ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ÚLOHY REKREAČNÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Pavlína Černá

Učitelství pro základní školy, obor Ma-HV

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň 2021

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 30. června 2021

....

vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěla poděkovat doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za odborné vedení práce a cenné připomínky k samotnému zpracování práce.

Ráda bych touto cestou poděkovala i rodině, která mě během celého studia vytrvale podporovala.

OBSAH

ÚVOD

Pojmem rekreační matematika můžeme označit takovou oblast matematiky, která slouží uživatelům jako jistý druh zábavy. Dané jedince pak hravou formou vede k vyřešení problematiky. Řešením úlohy zároveň řešitel rozvíjí své logické myšlení, trénuje představivost, zdokonaluje komunikační schopnosti, využívá a aplikuje matematické poznatky.

Jak již bylo řečeno, rekreační matematika musí probíhat hravou a zároveň poutavou formou. Do této oblasti můžeme zahrnout matematické hlavolamy, hádanky, šifry, ale i například šachy, strategické hry založené na kombinatorice atd.

V jednotlivých kapitolách diplomové práce bude představeno několik ukázkových příkladů z oblasti rekreační matematiky. U všech příkladů bude uvedeno zadání, postup řešení a potřebné komentáře k pochopení celé problematiky. Kapitoly jsou členěny do tematických okruhů, pod které spadají jednotlivé příklady.

Úlohy, které jsem uvedla v této práci, byly součástí dříve publikovaného populárního časopisu Věda a technika mládeži. Mohli jsme v něm najít nejnovější poznatky, aktuální trendy, objevy, vynálezy a mnoho dalších zajímavých článků, a to především z oblasti vědy a techniky. Jednalo se o český časopis vycházející od roku 1947 do roku 2009, jako čtrnáctideník. Nyní už nenajdeme časopis v tištěné podobě, ale na webových stránkách VTM.cz. Na konci každého čísla se nacházely tzv. zajímavé problémy, nad nimiž se mohli čtenáři zamyslet a následně vyřešit. Mnozí zasílali správná řešení příkladů a pokud byli vylosováni, získali odměnu.

Poslední kapitola s názvem Příklady na každý den obsahuje úlohy z knihy Každý den s matematikou. Prolíná se zde učivo ze všech čtyř tematických okruhů matematiky – Číslo a početní operace; Závislosti, vztahy a práce s daty; Geometrie v rovině a v prostoru; Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Cílem této diplomové práce je obeznámit čtenáře s pojmem „rekreační matematika“, představit mu ukázkové způsoby řešení příkladů a motivovat jej pro jeho samostatnou iniciativu v oblasti rekreační matematiky. Práce může také sloužit jako sbírka příkladů, nejen pro žáky, k procvičení úloh a dále k možnosti nahlédnutí jejich postupu řešení.

1 ALGEBROGRAMY

Algebrogram je úloha, ve které jsou většinou číslice nahrazeny jinými symboly (písmeny, piktogramy, obrázky, speciálními znaky). Řešením algebrogramu hledáme spojitost mezi znaky a číslicemi, tak, aby zadané početní úkony odpovídaly korektnímu výsledku příkladu. Stejné znaky nahrazujeme stejnými číslicemi. Nepsaným pravidlem je to, že žádné číslo (kromě nuly) nemůže začínat číslicí nula. Neexistuje obecný postup pro řešení algebrogramů.

1.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Vyřešte následující algebrogram:

$$ABCD \cdot 137 = \frac{ABCDABCD}{73}$$

Řešení:

Celou rovnici vydělíme nenulovým výrazem $ABCD$

$$ABCD \cdot 137 = \frac{ABCDABCD}{73} \qquad / \cdot \frac{1}{ABCD}$$

$$137 = \frac{10001}{73}$$

$$\underline{\underline{1 = 1}}$$

Za výraz $ABCD$ můžeme dosadit jakékoliv čtyřciferné číslo, které nezačíná 0. To znamená, že $A \neq 0$.

Ověření:

Do rovnice dosadíme $A = 1;\ B = 2;\ C = 3;\ D = 4$:

$$ABCD \cdot 137 = \frac{ABCDABCD}{73}$$

$$1234 \cdot 137 = \frac{12341234}{73}$$

$$\underline{\underline{169058 = 169058}}$$

Dosadíme-li $A = 2;\ B = 0;\ C = 2;\ D = 1$:

$$ABCD \cdot 137 = \frac{ABCDABCD}{73}$$

$$2021 \cdot 137 = \frac{20212021}{73}$$

$$\underline{\underline{276877 = 276877}}$$

1.2 PŘÍKLAD 2

Zadání:

Vyřešte následující algebrogram:

$$\begin{array}{r} \text{FORTY} \\ \text{TEN} \\ \underline{\text{TEN}} \\ \text{SIXTY} \end{array}$$

Řešení:

Za daná písmena máme dosadit číslice tak, aby platila rovnost součtu. K dispozici nám jsou jednociferné číslice 0–9. Počet neznámých odpovídá počtu jednociferných číslic, které můžeme využít. Znamená to, že využijeme všechny jednociferné číslice.

Rovnici budeme řešit „odzadu“. Ve druhém sloupci se součet $T + E + E = T$ nemění ($T = T$), proto:

$$Y + N + N = Y$$

$$2N = 0$$

$$\underline{\underline{N = 0}}$$

Vzhledem k tomu, že součet ve třetím sloupci je zvýšen o „1“ ($R \neq X$) můžeme si dovolit následující tvrzení:

$$T + E + E = T$$

$$2E = 10$$

$$\underline{\underline{E = 5}}$$

Po dosazení:

$$\begin{array}{r} \text{FORTY} \\ \text{T50} \\ \underline{\text{T50}} \\ \text{SIXTY} \end{array}$$

Součet v třetím sloupci $R + T + T = X$ musí splnit podmínku $X > 20$. Jedině tak splníme podmínky 4. sloupce ($O \neq I$) a 5. sloupce ($F \neq S$).

Nyní se zaměříme na čtvrtý sloupec. Zde musí platit podmínka $O + 2 = I$, kde $I > 10$, abychom dosáhli změny i v pátém sloupci. Tato podmínka, zohledněním předchozích výpočtů ($N = 0$), je splněna pouze tehdy, pokud $\underline{\underline{O = 9}}$ a zároveň $\underline{\underline{\mathrm{I} = 1}}$.

$$\begin{array}{r} \mathrm{F9RTY} \\ \mathrm{T50} \\ \underline{\mathrm{T50}} \\ \mathrm{S1XTY} \end{array}$$

Nyní se vraťme k součtu ve třetím sloupci $R + T + T = X$. Tento součet musí být větší než 20. To znamená, že ze zbývajících číslic 2; 3; 4; 6; 7; 8 volíme ty „s větší hodnotou, tj. 6; 7; 8.“ Při výběru musíme zohlednit výsledek předchozího sloupce, kde nám součet vyjde větší než 10, proto musíme přičíst 1. Na vědomí je zapotřebí brát i již vypočtené proměnné, a nakonec i použití dvou po sobě jdoucích číslic pro proměnné F a S. Z této úvahy vyjde vítězně pouze $\underline{\underline{T = 8}}$ a $\underline{\underline{R = 7.}}$ Dosazením do zadání získáme $\underline{\underline{X = 4}}$, $\underline{\underline{F = 2}}$, $\underline{\underline{S = 3}}$ a poslední volnou číslicí je 6, tudíž $\underline{\underline{Y = 6}}$.

Výsledné řešení je zobrazeno níže.

$$\begin{array}{r} \mathbf{29786} \\ \mathbf{850} \\ \underline{\mathbf{850}} \\ \mathbf{31486} \end{array}$$

1.3 PŘÍKLAD 3

Zadání:

Početní hříčka

„Jen jedna číslice je nahrazena otazníkem pokaždé, když se v příkladu vyskytne. Je to součet těchto čísel: $21? + 4?9 + ?? + ?57 = 1652$. *Kterou číslici zastupuje otazník?“* (Věda a technika mládeži, 1958)

Řešení:

Postupovat budeme stejným způsobem jako v předchozím příkladu. Nejprve si všechny sčítance sepíšeme pod sebe.

$$\begin{array}{r} 21? \\ 4?9 \\ ?? \\ \underline{\quad ?57} \\ 1652 \end{array}$$

Na místě jednotek sčítáme čísla 7 a 9, k tomuto součtu přičteme ještě další dvě stejná čísla tak, aby celkový součet byl roven číslu končícímu 2.

Pokud by byl součet těchto čtyř čísel roven 22, na místo „?“ bychom doplnili číslo 3. Na místě desítek bychom sčítali $1 + 3 + 3 + 5 + 2 = 14$, což nesouhlasí s konečným výsledkem.

Místo “?“ tedy dosadíme číslo 8. V posledním sloupci, určující jednotky dostaneme součet $8 + 9 + 8 + 7 = 32$. Na místě desítek bude součet $1 + 8 + 8 + 5 + 3 = 25$. Zatím nám čísla na místě jednotek i desítek souhlasí.

Dalším součtem na místě stovek je součet $2 + 4 + 8 + 2 = 16$. Vidíme, že i poslední součet na místě stovek souhlasí. Úloha má tedy jediné řešení.

Neznámou proměnnou „?“ je číslo 8.

1.4 PŘÍKLAD 4

Zadání:

Prokletá patnáctka

„Máte 9 čísel, a, b, c, d, e, f, g, h, i, která musíte zvolit tak, že a + b + c = 15, d + e + f = 15, g + h + i = 15, a + d + g = 15, b + e + h = 15, c + f + i = 15, a + e + i = 15, c + e + g = 15.“ (Věda a technika mládeži, 1958)

Řešení:

$$a + b + c = 15$$

$$d + e + f = 15$$

$$g + h + i = 15$$

$$a + d + g = 15$$

$$b + e + h = 15$$

$$c + f + i = 15$$

$$a + e + i = 15$$

$$c + e + g = 15$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

Při takovémto umístění písmen do čtverce, bychom měli po nahrazení písmen číslicemi získat vždy v každém řádku, každém sloupci a obou úhlopříčkách, součet příslušných čísel roven 15.

Doprostřed čtverce umístíme číslo 5.

Možnosti součtu tří čísel s číslem 5 tak, aby součet byl roven 15:

$$5 + 1 + 9 = 15$$

$$5 + 2 + 8 = 15$$

$$5 + 3 + 7 = 15$$

$$5 + 4 + 6 = 15$$

Jedna z možností rozmístění čísel je:

8	**1**	**6**
3	**5**	**7**
4	**9**	**2**

2 LINEÁRNÍ ROVNICE

Jedna z nejběžněji využívaných metod k řešení slovních úloh je metoda výpočtu lineárních rovnic. Musíme si pozorně přečíst zadání úlohy, poté určíme neznámou a sestavíme rovnici. Lineární rovnici řešíme pomocí ekvivalentních úprav, kterými zjednodušujeme rovnici. Cílem je vyjádření neznámé neboli nalezení kořene rovnice.

2.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Sběrová

„Pět pionýrů se vydalo s vozíky za sběrem prázdných lahví. Jak to ale někdy bývá – od pěkného úmyslu k činům nebývá vždy přímá cesta. Chlapci místo sběru si hráli na řidiče a o láhve se starala jenom Helenka. Když se stmívalo, měla Helenka plný vozík – 45 láhví – chlapci nic. Helenka se nad nimi slitovala a všechny láhve mezi ně rozdělila. Komu dala malé láhve, dostal jich víc, velkých dala méně. Avšak ještě na zpáteční cestě našel Jenda 2 láhve a Jarda zdvojnásobil počet lahví, které měl. Zato Vašek s Petrem pokračovali ve hře; Vašek přitom ztratil 2 láhve a Petr jich dokonce pozbyl polovinu. Když se vrátili domů, měli všichni chlapci stejný počet láhví. Zjistíte, kolik lahví, který chlapec dostal od Helenky?“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Helenka rozdělila 45 lahví mezi čtyři chlapce – Jendu, Jardu, Vaška a Petra. Když se vrátili chlapci domů, měl každý z nich stejný počet lahví, označme „x“. Při cestě domů však Jenda našel 2 láhve, měl tedy $x + 2$ lahví. Jarda svůj počet lahví zdvojnásobil -> $x \cdot 2$. Vašek 2 láhve ztratil -> $x - 2$ a Petr ztratil polovinu lahví -> $\frac{x}{2}$.

Tabulka 1: Počet lahví jednotlivých chlapců

Chlapec	Počet lahví
Jenda	$x + 2$
Jarda	$x \cdot 2$
Vašek	$x - 2$
Petr	$\frac{x}{2}$
Celkem lahví	$\mathbf{45}$

Sestavme nyní rovnici, ve které sečteme počet lahví každého chlapce. Tento součet se rovná celkovému počtu lahví, které Helenka rozdala chlapcům, tedy 45 láhví.

$$x + 2 + x \cdot 2 + x - 2 + \frac{x}{2} = 45$$

$$4x + \frac{x}{2} = 45$$

$$\underline{\underline{x = 10}}$$

Když přišli chlapci domů, měl každý z nich 10 lahví. Kolik lahví dostali chlapci od Helenky?

Jenda:

$$x + 2 = 10$$

$$\underline{\underline{x = 8}}$$

Jarda:

$$x \cdot 2 = 10$$

$$\underline{\underline{x = 5}}$$

Vašek:

$$x - 2 = 10$$

$$\underline{\underline{x = 12}}$$

Petr:

$$\frac{x}{2} = 10$$
$$\underline{\underline{x = 20}}$$

Od Helenky dostal Jenda 8 lahví, Jarda 5 lahví, Vašek 12 lahví a Petr 20 lahví.

2.2 PŘÍKLAD 2

Zadání:

Lovci v tajze

„Tři lovci šli na několikadenní lov do tajgy. Poslední ráno se jim přihodila malá nepříjemnost: při přechodu přes říčku se dvěma z nich namočily brašny s náboji. Část nábojů už nebyla k potřebě. O zbylé náboje se tři přátelé rozdělili stejným dílem. Když se blížili k domovu, vzlétlo před nimi hejno ptáků. Každý lovec na ně čtyřikrát vystřelil. Doma spočítali zbylé náboje. Všichni dohromady měli teď tolik nábojů, kolik jich měl každý z nich, když se o zbylé náboje v tajze rozdělili. Máte vypočítat, kolik dobrých nábojů jim po přechodu říčky zůstalo."
(Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Počet dobrých nábojů označme „x". Tři přátelé se o náboje rozdělili stejným dílem, proto každý z nich dostal $\frac{x}{3}$ nábojů. Nyní sestavíme rovnici z údajů, které známe ze zadání. Od celkového počtu nábojů odečteme čtyři výstřely každého z přátel. Tento počet nábojů se rovná počtu nábojů, jednoho z nich, o které se rozdělili.

$$x - (3 \cdot 4) = \frac{x}{3}$$
$$(x - 12) \cdot 3 = x$$
$$3x - 36 = x$$
$$2x = 36$$
$$\underline{\underline{x = 18}}$$

Po přechodu říčky jim zůstalo 18 dobrých nábojů.

2.3 PŘÍKLAD 3

Zadání:

Matematikové v Čechách

„V aritmetice Görla z Görlštejna, napsané v roce 1577, je uvedena prastará úloha, vedoucí k lineární rovnici. Zní: Jeden jde z Prahy. Tázán, kolik hodin bilo na Pražském hradě, když vyšel. Odpovídá: Kdyby bylo bilo hodin ještě jednou tolik a polovinu tolik, a ještě sedm ran k tomu udeřilo, tehdy by bylo dvanáct hodin.“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Naším úkolem je zjistit, kolik hodin bilo na Pražském hradě. Postupujme dle zadání a sestavme rovnici s neznámou „x“. Vycházejme z věty: „*Kdyby bylo bilo hodin ještě jednou tolik…“*. Z této věty plyne přičtení neznámé „x“ k původní neznámé „x“, neboli $x + x = 2x$. Pokračujme dále ve větě: „…*a polovinu tolik…“*; přičteme tedy $\frac{x}{2}$. Nesmíme zapomenout na pokračování věty: „…*, a ještě sedm ran k tomu udeřilo…“;* přičteme 7. Sestavíme rovnici, která bude rovna 12, neboť konec věty zní: „…*tehdy by bylo dvanáct hodin.*“

$$2x + \frac{x}{2} + 7 = 12 \quad /\cdot 2$$
$$4x + x + 14 = 24 \quad /-14$$
$$5x = 10 \quad /:5$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Když cestující vyšel, odbily právě 2 hodiny na Pražském hradě.

2.4 PŘÍKLAD 4

Zadání:

Byli jsme v Krkonoších

„Celá naše třída jela autobusem na výlet do hor. Stoupali jsme sice statečně po kamenitých stezkách, ale byli jsme rádi, když jsme si nahoře v horské chatě mohli odpočinout, posvačit, napít se. Prodávali tam také „na upomínku“ ze šišek sestavené figurky Krakonoše po 13 korunách a dřevěné modely chaty po 23 korunách. Hoši si zakoupili několik takových ne

právě vkusných hraček na památku. Když jsme se vraceli domů, spočítali, že za ně utratili celkem 210 Kčs. Dovedete spočítat, kolik si přivezli Krakonošů a kolik modelů chaty?" (Věda a technika mládeži, 1961)

<u>Řešení</u>:

Žáci si na výletě pořídili figurky Krakonoše – označme „x" a modely chaty, které označíme „y". Víme, že cena jednoho Krakonoše byla 13 Kčs a cena modelu chaty 23 Kčs. Celkem utratili 210 Kčs. Sestavme rovnici a vypočtěme, kolik si žáci přivezli Krakonošů a kolik modelů chaty.

$$13x + 23y = 210$$
$$x = \frac{210 - 23y}{13}$$

Vyjádřili jsme si neznámou „x", nyní budeme dosazovat za neznámou „y" taková čísla, aby „x" vyšlo celé kladné číslo. Za „y" nemůžeme dosadit číslo větší než 9, neboť by „x" vyšlo záporně.

