$

MBDV – množina bodů dané vlastnosti

MBKK – mocnost bodu ke kružnici

popř. – popřípadě

pozn. - poznámka

spol. – společný

STEJNO – stejnolehlost

tj. – to je

tzn. – to znamená

tzv. – takzvaný

var. – varianta

VŠ – vysoká škola

ZŠ – základní škola

## Úvod

Historie kruhové inverze sahá již do období starověku. Není proto divu, že od té doby bylo napsáno mnoho knih, článků a jiných publikací věnujících se problematice, jejíž téma jsme zvolili jako stěžejní pro obsah této diplomové práce. Mnohým zájemcům o matematiku může toto téma připadat jako vyčerpané. Tato kvalifikační práce však nahlíží na téma kruhové inverze z trochu jiného pohledu a nabízí určitou nadstavbu oproti jiným textům.

Pro současnou společnost jsou charakteristické rychlé a dynamické změny, které se odráží v životě každého z nás. Snad největší progres můžeme spatřit v rozvoji vědy a výzkumu, jež se odráží ať už v lékařství (vývoj léků), tak především v rozvoji IT technologií. Tyto technologie nám mohou pomoci nejen ve výkonu každodenních činností, ale jako učitelé v nich můžeme nalézt velikou oporu a také skvělého pomocníka využitelného během vyučovací hodiny. Vědci a odborníci se neustále podílí na vývoji nových aplikací. Mnoho z nich lze využít v rámci vzdělávání. Jedním ze známých a hojně využívaných programů je software GeoGebra. Tento software dynamické geometrie si našel své místo v průběhu vyučovacího procesu mnoha učitelů, a proto jsme se rozhodli skloubit problematiku kruhové inverze právě s tímto softwarem dynamické geometrie, čímž došlo k vytvoření souboru interaktivních úloh.

První kapitola DP je věnována základním definicím, větám a vybraným vlastnostem kruhové inverze. Těchto několik úvodních stránek shrnuje nejdůležitější informace využitelné v průběhu řešení některých úloh. V závěru první části dochází k propojení kruhové inverze se středoškolskou matematikou, v čemž pokračujeme i ve druhé kapitole. Ta se věnuje tradičním Apolloniovým úlohám, Pappovým úlohám a také konstrukcím řešitelným na omezené nákresně. Navíc se zde zaměřujeme na speciální příklady řešené pomocí kruhové inverze.

Ve třetí části soustředíme pozornost na kuželosečky, jejichž zobrazením získáváme některé méně známé křivky (např. využíváme závislosti na poloměru a poloze středu KI). V úplném závěru jsou důležité informace shrnuty v přehledné tabulce. Ve čtvrté části došlo k zaměření na vybrané křivky (např. na goniometrické funkce nebo křivku rose). Poslední pátá kapitola obsahuje základní informace o softwaru GeoGebra a „projektu“

Kniha GeoGebra nabízející čtenáři interaktivní interpretaci některých vět, příkladů a jiných úloh. Jednu z podkapitol jsme věnovali propojení kruhové inverze s progresivním softwarem Mathematica.

Celá práce je psána poměrně čtivým a nepřiliš náročným jazykem umožňující snazší přístup k poznatkům o kruhové inverzi. I přes to, že mnoho publikací nabízí komplexní pohledy na problematiku kruhové inverze, využili jsme během psaní této kvalifikační práce několika zdrojů (včetně zahraničních). Práce všech autorů uvedených v závěru diplomové práce se stala velkou inspirací.

Všem čtenářům této práce, především těm, kteří neznají software GeoGebra, doporučujeme přečíst 5. kapitolu. Nachází se zde odkaz na knihu obsahující interaktivní podobu úloh, respektive některých souborů, se kterými lze v rámci jednotlivých kapitol pracovat.



## 1 KRUHOVÁ INVERZE – ZÁKLADNÍ POJMY, DEFINICE A VLASTNOSTI

Dříve, než se v rámci této diplomové práce dostaneme na samotnou část věnující se souboru interaktivních úloh kruhové inverze, je zapotřebí se v první kapitole věnovat důležitým pojmům a definicím týkající se problematiky kruhové inverze.

V průběhu studia na střední a základní škole se v rámci geometrie žáci setkávají především s lineárními zobrazeními (např. osová a středová souměrnost, posunutí atd.). Kruhovou inverzi řadíme mezi **nelineární zobrazení** (Blažek, 1995), kdy například v některých případech dojde k zobrazení přímky na kružnici.

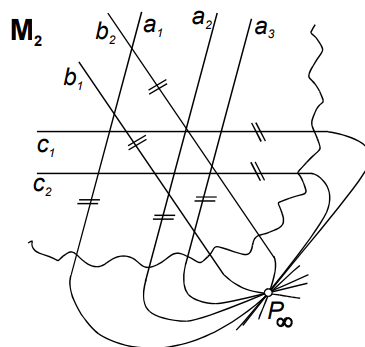
Autoři mnoha publikací se věnují této problematice v euklidovské rovině  $E_2$ . Tvůrci novějších knih se této problematice věnují nově v tzv. **Möbiově<sup>1</sup> rovině**  $M_2$ , se kterou pracujeme i v této diplomové práci. Dojde tím k určitému ulehčení a zajistíme tím, aby pro každý bod zobrazený v kruhové inverzi existoval jeho obraz.

**Definice: Möbiovou rovinou** rozumíme rovinu  $E_2$  rozšířenou o **nevlastní bod**  $P_\infty$ , kterým prochází každá přímka a nachází se vně každé kružnice sestavené v  $E_2$ . Značíme ji  $M_2$ , kdy:

$$M_2 = E_2 \cup \{P_\infty\}$$

**Vlastním bodem** nazveme každý bod množiny  $E_2$ . Přímku roviny doplněnou o bod  $P_\infty$  pojmenujeme jako **rozšířenou přímku**  $(a_1, b_1, c_1, a_2, \dots)$ .

(Lávička, 2002)



Obrázek 1: Möbiův prostor (Lávička, 2002)

<sup>1</sup> Název: August Ferdinand Möbius (1790-1868) – německý astronom a matematik zabývající se matematickými vlastnostmi prostoru

**Definice:** Všechny kružnice a přímky pojmenujeme shodně jako **kruhové křivky**.

(Lávička, 2002)

Na obrázku 1 vidíme příklady kruhových křivek  $(a_1, b_1, c_1, a_2, \dots)$  v  $\mathbb{M}_2$ . Mějme libovolné kruhové křivky  $p, q$ , poté platí:

- jestliže  $p$  prochází nevlastním bodem  $P_\infty$ , pak ji nazveme rozšířenou přímkou, v opačném případě se jedná o kružnici
- $p$  a  $q$  se protínají alespoň v 1 bodě, nejvýše však ve 2 bodech
- kruhová křivka je jednoznačně určena 3 body

### 1.1 DEFINICE A KONSTRUKCE KRUHOVÉ INVERZE

Nyní již víme, v jakém prostoru se pohybujeme, a proto se můžeme podívat na samotnou kruhovou inverzi.

**Definice:** Mějme **Möbiovu rovinu**  $\mathbb{M}_2$ , v níž je dána kružnice  $\omega$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$ , a bod  $X \neq S, P_\infty$ , jehož obrazem je bod  $X'$  náležící polopřímce  $SX$ . Poté je **zobrazení**  $INV(\omega)$  dáno předpisem:

1. Bod  $S$  se zobrazí do nevlastního bodu  $P_\infty$ .
2. Nevlastní bod  $P_\infty$  se zobrazí do  $S$ .
3. Pro bod  $X'$  (obraz bodu  $X$ ) platí, že:

$$|SX'| \cdot |SX| = r^2$$

V souvislosti se zobrazením  $INV(\omega)$  užíváme následující pojmy:

$INV(\omega)$  – **kruhová inverze** (inverze podle kružnice  $\omega$ )

$\omega$  – **základní kružnice**

$S$  – **střed kruhové inverze**

$r^2$  – **koeficient kruhové inverze** (mocnost kruhové inverze)

Ve výše uvedené definici jsme si zavedli kruhovou inverzi, pomocí níž bychom mohli zobrazit jakýkoliv objekt. Zobrazení nevlastního bodu  $P_\infty$  a středu  $S$  je zřejmé z definice. Nyní se zaměříme pouze na 3. bod z definice, kde zobrazíme libovolný bod  $X$  v kruhové inverzi  $INV(\omega)$ .<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Všechny konstrukce v této diplomové práci jsou prováděny v programu GeoGebra. Soubory jednotlivých příkladů jsou dostupné na CD, které je přiloženo k tištěné podobě. Některé soubory nalezneme i v GeoGebra knize.

**1.1.1 PŘÍKLAD**

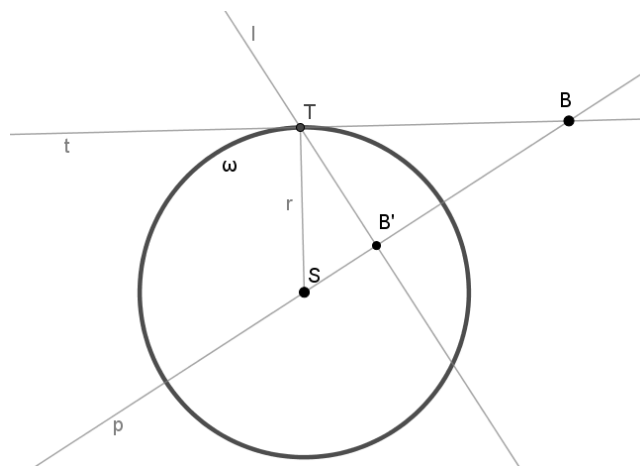
V kruhové inverzi  $INV(\omega)$  se středem  $S$  zobraz bod  $B$ , jenž se nachází vně kružnice  $\omega$ .

**Rozbor:**

V úloze máme dānu kruhovou inverzi  $INV(\omega)$  se středem  $S$  a libovolným poloměrem  $r$  tak, aby se bod  $B$  nachāzel vně kružnice  $\omega$ . Během této konstrukce využijeme Euklidovy věty o odvěsně ( $|SB| \cdot |SB'| = |ST|^2 = r^2$ ), protože trojúhelník  $STB$  s výškou  $TB$  je pravoúhlý.

**Popis konstrukce:**

1.  $\omega(S, r)$ ; bod  $B$
2.  $p$ ;  $B, S \in p$
3.  $t$ ;  $B \in t$ ,  $t$  je tečna kružnice  $\omega$
4.  $T$ ;  $T \in \omega \cap t$
5.  $l$ ;  $T \in l \wedge l \perp p$
6.  $B'$ ;  $B' \in p \cap l$

**Konstrukce:**

Obrāzek 2: Konstrukce bodu  $B$  v kruhové inverzi (Soubor 1)

**Diskuze:**

Pokud by byl zadaný bod vnitřním bodem, postupovali bychom obdobně. Obraz takového bodu se zobrazí jako vnější bod kružnice  $\omega$ . Pokud by hledaný bod ležel na kružnici, jednalo by se o samodružný bod. Pro každý bod  $X$  zobrazený v  $INV(\omega)$  existuje vždy právě jeden obraz  $X'$ .

## 1.2 VLASTNOSTI KRUHOVÉ INVERZE

Z výše uvedeného příkladu vyvodíme první ze základních vlastností kruhové inverze plynoucí přímo z její definice.

**Věta:** Obraz bodu  $X$  (bod  $X'$ ) náleží vnějšku kružnice  $\omega$  právě tehdy, když bod  $X$  je vnitřním bodem. Tato věta platí i obráceně.

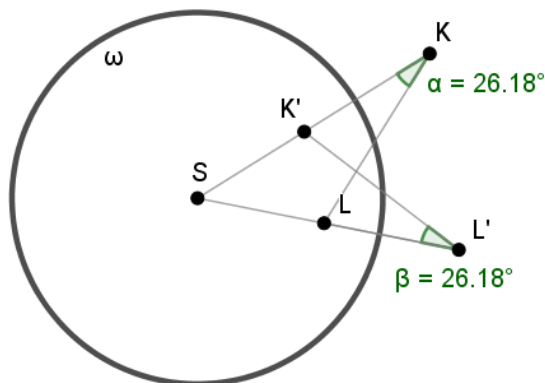
**Věta:** Pokud bod  $X \in \omega$ , platí, že bod  $X$  se v  $INV(\omega)$  zobrazí do bodu  $X'$ , kde  $X = X'$ .

**Věta:** Kruhová inverze  $INV(\omega)$  je involutorní zobrazení. To znamená  $(X')' = X$ .

*Důkaz:* Z prvních dvou bodů definice kruhové inverze je zřejmé, že pro střed kruhové inverze  $S$  platí:  $S \rightarrow P_\infty \rightarrow S$ . Obdobně tato úvaha platí i pro nevlastní bod  $P_\infty$ . Nyní musíme dokázat, že  $X \rightarrow X' \rightarrow X''$ . Z definice vyplývá, že body  $X$  a  $X'$  leží na stejné polopřímce pro každé  $r^2$ , tudíž určují stejnou polopřímku. Z třetího bodu definice dostáváme  $|SX'| \cdot |SX| = r^2$  a  $|SX''| \cdot |SX'| = r^2$ . Tím dostáváme  $|SX''| = |SX|$  tedy  $X = X''$ . (Janyška, 2020)

Jednou z důležitých vlastností kruhové inverze je, že dokáže zachovávat velikosti a vlastnosti úhlů. Lávička (2002) ve své knize uvádí několik situací, jež mohou nastat. Především u první věty je důležité vnímat pořadí bodů uvedených ve větě.

**Věta:** Mějme dánu kružnici  $\omega$  se středem  $S$  a dva libovolné body  $K$  a  $L$  různé od středu  $S$  a nevlastního bodu  $P_\infty$ . Body  $K$  a  $L$  se v  $INV(\omega)$  zobrazí na body  $K'$  a  $L'$ . Poté platí, že  $|\sphericalangle SKL| = |\sphericalangle SL'K'|$ .



Obrázek 3: Velikost úhlů (Soubor 2)

*Důkaz:* Z definice kruhové inverze vyplývá

$$|SK| \cdot |SK'| = r^2, |SL| \cdot |SL'| = r^2,$$

proto platí, že

$$|SK| \cdot |SK'| = |SL| \cdot |SL'|$$

Po úpravě dostáváme

$$\frac{|SK|}{|SL|} = \frac{|SL'|}{|SK'|}.$$

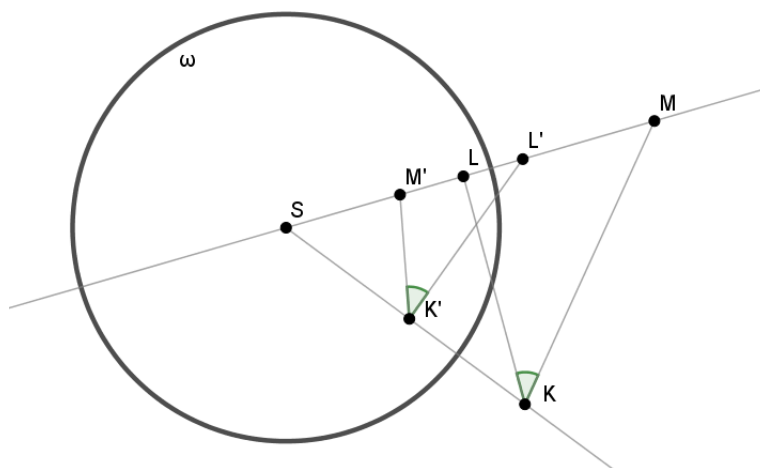
Z předpokladu vyplývá  $|\sphericalangle LSK| = |\sphericalangle L'SK'|$ , potom  $\triangle SKL \sim \triangle SL'K'$ . Z podobnosti trojúhelníku podle věty (sus) vyplývá dokazovaný závěr.

Na výše uvedenou větu se můžeme blíže podívat v Souboru 2, kde si s pomocí ukazovátka můžeme volit polohu bodů  $K$  a  $L$ . Zeleně vyznačené úhly jsou vždy stejně veliké, ať je umístění zadaných bodů  $K$  a  $L$  libovolné. Nyní se podíváme na druhou větu týkající se velikosti úhlů.

**Věta:** Mějme dánu kružnici  $\omega$  se středem  $S$  a tři body  $K, L, M$ . Pro body  $K$  a  $L$  platí, že  $K, L \neq S, P_\infty$  a v  $INV(\omega)$  přechází na body  $K'$  a  $L'$ . Dále uvažujme bod  $M \neq S, P_\infty, K, L$  ležící na přímce  $SL$ , který v  $INV(\omega)$  přechází v bod  $M'$ .

1. Pokud  $M \in \overline{SL}$ , potom platí  $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle L'K'M'|$ .
2. Pokud  $M \in \overline{SL}$ , potom platí, potom platí  $|\sphericalangle L'K'M'| = 180^\circ - |\sphericalangle LKM|$ .<sup>3</sup>

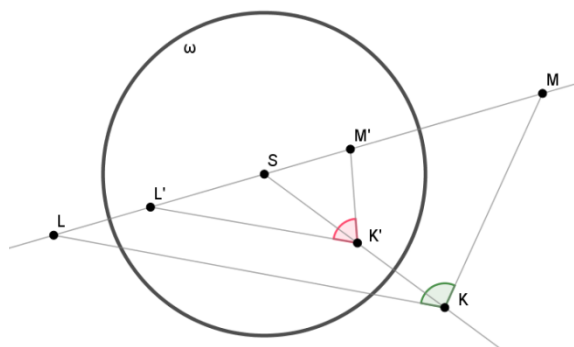
Tato věta je názorně zobrazena na obrázku 4 (pro variantu 1) a na obrázku 5 (pro variantu 2). Ilustrace vychází ze souboru 3, v němž si pomocí ukazovátka posuneme bod  $L$ , aby odpovídal variantě věty, jíž věnujeme pozornost. Důkaz uvádím pod obrázky.<sup>4</sup>



Obrázek 4: Obrázek znázorňující 1. variantu věty (Soubor 3)

<sup>3</sup>  $\overline{SL}$  značí polopřímku opačnou k polopřímce  $SL$

<sup>4</sup> Velikosti úhlů si můžeme ověřit přímo v Souboru 3.



Obrázek 5: Obrázek znázorňující 2. variantu věty (Soubor 3)

*Důkaz:* Důkaz vyplývá z věty, v níž jsme dokazovali zachování velikosti úhlu.

1. Na přímce procházející bodem  $S$  mějme uspořádané body v pořadí –  $S, L, M$ , poté platí, že  $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle SKM| - |\sphericalangle SKL| = |\sphericalangle SM'K'| - |\sphericalangle SL'K'| = |\sphericalangle L'K'M'|$ .

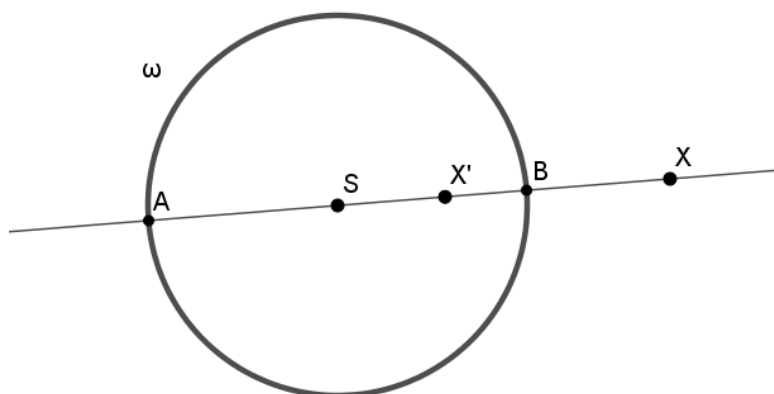
2. Na přímce procházející bodem  $S$  mějme uspořádané body v pořadí –  $L, S, M$ , pak platí, že  $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle SKM| + |\sphericalangle SKL| = |\sphericalangle SM'K'| + |\sphericalangle SL'K'| = 180^\circ - |\sphericalangle L'K'M'|$ .

V následující části se zaměříme na problematiku dvojpoměru uspořádané čtveřice bodů ve vztahu ke kruhové inverzi.

**Věta:** Mějme v kruhové inverzi body  $X \neq S$  a  $X'$ , které jsou navzájem inverzní a různé. Dále nechť jsou body  $A, B$  průsečíky přímky  $X, X'$  s kružnicí  $\omega$ . Poté body  $A, B, X, X'$  nazveme **harmonickou čtveřicí bodů přímky**. Neboli platí, že:

$$(ABXX') = -1$$

(Šedivý, 1987)



Obrázek 6: Dvojpoměr uspořádané čtveřice bodů

*Důkaz:* Dvojpoměr  $(ABXX')$  můžeme z definice dělicího poměru upravit do tvaru  $(ABXX') = \frac{(ABX)}{(ABX')}$ , kde  $(ABX)$  a  $(ABX')$  jsou dělicí poměry bodů v následujícím pořadí, jako je uváděno v obrázku 6. Nejprve si zvolme na přímce  $AB$  souřadnicovou soustavu bodů s počátkem v bodě  $S$ . Nechť má bod  $X$  souřadnici  $x$ . To zapíšeme jako  $X[x]$ , dále  $X[x']$ ,  $B[r]$  a  $A[-r]$ ,<sup>5</sup> potom

$$(ABX) = \frac{x+r}{x-r}, (ABX') = -\frac{x'+r}{r-x'}$$

kde  $x \neq r$ , což vyplývá z předpokladu že  $X \neq B$ , poté však musí také platit, že  $r \neq x'$  a  $x \neq x'$ . Z definice kruhové inverze dále platí, že  $xx' = r^2$ . Na základě nahrazení dvojpoměru pomocí dvou dělicích poměrů dostáváme po dosazení

$$(ABXX') = \frac{(ABX)}{(ABX')} = \frac{\frac{x+r}{x-r}}{\frac{x'+r}{x'-r}} = \frac{xx' + rx' - rx - r^2}{xx' - rx' + rx - r^2} = -\frac{rx' - rx}{rx' - rx} = -1$$

(Šedivý, 1987)

V tomto důkazu jsme došli k závěru, že body  $A$ ,  $B$ ,  $X$ ,  $X'$  skutečně tvoří harmonickou čtveřici bodů.

### 1.3 ZOBRAZENÍ OBJEKTŮ V KRUHOVÉ INVERZI

V této kapitole se blíže podíváme na zobrazování jednotlivých objektů v  $INV(\omega)$ . Například se zaměříme na zobrazování kružnice a přímky, jež se vůči základní kružnici a jejímu středu nachází ve speciální poloze. Díky této zvláštní pozici mají obraz a vzor specifické vlastnosti. Navíc společně dojdeme k závěru, zda v kruhové inverzi existují některé samodružné objekty.

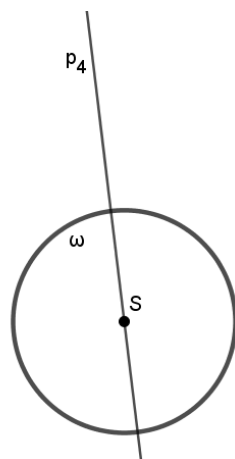
#### 1.3.1 ZOBRAZENÍ KRUŽNICE A PŘÍMKY

Jednou ze základních kapitol, objevující se téměř v každé literatuře zabývající se naší problematikou, je zobrazování kružnice a přímky v kruhové inverzi. Kružnice a přímky mají různé vlastnosti v závislosti na tom, zda daný objekt prochází středem kruhové inverze, či s tímto bodem neinciduje. Pro tuto kapitolu jsou vytvořeny speciální soubory v GeoGebře (Soubor 4 a Soubor 5), v nichž si pomocí zaškrtávacích políček může čtenář

<sup>5</sup>  $r$  = poloměr kružnice  $\omega$

přepínat mezi jednotlivými variantami. Nyní se podíváme na jednotlivé věty týkající se zobrazování kružnic a přímek v  $INV(\omega)$ .

**Věta:** Obrazem přímky  $p$ , jež prochází středem kruhové inverze  $S$ , je v  $INV(\omega)$  přímka  $p' \hat{=} p$  (samodružná přímka).



#### Přímka neprochází středem S

- Přímka jako sečna
- Přímka jako tečna
- Přímka jako vnější přímka

#### Přímka prochází středem S

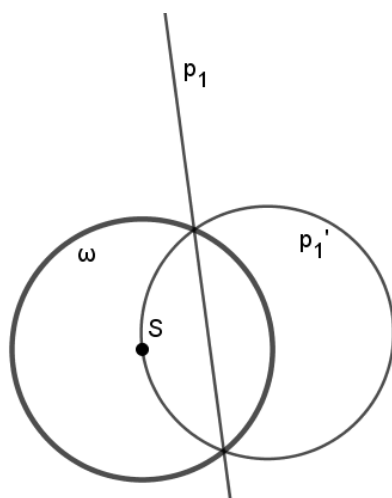
- Přímka procházející bodem S

Obrázek 7: Přímka procházející středem S (Soubor 4)

*Důkaz:* Necht'  $X$  je libovolný vzor takový, že  $X \in p$  a  $X \neq S$ ,  $P_\infty$ . Z definice pro obraz  $X'$  platí  $X' \in \overline{SX} \subset p$ . A vzhledem k tomu, že v kruhové inverzi se bod  $P_\infty$  zobrazí na střed kruhové inverze  $S$  (a naopak), je tato část věty dokázána. (Lávička, 2002)

Pro úplnost musíme dodat, že přímky  $p$  a  $p'$  jsou skutečně samodružné. Nejedná se však o přímku samodružných bodů.

**Věta:** Obrazem přímky  $p$ , jež neprochází středem kruhové inverze  $S$ , je v  $INV(\omega)$  kružnice  $p'$  procházející bodem  $S$ .



#### Přímka neprochází středem S

- Přímka jako sečna
- Přímka jako tečna
- Přímka jako vnější přímka

#### Přímka prochází středem S

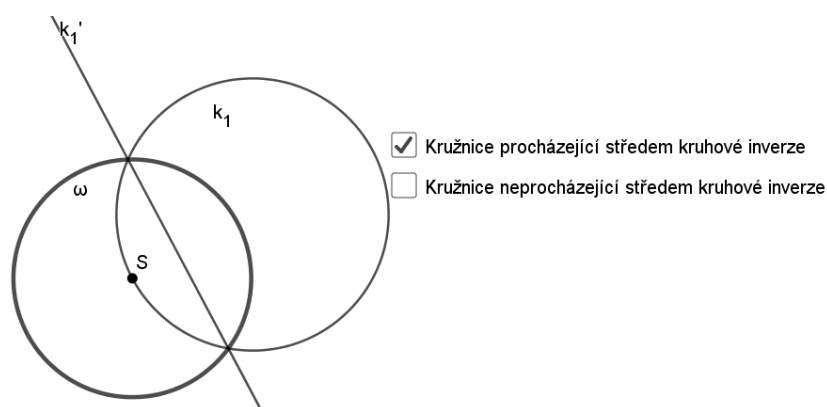
- Přímka procházející bodem S

Obrázek 8: Přímka neprocházející středem S (Soubor 4)



*Důkaz:* V následující části nastíníme důkaz věty. Mějme bod  $P$ , kdy  $P$  je pata kolmice vedené ze středu kruhové inverze na zadanou přímku  $p$ . Dále předpokládejme, že  $X$  je bodem na přímce  $p$ , pro nějž platí  $X \neq P$  a  $|\sphericalangle SPX| = 90^\circ$ . Nyní využijeme větu, v níž jsme potvrdili rovnost  $|\sphericalangle SKL| = |\sphericalangle SL'K'|$ . V důkazu platí, že  $|\sphericalangle SPX| = |\sphericalangle SX'P'|$ . Z toho vyplývá, že  $|\sphericalangle SX'P'| = 90^\circ$ . Obraz bodu  $X$  (bod  $X'$ ) leží tedy na Thaletově kružnici s průměrem  $SP'$ . Pro úplnost zbývá pouze z definice doplnit, že bod  $P_\infty$  se zobrazí na bod  $S$ . (Lávička, 2002)

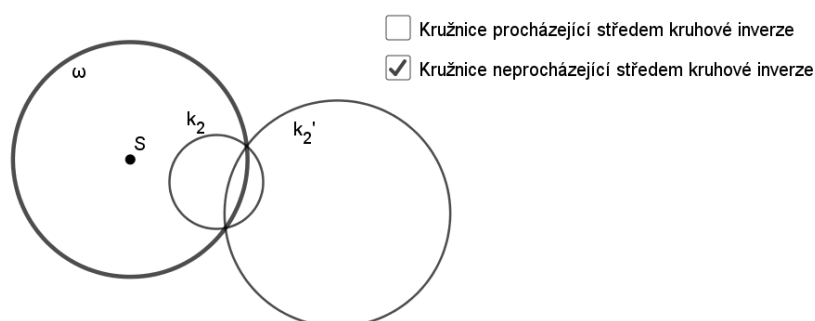
**Věta:** Obrazem kružnice  $k$ , jež prochází středem kruhové inverze  $S$ , je v  $INV(\omega)$  přímka  $k'$  neprocházející bodem  $S$ .



Obrázek 9: Kružnice procházející středem  $S$  (Soubor 5)

*Důkaz:* Již dříve jsme dokázali, že kruhová inverze patří mezi involutorní zobrazení. Tato věta tedy bezprostředně vychází z předcházející věty, kde jsme dokazovali zobrazení přímky  $p$  neprocházející bodem  $S$  v  $INV(\omega)$ .

