ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝUKY

Vybrané maticové rozklady

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kateřina Valtová

obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Jan Frank, Ph.D.

Plzeň 2021

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni 1. června 2021

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala mému vedoucímu práci Mgr. Janu Frankovi, Ph.D. za odbornou pomoc, cenné rady a čas, bez nichž by tato práce nevznikla. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za podporu a trpělivost.

Obsah

Úvod

Práce se zaměřuje na vybrané maticové rozklady neboli rozklad, kdy se matice transkribuje na součin více matic. S tímto součinem nově vzniklým se poté lépe ve většině příkladů řeší konkrétní úlohy. Ukážeme si využití při řešení konkrétních příkladů, jako například soustavy lineárních rovnic, které se vyučují již na základních školách, a také inverzních matic. Zaměřujeme se též na praktičnost použití vybraných rozkladů, kdy je vhodnější volit jinou metodu. Při jejich zpracování se také zabýváme jejich historický kontextem, který je nedílnou součástí problematiky maticových počtů.

V první kapitole se podíváme na základní pojmy a na koncept, který se využívá při výpočtech. Ohlédneme se také za historickými kořeny této problematiky.

Při praktickém řešení rozkladů také využíváme již rozšířený matematický program Wolfram Mathematica, který využijeme pro porovnání a kontrole našich řešených úloh. Práce tímto způsobem poukazuje na již blízké spojení celé problematiky s počítačovou technologií, která se v současné době stále více využívá díky své efektivnosti. Na jednotlivých příkladech je ukázáno řešení pomocí jednotlivých rozkladů. Dílčí příklady jsou řešeny metodami ze základních škol a mnou vybranými rozklady, jednotlivé postupy jsou rozepsané zvlášť. Výsledky jsou pak porovnané s matematickým program.

1 TEORETICKÁ ČÁST

V úvodních kapitolách bakalářské práce se budeme věnovat maticovým rozkladům, které se často využívají kupříkladu při řešení soustav rovnic nebo výpočtů vlastních čísel matic, přičemž právě maticový počet umožňuje přenést celou problematiku do „světa“ počítačových technologií a programů počítačové algebry. Než se začneme zabývat jednotlivými maticovými rozklady, uvedeme si jejich historický kontext. [1], [2], [3], [4], [5], [6]

Souvislosti s řešenou problematikou si můžeme například všimnout u přímé úměrnosti, která je standardně vyučována již v 7. ročníku českých základních škol.

Přímou úměrností se zabývali filozofové (dnešním pohledem vědci) již v dávných dobách v různých civilizacích (např. starověká Čína, středověká Evropa apod.). Totéž lze říct o úlohách vedoucích na jednu lineární rovnici. Uvedli jsme příklady uvažovaného typu pouze z té nejstarší doby, tj. z Egypta a Mezopotámie, což představuje úlohy, které jsou staré přibližně čtyři tisíce let. Ve stejné době, cca před čtyřmi tisíciletími, již byly úspěšně řešeny i problémy vedoucí na jednoduché i složitější soustavy lineárních rovnic. Ve starověké Číně, zhruba před dvěma tisíci lety, byl dokonce objeven algoritmus pro řešení soustavy lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí.

Nejznámější matematici, zabývající se danou problematikou: [2]

1.1 ALAN TURING

Adam Turing byl autorem LU rozkladu, který se narodil 12. června 1912 v londýnském distriktu Maida Vale. Studoval obor matematika na Cambridge King’s College, a to v letech 1931 až 1934. Jeho největším dílem je uvedení tzv. Turingova stroje. První zmínka byla zaznamenána v roce 1936. Jedná se o teoretický matematický model počítače, který má nekonečně velkou operační paměť. Vystudoval americkou Princeton University v letech 1937 až 1938. Spolu s americkým matematikem Alonzem Churchem je autorem Church – Turingovy teze, ta neformálně oznamuje, že každý proveditelný výpočet je možné provést algoritmem běžícím na počítači s dostatečnou kapacitou paměti a času. V době druhé světové války žil dočasně v anglickém Buckinghamshire, kde se spolu s dalšími vědci podílel na luštění německé zprávy šifrované Enigmou. Roku 1948 představil maticový LU rozklad, který se dodnes používá k řešení soustav lineárních rovnic. Alan Turingse zabýval i jinými vědeckými obory, například biologií. Oborem jeho zájmu bylo studium a snaha o vysvětlení zejména tzv. morfogeneze. Z jeho osobního života jsou doloženy informace, že byl homosexuál, což bylo v tehdejší Anglii trestné. Na základě této skutečnosti byl Turing odsouzen k roční hormonální „léčbě“ estrogenem. Zemřel 7. června 1954 ve Wilmslow. Podle oficiální zprávy se jednalo o sebevražednou otravu kyanidem draselným. V roce 2009 uveřejnila britská vláda omluvu v deníku The Daily Telegraph, kde vyjádřila svoje pochybení v kauze týkající se Turingova odsouzení. Na počest Alana Turinga se za významné přínosy informatice každoročně od roku 1966 uděluje Turingova cena.[6]

1.2 LU ROZKLAD

Nechť $A \in C^{n \times m}$ je *regulární* matice. Rozklad tvaru

$A = LU$

kde L je dolní trojúhelníková matice s jednotkovou diagonálou a U je horní trojúhelníková matice, nazýváme LU rozkladem matice A.

Věta. Nechť A je obecně komplexní matice tvaru $n \times n$. Pak pro každou takovou matici

$$PA = LU,$$

kde U je horní trojúhelníková matice, L je dolní trojúhelníková matice a P je permutační matice.

Vymezíme si nejprve výše uvedené pojmy s oporou literatury, se kterými se budeme dále setkávat a také je budeme využívat při řešení daných příkladů.

1.3 ZÁKLADNÍ POJMY LU ROZKLADU

Definice 1.1. Čtvercová matice se nazývá *regulární,* jestliže se její hodnost rovná jejímu řádu; v opačném případě, tj. když je její hodnost menší než její řád, se nazývá *singulární*

Výše zmíněné pojmy si musíme přiblížit.

Nyní se podíváme na výše uvedené pojmy, a to čtvercovými maticemi. Jsou zde podstatné speciální typy. Čtvercová matice $A = (a_{ik})$*n-tého* řádu se nazývá *diagonální,* platí-li $a_{ik} = 0$ pro $i \neq k$, $i, k = 1, ..., n$; diagonální matici s diagonálními prvky $a_{11}, ..., a_{nm}$ budeme často označovat $diag\{a_{11}, ..., a_{nm}\}$. Matice A je *dolní trojúhelníková,* platí-li $a_{ik} = 0$ pro $i \prec k, ik = 1, ..., n$; A je *horní trojúhelníková matice,* je-li $a_{ik} = 0$ pro $i \succ k, i, k = 1, ..., n.$ [5]

Definice 1.2. *Permutační matice* se nazývá čtvercová matice, která má v každém řádku a v každém sloupci jediný nenulový prvek, rovný vždy jedné.

Pro upřesnění si uvedeme ukázkový příklad, jak by mohla tato matice vypadat.

Př.:

$$\begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 3, & -1 \end{pmatrix}$$

horní trojúhelníková matice,

$$\begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

diagonální matice,

$$\begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{pmatrix}$$

Horní (dolní) trojúhelníková matice má pod (nad) hlavní diagonálou samé nuly.

LU rozklad můžeme přemítat i pro singulární nebo obdélníkovou matici. [5]

1.4 Prostá Gaussova eliminace a LU rozklad

V tomto odstavci se zaměříme na maticový popis Gaussovy eliminace, díky které budeme chápat Gaussovu eliminaci jako algoritmus na výpočet LU rozkladu. Maticový zápis je podstatný pro analýzu numerické stability Gaussovy eliminace. Nejprve zavedeme značení, které zjednoduší dále používaný maticový zápis. Budeme řešit čtvercovou $n \times m$ matici M_k následující postupy

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & m_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix} = I + m_k e_k^T, \qquad m_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1,k} \\ m_{k+2,k} \\ \vdots \\ m_{n,k} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Přesvědčili jsme se, že

$$M_k^{-1} = I - m_k e_k^T \tag{4.2}$$

Uvažujme dále trojúhelníkovou matici L

$$L \equiv M_1 M_2 M_3 ... M_{n-1} \tag{4.3}$$

Ve cvičení 4. 2. ukážeme, že platí

$$L = I + \sum_{k=1}^{n-1} m_k e_k^T \tag{4.4}$$

Uvažujme nyní soustavu lineárních algebraických rovnic

$$Ax = b, \qquad A \in C^{n \times m}, \qquad b \in C^n \tag{4.5}$$

s regulární maticí A. Při výkladu budeme nejprve vycházet z předpokladu, že Gaussovu eliminaci lze provést, tj. že prvky, kterými dělíme, jsou různé od nuly.

V prvním kroku budeme eliminovat poddiagonální prvky prvního sloupce matice A užitím prvního řádku matice A. Od druhého řádku odečteme $(a_{2,1} / a_{1,1})$ násobek prvního řádku, obecně od $i - tého$ řádku odečteme $(a_{i,1} / a_{1,1})$násobek prvního řádku $i = 2,...,n$. Dílčím výsledkem je tak matice $A^{(1)}$,

$$A \to A^{(1)} \equiv \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} \end{bmatrix} = M_1^{-1} A,$$

kde v souladu se značeným zavedeným v (4.1) a (4.2) je

$$M_1^{-1} = I - m_1 e_1^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -a_{2,1} / a_{1,1} & 1 & & & \\ -a_{3,1} / a_{1,1} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_{n,1} / a_{1,1} & & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad m_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,1} / a_{1,1} \\ a_{3,1} / a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} / a_{1,1} \end{bmatrix}.$$

Prvky $a_{i,1} / a_{1,1}$budeme nazývat násobitelé. Současně s maticí Amodifikujeme i pravou stranu soustavy (4.5), tedy

$b \to b^{(1)} \equiv M_1^{-1} b.$

V druhém kroku eliminujeme poddiagonální prvky druhého sloupce matice $A^{(1)}$užitím druhého řádku této matice. Výsledkem je matice, kterou označíme $A^{(2)}$, tedy $A^{(2)} \equiv M_2^{-1} A^{(1)}$, kde jsme označili

$$M_2^{-1} = I - m_2 e_2^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -a_{3,2}^{(1)} / a_{2,2}^{(1)} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -a_{n,2}^{(1)} / a_{2,2}^{(1)} & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad m_2 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{3,2}^{(1)} / a_{2,2}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n,2}^{(1)} / a_{2,2}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Stejným způsobem postupujeme dále, až po $n-1$ krocích dostaneme horní trojúhelníkovou matici

$$U \equiv A^{(n-1)} = M_{n-1}^{-1}(M_{n-2}^{-1}(\ldots \underbrace{(M_2^{-1} \underbrace{(M_1^{-1} A)}_{=A^{(1)}})}_{=A^{(2)} \vdots} \ldots)). \tag{4.6}$$

Zavedeme-li označení $A^{(0)} \equiv A$, platí

$$U = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(0)} & a_{1,2}^{(0)} & a_{1,3}^{(0)} & \cdots & a_{1,n}^{(0)} \\ & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} \\ & & a_{3,3}^{(2)} & \cdots & a_{3,n}^{(2)} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n,n}^{(n-1)} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Použijeme-li (4.3), dojdeme ze (4.6) ke vztahu

$$A = (M_1 M_2 \ldots M_{n-2} M_{n-1}) U \equiv LU \tag{4.8}$$

kde Lje dolní trojúhelníková matice s jednotkovou diagonálou obsahující násobitelé jako mimo diagonální prvky (viz 4.4).

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ a_{2,1}^{(0)} / a_{1,1}^{(0)} & 1 & & & & \\ a_{3,1}^{(0)} / a_{1,1}^{(0)} & a_{3,2}^{(1)} / a_{2,2}^{(1)} & 1 & & & \\ a_{4,1}^{(0)} / a_{1,1}^{(0)} & a_{4,2}^{(1)} / a_{2,2}^{(1)} & a_{4,3}^{(2)} / a_{3,3}^{(2)} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & \\ a_{n,1}^{(0)} / a_{1,1}^{(0)} & a_{n,2}^{(1)} / a_{2,2}^{(1)} & a_{n,3}^{(2)} / a_{3,3}^{(2)} & & a_{n,n-1}^{(n-2)} / a_{n-1,n-1}^{(n-2)} & 1 \end{bmatrix}$$

Tím jsme matici A vyjádřili jako součin dolní a horní trojúhelníkové matice, tj. Gaussovu eliminaci jsme popsali jako LU rozklad.

Definice 1.3 (LU rozklad). Nechť $A \in C^{n \times m}$ je *regulární* matice. Rozklad tvaru

$$A = LU$$

kde L je dolní trojúhelníková matice s jednotkovou diagonálou a U je horní trojúhelníková matice, nazýváme LU rozkladem matice A.

Uvědomme si, že je možné uvažovat LU rozklad i pro singulární nebo obdélníkové matice. Těmto variantám LU rozkladu se však v našem textu věnovat nebudeme.

Soustavu lineárních algebraických rovnic (4.5) vyřešíme pomocí LU rozkladu ve dvou krocích.