Dosazujme:

$y = 1$

$$x = \frac{210 - 23 \cdot 1}{13}$$
$$\underline{\underline{x \doteq 14{,}385}}$$

$y = 2$

$$x = \frac{210 - 23 \cdot 2}{13}$$
$$\underline{\underline{x \doteq 12{,}615}}$$

$y = 3$

$$x = \frac{210 - 23 \cdot 3}{13}$$
$$\underline{\underline{x \doteq 10{,}846}}$$

$y = 4$

$$x = \frac{210 - 23 \cdot 4}{13}$$
$$\underline{\underline{x \doteq 9{,}077}}$$

$y = 5$

$$x = \frac{210 - 23 \cdot 5}{13}$$

$$\underline{\underline{x \doteq 7{,}308}}$$

$y = 6$

$$x = \frac{210 - 23 \cdot 6}{13}$$

$$\underline{\underline{x \doteq 5{,}538}}$$

$y = 7$

$$x = \frac{210 - 23 \cdot 7}{13}$$

$$\underline{\underline{x \doteq 3{,}769}}$$

$y = 8$

$$x = \frac{210 - 23 \cdot 8}{13}$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Žáci si přinesli 2 figurky Krakonošů a 8 modelů chat.

2.5 PŘÍKLAD 5

Zadání:

Vánoční kapři

„Vánoční kapři byli dodáni do prodeje včas a ihned byl o ně velký zájem, takže jich prvého dne prodali polovinu zásilky a půl kapra. Druhého dne prodali polovinu zbytku zásilky a půl kapra, stejně i třetího a čtvrtého dne. Pátého dne prodali zbylé dva kapry. Kolik kaprů bylo v zásilce?“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Určíme, kolik kaprů prodali první, druhý, třetí, čtvrtý a pátý den. Součtem těchto hodnot získáme celkové množství kaprů v zásilce.

$$1.\,den \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$2.\,den \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$3.\,den \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)x}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$$

$$4.\,den \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)x}{2} + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}x + \frac{1}{16}$$

$$5.\,den \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

$$\underline{\boldsymbol{celkem} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x}$$

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}x + \frac{1}{16} + 2$$

$$16x = 8x + 8 + 4x + 4 + 2x + 2 + x + 1 + 32$$

$$16x = 15x + 47$$

$$\underline{\underline{x = 47}}$$

V zásilce bylo 47 kaprů.

3 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Pokud umíme řešit lineární rovnice, nebude pro nás problém vypočítat jejich soustavy. V rekreační matematice můžeme nalézt úlohy, které lze jednoduše vyřešit pomocí soustav rovnic. V této kapitole představím příklady publikované v odborně naučných časopisech, včetně jejich vzorového vyřešení. Soustava lineárních rovnic se skládá ze dvou či více rovnic, které mají dvě nebo více proměnných. K vyřešení soustavy rovnic používáme nejčastěji metodu sčítací a metodu dosazovací. Obě ze zmíněných metod jsou použity v následujících příkladech. Jinými postupy mohou být grafická metoda či Gaussova eliminační metoda.

3.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Jak se Jenda naučil počítat

,,Jenda přinášel ze školy stále špatné známky z matematiky a nechtěl se doma učit. Tatík byl z toho zoufalý. Nabídl tedy synkovi, že mu zaplatí 8 Kčs za každý příklad, který správně vypočítá, ale odpočte mu 5 Kčs za chybné řešení. Jenda na to přistoupil a tím bylo dosaženo cíle: hoch se začal o počty zajímat a snažil se úkoly správně vypočítat. Na konci měsíce dělali vyúčtování. Za tu dobu vypočetl Jenda 26 příkladů. Ale když provedl rozvahu, nedostal Jenda nic, také však nebyl otec nic dlužen. Kolik příkladů vypočetl správně?‘‘ (Věda a technika mládeži, 1958)

Řešení:

$$\begin{aligned}&počet\ správných\ řešení \ldots x \ldots 8\ Kčs\\&počet\ chybných\ řešení \ldots y \ldots -5\ Kčs\\&celkem\ vypočetl\ 26\ příkladů\end{aligned}$$

Na základě zadaných údajů sestavíme soustavy rovnic. V jedné rovnici zohledníme ceny za správně i chybně vypočtené příklady. Do druhé rovnice zapíšeme součet neznámých x a y, přitom víme, že celkem bylo 26 příkladů.

$$\begin{aligned}8x - 5y &= 0\\x + y &= 26\end{aligned}$$

Nyní tuto soustavu rovnic vypočteme pomocí dosazovací metody.

$$8x - 5y = 0$$
$$\underline{x + y = 26 \quad \rightarrow \quad x = 26 - y}$$
$$8 \cdot (26 - y) - 5y = 0$$
$$208 - 8y - 5y = 0$$
$$13y = 208$$
$$\underline{\underline{y = 16}}$$

Neznámá y značí počet chybně vypočtených příkladů. Dále dopočteme neznámou x, která značí počet správně vyřešených příkladů.

$$x = 26 - y$$
$$x = 26 - 16$$
$$\underline{\underline{x = 10}}$$

<u>Ověření</u>:

$$L1 = 8 \cdot 10 - 5 \cdot 16, P1 = 0$$
$$L2 = 10 + 16 = 26, P2 = 26$$
$$\underline{\underline{L1 = P1, L2 = P2}}$$

Jenda vypočetl správně 10 příkladů.

3.2 PŘÍKLAD 2

<u>Zadání</u>:

Jednoduchý úkol

„Dva bratři jsou dohromady staří jedenáct let. Jeden je o deset let starší než druhý. Kolik jim je let?“ (Věda a technika mládeži, 1958)

<u>Řešení</u>:

$$první\ bratr \dots x$$
$$druhý\ bratr \dots y$$

Úlohu vyřešíme pomocí soustavy lineárních rovnic. V první rovnici bude součet věků obou bratrů. Ve druhé rovnici zohledníme desetiletý rozdíl mezi věky.

$$x + y = 11$$
$$\underline{y + 10 = x}$$
$$x + y = 11$$
$$\underline{x - y = 10}$$
$$2x = 21$$
$$\underline{\underline{x = 10{,}5}}$$

$$y = 11 - x$$
$$y = 11 - 10{,}5$$
$$\underline{\underline{y = 0{,}5}}$$

Staršímu bratrovi je 10,5 roku a mladšímu 0,5 roku.

3.3 Příklad 3

Zadání:

Jak starý byl ředitel?

,,Profesor matematiky slavil své 48. narozeniny. Ředitel mu blahopřeje. Profesor se ptá ředitele: ,,Kolik pak je vám let?'' Ředitel odpovídá: ,,Mně je dvakrát tolik let, jako bylo vám, když mně bylo tolik, jako je dnes vám.'' Máte vypočítat, jak starý byl ředitel.'' (Věda a technika mládeži, 1958)

Řešení:

Víme, že nyní slaví profesor matematiky 48. narozeniny a panu řediteli je „$2x$“ let. V roce, kdy slavil pan ředitel 48. narozeniny, bylo panu profesorovi „x“ let. Dobu, která uplynula od 48. narozenin pana ředitele označíme „y“.

Pomocí soustavy lineárních rovnic vypočteme, kolik je nyní panu řediteli let.

$$1. rovnice \ldots věk\ pana\ profesora \ldots x + y = 48$$
$$2. rovnice \ldots věk\ pana\ ředitele \ldots 48 + y = 2x$$

$$\begin{aligned} x + y &= 48 \\ \underline{y + 48} &\underline{= 2x} \\ x + y &= 48 \\ \underline{2x - y} &\underline{= 48} \\ 3x &= 96 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 32}} \end{aligned}$$

Ze soustavy rovnic jsme vypočítali, kolik let bylo panu profesorovi v době 48. narozenin pana ředitele. Protože nyní je panu řediteli dvakrát více, než bylo panu profesorovi v době, kdy pan ředitel oslavil 48. narozeniny, vynásobíme věk pana ředitele dvěma.

$$2 \cdot x = 2 \cdot 32 = 64$$

Panu řediteli bylo 64 let.

3.4 PŘÍKLAD 4

Zadání:

Jenda pomáhal mamince

„Jenda pomáhal mamince v prodejně, když dostala velkou zásilku ovoce – jablka, hrušky, citróny a velké pomeranče. Když první nával opadl, kladl Jenda na váhy různé druhy ovoce a zjistil, že jablko a citrón váží stejně jako pomeranč, samotné jablko váží jako hruška a citrón dohromady. Dva pomeranče vážily jako tři hrušky. Kolika citrónům se rovnala váha jednoho jablka?“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Jednotlivé druhy ovoce označme podle jejich počátečních písmen: jablko – J, hruška – H, citrón – C, pomeranč – P. Nyní sestavíme rovnice podle toho, jaké váze se kusy ovoce rovnají. Dále se budeme snažit vyjádřit, pomocí množství citrónů, váhu jednoho jablka.

$$J + C = P$$

$$J = H + C \qquad /-C$$

$$\underline{2P = 3H} \qquad \ldots P = \frac{3}{2}H$$

$$J + C = \frac{3}{2}H \qquad /\cdot 2$$
$$J - C = H \qquad /\cdot (-3)$$

$$\left.\begin{aligned} 2J + 2C &= 3H \\ -3J + 3C &= -3H \end{aligned}\right\} \oplus$$

$$-J + 5C = 0$$
$$\underline{\underline{5C = J}}$$

Váha jednoho jablka se rovnala pěti citrónům.

3.5 PŘÍKLAD 5

Zadání:

Nejhlubším jezerem světa

„Nejhlubším jezerem světa je Bajkalské jezero v SSSR. Je tak hluboké, že druhé nejhlubší jezero – Tanganjika v Africe – by potřebovalo prohloubit ještě o hloubku Hořejšího jezera v Kanadě, aby se mu vyrovnalo. Kdyby bylo Hořejší jezero pětkrát tak hluboké, ještě by se mu do hloubky Bajkalského 211 m nedostávalo, ale hloubku jezera Tanganjika by převýšilo o 95 metrů. Jak hluboké je každé z těchto jezer?“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Hloubka Bajkalského jezera bude pro nás neznámá „x“, hloubka jezera Tanganjika neznámou „y“ a hloubka Hořejšího jezera neznámou „z“. Sestavíme rovnice o neznámých „x, y, z“ podle zadání a vypočteme.

$$x = y + z$$
$$5z = x - 211$$
$$5z = y + 95$$

$$5z = y + z - 211 \qquad /\cdot (-1)$$
$$5z = y + 95$$

$$\left.\begin{aligned} -4z &= -y + 211 \\ 5z &= y + 95 \end{aligned}\right\} \oplus$$

$$\underline{\underline{z = 306}}$$

$$x = 5z + 211$$
$$x = 5 \cdot 306 + 211$$
$$\underline{\underline{x = 1741}}$$

$$y = x - z$$
$$y = 1741 - 306$$
$$\underline{\underline{y = 1435}}$$

Hloubka Bajkalského jezera je 1741 metrů, jezera Tanganjika 1435 metrů a Hořejšího jezera 306 metrů.

3.6 PŘÍKLAD 6

Zadání:

Kolik bylo pionýrů

„V oddíle bylo 38 pionýrů různého věku 10, 11, 12, 13, 14 let. Jedenáctiletých bylo stejně jako třináctiletých, desetiletých stejný počet jako čtrnáctiletých, dvanáctiletých bylo o tři více než jedenáctiletých a jedenáctiletých bylo o pět víc než desetiletých. Je to poněkud zamotaná úloha, že?“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Označme si pionýry dle tabulky níže.

Tabulka 2: Označení pionýrů

Pionýři	Označení
desetiletí	x
jedenáctiletí	y
dvanáctiletí	z
třináctiletí	y
čtrnáctiletí	x
Celkem pionýrů	**38**

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 38 \\ z - 3 &= y \\ y - 5 &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= y - 5 \\ x &= 9 - 5 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 4}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z &= y + 3 \\ z &= 9 + 3 \\ \underline{\underline{z}} &\underline{\underline{= 12}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(y - 5) + 2y + z &= 38 \\ z - 3 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y - 10 + 2y + z &= 38 \quad &/{+10} \\ z - 3 &= y \quad &/{-y} + 3 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 4y + z &= 48 \\ z - y &= 3 \quad /\cdot(-1) \end{aligned}\right] \oplus$$

$$\begin{aligned} 5y &= 45 \quad /:5 \\ \underline{\underline{y = 9}} \end{aligned}$$

Desetiletých a čtrnáctiletých pionýrů bylo po 4, jedenáctiletých a třináctiletých pionýrů po 9 a dvanáctiletých pionýrů 12.

4 LOGICKÉ ÚLOHY ŘEŠENÉ POMOCÍ ÚVAHY

V této kapitole se nachází slovní úlohy, při jejichž řešení využíváme logické úvahy. Nalézáme různé možnosti postupů vedoucích k rozuzlení problému. Aplikujeme v nich dosavadní poznatky, zkušenosti, a to nejen z oblasti matematiky. Pokud bude více řešitelů pro tento typ úloh, nejsou vyloučeny různé postupy k dosažení správného výsledku.

4.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Podivné stáří

„Ptali je jednoho mladíka letos, jak je stár. Dal jim podivnou odpověď: „Předevčírem mi bylo 19 let, příštího roku mi bude 22 let“! Máte rozluštit, kdy se ten člověk narodil a kdy se ho vlastně ptali, že mohla být jeho odpověď zamotaná.“ (Věda a technika mládeži, 1958)

Řešení:

Mladíka se zeptali 1.1., kolik mu je let. V jeho odpovědi bylo: „Předevčírem mi bylo 19 let…“ To znamená, že předevčírem bylo 30.12. minulého roku. Poslední den v roce, tj. 31.12. měl 20. narozeniny. V roce, kdy se ho ptali na jeho věk oslaví 21. narozeniny. Příští rok mu bude 22 let, jak jsme se dozvěděli ze druhé části jeho odpovědi.

Mladík se narodil 30.12., na jeho věk se ptali 1.1.

4.2 PŘÍKLAD 2

Zadání:

„Když bylo mému otci 31 let, bylo mi osm. Dnes je otec dvakrát tak stár jako já. Kolik je mi nyní let?“ (Věda a technika mládeži, 1959)

Řešení:

V době, kdy bylo otci 31 let, synovi bylo 8 let. Věkový rozdíl mezi otcem a synem je $31 - 8 = 24\ let$.

Když bude synovi 24 let, jeho otec oslaví $2 \cdot 24 = 48$. narozeniny.

Synovi je nyní 24 let.

4.3 PŘÍKLAD 3

Zadání:

Kulečník

„Je mnoho druhů kulečníkových her. V jedné jihoamerické zemi se hraje s 15 koulemi, které se musí dostat do otvoru v rohu kulečníku. Ten hráč, kterému se podaří umístit v otvoru nejvíc koulí, vyhrává. Podle zvyku za hru platí ten, kdo prohraje. Jednoho dne začali hrát tuto hru 3 přátelé: K, L a M. Výborný hráč K prohlásil, že vyhraje jen tehdy, bude-li mít víc správných zásahů, než L a M dohromady. Než začali, přišel čtvrtý přítel N a přistoupil do hry; na něho se však ujednání nevztahovalo. Když skončili, měl N 4 správné zásahy, M 2, L 4 a K 5. Nastalo velké dohadování, kdo prohrál a bude tedy hru platit. Hráč K tvrdil, že sice nevyhrál podle původní podmínky, ale ani neprohrál, protože porazil všechny spoluhráče, tedy i N, i když ten s nimi neměl žádné ujednání. Hráč N porazil M a proto i on odmítl za hru platit. Zbývající L a M měli s K ujednání, a proto ani oni neprohráli. Neprohrál tedy nikdo. Ale ta hra se musela zaplatit a horkokrevní hráči odmítli vyrovnat poplatek stejným dílem. Došlo k hádce, po níž se celá pře dostala k soudu. Dovedli byste je rozsoudit tak, jak to udělal moudrý soudce?“ (Věda a technika mládeži, 1960)

Řešení:

Po skončení hry měli hráči K, L, M, N; 5, 4, 2, 4 správných zásahů v tomto pořadí. Nejvíce správných zásahů měl hráč „K“. Tento hráč by vyhrál, jestliže dosáhne více správných zásahů než „L“ a „M“ dohromady. Sečteme tedy zásahy hráčů „L“, „M“ a porovnáme je s hráčem „K“.

$$4 + 2 > 5$$
$$6 > 5$$

Hráč „K“ tudíž nevyhrál, ale měl více zásahů než všichni ostatní hráči. Hráč „N“, který se přidal na začátku hry, vyhrál nad hráčem „M“. S hráčem „L“ měl stejný počet zásahů a hráč „K“ nad ním vyhrál. Vzhledem k tomu, že hráči „K“, „L“, „N“ vyhráli nad hráčem „M“, který měl nejmenší počet zásahů, platil hru hráč „M“.

Hru platil hráč „M“.

4.4 PŘÍKLAD 4

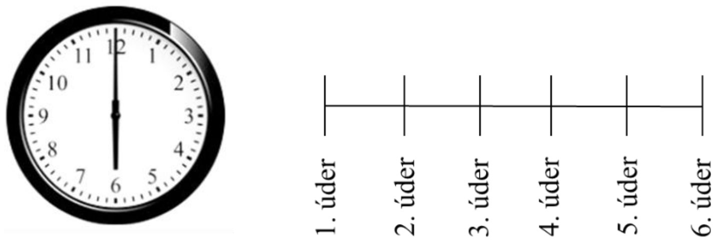
Zadání:

Nejlehčí na konec

„V šest hodin jsme poslouchali bití věžních hodin z blízké radnice. Od prvního do šestého úderu uběhlo právě 30 vteřin. Jak dlouho budou bít na poledne?“ (Věda a technika mládeži, 1960)

Řešení:

V 6:00 bijí hodiny 6x. Mezi prvním a posledním úderem uběhlo 30 sekund.