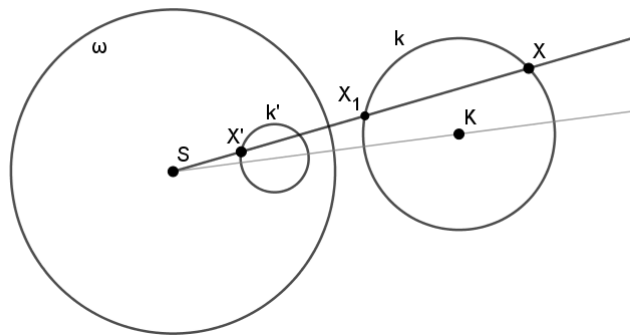
**Věta:** Obrazem kružnice  $k$ , jež neprochází středem kruhové inverze  $S$ , je v  $INV(\omega)$  kružnice  $k'$  neprocházející bodem  $S$ .



Obrázek 10: Kružnice neprocházející středem  $S$  (Soubor 5)

Důkaz: V následujícím důkazu využijeme vlastnosti stejnolehlosti a mocnosti bodu ke kružnici. Nejprve vyjdeme z definice kruhové inverze, ve které platí  $|SX| \cdot |SX'| = r^2$ . Mějme tedy body  $X \in \overrightarrow{SX}$  a  $X' \in \overrightarrow{SX}$ . Dále mějme bod  $X_1$ , pro který platí, že je druhým z průsečíků  $\overrightarrow{SX}$  a kružnice  $k$ . (Viz obrázek 11.)

Podle věty o mocnosti bodu ke kružnici platí rovnost  $|SX| \cdot |SX_1| = |m|$ . Dosazením této rovnosti do rovnosti vyplývající z definice kruhové inverze dostáváme po úpravách rovnost  $|SX'| = \frac{r^2}{|m|} \cdot |SX_1|$ .



Obrázek 11: Důkaz - kružnice neprocházející středem S (Soubor 6)

Všechny body ležící na polopřímce  $\overrightarrow{SX}$  jsou kolineární. Bod  $X'$  můžeme tedy označit za obraz bodu  $X_1$  ve stejnolehlosti  $h(S; \frac{r^2}{|m|})$ . Jestliže pohybujeme bodem  $X$  po kružnici  $k$ , pohybuje se po ní i bod  $X_1$ , protože ve stejnolehlosti je obrazem kružnice opět kružnice. Tímto můžeme považovat důkaz za ukončený. (Kuřina, 2002)

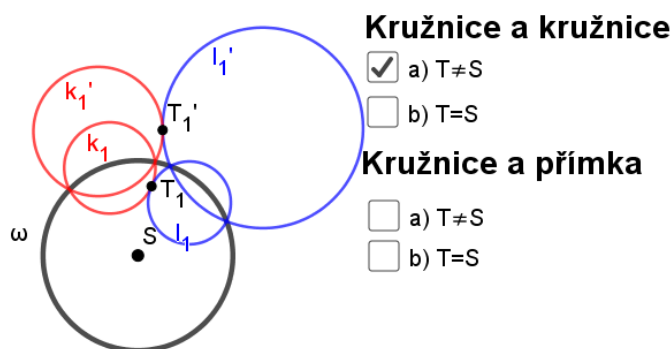
Nyní se podíváme na větu zabývající se zobrazením kružnice a přímky, jež mají společný bod dotyku  $T$ . V tomto případě dochází k zachování incidence.

**Věta:** Necht'  $k, l$  jsou buď 2 kružnice nebo kružnice a přímka, které se společně dotýkají v bodě  $T$ , a bod  $S$  je středem kruhové inverze  $INV(\omega)$ . Poté platí:

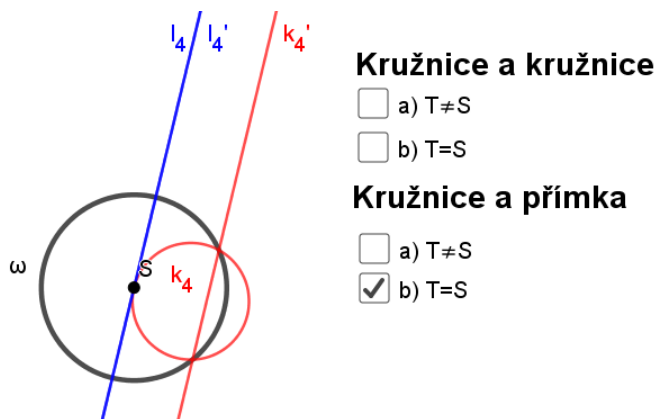
- Jestliže se  $k, l$  dotýkají v bodě  $T$ , kdy  $T \neq S$ , poté se i jejich obrazy dotýkají v bodě  $T'$ , který je obrazem bodu  $T$  v  $INV(\omega)$ .
- Jestliže se  $k, l$  dotýkají v bodě  $T$ , kdy  $T = S$ , poté jsou jejich obrazy přímky  $k'$  a  $l'$ , pro které platí  $k' \parallel l'$ .

(Hašek, 2020)

Pro tuto větu jsme vytvořili Soubor 7, v němž si můžeme prohlédnout všechny 4 varianty, které mohou nastat. My zde v rámci diplomové práce uvádíme obrázky pouze pro 2 vybrané příklady.



Obrázek 12: Incidence v kruhové inverzi var. a) (Soubor 7)



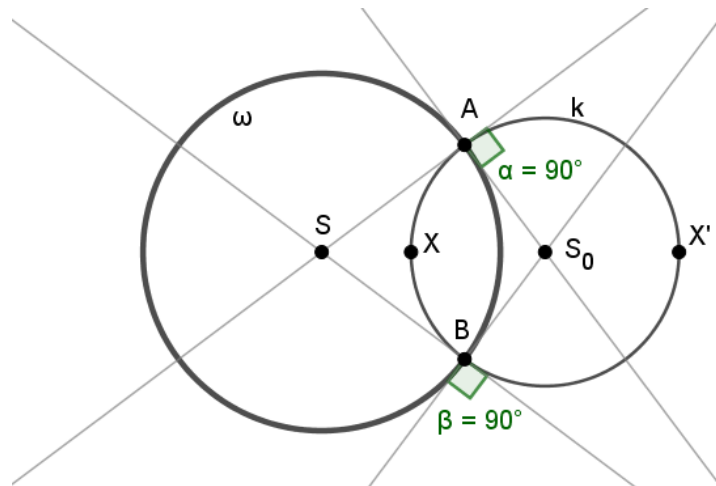
Obrázek 13: Incidence v kruhové inverzi var. b) (Soubor 7)

Již v předešlých kapitolách jsme se seznámili s některými samodružnými objekty v  $INV(\omega)$ . Nejedná se však o jediné množiny bodů, jež se v kruhové inverzi zobrazí „samy na sebe“. Všechny takové objekty nám shrne následující věta.

**Věta:** Necht'  $INV(\omega)$  je kruhová inverze v Möbiově rovině s kladným koeficientem kruhové inverze  $r^2$  a  $S$  je střed kružnice  $\omega$ . Pak při této kruhové inverzi jsou samodružné:

- a) všechny body kružnice  $\omega$
- b) právě ty přímky, které prochází středem inverze  $S$
- c) právě ty kružnice  $k$  (pro které platí, že  $k \neq \omega$ ), které jsou na kružnici  $\omega$  kolmé (ortogonální)

(Blažek, 1995)



Obrázek 14: Samodružná kružnice (Soubor 8)

Než se podíváme na samotný důkaz týkající se samodružné kružnice, definujeme pojem ortogonální kružnice.

**Definice:** Dvě kružnice nazveme vzájemně **ortogonální (kolmé)**, jestliže jsou tečny sestrojené v jejich společných průsečících vzájemně kolmé.

V následujícím důkazu se zaměříme pouze na důkaz části c), protože důkazy předcházejících částí – a), b), jsme již uvedli v předcházejících kapitolách.

*Důkaz (věty část c):* Důkaz provedeme ve dvou krocích. V prvním kroku předpokládáme, že kružnice  $k(S_0, r_0)$  a  $\omega(S, r)$  jsou vzájemně kolmé. Chceme dokázat, že obraz každého bodu kružnice  $k$  leží opět na kružnici  $k$  (tj. jsou samodružné). Body  $A, B$ , (průsečíky kružnic  $\omega$  a  $k$ ) jsou samodružné, protože platí  $A, B \in \omega$ . Z kolmosti obou kružnic plyne  $\overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{S_0A}$  (rovněž platí  $\overrightarrow{SB} \perp \overrightarrow{S_0B}$ ). Zvolme libovolný bod  $X \in k$  a zároveň platí, že  $X \neq A, B$ . Mocnost bodu  $S$  vzhledem ke kružnici  $k$  je  $|SX| \cdot |SX'| = |SA|^2 = r^2$ . Podle definice kruhové inverze je bod  $X'$  obrazem bodu  $X$  v  $INV(\omega)$ .

Ve druhém kroku naopak předpokládáme, že obraz a vzor kružnice  $k$  v  $INV(\omega)$  jsou totožné objekty. Chceme dokázat, že kružnice  $k$  a kružnice  $\omega$  jsou ortogonální. Jelikož kružnice  $k$  není kružnicí samodružných bodů, musí obsahovat jak vnější, tak vnitřní body základní kružnice  $\omega(S, r)$ . (Lávička, 2002) Tím pádem kružnice  $k$  a  $\omega$  mají 2 průsečíky  $(A, B)$ . Jelikož předpokládáme, že kružnice  $k$  a  $k'$  jsou samodružné, zobrazí se v kruhové inverzi libovolný bod  $X \neq A, B$  kružnice  $k$  na bod  $X'$ , který se bude rovněž nacházet na kružnici  $k$ . Platí  $|SX| \cdot |SX'| = r^2$ . Body  $A$  se nachází na kružnici  $\omega$ , a proto je samodružný ( $A=A'$ ). Odtud plyne  $|SX| \cdot |SX'| = |SA|^2 = r^2$ . Přímka  $SA$  má s kružnicí  $\omega$  jediný

společný bod (bod  $A$ ), jedná se o tečnu kružnice  $\omega$ . Platí tedy, že  $\overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{S_0A}$ , z čehož plyne  $k \perp \omega$ . (Pro úplnost důkazu stačí doplnit, že pro bod  $B$  platí totéž, co pro bod  $A$ .)

(Lávička, 2002)

## 1.4 VYUŽITÍ KRUHOVÉ INVERZE

### 1.4.1 PTOLEMAIOVA VĚTA

V této kapitole se podíváme na možnosti využití kruhové inverze. Ačkoliv je kruhová inverze pro většinu studentů středních škol mnohdy velkou neznámou, můžeme ji využít při dokazování některých vět, se kterými se běžně během výuky setkávají. Jedna z takových vět se věnuje vzájemnému vztahu délek úhlopříček a délek stran obecného čtyřúhelníku. Tento vztah je definován pomocí tzv. **Ptolemaiovy věty**. Leischner například tuto větu označuje jako **Ptolemaiovu nerovnost**.

**Věta:** Necht' je dán čtyřúhelník  $ABCD$ , pak platí

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$$

*Rovnost nastane, je-li čtyřúhelník tětivový<sup>6</sup>.*

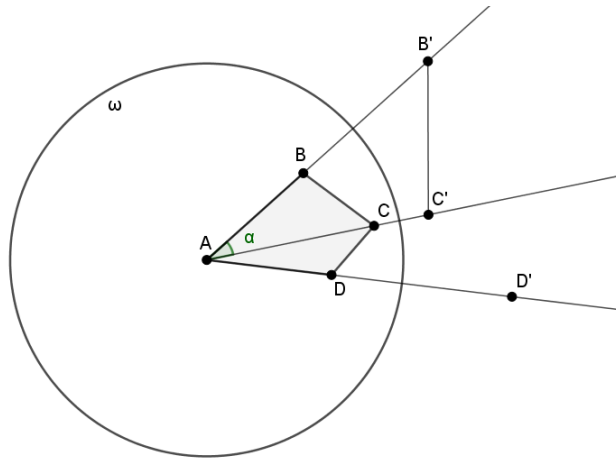
(Zamboj, 2021)

*Důkaz:* Pro důkaz této věty využijeme vhodně zvolené kruhové inverze. Mějme obecný čtyřúhelník  $ABCD$ . Dále zvolme kruhovou inverzi  $INV(\omega)$ , kdy  $\omega$  je kružnice se středem v bodě  $A$  a poloměrem  $1j$ , nebo-li  $\omega(A, 1j)$ . Z věty plyne nerovnost:

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$$

Dále zobrazme body  $B, C, D$  v  $INV(\omega)$ . Na obrázku 15 máme znázorněno, jak by vypadala modelová situace. Můžeme v ní vidět, že úhel  $\alpha$  je shodný pro trojúhelník  $BAC$  a pro trojúhelník  $B'AC'$ .

<sup>6</sup> Tětivovému čtyřúhelníku lze opsat kružnici.



Obrázek 15: Ptolemaiova věta (Soubor 9)

Proti úhlu  $\alpha$  leží tedy strany  $BC$  a strany  $B'C'$ . Protože je úhel  $\alpha$  shodný pro stranu  $BC$  i stranu  $B'C'$ , vyjádříme tyto strany pomocí kosinové věty.

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha$$

$$|B'C'|^2 = |AB'|^2 + |AC'|^2 - 2 \cdot |AB'| \cdot |AC'| \cdot \cos \alpha$$

Z definice kruhové inverze platí následující rovnosti, ze kterých vyjádříme  $|AB'|$  a  $|AC'|$ .

$$|AB| \cdot |AB'| = r^2 = 1 \rightarrow |AB'| = \frac{1}{|AB|}$$

$$|AC| \cdot |AC'| = r^2 = 1 \rightarrow |AC'| = \frac{1}{|AC|}$$

Tato vyjádření následně dosadíme do rovnic vyjádřených pomocí kosinové věty.

$$|B'C'|^2 = \frac{1}{|AB|^2} + \frac{1}{|AC|^2} - \frac{2 \cos \alpha}{|AB| \cdot |AC|} \quad / \cdot |AB|^2 \cdot |AC|^2$$

$$|AB|^2 \cdot |AC|^2 \cdot |B'C'|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha$$

Za pravou stranu dosadíme z první kosinové věty. A po úpravách mějme:

$$|AB|^2 \cdot |AC|^2 \cdot |B'C'|^2 = |BC|^2$$

$$|B'C'|^2 = \frac{|BC|^2}{|AB|^2 \cdot |AC|^2}$$

Nyní odmocníme. Stejným způsobem bychom mimo  $|B'C'|$  vyjádřili také hodnoty  $|C'D'|$  a  $|B'D'|$ .

Dostáváme tedy:

$$|B'C'| = \frac{|BC|}{|AB| \cdot |AC|}, |C'D'| = \frac{|CD|}{|AC| \cdot |AD|}, |B'D'| = \frac{|BD|}{|AB| \cdot |AD|}.$$

Nyní nám nastanou 2 možnosti. První možnost nám uvádí, že všechny body  $ABCD$  neleží na kružnici opsané čtyřúhelníku. S využitím trojúhelníkové nerovnosti platí pro trojúhelník  $B'C'D'$ :

$$|B'D'| < |B'C'| + |C'D'|$$

$$\frac{|BD|}{|AB| \cdot |AD|} < \frac{|BC|}{|AB| \cdot |AC|} + \frac{|CD|}{|AC| \cdot |AD|} \quad / \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot |AD|$$

$$|AC| \cdot |BD| < |BC| \cdot |AD| + |CD| \cdot |AB|.$$

Druhou možností je, že by všechny body  $ABCD$  ležely na kružnici. V tomto případě by se jednalo o tětíkový čtyřúhelník  $ABCD$ . Kružnice procházející středem kruhové inverze, bodem  $A$ , se však v kruhové inverzi zobrazí na přímku. Tudíž by body  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  byly kolineární a platila by rovnost  $|B'D'| = |B'C'| + |C'D'|$ . Po úpravách bychom dostali:

$$|AC| \cdot |BD| = |BC| \cdot |AD| + |CD| \cdot |AB|.$$

U čtyřúhelníku jiná možnost nastat nemůže. Vzhledem k tomu, že může nastat situace, kdy čtyřúhelníku buď lze opsat kružnici, nebo nelze opsat kružnici, platí tedy:

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

(Zamboj, 2021)

#### 1.4.2 DŮKAZ PYTHAGOROVY VĚTY

Pomocí Ptolemaiovy věty navíc můžeme dokázat Pythagorovu větu. Mějme obecný obdélník  $ABCD$ . Každému obdélníku lze opsat kružnici. Vzhledem k tomu, že úhlopříčky jsou stejně dlouhé a protilehlé strany jsou rovněž stejně dlouhé, dostáváme po úpravách:

$$|AC| \cdot |BD| = |BC| \cdot |AD| + |CD| \cdot |AB|$$

$$e^2 = a^2 + b^2,$$

kde  $a$ ,  $b$  jsou strany obdélníka a  $e$  je úhlopříčka v něm. S trochou nadsázky bychom mohli tedy říct, že pomocí kruhové inverze lze dokázat i Pythagorovu větu.

## 2 KRUHOVÁ INVERZE V PŘÍKLADECH

Ve druhé kapitole se zaměříme na využití kruhové inverze v jednotlivých geometrických úlohách. Podíváme se např. na speciální úlohy řešené pomocí kruhové inverze. Dále se zaměříme na Apolloniovy a Pappovy úlohy. V následující kapitole se věnujeme problematice úloh na omezené nákresně.

### 2.1 ÚLOHY NA OMEZENÉ NÁKRESNĚ

Jeden z prvních typů úloh, na které se v této prakticky zaměřené části podíváme, jsou tzv. **úlohy na omezené nákresně**. Jedná se o takové úlohy, kdy musíme pracovat s objekty, které jsou pro nás nepřístupné<sup>7</sup>. Můžeme si je představit jako objekty, které se nám „nevejdou“ na papír nebo jinou rýsovací plochu. K řešení takovýchto úloh často využíváme konstrukci metodou geometrických zobrazení. Pod těmito geometrickými zobrazeními můžeme například myslet stejnolehlost nebo kruhovou inverzi. Pomocí těchto zobrazení si převedeme úlohu na tzv. **vnitřní úlohu**, již vyřešíme, a poté pomocí geometrického zobrazení ji převedeme zpět na **původní úlohu**. Pro lepší představu se podíváme na pár příkladů, které vyřešíme s užitím **kruhové inverze**.

#### 2.1.1 PŘÍKLAD

Mějme dán nepřístupný bod  $X$ , jež je průsečíkem různoběžných přímek  $p_1$  a  $p_2$ , a bod  $A$ , který neleží ani na jedné z přímek  $p_1$  a  $p_2$ . Sestrojte přímku  $p$ , procházející bodem  $X$  a bodem  $A$ .

##### Rozbor:

V rámci řešení příkladu nejprve vhodně zvolíme kružnici  $\omega$ , která bude mít střed  $A$  a libovolný poloměr. Zavedením  $INV(\omega)$  převedeme původní úlohu na tzv. vnitřní úlohu. Přímky  $p_1$  a  $p_2$  se v kruhové inverzi zobrazí na 2 různé kružnice, které mají společný bod, a bod  $A$  se zobrazí na nevlastní bod  $P_\infty$ . Tento bod označíme  $X'$ . Přímka  $X'A$  prochází středem  $INV(\omega)$ , je tedy samodružná. Tato přímka tedy prochází nepřístupným bodem  $X$ .

##### Popis konstrukce:

1.  $\omega$ ;  $\omega(A, r)$ , kde  $r$  libovolné
2.  $p'_1, p'_2$ ;  $INV(\omega): p_1 \rightarrow p'_1, p_2 \rightarrow p'_2$

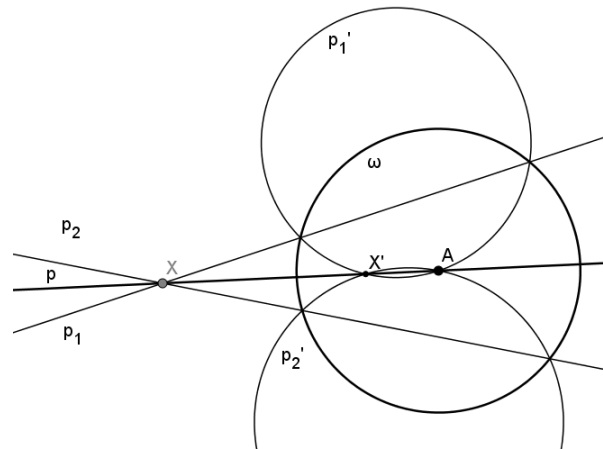
<sup>7</sup> Nepřístupné objekty budou v obrázcích znázorněny pomocí šedé barvy.



3.  $X'; X' \in p'_1 \cap p'_2$

4.  $p; X' \in p \wedge A \in p$

**Konstrukce:**



Obrázek 16: Příklad 2.1.1 (Soubor 10)

**Diskuze:**

Vzhledem k tomu, že 2 body (u nás body  $A$  a  $X'$ ) určují jedinou přímku, má tato úloha pouze jedno řešení.

### 2.1.2 PŘÍKLAD

Nechť  $a$  a  $b$  jsou dvě různoběžky, jejichž průsečíkem je nepřístupný bod  $V$ . Dále mějme zadanou přímku  $t$  a na ní bod  $T$ . Sestrojte kružnici dotýkající se přímky  $t$  v bodě  $T$  a procházející bodem  $V$ .

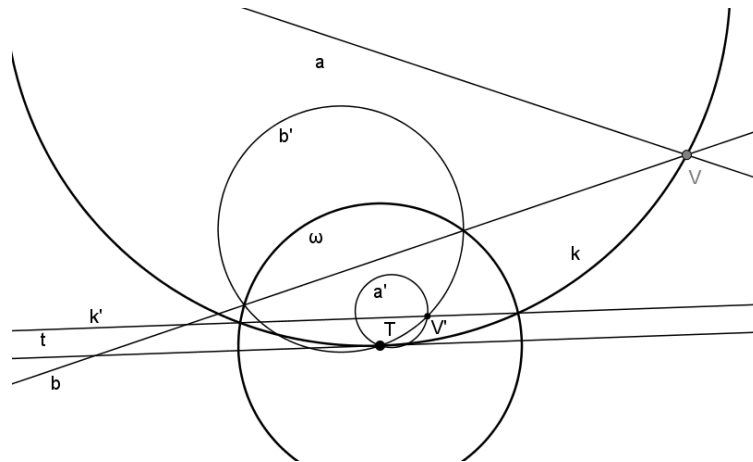
**Rozbor:**

Nejprve vhodně zvolíme kruhovou inverzi, jejímž středem bude jediný známý bod (bod  $T$ ), poloměr volíme libovolně. Různoběžné přímky  $a$ ,  $b$  se v kruhové inverzi zobrazí jako kružnice. Bod  $V'$  je obrazem bodu  $V$  v  $INV(\omega)$ . Přímka neprocházející středem kruhové inverze se zobrazí jako kružnice procházející tímto bodem. V té samé inverzi se bod  $T$  zobrazí do nevlastního bodu  $P_\infty$ . Vedeme-li bodem  $V'$  přímku  $k'$  jako rovnoběžku s přímku  $t$ , zajistíme tím, že pro hledanou kružnici  $k$  bude  $t$  tečnou, a navíc bude platit, že  $V \in k$ . Řešení vnitřní úlohy převedeme pomocí  $INV(\omega)$  na řešení původní úlohy.

**Popis konstrukce:**

1.  $\omega; \omega(T, r)$ , kde  $r$  je libovolné
2.  $a', b'; INV(\omega): a \rightarrow a', b \rightarrow b'$

3.  $V'; V' \in a' \cap b'$
4.  $k'; k' \parallel t \wedge V' \in k'$
5.  $k; INV(\omega): k' \rightarrow k$

**Konstrukce:**

Obrázek 17: Příklad 2.1.2 (Soubor 11)

**Diskuze:**

Ve vhodně zvolené kruhové inverzi mají kružnice  $a'$  a  $b'$  2 průsečíky. Tyto dva body nám určují jedinou přímku. Úloha má tedy 1 řešení.

**2.1.3 PŘÍKLAD**

Jsou dány různoběžky  $a, b, c$  a jejich nepřístupné průsečíky  $A \in b \cap c, B \in a \cap c, C \in a \cap b$ . Sestrojte kružnici  $k$  procházející těmito nepřístupnými průsečíky.

(Foltýn, 2013)

**Rozbor:**

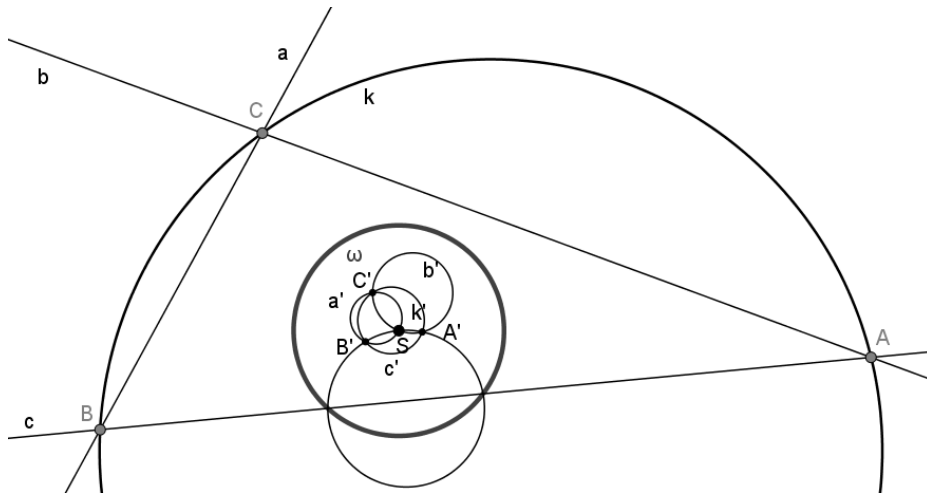
Pomocí základní kružnice  $\omega$  se středem v libovolně zvoleném bodě  $S$  a libovolným poloměrem  $r$  převedeme úlohu na vnitřní. Protože přímky  $a, b, c$  neprocházejí středem  $S$ , zobrazí se na kružnice  $a', b', c'$  s průsečíky po dvou  $A', B', C'$  a společný průsečíkem v bodě  $S$ . Sestrojíme kružnici  $k'$  opsanou bodům  $A', B', C'$ . Tuto kružnici převedeme pomocí  $INV(\omega)$  na řešení původní úlohy – tedy na hledanou kružnici  $k$ .

**Popis konstrukce:**

1.  $S; S$  volíme libovolně
2.  $\omega; \omega(S, r)$ , kde  $r$  je libovolné

3.  $a', b', c'$ ;  $INV(\omega): a \rightarrow a', b \rightarrow b', c \rightarrow c'$
4.  $A', B', C'$ ;  $A' \in b' \cap c'$ ,  $B' \in a' \cap c'$ ,  $C' \in a' \cap b'$
5.  $k$ ;  $k'$  je kružnicí opsanou bodům  $A', B', C'$
6.  $k$ ;  $INV(\omega): k' \rightarrow k$

**Konstrukce:**



Obrázek 18: Příklad 2.1.3 (Soubor 12)

**Diskuze:**

Vzhledem k tomu, že přímky  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jsou různoběžné, nejsou body  $A$ ,  $B$ ,  $C$  kolineární. Kruhá inverze je involutorní zobrazení, tedy ani body  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  nejsou kolineární. Tyto body mohou tvořit vrcholy trojúhelníka. Každému trojúhelníku lze opsat právě jednu kružnici. Úloha má tedy právě jedno řešení.

## 2.2 APOLLONIOVY ÚLOHY

### 2.2.1 DEFINICE A HISTORIE APOLLONIOVÝCH ÚLOH

Jedno z dalších možností využití kruhové inverze nalezneme v tzv. **Apolloniových úlohách**, které nesou jméno podle významného řeckého geometra a matematika Apollonia z Pergy (262 – 190 př. n. l.).

Apollonius z Pergy však nebyl prvním z matematiků, který se věnoval problematice kružnic. O dotyku kružnic údajně již dříve psal Archimédes. K tomu se pojí i legenda spojená se smrtí Archiméda. Ten byl zabit římským vojákem během řešení jedné z úloh spojenou s kružnicí. Před smrtí údajně pronesl větu: „*Noli turbare circulos meos!*“.  
(Nocar, 2019) V překladu: *Neruš mé kruhy*. Spisy Archiméda se však nedochovaly.

Podobný problém nastal i u práce Apollonia – dílo „O dotycích“. Tento dokument se bohužel nedochoval, nicméně o něm víme z děl Pappa z Alexandrie.

Původně byla Apolloniovou úlohou rozuměná taková úloha, v níž měl řešitel sestrojiti takovou kružnici, jež by se dotýkala 3 daných kružnic. Taková úloha měla až 8 řešení<sup>8</sup>. Jedno z řešení našel Francouz François Viète (1530 – 1603). K řešení využil středy stejnolehlosti tří kružnic. O těchto bodech se zmiňoval již Pappos, nicméně objev tohoto řešení se připisuje Francouzovi. (Blažek, 1995) Nyní mají takové úlohy mnohem komplexnější pojetí.