Přímý chod: Implicitní násobení obou stran rovnice $Ax = b$ maticí L^{-1},

$$Ax = b \Leftrightarrow L^{-1}Ax = L^{-1}b \Leftrightarrow Ux = b^{(n-1)},$$

Přímý chod Gaussovy eliminace s pravou stranou $b = [\beta_1, \ldots, \beta_n]^T$

Zpětný chod: Řešení soustavy

$$Ux = b^{(n-1)}$$

s horní trojúhelníkovou maticí U [4]

1.5 André-Louis Cholesky

André-Louis Cholesky se narodil 15. října roku 1875 v Montguyon na jihozápadním pobřeží Francie. Byl francouzským matematikem, topografem, geodetikem a oficírem. Maturoval v letech 1892 až 1893 v Bordeaux. V roce 1895 začal studovat na polytechnické škole, poté mezi lety 1897 až 1899 dosáhl další vzdělání na vojenské škole L'Écoled'application de l'artillerie et du génie v Metách. Během vojenské služby se zabýval studiem geografie a topografie. Do povědomí se dostal především díky jeho způsobu řešení systému lineárních rovnic – Choleského rozkladu (Factorisation de Cholesky). Tento rozklad však původně nevznikl coby výsledek matematického výzkumu, ale jako výsledek jeho studií o kompenzaci geodetických sítí. Roku 1909 byl zvolen druhým nejvyšším velitelem 13. dělostřeleckého pluku, později se stal jeho kapitánem. André-Louis Cholesky zemřel 31. srpna 1918 v Bagneaux v Picardii na následky zranění, které utrpěl v bitvě. V roce 1921 byly jeho ostatky převezeny na hřbitov v Cuts. [6]

1.6 CHOLESKÉHO ROZKLAD HERMITOVSKÉ POZITIVNĚ DEFINITNÍ MATICE

Uvažujme nyní aplikaci Gaussovy eliminace na hermitovskou pozitivně definitní (HPD) matici. Pro hermitovské pozitivně definitní matice je podmínka (4.9) pro proveditelnost Gaussovy eliminace vždy splněna. Každá hermitovská pozitivně definitní matice je silně regulární. Gaussovu eliminaci HPD matice je tedy možné provádět bez pivotace. V následujícím textu ukážeme, že LU rozklad HPD matice A lze zapsat jako součin dolní trojúhelníkové matice se svojí maticí hermitovsky sdruženou.

4. 9 Podmínka $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$ pro $k = 1,...,n-1$

Gaussova eliminace bez pivotace aplikována na matici A dává jednoznačně určený LU rozkladu, který označíme

$$A = \tilde{L}U.$$

Z regularity matice A plyne, že diagonální prvky $u_{1,1},...,u_{n,n}$ matice U jsou nenulové. Pokud škálujeme řádky matice U inverzemi těchto diagonálních prvků a výslednou matici s jedničkami na diagonále označíme $\hat{U}$, pak můžeme rozklad psát ve tvaru

$$A = \tilde{L}diag(u_{1,1},...,u_{n,n})\tilde{U}. \qquad (4.18)$$

Jelikož je A hermitovská, platí

$$\tilde{L}diag(u_{1,1},...,u_{n,n})\tilde{U} = \tilde{U}^{*}diag(\bar{u}_{1,1},...,\bar{u}_{n,n})\tilde{L}^{*},$$

a proto také

$$\tilde{L}diag(u_{1,1},...,u_{n,n})\tilde{U}e_{1} = \tilde{U}^{*}diag(\bar{u}_{1,1},...,\bar{u}_{n,n})\tilde{L}^{*}e_{1},$$

Využijeme-li toho, že matice $\tilde{L}$ a $\tilde{U}$ mají na diagonále jedničky, dostaneme z předchozí rovnice $u_{1,1} = \bar{u}_{1,1}$ a $\tilde{L}e_{1} = \tilde{U}^{*}e_{1}$. Využijeme-li analogicky postupně rovností

$$\tilde{L}diag(u_{1,1},...,u_{n,n})\tilde{U}e_{i} = \tilde{U}^{*}diag(\bar{u}_{1,1},...,\bar{u}_{n,n})\tilde{L}^{*}e_{i},$$

pro $i = 2,...,n$, dostaneme

$$u_{i,i} = \overline{u}_{i,i} \in R \qquad i = 1,\dots,n, \qquad \tilde{U}^* = \tilde{L}$$

(4.19)

a rozklad (4.18) můžeme psát jako hermitovský rozklad

$$A = \tilde{L}diag(u_{1,1},\dots,u_{n,n})\tilde{L}^*$$

a ekvivalentně

$$diag(u_{1,1},\dots,u_{n,n}) = \tilde{L}^{-1}A\tilde{L}^{-*}.$$

Kdyby existoval index i, pro který $u_{1,1} \le 0,$ muselo by platit $(e_i^T\tilde{L}^{-1})A(\tilde{L}^{-*}e_i) \le 0,$což je v rozporu s pozitivní definitností matice A. Označíme-li

$$L \equiv \tilde{L}diag(\sqrt{u_{1,1}},\dots,\sqrt{u_{n,n}}),$$

je L dolní

trojúhelníková matice s kladnými prvky na hlavní diagonále, pro kterou platí

$$A = LL^*. \qquad (4.20)$$

Dokázali jsme následující větu.

1.6.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Věta 2. (Choleského rozkladu). Pro každou hermitovskou pozitivně definitní matici A existuje jednoznačný rozklad

$$A = LL^*,$$

kde L je dolní trojúhelníková matice s kladnými prvky na diagonále.

Je důležité uvědomit si následující důsledek. Pro jednotlivé řádky $\underset{\sim}{l}^T$ dolní trojúhelníkové matice L zjevně platí

$$\underset{\sim}{l}^T\overline{\underset{\sim}{l}} = \|\underset{\sim}{l}\|^2 = a_{i,i},$$

a tudíž

$$\|L\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = trace(A).$$

Kde $trace(A)$označujeme *stopu matice A.*

V přesné aritmetice je proto velikost prvků matice L omezena a nemůže dojít k jejich růstu podobně, jak je tomu u LU rozkladu.

Musíme si vysvětlit výše zmíněnou podmínkou, abychom porozuměli uvedenému textu.

Věta 2.1. Podmínka (4.9) je splněna právě tehdy, je-li matice A silně regulární, tj. pokud platí

$$\det\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{bmatrix} \neq 0 \qquad k = 1\ldots,n$$

(všechny hlavní minory jsou nenulové) [5]

Nyní se opět pro přiblížení výše uvedených pojmů, zmíněných v naší definici, formulujeme s oporou literatury.

Definice 2.2. Hermitovská matice

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad tělesem C komplexních čísel.

Řekneme, že matice A je *hermitovská*, jestliže pro každé $i, j = 1,\ldots,n$ je $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$

Horní (dolní) trojúhelníková matice má pod (nad) hlavní diagonálou samé nuly. Poznamenejme, že čtvercová matice A je symetrická, právě když je $A^T = A$; symetrická matice je „souměrná podle hlavní diagonály". Matice A je antisymetrická právě tehdy, když je $A^T = -A$. Pro antisymetrickou matici musí být $a_{ii} = -a_{ii}$, tj. $2_{a_{ii}} = 0$; antisymetrická matice nad tělesem, má tedy na hlavní diagonále nuly.

Čtvercová matice A je hermitovská, právě když je $A = \bar{A}$; matice $\bar{A}$ má na místě ij komplexně sdružené číslo k číslu, které je v matici A na místě ij. Hermitovská matice má na hlavní diagonále reálná čísla.

Pro upřesnění si uvedeme příklad, na kterém si daný pojem přiblížíme.

Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}3&2&-5\\2&2&4\\-5&4&3\end{pmatrix}\qquad N=\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&0&2\\-1&-2&0\end{pmatrix}$$

ad oborem integrity Z. Matice A je skalární, matice B horní trojúhelníková a matice C dolní trojúhelníková; matice M je symetrická, matice N antisymetrická.

Matice $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

nad tělesem Z_2 je současně symetrická i antisymetrická, neboť v Z_2 je $1=-1$

$$\operatorname{tr} A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \qquad [1]$$

Definice 2.3. Nechť R je komutativní okruh s jednotkovým prvek a A čtvercová matice řádu n nad $R. Inverzní matici$ k matici A budeme rozumět matici A^{-1}, pro kterou je $AA^{-1}=A^{-1}A=E$. Matice A , ke které inverzní matice existuje, se nazývá $invertibilní$. [1]

Definice 2.4. Buď

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

matice stupně (m,n) nad tělesem T. Matici

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{n2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

$typu(n,m)$, kterou dostaneme z matice A vzájemnou výměnou řádků za sloupce a naopak, nazýváme $matic\acute{i}\ transponovanou$ k matici A. Čtvercovou matici A stupně n se nazývá $symetrickou$, jestliže $A=A^T$, tj. $a_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\dots,n,$ a $antisymetrická$, jestliže $A=-A^T$, tj. $a_{ij}=-a_{ji}, i,j=1,2,\dots,n.$

Věta 2.2. Buď $A\ matice\ typu(m,n)$ a $B\ matice\ typu\ (n,p) nad\ tělesem\ T$. Pak platí:

$$(A^T)^T = A;$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Důkaz: (i) Z definice vyplývá, že označíme-li $A^T = (a_{ij}^T)$, pak $a_{ij}^T = a_{ij}$. Tedy $(A^T)^T = \left((a_{ij}^T)^T\right) = (a_{ji}^T) = (a_{ij}) = A$.

Označíme $C = (c_{ij}) = AB$ součin matic A a B, který je typu (m,p) a $D = (d_{ij}) = B^T A^T\ typu\ (p,m)$. Pak $c_{ij}^T = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^T a_{kj}^T = d_{ij}$, takže $C^T = D = B^T A^T$. [3]

1.7 ERNST PASQUAL WILHELM JORDAN

Zmíněné algebry uvedl Ernst Pasqual Wilhelm Jordan (1902–1980) v souvislosti se svými fyzikálními úvahami počátkem třicátých letech 20. století.

Pro znalce zůstává nejasné, proč Jordan nikdy nezískal Nobelovu cenu za fyziku. Někteří vidí problém v jeho nezpůsobilosti pořádat elegantní přednášky kvůli jeho poruše řeči; další přisuzují vinu v jeho pronacistické politice a také podpoře německého programu jaderných zbraní po druhé světové válce. Druzí dospívají ke skutečnosti problému, že Max Born ztratil Jordanův rukopis z roku 1925, ve kterém byly poprvé představeny statistiky Femi - Dirac. Proto připravil Born Jordana o jeho opodstatněný nárok na přednost před Wolfgangem Paulim. Nic to však nezměnilo na skutečnosti, že jeho příspěvky k rozvoji moderní kvantové teorie byly obdobně zásadní a dalekosáhlé jako ty úspěchy, které byly ohodnoceny Nobelovou cenou. Více než ostatní vědci se Jordan zasloužil o vývoj matematicky elegantní formulace maticové mechaniky. Obzvlášť on pokračoval v konsolidaci maticové mechaniky pomocí Paulova Diracova alternativního operátorového počtu a vlnově mechanické formulace Erwina Schrödingera v komplexním formalismu proslulým jako statistická transformační teorie. Nesmíme také zapomenout, že Jordan spolu s von Neumannem a Eugenem Wignerem vyvíjeli abstraktnější algebraické rámce pro kvantovou mechaniku. Nikoliv bez důvodu byl Jordan označen za „neopěvovaného hrdinu mezi tvůrci kvantové mechaniky“.[7]

Historický kontext jsme si již uvedli a nyní se budeme zaobírat rozkladem jako takovým.

Uvažujme čtvercovou matici $A \in C^{n \times m}$

Definice 3.1. (Podobnost). Řekneme, že matice A je podobná matici $B \in C^{n \times m}$, značeno$A \sim B$, pokud existuje regulární matice $S \in C^{n \times m}$taková, že $A = S^{-1}BS$

Nechť λje vlastní číslem matice A a $x$je příslušný vlastní vektor, tj. $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ a nechť$A \sim B$. Potom platí

$$S^{-1}BSx = \lambda x, \qquad BSx = \lambda Sx$$

tj. podobné matice mají stejná vlastní čísla a vlastní vektory $y$matice B jsou svázány s vlastními vektory $x$matice A vztahem $y = Sx$. Neplatí však opačné tvrzení, že matice se stejným spektrem musí být podobné. Protipříklad nám dává jednotková matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

která je podobná jen sama sobě. Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

má však stejné spektrum jako jednotková matice. Z definice můžeme ověřit, že podobnost je relací ekvivalence, která rozloží prostor všech čtvercových matic na třídy ekvivalence.

1.8 JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

Nechť λje komplexní číslo a mpřirozené číslo.

Jordanovým blokem $J_m(\lambda)$budeme nazývat čtvercovou maticí řádu m,

$$J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix},$$

Říkáme, že matice je v Jordanově kanonickém tvaru, je-li blokově diagonální a každý její diagonální blok je Jordanův blok (čísla λ_i nemusí být navzájem různá).

$$J = \begin{bmatrix} J_{n1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{nr}(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

Věta 3. Každá matice $A \in C^{n\times m}$ je podobná matici v Jordanově kanonickém tvaru. Matice J je určena jednoznačně až na pořadí bloků.

Jordanova věta nám dává informaci o struktuře invariantních podprostorů. Z Jordanovy věty vyplývá, že pro danou matici $A \in C^{n\times m}$ existuje regulární matice S taková, že platí

$$A = SJS^{-1}, \qquad AS = SJ$$

Uvažujme dělení matici S na bloky $S_1,...,S_r, S_j \in C^{n\times m}, j = 1,...,r,$

$$S = [S_1,...,S_r]$$

Potom pro každý blok S_j platí

$$AS_j = S_j J_{nj}(\lambda_j)$$

Rozdělme si matici S_j na jednotlivé sloupce

$$S_j = \left[s_1^{(j)},...,s_{nj}^{(j)}\right]$$

a rozepišme po sloupcích

$$As_1^{(j)} = \lambda_j s_1^{(j)}$$

$$As_2^{(j)} = \lambda_j s_2^{(j)} + s_1^{(j)}$$

$$\vdots$$

$$As_{nj}^{(j)} = \lambda_j s_{nj}^{(j)} + s_{nj-1}^{(j)}$$

1.8.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Potřebujeme si definovat výše zmíněné pojmy.

