



**FAKULTA  
APLIKOVANÝCH VĚD  
ZÁPADOČESKÉ  
UNIVERZITY  
V PLZNI**

Bakalářská práce

# Matematický pohled na integrály ve fyzice

Plzeň, 2020

Alexandra Marešová

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Matematický pohled na integrály ve fyzice* vypracovala samostatně a s použitím uvedené literatury.

V Plzni dne .....

Podpis .....

# Poděkování

Děkuji svému vedoucímu RNDr. Petru Tomiczkovi CSc. za velmi motivující vedení. Mé hluboké poděkování patří mojí rodině, především manželovi a synům, za jejich nekonečnou trpělivost a podporu, bez nichž bych nemohla práci dokončit.

# Abstrakt

Tato bakalářská práce se věnuje křivkovým a plošným integrálům a jejich aplikaci ve fyzikálních zákonech elektromagnetismu. Cílem bylo popsat matematický aparát vystupující v Maxwellových rovnicích. Po krátkém seznámení s elektromagnetismem postupujeme jednoduchými úvahami k vyslovení potřebných matematických definic a vět. Jejich aplikaci ukazujeme na vhodných příkladech. V závěru se dostaneme k Maxwellovým rovnicím, které nejprve vyjádříme v integrálních tvarech, následně s využitím definovaného aparátu odvodíme vztahy diferenciální a naznačíme důsledek vzájemné interakce elektrického a magnetického pole v čase v podobě elektromagnetické vlny.

**Klíčová slova:** křivka a křivkový integrál, plocha a plošný integrál, diferenciální operátory, Maxwellovy rovnice, Greenova věta, Stokesova věta, Gaussova-Ostrogradského věta.

# Abstract

This thesis focuses on line and surface integrals and their applications in the theory of electromagnetism. The main issue of this thesis is to describe the mathematical background of Maxwell's equations. After a short introduction to electromagnetism we continue with simple considerations to present the necessary definitions and theorems. Suitable examples are solved using the theory. At the end we express Maxwell's equations in integral form and we use the theorems to derive the differential form. Finally, we suggest the consequence of the interaction between electric and magnetic fields over time and in the form of electromagnetic waves.

**Key words:** curve and line integral, surface and surface integral, differential operators, Maxwell's equations, Green's theorem, Stokes' theorem, Gauss-Ostrogradsky's theorem.

# Značení

U každého uvedeného označení je doplněno číslo strany, na které je pojem vysvětlený.

$\vec{\mathbf{B}}$ [T]	magnetická indukce (str. 5)
$d$	délka křivky (str. 11)
$\mathcal{D}$	dělení (str. 11)
$\mathcal{D}$	definiční obor (str. 33)
$\vec{\mathbf{D}}$ [C · m <sup>-2</sup> ]	elektrická indukce (str. 48)
div	divergence (str. 35)
$\vec{\mathbf{E}}$ [N · C <sup>-1</sup> ]	intenzita elektrického pole (str. 4)
$\mathcal{E}$ [V]	elektromotorické napětí (str. 46)
$\vec{\mathbf{F}}$ [N]	síla (str. 2)
$\vec{\mathbf{F}}_B$ [N]	magnetická síla (str. 5)
$\vec{\mathbf{F}}_E$ [N]	elektrická síla (str. 3)
$\mathcal{G}$	Gaussova plocha (str. 23)
grad (resp. $\nabla$ )	gradient (str. 33)
$\vec{\mathbf{H}}$ [A · m <sup>-1</sup> ]	magnetická intenzita (str. 48)
int $\mathcal{K}$ (ext $\mathcal{K}$ )	vnitřek (vnějšek) uzavřené křivky $\mathcal{K}$ (str. 11)
$I$ [A]	elektrický proud (str. 5)
$I_c$ [A]	celkový proud (str. 47)
$I_M$ [A]	Maxwellův proud (str. 47)
$\vec{\mathbf{J}}$	hustota elektrického proudu (str. 5)
$\mathcal{K}$	křivka (str. 9)
$\mathcal{K}^+$ ( $\mathcal{K}^-$ )	kladně (záporně) orientovaná křivka (str. 10)
$\vec{n}$	normálový vektor (str. 23)
$P$	velikost plochy (str. 26)
$Q$ [C]	elektrický náboj (str. 3)
$\vec{r}$	polohový vektor (str. 3)
$\vec{\mathbf{r}}$	parametrizace (str. 9)
$\vec{\mathbf{r}}_u$	$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u}$ (str. 23)
$\vec{\mathbf{r}}_v$	$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial v}$ (str. 23)