**Definice: Apolloniovou úlohou** rozumíme takovou úlohu, v níž máme za úkol **sestrojiti kružnici** dotýkající se 3 zadaných **kružnic**. Vlastnosti a charakteristika jednotlivých zadaných kružnic jsou závislé na jejich poloměru. O „**klasické**“ **kružnici** hovoříme, pokud se poloměr nachází v intervalu  $(0, \infty)$ . Má-li kružnice nulový poloměr, mluvíme o **bodu**. Jedná-li se o kružnici s nekonečným poloměrem, hovoříme o **přímce**.

Z výše uvedené definice je patrné, že došlo k rozšíření původní úlohy o dalších 9 úloh. Celkem tedy hovoříme o 10 úlohách<sup>9</sup>, kdy každá z těchto úloh nese specifické označení. Toto označení se opírá o zadání úlohy. V třímístném označení využíváme písmena B, p, k. Ty nám značí postupně B – bod, p – přímku, k - kružnici. Jestliže jsou zadanými objekty Apolloniovy úlohy bod a 2 přímky, nese tato úloha označení Bpp. Některé úlohy řeší již žáci na základní škole. Např. úlohu BBB znají žáci spíše jako úlohu, v níž mají nalézt kružnici opsanou trojúhelníku. Tu řeší především s využitím MBDV (množiny bodů dané vlastnosti).

My se na konkrétní řešení úloh podíváme v následující kapitole. Budeme se postupně věnovat těmto úlohám – BBB, BBp, Bpp, BBk, Bkk, Bpk ,ppp, ppk, pkk a kkk. Kapitola bude rozdělena do jednotlivých podkapitol, v nichž se blíže zaměříme na jednotlivé typy úloh. U každého typu je uvedena přehledná tabulka, u níž jsem se inspiroval ve studijním textu paní doktory Petry Pirklové (Pirklová, 2013). Vzhledem k tomu, že je tato práce orientována na kruhovou inverzi, budou u vybraných úloh vyřešeny typové příklady s užitím kruhové inverze. Tyto úlohy zpracujeme v prostředí GeoGebra, z něhož uvedeme grafickou ukázkou řešení. Průběžně konstruované objekty

<sup>8</sup> Záleží na vzájemné poloze kružnic.

<sup>9</sup> Vytváříme kombinace třetí třídy ze tří prvků s opakováním.

budou pro přehlednost znázorněny šedě, zadané objekty černě, hlavní kružnice červeně a výsledné kružnice pro přehlednost zvýrazníme pomocí modré barvy. Všechny soubory vytvořené v aplikaci GeoGebra budou čtenářům přístupné v přílohách a na CD, jež se nachází u originálu této práce.

Před tím, než se budeme věnovat jednotlivým typům Apolloniových úloh, musíme upozornit na uvedené zkratky u jednotlivých metod řešení. Níže uvádíme přehlednou tabulku s vysvětlením jednotlivých zkratk.

Tabulka 1: Zkratky - metody řešení Apolloniových úloh

ZKRATKA	Metoda řešení
INV	kruhová inverze
STEJNO	stejnolehlost
MBDV	množiny bodů dané vlastnosti
$Bk_T$	Pappova úloha, kde je zadán bod, kružnice a bod T ležící na zadané kružnici <sup>10</sup>
MBKK	mocnost bodu ke kružnici

Ve sloupci věnovanému počtu řešení je uveden maximální počet řešení pro danou vzájemnou polohu prvků. Maximální počet řešení je zvýrazněn tučně.

### 2.2.2 ÚLOHA TYPU BBB

Tabulka 2: Úloha typu BBB

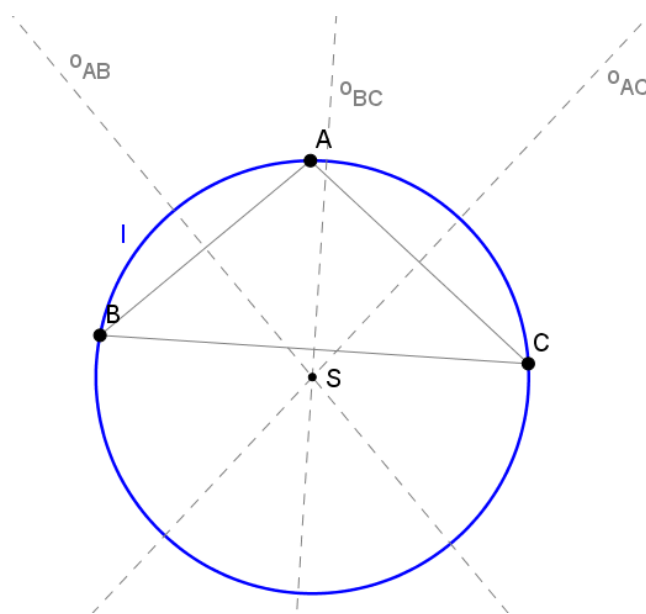
Vzájemná poloha zadaných prvků	Metoda řešení	Počet řešení
body $A, B, C$ jsou kolineární		0
body $A, B, C$ nejsou kolineární	MBDV	<b>1</b>

<sup>10</sup> Zkratky obsahující T v dolním indexu odkazují na tzv. Pappovy úlohy. Těmto úlohám věnujeme speciální kapitolu, a proto nebudeme v tabulce uvádět jejich všechny možné zápisy.

O úloze typu BBB jsme se zmiňovali již v předcházející kapitole. Protože se jedná o jednu ze základních úloh, použijeme ji jako vzorový příklad. Na této variantě si ukážeme, jak můžeme interpretovat informace z výše uvedené tabulky.

Úloha typu BBB je závislá na vzájemné poloze 3 bodů. Jsou-li body kolineární, nemá úloha žádné řešení. Neleží-li zadané body na společné přímce, lze tuto úlohu vyřešit pomocí MBDV (osa úsečky). Tato úloha má maximálně jedno řešení. Jestliže známe právě 3 body kružnice, je tato kružnice dána jednoznačně.

GeoGebra obsahuje funkci, pomocí níž sestrojíme kružnici opsanou pro 3 zadané body. My uvedeme zkrácený postup užitím MBDV, konkrétně s využitím osy úsečky. Během konstrukce řešení sestrojíme 3 úsečky –  $AB$ ,  $BC$  a  $AC$ . Poté sestrojíme osy těchto úseček. Bod  $S$  je průsečíkem zkonstruovaných os. Zároveň se jedná o střed naší hledané kružnice  $l$ , jejíž poloměr je roven vzdálenosti bodu  $S$  od jednoho ze zadaných bodů ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ).



Obrázek 19: Úloha BBB (Soubor 13)

U dalších typů Apolloniových úloh se zaměříme na varianty, které jsou řešitelné za pomoci kruhové inverze. U těchto příkladů uvedeme rozbor, popis konstrukce, obrázek konstrukce v GeoGebře a diskuzi.

## 2.2.3 ÚLOHA TYPU BBP

Tabulka 3: Úloha typu BBp

Vzájemná poloha zadaných prvků		Metoda řešení	Počet řešení	
$\{A, B\} \subset p$			0	
$A \in p, B \notin p$		$Bp_{\tau}$	1	
$\{A, B\} \not\subset p$	body $A, B$ leží v opačných polorovinách určených přímkou $p$		0	
	body $A, B$ leží ve stejné polorovině učené přímkou $p$	$AB \parallel p$	MBDV	1
		$AB \not\parallel p$	KI nebo MBKK	2

Nyní se podíváme na řešení v tabulce šedě vyznačené varianty, jež jde řešit s pomocí kruhové inverze. Řešením této úlohy jsou dvě kružnice, které se dotýkají jedné přímky a prochází dvěma zadanými body.

## 2.2.3.1 PŘÍKLAD

Mějme dánu přímku  $p$  a body  $A, B$ , které na ní neleží. Zadané body leží ve stejné polorovině určené přímkou  $p$  a navíc platí, že přímka  $p \not\parallel AB$ . Sestroj kružnici  $l$  dotýkající se zadané přímky a procházející zadanými body  $A, B$ .

**Rozbor:**

Pomocí vhodně zvolené kruhové inverze převedeme úlohu na vnitřní. Kruhová inverze je dána kružnicí  $\omega(A; |AB|)$ . Zadaná přímka  $p$  se nám v  $INV(\omega)$  zobrazí na kružnici  $p'$ . Z bodu  $B$  sestrojíme tečny  $(h'_1, h'_2)$  ke kružnici  $p'$ . Protože tečny neprocházejí bodem  $A$ , zobrazí se nám v inverzi podle  $\omega$  jako hledané kružnice  $l_1$  a  $l_2$ .

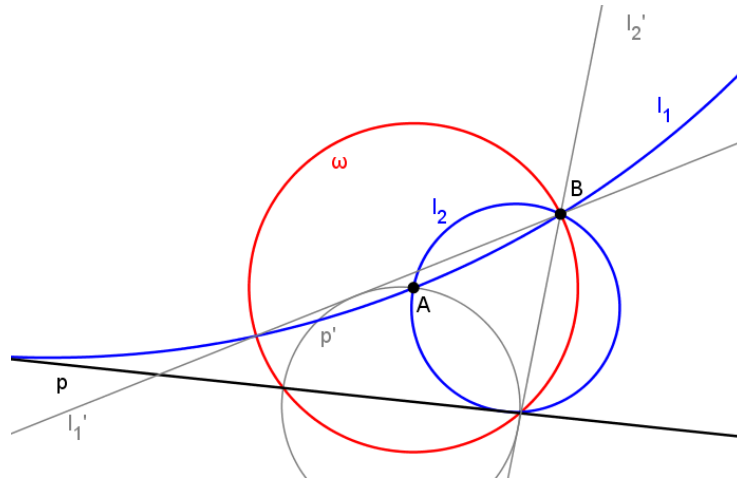
**Popis konstrukce:**

1.  $\omega; \omega(A; |AB|)$
2.  $p'; INV(\omega): p \rightarrow p'$

3.  $h'_1, h'_2; h_1, h_2$  - tečny z bodu  $B$  k  $p'$

4.  $h_1, h_2; INV(\omega): h'_1 \rightarrow h_1, h'_2 \rightarrow h_2$

**Konstrukce:**



Obrázek 20: Příklad 2.2.3.1 (Soubor 14)

**Diskuze:**

Z bodu  $B$  lze ke kružnici  $p'$  sestavit 2 tečny. Ty se v kruhové inverzi zobrazí jako hledané kružnice. Proto má tato úloha právě 2 řešení.

#### 2.2.4 ÚLOHA TYPU BPP

Tabulka 4: Úloha typu Bpp

Vzájemná poloha zadaných prvků		Metoda řešení	Počet řešení
$p_1 \parallel p_2$	$A$ vnější oblast pásu přímek $p_1, p_2$		0
	$A$ leží na jedné z přímek $p_1, p_2$	pp <sub>T</sub>	1
	$A$ leží uvnitř pásu přímek $p_1, p_2$	MBDV a KI	2
$p_1 \nparallel p_2$	$A$ je průnikem přímek $p_1, p_2$		0
	$A$ leží na jedné z přímek $p_1, p_2$	pp <sub>T</sub>	2
	$A$ neleží ani na jedné z přímek $p_1, p_2$	STEJNO a KI	2



Z tabulky vyplývá, že úlohu typu Bpp lze vyřešit také pomocí kruhové inverze. Konkrétně se jedná o šedě vyznačenou úlohu a my se na její řešení podíváme v níže uvedeném příkladu.

#### 2.2.4.1 PŘÍKLAD

Mějme dány 2 rovnoběžné přímky  $p_1$ ,  $p_2$  a bod  $A$ , který se nachází v pásu vytvořeném přímkami  $p_1$  a  $p_2$ . Sestrojte kružnici  $l$ , která se dotýká obou zadaných přímek a prochází bodem  $A$ .

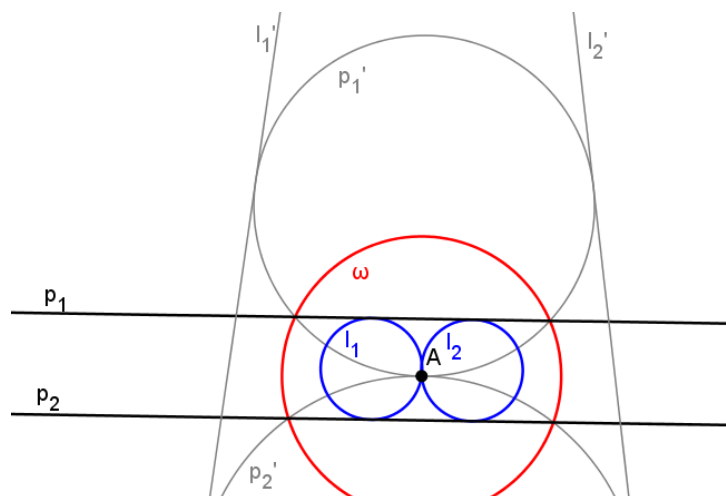
##### Rozbor:

Zavedeme kruhovou inverzi se středem v jediném známém bodě a libovolným poloměrem. Protože bod  $A$  nenáleží ani jedné z přímek, zobrazí se tyto přímky na kružnice  $p_1'$  a  $p_2'$ . Těmto kružnicím sestrojíme tečny  $h_1'$  a  $h_2'$ . Tyto tečny se dotýkají kružnic  $p_1'$ ,  $p_2'$  a obě prochází nevlastním bodem. Jestliže body vnitřní úlohy prochází nevlastním bodem, zajistíme tím, že v původní úloze budou tyto body procházet bodem  $A$  (středem kruhové inverze). Zobrazením těchto tečen v  $INV(\omega)$  získáváme hledané kružnice  $l_1$  a  $l_2$ .

##### Popis konstrukce:

1.  $\omega$ ;  $\omega(A, r)$ , kde  $r$  je libovolné
2.  $p_1', p_2'$ ;  $INV(\omega): p_1 \rightarrow p_1', p_2 \rightarrow p_2'$
3.  $h_1', h_2'$ ;  $h_1', h_2'$  - tečny kružnic  $p_1', p_2'$
4.  $l_1, l_2$ ;  $INV(\omega): h_1' \rightarrow l_1, h_2' \rightarrow l_2$

##### Konstrukce:

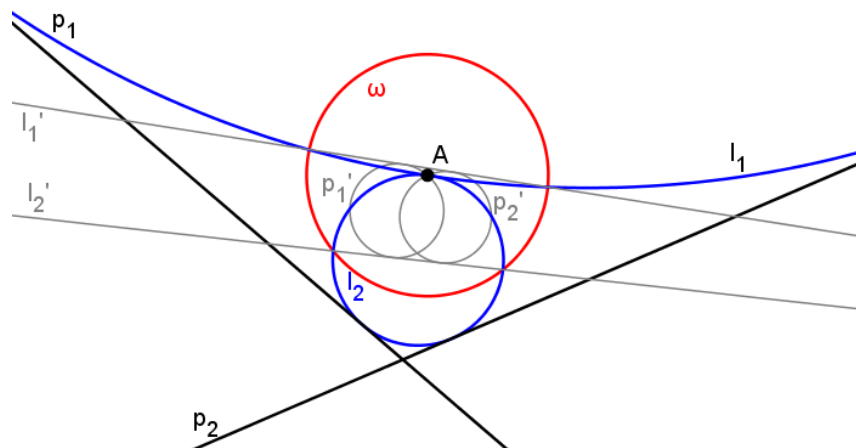


Obrázek 21: Příklad 2.2.4.1 (Soubor 15)

**Diskuze:**

Kružnice  $p_1'$  a  $p_2'$  se společně dotýkají v bodě  $A$ . Takovým kružnicím lze sestavit tři tečny. Jedna z těchto tečen by musela procházet bodem  $A$ . Taková tečna by se však v  $INV(\omega)$  nezobrazila na kružnici, ale na přímce rovnoběžnou s přímkami  $p_1$  a  $p_2$ .<sup>11</sup> Z toho vyplývá, že tato úloha má 2 řešení.

Analogicky bychom vyřešili obdobu této úlohy pro různoběžné přímky. Protože se tato úloha často konstruuje na gymnáziích s užitím stejnolehlosti, uvádíme alespoň samotnou konstrukci (bez podrobnějšího zápisu) pro porovnání výsledků s předchozím příkladem 2.2.4.1.



Obrázek 22: Úloha Bpp (Soubor 16)

**2.2.5 ÚLOHA TYPU BBK**

Tabulka 5: Úloha typu BBk

Vzájemná poloha zadaných prvků		Metoda řešení	Počet řešení
$\{A, B\} \subset k$			0
$A \in k, B \notin k$		Bk <sub>T</sub>	1
$\{A, B\} \not\subset k$	$A$ leží vně kružnice $k$ , $B$ leží uvnitř kružnice $k$		0
	body $A, B$ leží oba vně nebo oba uvnitř kružnice $k$	MBKK nebo KI	2

<sup>11</sup> Proto jsme přímku  $p_3$  v rámci konstrukce ani blíže nezmiňovali. Pouze o ní informujeme v rámci diskuze,

## 2.2.5.1 PŘÍKLAD

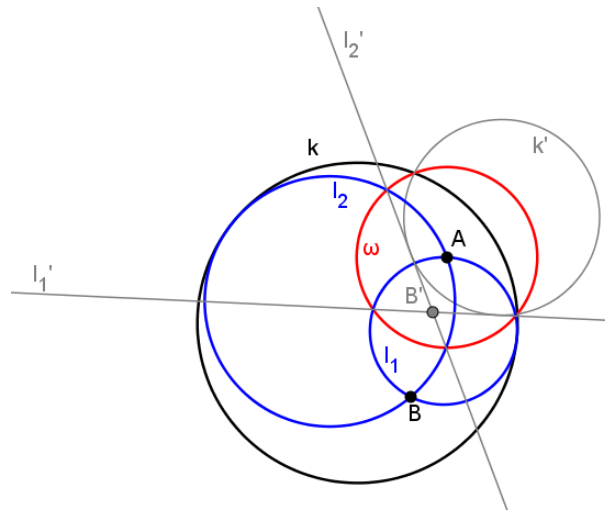
Zadané body  $A, B$  leží uvnitř kružnice  $k$ . Sestrojte kružnici  $l$  procházející body  $A, B$  a dotýkající se zadané kružnice  $k$ .

**Rozbor:**

Jeden ze zadaných bodů, v našem případě bod  $A$ , jsme zvolili za střed kružnice  $\omega$  o libovolném poloměru. V  $INV(\omega)$  zobrazíme kružnici  $k$ , která se zobrazí na kružnici  $k'$ , a bod  $B$  přejde v kruhové inverzi do bodu  $B'$ . Nalezneme řešení vnitřní úlohy tak, že z bodu  $B'$  sestrojíme tečny ke kružnici  $k'$ . Dostaneme tedy přímky  $h_1'$  a  $h_2'$ , jež se v  $INV(\omega)$  zobrazí na naše hledané kružnice  $l_1$  a  $l_2$ .

**Popis konstrukce:**

1.  $\omega$ ;  $\omega(A, r)$ , kde  $r$  je libovolné
2.  $B', k'$ ;  $INV(\omega): B \rightarrow B', k \rightarrow k'$
3.  $h_1', h_2'$ ;  $h_1', h_2'$  jsou tečny z bodu  $B'$  ke kružnici  $k'$
4.  $l_1, l_2$ ;  $INV(\omega): h_1' \rightarrow l_1, h_2' \rightarrow l_2$

**Konstrukce:**

Obrázek 23: Příklad 2.2.5.1 (Soubor 17)

**Diskuze:**

Zobrazením kružnice  $k$  a bodu  $B$  v  $INV(\omega)$  dostáváme kružnici  $k'$  a bod  $B'$ . Z toho bodu lze vést ke kružnici  $k'$  právě 2 tečny. Proto má naše úloha 2 řešení.

## 2.2.6 ÚLOHA TYPU BKK

Úloha Bkk nabízí největší množství variant zadání ze všech Apolloniových úloh. To způsobuje vysoký počet možností vzájemné polohy 2 kružnic. Dále musíme uvažovat o různých polohách zadaného bodu  $A$ . Pro přehlednost uvádíme tato zadání opět v přehledné tabulce, kde jsou opět uvedeny vybrané metody řešení.

Tabulka 6: Úloha typu Bkk

Vzájemná poloha zadaných prvků		Metoda řešení	Počet řešení
Kružnice $k_1, k_2$ soustředné ( $r_1 < r_2$ )	$A$ uvnitř $k_1$		0
	$A$ vně $k_2$		0
	$A \in k_1$	$kk_T$	2
	$A$ v mezikruží	MBDV	4
Kružnice $k_1, k_2$ nesoustředné ( $r_1 < r_2$ ), $k_1$ uvnitř $k_2$	$A$ uvnitř $k_1$		0
	$A$ vně $k_2$		0
	$A$ na jedné z kružnic	$kk_T$	2
	$A$ vně $k_1$ , uvnitř $k_2$	KI	4
Kružnice $k_1, k_2$ vnitřní dotyk	$A$ bod dotyku kružnic		$\infty$
	$A$ na jedné z kružnic	$kk_T$	1
	$A$ buď vně $k_2$ , nebo uvnitř $k_1$	KI	1
	$A$ leží uvnitř $k_2$ , ale vně $k_1$	KI	3
Kružnice $k_1, k_2$ vnější dotyk	$A$ bod dotyku kružnic		$\infty$
	$A$ na jedné z kružnic	$kk_T$	1
	$A$ uvnitř jedné z kružnic	KI	1
	$A$ vně obou kružnic	KI	3
Kružnice $k_1, k_2$ se protínají	$A$ bod průniku kružnic		0
	$A$ na jedné z kružnic	$kk_T$	2
	$A$ buď vně obou kružnic, nebo uvnitř alespoň jedné kružnice	KI	2
	$A$ uvnitř jedné kružnice		0
Kružnice $k_1, k_2$ vně sebe	$A$ na jedné z kružnic	$kk_T$	2
	$A$ vně obou kružnic	KI	4

V rámci této kapitoly se zaměříme na zadání vybraných úloh, které lze vyřešit právě s pomocí kruhové inverze. Z tabulky je vidět, že až 7 úloh můžeme vyřešit za pomoci

kruhové inverze. My se však zaměříme pouze na 2 vybrané úlohy. První zvolená úloha má 3 řešení, u druhé varianty lze nalézt až 4 hledané kružnice.

### 2.2.6.1 PŘÍKLAD

Jsou dány kružnice  $k_1, k_2$  mající vnitřní dotyk a bod  $A$ , který leží uvnitř kružnice  $k_2$ , ale neleží uvnitř kružnice  $k_1$ . Sestroj všechny kružnice  $l$  dotýkající se zadaných objektů.

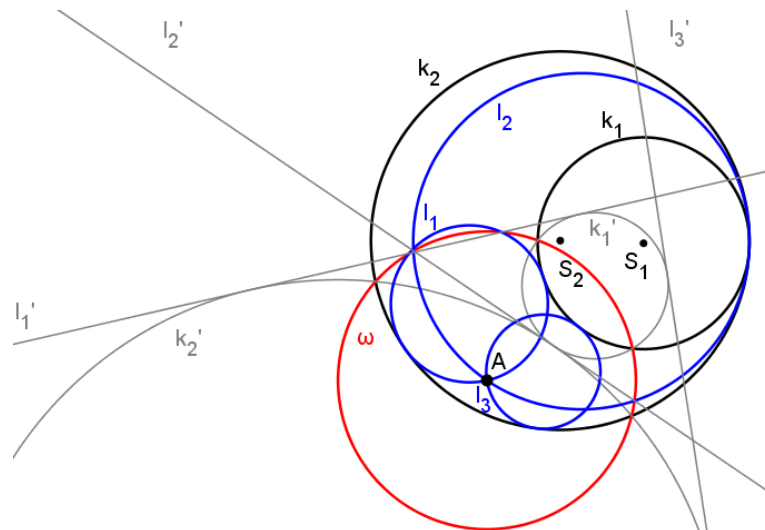
#### Rozbor:

Úlohu řešíme s užitím kruhové inverze. Hlavní kružnice má libovolný poloměr  $r$  a střed v zadaném bodě  $A$ . Pomocí této KI převedeme úlohu na vnitřní úlohu. Kružnice  $k_1, k_2$  se v  $INV(\omega)$  zobrazí na kružnice  $k_1', k_2'$ . Bod  $A$  se zobrazí na nevlastní bod. V rámci vnitřní úlohy sestrojíme společné tečny ( $l_1', l_2', l_3'$ ) kružnic  $k_1', k_2'$ . Opětovná aplikace kruhové inverze nám tyto tečny zobrazí na hledané kružnice ( $l_1, l_2, l_3$ ).

#### Popis konstrukce:

1.  $\omega; \omega(A, r)$ , kde  $r$  je libovolné
2.  $k_1', k_2'$ ;  $INV(\omega): k_1 \rightarrow k_1', k_2 \rightarrow k_2'$
3.  $l_1', l_2', l_3'$ ;  $l_1', l_2', l_3'$  jsou společné tečny kružnic  $k_1', k_2'$
4.  $l_1, l_2, l_3$ ;  $INV(\omega): l_1' \rightarrow l_1, l_2' \rightarrow l_2, l_3' \rightarrow l_3$

#### Konstrukce:



Obrázek 24: Příklad 2.2.6.1 (Soubor 18)

#### Rozbor:

Kružnicím  $k_1', k_2'$  lze sestrojit až 3 tečny. Ty se v  $INV(\omega)$  zobrazí na kružnice. Proto má úloha 3 řešení.

## 2.2.6.2 PŘÍKLAD

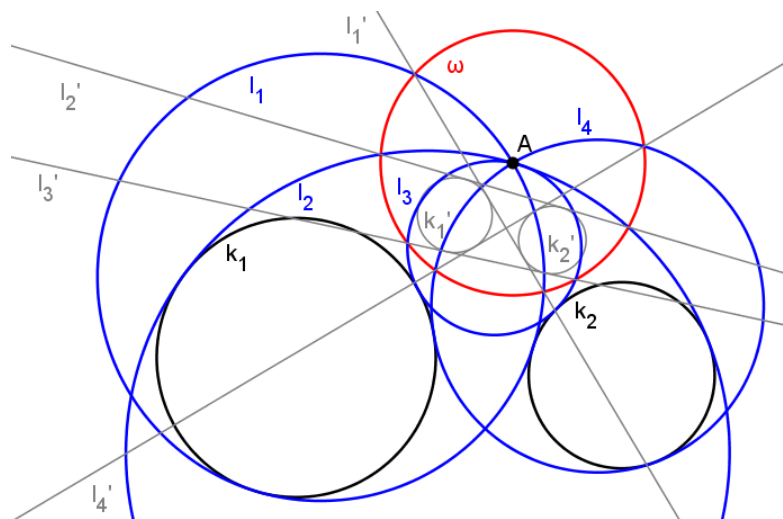
Nechť kružnice  $k_1$  a  $k_2$  leží vně sebe. Sestrojte kružnici  $l$  dotýkající se obou zadaných kružnic a procházející bodem  $A$ , který leží vně  $k_1$  a  $k_2$ .

**Rozbor:**

Úlohu řešíme s užitím kruhové inverze. Hlavní kružnice má libovolný poloměr  $r$  a střed v zadaném bodě  $A$ . Nyní řešíme s pomocí KI tzv. vnitřní úlohu. Zadané kružnice se nám zobrazí opět na kružnice. Bod  $A$  se v kruhové inverzi zobrazí na nevlastní bod. Nově vytvořeným kružnicím  $k_1'$  a  $k_2'$  sestrojíme tečny. Pomocí stejné hlavní kružnice převedeme tečny zpět na řešení původní úlohy. Tímto řešením budou hledané kružnice splňující vlastnost v zadání.

**Popis konstrukce:**

1.  $\omega$ ;  $\omega(A, r)$ , kde  $r$  je libovolné
2.  $k_1', k_2'$ ;  $INV(\omega): k_1 \rightarrow k_1', k_2 \rightarrow k_2'$
3.  $l_1', l_2', l_3', l_4'$ ;  $l_1', l_2', l_3', l_4'$  jsou společné tečny kružnic  $k_1', k_2'$
4.  $l_1, l_2, l_3, l_4$ ;  $INV(\omega): l_1' \rightarrow l_1, l_2' \rightarrow l_2, l_3' \rightarrow l_3, l_4' \rightarrow l_4$

**Konstrukce:**

Obrázek 25: Příklad 2.2.6.2 (Soubor 19)

**Diskuze:**

Řešení se opírá o to, že kruhová inverze je involutorní zobrazení. Vzhledem k vhodně zvolené KI se nám zadané kružnice ležící vně sebe zobrazí opět na kružnice ležící vně sebe. Tyto kružnice mají celkem 4 tečny. V důsledku toho má úloha celkem 4 řešení.