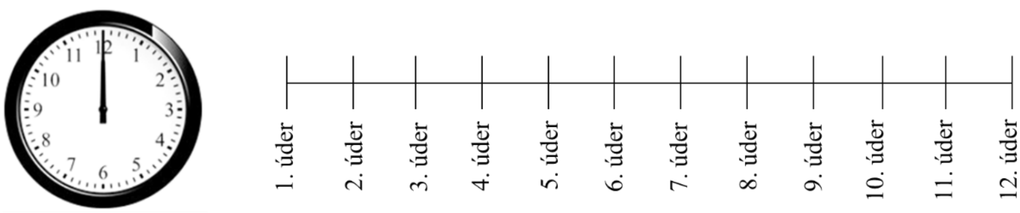
Obrázek 1: Počet úderů v 6:00

Mezi jednotlivými údery (1.-6.) je pět úseků.

$$\frac{30}{5} = 6$$

Jeden úder trvá 6 s.

Jestliže v 6:00 hodiny odbily 6x, ve 12:00 hodiny odbijí 12x.



Obrázek 2: Počet úderů ve 12:00

Mezi prvním a dvanáctým úderem je 11 úseků. Proto celkový čas mezi těmito údery vypočteme.

$$11 \cdot 6 = 66$$

V poledne budou bít hodiny 66 sekund.

4.5 PŘÍKLAD 5

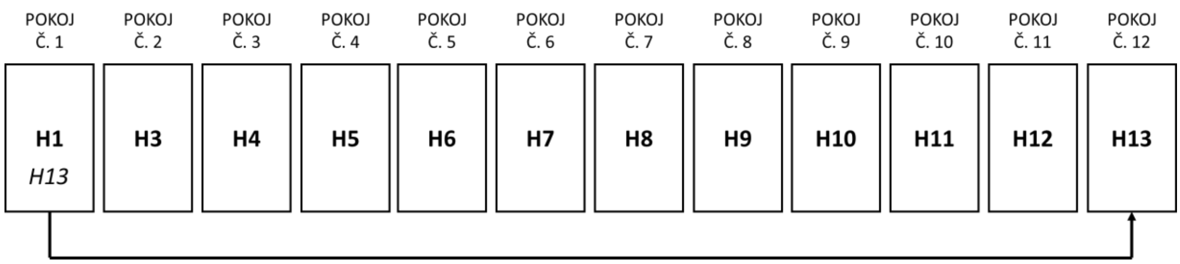
Zadání:

Když je nouze o nocleh

„Jde o prastarý návod, škoda, že se na něj zapomnělo. Při spartakiádách návalech byl by vykonal dobré služby… Do hotelu, který měl jen dvanáct pokojů, přišlo třináct cizinců a každý chtěl mít pokoj pro sebe. Vrátný je zapsal do knihy návštěvníků, a pak jim osobně přiděloval pokoje. Třináctého požádal, aby na chviličku počkal s prvním hostem v pokoji č. 1. Byli tedy v prvním pokoji dva lidé. Třetího dal do pokoje číslo 2, čtvrtého do čísla 3, pátého do čísla 4 a tak dále jedenáctého do čísla 10, dvanáctého do čísla 11. A teď se vrátil do jedničky, vyvolal třináctého hosta a převedl ho do prázdného pokoje číslo 12.“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

V hotelu bylo celkem 12 pokojů, hostů však bylo 13. K tomu, aby se mohl každý z hostů ubytovat ve vlastním pokoji, by potřebovali v hotelu ještě jeden volný pokoj. Nejdříve se podíváme, jakým způsobem rozděloval vrátný hosty do pokojů. První pokoj přiřadil prvnímu a třináctému hostu. Do prvního pokoje tedy prozatím ubytoval dva hosty. Dále ubytoval třetího hosta do pokoje č. 2, čtvrtého do pokoje č. 3. Analogicky postupoval při dalším přidělování pokojů. Po přiřazení pokoje dvanáctému hostu, přesunul třináctého hosta z pokoje č. 1 do volného pokoje č. 12. Nyní byly všechny pokoje obsazeny jedním hostem. Označme si jednotlivé hosty popořadě H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}, H_{11}, H_{12}, H_{13}. Níže můžeme vidět přiřazení všech pokojů jednotlivým hostům.



Obrázek 3: Rozdělení hostů

Při takovémto umístění hostů, můžeme vidět, že druhý host není ubytován. Vrátný nejspíše zapomněl na druhého hosta, kterému pokoj nepřiřadil. Ubytoval dvanáct hostů do dvanácti pokojů. Každý z pokojů byl tudíž obsazen jedním hostem.

Druhý host zůstal bez ubytování.

4.6 Příklad 6

Zadání:

Tři džbánky

„Máte tři džbánky zcela nepravidelného tvaru. První džbán má objem 8 litrů a je v něm 5 litrů vody. Druhý pojme 5 litrů a jsou v něm 3 litry vody, třetí má objem 3 litry a jsou v něm jen 2 litry vody. Máte pouze dvojím přelitím naměřit v některém džbánu jeden litr vody.“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Do prvního džbánu můžeme nalít 8 litrů, do druhého džbánu 5 litrů a do třetího džbánu 3 litry. Žádný ze džbánů není naplněn až po okraj vodou. V prvním je nalito 5 litrů vody, ve druhém 3 litry a ve třetím 2 litry vody.

Podívejme se na naplněné džbány a jejich celkový objem.

Obrázek 4: Tři džbány – graficky zobrazené zadání

Máme vodu ze džbánů dvakrát přelít tak, abychom v jednom ze džbánů naměřili 1 litr vody. Jak to uděláme? V prvním kroku přelijeme vodu z prvního džbánu do třetího. V něm je však místo pouze pro 1 litr vody. Po tomto přelití zůstanou v prvním džbánu 4 litry vody, ve druhém džbánu stále 3 litry vody a ve třetím džbánu 3 litry vody. Níže vidíme naplněné džbány po prvním přelití.

Obrázek 5: Tři džbány – po prvním přelití

Ve druhém kroku přelijeme vodu ze třetího džbánu do druhého. Ve druhém džbánu je místo pouze pro 2 litry. Po přelití zůstanou v prvním džbánu 4 litry, druhý džbán bude zcela plný, s objemem 5 litrů a ve třetím džbánu bude 1 litr vody.

Obrázek níže ilustruje džbány po druhém přelití.

Obrázek 6: Tři džbány – po druhém přelití

4.7 PŘÍKLAD 7

Zadání:

Hádanka pohádková

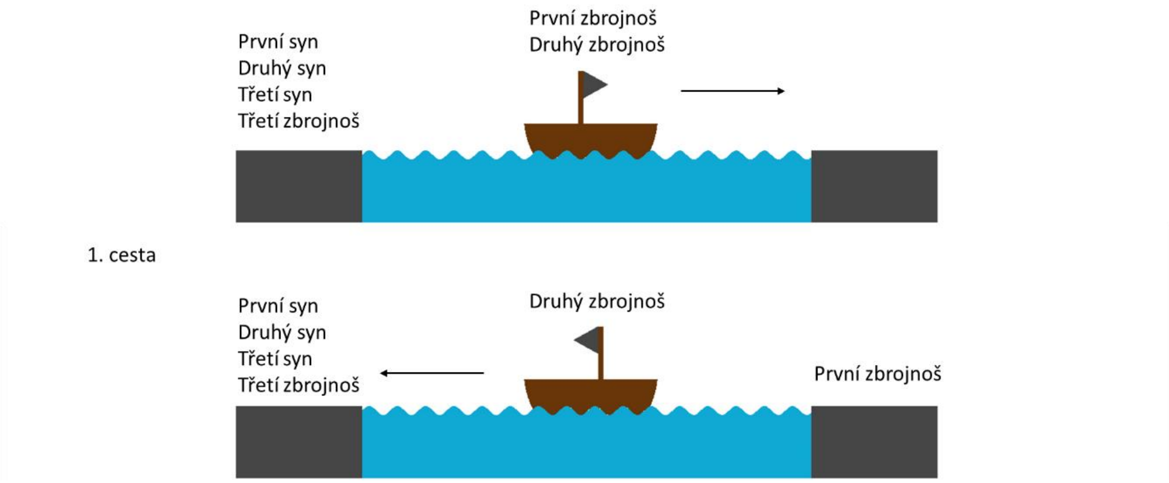
„Vyskytuje se v mnoha zemích i obměnách. Je známa i v Bulharsku jako stará, tradiční lidová pohádka. V jednom městě žil jednou jeden král a ten měl tři syny. Než jim předal žezlo své vlády, vyslal je do světa na zkušenou. Každému dal hromadu zlaťáků a jednoho zbrojnoše. Na cestu jim dal dobrou radu: „Pozor na zbrojnoše, aby vás nepřipravili o peníze. Nikdy nedopusťte, aby jich bylo pohromadě víc než vás!“ Jednou však přišli na své cestě k řece, kde nebyl žádný most, jen lodička, do níž se vešli nanejvýš dva lidé. Jak se dostali všichni na druhý břeh, když se chtěli zachovat podle otcovy rady?“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Každý ze tří synů dostal od svého otce zlaťáky a jednoho zbrojnoše.

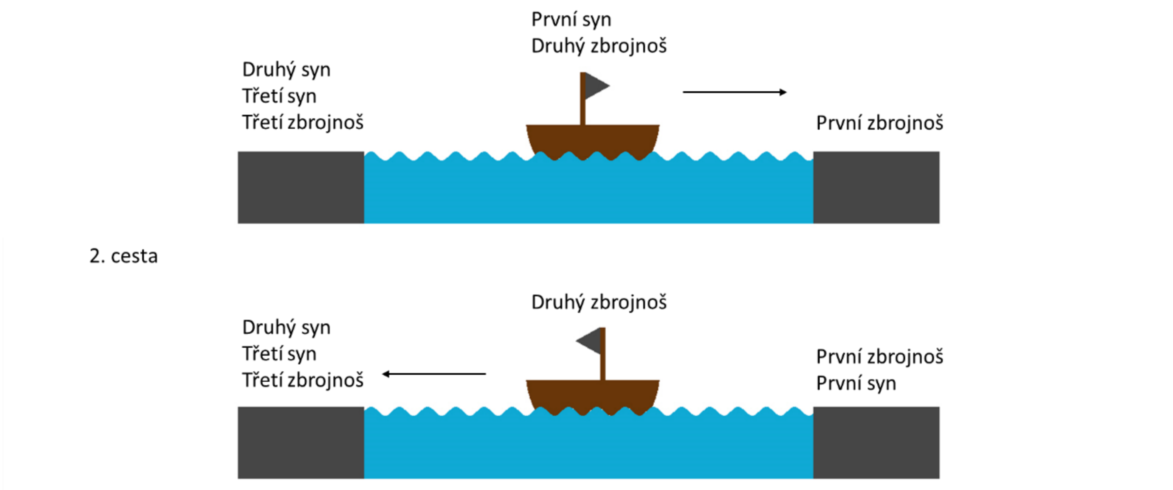
Na začátku byli na břehu 3 synové (první, druhý, třetí), 3 zbrojnoši (první, druhý, třetí) a také zlaťáky každého ze synů. Synové museli dát pozor na zlaťáky, aby jim je zbrojnoši neukradli, pokud jich bude více pohromadě nežli synů. Jakým způsobem se přepravili všichni na druhý břeh, když bylo v lodičce místo jen pro dva?

Jako první vyjeli dva zbrojnoši (první a druhý). Na břehu zůstane třetí zbrojnoš a tři synové se zlaťáky. První zbrojnoš bude na druhém břehu vysazen, zpět se vrátí druhý zbrojnoš pro ostatní.



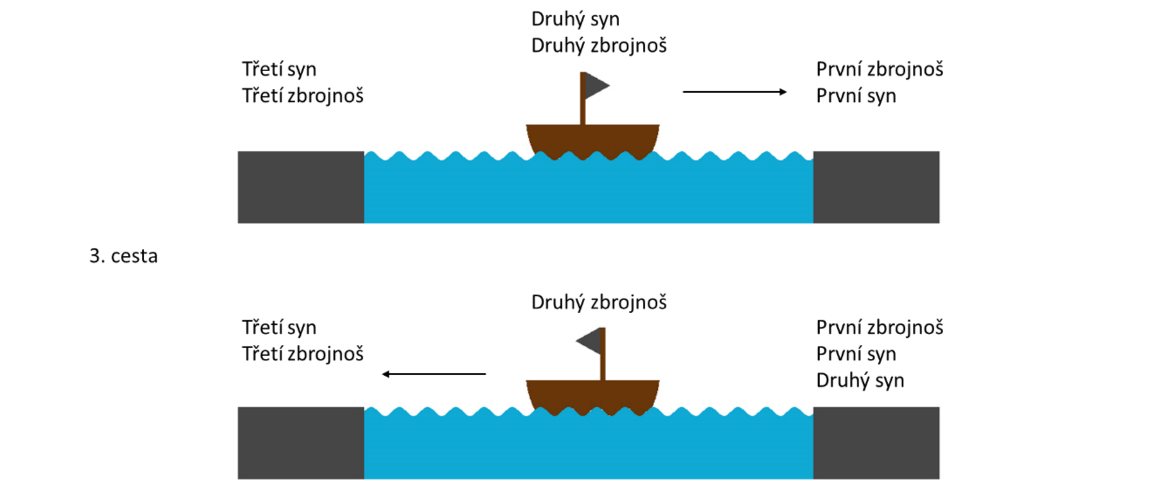
Obrázek 7: Hádanka pohádková – první cesta

Dále poveze druhý zbrojnoš prvního syna se zlaťáky. Poté, co ho dopraví na druhý břeh, vrací se druhý zbrojnoš zpět.



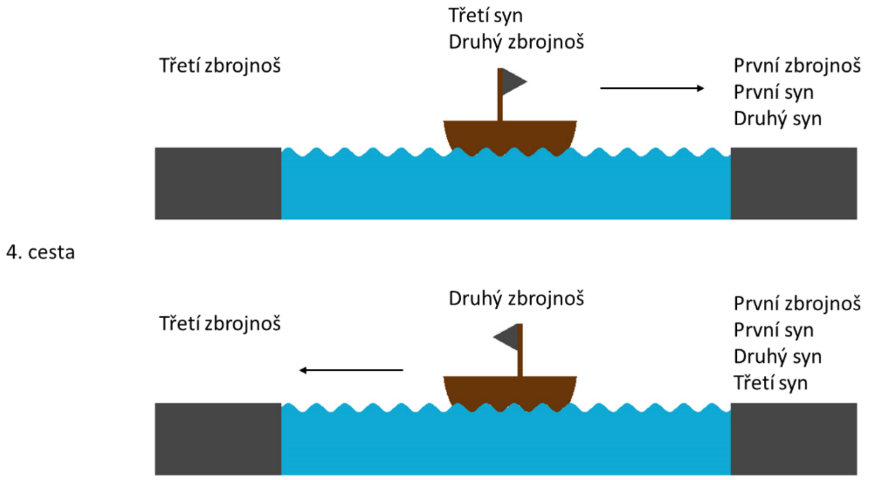
Obrázek 8: Hádanka pohádková – druhá cesta

Nyní bude druhý zbrojnoš převážet druhého syna se zlaťáky. Na druhém břehu druhý syn vystoupí a druhý zbrojnoš popluje zpět.



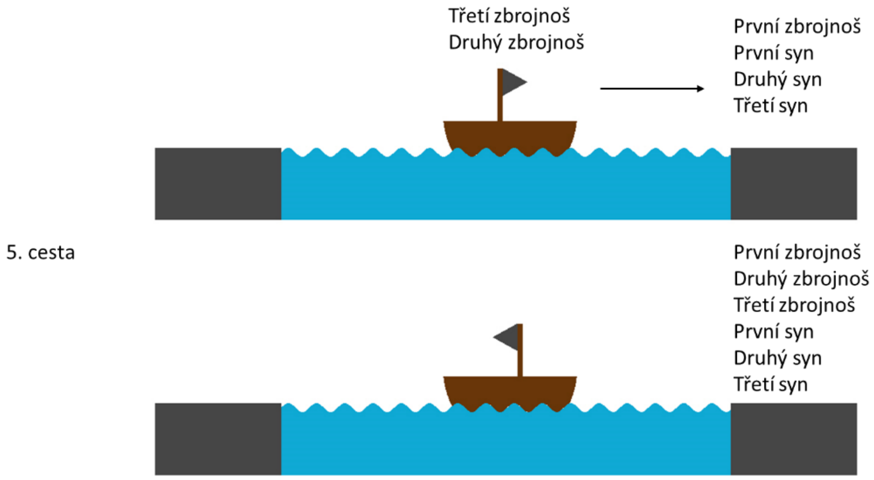
Obrázek 9: Hádanka pohádková – třetí cesta

Na předposlední cestě převeze druhý zbrojnoš třetího syna se zlaťáky a vrátí se zpět pro třetího zbrojnoše.



Obrázek 10: Hádanka pohádková – čtvrtá cesta

Jako poslední převeze druhý zbrojnoš třetího zbrojnoše.



Obrázek 11: Hádanka pohádková – pátá cesta

Ukázali jsme si možnost, jak převézt tři syny se svými zbrojnoši a zlaťáky tak, aby nezůstalo více zbrojnošů než synů se zlaťáky na jednom místě. Zbrojnoši se mohou v převážení střídat.