rot	rotace (str. 35)
$\vec{s}$	vektor posunutí (str. 2)
$S$	plocha (str. 22)
$S^+(S^-)$	plocha orientovaná souhlasně (nesouhlasně) se svou parametrizací (str. 23)
$\vec{S}$	vektor kolmý na plochu $S$ , jehož velikost je rovna velikosti této plochy (str. 4)
$\mathcal{S}$	integrální součet (str. 12)
$\vec{v} [m \cdot s^{-1}]$	rychlost (str. 5)
$W [m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}]$	práce (str. 2)
$\varepsilon$	permitivita prostředí (str. 3)
$\mu$	permeabilita prostředí (str. 7)
$\rho [C \cdot m^{-2}]$	plošná hustota náboje (str. 3)
$\sigma [C \cdot m^{-3}]$	objemová hustota náboje (str. 3)
$\tau [C \cdot m^{-1}]$	délková hustota náboje (str. 3)
$\vec{r}$	směrový vektor tečny (str. 13)
$\Phi$	tok vektorového pole (str. 24)
$\Phi_B$	magnetický indukční tok (str. 7)
$\Phi_E$	tok elektrické intenzity (str. 4)
$\Omega$	oblast (str. 22)
$\int_{\mathcal{K}}$	křivkový integrál (str. 12)
$\oint_{\mathcal{K}}$	cirkulace (str. 13)
$\iint_S$	plošný integrál (str. 24)
$\ \vec{v}\ $	norma vektoru $\vec{v}$ (str. 3)

# Obsah

Prohlášení	iii
Poděkování	iv
Abstrakt	v
Značení	vi
Úvod	1
<b>1 Fyzikální kontext</b>	<b>2</b>
1.1 Mechanika . . . . .	2
1.2 Elektromagnetismus . . . . .	3
<b>2 Křivky a křivkový integrál</b>	<b>8</b>
2.1 Křivka a její vlastnosti . . . . .	9
2.2 Křivkový integrál . . . . .	12
2.3 Křivkové integrály v příkladech . . . . .	13
<b>3 Plocha a plošný integrál</b>	<b>22</b>
3.1 Plocha a její vlastnosti . . . . .	22
3.2 Gaussova plocha . . . . .	23
3.3 Plošné integrály . . . . .	24
3.4 Plošné integrály v příkladech . . . . .	26
<b>4 Diferenciální operátory</b>	<b>33</b>
<b>5 Integrální věty</b>	<b>37</b>
5.1 Greenova věta . . . . .	37
5.2 Stokesova věta . . . . .	40
5.3 Gaussova-Ostrogradského věta . . . . .	42
<b>6 Maxwellovy rovnice</b>	<b>45</b>
6.1 Integrální tvary Maxwellových rovnic . . . . .	45
6.2 Odvození diferenciálních tvarů . . . . .	48
6.3 Význam Maxwellových rovnic . . . . .	50
<b>Závěr</b>	<b>58</b>

# Úvod

Matematika a fyzika jsou bezpochyby dvě velmi úzce spjaté disciplíny. Zatímco fyzika popisuje konkrétní dění, matematika se snaží najít jakýsi obecný popis nebo nástroj, který lze aplikovat pro různé, nicméně analogické situace. Tato práce má za cíl popsat křivkové a plošné integrály jako nástroj matematiky a vysvětlit význam, který mají ve fyzikálních zákonech elektromagnetického pole. Integrál tedy chápeme jako „postup při výpočtu“, jehož výsledek je abstraktní až do chvíle, než jej využijeme v konkrétní situaci. Takovou situací může být například požadavek na určení hmotnosti křivky nebo plochy, výpočet práce vykonané konkrétní silou nebo v našem případě popis elektromagnetického pole.