## 2.2.7 ÚLOHA TYPU BPK

Tabulka 7: Úloha typu Bpk

Vzájemná poloha zadaných prvků		Metoda řešení	Počet řešení	
$A \notin p, A \notin k$	$p$ sečna $k$	KI	2	
	$p$ tečna $k$	$A, k$ v téže polorovině, $A$ vně $k$	KI	3
		$A, k$ v opačných polorovinách daných $p$	$kk_T$	1
		$A$ uvnitř $k$	$kk_T$	1
	$p$ vnější přímka $k$	$A, k$ ve stejné polorovině dané $p, A$ vně $k$	KI	4
		$A, k$ v opačných polorovinách daných $p$		0
		$A$ uvnitř $k$		0
	$A \in p, A \notin k$		$kp_T$	2
$A \notin p, A \in k$		$pk_T$	2	
$A \in p, A \in k$	$p$ tečna $k$		$\infty$	
	$p$ sečna $k$		0	

## 2.2.7.1 PŘÍKLAD

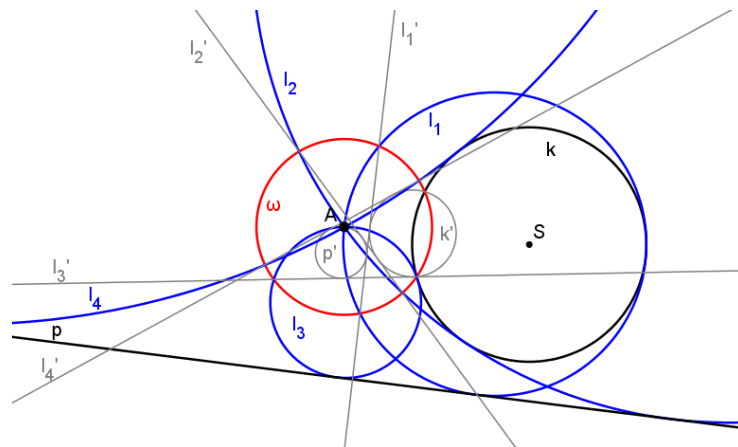
Mějme dánu přímku  $p$ , a poté v jedné polorovině kružnici  $k$  a bod  $A$ . Kdy bod  $A$  leží vně  $k$ . Sestrojte kružnici  $l$  procházející bodem  $A$  a dotýkající se přímky  $p$  a kružnice  $k$ .

**Rozbor:**

Nejdříve zavedeme kruhovou inverzi se středem v zadaném bodě  $A$ . V této kruhové inverzi zobrazíme přímku  $p$  (zobrazí se na kružnici  $p'$ ) a kružnici  $k$  (zobrazí se na kružnici  $k'$ ). V rámci vnitřní úlohy sestrojíme tečny ke kružnicím  $p'$  a  $k'$ . Tyto kružnice mají celkem 4 společné tečny. Ty se nám v  $INV(\omega)$  zobrazí na hledané kružnice.

**Popis konstrukce:**

- $\omega$ ;  $\omega(A, r)$ , kde  $r$  je libovolné
- $k'$ ;  $INV(\omega): k \rightarrow k'$
- $p'$ ;  $INV(\omega): p \rightarrow p'$
- $h_1', h_2', h_3', h_4'$ ;  $h_1', h_2', h_3', h_4'$  jsou společné tečny kružnic  $k', p'$
- $h_1, h_2, h_3, h_4$ ;  $INV(\omega): h_1' \rightarrow h_1, h_2' \rightarrow h_2, h_3' \rightarrow h_3, h_4' \rightarrow h_4$

**Konstrukce:**

Obrázek 26: Příklad 2.2.7.1 (Soubor 20)

**Diskuze:**

Přímka  $p$  je vnější přímka  $k$ , proto ani kružnice  $(p', k')$  z vnitřní úlohy nemají žádný společný bod –  $p'$  leží vně  $k'$ . Maximálně můžeme sestavit 4 tečny kružnic  $p', k'$ . Proto má úloha maximálně 4 řešení.

**2.2.8 ÚLOHA TYPU PPP**

I přes to, že se úloha typu ppp neřeší běžně s užitím kruhové inverze, uvádíme pro úplnost tabulku, v níž můžeme vidět možné počty řešení pro jednotlivá zadání. Tato Apolloniova úloha se řeší nejčastěji s užitím MBDV.

Tabulka 8: Úloha typu ppp

Vzájemná poloha zadaných prvků		Metoda řešení	Počet řešení
$p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$			0
Přímky $p_1, p_2, p_3$ jsou různoběžné	přímky se protínají v jednom spol. bodě		0
	přímky se protínají ve 3 bodech	MBDV	4
$p_1 \parallel p_2 \nparallel p_3$		MBDV	2

**2.2.9 ÚLOHA TYPU PPK**

Obdobně jako předcházející úloha je na tom Apolloniova úloha typu ppk. Ta se také běžně neřeší s užitím kruhové inverze. Řešíme jí s užitím STEJNO nebo MBDV. Pro



úplnost uvádíme opět pouze tabulku s různými možnostmi řešením úlohy v závislosti na vzájemné poloze zadaných prvků.

Tabulka 9: Úloha typu ppk

Vzájemná poloha zadaných prvků		Metoda řešení	Počet řešení	
$p_1, p_2$ rovnoběžné	$k$ vně pásu přímek $p_1$ a $p_2$		0	
	$p_1$ nebo $p_2$ tečnou $k$	$S$ vně pásu $p_1$ a $p_2$ <sup>12</sup>	MBDV	1
		$S$ uvnitř pásu $p_1$ a $p_2$	MBDV	3
	obě přímky jsou tečnami	MBDV	2	
	jedna z přímek je sečnou $k$	MBDV	2	
	obě přímky jsou sečnami $k$	MBDV	4	
	$k$ leží uvnitř pásu $p_1$ a $p_2$	MBDV	4	
$p_1, p_2$ různoběžné	$p_1 \cap k = p_2 \cap k = \{\}$	STEJNO	4	
	$p_1 \cap k = R$	pp <sub>T</sub>	4	
	$k$ protíná $p_1$ a $p_2$ vnější přímka	STEJNO	4	
	$k$ protíná $p_1$ a dotýká se $p_2$	STEJNO	6	
	$k$ protíná $p_1$ a $p_2$	STEJNO	8	

### 2.2.10 ÚLOHA TYPU PKK

Tabulka 10: Úloha typu pkk

Vzájemná poloha zadaných prvků		Metoda řešení	Počet řešení
kružnice $k_1, k_2$ nesoustředné	$p$ nemá s $k_1, k_2$ žádný společný bod	$k_1, k_2$ ve stejné polorovině	8
		$k_1, k_2$ v opačné polorovině	0
	$p$ má s $k_1, k_2$ 1 společný bod		$\infty$
	$p$ má s $k_1, k_2$ 2 společné body		0
	$p$ má s $k_1, k_2$ 3 společné body		0
kružnice $k_1, k_2$ soustředné	$p$ je tětivou $k_1$ nebo $k_2$	MBDV	4
	$p \cap k_1 = p \cap k_2 = \{\}$		0

Můžeme vidět, že existuje úloha, která má nekonečné množství řešení. U této úlohy hledáme množinu středů všech kružnic. Takou množinou je přímka kolmá na  $p$ . My

<sup>12</sup>  $S$  je středem zadané kružnice  $k$ .

se v další části této práce zaměříme na nejobecnější variantu Apolloniovy úlohy typu  $pkk$ , kdy řešením je 8 kružnic. Níže uvádíme zadání tohoto příkladu.

### 2.2.10.1 PŘÍKLAD

Nechť máme zadány 2 nesoustředné kružnice  $k_1$  a  $k_2$  nacházející se ve stejné polorovině vymezené přímkou  $p$ . Mějme dānu podmínku, že přímka  $p$  nemá s kružnicemi žádný společný bod. Sestrojte kružnici  $l$  dotýkající se zadaných objektů  $p$ ,  $k_1$  a  $k_2$ .

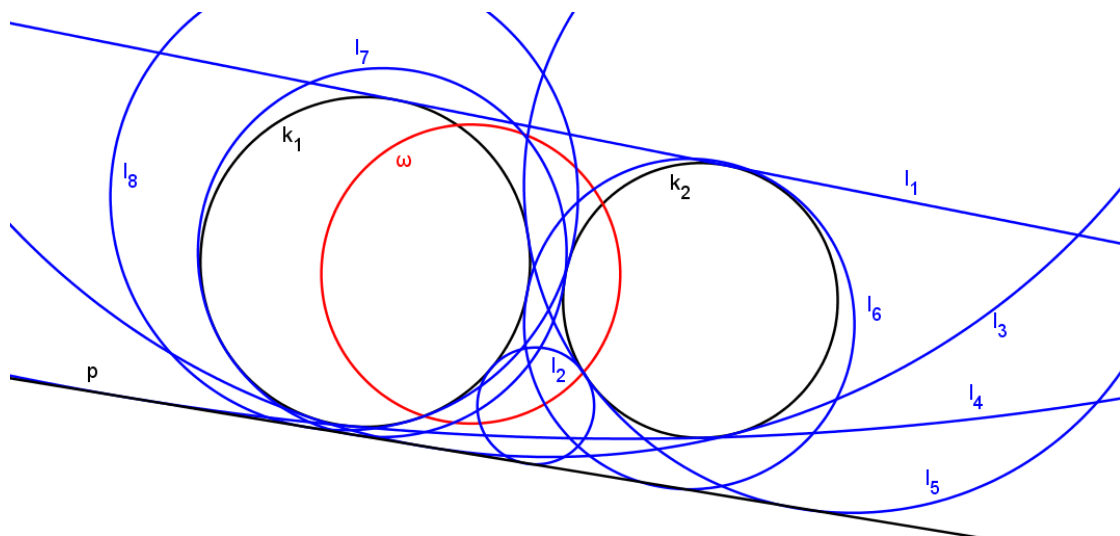
#### Rozbor:

Je potřeba najít hlavní kružnici  $\omega$ , ve které se zadané kružnice  $k_1$  a  $k_2$  zobrazí na soustředné kružnice  $k_1'$  a  $k_2'$ . Dále přímka  $p$  přejde na kružnici  $p'$  nacházející se v mezikruží  $k_1'$  a  $k_2'$ . Poté řešíme speciální úlohu  $kkk$  pomocí MBDV. Výsledkem této úlohy jsou kružnice  $h_1', h_2', h_3', h_4', h_5', h_6', h_7', h_8'$ . V  $INV(\omega)$  převedeme kružnice na hledané kružnice  $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8)$ , jež se dotýkají zadaných objektů.

#### Popis konstrukce:

1.  $\omega$ ;  $\omega$  zobrazí kružnice  $k_1$  a  $k_2$  jako soustředné
2.  $k_1', k_2'$ ;  $INV(\omega)$ :  $k_1 \rightarrow k_1', k_2 \rightarrow k_2', k_1', k_2'$  soustředné kružnice
3.  $p'$ ;  $INV(\omega)$ :  $p \rightarrow p', p'$  leží v mezikruží soustředných kružnic
4.  $h_1', h_2', h_3', h_4', h_5', h_6', h_7', h_8'$ ;  $h_1', h_2', h_3', h_4', h_5', h_6', h_7', h_8'$  jsou řešením Apolloniovy (vnitřní) úlohy  $kkk$  s objekty  $(p', k_1', k_2')$  pomocí MBDV
5.  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8$ ;  $INV(\omega)$ :  $h_1' \rightarrow h_1, h_2' \rightarrow h_2, h_3' \rightarrow h_3, h_4' \rightarrow h_4, h_5' \rightarrow h_5, h_6' \rightarrow h_6, h_7' \rightarrow h_7, h_8' \rightarrow h_8$

#### Konstrukce:



Obrázek 27: Příklad 2.2.10.1 (Soubor 21)

**Diskuze:**

Během konstrukce je potřeba vyřešit vnitřní úlohu kkk. Ta má 8 řešení (kružnice  $h_1', h_2', h_3', l_1', l_2', l_3', l_4', l_5', l_6', l_7', l_8'$ ). Proto má naše úloha 8 řešení.

**2.2.11 ÚLOHA TYPU KKK**

Tabulka 11: Úloha typu kkk

Vzájemná poloha zadaných prvků		Metoda řešení	Počet řešení
$k_1, k_2, k_3$ soustředné, $r_1 < r_2 < r_3$			0
$k_1, k_2$ soustředné, $r_1 < r_2$	$k_1 \cap k_3 =$ $= k_2 \cap k_3 = \{ \}$	$k_3$ leží v mezikruží $k_1, k_2$	0
		$k_3$ neleží v mezikruží $k_1, k_2$	MBDV <b>8</b>
	$k_1 \cap k_3 = R$ nebo $k_2 \cap k_3 = R$		MBDV 6
	$k_3$ protíná $k_2$		MBDV 4
	$k_3$ protíná $k_1$ i $k_2$		MBDV 4
$k_1, k_2$ nesoustředné, $r_1 < r_2$	$k_1 \cap k_3 = k_2 \cap k_3 = \{ \}$		KI <b>8</b>
	$k_1 \cap k_3 = k_2 \cap k_3 = R$		KI 4
	$k_1$ protíná $k_2$ ve dvou bodech		KI 4

Pozn.: Mějme zadány kružnice  $k_1(S_1, r_1)$ ,  $k_2(S_2, r_2)$ ,  $k_3(S_3, r_3)$ .

**2.2.11.1 PŘÍKLAD**

Mějme dány 3 nesoustředné kružnice  $k_1, k_2, k_3$ , které se protínají v jednom bodě  $R$ . Sestrojte kružnici  $l$ , dotýkající se třech zadaných kružnic.

**Rozbor:**

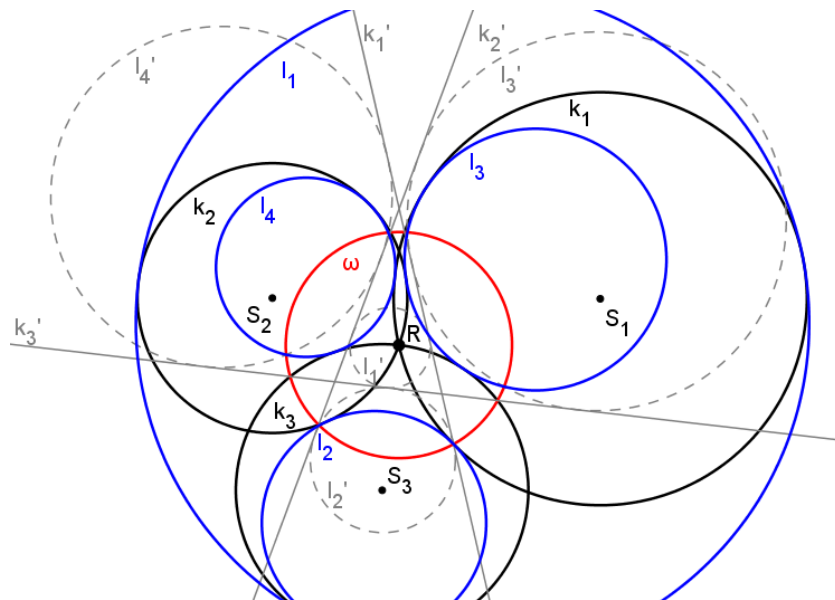
Jako střed kruhové inverze volíme bod  $R$ . V této kruhové inverzi se nám kružnice  $k_1, k_2, k_3$  zobrazí na přímky  $k_1', k_2', k_3'$ . Tyto přímky nám tvoří trojúhelník, ke kterému vytvoříme kružnici vepsanou ( $h_1'$ ) a 3 kružnice připsané ( $h_2', h_3', h_4'$ ) – tyto kružnice jsou řešením vnitřní úlohy. Jestliže na kružnice  $h_1', h_2', h_3', h_4'$  znovu aplikujeme kruhovou inverzi, dostáváme hledané kružnice.

**Popis konstrukce:**

1.  $\omega; \omega(R, r)$ , kde  $r$  je libovolné

2.  $k_1', k_2', k_3'$ ;  $INV(\omega): k_1 \rightarrow k_1', k_2 \rightarrow k_2', k_3 \rightarrow k_3'$
3.  $h_1'$ ;  $h_1'$  je kružnice vepsaná trojúhelníku vymezeného přímkami  $k_1', k_2', k_3'$
4.  $h_2', h_3', h_4'$ ;  $h_2', h_3', h_4'$  jsou kružnice připsané trojúhelníku vymezeného přímkami  $k_1', k_2', k_3'$
5.  $h_1, h_2, h_3, h_4$ ;  $INV(\omega): h_1' \rightarrow h_1, h_2' \rightarrow h_2, h_3' \rightarrow h_3, h_4' \rightarrow h_4$

**Konstrukce:**



Obrázek 28: Příklad 2.2.11.1 (Soubor 22)

**Diskuze:**

Kružnice procházející středem kruhové inverze se nám zobrazí na přímky. Tyto 3 přímky vymežují trojúhelník. Každému trojúhelníku lze připsat 3 kružnice a vepsat právě jednu kružnici. Nově vytvořené kružnice  $h_1', h_2', h_3', h_4'$  se nám zobrazí opět na kružnice, protože neprocházejí bodem  $R$ . Proto má tato úloha celkem 4 řešení.

### 2.2.11.2 PŘÍKLAD

Nechť jsou zadány 3 kružnice  $k_1, k_2, k_3$ , které nemají žádný společný bod a jsou nesoustředné. Každá kružnice leží vně jakékoliv zadané kružnice. Sestrojte kružnici dotýkající se 3 zadaných kružnic.

**Rozbor:**

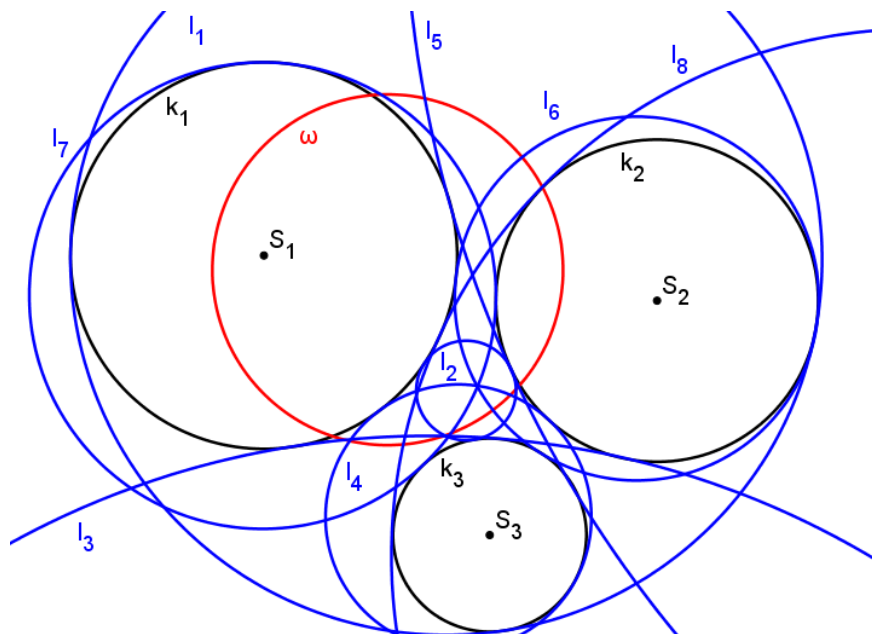
Nejprve sestrojíme kruhovou inverzi, ve které se kružnice  $k_1$  a  $k_2$  zobrazily na soustředné kružnice. V této kruhové inverzi podle kružnice  $\omega$  se nám kružnice  $k_3$  zobrazí do mezikruží vytvořeného kružnicemi  $k_1', k_2'$ , čímž dostáváme vnitřní úlohu. Tuto úlohu

řešíme pomocí MBDV. Řešením této úlohy jsou kružnice  $l_1', l_2', l_3', l_4', l_5', l_6', l_7', l_8'$ , které se v  $INV(\omega)$  zobrazí na hledané kružnice  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8$ .

**Popis konstrukce:**

1.  $\omega$ ;  $\omega$  zobrazí kružnice  $k_1$  a  $k_2$  jako soustředné
2.  $k_1', k_2'$ ;  $INV(\omega)$ :  $k_1 \rightarrow k_1', k_2 \rightarrow k_2', k_1', k_2'$  soustředné kružnice
3.  $k_3'$ ;  $INV(\omega)$ :  $k_3 \rightarrow k_3', k_3'$  leží v mezikruží soustředných kružnic
4.  $l_1', l_2', l_3', l_4', l_5', l_6', l_7', l_8'$ ;  $l_1', l_2', l_3', l_4', l_5', l_6', l_7', l_8'$  jsou řešením Apolloniovy (vnitřní) úlohy kkk s objekty  $(k_1', k_2', k_3')$  pomocí MBDV
5.  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8$ ;  $INV(\omega)$ :  $l_1' \rightarrow l_1, l_2' \rightarrow l_2, l_3' \rightarrow l_3, l_4' \rightarrow l_4, l_5' \rightarrow l_5, l_6' \rightarrow l_6, l_7' \rightarrow l_7, l_8' \rightarrow l_8$

**Konstrukce:**



Obrázek 29: Příklad 2.2.11.2 (Soubor 23)

**Diskuze:**

Naši úlohu převádíme na vnitřní úlohu, kdy máme 2 kružnice soustředné a jedna kružnice leží v jejich mezikruží. Tuto úlohu kkk lze řešit pomocí MBDV. Řešením této úlohy je 8 kružnic, proto má i naše původní úloha celkem 8 řešení.

**2.2.12 PAPPY ÚLOHY**

V předchozí kapitole jsme si mohli všimnout, že některé speciální případy Apolloniových úloh odkazují na řešení pomocí tzv. Pappových úloh. Proto si tyto úlohy stručně definujeme a uvedeme si zde základní možné varianty.

**Definice: Pappovou úlohou** rozumíme takovou úlohu, kdy máme zadány 3 různé prvky (body, přímky, kružnice) z nichž alespoň jeden je bod a alespoň jeden je kruhová křivka (přímka, kružnice). Jejím úkolem je sestrojít kružnici procházející zadanými body a dotýkající se zadaných kruhových křivek.

Obecnou Pappovu úlohu lze rozdělit na 6 podúloh. Podobně jako Apolloniovy úlohy mají i tyto podúlohy speciální zkratky. Ty pro změnu udávají zadané objekty, z nichž jeden je speciální bod nacházející se na kruhové křivce. Mějme zkratku úlohy  $Bp_T$  – zadaný bod, přímka, na které leží další bod. V kompletním seznamu 6 podúloh nalezneme:  $Bp_T, pp_T, kp_T, Bk_T, pk_T, kk_T$ .

U každé úlohy musíme uvažovat různou vzájemnou polohu zadaných objektů. Na základě zadaných vstupních prvků rozlišujeme i různé metody řešení. Pappovy úlohy nejčastěji řešíme pomocí MBDV (např. osa úsečky, osa pásu, množina středů všech kružnic apod.) nebo s pomocí geometrických zobrazení (např. stejnoolehlostí).

## 2.3 SPECIÁLNÍ ÚLOHY ŘEŠENÉ POMOCÍ KRUHOVÉ INVERZE

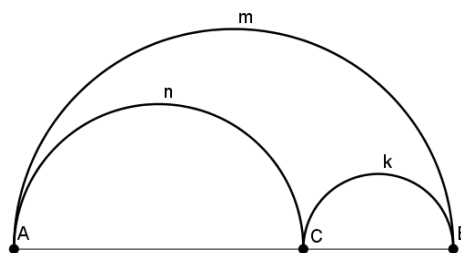
### 2.3.1 PAPPOVA VĚTA O KRUŽNICÍCH

V kapitole 2.2.12 jsme se věnovali Pappovým úlohám, jež nesou název po Pappovi z Alexandrie (290 – 350 n. l.). V následující kapitole se budeme věnovat tzv. Pappově větě o kružnicích zabývající se řetězcem kružnic sestrojených v arbelu.

**Definice:** Jestliže máme bod  $C$  nacházející se uvnitř úsečky  $AB$ , pak útvar ohraničený polokružnicemi  $m, n, k$  umístěnými po řadě nad průměry  $AB, AC$  a  $CB$  v téže polorovině s hraniční přímkou  $AB$  nazveme **arbelos  $ABC$** .

(Leischner, 2015)

Pro lepší představu definice uvádíme níže obrázek 30.

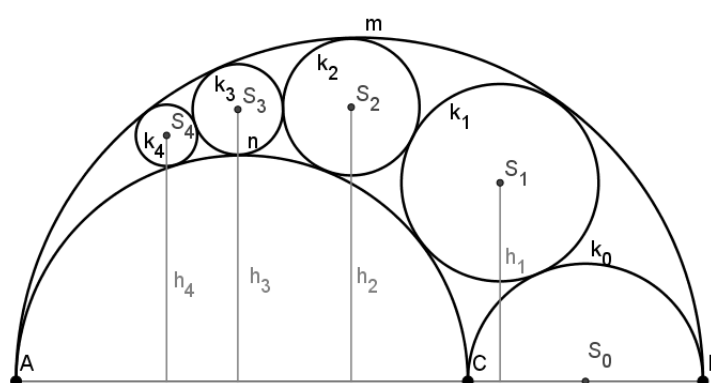


Obrázek 30: Arbelos ABC

**Věta:** Mějme zadaný arbel  $ABC$  a vepišme do něj kružnici  $k_1$ , aby se dotýkala zadaných polokružnic  $m, n, k_0$ , kde  $k_0$  rozumíme půlkružnici sestrojenou nad úsečkou  $CB$ . Dále vepišme kružnici  $k_2$ , aby se dotýkala kružnic  $m, n$  a  $k_1$ . Tento postup dále analogicky opakujme. Vytvoříme tím řetězec kružnic  $k_1, k_2, k_3, k_4, \dots$ , kde body  $S_1, S_2, S_3, S_4 \dots$  jsou po řadě středy těchto kružnic. Dále necht'  $h_1, h_2, h_3, h_4 \dots$  jsou vzdálenosti středů těchto kružnic od úsečky  $AB$  a platí pro ně:

$$h_1 = d_1, h_2 = 2d_2, h_3 = 3d_3, h_4 = 4d_4, \dots,$$

kde  $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots$  jsou průměry kružnic  $k_1, k_2, k_3, k_4, \dots$  nacházející se v arbelu.



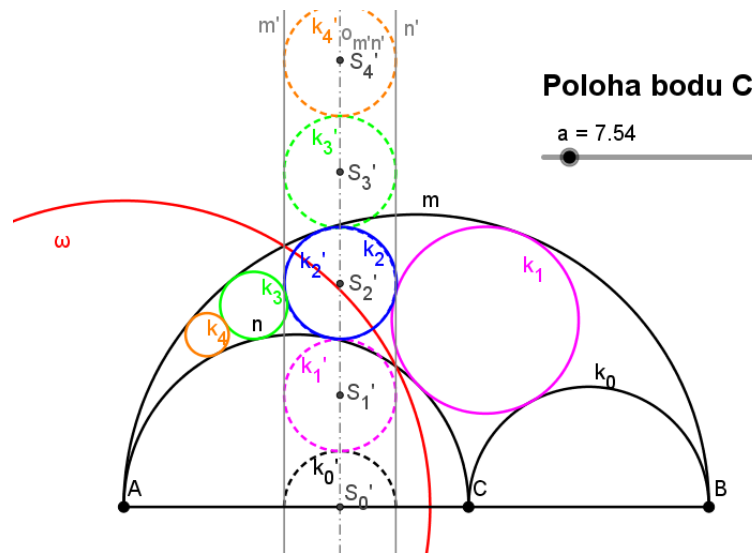
Obrázek 31: Pappova věta o kružnicích

*Důkaz:* Pokud bychom chtěli během důkazu postupovat obdobně jako Pappos ve svém díle, zabral by nám důkaz několik stránek. My však máme k dispozici programy dynamické geometrie umožňující jednoduchou aplikaci kruhové inverze.

Zavedeme si  $INV(\omega)$  se středem v bodě  $A$ , tak aby byla ortogonální ke kružnici  $k_j$  (pro naši ukázkou platí pro kružnici  $k_2$  Pappova řetězce). Touto kruhovou inverzí zajistíme, že kružnice  $k_j$  bude samodružná ( $k_j = k_j'$ ). Polokružnice  $m$  a  $n$  se v kruhové inverzi zobrazí jako tečny kružnice  $k_j'$  a zároveň  $m' \perp AB$ ,  $n' \perp AB$ .<sup>13</sup>  $INV(\omega)$  zachovává body dotyku. Zobrazíme-li v této kruhové inverzi i ostatní kružnice nacházející se v Pappově řetězci, dojde k vytvoření řetězce shodných kružnic s kružnicí  $k_j$  ležících v pásu určeném přímkami  $m'$  a  $n'$ . Z obrázku můžeme jednoduše vyvodit, že  $h_j = 2jr_j = jd_j$ . (Pro naši ukázkou by platily následující rovnosti:  $h_2 = 2 \cdot 2r_2 = 2d_2$ . Viz obrázek 32.)

(Leischner, 2015)

<sup>13</sup> Zároveň tedy platí, že  $m' \parallel n'$ . Tyto přímky vytváří pás.



Obrázek 32: Důkaz Pappovy věty o kružnicích (Soubor 24)

V Souboru 24 si můžeme ověřit, že důkaz výše uvedené věty neplatí pouze pro  $k_2$ , ale například platí i pro kružnice  $k_3$  nebo  $k_4$ . Stačí využít posuvník, pomocí něhož dokážeme měnit polohu bodu  $C$  na úsečce  $AB$ . Jednotlivé kružnice zobrazené v  $INV(\omega)$  si odpovídají jak popisem, tak dokonce i barevně. Čárkované kružnice jsou postupně vzory kružnic  $k_1, k_2, k_3, k_4$ .