5 GEOMETRIE

S geometrií se setkávají žáci již na prvním stupni, kdy poznávají základní rovinné a prostorové útvary, seznamují se s pojmy, které nezbytně patří do geometrie – bod, úsečka, přímka, polopřímka, využívají rýsovacích pomůcek a mnohé další. Na druhém stupni jsou jejich poznatky značně rozšířeny o další geometrické útvary, u nichž určují vlastnosti a charakteristiku, řešení konstrukčních úloh, výpočty obvodů, obsahů, objemů rovinných i prostorových útvarů, sestrojení sítí těles, užití shodných zobrazení atd. Následně je pak mohou uplatnit při běžných životních situacích a řešení aplikačních geometrických úloh.

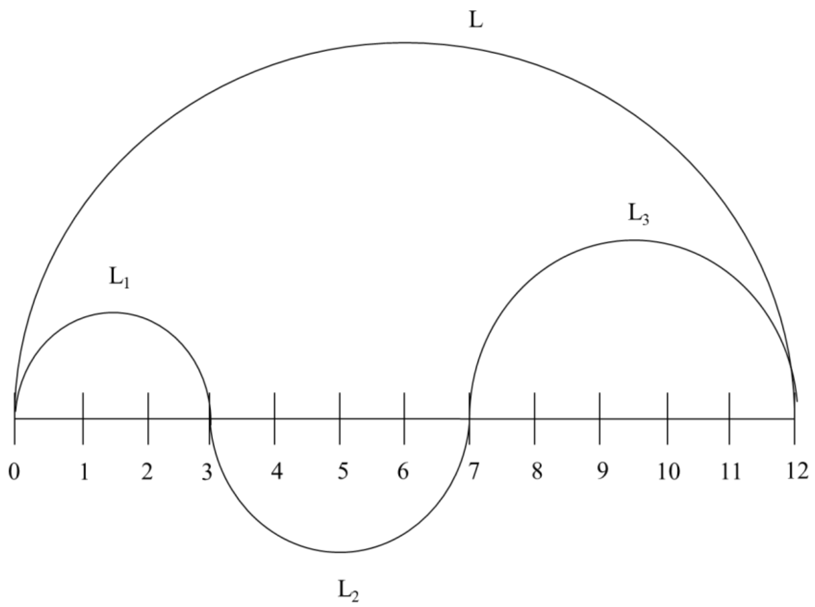
5.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Oč je delší

,,Na obrázku vidíte velkou půlkružnici, na jejímž poloměru je narýsována vlnovka složená ze tří polokroužků, jejichž poloměry se mají k sobě v poměru stran Pythagorejského trojúhelníka 3: 4: 5. Vypočítejte kolikrát je vlnovka delší než veliký oblouk.'' (Věda a technika mládeži, 1958)

Řešení:



Obrázek 12: Grafické zobrazení zadání

Délku oblouku největší půlkružnice označíme L, délky menších půlkružnic označíme od nejmenší po největší L_1, L_2, L_3. Poloměry jednotlivých oblouků označíme r_1, r_2, r_3, r a určíme je ze zadaných poměrů. Poloměry jsou $r_1 = 1{,}5j;$ $r_2 = 2j;$ $r_3 = 2{,}5j;$ $r = 6j$. Nyní můžeme vypočítat délky jednotlivých oblouků.

$$L_1 = \pi \cdot r_1 = \pi \cdot 1{,}5$$

$$L_2 = \pi \cdot r_2 = \pi \cdot 2$$

$$L_3 = \pi \cdot r_3 = \pi \cdot 2{,}5$$

$$L = \pi \cdot r = \pi \cdot 6$$

Porovnáme-li délku vlnovky a velkého půloblouku zjistíme, že jsou tyto délky shodné.

$$\boldsymbol{L_1 + L_2 + L_3 = 1{,}5\pi + 2\pi + 2{,}5\pi = 6\pi = L}$$

Délky velkého půloblouku a vlnovky jsou shodné.

5.2 PŘÍKLAD 2

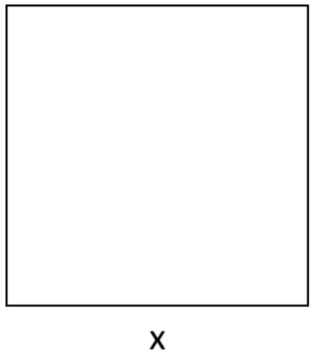
Zadání:

Pozemek

„Pan Novák staví chatu. Již dříve si koupil pozemek, který má tvar přesného čtverce. Za 1 m^2 zaplatil 2 Kčs. Pozemek se mu však zdál malý. Přikoupil proto další kus. Parcela i tentokrát měla tvar čtverce, ale jeho strana byla o 10 metrů delší než původní. Pan Novák zaplatil zase za 1 m^2 2 Kčs. Přikoupený pozemek ho stál 1000 Kčs. Jak velký má nyní pozemek pro chatu a kolik za něj zaplatil?“ (Věda a technika mládeži, 1960)

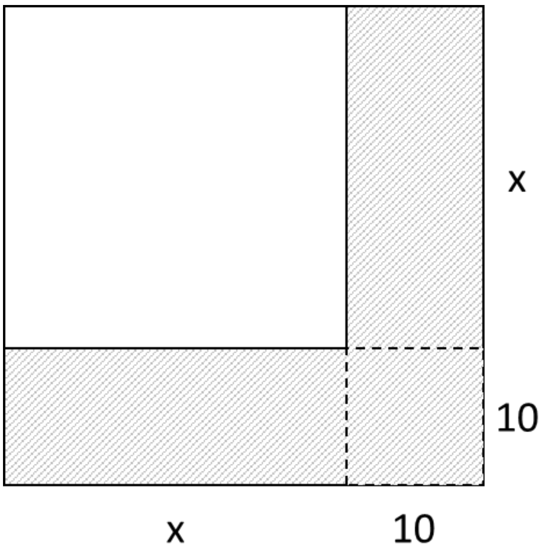
Řešení:

Původní tvar pozemku byl čtvercový s rozměrem strany x.



Obrázek 13: Původní tvar pozemku

Po přikoupení další části se tento pozemek zvětšil opět na tvar čtverce, přičemž strana měřila o 10 metrů více.



Obrázek 14: Nový tvar pozemku

Obrázek 14 zobrazuje starý pozemek po přikoupení nové části, která je vyšrafována. Tato část se skládá ze dvou obdélníků s rozměry „x; 10“ a čtverce s délkou strany 10 metrů. Za přikoupenou část zaplatil pan Novák 1000 Kčs, zároveň 1 m^2 stál 2 Kčs.

Nyní vypočteme rozlohu přikoupené části.

$$\frac{1000}{2} = 500\ m^2$$

Rozloha činí 500 m². Dále vypočteme rozměry strany čtverce. Protože se vyšrafovaná část skládá ze dvou stejných obdélníků a čtverce, platí:

$$2 \cdot a \cdot b + a \cdot a = 500$$

Součet obsahů dvou obdélníků s rozměry „x; 10“ a čtverce s délkou strany 10, se rovná celkové rozloze vyznačené části. Dosadíme tyto rozměry do výše uvedené rovnice a vypočteme neznámou „x“.

$$\begin{aligned} 2 \cdot x \cdot 10 + 10 \cdot 10 &= 500 \\ 20 \cdot x + 100 &= 500 \\ 20 \cdot x &= 400 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 20}} \end{aligned}$$

Rozměr původního pozemku byl 20 x 20 metrů, s celkovou rozlohou 400 m². Spolu s přikoupenou částí se rozloha pozemku zvětšila na 900 m². Pan Novák zaplatil za 1 m² 2 Kčs.

$$900 \cdot 2 = 1800\ Kčs$$

Pan Novák má pozemek pro chatu s rozměry 30 x 30 metrů, celková rozloha činí 900 m². Za tento pozemek celkem zaplatil 1800 Kčs.

5.3 PŘÍKLAD 3

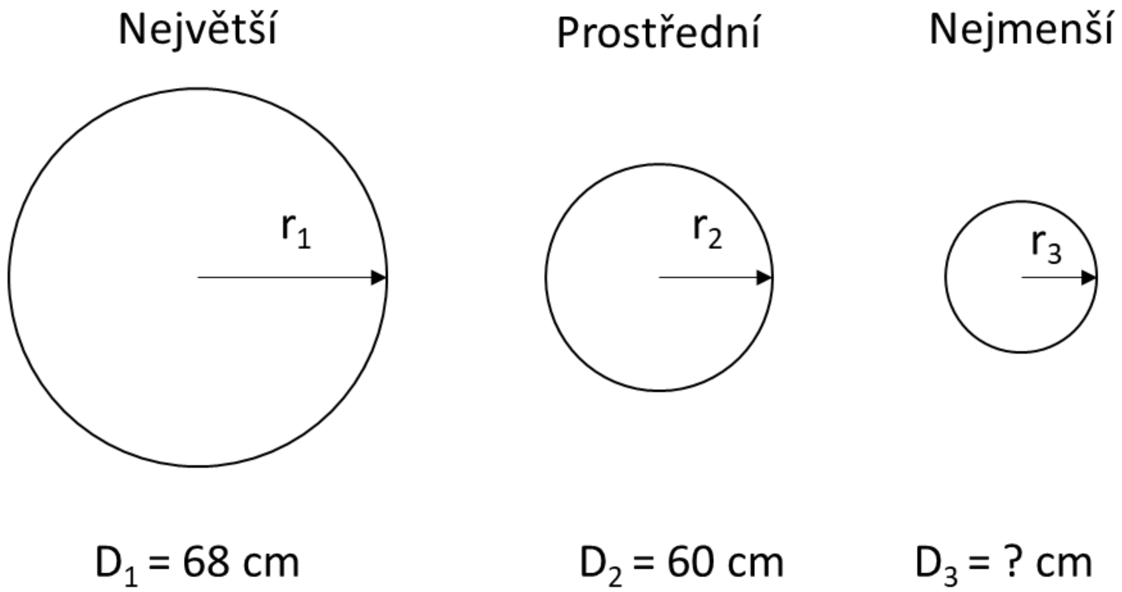
<u>Zadání</u>:

Když jsme u nás zařizovali

„Když jsme u nás zařizovali pionýrskou klubovnu, šli jsme vybírat kulaté stoly. Měli na skladě tři druhy. Prohlédli jsme je, změřili a chystali jsme se podat o nich zprávu v nejbližší schůzi. Stala se však nemilá věc. Nezapsal jsem průměry stolních desek v předpokladu, že si je budu pamatovat, ale vzpomněl jsem si jen, že plocha největší desky je právě tak veliká, jako součet ploch obou menších stolků. Průměr nejmenšího stolku jsme hravě vypočítali. Dovedete to také?“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Známe průměr kruhové desky největšího a prostředního stolu, potřebujeme vypočítat průměr nejmenšího stolu.



Obrázek 15: Zadání příkladu

$$S_1 = S_2 + S_3$$

$$S_3 = S_1 - S_2$$

$$\pi \cdot \frac{D_3^2}{4} = \pi \cdot \frac{D_1^2}{4} - \pi \cdot \frac{D_2^2}{4} \qquad / \cdot \frac{4}{\pi}$$

$$D_3 = \sqrt{D_1^2 - D_2^2}$$

$$D_3 = \sqrt{68^2 - 60^2}$$

$$\underline{\underline{D_3 = 32\ cm}}$$

Průměr nejmenšího stolku je 32 cm.

6 SPOLEČNÝ NÁSOBEK

Při určování nejmenšího společného násobku dvou a více čísel, hledáme takové kladné celé číslo, které je dělitelné všemi zadanými čísly, a to beze zbytku. Zároveň je hledané číslo nejmenším násobkem. Pro nalezení nejmenšího společného násobku provedeme rozklad každého čísla na součin prvočísel. Výsledkem je součin těch prvočísel, která se nachází v nejvyšší mocnině, alespoň v jednom rozkladu. Další možností je výpis jednotlivých násobků všech čísel a hledat mezi nimi shodný nejmenší násobek.

6.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Parníky

„V jednom přístavu kotví šest parníků. Jeden z parníků opouští svůj přístav každý den ráno a večer se zase vrací. Druhý parník je na cestě vždy jeden den a druhý den odpočívá v přístavu. Třetí loď vyplouvá každý třetí den, čtvrtý parník každý čtvrtý den, pátý parník pátý den a šestý parník každý šestý den. A přece se někdy stane, že přístav je prázdný. Kolikrát do roka opustí svůj mateřský přístav všech šest lodí zároveň?“ (Věda a technika mládeži, 1960)

Řešení:

Dobu, za kterou opustí přístav šest lodí, určíme pomocí společného násobku.

$$n(1,2,3,4,5,6) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 60$$
$$4 = 2 \cdot 2$$
$$6 = 2 \cdot 3$$

Jednou za 60 dní bude přístav prázdný. Rok má 365 (366) dní a všechny lodě opustí přístav každých 60 dní. Kolikrát do roka opustí přístav?

$$\frac{365}{60} = 6{,}08\overline{3}$$
$$\frac{366}{60} = 6{,}1$$

Všech šest lodí opustí svůj mateřský přístav šestkrát do roka, i když bude přestupný rok.

7 VÝROKOVÁ LOGIKA

S výrokovou logikou se setkáváme v matematice spíše na střední škole, při negování výroků, užití logických spojek. V úlohách, týkajících se výrokové logiky hledáme mezi výroky spojitosti a určujeme jejich pravdivost. Objasňujeme vztahy v matematických větách, využíváme logického i matematického myšlení při tvorbě úsudků.

7.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Stará úloha

„Byla jedna zahrada, kam byl vstup pod trestem smrti zakázán. Jeden nešťastník tam přece vlezl, ale chytili ho a řekli mu: „Promluvíš-li pravdu, budeš utopen. Promluvíš-li nepravdu, budeš oběšen!“ Co řekl odsouzený, aby se zachránil?“ (Věda a technika mládeži, 1959)

Řešení:

$$pravdivý\ výrok \rightarrow bude\ utopen$$
$$nepravdivý\ výrok \rightarrow bude\ oběšen$$

Pokud řekne pravdivý výrok „Budu utopen“, znamená to, že člověk bude utopen, neboť říká pravdu. Jestliže by byl výrok nepravdivý, byl by oběšen. Ve svém výroku toto nepopřel. Opět se tedy nezachrání.

Jestliže řekne výrok „Budu oběšen“, který bude pravdivý, tak se zachrání. Při pravdivém výroku by měl být utopen, což se vylučuje s tím, co řekl.

Pokud by byl výrok „Budu oběšen“ nepravdivý, měl by být oběšen. Zde nastává spor s výrokem, který řekl.

Odsouzený řekl výrok „Budu oběšen“, aby se zachránil.

7.2 PŘÍKLAD 2

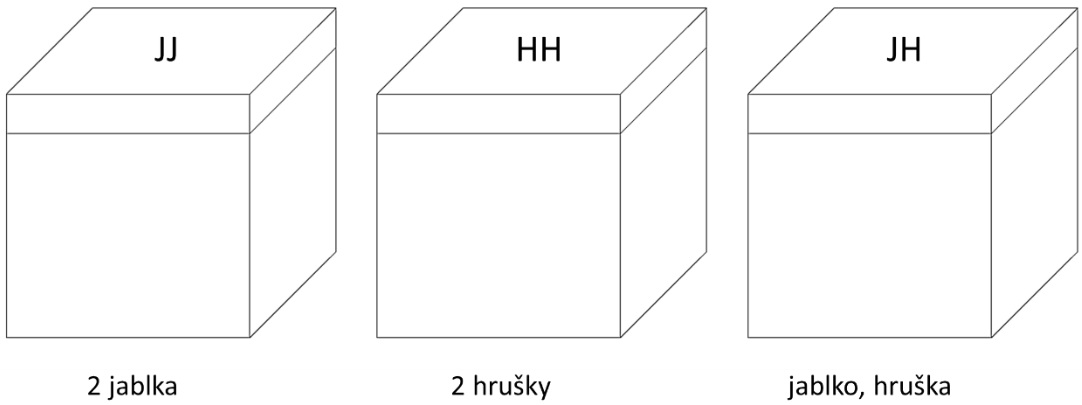
Zadání:

Tři krabice

„V jedné krabici, označené (JJ), byla dvě krásná jablka. Ve druhé, s nápisem (HH) na víku, byly dvě hrušky. Konečně ve třetí s nápisem (JH) na víku, byla hruška a jablko. Někdo však přeházel víka krabic, takže ani jediná neměla správné označení. Smíte sejmout víko z libovolné krabice, nedívat se dovnitř a vyjmout pouze jediný plod, který vám přijde do ruky. Nesmíte však nahlédnout do krabice, co tam zbylo. Jak poznáte nejkratší cestou, co je v které krabici?“ (Věda a technika mládeži, 1959)

Řešení:

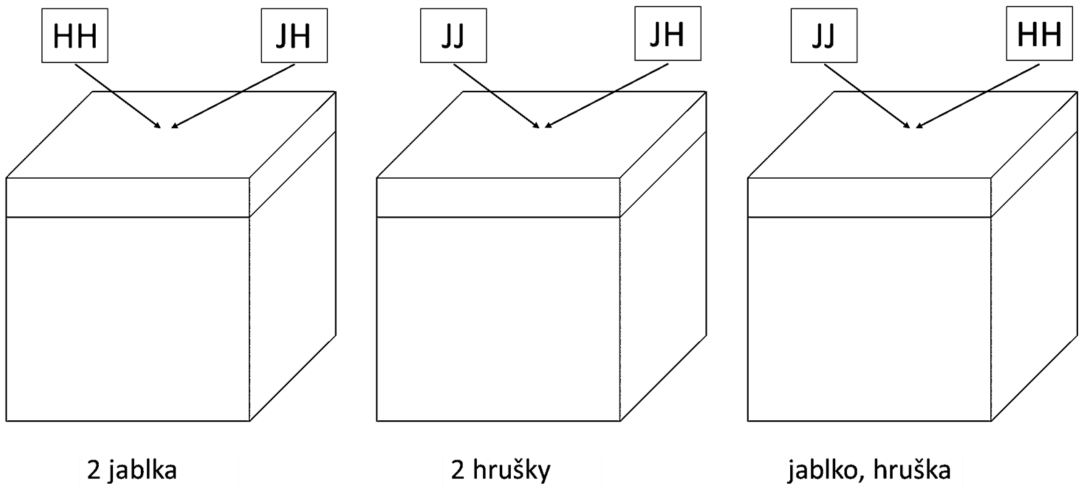
Níže vidíme krabice před jejich přeházením.