V úvodní kapitole se budeme věnovat fyzikálnímu kontextu, kdy popíšeme základní veličiny a formulujeme potřebné fyzikální vztahy. Krátce se zmíníme o silovém poli v mechanice, které nám pomůže při definování křivkového integrálu. Zásadní část této kapitoly pak bude věnována elektřině a magnetismu a seznámení s fyzikálními pojmy, které budou vystupovat v dalších částech.

**Kapitola 2** je věnovaná definicím *křivky*, *křivkového integrálu* a vysvětlíme zde pojem *vektorového pole*. Podobně v **kapitole 3** definujeme *plochu*, *Gaussovu plochu* a *plošný integrál*. Na koncích obou těchto kapitol jsou uvedené ilustrační příklady, které prezentují základní aplikaci definovaných pojmů. Pro orientaci v řešení se předpokládají základní znalosti diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné i více proměnných a znalosti z diferenciální geometrie v rozsahu parametrizace křivek a ploch. Zadání příkladů bylo čerpáno z literatury [5] a [8].

Následující dvě kapitoly se věnují výhradně matematice. V **kapitole 4** vysvětlíme význam tří diferenciálních operátorů, *gradientu*, *divergence* a *rotace*. Zároveň se seznámíme s potenciálem vektorového pole. **Kapitola 5** je zaměřena na odvození zásadních integrálních vět, které vymezují souvislosti mezi křivkovým, plošným, dvojným a trojným integrálem. Platnost *Greenovy*, *Stokesovy* a *Gaussovy-Ostrogradského* věty je následně demonstrována na již dříve řešených příkladech nebo na jejich drobných modifikacích.

V poslední kapitole formulujeme čtyři zákony elektromagnetismu, které jsou v dnešní době známé jako *Maxwellovy rovnice*. Zákony vyslovíme v integrálních tvarech a při odvozování tvarů diferenciálních ukážeme souvislosti popsané v integrálních větách. Závěr této kapitoly věnujeme vysvětlení významu Maxwellových rovnic.

Vizualizace vektorových polí pro tuto práci byly vytvořeny v softwaru *Wolfram Mathematica 11.2*, ve kterém byly prováděny i některé dílčí výpočty. Ostatní obrázky a ilustrace byly zpracované v aplikaci *GeoGebra Klasik*. Všechny zdrojové soubory jsou k dispozici na příloženém CD.



# Kapitola 1

## Fyzikální kontext

Abychom mohli plně využít matematický aparát následujících stránek, je nutné se alespoň na základní úrovni zorientovat ve fyzikálních pojmech a základních vztazích, které budeme využívat. Příklady, na kterých budeme ilustrovat využití matematiky, jsou převážně z oblasti elektromagnetismu, jen velmi malá část se věnuje mechanice<sup>1</sup>. Je nutné zmínit, že následující odstavce neobsahují zdaleka vše, co elektromagnetismus, potažmo mechanika, nabízí, nicméně jsou zde vybrané ty části, které budeme využívat k ilustraci aplikace matematického aparátu. Informace k této kapitole byly čerpány především z literatury [5] a [9].

### 1.1 Mechanika

**Práce.** Velmi zjednodušeně můžeme práci definovat jako změnu kinetické energie sledovaného objektu působením síly. Vztah mezi prací  $W$  a změnou kinetické energie  $\Delta E_k$  můžeme zapsat jako

$$\Delta E_k = E_{k_0} - E_{k_1} = W, \quad (1.1)$$

kde  $E_{k_0}$  představuje počáteční kinetickou energii a  $E_{k_1}$  koncovou kinetickou energii. Musíme si uvědomit, že výše uvedený vztah je platný *pouze* pro částice a dokonale tuhá tělesa, která se působením vnějších sil nedeformují.