### 2.3.2 PŘÍKLAD

Mějme zadány kružnice  $k_1, k_2$  se společnými průsečíky  $A, B$ . Uvažujme, že existují nějaké dvě kružnice  $l_1, l_2$ , které mají vnitřní dotyk s  $k_1$ , vnější dotyk s  $k_2$  a navíc se společně dotýkají v bodě  $X$ . Ukažte, že bod  $X$  leží na pevné kružnici nezávislé na volbě kružnic  $l_1$  a  $l_2$ .

(Foltýn, 2013)

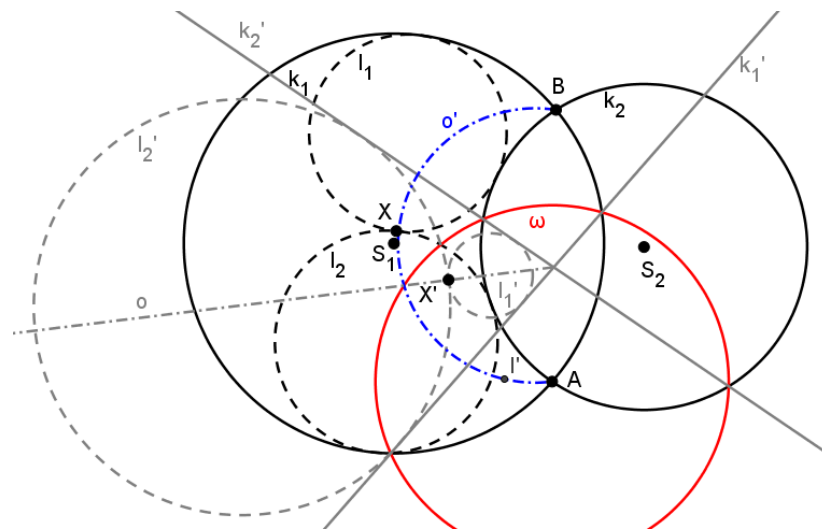
#### Rozbor:

Výše uvedené zadání dokážeme pomocí konstrukce s využitím kruhové inverze. Jako hlavní kružnici zavedeme kružnici  $\omega$  se středem v bodě  $A$  a libovolně zvoleným poloměrem. Kružnice  $k_1$  a  $k_2$  se zobrazí na přímky  $k_1', k_2'$  se společným průsečíkem  $B'$ . Protože kružnice  $l_1, l_2$  leží uvnitř  $k_1$  a vně  $k_2$ , zobrazí se na kružnice  $l_1', l_2'$  ležící uvnitř úhlu vymezeného přímkami  $k_1', k_2'$ . Každá z kružnic  $l_1', l_2'$  se dotýká přímek  $k_1', k_2'$ . Navíc mají tyto kružnice společný bod dotyku – bod  $X'$  ležící na ose úhlu sevřeného přímkami  $k_1', k_2'$ . Obrazem této osy v  $INV(\omega)$  je kružnice  $\sigma'$ . Množina  $\sigma'$  je naší hledanou množinou.



**Popis konstrukce:**

1.  $\omega$ ;  $\omega(A, r)$ , kde  $r$  je libovolné
2.  $k_1', k_2'$ ;  $INV(\omega): k_1 \rightarrow k_1', k_2 \rightarrow k_2'$
3.  $h_1', h_2'$ ;  $INV(\omega): h_1 \rightarrow h_1', h_2 \rightarrow h_2'$
4.  $X$ ;  $X \in h_1' \cap h_2'$
5.  $o$ ;  $o$  je osa úhlu přímek  $k_1', k_2'$  a protíná kružnice  $h_1', h_2'$
6.  $o'$ ;  $INV(\omega): o \rightarrow o'$  a  $X \in o'$

**Konstrukce:**

Obrázek 33: Příklad 2.3.2 (Soubor 25)

**Diskuze:**

Pro danou polohu a rozměry kružnic  $h_1$  a  $h_2$  existuje právě jedna množina  $o'$  (v obrázku 33 – modrá). Dokázali jsme zadání úlohy.

**2.3.3 PŘÍKLAD**

Je dán pevný trojúhelník  $ABC$ , bod  $D$  leží na straně  $BC$ . Zjistěte, jakých hodnot může nabývat úhel svíraný kružnicí opsanou trojúhelníku  $ABD$  (kružnice  $k_1$ ) a kružnicí opsanou trojúhelníku  $ACD$  (kružnice  $k_2$ ).

(Šámal, 1996)

**Rozbor:**

Nejprve zavedeme kruhovou inverzi pomocí hlavní kružnice se středem v bodě  $A$  s libovolným poloměrem  $r$ . V této kruhové inverzi zobrazíme body  $B, C, D$ . Kružnice  $k_1$  a  $k_2$  se nám postupně zobrazí na přímky  $k_1'$  (přímka  $B'D'$ ) a  $k_2'$  (přímka  $C'D'$ ). Úhel mezi

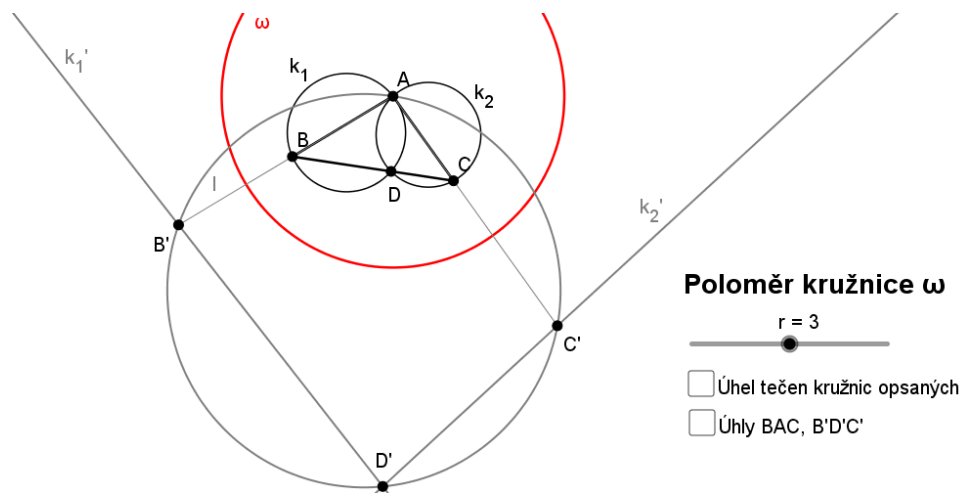
křivkami se kruhovou inverzí zachovává. Proto je velikost zkoumaného úhlu stejná jako velikost úhlu  $\sphericalangle B'D'C'$ . (Přesněji velikost zkoumaného úhlu odpovídá minimu z čísel  $|\sphericalangle B'D'C'|$  a  $180^\circ - |\sphericalangle B'D'C'|$ .)

Mějme nyní čtyřúhelník  $AB'D'C'$ . Tomu lze opsat kružnici, protože body  $A, B, D$  leží na přímce, která se v  $INV(\omega)$  zobrazí na kružnici opsanou čtyřúhelníku. Podle věty o obvodovém úhlu platí, že  $|\sphericalangle B'D'C'| + |\sphericalangle B'AC'| = 180^\circ$ . Body  $A, B, B'$  jsou kolineární. Tuto vlastnost mají i body  $A, C, C'$ .

#### Popis konstrukce:

1.  $\omega$ ;  $\omega(A, r)$ , kde  $r$  je libovolné
2.  $k_1, k_2$ ;  $INV(\omega)$ :  $k_1 \rightarrow k_1', k_2 \rightarrow k_2'$
3.  $B', C', D'$ ;  $INV(\omega)$ :  $B \rightarrow B', C \rightarrow C', D \rightarrow D'$
4. čtyřúhelník  $AB'D'C'$
5.  $l$ ;  $l$  je kružnice opsaná čtyřúhelníku  $AB'D'C'$

#### Konstrukce:



Obrázek 34: Příklad 2.3.3 (Soubor 26)

#### Diskuze:

Na základě rozboru má hledaný úhel tedy vždy stejnou velikost a to konkrétně menší z velikosti úhlů  $|\sphericalangle BAC|$  a  $180^\circ - |\sphericalangle BAC|$ .

Popis konstrukce zachovává úplnost řešení. Nejdůležitější na tomto příkladu je rozbor a diskuze samotného řešení o velikosti hledaného úhlu. V Souboru 26 nalezneme posuvné měřítko, čímž si můžeme ověřit, že poloměr hlavní kružnice můžeme volit libovolně. Pro ověření našeho výsledku navíc můžeme zobrazit naše hledané úhly. Jednu

dvojici úhlů tvoří úhly sevřené tečnami  $t_1$  a  $t_2$  protínající se v bodě  $A$ . Druhou dvojici tvoří úhly  $\sphericalangle B'D'C'$  a  $\sphericalangle BAC$ . V rámci těchto dvou dvojic jsou velikostně si odpovídající úhly znázorněny stejnou barvou (zelená:  $\alpha = \gamma$ , červená:  $\beta = \delta$ ). Libovolně lze volit i polohu bodu  $D$  na úsečce  $BC$ .

### 2.3.4 PŘÍKLAD

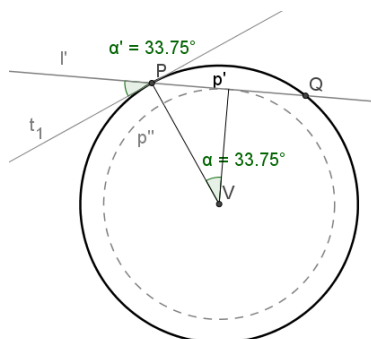
Nechť je zadána kružnice  $k_1(S_1, r_1)$ , přímka  $p$  a bod  $M$ , který neleží ani na jedné ze zadaných kruhových křivek (křivky  $k_1, p$ ). Sestrojte kružnici  $l$  procházející bodem  $M$ , protínající kružnici  $k_1$  ortogonálně a protínající přímku  $p$  pod zadaným úhlem  $\alpha$ .

(Šedivý, 1987)

#### Rozbor:

Pro nalezení řešení využijeme kruhovou inverzi, pomocí níž získáme vnitřní úlohu. Volíme hlavní kružnici  $\omega$  se středem bodě  $M$  a libovolným poloměrem. V  $INV(\omega)$  se nám kružnice  $k_1$  zobrazí jako kružnice  $k_1'$  a přímka  $p$  na kružnici  $p'$  procházející středem kruhové inverze. Naše hledaná kružnice  $l$  by se v kruhové inverzi zobrazila do přímky  $l'$ . Výsledkem vnitřní úlohy bude tedy přímka  $l'$ , která je ortogonální s kružnicí  $k_1'$  a kružnici  $p'$  protíná pod úhlem  $\alpha$ .

Jestliže má naše hledaná přímka  $l'$  protínat kružnici  $k_1'$  ortogonálně, musí tedy procházet jejím středem - bodem  $S_1'$ . Dále je potřeba sestrojit kružnici  $p'$ , jejíž poloměr vypočteme s využitím goniometrických funkcí. Můžeme si všimnout, že řešíme další vnitřní úlohu. Středem  $S_1'$  vedte tečnu ke kružnici  $p''$  (viz obrázek 35).<sup>14</sup> Tím zajistíme, že naše přímka  $l'$  bude protínat kružnici  $p'$  pod daným úhlem  $\alpha$ .



Obrázek 35: Rozbor - příklad 2.3.4

<sup>14</sup> V obrázku platí  $\alpha = \alpha'$ , horní index u jednoho z úhlů je výsledkem toho, že program GeoGebra nedovolí pojmenovat stejně 2 různě definované úhly.

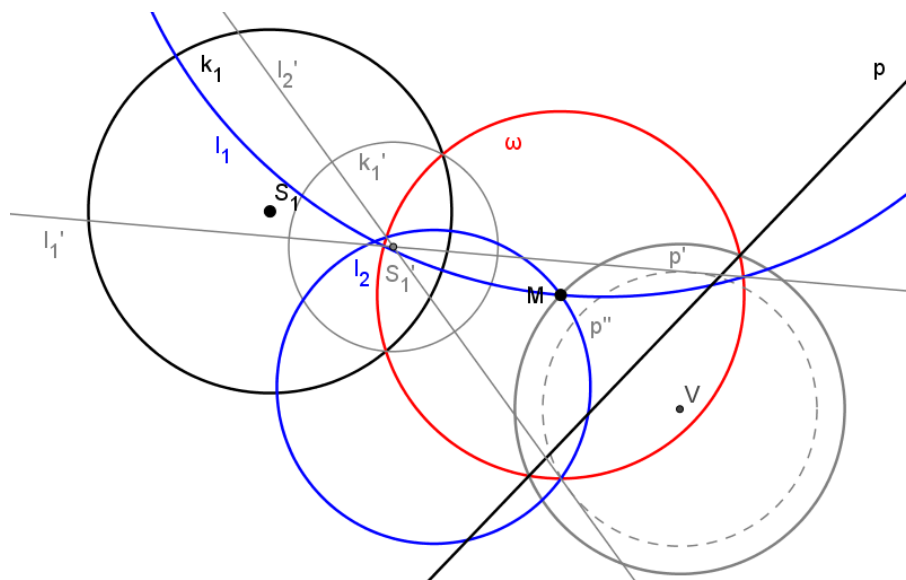
V našem případě dojde k sestrojení 2 tečen z bodu  $S_1'$  ke kružnici  $p'$ . Pro zachování značení jsme 2 různé možnosti řešení označili pomocí dolních indexů ( $l_1', l_2'$ ).

Řešení našeho zadání dostaneme, pokud po vyřešení vnitřních úloh zobrazíme přímky  $l_1'$  a  $l_2'$  v  $INV(\omega)$ . Dostáváme tím kružnice  $l_1, l_2$  splňující podmínky uvedené v zadání.

#### Popis konstrukce:

1.  $\omega$ ;  $\omega(M, r)$ , kde  $r$  je libovolné
2.  $k_1'$ ;  $INV(\omega)$ :  $k_1 \rightarrow k_1'$
3.  $p'$ ;  $INV(\omega)$ :  $p \rightarrow p'$
4.  $V$ ;  $V$  je střed kružnice  $p'$
5.  $p''$ ;  $p''(V, s)$ , kde  $s$  je poloměr vypočítaný pomocí goniometrických funkcí na základě velikosti úhlu  $\alpha$
6.  $S_1'$ ;  $S_1'$  je střed kružnice  $k_1'$
7.  $l_1', l_2'$ ; kde  $l_1', l_2'$  jsou tečny z bodu  $S_1'$  ke kružnici  $p''$
8.  $l_1, l_2$ ;  $INV(\omega)$ :  $l_1' \rightarrow l_1, l_2' \rightarrow l_2$

#### Konstrukce:



Obrázek 36: Příklad 2.3.4 (Soubor 27)

#### Diskuze:

Od velikosti úhlu  $\alpha$  se odvíjí poloměr kružnice  $p''$ . Úloha může mít až 2 řešení pokud platí, že poloměr kružnice  $p''$  je menší než velikost úsečky  $VS_1'$ .

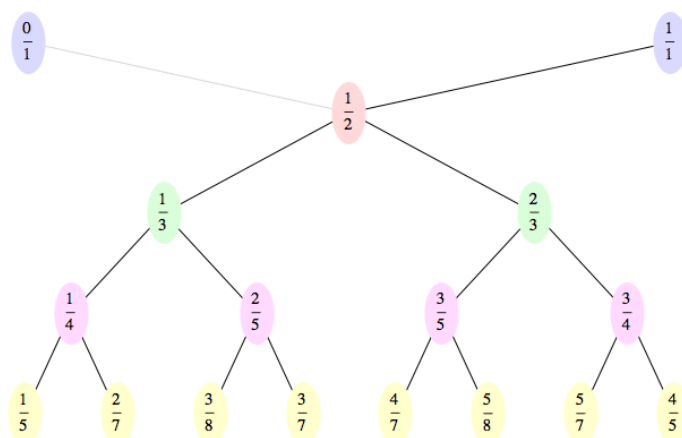
### 2.3.5 VZNIK RACIONÁLNÍCH ČÍSEL A KRUHOVÁ INVERZE

V následující podkapitole se blíže podíváme na propojení geometrie s aritmetikou a zaměříme se konkrétně na číselné obory, přesněji na **racionální čísla**.

**Definice: Racionálním číslem** rozumíme takové číslo, které jde zapsat ve tvaru podílu dvou čísel, pro která platí:

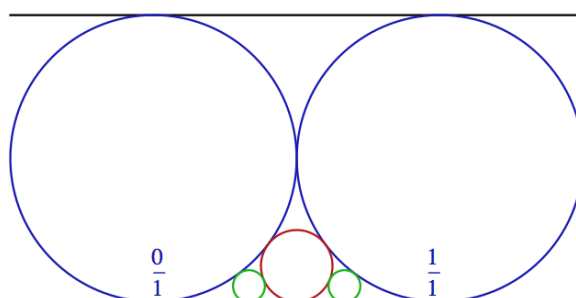
$$\frac{a}{b}, \text{ kde } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, D(a, b) = 1.$$

Jednou z metod, jak zobrazit všechna racionální čísla, je tzv. **Stern-Brocotův strom**. Strukturu těchto čísel ve tvaru zlomku můžeme vidět na obrázku níže. Všimněme si, že jednotlivé úrovně jsou vždy provázány s následujícím řádkem.



Obrázek 37: Stern-Brocotův strom Zdroj: [www.matfyz.cz](http://www.matfyz.cz)

My se však nebudeme blíže zabývat procesem generování těchto čísel pomocí Stern-Brocotova stromu. Zaměříme se na propojení tohoto stromu s kruhovou inverzí. K tomu využijeme **Fordových kružnic**. Ty nám vznikají sestavením vzájemně se dotýkajících kružnic. Jejich konstrukci odvodíme z obrázku 38.



Obrázek 38: Fordovy kružnice - Zdroj: [www.matfyz.cz](http://www.matfyz.cz)

Mějme dány 2 kružnice o shodném poloměru ležící v pásu vzájemně se dotýkajících (modrých) kružnic. Sestrojíme kružnici (červenou) dotýkající se zadaných (modrých) kružnic. Další kružnici sestrojíme tak, aby se naše nová kružnice (zelená) dotýkala zadané (modré) kružnice a nově vzniklé (červené) kružnice. Následovalo by sestavení kružnice dotýkající se zelené a modré kružnice. Tento proces lze neustále opakovat. Dostaneme tím nekonečné množství vzájemně se dotýkajících kružnic. Dále lze například zkonstruovat kružnici dotýkající se červené a zelené apod. Nově vzniklé kružnice musí splňovat podmínku, že alespoň jedna „hlavní“ přímka (přímka vymežující pás – v rámci Souboru 28 se jedná o osu  $x$ ) je její tečnou.

Protože je konstrukce vzájemně se dotýkajících kružnic mnohdy velmi obtížná, ulehčíme si práci **užitím kruhové inverze**. V zadání příkladu si zavedeme podmínky optimální pro konstrukci.<sup>15</sup>

**Příklad:** Mějme zadanou kruhovou inverzi ( $INV(\omega_1)$ ) se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic a poloměrem o velikosti  $1j$ . Dále mějme definovaný pás vymezený osou  $x$  a přímkou o rovnici  $y=1$ . V tomto pásu vytvoříme pás kružnic  $k_n$ , mající vždy dotyk s přímkami vymežující námi zadaný pás a mající vnější dotyk se sousední kružnicí. Základní kružnice (u nás  $k_1$ ) má střed  $S_1$  v bodě  $[0;0,5]$  a poloměr  $0,5j$ . (Viz Soubor 28)

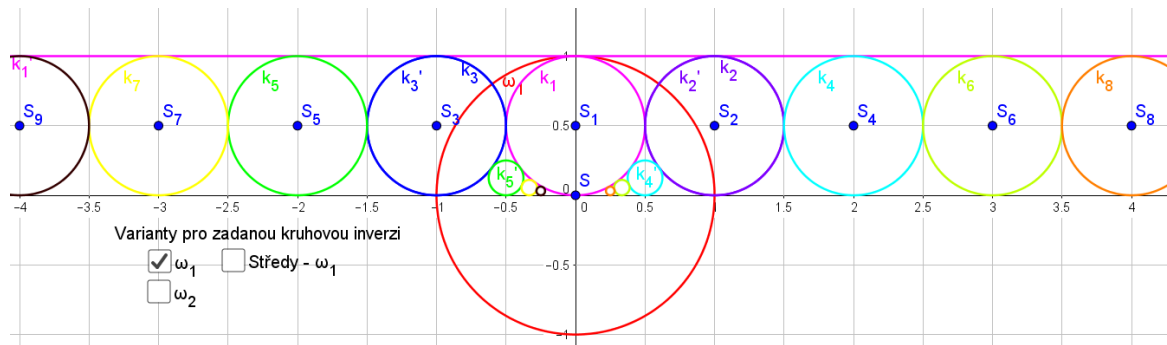
Nyní zobrazíme kružnice  $k_n$  v  $INV(\omega_1)$ . Z obrázku níže si všimněme, že:

- $k_1$ ;  $INV(\omega_1)$ :  $k_1 \rightarrow k_1'$ , kde  $k_1'$  je přímka totožná s  $y=1$
- $k_2, k_3$ ;  $INV(\omega_1)$ :  $k_2 \rightarrow k_2', k_3 \rightarrow k_3'$ , kde  $k_2=k_2', k_3=k_3'$
- $k_n$ ;  $INV(\omega_1)$ :  $k_n \rightarrow k_n'$ , pro  $n > 3, n \in \mathbb{N}$ , kde  $k_n$  je vzorem obrazu  $k_n'$

(Rokyta, 2020)

V Souboru 28 se můžeme podívat na samotnou konstrukci. Variantu s hlavní kružnicí  $\omega_1$  nalezneme v kroku od 1 do kroku 33. Pokud změňme polohu kružnice  $\omega_1$ , dostáváme další kružnice. Druhou kruhovou inverzí ( $INV(\omega_2)$ ) je definována varianta se středem kružnice  $\omega_2$  v bodě  $[1;0]$  a stejným poloměrem. Obě varianty lze zobrazit současně. Je tedy patrné, že v závislosti na zavedení hlavní kružnice, můžeme generovat další kružnice mající dotyk s již vytvořenými kružnicemi.

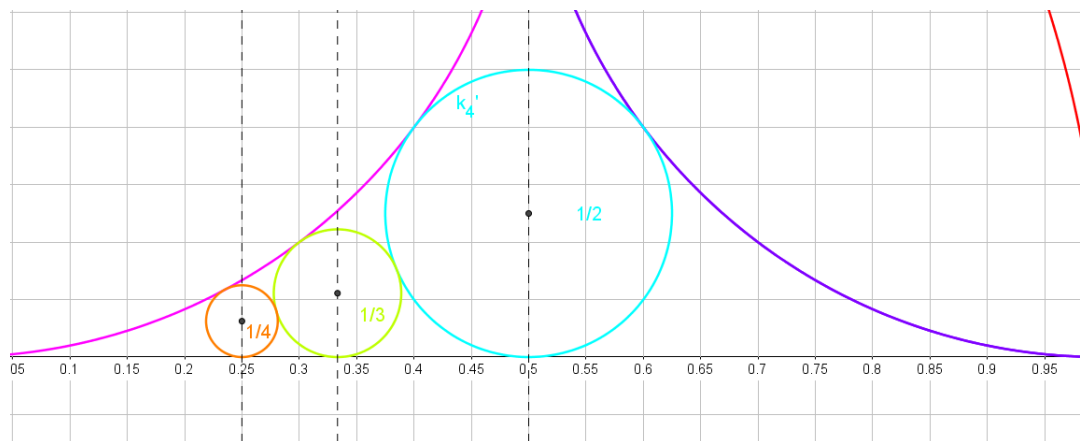
<sup>15</sup> Zadání příkladu se váže k Souboru 28.



Obrázek 39: Fordovy kruhy (Soubor 28)

**Věta:** První souřadnice středů vygenerovaných kružnic  $k_n'$  pro  $n=\{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$  odpovídají hodnotám námi hledaných zlomků.

V rámci souboru jsme zobrazili středy nově vzniklých kružnic. V obrázku 40 si například nyní můžeme ověřit, že  $x$ -ová souřadnice kružnice  $k_4'$  odpovídá hodnotě 0,5, tedy jedné polovině. Navíc je v rámci souboru patrné, že generováním posloupnosti takovýchto kružnic (viz Soubor 28) dostáváme **kmenné zlomky**, tedy zlomky o hodnotách  $\frac{1}{k}$ , kde  $k \in \mathbb{N}$ .<sup>16</sup>



Obrázek 40: Hodnoty středů pro Fordovy kružnice

<sup>16</sup> Všimněme si podoby grafické interpretace obrázku 37 s obrázkem 40.

### 3 KUŽELOSEČKY V KRUHOVÉ INVERZI

Než se budeme věnovat samotné problematice zobrazování různých kuželoseček v kruhové inverzi, podíváme se na zavedení těchto křivek. V předcházejících kapitolách jsme se již věnovali zobrazováním kružnice v kruhové inverzi. Nyní se v další části zaměříme na zbývající kuželosečky (parabola, elipsa, ...), se kterými se žáci běžně setkávají již během studia na střední škole. V této kapitole propojíme kruhovou inverzi se středoškolskou matematikou. Zjistíme, že nám mohou vznikat zajímavé objekty, navíc zjistíme, že ve vzájemné poloze hlavní kružnice a kuželoseček existují různé zákonitosti. Pro lepší pochopení problematiky uvádíme několik základních informací a definicí.

#### 3.1 ZÁKLADNÍ INFORMACE O KUŽELOSEČKÁCH

Jak už napovídá samotný název, pod kuželosečkou si můžeme představit geometrické objekty vznikající řezem kužele. My si však tuto definici rozšíříme.

**Definice:** Mějme dānu v  $E_3$  nekonečnou rovinu dvojkužele  $\kappa$  a rovinu  $\sigma$ . Necht̄ bodem  $V$  rozumíme vrchol dvojkužele, ůhel  $\alpha$  je ůhel sklonu roviny dvojkužele a  $\beta$  je ůhel, kterŷ svırá rovina  $\sigma$  s osou dvojkužele  $\kappa$ . Obrazce vznikající řezem roviny  $\sigma$  rovinou  $\kappa$  nazŷváme jako **kuželosečky**.

**Vĕta:** Rozlišujeme 2 základní typy kuželoseček (Pech, 2004):

1. **singulární** kuželosečka – rovina  $\sigma$  prochází vrcholem dvojkužele
2. **regulární** kuželosečka – rovina  $\sigma$  neprochází vrcholem dvojkužele

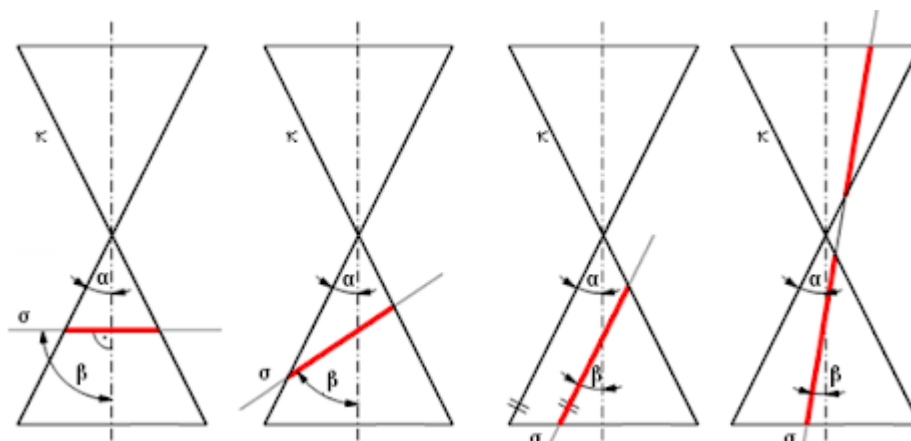
**Singulárními** kuželosečkami rozumíme **bod**, **přímku** nebo **dvě přímky**.

- **bod** –  $V \in \sigma$  a  $90^\circ \geq \beta > \alpha$
- **přímka** –  $V \in \sigma$  a  $\beta = \alpha$
- **dvě přímky** –  $V \in \sigma$  a  $\beta < \alpha$

Pod **regulární** kuželosečkou si můžeme představit **kružnici**, **elipsu**, **parabolu** nebo **hyperbolu** (viz obrázek 41).

- **kružnice** –  $V \notin \sigma$ , a  $\beta = 90^\circ$
- **elipsa** –  $V \notin \sigma$ ,  $90^\circ > \beta > \alpha$
- **parabola** –  $V \notin \sigma$  a  $\beta = \alpha$
- **hyperbola** –  $V \notin \sigma$  a  $\beta < \alpha$





Obrázek 41: Regulární kuželosečka (Nedvěd, 2019)

V předešlých kapitolách jsme se již zabývali zobrazením bodu, přímky a kružnice v kruhové inverzi. Proto budeme v další části věnovat pozornost pouze zbývajícím kuželosečkám. V každé z následujících kapitol definujeme<sup>17</sup> vybrané kuželosečky v dvourozměrném euklidovském prostoru  $E_2$  a u každé se zaměříme na významné body. U každé kuželosečky se zaměříme na její zobrazení v kruhové inverzi. Podobně jako Kocourek (2016) věnujeme pozornost vzájemné poloze vzoru a obrazu v závislosti na poloměru kružnice  $\omega$  vůči významným bodům každé z kuželoseček. Na závěr shrneme speciální případy v přehledné tabulce<sup>18</sup>.