Trojúhelníkovou matici a také matici diagonální jsme si definovali už při rozboru LU rozkladu, a proto se těmito pojmy nyní zabývat nebudeme. [4]

Definice 3.3. Regulární je taková čtvercová matice A, k níž existuje matice B tak, že $AB = BA = I$. Tato matice B se nazývá *matice inverzní* k A a označuje se A^{-1}. Platí věty, jejichž důkazy jsou snadné:

Věta 3.1. *Inverzní matice* A^{-1} je maticí A jednoznačně určena a platí $(A^{-1})^{-1} = A$.

Věta 3.2. Jsou-li A, B regulární matice téhož řádu, pak jejich součin AB je také regulární a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Pořadí násobení se tedy při invertování obrací.

Věta 3.3. Je-li A regulární matice, je transponovaná matice A^T také regulární a platí

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

tj. inverzní matice k matici transponované je matice transponovaná k inverzní matici. K dalšímu vyšetřování regularity a pojmu inverzní matice budeme potřebovat pojem determinant. [5]

DETERMINANTY

3.4. Definice. Buď

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}$$

čtvercová matice stupeň n nad tělesem T. Determinant matice A rozumíme prvek

$$\det A = \sum_{\prod \in S_n} zn \prod a_{1r_1} a_{2r_2} ... a_{nr_n}$$

tělesa T, kde sčítáme přes všechny permutace $\prod$

$$\prod = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ r_1, & r_2, & \dots, & r_n \end{pmatrix}$$

množiny $M = \{1, 2, ..., n\}$. Determinant matice A budeme též značit symbolem $|A|$ nebo

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Poznámka: Základ je si přímo ujasnit, jak přesně definice determinantu zní. Jednotlivé sčítance dostaneme tak, že v každém řádku a sloupci vezmeme jeden prvek a tuto $n-tici$ spolu vynásobíme a opatříme znaménkem příslušné permutace, která vlastně „řídí" výběr prvků z řádků a sloupců. Z těchto úvah je zřejmé, jak můžeme vyjádřit definici determinantu, že také s využitím permutací v obecném tvaru, ne výhradně v základním. Tedy $\det A = \sum_{\prod \in S_n} zn \prod a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} ... a_{r_n s_n}$, kde se sčítá přes všechny možné permutace $\prod \in S_n$ tvaru $\prod = \begin{pmatrix} r_1, & r_2, & \cdots, & r_n \\ s_1, & s_2, & \cdots, & s_n \end{pmatrix}$. Této jednoduché skutečnosti využijeme v důkazu věty 3.4.

Věta 3.4. Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ stupně n nad tělesem T platí $\det A = \det A^T$, kde A^T je matice transponovaná k matici A.

Důkaz. Podle definice determinantu máme $\det A^T = \sum_{\prod' \in S_n} zn \prod' a^T_{1r_1} a^T_{2r_2} ... a^T_{nr_n} = \sum_{\prod' \in S_n} zn \prod' a_{r_1 1} a_{r_2 2} ... a_{r_n} n,$ kde sčítáme přes všechny možné permutace $\prod' = \begin{pmatrix} 1, & 2, & ..., & n \\ r_1, & r_2, & ..., & r_n \end{pmatrix}$ množiny $\{1, 2, ..., n\}$. Na druhé straně podle předchozí poznámky, $\det A = \sum_{\prod \in S_n} zn \prod a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} ... a_{r_n s_n}$, kde sčítáme přes všechny permutace $\prod = \begin{pmatrix} r_1, & r_2, & \cdots, & r_n \\ s_1, & s_2, & \cdots, & s_n \end{pmatrix}$ množiny $\{1, 2, ..., n\}$. Protože $\prod'$ je inverzní permutace k $\prod$, je $zn \prod' = zn \prod$, takže $\det A = \det A^T$, neboť oba tyto prvky jsou součtem týchž sčítanců.

Věta 3.5. Buď B čtvercová matice, která vznikne z matice A vzájemnou výměnou $i-tého$ a $j-tého$ řádku $i \neq j.$ Pak $B = -\det A.$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $i \prec j.$ Podle definice máme $\det B = \sum_{\prod \in S_n} zn \prod b_{1r_1} b_{2r_2} ... b_{nr_n},$ kde sčítáme přes všechny permutace $\prod \in S_n$ tvaru $\prod = \begin{pmatrix} 1, & 2, & ..., & n \\ r_1, & r_2, & ..., & r_n \end{pmatrix}$. Označíme-li nyní $S = (i, j)$ transpozici

$\prod' = \prod S = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & i, & \ldots, & j, & \ldots, & n \\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_j, & \ldots, & r_i, & \ldots, & r_n \end{pmatrix}$, pak jestliže $\prod$ probíhá všechny permutace z S_n $\prod'$ probíhá rovněž celé S_n, neboť každou permutaci σ můžeme napsat ve tvaru $(\sigma S)S$. Ve smyslu poznámky tedy jest $\det A = \sum_{\prod' \in S_n} zn \prod' a_{1r_1} a_{2r_2} \ldots a_{ir_j} \ldots a_{nr_n}$. Součinem dvou permutací tedy máme $\det B = \sum_{\prod \in S_n} zn \prod b_{1r_1} b_{2r_2} \ldots b_{ir_j} \ldots b_{nr_n} = -\sum_{\prod' \in S_n} zn(\prod S) a_{1r_1} a_{2r_2} \ldots a_{ir_j} \ldots a_{nr_n} = -\det A$.

Důsledek. Buď $\prod \in S_n$ libovolná permutace a A čtvercová matice stupně n nad tělesem T. Jestliže matice B vznikne z A tak, že na řádky matice A provedeme permutaci $\prod$, pak $\det B = zn \prod \det A$.

Věta 3.6. Má-li čtvercová matice A stupně n nad tělesem T dva řádky stejné, je $\det A = 0$.

Věta 3.7. (Rozboj determinantu podle řádku.) Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice stupně n nad tělesem T. Pak

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \det A$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Věta 3.8. Buď A čtvercová matice stupně n nad tělesem T. Jestliže matice B vznikne z matice A vynásobením $i-tého$ řádku prvkem $c \in T$ pak $\det B = c \det A$ čili $\left[a_1, a_2, \ldots, ca_i, \ldots, a_n\right] = \left[a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\right]$.

Důkaz. Podle věty o rozvoji determinantu podle $i-tého$ řádku máme $\left[a_1, a_2, \ldots, ca_i, \ldots, a_n\right] = \sum_{k=1}^{n} ca_{ik} A_{ik} = c\left[a_1, a_2, \ldots, ca_i, \ldots, a_n\right]$.

Věta 3.9. Buď A čtvercová matice stupně n nad tělesem T. Jestliže $i-tý$ řádek a_i matice A je součtem dvou vektorů $a_i = b_i + c_i$, kde $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in}), c_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$, pak $\left[a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\right] = \left[a_1, a_2, \ldots, b_i, \ldots, a_n\right] + \left[a_1, a_2, \ldots, c_i, \ldots, a_n\right]$.

Důkaz. Podle věty o rozvoji determinantu podle řádku máme $\left[a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\right] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} + c_{ik}) A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} A_{ik} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik} A_{ik} = \left[a_1, a_2, \ldots, b_i, \ldots, a_n\right] + \left[a_1, a_2, \ldots, c_i, \ldots, a_n\right]$.

Věta 3.10. Buď A čtvercová matice stupně n nad tělesem T. Přičteme-li k libovolnému řádku matice A libovolnou lineární kombinaci řádků ostatních, determinant se nezmění.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že při vzájemné výměně dvou řádků změní determinant podle věty 3. 9. pouze znaménko, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že k vektoru a_1 přičteme vektor $b=\sum_{i=2}^{n} r_i a_i$. Podle vět 3. 6. a 3.8 pak platí $\left[a_1+b,a_2,...,a_n\right]=\left[a_1,a_2,...,a_n\right]+\sum_{i=2}^{n} r_i\left[a_i,a_2,...,a_n\right]=\left[a_1,a_2,...,a_n\right]$.

Věta 3.11. Buď $A=(a_{ij})$ matice typu (m,n) nad tělesem T a nechť pro některé $h=1,2,...,\min\{m,n\}$ je subdeterminant

$$A_h=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1h} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1}, & a_{h2}, & \dots, & a_{hh} \end{vmatrix}\neq 0,$$

přičemž každý subdeterminant matice A stupně $h'\succ h$ je roven nule. Jsou-li $a_1,a_2,...,a_m$ řádkové vektory matice A, pak $\left\langle a_1,a_2,...,a_m\right\rangle=\left\langle a_1,a_2,...,a_h\right\rangle$.

Pomocí elementárních transformací na řádky (sloupce) determinantu se snažíme nejprve dosáhnout toho, aby v některém řádku či sloupci byly samé nuly, až na nejvýše jeden prvek. Rozvojem podle příslušného řádku či sloupce pak dosáhneme snížení stupně determinantu o jedničku a stejným způsobem pokračujeme dále, až dostaneme determinant stupně 2 nebo 3. Spočteme determinant pro názornou ukázku

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 1, & 3, & 1, & -1 \\ 2, & 1, & 1, & 3, & -1, & 2 \\ 3, & -1, & 2, & -1, & 1, & 2 \\ -1, & 2, & -1, & 3, & -2 & -3 \\ -3, & -1, & -2, & 1, & 2, & -1 \\ -2, & 1, & 1, & -2, & 1, & -2 \end{vmatrix}.$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 1, & 3, & 1, & -1 \\ 2, & 1, & 1, & 3, & -1, & 2 \\ 3, & -1, & 2, & -1, & 1, & 2 \\ -1, & 2, & -1, & 3, & -2 & -3 \\ -3, & -1, & -2, & 1, & 2, & -1 \\ -2, & 1, & 1, & -2, & 1, & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 1, & 3, & 1, & -1 \\ 0, & -3, & -1, & -3, & -3, & 4 \\ 0, & -7, & -1, & -10, & -2, & 5 \\ 0, & 4, & 0, & 6, & -1 & -4 \\ 0, & 5, & 1, & 10, & 5, & -4 \\ 0, & 5, & 3, & 4, & 3, & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3, & -1, & -3, & -3, & 4 \\ -7, & -1, & -10, & -2, & 5 \\ 4, & 0, & 6, & -1, & -4 \\ 5, & 1, & 10, & 5, & -4 \\ 5, & 3, & 4, & 3, & -4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2, & 0, & 7, & 2, & 0 \\ -2, & 0, & 0, & 3, & 1 \\ 4, & 0, & 6, & -1, & -4 \\ 5, & 1, & 10, & 5, & -4 \\ -10, & 0, & -26, & -12, & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 7, & 2, & 0 \\ -2, & 0, & 3, & 1 \\ 4, & 6, & -1, & -4 \\ -10, & -26, & -12, & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 7, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ -4, & 6, & 11, & -4 \\ 6, & -26, & -36, & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2, & 7, & 2 \\ -4, & 6, & 11 \\ 6, & -26, & -36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 7, & 2 \\ 0, & 20, & 15 \\ 0, & -47, & -42 \end{vmatrix} = -2\cdot 5 \begin{vmatrix} 4, & 3 \\ 47, & 42 \end{vmatrix} = -10(168-141) = -270.$$

Věta 3.12. Buď $A=(a_{ij})$ matice typu (m,n) nad tělesem T a nechť pro některé $h=1,2,...,\min\{m,n\}$ je subdeterminant

$$A_h = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1h}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2h}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h1}, & a_{h2}, & \ldots, & a_{hh}, \end{vmatrix} \neq 0,$$

přičemž každý subdeterminant matice A stupně $h' \succ h$ je roven nule. Jsou-li $a_1, a_2, ..., a_m$ řádkové matice A, pak $\langle a_1, a_2, ..., a_m \rangle = \langle a_1, a_2, ..., a_h \rangle$.

Věta 3.13. Buď $A=(a_{ij})$ čtvercová matice stupně n nad tělesem T. Pak $\det A = 0$, právě když řádkové vektory matice A jsou lineárně závislé.

Věta 3.14. Buď $A=(a_{ij})$ matice typu (m,n) nad tělesem T. Pak $h(A)=h$, právě když existuje nenulový subdeterminant matice A stupně h a každý subdeterminant matice A stupně většího než h je roven nule.

Věta 3.15. (O násobení determinantů.) Jsou-li $A=(a_{ij})$ a $B=(b_{ij})$ dvě čtvercové matice stupně n nad tělesem T, pak $\det(AB)=\det A\cdot\det B.$

Nyní se budeme zabývat soustavami lineárních rovnic, které budeme potom dále využívat ve druhé kapitole, kde už se budeme soustředit na konkrétní příklady.

1.9 SOUSTAVA m LINEÁRNÍCH ROVNIC

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T rozumíme soustavu tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_n, \end{aligned} \qquad (*)$$

kde $a_{ij}, b_i, i=,\ldots,m, j=1,\ldots,n$ jsou nějaké prvky z tělesa T. Matice $A=(a_{ij}) typu\ (m,n)$ se nazývá $matice\ soustavy$, matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}, & a_{12} & \cdots, & a_{1n} & b_1\\ a_{21}, & a_{22} & \cdots, & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots, & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots, & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

typu $(m,n+1)$se nazývá rozšířená matice soustavy $(*)$. Vektory $u=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in T^n$ takový, že jeho dosazením do soustavy $(*)$ je splněno všech m rovností, se nazývá *řešením soustavy* $(*)$. Vektor $b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)\in T^m$ se nazývá *sloupec pravých stran*, v případě $b=0$ hovoříme o *homogenní soustavě* lineárních rovnic. Rozšířenou matici soustavy budeme stručně označovat symbolem (A,b) složeným z matice soustavy a sloupce pravých stran. Homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí A budeme nazývat *homogenní soustavou příslušnou soustavě* $(*)$.