Chceme-li vyjádřit souvislost mezi změnou kinetické energie  $\Delta E_k$  a silou  $\vec{\mathbf{F}}$ , která tuto změnu vyvolala a jejíž velikost je *konstantní*, dostáváme

$$W = \|\vec{\mathbf{F}}\| \|\vec{s}\| \cos \varphi, \quad (1.2)$$

kde  $\varphi$  je velikost úhlu, který svírá vektor síly  $\vec{\mathbf{F}}$  s vektorem posunutí  $\vec{s}$  (viz [obrázek 1.1](#)). Vztah (1.2) můžeme také zapsat jako

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{s}, \quad (1.3)$$

což je vektorové vyjádření práce *konstantní* síly  $\vec{\mathbf{F}}$  působící na částici nebo dokonale tuhé těleso po dráze  $\vec{s}$ .

---

<sup>1</sup>V tomto textu se jedná o tzv. klasickou mechaniku, tedy platí Newtonovy pohybové zákony a uvažované rychlosti jsou ostře menší než je rychlost světla.

**Příklad 1.1.** Představme si částici, na kterou působí síla  $\vec{F}$ . Obrázek 1.1 znázorňuje posun částice ve směru vektoru  $\vec{s}$ , ke kterému dojde v důsledku působení této síly. Ptáme se, jakou práci tato síla vykoná, pokud síla  $\vec{F}$  nebude konstantní a částice se bude pohybovat po obecné křivce.



Obrázek 1.1: Působení konstantní síly na částici.

Nyní víme, že pokud je působící síla  $\vec{F}$  konstantní, potom práci, kterou tato síla vykoná, vyjádříme podle vztahu (1.2) jako  $W = F s \cos \varphi$ , kde  $F = \|\vec{F}\|$ ,  $s = \|\vec{s}\|$ . V kapitole 2 odvodíme obecnější vztahy, pomocí nichž dokážeme příklad 1.1 vyřešit.

## 1.2 Elektromagnetismus

Základní definice a zákony elektřiny a magnetismu, které využijeme k řešení ilustračních příkladů dále, uvedeme bez odvozování a detailního popisu. V této práci se budeme zabývat *elektrostatikou*, která se věnuje silovému působení nepohybujících se elektricky nabitých částic, a *elektromagnetismem*, který se naopak věnuje silovému působení pohybujících se elektricky nabitých částic. Silové působení v elektrostatice vyjadřujeme elektrickou silou  $\vec{F}_E$ , analogicky silové působení v magnetismu popisuje magnetická síla  $\vec{F}_B$ . Podobně je elektrické pole popsáno elektrickou intenzitou  $\vec{E}$  a magnetické pole magnetickou indukcí  $\vec{B}$ . Detailní informace ke vztahům uvedeným níže lze najít například v literatuře [5] a [6].

**Elektrický náboj.** Základním pojmem elektrostatiky je *elektrický náboj*  $Q$ . Rozlišujeme náboj dvojího druhu: *kladný* a *záporný*. Pokud hovoříme o samostatném náboji (ať už kladném, nebo záporném), nazýváme jej *monopól*. V případě, že se zabýváme dvojicí nábojů, zpravidla jedním kladným a druhým záporným, mluvíme o *dipólu*. O tělese říkáme, že je *nabité*, když rozdílem v počtu kladných a záporných nábojů vznikne volný náboj. Nabitá tělesa potom působí na své okolí. Náboj  $Q$  můžeme chápat jako bodový, pokud je diskrétní a soustředěný do jednoho bodu. Může také být rozložen lineárně na křivce  $\mathcal{K}$ , plošně na ploše  $S$  nebo prostorově v objemu  $V$ . Potom je jeho množství vyjádřeno po řadě lineární hustotou  $\tau = \frac{dQ}{ds}$ , kde  $s$  je oblouková délka křivky, plošnou hustotou  $\sigma = \frac{dQ}{dS}$ , případně objemovou hustotou  $\rho = \frac{dQ}{dV}$ .