### 3.2 ELIPSA

**Definice:** Elipsou nazýváme množinu všech bodů v dvourozměrném euklidovském prostoru  $E_2$ , které mají od dvou pevně zvolených různých bodů  $F_1, F_2$  konstantní součet vzdáleností rovný  $2a$ ; tj.

$$k_e = \{X \in E_2: |XF_1| + |XF_2| = 2a, 0 < |F_1F_2| < 2a\}.$$

Výše uvedené pevně dané body  $F_1, F_2$  nazýváme **ohniska**. Necht  $X$  je libovolným bodem elipsy, potom spojnice  $XF_1$  a  $XF_2$  označíme jako **průvodiče**. Bod  $S$  je **střed** elipsy, pro který platí, že je středem úsečky  $F_1F_2$ . Vzdálenost ohnisek  $F_1, F_2$  od středu  $S$  nazýváme **excentricitou** (nebo-li **lineární výstředností**) a označujeme ji  $e$ . Platí tedy, že

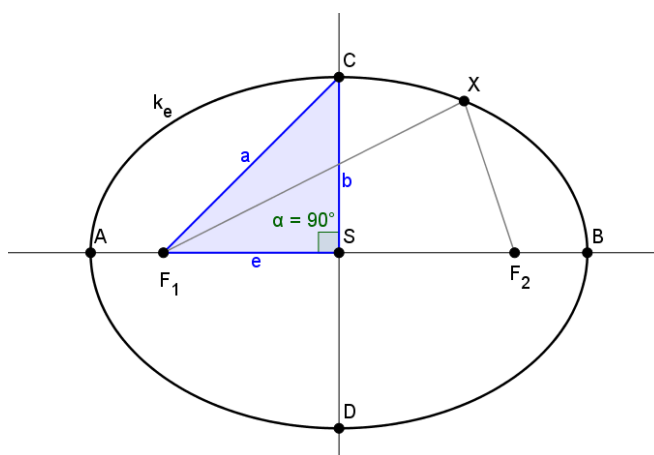
$$|SF_1| = |SF_2| = e.$$

<sup>17</sup> Definice podle (Lávička, 2008).

<sup>18</sup> Inspirací pro jednotlivé křivky byly také stránky společnosti Wolfram.

Mějme dány další významné body na kuželosečce  $k_e$ . Jako **hlavní vrcholy** nazveme body  $A, B$ , v nichž přímka  $F_1F_2$  protíná elipsu. Sestrojíme-li v bodě  $S$  kolmici na přímku  $F_1F_2$ , protne nám přímka elipsu ve **vedlejších vrcholech** - bodech  $C, D$ . Body  $A, B$  nám určují hlavní osu a body  $C, D$  vedlejší osu. Délku  $|SA| = |SB| = a$  nazýváme **hlavní poloosou** a délku  $|SC| = |SD| = b$  nazveme **vedlejší poloosou**. Hodnoty  $e, a, b$  nám udávají tzv. **charakteristický trojúhelník**, pro který platí níže uvedená rovnost<sup>19</sup> (Lávička, 2008)

$$a^2 = b^2 + e^2.$$



Obrázek 42: Elipsa

### 3.2.1 ZOBRAZENÍ ELIPSY V KRUHOVÉ INVERZI

Zobrazíme-li některé kuželosečky v kruhové inverzi definované pomocí vhodné zvolené hlavní kružnice, dostáváme speciální křivky, které mimo matematiky naleznou své uplatnění v mnoha dalších oborech. Na úvod kapitoly uvádíme tabulku, v níž se můžeme podívat na to, jaké speciální křivky nám vzniknou zobrazením elipsy v  $INV(\omega)$ .

Tabulka 12: Elipsa - speciální křivky

Střed kruhové inverze	Křivka vzniklá v $INV(\omega)$
střed elipsy	Kartézský ovál (Descartův ovál)
ohnisko elipsy	Pascalova závitnice (limaçon)
hlavní vrchol elipsy	Dioklova kisoida

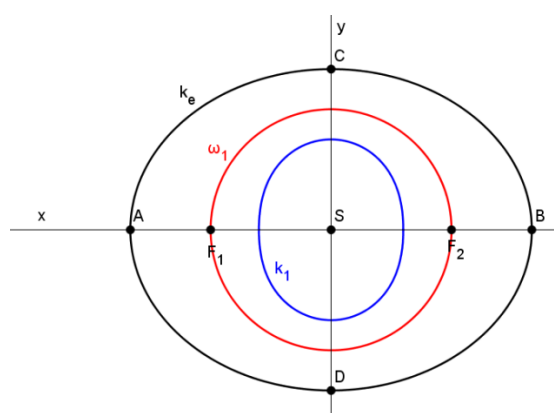
<sup>19</sup> Z obrázku 42 je na první pohled vidět, že tuto rovnost lze odvodit s pomocí Pythagorovy věty.

V následujících částech se vždy podíváme na speciální případy shrnuté v tabulce 12. Podoba obrazu elipsy zobrazené pomocí kruhové inverze je mimo polohy středu kružnice  $\omega$  závislá i na zvoleném poloměru této kružnice. S vhodně zvoleným poloměrem se může stát, že nově vytvořená křivka bude mít speciální vlastnosti ve vztahu k významným bodům elipsy. Proto bude ke každé z variant vytvořena další tabulka, v níž budou tyto poloměry uvedeny. Čtenář si poté bude moct jednotlivé varianty ověřit ve speciálně vytvořeném souboru z prostředí GeoGebra. Ukázky jsou uvedeny pro elipsu, kde  $e = 3j$ ,  $b = 4j$ ,  $a = 5j$ , pokud nebude uvedeno jinak.

Vzhledem v průběhu další práce budou úlohy vytvářeny v rámci jednoho souboru. Proto pro označení jednotlivých variant budou využívány indexy odpovídající očíslování jednotlivých zadání. Kružnice  $\omega$  určující kruhovou inverzi bude v rámci grafického řešení zobrazena červeně a výsledná křivka (obraz) modře. Obdobně budeme postupovat i u dalších kuželoseček (parabola, hyperbola).

**Zadání příkladu 1:** Mějme dánu elipsu  $k_e$  společně s ohnisky v bodech  $F_1, F_2$ , středem elipsy  $S$  a hlavními vrcholy  $A, B$  a vedlejšími vrcholy  $C, D$ . Střed kružnice  $\omega$  zvolíme ve středu elipsy. Tím máme zavedenou kruhovou inverzi  $INV(\omega)$ .

V rámci souboru máme vytvořené posuvné měřítko, s jehož pomocí měníme poloměr kružnice  $\omega$ . Zobrazením elipsy v  $INV(\omega)$  dostáváme **Kartézský ovál**. Změnou poloměru kruhové inverze se tvar nově vzniklého obrazce nemění. Jediné, co se bude lišit, je počet průsečíků, zda náš nový obrazec neprochází některými významnými body nebo zda nám nevzniknou některé body dotyku. To vše jsme shrnuli v tabulce níže. Čtenář si vše může ověřit pomocí interaktivních zaškrtačacích polí nebo pomocí posuvníku.



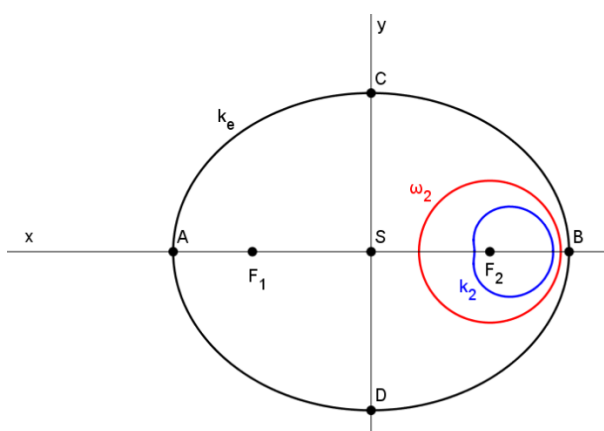
Obrázek 43: Kartézský ovál - varianta 1 (Soubor 29)

Tabulka 13: Kartézský ovál

Poloměr kružnice $\omega(S,r)$	Významné body s $k_e$ (průsečíky, body dotyku, atd.)
$0 < r <  SF_1 $	žádné významné body, křivka leží uvnitř elipsy
$r =  SF_1 $	žádné významné body, křivka leží uvnitř elipsy
$ SF_1  < r <  SC $	žádné významné body, křivka leží uvnitř elipsy, ve speciálním případě prochází ohnisky $F_1, F_2$
$r =  SC $	2 body dotyku – body $C, D$ (vnitřní dotyk)
$ SC  < r <  SA $	4 průsečíky s elipsou
$r =  SA $	2 body dotyku – body $A, B$ (vnější dotyk)
$ SA  < r$	žádné významné body, křivka leží vně elipsy

**Zadání příkladu 2:** Mějme dánu elipsu  $k_e$  společně s ohnisky v bodech  $F_1, F_2$ , středem elipsy  $S$  a hlavními vrcholy  $A, B$  a vedlejšími vrcholy  $C, D$ . Střed kružnice  $\omega$  zvolíme v jednom z ohnisek elipsy. Tím máme zavedenou kruhovou inverzi  $INV(\omega)$ .

V rámci souboru máme vytvořené posuvné měřítko, s jehož pomocí měníme poloměr kružnice  $\omega$ . Zobrazením elipsy v  $INV(\omega)$  dostáváme **Pascalův limacon (závitnici)**. Změnou poloměru kruhové inverze se tvar nově vzniklého obrazce nemění. Jediné, co se bude lišit, je počet a poloha významných bodů. Různé varianty poloměrů jsme uvedli v tabulce níže. Opět si může čtenář vše ověřit pomocí interaktivních prvků.



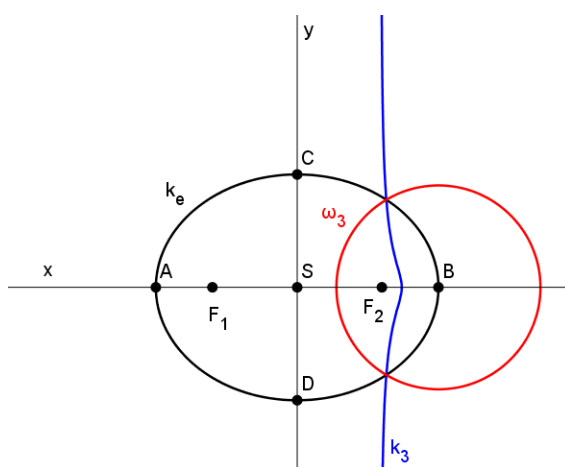
Obrázek 44: Pascalova závitnice - varianta 2 (Soubor 29)

Tabulka 14: Pascalova závitnice

Poloměr kružnice $\omega(F_2, r)$	Významné body s $k_e$ (průsečíky, body dotyku, atd.)
$0 < r <  F_2B $	žádné významné body, křivka leží uvnitř elipsy
$r =  F_2B $	1 bod dotyku - bod $B$ (vnitřní dotyk)
$ F_2B  < r <  F_2C $	2 průsečíky s elipsou, ve speciálním případě prochází středem $S$
$r =  F_2C $	2 průsečíky – body $C, D$
$ F_2C  < r <  AF_2 $	2 průsečíky s elipsou, ve speciálním případě prochází bodem $F_1$
$r =  SF_2 $	1 bod dotyku – bod $A$ (vnější dotyk)
$ SF_2  < r$	žádné významné body, křivka leží vně elipsy

**Zadání příkladu 3:** Mějme dánu elipsu  $k_e$  společně s ohnisky v bodech  $F_1, F_2$ , středem elipsy  $S$  a hlavními vrcholy  $A, B$  a vedlejšími vrcholy  $C, D$ . Střed kružnice  $\omega$  zvolíme v jednom z hlavních vrcholů elipsy. Tím máme zavedenou kruhovou inverzi  $INV(\omega)$ .

V rámci souboru jsou opět vytvořené interaktivní prvky s posuvným měřítkem pro volbu poloměru kružnice  $\omega$ . Zobrazením křivky  $k_e$  v  $INV(\omega)$  tentokrát dostáváme **Dioklovu kisoidu**. Změnou poloměru se tvar křivky nemění, mění se pouze počet významných bodů pro jednotlivé poloměry. Pomocí interaktivních prvků si můžeme data uvedená v tabulce opět ověřit.



Obrázek 45: Dioklova kisoida - varianta 3 (Soubor 29)

Tabulka 15: Dioklova kisoida

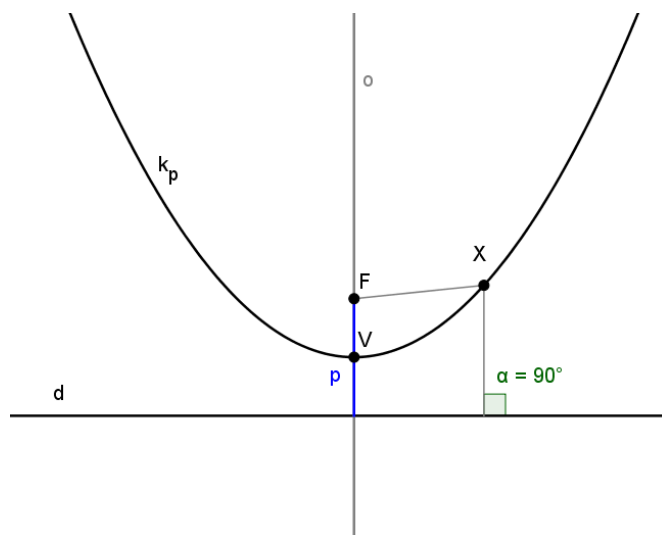
Poloměr kružnice $\omega(B,r)$	Významné body s $k_e$ (průsečíky, body dotyku, atd.)
$0 < r <  BC $	2 průsečíky s elipsou, ve speciálním případě prochází ohniskem $F_2$
$r =  BC $	2 průsečíky – body $C, D$
$ BC  < r <  BA $	2 průsečíky s elipsou, ve speciálních případech prochází buď středem $S$ nebo bodem $F_1$
$r =  BA $	1 bod dotyku – bod $A$ (vnější dotyk)
$ BA  < r$	žádný společný bod

## 3.3 PARABOLA

**Definice:** **Parabolou** nazýváme množinu všech bodů v dvourozměrném euklidovském prostoru  $E_2$ , které mají od pevně zvoleného bodu  $F$  a pevně zvolené přímky  $d$ , neprocházející bodem  $F$ , vždy shodnou vzdálenost; tj.

$$k_p = \{X \in E_2: |XF| = |X, d|, F \notin d\}.$$

Nechť  $X$  je libovolným bodem paraboly, bod  $F$  nazýváme **ohnisko** paraboly a pevná přímka  $d$  je **direkční přímka (řídící přímka)**. Dále platí, že  $|d, F| = p$ , kde  $p$  označuje **parametr** paraboly. Spojnice kolmice daným bodem  $X$  k direkční přímce a spojnice ohniska s bodem  $X$  označujeme jako **průvodiče**. **Osou**  $o$  paraboly je kolmice na přímku  $d$  procházející ohniskem paraboly. Pro bod  $V$ , tzv. **vrchol paraboly**, platí, že vznikne jako průsečík osy  $o$  paraboly a paraboly  $k_p$ . (Lávička, 2008)



Obrázek 46: Parabola

## 3.3.1 ZOBRAZENÍ PARABOLY V KRUHOVÉ INVERZI

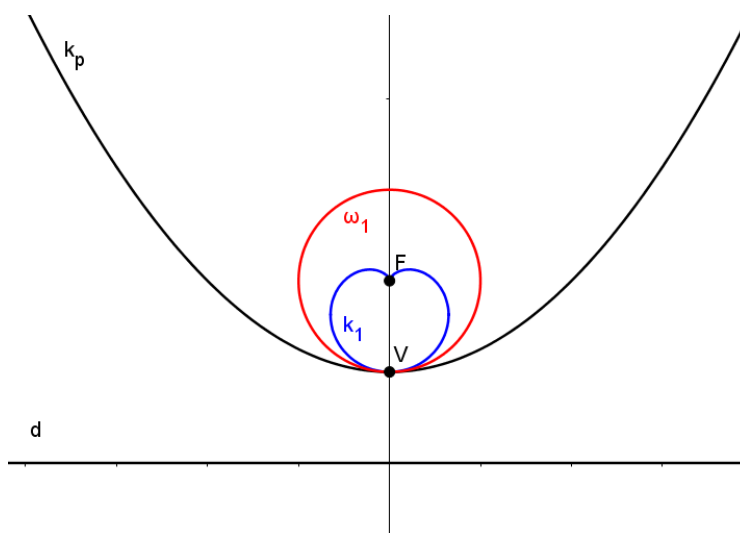
Z předcházející kapitoly jsme vyvodili, že parabolu určují 2 významné body – vrchol  $V$  a ohnisko  $F$ . Tyto dva body budeme postupně volit jako středy kruhové inverze.

Tabulka 16: Parabola – speciální křivky

Střed kruhové inverze	Křivka vzniklá v $INV(\omega)$
ohnisko paraboly	srdcovka (kardioida)
vrchol paraboly	Dioklova kisoida

**Zadání příkladu 1:** Mějme dānu parabolu  $k_p$ . Necht'  $F$  je její ohnisko a bod  $V$  označuje její vrchol. Řídící p'římka je totožná s osou  $x$  kartézské soustavy souřadnic. Velikost parametru:  $p = 2j$ . Střed kružnice  $\omega$  zvolíme v ohnisku paraboly. Tím máme zavedenou kruhovou inverzi  $INV(\omega)$ .

V takto definované kruhové inverzi se nám parabola  $k_p$  zobrazí jako kardioida (neboli srdcovka). V rámci souboru 30 máme podobně jako u elipsy vytvořené interaktivní prvky. Změnou poloměru naše nová křivka tvar zásadně nemění. Jediné, co se může měnit, je počet průsečíků nebo vzájemná poloha vůči významným bodům paraboly. Pokud uvažujeme konstrukci v Möbiově rovině, prochází křivka středem kružnice  $\omega$  – bodem  $F$ .



Obrázek 47: Srdcovka – varianta 1 (Soubor 30)

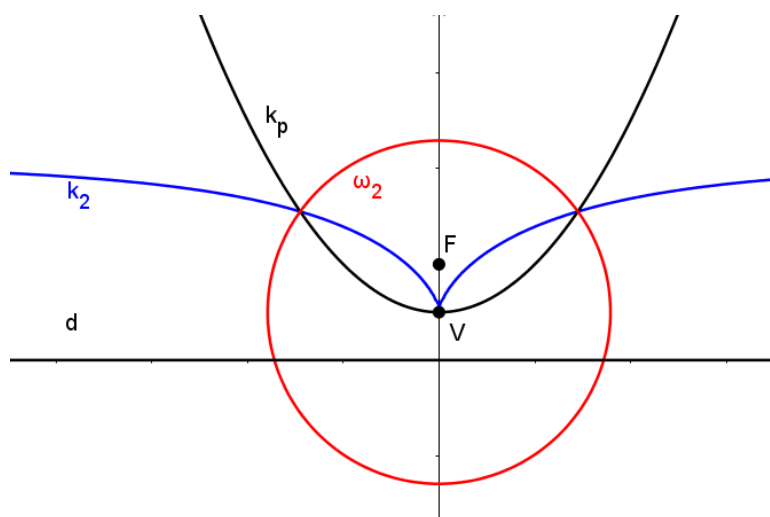
Tabulka 17: Srdcovka

Poloměr kružnice $\omega(F,r)$	Významné body s $k_p$ (průsečíky, body dotyku, atd.)
$0 < r <  FV $	žādne významné body, křivka leží uvnitř paraboly
$r =  FV $	1 bod dotyku – bod $V$ (vnitřní dotyk)
$ FV  < r$	2 průsečíky s parabolou



**Zadání příkladu 2:** Mějme dānu parabolu  $k_p$ . Necht'  $F$  je její ohnisko a bod  $V$  označuje její vrchol. Řídící p'římka je totožná s osou  $x$  kartézské soustavy souřadnic. Velikost parametru:  $p = 2j$ . Střed kružnice  $\omega$  zvolíme ve vrcholu paraboly. Tím máme zavedenou kruhovou inverzi  $INV(\omega)$ .

Jestliže v  $INV(\omega)$  zobrazíme parabolu, dostáváme **Dioklovu kisoidu**. Změnou poloměru kružnice  $\omega$  se nemění tvar křivky. Mění se pouze její „velikost“. Ať měníme libovolně poloměr kruhové inverze, nemění se ani významné body. Křivka má s parabolou 2 p'řesečíky, jejichž poloha se v závislosti na poloměru mění. Pokud uvažujeme konstrukci v Möbiově rovině, má křivka s parabolou 1 bod dotyku – bod  $V$ . Nevlastní bod se nám zobrazí do středu kruhové inverze.



Obrázek 48: Dioklova kisoida - varianta 2 (Soubor 30)

Tabulka 18: Dioklova kisoida

Poloměr kružnice $\omega(V,r)$	Významné body s $k_p$ (p'řesečíky, body dotyku, atd.)
$0 < r$	2 p'řesečíky s parabolou

## 3.4 HYPERBOLA

**Definice: Hyperbolou** nazýváme množinu všech bodů v dvourozměrném euklidovském prostoru  $E_2$ , které mají od dvou pevně zvolených různých bodů  $F_1, F_2$  konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností rovný  $2a$ ; tj.

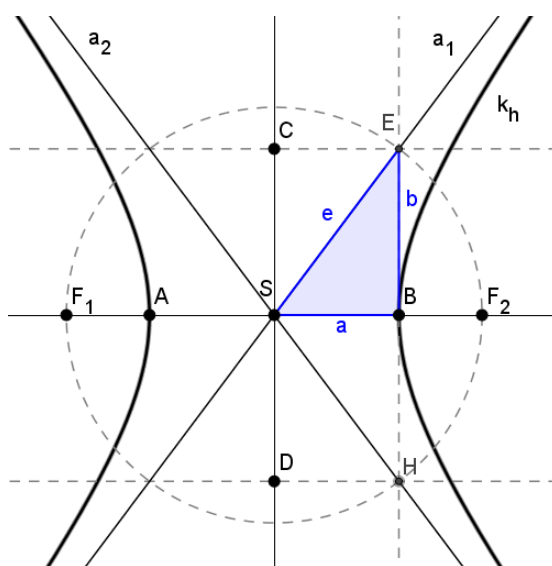
$$k_h = \{X \in E_2: ||XF_1| - |XF_2|| = 2a, 0 < 2a < |F_1F_2|\}.$$

Obdobně jako u elipsy nazýváme body  $F_1, F_2$  ohnisky. Necht'  $X$  je libovolným bodem hyperboly, potom spojnice  $XF_1$  a  $XF_2$  označíme jako **průvodiče**. Bod  $S$  je **střed** hyperboly, pro který platí, že je středem úsečky  $F_1F_2$ . **Excentricitou (lineární výstředností)** nazýváme vzdálenost ohnisek od středu  $S$  hyperboly a značíme ji  $e$ .

$$|SF_1| = |SF_2| = e.$$

Mějme dále přímku  $F_1F_2$ . Ta protíná hyperbolu ve 2 bodech –  $A, B$ . Tyto body jsou **vrcholy** hyperboly  $k_h$ . Přímku vytyčenou těmito body nazýváme **hlavní osou**. Dále platí, že  $|SA| = |SB| = a$ . **Vedlejší osou** hyperboly označujeme přímku kolmou na hlavní osu procházející středem  $S$ . Body  $C, D$  leží na vedlejší ose a zároveň platí, že  $|SC| = |SD| = b$ . Přímky  $a_1, a_2$  v obrázku 49 nazýváme **asymptotami** hyperboly. Hodnoty  $a, b, e$  udávají velikosti strany tzv. **charakteristického trojúhelníku**<sup>20</sup>, pro který platí následující rovnost (Lávička, 2008)

$$e^2 = a^2 + b^2.$$



Obrázek 49: Hyperbola

<sup>20</sup> Obdobně jako u elipsy jsme i v obrázku 49 znázornili charakteristický trojúhelník modře.

### 3.4.1 ZOBRAZENÍ HYPERBOLY V KRUHOVÉ INVERZI

Hyperbola je jednou z nejzajímavějších kuželoseček, již lze zobrazit v kruhové inverzi. Existují dokonce i křivky pro speciálně definované hyperboly. Pokud nebude uvedeno jinak, budeme v jednotlivých příkladech pracovat s hyperbolou, pro kterou bude platit, že  $e = 5j$ ,  $a = 3j$ ,  $b = 4j$ .

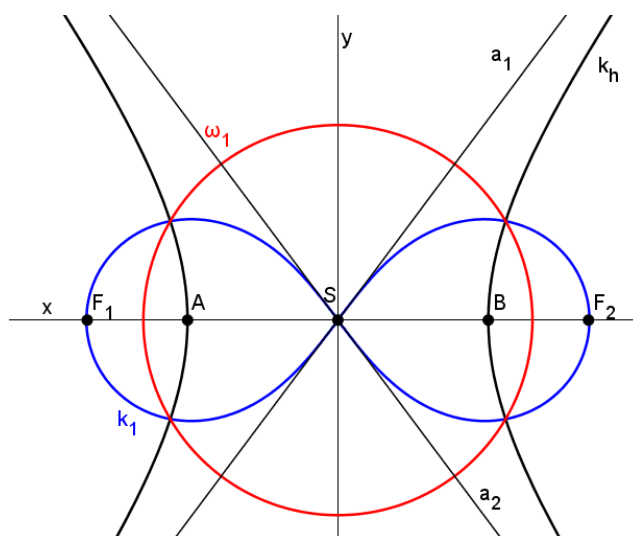
V tabulce máme tentokrát uvedeny 4 varianty úloh. První dvě varianty platí pro libovolné hodnoty charakteristického trojúhelníku. Proto tyto 2 příklady budou společně umístěny v 1 souboru. Protože další 2 zadání existují pro speciálně zadané hyperboly, vytvoříme pro každou křivku samostatný soubor. Speciální varianty jsou v tabulce lehce podkresleny šedou barvou.

Tabulka 19: Hyperbola - speciální křivky

Střed kruhové inverze	Křivka vzniklá v $INV(\omega)$
střed hyperboly	Bernoulliho lemniskáta
hlavní vrchol hyperboly	přímá strofoida
hlavní vrchol hyperboly (speciální hodnoty)	Maclaurinův trisektris
ohnisko hyperboly (speciální hodnoty)	Pascalova závitnice

**Zadání příkladu 1:** Mějme zadanou hyperbolu  $k_h$ , jejíž střed  $S$  leží v průniku osy  $x$  a osy  $y$  kartézské soustavy souřadnic. Necht' ohniska  $F_1, F_2$  leží na ose  $x$ . Hlavní vrcholy označme  $A, B$ . Přímky  $a_1, a_2$  jsou asymptoty hyperboly. Zavedme kruhovou inverzi, aby se středem kružnice  $\omega$  stal bod  $S$ .

Zobrazením zadané hyperboly  $k_h$  v  $INV(\omega)$  dostáváme **Bernoulliho lemniskátu**. V rámci souboru můžeme libovolně volit poloměr kružnice  $\omega$ . Změnou poloměru nedochází ke změně tvaru speciální křivky, mění se pouze vzájemná poloha hyperboly a lemniskáty. Můžeme si všimnout, že s rostoucím poloměrem se navíc lemniskáta neustále přibližuje k asymptotám  $a_1, a_2$ . Pokud uvažujeme konstrukci v Möbiově rovině, prochází křivka středem hyperboly – bodem  $S$ . Nevlastní bod se nám zobrazí do středu kruhové inverze.



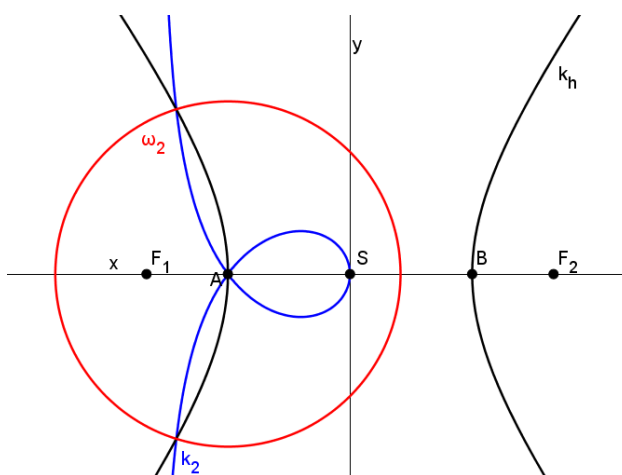
Obrázek 50: Bernoulliho lemniskáta - varianta 1 (Soubor 31)

Tabulka 20: Bernoulliho lemniskáta

Poloměr kružnice $\omega(S,r)$	Významné body s $k_h$ (průsečíky, body dotyku, atd.)
$0 < r <  SB $	žádné významné body, křivka leží vně hyperboly
$r =  SB $	2 body dotyku – body $A, B$ (vnější dotyk)
$ SB  < r$	4 průsečíky s hyperbolou, ve speciálním případě prochází ohnisky $F_1, F_2$

**Zadání příkladu 2:** Mějme zadanou hyperbolu  $k_h$ , jejíž střed  $S$  leží v průniku osy  $x$  a osy  $y$  kartézské soustavy souřadnic. Necht' ohniska  $F_1$ ,  $F_2$  leží na ose  $x$ . Hlavní vrcholy označme  $A$ ,  $B$ . Mějme zavedenou kruhovou inverzi, jejíž střed se nachází v bodě  $A$  – hlavním vrcholu hyperboly.