Obrázek 16: Původní stav před přeházením vík krabic

Jaké označení mohla mít krabice po přeházení vík?

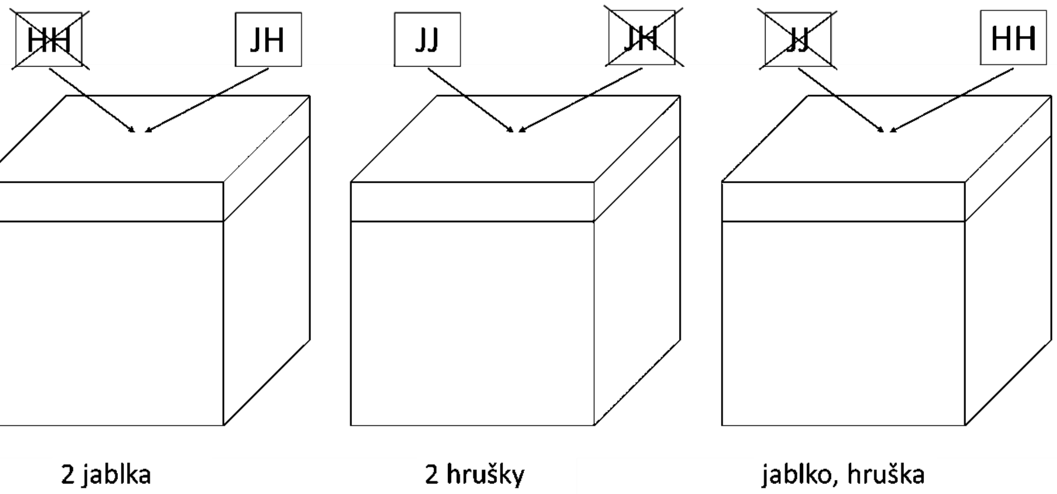
První krabice měla na víku nápis HH nebo JH. Druhá krabice mohla mít víko s nápisem JJ nebo JH. Třetí krabice mohla mít víko s nápisem JJ nebo HH. Přitom obsah krabic zůstal nezměněn. Například první krabice mohla mít víko, na kterém je HH, ale stále by v ní byla 2 jablka.



Obrázek 17: Možnosti proházení vík

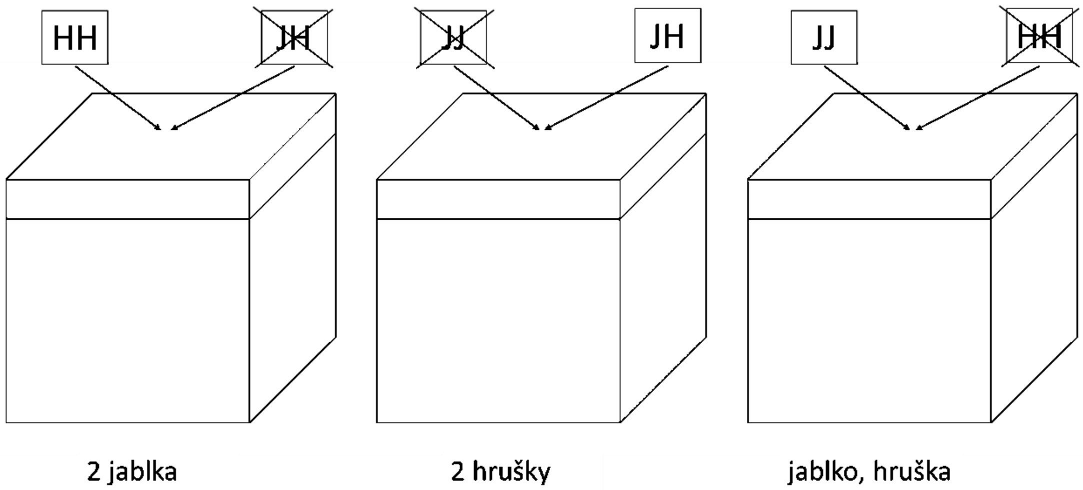
Při sundání víka z krabice, která má nyní označení JH, vytáhneme jablko, nebo hrušku. Chybné označení JH na víku má buď krabice se dvěma jablky, nebo se dvěma hruškami. Pokud tedy vytáhneme z krabice jablko, víme, že v krabici budou dvě jablka. Jestliže vytáhneme z krabice hrušku, budou v dané krabici dvě hrušky.

Předpokládejme, že v krabici s víkem JH jsme vytáhli jablko. Můžeme říci, že v krabici budou dvě jablka. Krabice s označením HH obsahuje jablko a hrušku, neboť její nápis je chybný. Nemůžeme v ní nalézt dvě hrušky. Zbyde nám poslední krabice s nápisem na víku JJ. V této krabici najdeme dvě hrušky. Obrázek 18 zobrazuje, která víka mají krabice.



Obrázek 18: První možnost rozdělení vík

Pokud otevřeme jako první krabici s víkem JH a vytáhneme hrušku, můžeme s jistotou říci, že v krabici budou 2 hrušky. Dále otevřeme krabici s víkem JJ. Jelikož je nápis na víku chybný, tak v této krabici nenajdeme dvě jablka. Zbývá nám jediná možnost – v krabici bude jablko a hruška. Jako poslední otevřeme krabici s nápisem na víku HH, ve které najdeme 2 jablka.



Obrázek 19: Druhá možnost rozdělení vík

8 POČÍTÁNÍ SE ZLOMKY

Se zlomky se potýkáme v každodenních situacích, např.: když jdeme koupit půlku chleba, nalijeme do konve 1,5 litru vody nebo natrháme do košíku $\frac{3}{4}$ jablek... Můžeme s nimi provádět matematické operace, porovnávat, převádět na desetinná čísla, zobrazit na číselné ose a v neposlední řadě je užívat k řešení praktických situací.

8.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Kolik stojí kniha?

„Jdete do knihkupectví a koupíte si knihu. Zaplatili jste za ni 10 Kčs a ještě polovinu ceny knihy. Kolik stála kniha?“ (Věda a technika mládeži, 1959)

Řešení:

Za knihu jsme zaplatili 10 Kčs a ještě polovinu ceny. 10 Kčs tedy odpovídá polovině z celkové ceny knihy. Jeden celek se skládá ze dvou polovin.

$$\frac{1}{2} ceny \ldots 10\ Kčs$$

$$Celková\ cena \ldots 2 \cdot 10 = 20\ Kčs$$

Kniha stála 20 Kč.

8.2 PŘÍKLAD 2

Zadání:

Podivín

„Jeden náš známý je podivín. Každé ráno pije kávu. Ne však tak, jak ji pijí všichni ostatní. Nejprve si totiž nalije plný hrneček černé kávy; vedle v konvičce má mléko. Když vypije jednu třetinu černé kávy, přilije právě tolik mléka, kolik kávy vypil. Z této směsi vypije jednu šestinu a opět si dolije mléko. Potom vypije polovinu hrnku, dolije mlékem a vše vypije. Čeho náš známý vypije víc: mléka, nebo černé kávy?“ (Věda a technika mládeži, 1959)

Řešení:

Na začátku si nalil celý hrnek černé kávy. Poté postupně přiléval mléko $\frac{1}{3}, \frac{1}{6} a\ \frac{1}{2}$, vždy podle toho, kolik kávy nebo kávy s mlékem vypil. Nyní sečteme množství přilitého mléka.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2 + 1 + 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Zjistili jsme, že celkové množství přilitého mléka se rovná původnímu množství černé kávy.

Známý vypil stejné množství mléka a černé kávy.

8.3 PŘÍKLAD 3

Zadání:

Na poušti

„Kdesi na poušti potkali dva Arabové zemdlého, hladového poutníka. Protože oba měli dobré srdce, rozdělili se s poutníkem o své zásoby jídla. První Arab měl 5 kukuřičných placek, druhý 3 placky. Pojedli všichni stejným dílem, nikdo neměl ani o sousto víc než druhý. Nasycený poutník z vděčnosti daroval oběma mužům 8 penízků, aby si je mezi sebou spravedlivě rozdělili. „Penízky patří mně, protože jsem měl pět placek!“ řekl první Arab. „Ne, já musím dostat tři penízky, protože jsem měl tři placky,“ tvrdil druhý. Za neustálé hádky jim uběhl zbytek cesty. Protože se sami rozsoudit neuměli, dostala se jejich pře až k soudci. Soudce pozorně vyslechl obě strany, a pak vynesl správný rozsudek. Jak zněl?“ (Věda a technika mládeži, 1960)

Řešení:

Celkem měli 8 kukuřičných placek, které rozdělili stejným dílem mezi dva Araby a jednoho poutníka. Zjistíme, kolik kukuřičných placek každý dostal.

$$\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Každý tedy dostal $2\frac{2}{3}$ kukuřičných placek. Od poutníka dostali Arabové 8 penízků, které si měli spravedlivě rozdělit. První Arab snědl $2\frac{2}{3}$ kukuřičných placek. Původně měl 5 kukuřičných placek. Vypočítáme, kolika plackami přispěl poutníkovi.

$$5 - 2\frac{2}{3} = \frac{15}{3} - \frac{8}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

První Arab měl pro ostatní $2\frac{1}{3}$ kukuřičných placek. Druhý Arab také snědl $2\frac{2}{3}$ kukuřičných placek. Sám měl však pouze 3 placky, proto přispěl menším dílem poutníkovi, než první Arab.

$$3 - 2\frac{2}{3} = \frac{9}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

Pro poutníka měl pouze $\frac{1}{3}$ kukuřičné placky.

Rozdělíme 8 penízku mezi dva Araby, tedy v poměru $\frac{7}{3} : \frac{1}{3}$.

$$\frac{7}{3} : \frac{1}{3} => 7 : 1$$

$$\frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

Součet poměru vydělíme celkovým počtem penízků.

$$\frac{8}{3} : 8 = \frac{1}{3}$$

To znamená, že 1 penízek odpovídá $\frac{1}{3}$ kukuřičné placky.

První Arab dostane 7 penízků a druhý Arab 1 penízek.

8.4 PŘÍKLAD 4

Zadání:

Soutěž traktoristů

„Družstvo dostalo dva nové traktory. Samozřejmě jich chtělo co nejvíce využít. Přidělilo jim dva řidiče, Karla a Pavla. Aby se poznalo, který z nich je obratnější, určili každému z nich stejně velikou plochu polí ke zorání. Oba traktoristé se přičiňovali. Ale koncem prvního dne shledali, že Karel zoral jen polovinu plochy, která ještě zbývala k zorání Pavlovi. Pavel pak měl zorat ještě polovinu toho, co zoral první den. Oba přátelé však chtěli přece jen být hotovi současně. Kolikrát musel teď Karel zvýšit svůj hodinový výkon, aby dokončil určenou práci současně s Pavlem?“ (Věda a technika mládeži, 1960)

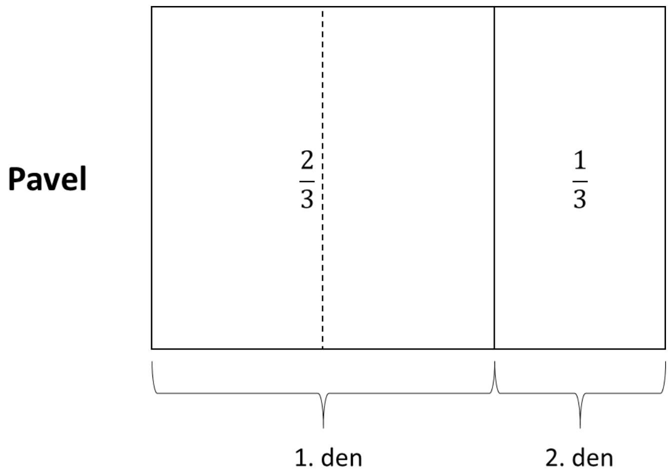
Řešení:

První den zoral Pavel část pole, označme ji „x“. Druhý den mu zbývala ještě polovina z části, kterou zoral první den neboli „$\frac{1}{2} \cdot x$“.

Jakou část zoral Pavel první den?

$$x + \frac{1}{2}x = 1$$
$$\frac{3}{2}x = 1$$
$$x = \frac{2}{3}$$

Pavel tedy zoral první den $\frac{2}{3}$ plochy, druhý den mu ještě zbývalo zorat $\frac{1}{3}$ plochy.

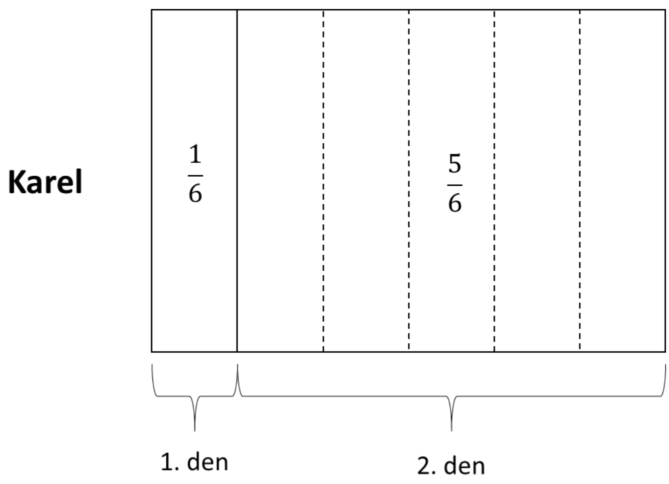


Obrázek 20: Grafické znázornění řešení

Karel zoral první den polovinu plochy, která zbývala zorat Pavlovi druhý den. Vypočteme, jakou část zoral první den.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

První den zoral Karel $\frac{1}{6}$ plochy. Druhý den mu zbývalo zorat $\frac{5}{6}$ plochy, aby měl celé pole zorané.



Obrázek 21: Grafické znázornění řešení

Jestliže Pavel zoral za 24 hodin $\frac{2}{3}$ plochy, druhý den, při stejném pracovním výkonu, zoral $\frac{1}{3}$ plochy za 12 hodin.

$$24\ hod. \ldots\ldots \frac{2}{3}\ plochy$$
$$y\ hod. \ldots\ldots \frac{1}{3}\ plochy$$

$$y = \frac{24.\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$y = \frac{8.3}{2}$$

$$\underline{\underline{y = 12}}$$

Karel zoral za 24 hodin $\frac{1}{6}$ plochy. Dle přímé úměrnosti zorá za 12 hodin $\frac{1}{12}$ plochy. Aby skončili Karel s Pavlem práci nastejno, musí zorat Karel druhý den $\frac{5}{6}$, resp. $\frac{10}{12}$ plochy za 12 hodin. Karel musí zvýšit 10x svůj pracovní výkon.

Karel musel zvýšit svůj hodinový výkon 10krát, aby dokončil určenou práci současně s Pavlem.

8.5 PŘÍKLAD 5

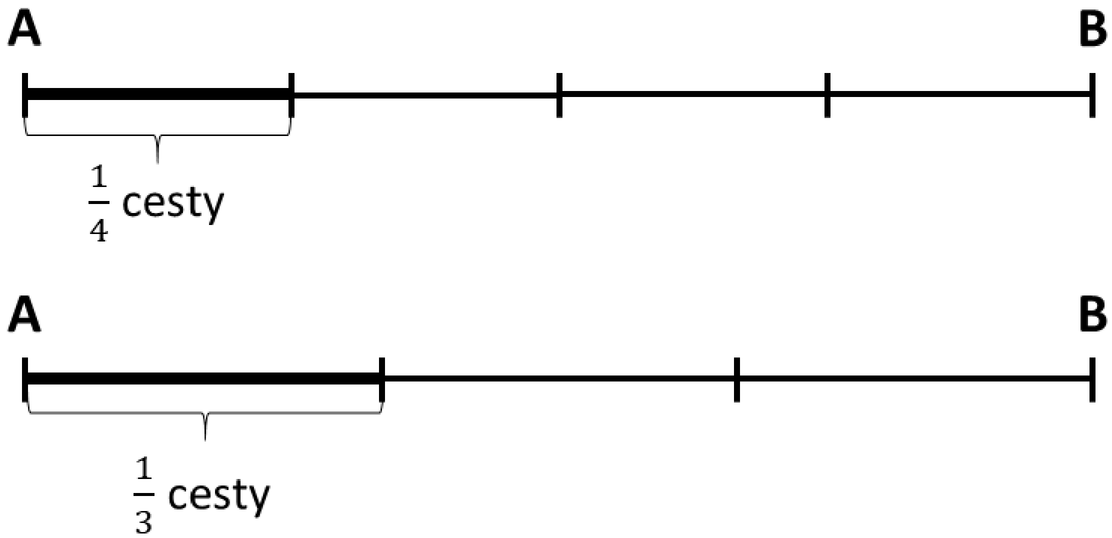
Zadání:

Opožděné dostaveníčko

„Měl jsem v osm hodin schůzku. Jak už se to někdy stává, nejdříve jsem se pozdržel v redakci, potom jsem večeřel rybu – a čas se, samozřejmě, kvůli tomu nezastavil. Nu co, utěšoval jsem se, Zdeňka se stejně jako obvykle zpozdí o čtvrthodinku, a tak se sejdeme oba zároveň… Když jsem ušel čtvrtinu cesty k místu dostaveníčka, podíval jsem se na hodinky. Bylo právě půl osmé. V jedné třetině cesty jsem si zkontroloval čas poznovu: hodinky ukazovaly za deset minut tři čtvrti na osm. Přijdu na schůzku včas? Spočítal jsem si to! Jistě také dokážete zjistit, v kolik hodin jsem vlastně vyšel z domova a kdy jsem na místo schůzky přišel. Zdeňka přišla opravdu o čtvrthodiny později. Čekala na mne, nebo jsem musel čekat ještě já?“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Po první čtvrthodině cesty ušel setkávající čtvrtinu cesty, bylo právě 7:30. Ve chvíli, kdy měl za sebou třetinu cesty, ukazovaly hodinky čas 7:35. Místo, odkud vycházel označme A a místo setkání B.