Poznámka. Zatímco homogenní soustava lineární rovnic je vždycky řešitelná, neboť nulový vektor $u=0$ je jejím řešením, u nehomogenních soustav je situace poněkud odlišná, jak je patro z následujícího triviálního příkladu

$$\begin{aligned} x+y&=1,\\ x+y&=2. \end{aligned}$$

Budeme se tedy nejprve zabývat otázkou řešitelnosti soustavy $(*)$.

Věta 4. Nehomogenní soustava lineárních rovnic $(*)$ je řešitelná, právě když sloupec b pravých stran je lineární kombinací sloupcových vektorů matice A.

Důkaz. Jestliže označíme $c_1 = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}), c_2 = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}), ..., c_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn})$ sloupcové vektory matice A a $M = (c_1, c_2, ..., c_n) \in (T^m)^n$, vidíme, že vektor $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ je řešením soustavy $(*)$, právě když $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = u * M = b.$

Věta 4.1. Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu (m, n) nad tělesem T, pak $h(A) = h(A^T)$. Jinými slovy: Dimenze podprostoru prostoru T^n generovaného sloupcovými vektory matice A.

Důkaz. Nechť Jordanův tvar C matice A má indexy $(i_i, i_2, ..., i_k)$. Pro $k = n$ je zřejmě matice C jednotková, takže $h(A) = h(E) = n \le h(A^T) \le n,$ vzhledem k tomu, že transponovaná matice A^T má n řádků. Je-li nyní $k \prec n$ a $i \in \{1, 2, ..., n\} / \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ libovolný prvek, můžeme utvořit matici B typu $(m, k+1)$ sestávající postupně ze sloupců matice A s čísly $i_1, i_2, ..., i_k$ a i. Je patrné, že provedeme-li na řádky matice B stejné elementární transformace, pomocí kterých jsme matici A převedli na matici C, dostaneme matice tvaru (E, c), kde E je jednotková matice stupně k. Prohlížíme-li nyní na matici B jako na rozšířenou matici nehomogenní soustavy lineárních rovnic, vidíme z předchozí poznámky, že vektor c je řešením této soustavy, dostáváme, že $i - t\acute{y}$ sloupcový vektor matice A je lineární kombinací sloupcových vektorů s čísly $i_1, i_2, ..., i_k$. Tedy ihned plyne, že sloupcové vektory matice s čísly A $i_1, i_2, ..., i_k$ generují podprostor prostoru T^n generovaný (všemi) sloupcovými vektory matice A. Odtud dostáváme nerovnost $h(A^T) \le k = h(A).$ Provedeme-li stejnou úvahu s transponovanou maticí A^T, dostaneme $h(A) = h(A^T)^T \le h(A^T)$ a jsme hotovi.

Věta 4.2. (Frobenius) Nehomogenní soustava lineárních rovnic $(*)$ je řešitelná, právě když hodnost matice soustavy $h(A)$ je rovna hodnosti matice rozšířené $h((A, b))$.

Důkaz. Označíme-li $c_1, c_2, ..., c_n$ sloupce matice A, pak soustava $(*)$ je podle věty 4 řešitelná, právě když $b \in \langle c_1, c_2, ..., c_n \rangle$, tj. právě když $b \in \langle c_1, c_2, ..., c_n \rangle = \langle c_1, c_2, ..., c_n, b \rangle$. To, ale znamená, že $h(A^T) = h((A, b)^T)$, takže podle předchozí věty je

$h(A) = h(A^T) = h((A,b)^T) = h((A,b)).$

Věta 4.3. Buď $u = (x_1, x_2, ..., x_n) \in T^n$ řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic $(*)$ a buď W_A množina všech řešení příslušné homogenní soustavy lineárních rovnic. Pak $u + W_A = \{u + v | v \in W_A\}$ je právě množina všech řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic $(*)$. Tedy $W_A = u + W_A$.

Věta 4.4. Množina W_A všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí typu (m,n) tvoří podprostor aritmetického vektorového prostoru T^n, jehož dimenze je rovna $n - h(A)$.

Důkaz. Nechť $c_1, c_2, ..., c_n$ jsou sloupcové vektory matice A. Jsou-li $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ a $v = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dva vektory z W_A a $r \in T$ je libovolný prvek, pak $(u+v)*M = (u*M) + (v*M) = 0, ru*M = r(u*M) = 0, u+v$ a ru tedy leží ve W_A a W_A je podprostor v T^n podle definice 1.6. Použijeme-li označení, postřehneme okamžitě, že $Ker(M) = W_A$ a $\dim W_A = n - \dim\langle M \rangle = n - h(A^T) = n - h(A)$

Důsledek. Buď A čtvercová matice stupně n. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

homogenní soustava lineárních rovnic s maticí A má pouze triviální řešení, nehomogenní soustava lineárních rovnic s rozšířenou maticí (A,b) má jediné řešení pro libovolný sloupec $b \in T^n$ pravých stran;

$h(A) = n.$

Důkaz. Ekvivalence podmínek (i) a (iii) plyne ihned z předchozí věty. Platí-li (ii), je podle věty 4.3 $W_A = 0$ a k platnosti (iii stačí opět použít větu 4.4. Předpokládáme-li naopak (iii) a převedeme-li matici (A,b) pomocí elementárních transformací na řádky na Jordanovu matici (B,c), je $h(B) = h(A) = n$, takže $B = E$ je jednotková matice stupně n a c je jediné řešení uvažované soustavy. [3]

2 Praktická část

2.1 Řešení ukázkových příkladů

Druhá kapitola je věnována konkrétním příkladům. Nejprve si ukážeme, jak se počítají dané rozklady a jaké úpravy při nich využíváme. Předvedeme si na každém příkladu všechny tři naše rozklady. Dále se pak budeme zabývat konkrétními soustavami rovnic, které si zkusíme vypočítat nejprve způsoby, které známe již ze základních a středních škol, a poté si ukážeme řešení těchto rovnic pomocí rozkladů. Složitost postupů a výsledky srovnáme s matematickým programem Wolfram Mathematica, který je dostupný na ZČU. Uvidíme, jak dlouho bude trvat vlastnoruční počítání a jak dlouho potrvá přepsání příkladu do programu a jeho následné vyhodnocení.

1. LU rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Nejprve si ukážeme, jak rozložit matici pomoci LU rozkladu. Pro úpravu matice budeme využívat Gaussovu eliminační metodu. Na začátku nesmíme zapomenout, že pokud lze využít Gaussovu eliminační metodu bez výměny řádku v matici, pak platí, že $A = LU$. Naopak, pokud nelze GEM použít bez výměny řádků, poté platí, že $PA = LU$.

Nejprve jsme si sepsali matice ze zadání spolu s jednotkovou maticí a snažili se pomocí GEM upravit matice tak, aby nám na levé straně vznikla dolní trojúhelníková matice. Jelikož jsme nevyměnili řádky matic, tak platí $A = LU$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 - 2\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 + 1\cdot R_1 \to R_2}{\sim}$$

odečetli jsme od druhého řádku dvojnásobek řádku prvního

k třetímu řádku jsme přičetli jeden krát první řádek

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 - 3\cdot R_2 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{R_1 + 1\cdot R_2 \to R_1}{\sim}$$

od třetího řádku jsme odečetli trojnásobek řádku druhého

k prvnímu řádku jsme přičetli jeden krát druhý řádek

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 - 1\cdot R_2 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

od druhého řádku jsme odečetli jeden krát první řádek

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Z prvních úprav nám vznikla matice U a nyní se podíváme na výpočet z matice L.

Postup je podobný jako při výpočtu matice U.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 + 2\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 + 7\cdot R_1 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 - 4\cdot R_2 \to R_3}{\sim}$$

k druhému řádku přičteme dvojnásobek řádku prvního

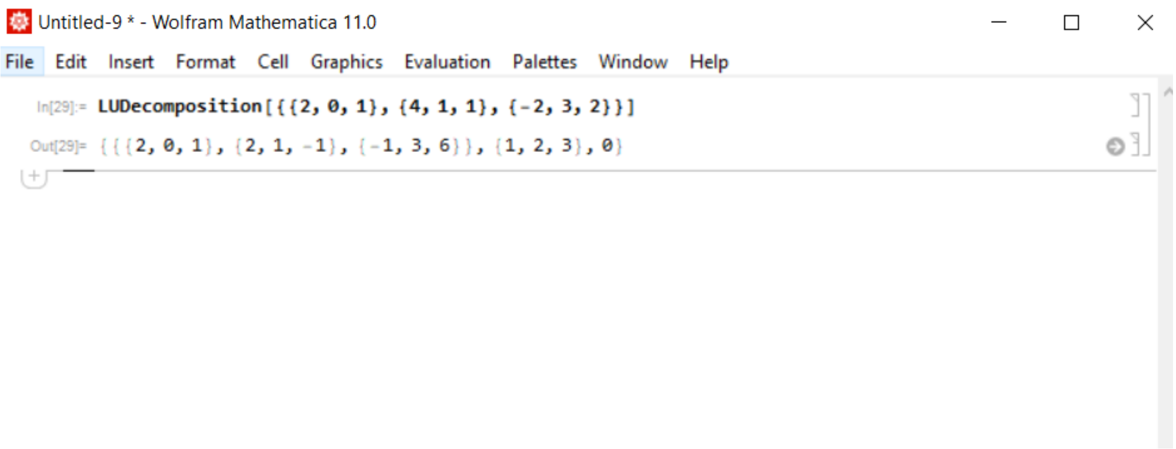
k třetímu řádku přičteme sedminásobek prvního řádku

opět od třetího řádku odečteme čtyřnásobek druhého řádku

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

platí tedy: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$



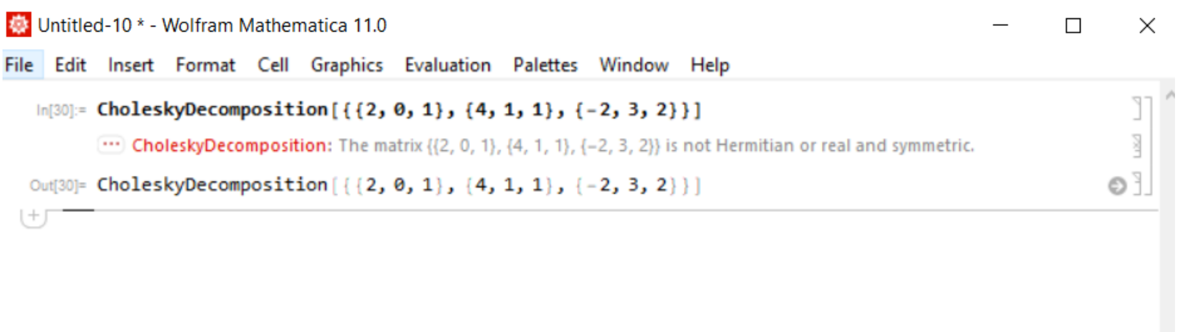
Obrázek 1: LU rozklad př. 1 -Wolfram Mathematica

1. 1 Choleského dekompozice

Než budeme pokračovat a počítat Choleského rozkladu neboli Choleského dekompozice, musíme se ujistit, že matice je pozitivně definitní. Pak budeme v tomto případě existovat trojúhelníková matice s kladnou diagonálou, tedy platí $A = LL^T$ a $A = A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \neq A^T$ - matice není symetrická, proto dále nepokračujeme v algoritmu



Obrázek 2: Choleského dekompozice př. 1. 1 – Wolfram Mathematica

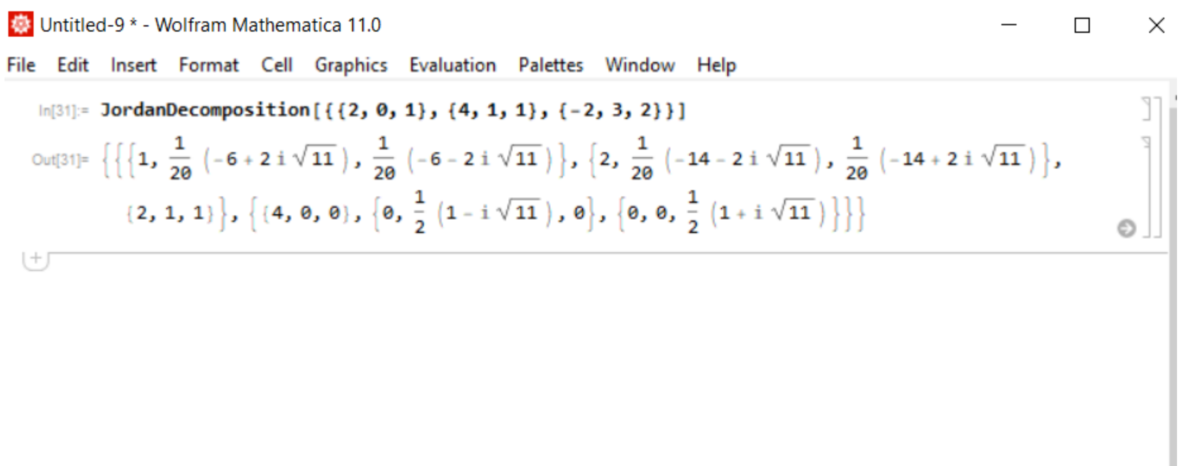
1. 2 Jordanův rozklad

$$M=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$S=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{10}i\left(\sqrt{11}+3i\right) & -\frac{1}{10}i\left(\sqrt{11}-3i\right)\\ 2 & -\frac{1}{10}i\left(\sqrt{11}-7i\right) & \frac{1}{10}i\left(\sqrt{11}+7i\right)\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$J=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{11}\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{11}\right)\end{pmatrix}$$