Zobrazíme-li hyperbolu v kruhové inverzi zavedené pomocí kružnice  $\omega$ , dostáváme tzv. **přímou strofoidu**. Pomocí interaktivních prvků vytvořených v Souboru 31 si můžeme ověřit, že změnou poloměru se tvar strofoidy zásadně nemění. Mění se pouze vzájemná poloha vůči významným bodům. Budeme-li uvažovat konstrukci v Möbiově rovině, prochází křivka středem kruhové inverze – bodem  $A$ . Nevlastní bod se nám v  $INV(\omega)$  zobrazí do středu kruhové inverze.



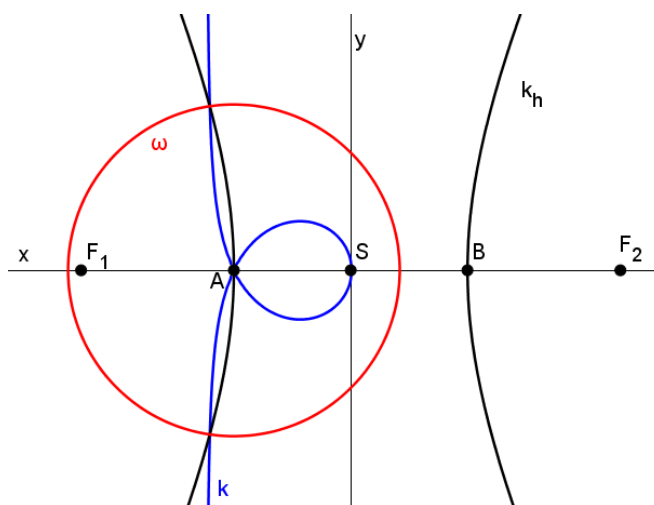
Obrázek 51: Přímá strofoida - varianta 2 (Soubor 31)

Tabulka 21: Přímá strofoida

Poloměr kružnice $\omega(A,r)$	Významné body s $k_h$ (průsečíky, body dotyku, atd.)
$0 < r <  AB $	2 průsečíky s hyperbolou, ve speciálním případě prochází středem $S$
$r =  AB $	2 průsečíky s hyperbolou a 1 bod dotyku – bod $B$ (vnější dotyk)
$ AB  < r$	4 průsečíky s hyperbolou, ve speciálním případě prochází ohniskem $F_2$

**Zadání příkladu 3:** Mějme zadanou hyperbolu  $k_h$ , jejíž střed  $S$  leží v průniku osy  $x$  a osy  $y$  kartézské soustavy souřadnic. Dále víme, že pro zadanou hyperbolu platí, že  $a = b\sqrt{3}$ . Body  $F_1, F_2$  jsou ohniska hyperboly. Dále v jednom z vrcholů hyperboly (v bodě  $A$  nebo  $B$ ) zavedme kruhovou inverzi  $\omega$ .

Z rovnosti uvedené v zadání jsme schopni definovat významné body hyperboly. Zavedme bod  $S$  do středu kartézské soustavy. Pro ulehčení konstrukce, nechť  $a = 1$ . Poté platí  $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Z rovnice typické pro charakteristický trojúhelník vypočítáme excentricitu, pro kterou platí, že  $e = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ . Zobrazením hyperboly v  $INV(\omega)$  dostáváme **Maclaurinův trisektris**. Zvětšováním poloměru kružnice  $\omega$  se tvar naší modře znázorněné křivky zásadně nemění. Mění se pouze poloha vůči významným bodům  $k_h$ . Obrázek 52 můžeme porovnat s obrázkem 51. Všimneme si tak rozdílů v zakřivení mezi přímou strofoidou a Maclaurinovým trisektrisem. Budeme-li uvažovat konstrukci v Möbiově rovině, prochází křivka středem kruhové inverze – bodem  $A$ , protože v  $INV(\omega)$ :  $P_\infty \rightarrow A$  a  $A \rightarrow P_\infty$ .



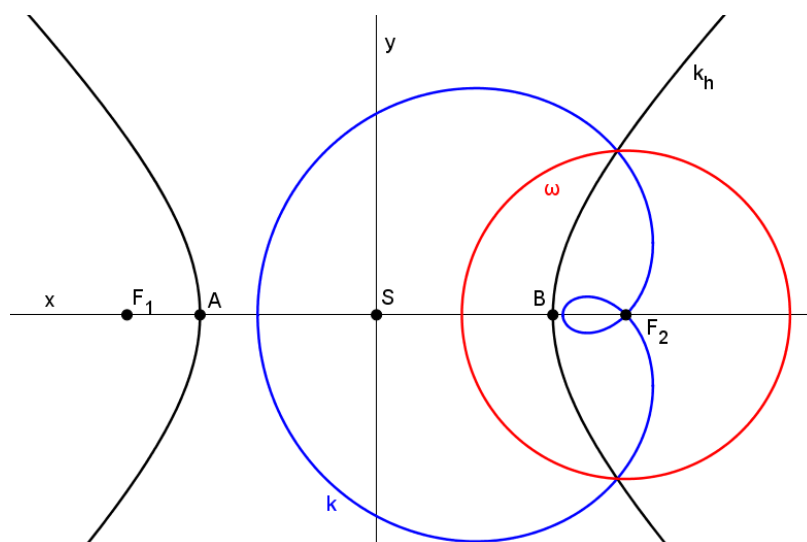
Obrázek 52: Maclaurinův trisektris (Soubor 32)

Tabulka 22: Maclaurinův trisektris

Poloměr kružnice $\omega(A,r)$	Významné body s $k_h$ (průsečíky, body dotyku, atd.)
$0 < r <  AB $	2 průsečíky s hyperbolou, ve speciálním případě prochází středem $S$
$r =  AB $	2 průsečíky s hyperbolou a 1 bod dotyku – bod $B$ (vnější dotyk)
$ AB  < r$	4 průsečíky s hyperbolou, ve speciálním případě prochází ohniskem $F_2$

**Zadání příkladu 4:** Necht' má hyperbola  $k_h$  definovaný střed  $S$  ve středu kartézské soustavy souřadnic. Dále označme body  $F_1, F_2$  jako ohniska hyperboly a body  $A, B$  jako hlavní vrcholy. Dále víme, že pro zadanou hyperbolu platí, že  $e = a\sqrt{2}$ . Zavedme kruhovou inverzi se středem hlavní kružnice v jednom z ohnisek.

Pro konstrukci hyperboly jsme zvolili  $a = 1$ . Dosazením do výše uvedeného vztahu dostáváme  $e = \sqrt{2}$ . Pomocí těchto hodnot určíme polohu hlavních vrcholů a ohnisek. Hyperbolu lze v GeoGebře na základě těchto hodnot zkonstruovat. Zobrazením hyperboly v námi zavedené kruhové inverzi nám vznikne tzv. **Pascalova závitnice**. Změnou poloměru se nám tvar křivky zásadně nemění, mění se pouze její poloha vůči významným bodům  $k_h$ . Možnosti, jež mohou nastat pro jednotlivé poloměry kružnice  $\omega$ , uvádíme v tabulce níže. Budeme-li uvažovat konstrukci v Möbiově rovině, prochází křivka středem kruhové inverze – bodem  $F_2$ . Nevlastní bod se nám v  $INV(\omega)$  zobrazí do středu kruhové inverze.



Obrázek 53: Pascalova závitnice (Soubor 33)

Tabulka 23: Pascalova závitnice

Poloměr kružnice $\omega(F_2, r)$	Významné body s $k_h$ (průsečíky, body dotyku, atd.)
$0 < r <  BF_2 $	žádné významné body, křivka leží uvnitř hyperboly
$r =  BF_2 $	1 bod dotyku – bod $B$ (vnitřní dotyk)
$ BF_2  < r <  SF_2 $	mohou nastat 3 varianty pro poloměr v tomto intervalu: <ul style="list-style-type: none"> <li>• 2 průsečíky s hyperbolou, ve speciálním případě prochází středem <math>S</math></li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 2 průsečíky a 2 body dotyku – bod <math>A</math> (vnější dotyk) a bod <math>B</math> (vnitřní dotyk), (pro <math>r=a</math>)</li> <li>• 6 průsečíků s hyperbolou</li> </ul>
$ SF_2  \leq r <  AF_2 $	6 průsečíků s hyperbolou, ve speciálním případě prochází středem $S$
$r =  AF_2 $	6 průsečíků s hyperbolou a 1 bod dotyku – bod $A$ (vnější dotyk)
$ AF_2  < r$	8 průsečíků, ve speciálním případě prochází bodem $F_1$

### 3.5 SHRNU TÍ KUŽELOSEČKY V KRUHOVÉ INVERZI – PŘEHLED

Tabulka 24: Přehled kuželoseček zobrazených v kruhové inverzi

Kuželosečka	Střed kruhové inverze	Křivka vzniklá v KI
<b>Elipsa</b>	střed elipsy	Kartézský ovál (Descartův ovál)
	ohnisko elipsy	Pascalova závitnice (limaçon)
	hlavní vrchol elipsy	Dioklova kisoida
<b>Parabola</b>	ohnisko paraboly	srdcovka (kardioida)
	vrchol paraboly	Dioklova kisoida
<b>Hyperbola</b>	střed hyperboly	Bernoulliho lemniskáta
	hlavní vrchol hyperboly	přímá strofoida
	hlavní vrchol hyperboly (pro $a = b\sqrt{3}$ )	Maclaurinův trisektris
	ohnisko hyperboly (pro $e = a\sqrt{2}$ )	Pascalova závitnice



## 4 VYBRANÉ ROVINNÉ KŘIVKY V KRUHOVÉ INVERZI

S nejrůznějšími rovinnými křivkami se setkáváme dennodenně, můžeme je nalézt v logách různých firem, dokonce je používají konstruktéři a designéři. Křivky byly zkoumány již v dávné historii. Například Euklides je definoval jako délku bez šířky. S rozvojem matematiky se objevují neustále nové a nové křivky, jež mají zajímavou charakteristiku a mnohdy také zajímavé vlastnosti. Rádi bychom se proto stručně věnovali vybraným křivkám, jež zobrazíme v kruhové inverzi. Zjistíme, že některé z nich „se chovají“ poměrně zajímavě.

### 4.1 LOGARITMICKÁ SPIRÁLA

Logaritmická spirála je jednou z nejzajímavějších křivek vůbec. Setkáváme se s ní i běžně v přírodě. Tvarem nám tato spirála připomíná hlemýždí ulitu nebo pás oblačnosti vytvářející se ve středu tropických cyklón. Dráhu podobnou tvaru této křivky vykonávají i ptačí dravci přibližující se během lovu ke své kořisti, tato dráha jim umožňuje neustále nabírat na rychlosti, a navíc jim to také umožňuje neustále sledovat svou kořist. (Rejchl, 2006)

**Definice: Logaritmická (ekviangulární) spirála** je matematická křivka, kterou lze popsat v polárních souřadnicích rovnicí:

$$r = a \cdot e^{b\varphi}, \text{ kde } \varphi \in R, a > 0, b > 0, r \text{ je vzdálenost od středu,}$$

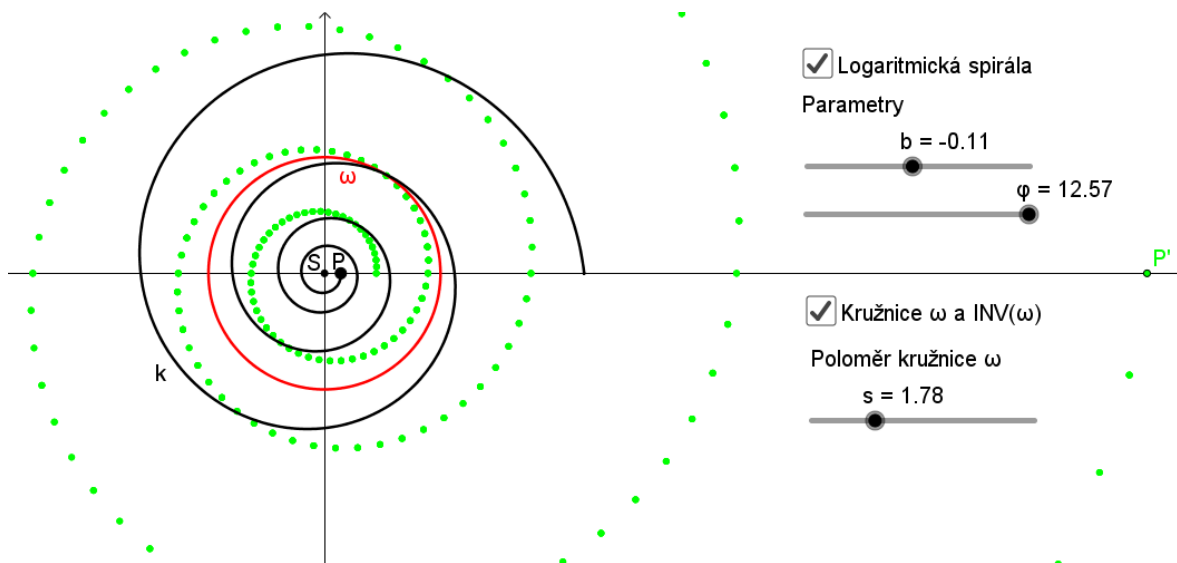
$$\text{ekvivalentně platí, že } \varphi = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{r}{a}\right).^{21}$$

Existuje několik možností, jak logaritmickou spirálu zkonstruovat. Jednou z možností je využití aproximovaných konstrukcí - tzv. logaritmického obdélníku nebo logaritmického trojúhelníku. V rámci programu GeoGebra (Soubor 34) jsme logaritmickou spirálu zkonstruovali pomocí předpisu, v němž jsme zvolili 2 parametry. Tyto parametry můžeme libovolně měnit pomocí posuvníků.

Abychom představili jednu z dalších možností tohoto softwaru dynamické geometrie, rozhodli jsme se nezobrazovat celou ekviangulární spirálu, ale pouze budeme zaznamenávat stopu bodu (v souboru zeleně zbarvena), jehož polohu budeme měnit pomocí posuvných měřítek. Bod  $P$  (pól) jsme využili během konstrukce spirály. Bod  $P'$

<sup>21</sup>  $e$  - Eulerovo číslo

(v souboru zeleně) nám vznikne zobrazením bodu  $P$  v  $INV(\omega)$ . Přiblížením nebo oddálením stopu bodu  $P'$  smažeme a pomocí posuvných měřítek ji můžeme nechat opět vykreslit. Pro doplnění bod  $S$  značí střed logaritmické spirály a střed kružnice  $\omega$ .



Obrázek 54: Ukázka - Logaritmická spirála (Soubor 34)

V rámci Souboru 34 si můžeme ověřit tvrzení ze stránek společnosti Wolfram, kde je uvedeno, že zobrazením logaritmické spirály v kruhové inverzi se středem v bodě  $S$  (střed spirály) dostáváme opět logaritmickou spirálu. Na první pohled nejsou tyto dvě (černá a zelená) ekviangulární spirály totožné. Zobrazením došlo ke změně parametrů jednotlivých křivek. Můžeme si všimnout, že dále došlo ke změně orientace. Pro logaritmickou spirálu platí níže uvedené věty. Jejichž platnost si můžeme ověřit v Souboru 34.

**Věta:** Jestliže v předpisu logaritmické spirály platí, že  $b < 0$ , poté se jedná o tzv. **pravotočivou** spirálu. Jestliže v předpisu logaritmické spirály platí, že  $b > 0$ , poté se jedná o tzv. **levotočivou** spirálu.

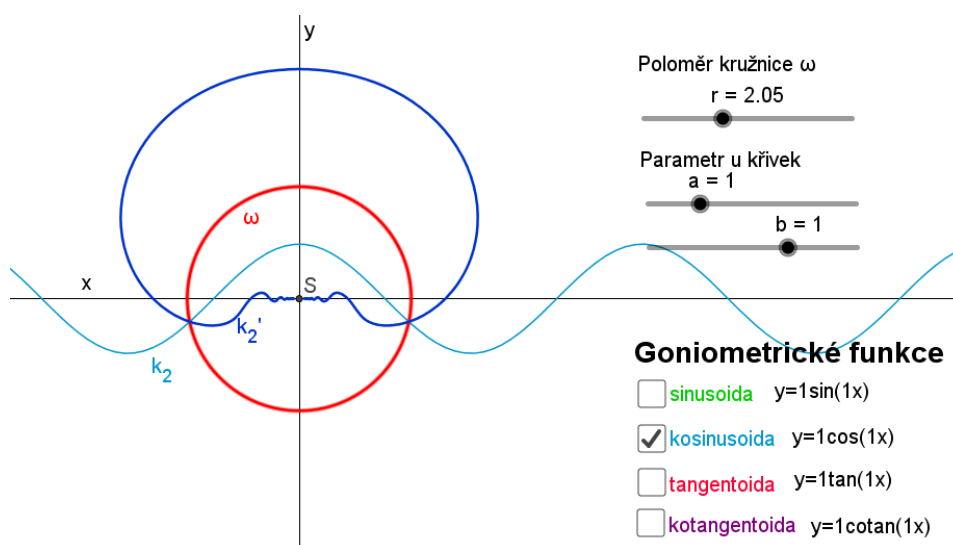
**Věta:** Zobrazením **pravotočivé** logaritmické spirály v kruhové inverzi dostáváme **levotočivou** logaritmickou spirálu. Obdobně platí, že zobrazením **levotočivé** logaritmické spirály v kruhové inverzi dostáváme **pravotočivou** logaritmickou spirálu.

## 4.2 GONIOMETRICKÉ FUNKCE A KRUHOVÁ INVERZE

Goniometrické funkce jsou jedním z běžných témat, se kterým se setkávají jak studenti středních, tak studenti vysokých škol. Tyto funkce jsou graficky znázorněné pomocí periodických křivek. Přestože se v případě vzoru jedná o periodickou funkci, její

obraz v kruhové inverzi již periodický není. Pro porovnání jednotlivých křivek funkcí zobrazených v kruhové inverzi jsme vytvořili Soubor 35.

V rámci tohoto souboru nalezneme všechny 4 základní goniometrické funkce:  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $\cotan(x)$ . Tyto funkce si můžeme zobrazit pomocí tlačítek, pojmenovaných pomocí názvu křivek, které je charakterizují. Toto tlačítko nám zobrazí vzor (znázorněný světlejší barvou a tenčí čarou) a obraz (znázorněný tmavší barvou, silnější čarou a označení obsahuje čárku v horním indexu) zobrazený v  $INV(\omega)$ . Za zmínku stojí i posuvníky s parametry  $a$  a  $b$ , pomocí nichž můžeme měnit parametry u předpisu funkcí.



Obrázek 55: Goniometrické funkce (Soubor 35)

Během práce se souborem lze vypořádat některé zajímavé vlastnosti goniometrických funkcí zobrazených v kruhové inverzi. Zvýšíme-li námi vybrané parametry u goniometrických funkcí, tak jejich vzory zobrazené v  $INV(\omega)$  se středem v bodě  $S=[0;0]$  mají na první pohled podobný průběh.<sup>22</sup> Mnohem zajímavější je níže uvedená vlastnost.

**Věta:** Mějme **goniometrické funkce** ( $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $\cotan(x)$ ) v základní poloze. Zobražíme-li tyto funkce v kruhové inverzi se středem hlavní kružnice v počátku souřadnic a libovolným nenulovým poloměrem, mají vždy vzor i obraz **stejnou paritu**.

V rámci souboru můžeme v algebraickém okně vidět parametrické vyjádření popisující průběh obrazů goniometrických funkcí pro parametr  $t$ , kde  $t \in \mathbb{R}$ , námi zvolený

<sup>22</sup> Nejedná se však o geometrickou podobnost v pravém slova smyslu.

poloměr  $r$  kruhové inverze, a také pro námi zvolené parametry  $a$ ,  $b$ . Obecné předpisy pro obrazy funkcí  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $\cotan(x)$  uvádíme v přehledné tabulce.

Tabulka 25: Obecné předpisy - goniometrické funkce

Název křivky	Předpis - VZOR	Předpis - OBRAZ
<b>sinusoida</b>	$k_1: y = a \sin(bx)$	$k_1': x = \frac{2r}{t^2 + (a \sin(bt))^2} (t)$ $y = \frac{2r}{t^2 + (a \sin(bt))^2} (a \sin(bt))$
<b>kosinusoida</b>	$k_2: y = a \cos(bx)$	$k_2': x = \frac{2r}{t^2 + (a \cos(bt))^2} (t)$ $y = \frac{2r}{t^2 + (a \cos(bt))^2} (a \cos(bt))$
<b>tangentoida</b>	$k_3: y = a \tan(bx)$	$k_3': x = \frac{2r}{t^2 + (a \tan(bt))^2} (t)$ $y = \frac{2r}{t^2 + (a \tan(bt))^2} (a \tan(bt))$
<b>kotangentoida</b>	$k_4: y = a \cotan(bx)$	$k_4': x = \frac{2r}{t^2 + (a \cotan(bt))^2} (t)$ $y = \frac{2r}{t^2 + (a \cotan(bt))^2} (a \cotan(bt))$

### 4.3 RŮŽE A KRUHOVÁ INVERZE

V rámci diplomové práce jsme se zaměřili na nejrůznější typy křivek. V rámci této kapitoly jsme se rozhodli věnovat pozornost jednomu ze specifických druhů uzavřených křivek, tzv. **růžím**. Ačkoliv se to může zdát překvapivé, růže (angl. rose) jsou skutečně rovinným útvarem, který, jak už napovídá název křivky, má tvar okvětního lístku.

Autorem názvu **rhodonea**, původního pojmenování „růže“, se stal v 18. století (přesněji mezi lety 1723 – 1728) italský matematik Luigi Guido Grandi. Tohoto autora má

většina lidí spojeného se studií křivky „versiera<sup>23</sup>“, nebo-li křivky Witch of Agnesi. Studium křivky rose zakončil roku 1728, kdy publikoval knihu **Flores geometrici**.

(Wikipedia – L. G. Grandi, 2021)

**Parametrické vyjádření křivky:**

$$x = a \cos(n\theta) \cos(\theta)$$

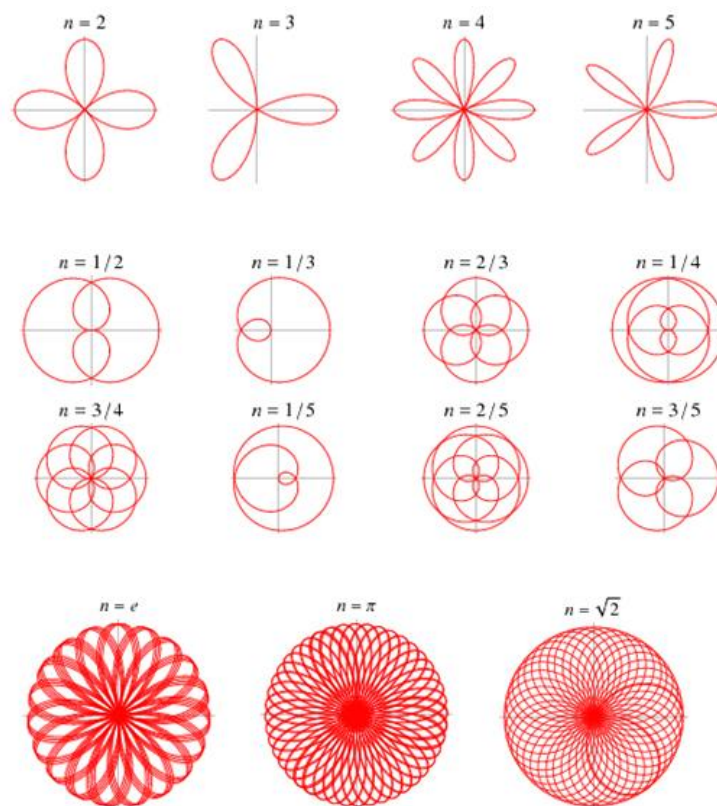
$$y = a \cos(n\theta) \sin(\theta), \text{ kde } 0 < \theta \leq 2\pi$$

**Polární rovnice křivky:**

$$r = a \sin(n\theta) \text{ nebo } r = a \cos(n\theta), \text{ kde } 0 < \theta \leq 2\pi$$

(Rose – Wolfram, 2021)

Z výše uvedených předpisů si můžeme všimnout, že se v nich shodně objevuje parametr  $n$ , ten je klíčový pro tvar dané křivky. V závislosti na hodnotách  $n$  můžeme rozlišovat několik základních podob růže. Na konkrétní ukázky se můžeme podívat na obrázku níže, převzatého ze stránek Wolframu.



Obrázek 56: Rose (Dostupné z: <https://mathworld.wolfram.com/Rose.html>)

<sup>23</sup> Jedná se o italský název.

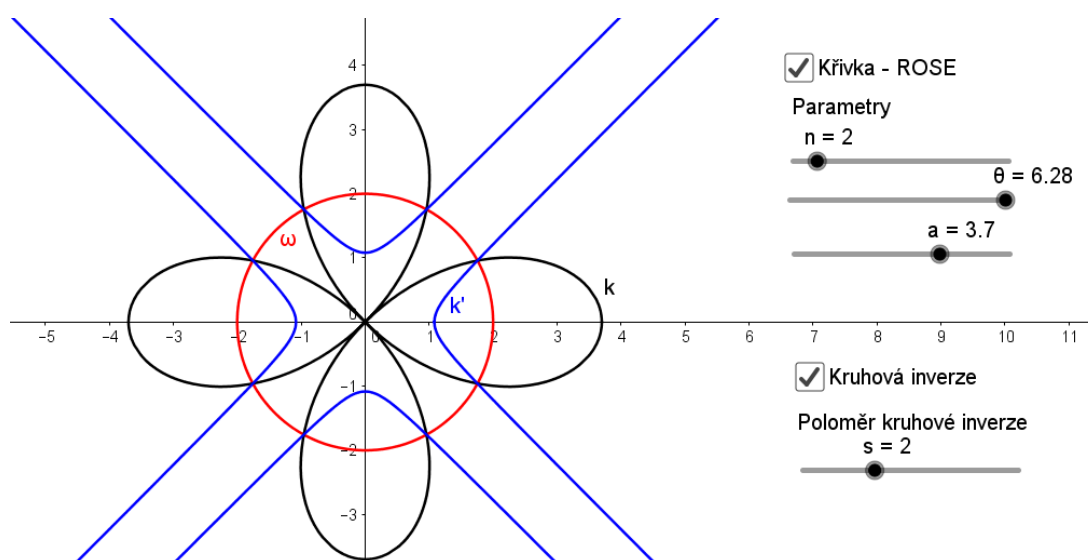
Jak jsme si všimli, místo hodnoty  $n$  můžeme dosadit libovolné reálné číslo. V rámci naší práce se však zaměříme pouze na ty případy, kdy  $n$  pochází z oboru přirozených čísel.

Tabulka 26: Rose – speciální případy

NÁZVY KŘIVEK PRO SPECIFICKÉ HODNOTY $n$	
$n$	Název křivky
1	kružnice
2	quadrifolium
3	trifolium, paquerette de mélibée

#### 4.3.1 ZOBRAZENÍ RŮŽE V KRUHOVÉ INVERZI

Pro zobrazení **rhodonea** (růže) jsme využili opět software dynamické geometrie GeoGebra. V rámci tohoto souboru si může uživatel měnit poloměr kruhové inverze, jejíž střed zvolíme ve středu kartézské soustavy souřadnic. Mimo této hodnoty lze měnit i jednotlivé parametry, jež se objevily v jednotlivých vyjádřeních křivek. Pro hodnoty  $n$  jsme umožnili volit čísla od 1 do 10. Lze si tak ověřit, že pro  $n=1$  je křivkou kružnice a zároveň je shora omezená hodnotou zajišťující přehlednost grafické interpretace výsledku.



Obrázek 57: Quadrifolium v KI (Soubor 36)

Modře jsme v souboru označili obraz křivky v kruhové inverzi, černě znázorňujeme vzor. Všimněme si, že mezi modrým, černým objektem a hodnotou  $n$  platí určité zákonitosti.

**Věta:** Mějme křivku rose (růži) zavedenou pomocí výše uvedených rovnic a dále mějme kruhovou inverzi  $INV(\omega)$  se středem kružnice  $\omega$  v počátku kartézské soustavy souřadnic. Potom platí: Jestliže jsou hodnoty pro  $n$  liché, potom vzor (černý) růže je v Euklidovské rovině tvořen z  $n$  částí. Obdobně platí. Jestliže jsou hodnoty pro  $n$  sudé, poté platí, že vzor (černý) růže je v Euklidovské rovině tvořen z  $2n$  částí.