Obrázek 22: Grafické znázornění zadání

Máme zjistit, jestli se oba sejdou v 8:15 v místě B.

Vypočteme rozdíl $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$ cesty a rozdíl časů k nim příslušných.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

Časový rozdíl mezi $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$ cesty činí 5 minut. $\frac{1}{12}$ cesty tedy ušel za 5 minut.

V 7:30 měl za sebou $\frac{1}{4}$, respektive $\frac{3}{12}$ cesty. Tuto část ušel za 15 minut.

$$\frac{1}{12} \ldots \ldots 5\ minut$$
$$\frac{3}{12} \ldots \ldots x\ minut$$

$$x = \frac{5.\frac{3}{12}}{\frac{1}{12}}$$

$$x = \frac{\frac{15}{12}}{\frac{1}{12}}$$

$$x = \frac{15.12}{12.1}$$

$$\underline{\underline{x = 15}}$$

Odečteme od času 7:30 15 minut a získáme čas, ve kterém se vydal setkávající na cestu. Jestliže $\frac{1}{12}$ cesty ušel za 5 minut, celou cestu ušel za 12x více času, tedy za 60 minut. Z místa A vyrazil v 7:15, do místa B došel za hodinu, tedy v čas 8:15.

Oba dorazili do místa setkání v 8:15, tím pádem na sebe nemuseli čekat.

9 POČÍTÁNÍ S PROCENTY

Procenta vyjadřují části celku. Je důležité si uvědomit, že jeden celek odpovídá 100 %. Jsou úzce spjaty se zlomky a desetinnými čísly. Opět najdeme jejich využití v reálných situacích – zlevnění/zdražení výrobků, výše úroku atd. Jsou součástí statistiky – věkové složení obyvatel, sledování ekonomické vývoje, komparace zemí atp. S procenty nepočítáme jen v hodinách matematiky, ale i v jiných předmětech, dochází tak k propojení mezi předměty.

9.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Doprodejní ceny

„Doprodejní ceny zimních druhů obuvi byly v létě sníženy o 15 % a prodejna obdržela z podnikového ředitelství dobropis na tři pětiny „ztráty" z původního zisku. Máte vypočítat, kolik procent z původní ceny obuvi plánovala do zisku prodejna před snížením." (Věda a technika mládeži 1961)

Řešení:

Snížení ceny obuvi o 15 % představuje $\frac{3}{5}$ zisku. Celý zisk, neboli $\frac{5}{5}$, vypočteme pomocí trojčlenky.

$$15\% \ldots\ldots\ldots \frac{3}{5}\ zisku$$

$$x\% \ldots\ldots\ldots \frac{5}{5}\ zisku$$

$$x = \frac{15 \cdot 1}{\frac{3}{5}}$$

$$x = \frac{15 \cdot 5}{3}$$

$$\underline{\underline{x = 25}}$$

Prodejna plánovala 25 % z původní ceny zboží do zisku.

10 POČÍTÁNÍ S MOCNINAMI

Součástí algebry je i počítání s mocninami. Díky mocninám zapisujeme součin více stejných čísel kratším způsobem. Nejběžněji pracujeme s druhou mocninou, zejména při užití Pythagorovy věty, dále pak při výpočtu obsahu čtverce nebo kruhu.

10.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Narozeniny

„Nedávno jsem potkal přítele. Byl v dobré náladě, téměř rozjařen. Když jsem se ho ptal po příčině, řekl mi, že právě oslavoval narozeniny svého otce a má radost, že se jich otec dožívá v plném zdraví. „Jak stár je tvůj otec?“ ptám se dále. Přítel mi hned neodpověděl. Podíval se na mne s úsměvem a povídá: „Ty jsi matematik, viď? Vypočti si to: V roce x^2 *bylo mému otci x let.“ Nechal mě s překvapením stát na ulici. Po chvíli počítání jsem skutečně tento neobvyklý úkol snadno vyřešil.“* (Věda a technika mládeži, 1959)

Řešení:

Vzhledem k tomu, že byla otázka na věk otce položena v roce 1959, najdeme v tabulkách druhé mocniny takových čísel, které se nejvíce přibližují číslu 1959.

Připadají v úvahu tyto případy:

$$43^2 = 1849$$

$$44^2 = 1936$$

Nyní spočítáme rozdíl mezi druhou mocninou čísla a rokem 1959. Pokud vypočítáme rozdíl $1959 - 1849 = 110$, zjistíme, že je rozdíl velký. Znamenalo by to, že v roce 1849 oslavil otec matematika 43. narozeniny. K tomuto věku přičteme 110 let.

$$110 + 43 = 153$$

V roce 1959 by tedy oslavil 153. narozeniny, což je méně pravděpodobné.

Druhou možností je oslava 44. narozenin v roce 1936. Rozdíl mezi lety 1959 a 1936 je roven 23.

$$1959 - 1936 = 23$$

K věku 44 let přičteme ještě 23 let, tím získáme věk otce v roce 1959.

$$44 + 23 = 67$$

V roce 1959 by tudíž oslavil 67. narozeniny. Tato možnost je jistě pravděpodobnější.

Otci matematika je 67 let.

11 ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

Aritmetickou posloupností rozumíme posloupnost, ve které je rozdíl mezi dvěma sousedními členy konstantní. Součet členů aritmetické posloupnosti tvoří aritmetickou řadu. V úlohách, které směřují k využití aritmetické posloupnosti, hledáme souvislost mezi členy. Na jejím základě pak určíme diferenci, x-tý člen, případně součet členů posloupnosti.

11.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Početná rodina

„Když jsme byli na brigádě, vzpomínali jsme na domov a na příbuzné, posílali jsme jim pohlednice a pozdravy, a trochu se nám také stýskalo. Při tom jsme se rozpovídali o svých rodinách. Můj soused v ložnici se mi smál, když jsem řekl, že jsem jedináček. „To já jsem nejstarší z patnácti dětí!“, povídá. „A jak staří jsou ti ostatní?“. „Jsem právě osmkrát starší než můj nejmladší bratr. Náhodou jdeme za sebou jako schody. Každý další se narodil půldruhého roku po svém předchůdci. Z toho poznáš, kolik roků je mně i těm ostatním!“. Vypočítejte stáří všech sourozenců!“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Celkem bylo 15 sourozenců. Narodili se vždy 1,5 roku po sobě. Označme neznámou „x“ věk nejmladšího sourozence. Věk dalšího sourozence, staršího o 1,5 roku, bude $x + 1{,}5$. Pokud budeme takto postupovat až k nejstaršímu ze sourozenců, získáme aritmetickou řadu.

Tabulka 3: Početná rodina – aritmetická řada

Sourozenec	Věk
první	x
druhý	$x + 1{,}5$
třetí	$x + (1{,}5 \cdot 2)$
čtvrtý	$x + (1{,}5 \cdot 3)$
pátý	$x + (1{,}5 \cdot 4)$
šestý	$x + (1{,}5 \cdot 5)$
sedmý	$x + (1{,}5 \cdot 6)$
osmý	$x + (1{,}5 \cdot 7)$
devátý	$x + (1{,}5 \cdot 8)$
desátý	$x + (1{,}5 \cdot 9)$
jedenáctý	$x + (1{,}5 \cdot 10)$
dvanáctý	$x + (1{,}5 \cdot 11)$
třináctý	$x + (1{,}5 \cdot 12)$
čtrnáctý	$x + (1{,}5 \cdot 13)$
patnáctý	$x + (1{,}5 \cdot 14)$

Věk nejstaršího ze sourozenců je osmkrát větší než věk nejmladšího. Proto můžeme sestavit následující rovnici, ze které vypočteme neznámou „x“.

$$8x = x + (1{,}5 \cdot 14)$$
$$8x = x + 21 \qquad /-x$$
$$7x = 21 \qquad /:7$$
$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Nejmladšímu ze sourozenců jsou 3 roky. Dosazením $x = 3$ do tabulky zjistíme stáří všech sourozenců.

Tabulka 4: Početná rodina – věky sourozenců

Sourozenec	Věk
první	$x = \mathbf{3}$
druhý	$x + 1{,}5 = 3 + 1{,}5 = \mathbf{4{,}5}$
třetí	$x + (1{,}5 \cdot 2) = 3 + (1{,}5 \cdot 2) = \mathbf{6}$
čtvrtý	$x + (1{,}5 \cdot 3) = 3 + (1{,}5 \cdot 3) = \mathbf{7{,}5}$
pátý	$x + (1{,}5 \cdot 4) = 3 + (1{,}5 \cdot 4) = \mathbf{9}$
šestý	$x + (1{,}5 \cdot 5) = 3 + (1{,}5 \cdot 5) = \mathbf{10{,}5}$
sedmý	$x + (1{,}5 \cdot 6) = 3 + (1{,}5 \cdot 6) = \mathbf{12}$
osmý	$x + (1{,}5 \cdot 7) = 3 + (1{,}5 \cdot 7) = \mathbf{13{,}5}$
devátý	$x + (1{,}5 \cdot 8) = 3 + (1{,}5 \cdot 8) = \mathbf{15}$
desátý	$x + (1{,}5 \cdot 9) = 3 + (1{,}5 \cdot 9) = \mathbf{16{,}5}$
jedenáctý	$x + (1{,}5 \cdot 10) = 3 + (1{,}5 \cdot 10) = \mathbf{18}$
dvanáctý	$x + (1{,}5 \cdot 11) = 3 + (1{,}5 \cdot 11) = \mathbf{19{,}5}$
třináctý	$x + (1{,}5 \cdot 12) = 3 + (1{,}5 \cdot 12) = \mathbf{21}$
čtrnáctý	$x + (1{,}5 \cdot 13) = 3 + (1{,}5 \cdot 13) = \mathbf{22{,}5}$
patnáctý	$x + (1{,}5 \cdot 14) = 3 + (1{,}5 \cdot 14) = \mathbf{24}$

Stáří sourozenců od nejmladšího po nejstarší je: 3; 4,5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5; 15; 16,5; 18; 19,5; 21; 22,5 a 24 let.

12 GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

V geometrické posloupnosti je podíl dvou sousedních čísel konstantní. Využití najdeme například ve finanční matematice, při výpočtu složeného úrokování. Dále při celkovém součtu každoročního stálého růstu či poklesu výroby produktů, cen, počtu obyvatel apod.

12.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Ahmesova úloha staroegyptských žáčků

„Už staří Egypťané znali tzv. geometrické řady. Matematik Ahmes uvádí ve své učebnici tento příklad: Sedm osob má po sedmi kočkách, z nichž každá zadáví 7 myší. Každá myš zničila 7 klasů, z nichž by dal každý 7 měrek zrní. Kolik je kterých tvorů a věcí a jaký je jejich celkový součet? – Stačí, udáte-li jen celkový počet všech věcí, ale bude nás těšit, napíšete-li souhrnný vzorec, podle něhož se dá toto číslo vypočítat.“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Bylo 7 osob a každá z nich měla 7 koček, tudíž jsme mohli napočítat celkem $7 \cdot 7 = 49$ koček. Kočky celkem zadávily $49 \cdot 7 = 343$ myší. Všechny myši zničily $343 \cdot 7 = 2401$ klasů. Klasy daly dohromady $2\,401 \cdot 7 = 16\,807$ měrek zrní.

Nyní sečteme veškeré zrní, klasy, myši, kočky a osoby.

$$16\,807 + 2\,401 + 343 + 49 + 7 = \mathbf{19\,607}$$

Ověření:

Jedná se o součet konečné geometrické řady. Vypíšeme si jednotlivé členy:

$a_1 = 7$

$a_2 = 7 \cdot 7$

$a_3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7 \cdot 7^2$

$a_4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7 \cdot 7^3$

$a_5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7 \cdot 7^4$

Pro součet členů této geometrické řady platí:

$$\left.\begin{array}{rll} s_n = & a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 & /\cdot q \\ q \cdot s_n = & a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 & /\cdot (-1) \end{array}\right] \oplus$$

$$s_n \cdot (1 - q) = a_1 - a_1 \cdot q^5$$

$$s_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^5)}{1 - q}$$

Dosadíme do vzorce pro součet členů geometrické řady, kde $a_1 = 7$, $q = 7$.

$$s_n = \frac{7 \cdot (1 - 7^5)}{1 - 7}$$

$$\underline{\underline{s_n = 19\,607}}$$

Osob bylo 7, koček 49, myší 343, klasů 2 401, měrek zrní 16 807. Celkový součet osob, zvířat a obilnin je 19 607.

13 ÚLOHY O SPOLEČNÉ PRÁCI

Pokud vykonává práci více subjektů současně, zvládnou dokončit daný úkol za kratší dobu. Naopak při práci samostatného jedince nebo stroje, je úkol zhotoven za delší čas. Úkolem je určení času, za který bude práce dokončena. Subjekty mohou pracovat dohromady po celý čas nebo se postupně přidávají či odpojují. Opět bychom našli využití v praktických úlohách – napouštění bazénu s více přívody, sklizení úrody pomocí strojů, práce dělníků na stavbě. Příkladů bychom jistě vymysleli hodně.

13.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

Žnový grafikon

„Náš sběratel František Taraba z Počátek nám předložil problém tamního družstva: mají tři žací stroje (A, B, C) o nestejném výkonu. Z minulých let ví předseda, že se strojem A a B požali všechno obilí za 12 dní, strojem B a C za 20 dní a strojem A a C bylo obilí posekáno za 15 dní. Letos mají tři traktoristy a předseda chce zapojit všechny tři stroje najednou. Za kolik dní posekají všechnu úrodu? A kdyby došlo k nějaké závadě, za kolik dní by posekal všechno obilí jen sám stroj A, za kolik dní stroj B, za kolik stroj C?“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Ze zadání víme, za kolik dní posečou úrodu stroje A a B, B a C, A a C.

Tabulka 5: Žnový grafikon – zadané a hledané hodnoty

Stroje	Celá práce [den]	Práce / 1 den
$A+B$	12	$1/12$
$A+C$	15	$1/15$
$B+C$	20	$1/20$
A	x	$1/x$
B	y	$1/y$
C	z	$1/z$

Nyní vyjádříme práci stroje A.

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{x}=\frac{1}{20}-\frac{1}{15}+\frac{1}{x} \qquad /\cdot 60x$$
$$5x-60=3x-4x+60 \qquad /+60+x$$
$$6x=120 \qquad /:6$$
$$\underline{\underline{x=20}}$$

Vyjádříme a následně vypočteme, kolik dní by pracoval stroj B samostatně.

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{y}=\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{y} \qquad /\cdot 60y$$
$$5y-60=4y-3y+60 \qquad /+60-y$$
$$4y=120 \qquad /:4$$
$$\underline{\underline{y=30}}$$

Obdobným způsobem vypočteme, jak dlouho by pracoval samostatně stroj C.

$$\frac{1}{20}-\frac{1}{z}=\frac{1}{12}-\frac{1}{15}+\frac{1}{z} \qquad /\cdot 60z$$
$$3z-60=5z-4z+60 \qquad /+60-z$$
$$2z=120 \qquad /:2$$
$$\underline{\underline{x=60}}$$

Zjistili jsme, za kolik dní budou mít práci hotovou stroj A, stroj B a stroj C, pokud budou pracovat samostatně.

Jestliže budou pracovat všechny tři stroje dohromady, vykonají práci za kratší dobu.

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{1}{d} \qquad /\cdot 60d$$
$$3d+2d+d=60$$
$$6d=60 \qquad /:6$$
$$\underline{\underline{d=10}}$$

Stroj A poseče všechnu úrodu za 20 dní, stroj B za 30 dní a stroj C za 60 dní. Pokud budou pracovat stroje A, B, C dohromady, posečou úrodu za 10 dní.

14 ÚLOHY O POHYBU

Dalším typem slovních úloh řešených na základní škole jsou úlohy o pohybu. Propojujeme v nich fyzikální i matematické znalosti. Většinou pracujeme s úlohami, v kterých je pohyb rovnoměrný. Nejčastěji se jedná o pohyb objektů stejným směrem, proti sobě a za sebou. Pro lepší představu můžeme situaci znázornit graficky.