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5}-\frac{17i}{5\sqrt{11}} & -\frac{1}{5}+\frac{8i}{5\sqrt{11}} & \frac{1}{110}\left(33+i\sqrt{11}\right)\\ -\frac{1}{5}+\frac{17i}{5\sqrt{11}} & -\frac{1}{5}-\frac{8i}{5\sqrt{11}} & \frac{1}{110}\left(33-i\sqrt{11}\right)\end{pmatrix}$$



Obrázek 3: Jordanův rozklad př. 1. 2 – Wolfram Mathematica

2. LU rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2-(-1)\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_3-3\cdot R_1 \to R_3}{\sim}$$

od druhého řádku odečteme mínus jeden krát první řádek

od třetího řádku odečteme tři krát první řádek

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_3-1\cdot R_2 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

od třetího řádku odečteme jeden krát první řádek

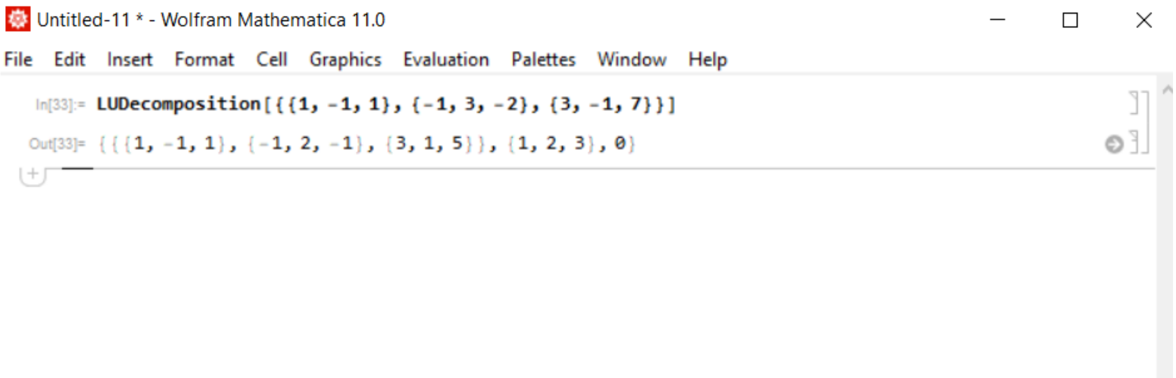
$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Výpočet matice L

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2-(-1)\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3-(3)\cdot R_1 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L = L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- v tomto příkladě nedošlo opět k výměně řádků, stejně jako u příkladu jedna, a proto opět platí $A = LU$



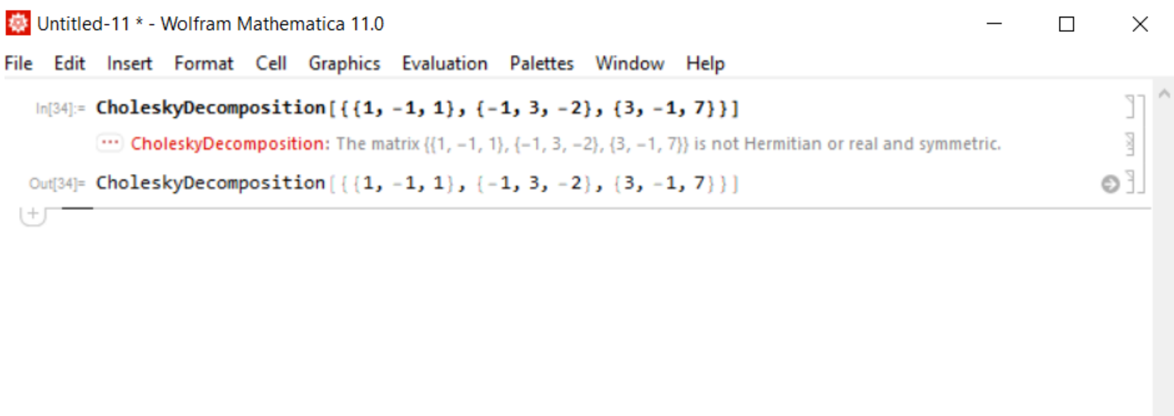
Obrázek 4: LU rozklad př. 2 – Wolfram Mathematica

2.1 Choleského dekompozice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 10$$

$A \neq A^T$ matice není symetrická, proto nepokračujeme v algoritmu



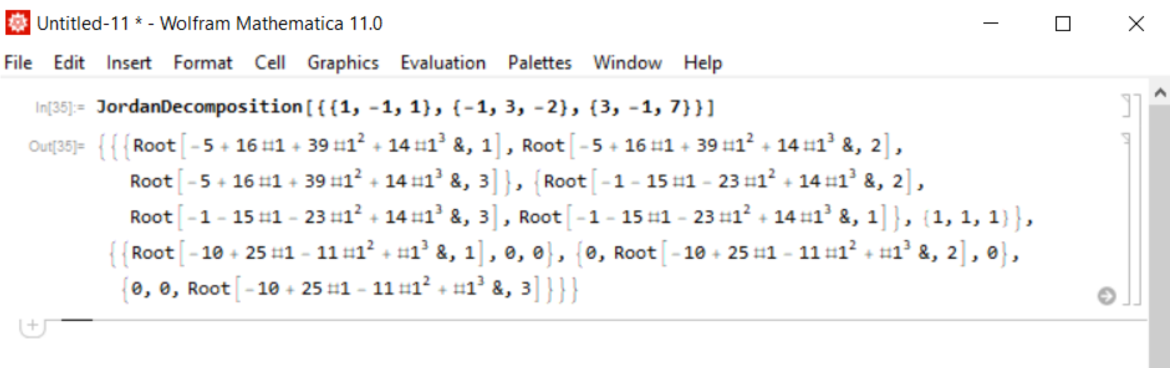
Obrázek 5: Choleského dekompozice př. 2. 1 – Wolfram Mathematica

2. 2 Jordanův rozklad

$$M \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad S \to \begin{pmatrix} 0,203825 & -2,18913 & -0,80041 \\ -0,43657 & -0,0759107 & 2,15534 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S \to \begin{pmatrix} 0,203825 & -2,18913 & -0,80041 \\ -0,43657 & -0,0759107 & 2,15534 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} \to \begin{pmatrix} 0,382054 & -0,237789 & 0,818316 \\ -0,44381 & -0,171954 & 0,0153896 \\ 0,0617553 & 0,409743 & 0,166294 \end{pmatrix}$$



Obrázek 6: Jordanův rozklad př. 2. 2 – Wolfram Mathematica

3. LU rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 11 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 - 2\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 11 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 - 1\cdot R_1 \to R_3}{\sim}$$

od druhého řádku odečteme dvakrát první řádek

od třetího řádku odečteme jedenkrát první řádek

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_4 - 1\cdot R_2 \to R_4}{\sim}$$

vyměníme druhý řádek se třetím

od čtvrtého řádku odečteme jedenkrát násobek druhého řádku

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 - 2\cdot R_4 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{R_4 \leftrightarrow R_3}{\sim}$$

od třetího řádku odečteme dvojnásobek čtvrtého řádku

vyměníme třetí řádek se čtvrtým

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Výpočet matice L

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_4 - 2\cdot R_3 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{R_2 + 1\cdot R_1 \to R_2}{\sim}$$

od čtvrtého řádku odečtu dvojnásobek třetího řádku

k druhému řádku přičtu první řádek

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{R_4 - 1\cdot R_1 \to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{R_3 - 1\cdot R_2 \to R_3}{\sim}$$

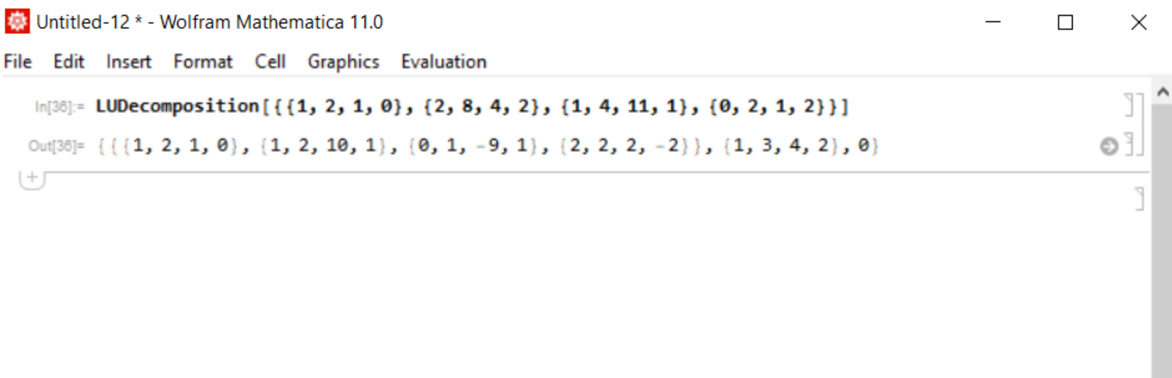
od čtvrtého řádku odečtu řádek první

od třetího řádku odečtu druhý řádek

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

v tomto příkladu při použití GEM došlo k výměně řádků, a proto využijeme vztah $PA = LU$



Obrázek 7: LU rozklad př. 3 – Wolfram Mathematica

3.1 Choleského dekompozice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = A^T$$
$$A = LL^T$$

Matice je symetrická, pozitivně definitní. Budeme postupovat podle algoritmu názorně ukázaného v následujících příkladech. Již z předchozí kapitoly víme, že matice budou trojúhelníkové. Postup algoritmu je v příkladech podrobně popsán.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} & 0 \\ l_{4,1} & l_{4,2} & l_{4,3} & l_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & l_{3,1} & l_{4,1} \\ 0 & l_{2,2} & l_{3,2} & l_{4,2} \\ 0 & 0 & l_{3,3} & l_{4,3} \\ 0 & 0 & 0 & l_{4,4} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} {l_{1,1}}^2 & l_{1,1}l_{2,1} & l_{1,1}l_{3,1} & l_{1,1}l_{4,1} \\ l_{1,1}l_{2,1} & {l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2 & l_{2,1}l_{3,1} + l_{2,2}l_{3,2} & l_{2,1}l_{4,1} + l_{2,2}l_{4,2} \\ l_{1,1}l_{3,1} & l_{2,1}l_{3,1} + l_{2,2}l_{3,2} & {l_{3,1}}^2 + {l_{3,2}}^2 + {l_{3,3}}^2 & l_{3,1}l_{4,1} + l_{3,2}l_{4,2} + l_{3,3}l_{4,3} \\ l_{1,1}l_{4,1} & l_{2,1}l_{4,1} + l_{2,2}l_{4,2} & l_{3,1}l_{4,1} + l_{3,2}l_{4,2} + l_{3,3}l_{4,3} & {l_{4,1}}^2 + {l_{4,2}}^2 + {l_{4,3}}^2 + {l_{4,4}}^2 \end{pmatrix}$$

$${l_{1,1}}^2 = 1 \Rightarrow l_{1,1} = \sqrt{1} = 1$$

$$l_{1,1}l_{2,1} = 2 \Rightarrow l_{2,1} = \frac{2}{l_{1,1}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$l_{1,1}l_{3,1} = 1 \Rightarrow l_{3,1} = \frac{1}{l_{1,1}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$l_{1,1}l_{4,1} = 0 \Rightarrow l_{4,1} = \frac{0}{l_{1,1}} = \frac{0}{1} = 0$$

$${l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2 = 8 \Rightarrow l_{2,2} = \sqrt{8 - {l_{2,1}}^2} = \sqrt{8 - 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$l_{2,1}l_{3,1} + l_{2,2}l_{3,2} = 4 \Rightarrow l_{3,2} = \frac{4 - l_{3,1}l_{2,1}}{l_{2,2}} = \frac{4 - 1 \cdot 2}{2} = 1$$

$$l_{2,1}l_{4,1} + l_{2,2}l_{4,2} = 2 \Rightarrow l_{4,2} = \frac{2 - l_{4,1}l_{2,1}}{l_{2,2}} = \frac{2 - 0 \cdot 2}{2} = 1$$