**Coulombův zákon.** Je základním zákonem elektrostatiky a vyjadřuje sílu, s jakou na sebe působí dvě nabitá tělesa zanedbatelných rozměrů, které nazýváme *bodové náboje*  $Q_1$  a  $Q_2$ , jejichž vzájemná poloha je určena vektorem  $\vec{r}$ . Uvádíme jej ve tvaru

$$\vec{F}_E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q_1||Q_2|}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}, \quad (1.4)$$

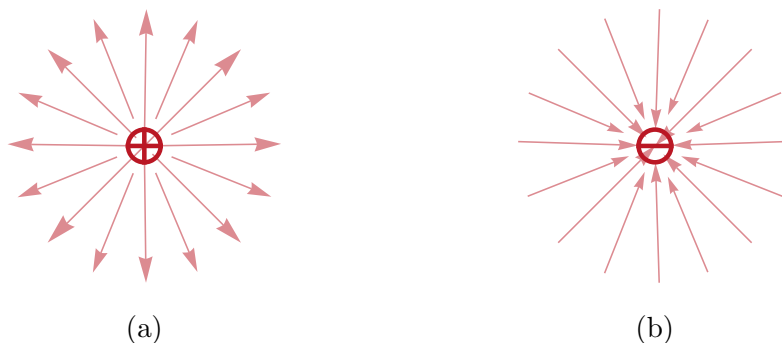
kde  $\epsilon$  je *permitivita prostředí*.

**Elektrická intenzita.** Každý náboj okolo sebe vytváří *elektrické pole*, kterým působí na své okolí. Vektorová veličina  $\vec{\mathbf{E}}$ , která popisuje elektrické pole v každém jeho bodě, se nazývá *intenzita elektrického pole*<sup>2</sup> a definuje se vztahem

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_E}{|Q_0|}, \quad (1.5)$$

kde  $\vec{\mathbf{F}}_E$  je elektrická síla, která působí na kladný *nepohybující se* testovací náboj  $Q_0$  umístěný do jednoho konkrétního bodu. Směr vektoru  $\vec{\mathbf{E}}$  je určen směrem této síly. Elektrickou intenzitu  $\vec{\mathbf{E}}$  bodového náboje vyjádříme s pomocí Coulombova zákona (1.4) jako

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q||Q_0|}{|Q_0|\|\vec{r}\|^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q|}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}. \quad (1.6)$$



Obrázek 1.2: Elektrické siločáry v okolí kladného a záporného náboje.

O *homogenním elektrickém poli* mluvíme tehdy, když jsou elektrické siločáry vektorového pole  $\vec{\mathbf{E}}$  rovnoběžné. V opačném případě se jedná o pole *nehomogenní*. Vektor  $\vec{\mathbf{E}}$  je směrovým vektorem tečny k elektrickým siločáram, kterými se popisuje tvar elektrického pole v okolí nábojů. Siločáry jsou myšlené čáry, které se neprotínají. V okolí kladného náboje směřují od náboje, v okolí záporného náboje směřují k náboji, jak ilustruje [obrázek 1.2](#).

**Tok elektrické intenzity.** Tok elektrické intenzity je základním stavebním kamenem Gaussova zákona (6.1) a velmi intuitivně řečeno vyjadřuje „kolik elektrického pole“ proteče povrchem tělesa ohraničeného Gaussovou plochou  $\mathcal{G}$ , kterou definujeme v [části 3.2](#). V [kapitole 3](#) také hovoříme podrobně o toku obecného vektorového pole a o plošném integrálu, pomocí kterého definujeme tok elektrické intenzity *uzavřenou* plochou ve tvaru

$$\Phi_E = \iint_{S^+} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{S}}, \quad (1.7)$$

kde  $d\vec{\mathbf{S}}$  vyjadřuje vektor o velikosti  $dS$  (elementárně malá část plochy  $S$ ), který je kolmý k ploše  $S$ .

<sup>2</sup>Zkráceně se používá název *elektrická intenzita*.