14.1 PŘÍKLAD 1

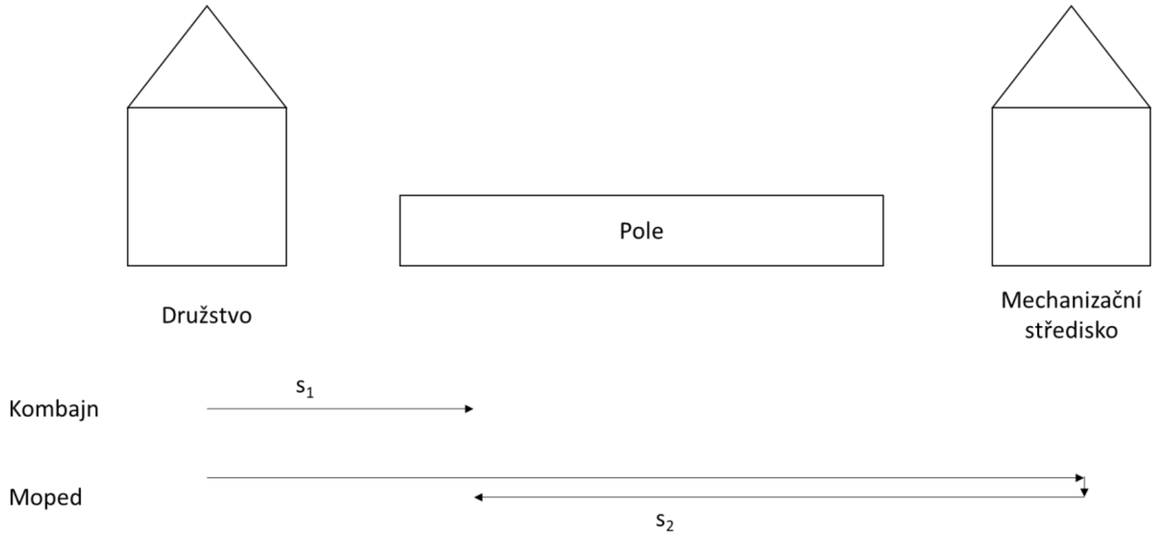
Zadání:

Když byly žně

„Z objektu družstva vyjel kombajn na pole. Kombajnista zpozoroval, že mu selhává zapalování. Vyslal proto svého pomocníka, který před ním jel na mopedu a upozorňoval protijedoucí vozidla na přesunující se kombajn, aby zajel do mechanizačního střediska, které nebylo přímo v obci, a přivezl novou součástku. Sám jakžtakž pokračoval patnáctikilometrovou rychlostí kupředu. Mopedista „rozehnal“ svůj stroj na nejvyšší obrátky a řítil se „šedesátkou“. Vyzvedl v mechanizačním středisku součástku, obrátil se, jel stejnou rychlostí zpět a zastihl kombajnéra právě když vyjížděl z hlavní silnice na pole vzdálené tři kilometry od JZD. Jak bylo daleko mechanizační středisko od objektu družstva?“
(Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Kombajnista vyjel z družstva směrem k poli rychlostí 15 km/h. Protože měl však poruchu, vyjel jeho pomocník tím samým směrem do mechanizačního střediska. Jel na mopedu rychlostí 60 km/h. Vracel se zpět ke kombajnistovi, kterého potkal 3 km od zemědělského družstva.



Obrázek 23: Znázornění zadání

KOMBAJN:

$$s_1 = 3\ km$$
$$v_1 = 15\ km \cdot h^{-1}$$
$$t = ?\ [h]$$

$$t = \frac{s_1}{v_1}$$
$$t = \frac{3}{15}$$
$$\underline{\underline{t = 0{,}2\ h = 12\ min}}$$

POMOCNÍK:

$$s_2 = ?\ [km]$$
$$v_2 = 60\ km \cdot h^{-1}$$
$$t = 0{,}2\ h$$

$$s_2 = v_2 \cdot t$$
$$s_2 = 60 \cdot 0{,}2$$
$$\underline{\underline{s_2 = 12\ km}}$$

Pomocník ujel za 12 minut 12 kilometrů. Vypočítejme vzdálenost mechanizačního střediska od družstva.

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

$$s = \frac{3 + 12}{2}$$

$$\underline{\underline{s = 7{,}5\ km}}$$

Mechanizační středisko bylo vzdáleno 7,5 kilometru od družstva.

15 GONIOMETRICKÉ FUNKCE

Goniometrické funkce – sinus, kosinus, tangens a kotangens jsou nezbytnou součástí goniometrie. Zavádíme je pomocí poměrů délek stran v pravoúhlém trojúhelníku. Využití bychom zcela jistě našli v reálném prostředí.

15.1 PŘÍKLAD 1

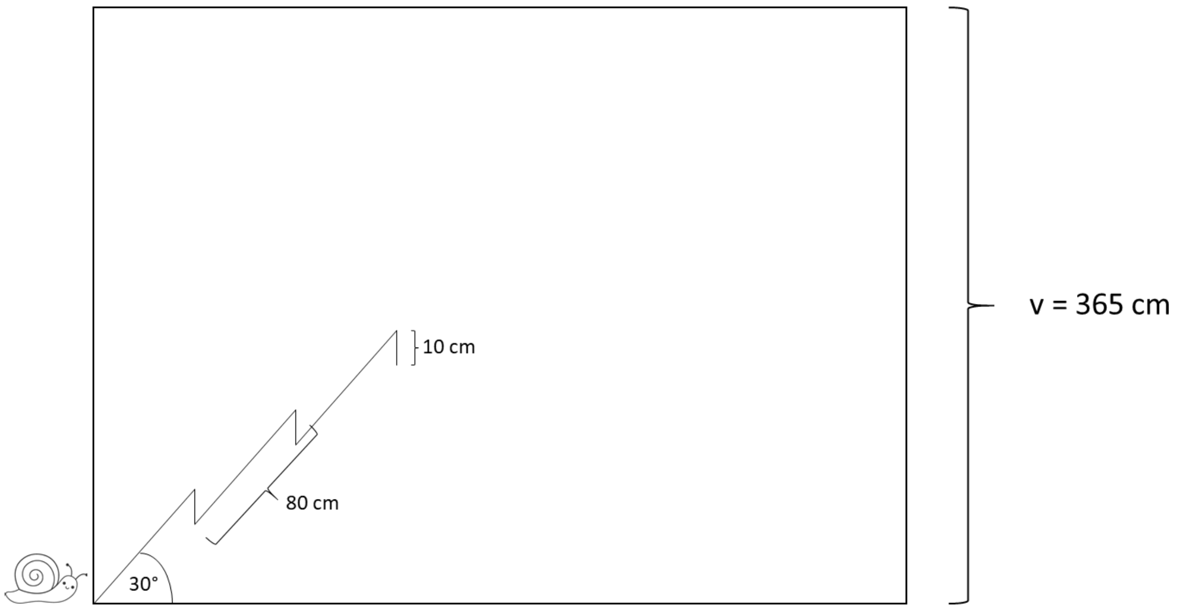
Zadání:

Hlemýžď měl chuť

„Hlemýžď měl chuť na zeleninu. Zelenina rostla v zahradě. Zahrada byla založena na terase, jejíž opěrná zeď byla vysoká 365 cm. A náš hlemýžď seděl u paty opěrné zdi. Rozhodl se, že na zeď vyleze a ochutná zeleninu, kterou tam pěstovali zahrádkáři z nového sídliště. A lezl. Aby svými tykadlovými očky viděl i na zem, lezl vzhůru, nikoliv kolmo, ale šikmo, pod úhlem 30° od vodorovné čáry. Každý den s námahou, ale vytrvale popolezl 80 cm; vždy pak únavou usnul a sklouzl 10 cm dolů. Tak to pokračovalo den za dnem. Víte kolikátého dne se dostal hlemýžď na vrchol zdi?“ (Věda a technika mládeži, 1961)

Řešení:

Podívejme se na následující obrázek, jak hlemýžď postupoval po zdi.



Obrázek 24: Hlemýžď měl chuť – znázornění šnekovy cesty

Hlemýžď stoupá přes den pod úhlem 30° a uleze 80 cm. Přes noc klesne o 10 cm dolů. Spočítejme, do jaké výšky popoleze za 1 den.

$$d = 80\ cm$$

$$v_1 = ?\ [cm]$$

$$\sin 30° = \frac{v_1}{d}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{v_1}{80}$$

$$\underline{\underline{v_1 = 40\ cm}}$$

$$v_d = v_1 - 10$$

$$v_d = 40 - 10$$

$$\underline{\underline{v_d = 30\ cm}}$$

Za jeden den popoleze hlemýžď do výšky 30 cm. Zeď je vysoká 365 cm, celou výšku tedy poleze:

$$\frac{365}{30} = 12{,}17\ dne$$

Hlemýžď se na vrchol zdi dostal dvanáctý den již během dne.

16 PŘÍKLADY NA KAŽDÝ DEN

V následujících úlohách uplatníme matematické dovednosti, rozvíjíme schopnost matematického myšlení, hledáme možné postupy k vyřešení dané úlohy. Většinou se jedná o příklady z praxe a úlohy, které můžeme zařadit do oblasti rekreační matematiky. Shrnujeme v nich veškeré poznatky a nabyté vědomosti. Snažíme se porozumět zadání, nalézt možná řešení a formulovat výsledky. Prolíná se zde několik tematických okruhů a to nejen z oblasti matematiky.

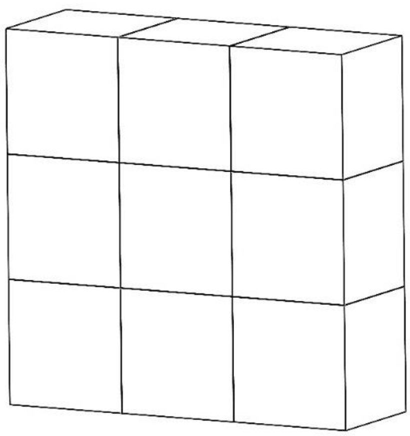
16.1 PŘÍKLAD 1

Zadání:

„Těleso na obrázku je sestaveno z devíti stejných krychlí. Kolikrát je jeho povrch větší než povrch jedné krychle?“ (Každý den s matematikou, 2018)

Řešení:

Povrch jedné krychle je sestaven ze 6 čtverců. Těleso, které vidíme na obrázku se skládá z 9 krychlí. Avšak povrchu tohoto tělesa náleží 30 čtverců.



Obrázek 25: Těleso složené z 9 krychlí

$povrch\ jedné\ krychle\ \ldots S_1 = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$

$povrch\ tělesa\ na\ obrázku\ \ldots S_2 = 30 \cdot a \cdot a = 30 \cdot a^2$

Porovnejme, kolikrát je povrch tělesa větší než povrch jedné krychle.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{30}{6} = 5$$

Povrch tělesa je 5x větší než povrch jedné krychle.

16.2 PŘÍKLAD 2

Zadání:

„Dana napsala test na 65 %, Eva na 80 % a měla o 6 bodů více než Dana. Jaký byl maximální počet bodů v testu?“ (Každý den s matematikou, 2018)

Řešení:

Procentuální rozdíl mezi body Evy a Dany byl $80\ \% - 65\ \% = 15\ \%$. Eva dosáhla v testu o 6 bodů více než Dana.

$$\uparrow \begin{array}{l} 15\ \% \dots\dots\dots 6\ bod\mathring{u} \\ 100\ \% \dots\dots\dots x\ bod\mathring{u} \\ \hline \end{array} \uparrow$$

$$x = \frac{6 \cdot 100}{15}$$

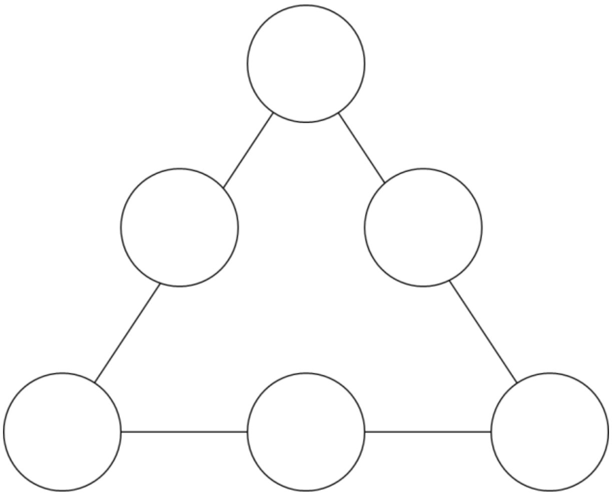
$$\underline{\underline{x = 40}}$$

Maximální počet bodů v testu byl 40.

16.3 PŘÍKLAD 3

Zadání:

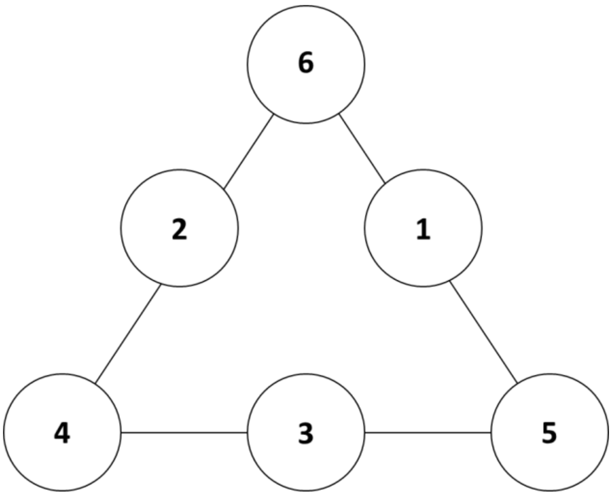
„Do kroužků vepište čísla 1, 2, …, 6 tak, aby součet tří čísel ležících v přímce byl 12. Která čísla leží ve vrcholech trojúhelníku?“ (Každý den s matematikou, 2018)



Obrázek 26: Zadání příkladu

Řešení:

Vzhledem k výši součtu čísel v přímce předpokládáme, že ve vrcholech trojúhelníka budou čísla s vyšší hodnotou.



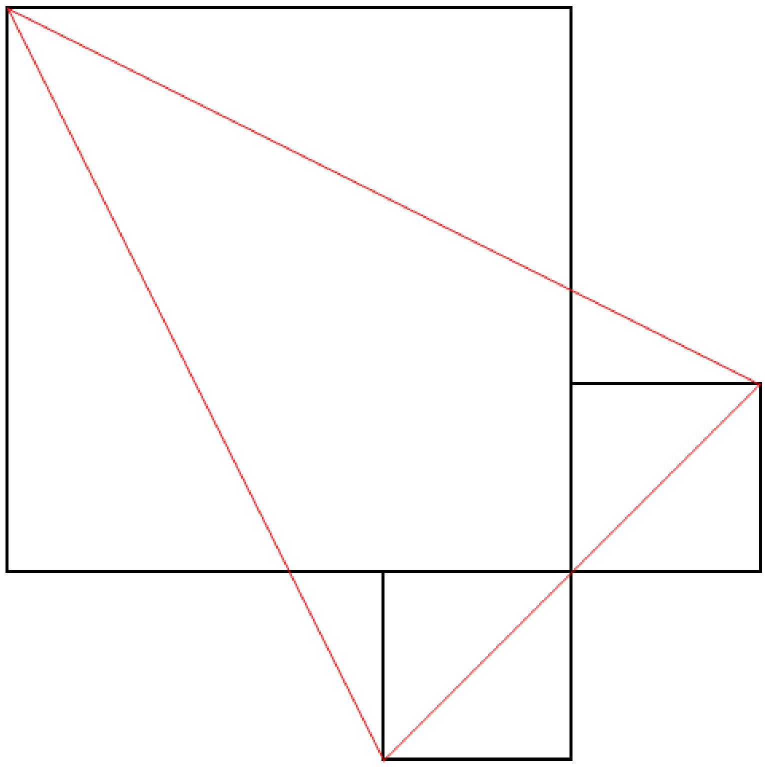
Obrázek 27: Řešení příkladu

Ve vrcholech trojúhelníka leží čísla 4, 5, 6.

16.4 PŘÍKLAD 4

Zadání:

„Na obrázku je čtverec o straně délky 6 cm a dva malé čtverce s délkou strany 2 cm. Kolik cm² měří plocha vyznačeného trojúhelníku?“ (Každý den s matematikou 2018)



Obrázek 28: Zadání příkladu

Řešení:

Základna vyznačeného trojúhelníku je dvojnásobkem úhlopříčky malého čtverce. Výška trojúhelníku se shoduje s úhlopříčkou velkého čtverce.

Výpočet úhlopříčky malého čtverce:

$$a_1 = 2\ cm$$

$$u_1^2 = a_1^2 + a_1^2$$

$$u_1^2 = 2^2 + 2^2$$

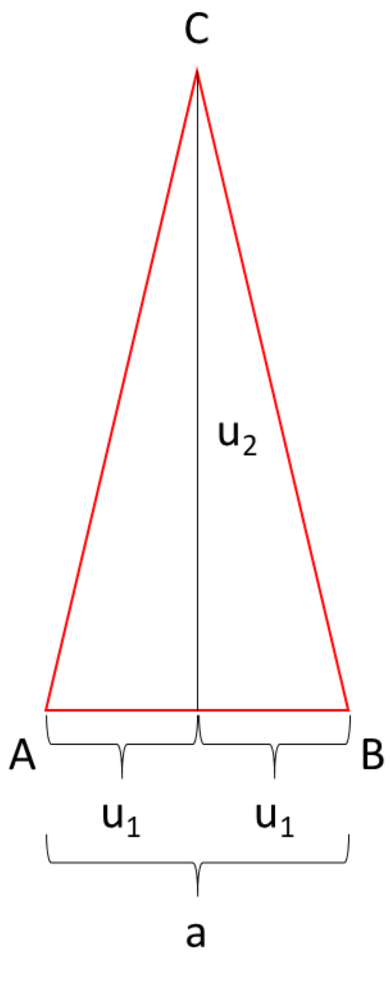
$$u_1^2 = 8$$

$$\underline{\underline{u_1 = 2 \cdot \sqrt{2}\ cm}}$$

Výpočet úhlopříčky velkého čtverce:

$$a_2 = 6\ cm$$
$$u_2^2 = a_2^2 + a_2^2$$
$$u_2^2 = 6^2 + 6^2$$
$$u_2^2 = 72$$
$$\underline{\underline{u_2 = 6 \cdot \sqrt{2}\ cm}}$$

Výpočet strany trojúhelníku:



Obrázek 29: Trojúhelník ABC

$$a = 2 \cdot u_1$$
$$a = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}$$
$$\underline{\underline{a = 4 \cdot \sqrt{2}\ cm}}$$

Výpočet obsahu trojúhelníka ABC:

$$S = \frac{a \cdot u_2}{2}$$

$$S = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\underline{S = 24\ cm^2}}$$

Obsah trojúhelníku je 24 cm².