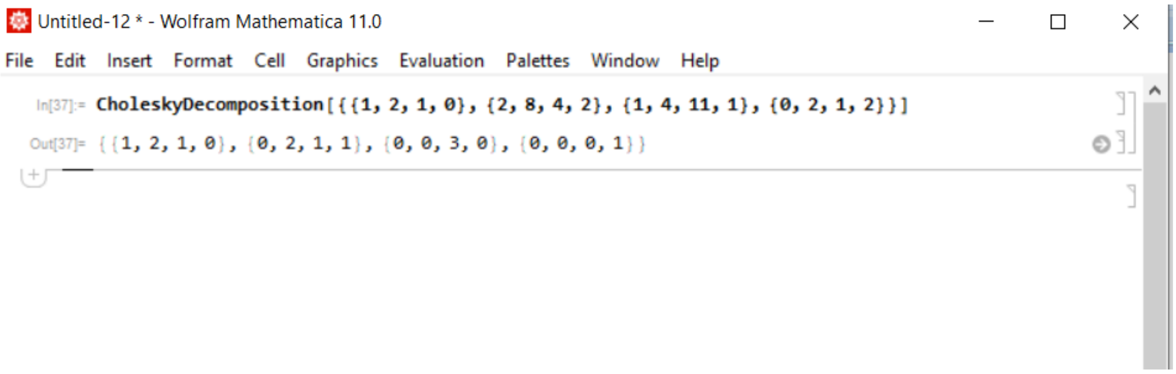
$${l_{3,1}}^2 + {l_{3,2}}^2 + {l_{3,3}}^2 = 11 \Rightarrow l_{3,3} = \sqrt{11 - \left({l_{3,1}}^2 + {l_{3,2}}^2\right)} = \sqrt{11 - \left(1^2 + 1^2\right)} = \sqrt{9} = 3$$

$$l_{3,1}l_{4,1} + l_{3,2}l_{4,2} + l_{3,3}l_{4,3} = 1 \Rightarrow l_{4,3} = \frac{1 - \left(l_{4,1}l_{3,1} + l_{4,2}l_{3,2}\right)}{l_{3,3}} = \frac{1 - (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1)}{3} = 0$$

$${l_{4,1}}^2 + {l_{4,2}}^2 + {l_{4,3}}^2 + {l_{4,4}}^2 = 2 \Rightarrow l_{4,4} = \sqrt{2 - \left({l_{4,1}}^2 + {l_{4,2}}^2 + {l_{4,3}}^2\right)} = \sqrt{2 - \left(0^2 + 1^2 + 0^2\right)} = \sqrt{1} = 1$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Obrázek 8: Choleského dekompozice př. 3. 1 – Wolfram Mathematica

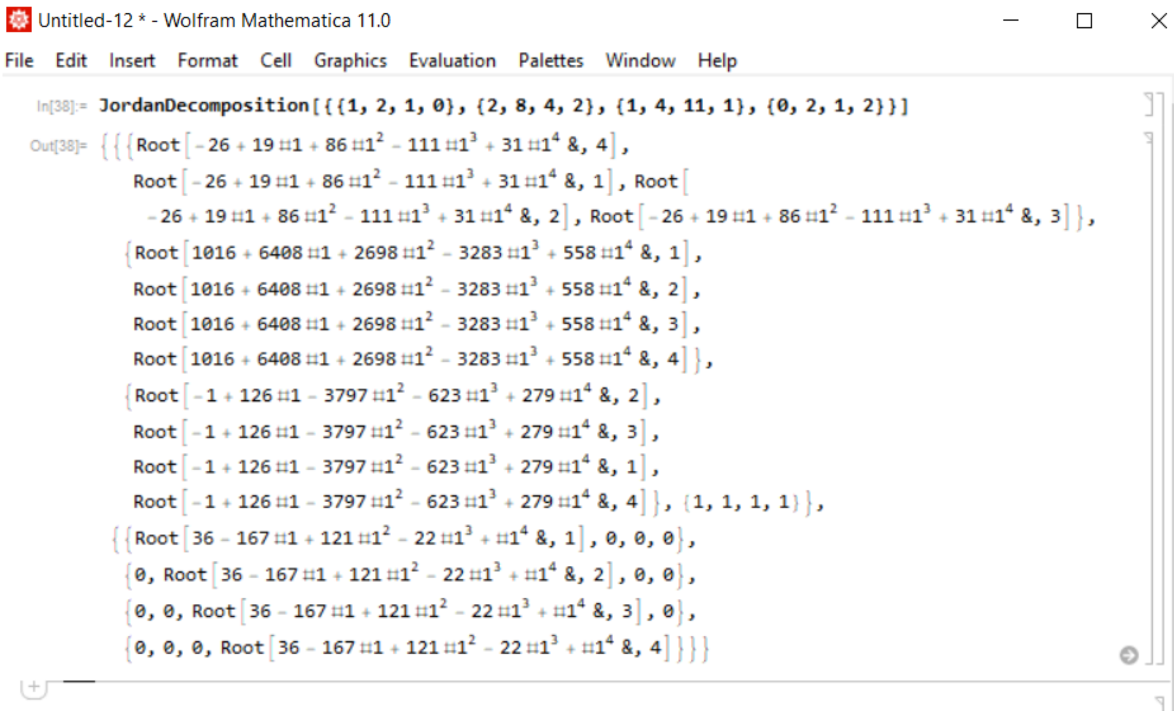
3. 2 Jordanův rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S \approx \begin{pmatrix} 2,35776 & -0,488842 & 0,786456 & 0,925273 \\ -0,87485 & -0,174097 & 3,22098 & 3,71148 \\ 0,0121927 & 0,0198566 & -2,75908 & 4,959 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J \approx \begin{pmatrix} 0,263492 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,67166 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,68288 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14,382 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0,321898 & -0,119441 & 0,00180116 & 0,136527 \\ -0,385015 & -0,13712 & 0,0156391 & 0,787606 \\ 0,0401136 & 0,164288 & -0,140728 & 0,0510055 \\ 0,0230036 & 0,0922727 & 0,123288 & 0,0248614 \end{pmatrix}$$



Obrázek 9: Jordanův rozklad př. 3. 2 – Wolfram Mathematica

Dále se podíváme na využití maticových rozkladů. Dají se například využít při řešení soustav lineárních rovnic, kterými se budeme nadále zabývat, a ukážeme si některé řešení.

4. $$\begin{aligned} 3x+2y&=20 \\ 2x+3y&=20 \end{aligned} \quad \Rightarrow x=\frac{20-2y}{3}$$

$$2\cdot\frac{20-2y}{3}+3y=20$$
$$\frac{40-4y}{3}+3y=20$$
$$40-4y+9y=60$$
$$5y=20$$
$$y=4$$

$$x=\frac{\left[20-(2\cdot 4)\right]}{3}$$
$$x=4$$

$$6x+4y=40$$
$$-6x-9y=-60$$
$$5y=20$$
$$y=4$$

$$2x+(3\cdot 4)=20$$
$$2x+12=20$$
$$2x=8$$
$$x=4$$

- soustavu řešíme postupy, které se vyučují už na základní škole

- nejprve metodou dosazovací a potom také metodou sčítací

- v tomto případě je jedno jakou metodu použijeme, obě jsou časově stejně náročné

Obrázek 10: Klasické řešení soustavy rovnic př. 4 – Wolfram Mathematica

4. 1 LU rozklad

$$3x + 2y = 20$$
$$2x + 3y = 20$$

ze soustavy rovnic vytvoříme matici A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2 - \left(\frac{3}{2}\right) \cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$U = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Výpočet matice L

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2-\left(\frac{3}{2}\right)\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$L = L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Obrázek 11: LU rozklad př. 4. 1 – Wolfram Mathematica

LU rozklad využíváme při řešení soustav rovnic ve tvaru $Ax = b$, postupujeme tak, že tuto soustavu přepíše do tvaru $LUx = b$. Dále musíme provést substituci $Ux = y$. Poté chybí vyřešit dvě soustavy rovnic, a to $Ly = b$ a $Ux = y$.

$$\begin{aligned} & Ly = b \\ & y_1 = 20 \\ & \frac{3}{2} y_1 + y_2 = 20 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & y_1 = 20 \\ & 3y_1 + 2y_2 = 40 \end{aligned} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & Uz = y \\ & 2z_1 + 3z_2 = 20 \\ & -\frac{5}{2} z_2 = -10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & 2z_1 + 3z_2 = 20 \\ & 5z_2 = 20 \end{aligned} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x = Pz$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. 2 Choleského dekompozice

$$3x + 2y = 20$$
$$2x + 3y = 20$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ze soustavy rovnic vytvoříme matici A

potom si matici rozložíme pomocí algoritmu již popsaného výše

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} \\ 0 & l_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1}{}^2 & l_{1,1}l_{2,1} \\ l_{1,1}l_{2,1} & l_{2,1}{}^2 + l_{2,2}{}^2 \end{pmatrix}$$

$$l_{1,1}{}^2 = 3 \Rightarrow l_{1,1} = \sqrt{3}$$

$$l_{1,1}l_{2,1} = 2 \Rightarrow 2 \Rightarrow l_{2,1} = \frac{2}{l_{1,1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$l_{2,1}{}^2 + l_{2,2}{}^2 = 3 \Rightarrow l_{2,2} = \sqrt{3 - l_{2,1}{}^2} = \sqrt{3 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = L \cdot L^T$$

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{3} \end{pmatrix}$$

Obrázek 12: Choleského dekompozice př. 4. 2 – Wolfram Mathematica

$L^T z = b$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\cdot\left(5-2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{3}} \\ 4\sqrt{15} \end{pmatrix} \qquad z = \left(\frac{4\cdot\left(5-2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{3}} ; 4\sqrt{15} \right)^T$$

$Lx = z$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\cdot\left(5-2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{3}} \\ 4\sqrt{15} \end{pmatrix} \qquad x = \left(\frac{-8\sqrt{5}+20}{3} ; \frac{-8\sqrt{5}+52}{3} \right)^T$$

4. 3 Jordanův rozklad

$M \to \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ hledáme vlastní čísla a vlastní vektory matice M

vlastní čísla λ jsou řešením rovnice

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

tedy $\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$(3-\lambda)^2 - 4 = 0$ „ $A^2 - B^2$"

$$(3-\lambda-2)(3-\lambda+2) = 0$$

$$(1-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 5$

- charakteristická čísla matice M

- charakteristické vektory $\vec{x}$ jsou řešením nenulové rovnice

$(M - \lambda_1 I)\cdot \vec{x} = 0$ nebo $(M - \lambda_2 I)\cdot \vec{x} = 0$

$$M - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = (x_1, x_2)$$

závislé řádky, jedna rovnice

$$x_1 + x_2 = 0$$

tedy $x_1 = -x_2$

například $1; -1$

$$M - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$ opět závislé řádky

$$x_1 - x_2 = 0$$
$$x_1 = x_2$$
$$(1;1)$$

$$S \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} \to \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Obrázek 13: Jordanův rozklad př. 4. 3 – Wolfram Mathematica

5)

$$2x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$$

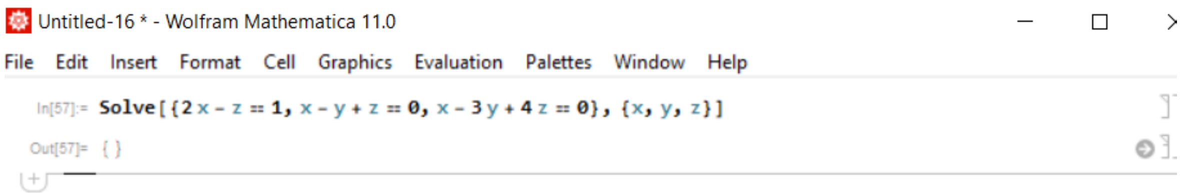
Soustavu rovnic opět vyřešíme klasickým způsobem, a to metodou sčítací, která je zde vhodnější, jelikož se jedná už o soustavu rovnic o třech neznámých.

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow 2x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}$$

$$2x_2 - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 4x_2 - 1 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}$$

$$x_1 - 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{4};\ x_2 = \frac{3}{4};\ x_3 = \frac{1}{2}$$



Obrázek 14: Klasické řešení soustavy rovnic př. 5 – Wolfram Mathematica

5. 1 LU rozklad

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Nejprve si rozložíme matici, vytvořenou ze soustavy, pomocí postupu popsaného u příkladu jedna.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 - 1 \cdot R_1 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 + R_2 \to R_3}{\sim}$$

vyměníme první řádek s druhým

od třetího řádku odečteme první řádek

k třetímu řádku přičteme druhý řádek

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

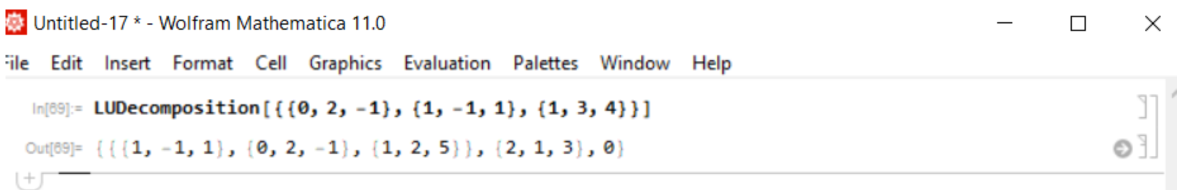
$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3-1\cdot R_2\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3+1\cdot R_1\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

jelikož jsme prohodili řádky, použijeme $PA = LU$

po nalezení matice U a matice L můžeme hledat řešení soustavy



Obrázek 15: LU rozklad př. 5 – Wolfram Mathematica

$$Ly = b$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 0 \\ -y_2 + y_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Uz = y$$

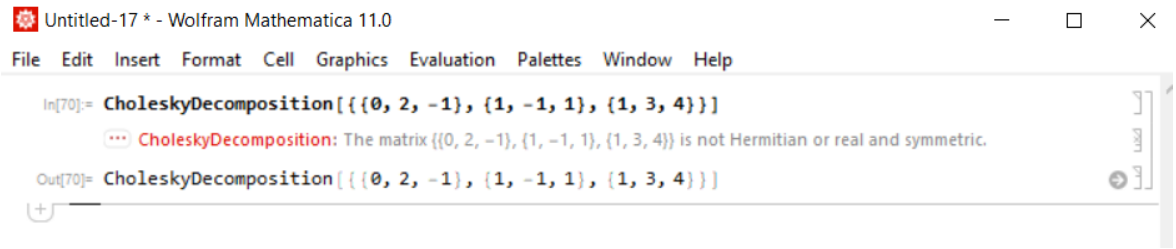
$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 1 \\ 2z_2 - z_3 &= 0 \\ 2z_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = Pz$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. 1 Choleského dekompozice