**Věta:** Je-li vzor obrazu tvořen z  $k$  částí, pak i vzor zobrazený v  $INV(\omega)$  je tvořen také z  $k$  částí.

V algebraickém okně Souboru 36 nalezneme parametrické vyjádření vzoru a jejího obrazu zobrazeného v  $INV(\omega)$ . V níže uvedené tabulce uvádíme obecné předpisy těchto dvou křivek.

Tabulka 27: Rose – předpisy vzor a obraz

Předpis – VZOR ( $k$ )	Předpis – OBRAZ ( $k'$ )
$x = a \cos(n\theta) \cos(\theta)$ $y = a \cos(n\theta) \sin(\theta)$	$x = \frac{s^2 \cdot (a \cos(n\theta) \cos(\theta))}{(a \cos(n\theta) \cos(\theta))^2 + (a \cos(n\theta) \sin(\theta))^2}$ $y = \frac{s^2 \cdot (a \cos(n\theta) \sin(\theta))}{(a \cos(n\theta) \cos(\theta))^2 + (a \cos(n\theta) \sin(\theta))^2}$

$s$  – poloměr kružnice  $\omega$

kde,  $0 < \theta \leq 2\pi$

## 5 SOUBOR INTERAKTIVNÍCH ÚLOH – ONLINE

V rámci diplomové práce jsme vytvořili několik souborů týkajících se kruhové inverze. Cílem bylo vytvořit výběr úloh co nejjednodušeji dostupných pro každého uživatele a čtenáře této práce. V rámci matematiky existuje mnoho programů, v nichž lze použít kruhovou inverzi (Wolfram Mathematica, Cabri Geometrie, ...). My se rozhodli pro uživatelsky přívětivý program GeoGebra.

### 5.1 GEOGEBRA

**GeoGebra** je názvem jednoho z dynamických matematických softwarů, jež spojuje několik odvětví matematiky (např. algebru, geometrii, grafy, statistiku, ...). Tento software lze spustit na mnoha platformách – od mobilních telefonů, přes počítač až po samotný internetový prohlížeč. Mezi největší přednosti bychom určitě zařadili grafickou přehlednost, jednoduchost užívání, a navíc je dostupný pro uživatele zdarma. Nejen proto nalezneme tento rakouský software téměř na všech úrovních vzdělávání (od ZŠ až po VŠ).

Software lze do počítače stáhnout přímo z oficiálních stránek (ODKAZ: <https://www.geogebra.org/>). Na těchto stránkách zároveň můžeme najít přehled všech ocenění, jež GeoGebra získala. První větší ocenění obdržela již v roce 2002. V roce 2016 se jednalo například o německé ocenění Archimedes 2016 MNU Award in category Mathematics (GeoGerba, 2021).

V rámci programu si lze vybrat z několika volitelných jazyků – vývojáři nezapomněli ani na češtinu. K 29. 5. 2021 byla poslední dostupnou verzí verze **GeoGebra Klasik 6**. Vzhledem k tomu, že práce byla započata již v roce 2020, rozhodli jsme se pro zpracování všech souborů ve starší verzi **GeoGebra Klasik 5**. Jak již bylo zmíněno, GeoGebra si lze spustit i v rámci prohlížeče. Zde mimo samotného programu nalezneme mnoho výukových materiálů, které lze zdarma prohlédnout. Po registraci na stránkách softwaru lze **vytvářet online knihy**. Tuto možnost jsme využili i v rámci naší práce.

### 5.2 GEOGEBRA KNIHA

Tvorbou **GeoGebra knihy** jsme umožnili spuštění vytvořených souborů i bez stažení samotného programu. Námí vytvořenou knihu lze spustit kliknutím na odkaz uvedený v závěru této podkapitoly. Do vytvořené knihy GeoGebra jsme umístili téměř



všechny vlastnoručně vytvořené soubory obsahující interaktivní prvky.<sup>24</sup> Název úlohy nahrané v knize odpovídá názvu kapitoly nebo příkladu z DP. Pro lepší přehlednost a orientaci jsme v rámci naší knihy rozdělili některé soubory do více kapitol. Pořadí úloh jsme zachovali. Každá úloha obsahuje v názvu tvar **(SX)**, kde X označuje číslo odpovídající očíslování souborů, jež je totožné s číslováním souborů v rámci textu. Níže uvádíme přehled názvů hlavních kapitol.

- **Vlastnosti kruhové inverze**
- **Konstrukce na omezené nákresně**
- **Apolloniovy úlohy**
- **Speciální úlohy řešené pomocí kruhové inverze**
- **Kuželosečky v kruhové inverzi**
- **Vybrané rovinné křivky v kruhové inverzi**

Uživatel v rámci online verze může využít nejrůznějších dostupných interaktivních prvků (např. zaškrtačací políčko, posuvník, spuštění popisu konstrukce, záznamu bodu, atd.). Pro editaci úloh je potřeba otevřít soubory uložené v příloze.

### **ODKAZ KNIHY GEOGEBRA:**

<https://www.geogebra.org/m/dpdsdpcg>

**Doporučení:** Během práce s interaktivními prvky si musí uživatel dát pozor, aby přesouváním objektů nenarušil řešitelnost dané úlohy. Například u vzájemné polohy zadaných objektů v Apolloniových úlohách. K tomu, abychom předešli podobným situacím, je vhodné využít vytvořené pomocné tabulky. Narušením řešitelnosti se konstrukce může ztratit. Pokud by k tomuto případu došlo, doporučujeme aktualizovat stránku v prohlížeči nebo znovu otevřít původní neupravený soubor.

### 5.3 KRUHOVÁ INVERZE A WOLFRAM MATHEMATICA

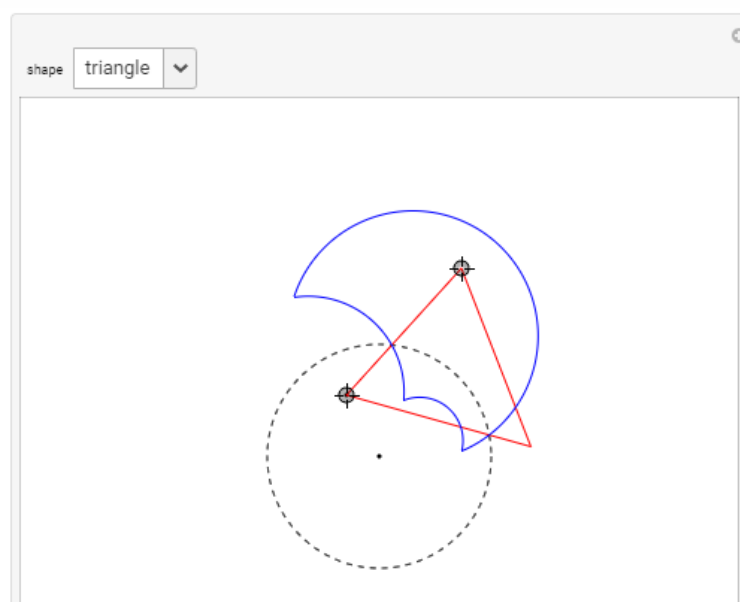
Poslední kapitolu v rámci této práce jsme se rozhodli věnovat ukázce znázorňující zpracování tématu kruhové inverze v rámci jiného softwaru než je GeoGebra. Konkrétně

<sup>24</sup> U některých souborů došlo při nahrávání souboru k problému – nezobrazovali se některé objekty (např. Soubor 25). Tyto soubory jsou však umístěny v rámci příloh.

se jedná o program Wolfram Mathematica. Program má oproti GeoGebře mnohonásobně větší pole působnosti. Geometrii zde není věnována taková pozornost, jako je zaměřena na jiná odvětví matematiky. Rozhodli jsme se zde však uvést ukázkou z tohoto programu. Níže uvedený soubor lze spustit v rámci online prostředí Wolfram Demonstration.

Tento soubor vytvořili Garrett Nelson a Branco Curgus. Lze ho otevřít z odkazu: <https://demonstrations.wolfram.com/CircleInversionOfBasicFigures/>. V rámci souboru můžeme zobrazit základní geometrické objekty v kruhové inverzi. Červený objekt (vzor) určuje vždy dvojici bodu, jejichž polohu lze volit libovolně jejich posunutím. Čárkovaně autoři znázornili hlavní kružnici a modře obraz zobrazovaného objektu. Pro zobrazení objektu v kruhové inverzi využili tvůrci funkce `InvCir[]` a `Inv[]`, které si autoři sami vytvořili.

### Circle Inversion of Basic Figures



Obrázek 58: Ukázkou - Wolfram Mathematica a kruhová inverze, Dostupné z: <https://demonstrations.wolfram.com/CircleInversionOfBasicFigures/>

## ZÁVĚR

V rámci diplomové práce došlo k vytvoření souboru interaktivních úloh řešitelných s využitím kruhové inverze. Jedním z našich hlavních cílů bylo vybrat jak typické příklady, tak obtížnější úlohy.

Téma jednotlivých kapitol a jejich pořadí jsme vybírali záměrně, aby v rámci díla docházelo k postupné gradaci obsahu. V úvodu jsme věnovali pozornost teoretickým základům, jež jsou potřebné pro detailnější pochopení využití kruhové inverze v rámci řešení jednotlivých příkladů. Mimo definic zde nalezneme i věty, z nichž jsme některé dokázali. Druhá až čtvrtá kapitola má aplikační charakter. Nalezneme zde např. Apolloniovy úlohy, příklady řešitelné s využitím vhodně zvolené kruhové inverze nebo také křivky a funkce zobrazené pomocí KI. Tyto funkce a křivky nám dávají zajímavé objekty, jež se běžně využívají např. v umění, stavitelství a dalších jiných oborech. Většinu příkladů objevující se v této diplomové práci naleznete ve speciální online knize, která celou práci zastřešuje. Této knize jsme věnovali samostatnou pátou kapitolu.

Obrázky objevující se v práci jsme vytvořili v rámci programu GeoGebra, jež je dostupný zdarma. Jedná se o jeden z nejvyužívanějších geometrických programů, a proto jsme se pro něj rozhodli i my, což umožnilo splnění dalšího vytyčeného cíle - vytvoření uživatelsky přívětivého souboru názorných úloh.

Věřím, že celá práce nabízí mnoho zajímavých příkladů a ukázek. Hlavní výhodu a přínos vidím v interaktivnosti celého díla. Názorně demonstrační metody jsou v dnešním výchovně vzdělávacím procesu zcela běžné, a proto bychom některé námi vytvořené soubory zároveň doporučili jako výukový materiál. Všechny vytvořené soubory jsou dostupné v rámci přílohy nacházející se u této práce.

**RESUMÉ**

Diplomová práce přibližuje problematiku kruhové inverze, včetně aplikace tohoto tématu na příkladech o různé obtížnosti. Hlavním cílem bylo vytvořit soubor interaktivních úloh, v rámci nichž lze využívat nejrůznějších dynamických prvků. Ty umožňují povznést úlohy na vyšší úroveň. Čtenář díky nim dokáže lépe pochopit otázky řešitelnosti a otázky týkající se počtu řešení v závislosti na volbě parametru.

V rámci první kapitoly se věnujeme základním definicím a vlastnostem kruhové inverze. Druhá až čtvrtá kapitola nabízí nejrůznější příklady od tradičních Apolloniových úloh až po zobrazování méně známých rovinných křivek v kruhové inverzi. Poslední pátá kapitola představuje GeoGebra knihu, která obsahuje námi vytvořené soubory. Největší výhodou GeoGebra knihy je, že si soubory lze spustit v internetovém prohlížeči bez nutnosti instalace programu GeoGebra.

**RESUMÉ**

The diploma thesis approaches the issue of circular inversion, including the application of this topic on examples of varying difficulty. The main goal was to create a set of interactive tasks in which various dynamic elements can be used. These allow to take tasks to the next level. Thanks to them, the reader is able to understand better the solvability issues and questions concerning the number of solutions depending on the choice of parameter.

In the first chapter we deal with the basic definitions and properties of circular inversion. Chapters two to four offer a variety of examples from traditional Apollonian problems to the display of lesser-known plane curves in circular inversion. The last fifth chapter presents the GeoGebra book, which contains the files which we have created. The biggest advantage of the GeoGebra book is that your files can be run in a web browser without installing GeoGebra.

## SEZNAM LITERATURY

BLAŽEK, Vladimír. *Geometrie III*. Ústí nad Labem: UJEP v Ústí nad Labem, Fakulta pedagogická, 1995. ISBN 80-7044-103-8.

Circle Inversion of Basic Figures. *Wolfram Cloud – Wolfram Demnstrations project*.

[online]. Wolfram, 1999. [cit. 2021-05-23]. Dostupné z:

<https://www.wolframcloud.com/objects/demonstrations/CircleInversionOfBasicFigures-source.nb>

FOLTÝN, Adam. *Kruhová inverze*. [online]. Brno, 2013. [cit. 2021-03-01]. Dostupné z:

[https://is.muni.cz/th/a8gg7/Bakalarska\\_prace.pdf](https://is.muni.cz/th/a8gg7/Bakalarska_prace.pdf). Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Mgr. Michal Bulant, Ph.D.

GATHMANN, Andreas. *Plane Algebraic Curves - Class Notes TU Kaiserslautern*. [online].

Kaiserslautern, 2018. [cit. 2021-04-09]. Dostupné z: <https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/en/curves.php>

GeoGebra | Matematické aplikace zdarma - používané 100 miliony studentů a učitelů na světě. GeoGebra | *Free Math Apps - used by over 100 Million Students & Teachers Worldwide* [online]. GeoGebra, 2021. [cit. 2021-05-29]. Dostupné z:

<https://www.geogebra.org/?lang=cs>

GERGELITSOVÁ, Šárka. *Průvodce Geogebrou: počítač ve výuce nejen geometrie*. Praha: Generation Europe, 2011. ISBN 978-80-904974-3-6.

JANYŠKA, Josef. Geometrická zobrazení. [online]. Přírodovědecká fakulta MU v Brně,

2020. [cit. 2020-09-18]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~janyska/ZobrazeniWS.pdf>

Inverse Curve -- from Wolfram MathWorld. *Wolfram MathWorld: The Web's Most*

*Extensive Mathematics Resource* [online]. Wolfram, 1999. [cit. 2021-04-12]. Dostupné z: <https://mathworld.wolfram.com/InverseCurve.html>

HAŠEK, Roman. *Kruhová inverze – poznámky GEO4\_CZV\_SS*. [online]. Fakulta pedagogická

Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, 2020. [cit. 2020-11-06]. Dostupné z: [http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO4/GEO4\\_CZV\\_SS\\_Kruhova\\_inverze.pdf](http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO4/GEO4_CZV_SS_Kruhova_inverze.pdf)

KOCOUREK, Jan. Kuželosečky v kruhové inverzi. [online]. Plzeň, 2016. [cit. 2021-04-12].

Dostupné z: <https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/24199/1/Jan%20Kocourek%20Kuzelosecky%20v%20kruhove%20inverzi%202016.pdf>. Diplomová práce. ZČU v Plzni, Fakulta pedagogická. PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

KUŘINA, František. *Deset geometrických transformací*. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-231-7

- LÁVIČKA, Miroslav. *Geometrie 1: základy geometrie v rovině*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2002. ISBN 80-7082-861-7.
- LÁVIČKA, Miroslav. KMA/G1 Geometrie 1 – Pomocný učební text. [online]. Plzeň: Západočeská univerzita, 2008. [cit. 2020-02-12]. Dostupné z: <https://courseware.zcu.cz/portal/studium/courseware/kma/g1/studijni-materialy.html>
- LEISCHNER, Pavel. *Geometrická zobrazení*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2010. ISBN 978-80-7394-243-4.
- LEISCHNER, Pavel. *Polibky kružnic: Archimedes*. In: *Matematika – fyzika – informatika 24*. [online] Pedagogická fakulta JU, České Budějovice, 2015. [cit. 2021-03-24]. Dostupné z: [http://mfi.upol.cz/files/24/2402/mfi\\_2402\\_087\\_094.pdf](http://mfi.upol.cz/files/24/2402/mfi_2402_087_094.pdf)
- LEISCHNER, Pavel. 2020. *Kritéria tětívového čtyřúhelníku*. 25. *Konference o geometrii a počítačové grafice* [online]. Fakulta stavební ČVUT v Praze. [cit. 2020-02-12]. Dostupné z: <http://mat.fsv.cvut.cz/gcg/sbornik/leischner.pdf>
- MACHAČÍKOVÁ, Ivana, MOLNÁR, Josef. Apolloniovy a Pappovy úlohy (a GeoGebra) In: *Letní škola matematiky a fyziky* [online]. Ústí nad Labem: Prokop, 2013, 65 – 68 s. [cit. 2021-03-12]. Dostupné z: [https://ezak.uiep.cz/document\\_4088/41df78b6db7818761af2938485c9b924-polozka-c-10-sbornik-text-pdf](https://ezak.uiep.cz/document_4088/41df78b6db7818761af2938485c9b924-polozka-c-10-sbornik-text-pdf)
- Matykání IX: Mají zlomky rodiče? | Matfyz.cz. *Matfyz.cz* [online]. Matematicko, 2021. [cit. 2021-05-24]. Dostupné z: <https://www.matfyz.cz/clanky/matykani-ix-maji-zlomky-rodice>
- NEDVĚD, Přemysl. *Kuželosečky – Čítanka matematiky* [online]. Praha, 2019. [cit. 2021-04-01]. Dostupné z: [http://84.242.77.122/uc%282ebnice\\_CS/Geometrie/Planimetrie/Utvary\\_v\\_rovine/Krivky/Kuzelosecky/Standardni\\_kuzelosecky.htm](http://84.242.77.122/uc%282ebnice_CS/Geometrie/Planimetrie/Utvary_v_rovine/Krivky/Kuzelosecky/Standardni_kuzelosecky.htm)
- NOCAR, David. *Metody řešení Apolloniových úloh pomocí ICT* [online]. Univerzita Palackého v Olomouci, 2019. [cit. 2021-03-08]. Dostupné z: [https://www.pdf.upol.cz/fileadmin/userdata/PdF/VaV/2019\\_2020/Nocar\\_studijni\\_text\\_2019.pdf](https://www.pdf.upol.cz/fileadmin/userdata/PdF/VaV/2019_2020/Nocar_studijni_text_2019.pdf)
- PECH, Pavel. *Kuželosečky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7040-755-7.
- PIRKLOVÁ, Petra. 2013. *Apolloniovy úlohy* [online]. Technická univerzita v Liberci. [cit. 2021-03-08]. Dostupné z: [https://kmd.fp.tul.cz/images/stories/vyuka/pirklova-prednasky/Apolloniovy\\_ulohy.pdf](https://kmd.fp.tul.cz/images/stories/vyuka/pirklova-prednasky/Apolloniovy_ulohy.pdf)
- REJCHL, Jaroslav. *Zlatý obdélník a logaritmická spirála :: MEF. Fyzika ::* [online]. MEF, 2006. [cit. 2021-04-13]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1465-zlaty-obdelnik-a-logaritmicka-spirala>

ROKYTA, Mirko. *Nerušte mé Fordovy kruhy*. [online] KMA MFF UK Praha, 2020. [cit. 2021-05-24]. Dostupné z: [http://am-nas.vsb.cz/vod03/osma/pdf/prednasky/2020/Mirko\\_Rokyta.pdf](http://am-nas.vsb.cz/vod03/osma/pdf/prednasky/2020/Mirko_Rokyta.pdf)

Rose -- from Wolfram MathWorld. *Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource* [online]. Wolfram, 1999. [cit. 2021-05-23]. Dostupné z: <https://mathworld.wolfram.com/Rose.html>

SVOBODOVÁ, Iveta. Analyticky a geometricky definované křivky. [online]. Plzeň, 2012. [cit. 2021-04-12]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/fwy0s1/>. Bakalářská práce. ZČU v Plzni, Fakulta pedagogická. Mgr. Lukáš Honzík.

ŠÁMAL, Robert. *16. ročník (1996/1997), Kruhová inverze, PraSe — matematický korespondenční seminář MFF UK* [online]. MFF UK v Praze, 1996. [cit. 2021-03-28]. Dostupné z: <https://prase.cz/archive/16/4.pdf>

ŠEDIVÝ, Ondrej. *Geometria 2*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava, 1987. ISBN 067-466-87 G2X.

Wikipedia - Luigi Guido Grandi. *Wikipedia*. [online]. upraveno 23.03.2021, [cit. 2021-05-23]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Luigi\\_Guido\\_Grandi](https://en.wikipedia.org/wiki/Luigi_Guido_Grandi)

ZAMBOJ, Michal. 2021. *Ptolemaiova věta*, YouTube video. [cit. 2021-02-11]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=8aVLtmYSS1M>

ZAMBOJ, Michal. *Syntetická geometrie II – Mnohouhelníky*. [online]. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzita Karlova, 2021. [cit. 2021-02-12]. Dostupné z: [https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/documents/sg2/SGII\\_9 Mnohouhelniky\\_handout.pdf](https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/documents/sg2/SGII_9_Mn Houhelniky_handout.pdf)

## SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ

Obrázek 1: Möbiův prostor (Lávička, 2002).....	6
Obrázek 2: Konstrukce bodu B v kruhové inverzi (Soubor 1).....	8
Obrázek 3: Velikost úhlů (Soubor 2).....	9
Obrázek 4: Obrázek znázorňující 1. variantu věty (Soubor 3).....	10
Obrázek 5: Obrázek znázorňující 2. variantu věty (Soubor 3).....	11
Obrázek 6: Dvojpoměr uspořádané čtveřice bodů .....	11
Obrázek 7: Přímka procházející středem S (Soubor 4) .....	13
Obrázek 8: Přímka neprocházející středem S (Soubor 4).....	13
Obrázek 9: Kružnice procházející středem S (Soubor 5) .....	14
Obrázek 10: Kružnice neprocházející středem S (Soubor 5) .....	14
Obrázek 11: Důkaz - kružnice neprocházející středem S (Soubor 6).....	15
Obrázek 12: Incidence v kruhové inverzi var. a) (Soubor 7) .....	16
Obrázek 13: Incidence v kruhové inverzi var. b) (Soubor 7).....	16
Obrázek 14: Samodružná kružnice (Soubor 8).....	17
Obrázek 15: Ptolemaiova věta (Soubor 9).....	19
Obrázek 16: Příklad 2.1.1 (Soubor 10).....	22
Obrázek 17: Příklad 2.1.2 (Soubor 11).....	23
Obrázek 18: Příklad 2.1.3 (Soubor 12).....	24
Obrázek 19: Úloha BBB (Soubor 13) .....	27
Obrázek 20: Příklad 2.2.3.1 (Soubor 14).....	29
Obrázek 21: Příklad 2.2.4.1 (Soubor 15).....	30
Obrázek 22: Úloha Bpp (Soubor 16).....	31
Obrázek 23: Příklad 2.2.5.1 (Soubor 17).....	32
Obrázek 24: Příklad 2.2.6.1 (Soubor 18).....	34
Obrázek 25: Příklad 2.2.6.2 (Soubor 19).....	35
Obrázek 26: Příklad 2.2.7.1 (Soubor 20).....	37
Obrázek 27: Příklad 2.2.10.1 (Soubor 21).....	39
Obrázek 28: Příklad 2.2.11.1 (Soubor 22).....	41
Obrázek 29: Příklad 2.2.11.2 (Soubor 23).....	42
Obrázek 30: Arbelos ABC.....	43
Obrázek 31: Pappova věta o kružnicích .....	44
Obrázek 32: Důkaz Pappovy věty o kružnicích (Soubor 24) .....	45
Obrázek 33: Příklad 2.3.2 (Soubor 25).....	46
Obrázek 34: Příklad 2.3.3 (Soubor 26).....	47
Obrázek 35: Rozbor - příklad 2.3.4 .....	48
Obrázek 36: Příklad 2.3.4 (Soubor 27).....	49
Obrázek 37: Stern-Brocotův strom Zdroj: <a href="http://www.matfyz.cz">www.matfyz.cz</a> .....	50
Obrázek 38: Fordovy kružnice - Zdroj: <a href="http://www.matfyz.cz">www.matfyz.cz</a> .....	50
Obrázek 39: Fordovy kruhy (Soubor 28) .....	52
Obrázek 40: Hodnoty středů pro Fordovy kružnice .....	52
Obrázek 41: Regulární kuželosečka (Nedvěd, 2019) .....	54
Obrázek 42: Elipsa.....	55
Obrázek 43: Kartézský ovál - varianta 1 (Soubor 29).....	57
Obrázek 44: Pascalova závitnice - varianta 2 (Soubor 29).....	58
Obrázek 45: Dioklova kisoida - varianta 3 (Soubor 29).....	59



Obrázek 46: Parabola.....	60
Obrázek 47: Srdcovka – varianta 1 (Soubor 30) .....	61
Obrázek 48: Dioklova kisoida - varianta 2 (Soubor 30).....	62
Obrázek 49: Hyperbola.....	63
Obrázek 50: Bernoulliho lemniskáta - varianta 1 (Soubor 31).....	65
Obrázek 51: Přímá strofoida - varianta 2 (Soubor 31) .....	66
Obrázek 52: Maclaurinův trisektris (Soubor 32).....	67
Obrázek 53: Pascalova závitnice (Soubor 33).....	68
Obrázek 54: Ukázka - Logaritmická spirála (Soubor 34).....	71
Obrázek 55: Goniometrické funkce (Soubor 35) .....	72
Obrázek 56: Rose (Dostupné z: <a href="https://mathworld.wolfram.com/Rose.html">https://mathworld.wolfram.com/Rose.html</a> ) .....	74
Obrázek 57: Quadrifolium v KI (Soubor 36) .....	75
Obrázek 58: Ukázka - Wolfram Mathematica a kruhová inverze, Dostupné z: <a href="https://demonstrations.wolfram.com/CircleInversionOfBasicFigures/">https://demonstrations.wolfram.com/CircleInversionOfBasicFigures/</a> .....	79
Tabulka 1: Zkratky - metody řešení Apolloniových úloh .....	26
Tabulka 2: Úloha typu BBB .....	26
Tabulka 3: Úloha typu BBp.....	28
Tabulka 4: Úloha typu Bpp .....	29
Tabulka 5: Úloha typu BBk.....	31
Tabulka 6: Úloha typu Bkk .....	33
Tabulka 7: Úloha typu Bpk .....	36
Tabulka 8: Úloha typu ppp .....	37
Tabulka 9: Úloha typu ppk .....	38
Tabulka 10: Úloha typu pkk .....	38
Tabulka 11: Úloha typu kkk .....	40
Tabulka 12: Elipsa - speciální křivky .....	55
Tabulka 13: Kartézský ovál.....	57
Tabulka 14: Pascalova závitnice.....	58
Tabulka 15: Dioklova kisoida.....	59
Tabulka 16: Parabola – speciální křivky .....	60
Tabulka 17: Srdcovka.....	61
Tabulka 18: Dioklova kisoida.....	62
Tabulka 19: Hyperbola - speciální křivky .....	64
Tabulka 20: Bernoulliho lemniskáta.....	65
Tabulka 21: Přímá strofoida .....	66
Tabulka 22: Maclaurinův trisektris.....	67
Tabulka 23: Pascalova závitnice.....	68
Tabulka 24: Přehled kuželoseček zobrazených v kruhové inverzi.....	69
Tabulka 25: Obecné předpisy - goniometrické funkce.....	73
Tabulka 26: Rose – speciální případy.....	75
Tabulka 27: Rose – předpisy vzor a obraz .....	76

**PŘÍLOHY**

- Soubor 1 - Příklad 1.1.1. - konstrukce bodu
- Soubor 2 - Věta - velikost úhlu
- Soubor 3 - Věta – úhel
- Soubor 4 - Přímka v inverzi
- Soubor 5 - Kružnice v inverzi
- Soubor 6 - Důkaz - kružnice neprocházející středem S
- Soubor 7 - Incidence v kruhové inverzi
- Soubor 8 - Samodružná kružnice
- Soubor 9 - Ptolemaiova věta
- Soubor 10 - Příklad 2.1.1
- Soubor 11 - Příklad 2.1.2
- Soubor 12 - Příklad 2.1.3
- Soubor 13 - Úloha BBB
- Soubor 14 - Příklad 2.2.3.1
- Soubor 15 - Příklad 2.2.4.1
- Soubor 16 - Úloha Bpp
- Soubor 17 - Příklad 2.2.5.1
- Soubor 18 - Příklad 2.2.6.1
- Soubor 19 - Příklad 2.2.6.2
- Soubor 20 - Příklad 2.2.7.1
- Soubor 21 - Příklad 2.2.10.1
- Soubor 22 - Příklad 2.2.11.1
- Soubor 23 - Příklad 2.2.11.2
- Soubor 24 - Arbelos ABC
- Soubor 25 - Příklad 2.3.2
- Soubor 26 - Příklad 2.3.3
- Soubor 27 - Příklad 2.3.4
- Soubor 28 - Fordovy kruhy
- Soubor 29 - Elipsa

Soubor 30 - Parabola

Soubor 31 - Hyperbola

Soubor 32 - Maclaurinův trisektris

Soubor 33 - Pascalova závitnice

Soubor 34 - Logaritmická spirála

Soubor 35 - Goniometrické funkce

Soubor 36 - Rose v kruhové inverzi