16.5 PŘÍKLAD 5

Zadání:

„V 9:40 se na zastávce potkaly současně čtyři autobusové linky. První jezdí v 5 minutovém intervalu, druhá v 12 minutovém intervalu, třetí v 15 minutovém a čtvrtá ve 22 minutovém intervalu. V kolik hodin nejdříve by se měly podle jízdního řádu všechny linky zase současně potkat na uvedené zastávce?“ (Každý den s matematikou, 2018)

Řešení:

Spočítáme nejmenší společný násobek čísel 5, 12, 15 a 22. Tím zjistíme, za kolik minut se znovu setkají všechny čtyři autobusové linky.

$$n(5, 12, 15, 22) = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = \boldsymbol{660\ minut}$$

$$5 = 1 \cdot 5$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$22 = 2 \cdot 11$$

$$\frac{660}{60} = 11\ hodin$$

$$9\ hod\ 40\ \mathrm{min} + 11\ hod = \boldsymbol{20\ hod\ 40\ min}$$

Všechny linky by se měly potkat, podle jízdního řádu, nejdříve ve 20 hodin 40 minut.

16.6 PŘÍKLAD 6

Zadání:

„Součet trojmístného čísla XYZ, dvojmístného YZ a čísla Z je 758. Kolik je X+Y+Z? (Různá písmena zastupují různé číslice.)“ (Každý den s matematikou, 2018)

Řešení:

$$\begin{array}{r} XYZ \\ +\ \ YZ \\ \underline{+\ \ \ \ Z} \\ 758 \end{array}$$

Součet $Z + Z + Z$ se má rovnat číslu 8, nebo číslu s poslední cifrou rovné 8. Z se tedy bude rovna 6, neboť $6 + 6 + 6 = 18$.

Pokračujme dále rovnicí $Y + Y + 1 = 5$.

$$Y + Y + 1 = 5$$
$$2Y = 4$$
$$\underline{\underline{Y = 2}}$$

Za neznámou X doplníme číslo 7.

$$\begin{array}{r} 726 \\ 26 \\ \underline{6} \\ 758 \end{array}$$

X odpovídá číslu 7, Y číslu 2 a Z číslu 6. Vypočteme součet těchto čísel.

$$X + Y + Z = 7 + 2 + 6 = \mathbf{15}$$

Číselný součet X+Y+Z vyšel 15.

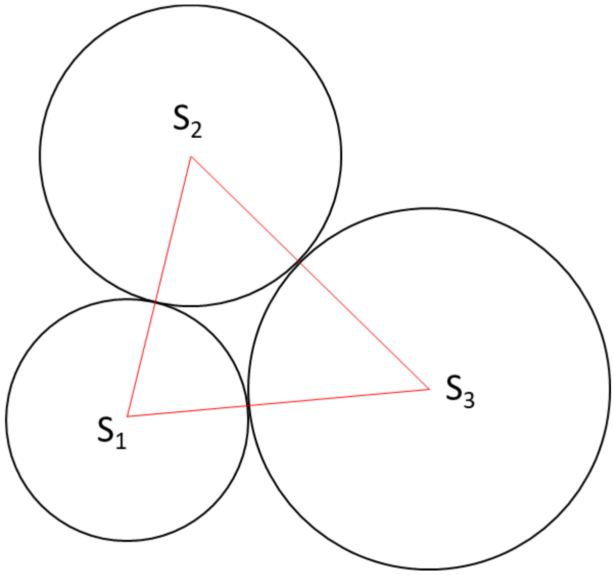
16.7 PŘÍKLAD 7

Zadání:

„Tři kruhy o poloměrech 4, 5 a 6 cm se navzájem dotýkají. Kolik měří obvod trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy těchto kruhů?" (Každý den s matematikou, 2018)

Řešení:

Jestliže známe poloměry vzájemně se dotýkajících kružnic, spočítáme vždy vzdálenost dvou středů sousedních kružnic. Tyto vzdálenosti určují velikosti stran trojúhelníku.



Obrázek 30: Grafické znázornění zadání

$r_1 = 4\ cm$

$r_2 = 5\ cm$

$r_3 = 6\ cm$

$|\boldsymbol{S_1S_2}| = r_1 + r_2 = 4 + 5 = \boldsymbol{9\ cm}$

$|\boldsymbol{S_2S_3}| = r_2 + r_3 = 5 + 6 = \boldsymbol{11\ cm}$

$|\boldsymbol{S_1S_3}| = r_1 + r_3 = 4 + 6 = \boldsymbol{10\ cm}$

$\boldsymbol{o} = |S_1S_2| + |S_2S_3| + |S_1S_3| = 9 + 11 + 10 = \boldsymbol{30\ cm}$

Obvod trojúhelníku měří 30 cm.

16.8 PŘÍKLAD 8

Zadání:

„Lenka šla nakupovat. Nejdříve utratila za oblečení 70 % hotovosti, pak ještě za kosmetiku 20 % zbytku hotovosti. Kolik procent původní hotovosti, s níž se vypravila na nákupy, jí zbylo?" (Každý den s matematikou, 2018)

Řešení:

$$\begin{array}{l} oblečení \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 70\ \%\ útraty \\ kosmetika \ldots\ldots\ldots\ldots 20\ \%\ ze\ zbytku \\ \underline{\quad zbylo \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ? \qquad\qquad} \end{array}$$

Po nákupu oblečení zbylo Lence 30 % hotovosti. Za kosmetiku utratila 20 % z 30 % zbytku.

$$20\ \%\ z\ 30\ \% = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06 = \mathbf{6}\%$$

Celkem utratila 70 % + 6 % = 76 % původní hotovosti. Kolik procent původní hotovosti jí zbylo?

$$\mathbf{100}\ \% - \mathbf{76}\ \% = \mathbf{24}\ \%$$

Lence zbylo 24 % původní hotovosti.

16.9 PŘÍKLAD 9

Zadání:

„V továrně vyrobili více než 600, ale méně než 1000 plechovek. Pokud by plechovky balili po 18, 20, nebo 24 kusech, vždy by 11 plechovek zbylo. Kolik plechovek vyrobili?" (Každý den s matematikou, 2018)

<u>Řešení</u>:

Pro čísla 18, 20 a 24 vypočítáme nejmenší společný násobek. K němu pak přičteme číslo 11. Tím zjistíme, kolik plechovek vyrobili.

$n(18, 20, 24) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = \mathbf{360}$

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$$360 + 11 = 371$$

Vyšlo nám číslo, které je menší než 600. Dalším násobkem bude číslo 720.

$$720 + 11 = 731$$

Ověříme, zda číslo 731 patří do této nerovnosti:

$$600 < n < 1000$$
$$600 < 731 < 1000$$

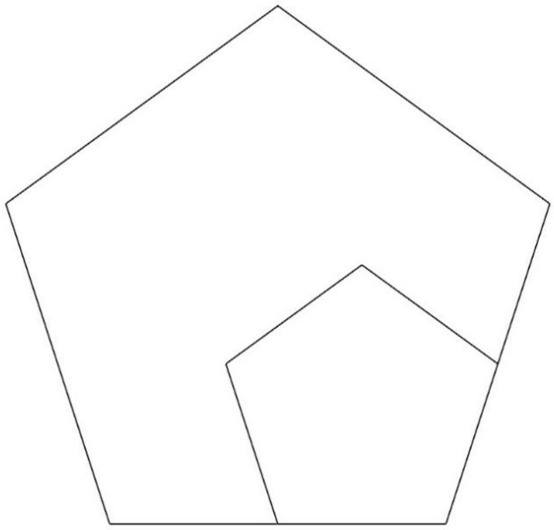
Ano, našli jsme číslo, které je násobkem 18, 20 a 24 a zároveň patří do výše zmíněné nerovnosti.

V továrně vyrobili 731 plechovek.

16.10 PŘÍKLAD 10

<u>Zadání</u>:

Délka strany velkého pravidelného pětiúhelníku je dvojnásobkem délky strany malého pravidelného pětiúhelníku. Jaké je obsah velkého pětiúhelníku, pokud víte, že obsah malého je 10 cm^2?“ (Každý de s matematikou, 2018)



Obrázek 31: Grafické znázornění zadání

<u>Řešení</u>:

Pravidelný pětiúhelník se skládá z pěti rovnoramenných trojúhelníků. Obecný vzorec pro obsah trojúhelníku je $\frac{a \cdot v_a}{2}$. Proto obsah pravidelného pětiúhelníku můžeme vypočítat takto:

$$S_1 = 5 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$$

Ze zadání víme, že obsah malého pětiúhelníku činí $10\ cm2$. Délka strany velkého pětiúhelníku je dvakrát větší, než strana malého pětiúhelníku neboli $2a$. Zároveň i výška velkého pětiúhelníku je také dvakrát větší. Můžeme zapsat vzorec pro jeho obsah.

$$S_2 = 5 \cdot \frac{2 \cdot a \cdot 2 \cdot v_a}{2}$$

$$S_2 = 10 \cdot a \cdot v_a$$

Určíme, kolikrát bude obsah velkého pětiúhelníku větší než obsah malého pětiúhelníku.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{10 \cdot a \cdot v_a}{5 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}} = 4$$

Vypočteme obsah velkého pětiúhelníku.

$$\boldsymbol{S_2} = 4 \cdot S_1 = 4 \cdot 10 = \boldsymbol{40\ cm^2}$$

Obsah velkého pětiúhelníku je 40 cm².

16.11 PŘÍKLAD 11

Zadání:

„Farmář pěstuje oves, žito a len. Plochy ovsa a žita jsou v poměru 2:5, plochy žita a lnu jsou v poměru 7:1. Jaký je poměr ploch obilnin a lnu?“ (Každý den s matematikou, 2018)

Řešení:

Zapišme poměry ploch jednotlivých obilnin.

$$\begin{array}{c} oves : \check{z}ito \\ 2 : 5 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \check{z}ito : len \\ 7 : 1 \end{array}$$

Pro porovnání poměrů ploch všech obilnin, převedeme výše uvedené poměry na postupný poměr. V obou poměrech musí být pro plochu žita stejné číslo (stejný počet dílů).

$$\begin{array}{c} oves : \check{z}ito \\ 2 : 5 \\ 14 : 35 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \check{z}ito : len \\ 7 : 1 \\ 35 : 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{oves : \check{z}ito : len} \\ \mathbf{14 : 35 : 5} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{oves + \check{z}ito : len} \\ \mathbf{49 : 5} \end{array}$$

Poměr ploch všech obilnin je 14:35:5. Plocha ovsa a žita vůči lnu je v poměru 49:5.

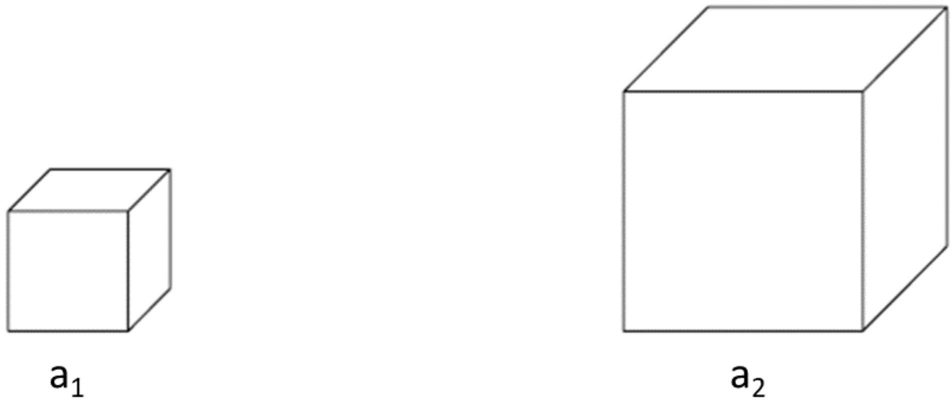
16.12 PŘÍKLAD 12

Zadání:

„Krychle zlata o straně délky 10 cm váží 19,32 kg. Kolik váží krychle zlata o straně délky 20 cm?“ (Každý den s matematikou, 2018)

Řešení:

Máme dvě krychle ze zlata. První krychle o délce hrany 10 cm a hmotnosti 19,32 kg, druhá krychle s délkou hrany 20 cm.



Obrázek 32: grafické znázornění zadání

$V_1 = a_1^3$
$V_1 = 10^3$
$\underline{\underline{V_1 = 1\,000\ cm^3}}$

$V_2 = a_2^3$
$V_2 = 20^3$
$\underline{\underline{V_2 = 8\,000\ cm^3}}$

$$\rho_1 = \rho_2$$
$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2}$$
$$\frac{19\,320}{1\,000} = \frac{m_2}{8\,000}$$
$$m_2 = \frac{19\,320}{1\,000} \cdot 8000$$
$$\underline{\underline{\boldsymbol{m_2 = 154\,560\ g = 154{,}56\ kg}}}$$

Krychle zlata o hraně délky 20 cm váží 154,56 kg. Pokud zvětšíme délku hrany krychle dvakrát, její objem se zvětší osmkrát.

ZÁVĚR

Cílem diplomové práce bylo představení úloh z oblasti rekreační matematiky, do které řadíme nejrůznější hlavolamy, rébusy, hádanky, zajímavé příklady. Přináší obraz skutečnosti, že i matematika může být jistým druhem zábavy.

V práci, členěné do 16 kapitol, můžeme najít vybrané slovní úlohy. Jsou řazeny do tematických celků podle jejich zaměření. Pro upřesnění tématu je na začátku každé kapitoly uvedena charakteristika dané problematiky.

Vybrané příklady spadají do různých okruhů matematických disciplín. Jsou ukázkou toho, jakým způsobem můžeme uplatnit jednotlivé matematické postupy v reálných situacích. V každé úloze je uvedeno zadání, strategický postup řešení včetně výsledků a závěru. K lepšímu pochopení a demonstraci příkladu slouží grafické znázornění.

Zajímavé úlohy byly čerpány z dříve vycházejícího časopisu Věda a technika mládeži a z publikace Každý den s matematikou. Jak už samotný název knihy napovídá, příklady jsou sestaveny na každý den v roce. V těchto publikacích najdeme velké množství příkladů, využitelných v hodinách matematiky.

Příklady mohou také sloužit učitelům jako materiál vhodný do výuky, ve kterém si žáci vyzkouší řešení netradičních úloh. Přispívají také k motivaci, samostatnosti, kritickému myšlení a zejména logickému uvažování. Zařazením těchto příkladů do běžné výuky procvičí žáci teorii na praktických příkladech. Zároveň slouží k ozvláštnění výuky a žákům přináší jiný pohled na matematiku.

RESUMÉ

V práci jsou představeny úlohy rekreační matematiky. Obsahují zadání, postup řešení a závěr. Příklady jsou řazeny celkem do 16 kapitol. Začátek kapitoly zahrnuje krátké seznámení s tématem. Každá z nich obsahuje vybrané úlohy týkající se dané oblasti. Při samotném řešení využíváme logické myšlení, poznatky, vědomosti a aplikaci matematického aparátu. Nezbytnou součástí postupu řešení je porozumění zadání navazující na matematizaci reálných situací.

Zajímavé problémy a nevšední úlohy jsou publikovány v časopise Věda a technika mládeži a v knize s názvem Každý den s matematikou.

Příklady mohou být využity v hodinách matematiky pro její zpestření. Žáci aplikují teoretické poznatky v praktických úlohách.

The work presents the problems of recreational mathematics. They contain the assignment, the solution procedure and the conclusion. Examples are classified into a total of 16 chapters. The beginning of the chapter includes a brief introduction to the topic. Each of them contains selected tasks related to the given area. In the solution itself, we use logical thinking, knowledge, attainments and application of mathematical apparatus. An essential part of the solution process is the understanding of the assignment following the mathematization of real situations.

Interesting problems and unusual tasks are published in the journal Science and technology and youth and in a book entitled Every day with mathematics.

Examples can be used in mathematics lessons to revive it. Students apply theoretical knowledge in practical problems.

SEZNAM LITERATURY

Věda a technika mládeži. Praha: Mladá fronta, 1954–1990. ISSN 0322-9017.

TLUSTÝ, Pavel. *Každý den s matematikou.* 1. vydání. Plzeň: Fraus, 2018. ISBN 978-80-7489-404-6.

VTM, 2021 [online]. Czech News Center. [Cit. 6.2.2021]. Dostupné z: https://vtm.zive.cz

POLÁK, Josef, 2019. *Rozvoj logického myšlení žáků ve výuce matematiky* [online]. Jednota českých matematiků a fyziků, 2019 [cit. 7.2.2021]. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/148603

HORDINA, Josef, 2017. *Mozkolam.cz.* [online]. 2021 [cit. 11.2.2021]. Dostupné z: https://mozkolam.cz

RVP ZV_2017_červen.pdf, MŠMT ČR. *MŠMT ČR* [online]. Copyright © 2013 [cit. 9.4.2021]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/43792/

SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK

PŘÍLOHY

Přiložené CD obsahuje video demonstrující ukázkový příklad s názvem Opožděné dostaveníčko. Součástí je doprovodný komentář spolu s vysvětlením jednotlivých kroků řešení. Ve videu je také představen časopis Věda a technika mládeži, ze kterého byly čerpány příklady uvedené v práci.