$A \neq A^T$ matice není symetrická, nepokračujeme v algoritmu

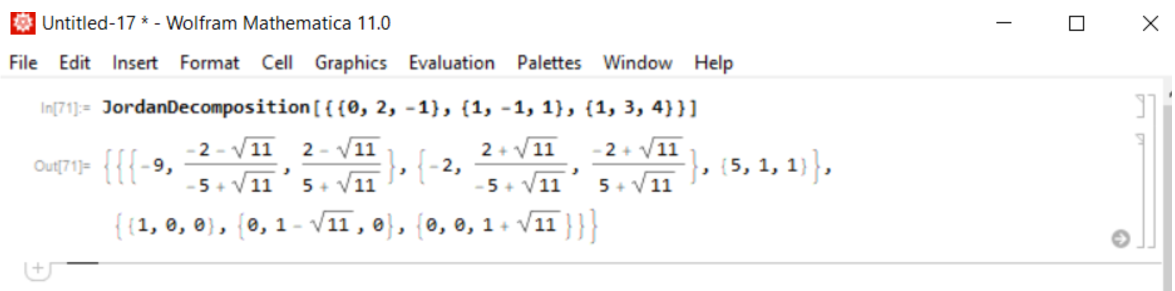


Obrázek 16: Choleského dekompozice př. 5. 1 – Wolfram Mathematica

5.2 Jordanův rozklad

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{4}\left(-3-\sqrt{5}\right) & 0 \\ 2 & \frac{1}{4}\left(3+\sqrt{5}\right) & 0 \\ 1 & 0 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

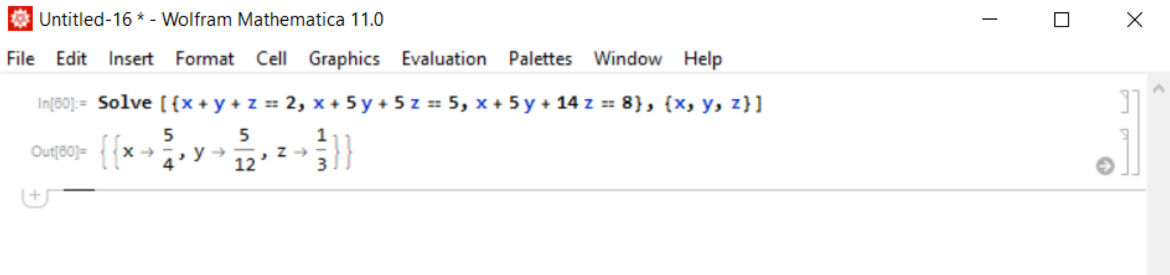
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$



Obrázek 17: Jordanův rozklad př. 5. 2 – Wolfram Mathematica

6. LU rozklad

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5$$
$$x_1 + 5x_2 + 14x_3 = 8$$



Obrázek 18: Klasické řešení soustavy rovnic př. 6 – Wolfram Mathematica

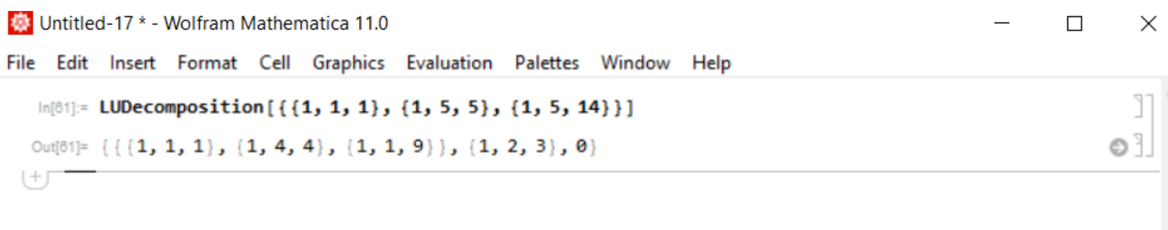
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 - 1 \cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 - 5 \cdot R_1 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 9 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- od druhého řádku odečteme první řádek
- od třetího řádku odečteme pětinásobek řádku prvního
- nedošlo k výměně řádku, pak $A = LU$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Obrázek 19: LU rozklad př. 6 – Wolfram Mathematica

$$Ly = b$$

$$\begin{aligned} & y_1 = 2 \\ & y_1 + y_2 = 5 \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 8 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & y_1 = 2 \\ & y_2 = 3 \\ & 2 + 3 + y_3 = 8 \end{aligned} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Uz = y$$

$$\begin{aligned} & z_1 + z_2 + z_3 = 2 \\ & 4z_2 + 4z_3 = 3 \\ & 9z_3 = 3 \end{aligned} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$x = Pz$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

6.1. Choleského dekompozice

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5 \\ & x_1 + 5x_2 + 14x_3 = 8 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

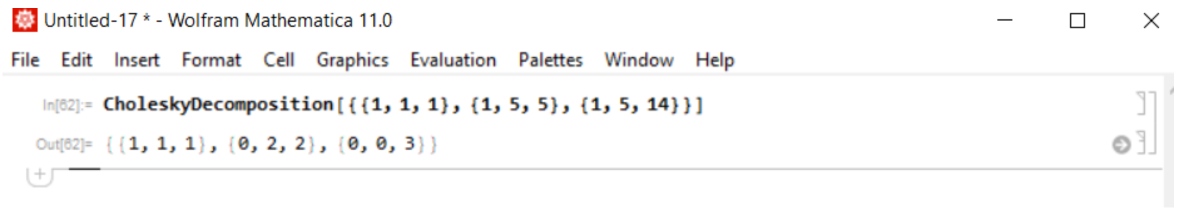
$$A = A^T$$

$$A = LL^T$$

- matice je pozitivně definitní a symetrická, proto pokračujeme v algoritmu pro hledání matice L

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & l_{2,2} & l_{3,2} \\ 0 & 0 & l_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {l_{1,1}}^2 & l_{1,1}l_{2,1} & l_{1,1}l_{3,1} \\ l_{1,1}l_{2,1} & {l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2 & l_{2,1}l_{3,1} + l_{2,2}l_{3,2} \\ l_{1,1}l_{3,1} & l_{2,1}l_{3,1} + l_{2,2}l_{3,2} & {l_{3,1}}^2 + {l_{3,2}}^2 + {l_{3,3}}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Obrázek 20: Choleského dekompozice př. 6. 1. – Wolfram Mathematica

$$A^T y = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \\ y_1 + 2y_2 &= 5 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 &= 8 \end{aligned} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

$$Ax = y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

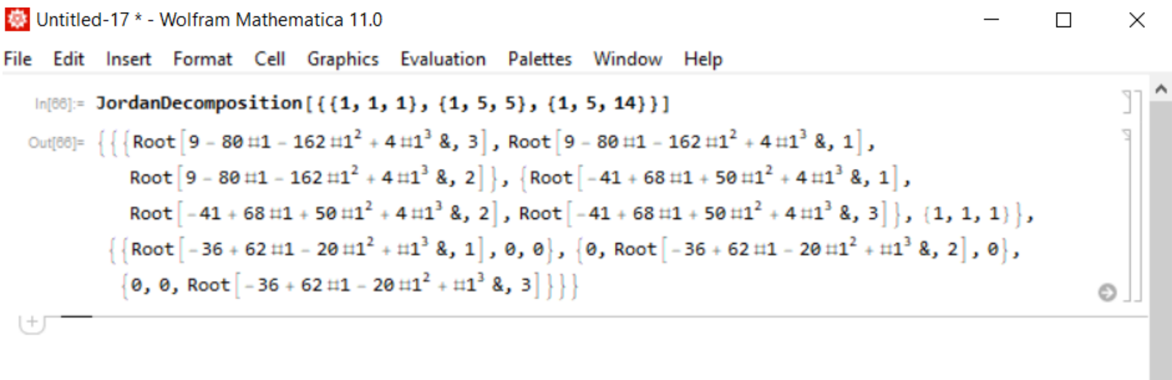
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 2x_3 &= \frac{3}{2} \\ 3x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$$

6.2. Jordanův rozklad

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$S \rightarrow \begin{pmatrix} 0,0944699 & 40,9866 & -0,581095 \\ 0,449224 & -10,8454 & -2,10386 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

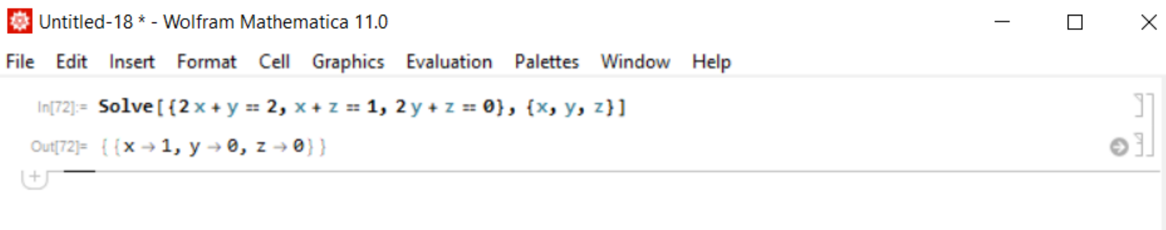
$$J \rightarrow \begin{pmatrix} 16,3406 & 0 & 0 \\ 0 & 0,759791 & 0 \\ 0 & 0 & 2,89962 \end{pmatrix}$$



Obrázek 21: Jordanův rozklad př. 6. 2 – Wolfram Mathematica

7. LU rozklad

$$2x_1 + x_2 = 2$$
$$x_1 + 2x_3 = 1$$
$$2x_2 + x_3 = 0$$



Obrázek 22: Klasické řešení soustavy rovnic př. 7 – Wolfram Mathematica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{S_1 \leftrightarrow S_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 - 2 \cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 - 2 \cdot R_2 \to R_3}{\sim}$$

- prohodili jsme první a druhý sloupec
- od druhého řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního řádku

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

od třetího řádku jsme odečetli dvojnásobek druhého řádku

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

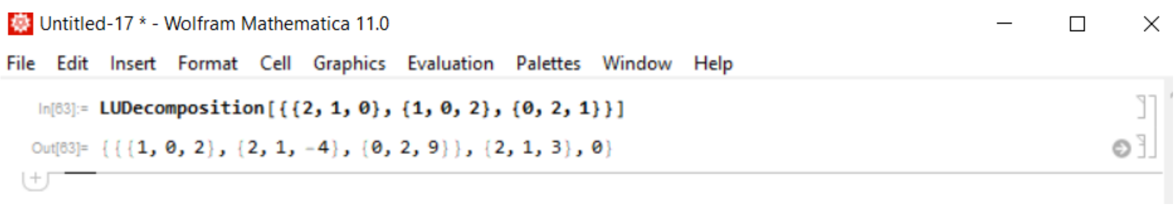
Výpočet matice L

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{S_1 \leftrightarrow S_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 + 2 \cdot R_1 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{S_2 \leftrightarrow S_1}{\sim}$$

- prohodili jsme první a druhý sloupec
- k třetímu řádku přičteme dvojnásobek prvního řádku
- prohodili jsme první a druhý sloupec

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 + 2 \cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Obrázek 23: LU rozklad př. 7 – Wolfram Mathematica

$$Ly = b$$

$$Ly = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \\ 2y_1 + y_2 &= 1 \\ 2y_2 + y_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Uz &= y \\ z_1 + 2z_3 &= 2 \\ z_2 - 4z_3 &= -3 \\ 9z_3 &= 6 \end{aligned} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$x = Pz$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

7.1 Choleského dekompozice

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & l_{2,2} & l_{3,2} \\ 0 & 0 & l_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1}{}^2 & l_{1,1}l_{2,1} & l_{1,1}l_{3,1} \\ l_{1,1}l_{2,1} & l_{2,1}{}^2 + l_{2,2}{}^2 & l_{2,1}l_{3,1} + l_{2,2}l_{3,2} \\ l_{1,1}l_{3,1} & l_{2,1}l_{3,1} + l_{2,2}l_{3,2} & l_{3,1}{}^2 + l_{3,2}{}^2 + l_{3,3}{}^2 \end{pmatrix}$$

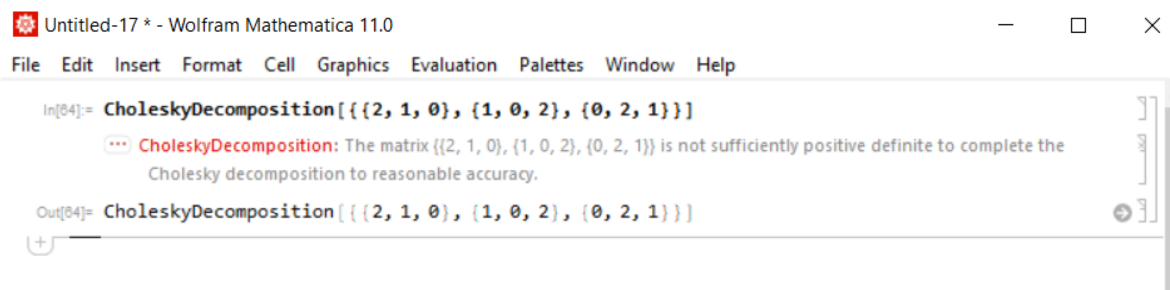
$$l_{1,1}{}^2 = 2 \Rightarrow l_{1,1} = \sqrt{2}$$

$$l_{1,1}l_{2,1} = 1 \Rightarrow l_{2,1} = \frac{1}{l_{1,1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$l_{1,1}l_{3,1} = 0 \Rightarrow l_{3,1} = \frac{0}{l_{1,1}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$l_{2,1}{}^2 + l_{2,2}{}^2 = 0 \Rightarrow l_{2,2} = \sqrt{0 - l_{2,1}{}^2} = \sqrt{0 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{-1}{2}}$$

- matice není definitivně pozitivní

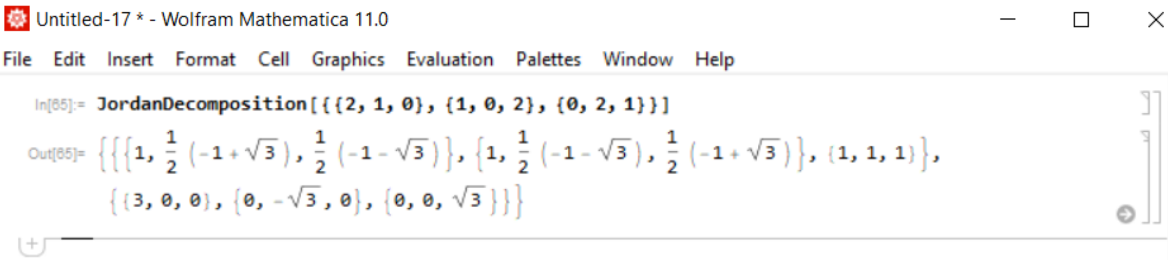


Obrázek 24: Choleského dekompozice př. 7. 1 – Wolfram Mathematica

7. 2 Jordanův rozklad

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) & \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\right) \\ 1 & \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$



Obrázek 25: Jordanův rozklad př. 7. 2 – Wolfram Mathematica

8. Výpočet inverzní matice pomocí LU rozkladu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 - 3 \cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Výpočet L

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 + 3 \cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

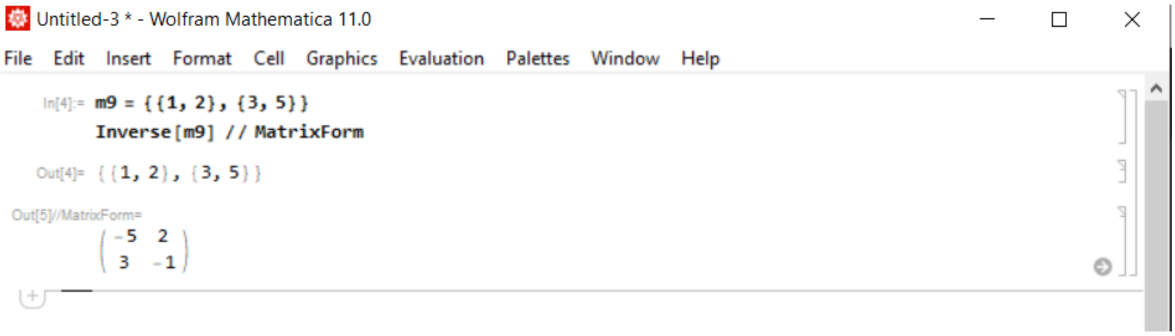
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Výpočet U^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = U^{-1} \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$



Obrázek 26 Inverzní matice př. 8 – Wolfram Mathematica

9. Výpočet inverzní matice pomocí LU rozkladu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

- nejprve si musíme matici rozložit na matici U a matici L, podle postupu vysvětleného výše

Výpočet matice U

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2+2\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Výpočet matice L

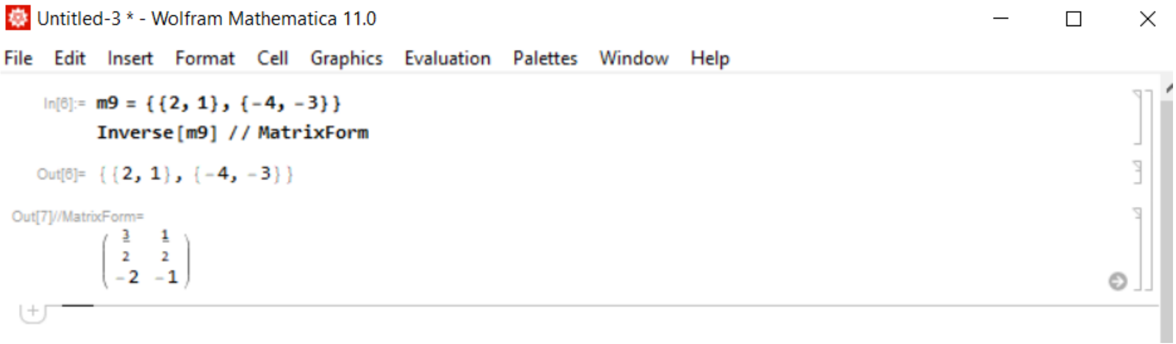
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2-2\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vypočet matice U^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = U^{-1} \cdot L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$



Obrázek 27 Inverzní matice pomocí př. 9 – Wolfram Mathematica

10. Výpočet inverzní matice pomocí Choleského dekompozice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = A^T; \qquad A = LL^T$$

- matici je symetrická a pozitivně definitní, tím pádem můžeme pokračovat v algoritmu pro nalezení matice L a L^T

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & l_{2,2} & l_{3,2} \\ 0 & 0 & l_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {l_{1,1}}^2 & l_{1,1}l_{2,1} & l_{1,1}l_{3,1} \\ l_{1,1}l_{2,1} & {l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2 & l_{2,1}l_{3,1} + l_{2,2}l_{3,2} \\ l_{1,1}l_{3,1} & l_{2,1}l_{3,1} + l_{2,2}l_{3,2} & {l_{3,1}}^2 + {l_{3,2}}^2 + {l_{3,3}}^2 \end{pmatrix}$$

$${l_{1,1}}^2 = 2 \Rightarrow l_{1,1} = \sqrt{2}$$

$$l_{1,1}l_{2,1} = 1 \Rightarrow l_{2,1} = \frac{1}{l_{1,1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$l_{1,1}l_{3,1} = 0 \Rightarrow l_{3,1} = \frac{0}{l_{1,1}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

$${l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2 = 2 \Rightarrow l_{2,2} = \sqrt{2 - {l_{2,1}}^2} = \sqrt{2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$l_{2,1}l_{3,1} + l_{2,2}l_{3,2} = 0 \Rightarrow l_{3,2} = \frac{0 - l_{3,1}l_{2,1}}{l_{2,2}} = \frac{0 - 0 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = 0$$

$${l_{3,1}}^2 + {l_{3,2}}^2 + {l_{3,3}}^2 = 4 \Rightarrow l_{3,3} = \sqrt{4 - \left({l_{3,1}}^2 + {l_{3,2}}^2\right)} = \sqrt{4 - \left(0^2 + 0^2\right)} = \sqrt{4} = 2$$

- pro inverzi matice A platí $A^{-1} = \left(LL^T\right)^{-1} = L^{-T}L^{-1}$

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \qquad L^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L^{-T} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = L^{-T} \cdot L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

10. 1 Vypočítej inverzní matici pomocí LU rozkladu

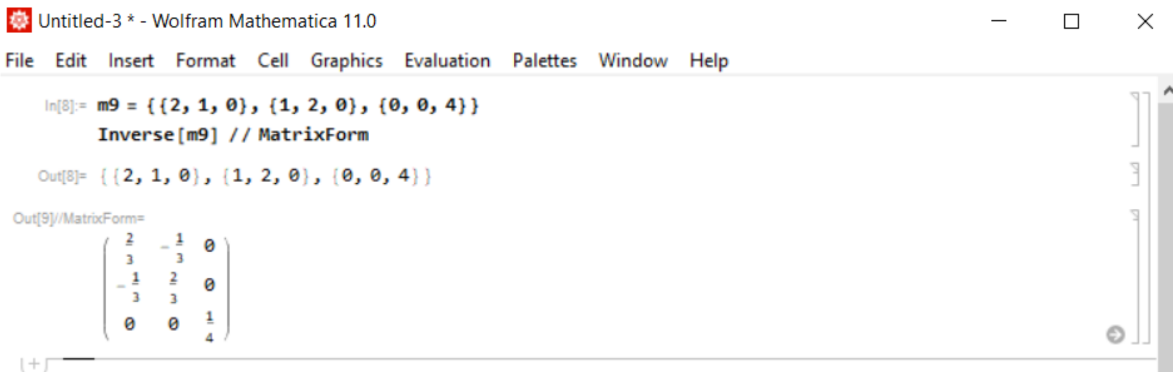
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Výpočet matic

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = U^{-1} \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



Obrázek 28 Inverzní matice př. 10 – Wolfram Mathematica

3 ZÁVĚR

V bakalářské práci jsme se zabývali maticovými rozklady. Nejdříve jsme si vymezili teoreticky dané rozklady, dále jsme si definovali dané pojmy, které s tímto tématem souvisí a které jsme pak dále využívali v druhé části. Tyto rozklady jsme využívali k řešení soustav lineárních rovnic, se kterými jsme se prvně setkali již na základní škole a také k výpočtům inverzní matice. U každého příkladu jsme si podrobně ukázali jednotlivé postupy. Začali jsme sčítací a dosazovací metodou, již známou ze 7. třídy základní školy, poté použili jednotlivé rozklady. Nakonec jsme využili pro výpočet příkladu program Wolfram Matematica, u kterého jsme díky jednoduchým příkazům dostali řešení konkrétních příkladů. Naším cílem bylo také porovnat časovou dotaci pro klasické počítání a pro použití Wolframu. V těchto případech byla aplikace programu mnohem efektivnější. Výsledky jsem obdržela během pár sekund a byly naprosto přesné. Nejvíce času zabralo přepsat matici do programu tak, aby jej vyhodnotil správně. Kdežto výpočty na papír trvaly i několik desítek minut, než bylo docíleno správného řešení.

Nemá smysl řešit úlohy o jedné soustavě, jelikož je to mnohem více práce než například při Gaussově eliminační metodě nebo pokud je to opravdu základní a jednoduchá soustava, je vhodnější a rychlejší použít sčítací nebo dosazovací metodu. Vybrané rozklady jsou efektivnější při řešení více soustav rovnic. Také nedocílíme výsledku při Choleského dekompozici, pokud není matice symetrická a definitně pozitivní. Tento algoritmus funguje pouze za těchto podmínek. Při mých výpočtech jsem usoudila, že Jordanův rozklad, oproti LU rozkladu a Choleského dekompozice, je mnohem složitější než tyto dva. Lépe a rychleji jsem řešila rozklady pomocí těchto dvou metod. Na Jordanův rozklad bylo mnohem výhodnější využít rovnou matematickým program než příklad řešit klasickým výpočtem na papír.

4 RESUMÉ

Cílem práce bylo zpracovat vybrané maticové rozklady, ukázat možnosti praktického využití těchto rozkladů a vyřešit konkrétní příklad. Předložit využití matematického softwaru při hledání rozkladu a řešení ukázkových úloh.

V teoretické části jsem se věnovala historickému kontextu dané problematiky. Rozebrala jsem vybrané rozklady, a to LU rozklad, Choleského dekompozice a Jordanův rozklad. Zabývala jsem se také pojmy, které s touto problematikou souvisí a které jsme poté využila při zpracování úloh. Opírala jsem se o odbornou literaturu, která tyto pojmy vysvětluje. V praktické části jsem ukázala podrobné řešení příkladů daných rozkladů a jejich využití při řešení soustav rovnic a inverzních matic nejprve metodami ze základních škol a poté pomocí rozkladů. Využila jsem matematický software Wolfram Mathematica pro srovnání výsledků a náročnosti řešení.

Klíčová slova: LU rozklad, Choleského dekompozice, Jordanův rozklad, horní trojúhelníková matice, dolní trojúhelníková matice, symetrická matice, pozitivně afinitní matice, soustava rovnic, inverzní matice, matematický software, řešené příklady

The aim of this work was to process the chosen matrix decompositions, to show the possibilities of practical using of these decompositions and to solve a specific example. To submit the using of the mathematical software in searching of the decomposition and solutions of the sample tasks.

In the theoretical part, I dealt with the historical kontext of the given issue. I dismantled the chosen decompositions, the LU decomposition, the Cholesky decomposition and the Jordan decomposition. I also dealt with concepts related to this issue. Then, I used them to process tasks. I proceeded from the specialized literature to explain these concepts. Inthepractical part, I demonstrated a detailed solution of examples of given decompositions and thei rusing in solving of the systém of linear equations and inverse matrix at first by methods from elementary schools and then by decompositions. I used the Wolfram Mathematical software to compaq the results and complexity of the solution.

5 KEYWORDS:

the LU decomposition, the Cholesky decomposition, the Jordan decomposition, uppertriangular matrix, lowertriangular matrix, symmetric matrix, positive definition matrix, systém of linearequations, inverse matrix, mathematical software, solved examples

SEZNAM LITERATURY

[1] BEČVÁŘ, J. Lineární algebra. Vyd. 3. Praha: Matfyzpress, 2005. ISBN 80-86732-57-6.

[2] BEČVÁŘ, J. Z historie lineární algebry. Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 2007. 978-80-7378-036-4

[3] BICAN, L. Lineární algebra a geometrie. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9.

[4] DUINTJER TEBBENS, Erik Jurjen. Analýza metod pro maticové výpočty: základní metody. Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 2012, 308 s. ISBN 978-80-7378-201-6.

[5] FIEDLER, M. Speciální matice a jejich použití v numerické matematice. Vyd. 1. Praha: SNTL, 1981. ISBN 90-247-2957-2

[6] NOVÁČEK M. Maticové rozklady. In: is.muni.cz [online]. 1/2012 [cit. 23. 6. 2021]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1431/podzim2011/M1VM01/um/rozklady.dokumentace.pdf

[7] O'Connor JJ, Robertson EF. Ernst Pascual Jordan. In: mathshistory.st-andrews.ac.uk [online]. 7/2015 [cit. 23. 6. 2021]. Dostupné z https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jordan_Pascual/

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