**Elektrický proud.** Mikroskopický uspořádaný pohyb náboje je z makroskopického pohledu popisován jako *elektrický proud*. Definuje se jako množství náboje  $Q$ , který projde průřezem vodičem za čas  $t$ , což vyjádříme jako

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}. \quad (1.8)$$

Pokud se náboj pohybuje vodičem rovnoměrně, potom velikost proudu není závislá na čase a mluvíme o stejnosměrném proudu. Zavedeme-li veličinu *hustota elektrického proudu*, označovanou  $\vec{J}$  a definovanou jako  $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$ , kde  $\rho$  je objemová hustota náboje a  $\vec{v}$  je rychlost, s jakou se náboje pohybují, potom můžeme elektrický proud vyjádřit ve tvaru

$$I = \iint_{S^+} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (1.9)$$

tedy jako tok vektoru  $\vec{J}$  orientovanou plochou  $S^+$ , kterou definujeme v [části 3.1](#). Na pravé straně předchozí rovnosti opět vystupuje plošný integrál, o němž budeme hovořit v [části 3.3](#).

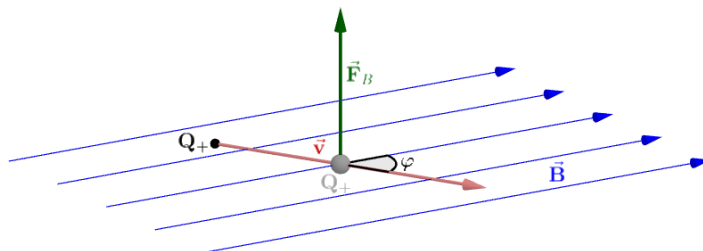
Přesuneme se nyní k magnetickému poli, které může vznikat dvěma způsoby. Buď vzniká v okolí látek, které jsou složeny z elementárních částic, jejichž základní charakteristikou je vytváření magnetického pole ve svém okolí. Takové látky slouží k výrobě permanentních magnetů. V druhém případě magnetické pole vzniká v důsledku pohybu elektricky nabitých částic, jakými jsou nosiče nábojů ve vodičích.

**Magnetická indukce.** Každý magnet nebo vodič, jímž protéká proud, vytváří *magnetické pole*, kterým působí na své okolí. Toto pole je popsáno vektorovou veličinou  $\vec{B}$ , kterou vyjadřujeme pomocí magnetické síly  $\vec{F}_B$  působící na částici s nábojem o velikosti  $Q$ , která se pohybuje rychlostí  $\vec{v}$ . Směr vektoru  $\vec{B}$  je kolmý k vektoru síly  $\vec{F}_B$  a jeho orientace vzhledem k magnetické síle je dána pravidlem pravé ruky (podrobně např. v [\[5\]](#)). Magnetickou indukci můžeme považovat za analogii k elektrické intenzitě a definujeme ji vztahem

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_B}{Q \|\vec{v}\|}. \quad (1.10)$$

Vektor  $\vec{B}$  je v každém bodě magnetického pole směrovým vektorem tečny k magnetickým indukčním čarám, kterými se znázorňuje tvar pole. Magnetické indukční čáry jsou analogií k elektrickým siločarám. Na rozdíl od siločar jsou to uzavřené křivky, jejichž směr je v případě permanentního magnetu určen od severního k jižnímu pólu. V případě okolí vodiče s proudem se směr indukčních čar určuje opět pomocí pravidla pravé ruky. Zatímco elektrický náboj může existovat samostatně, základním elementem magnetického pole je *magnetický dipól* (vždy je přítomen jak severní, tak jižní pól)<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Celosvětově se vědci snaží potvrdit existenci magnetického monopólu, což by znamenalo další průlom v popisu elektromagnetického pole. V rámci naší práce budeme respektovat doposud platný fakt, že magnetické monopóly neexistují.



Obrázek 1.3: Lorentzova síla  $\vec{F}_B$  působící na pohybující se částici.

Sílu  $\vec{F}_B$  z (1.10) můžeme vyjádřit vektorově vztahem

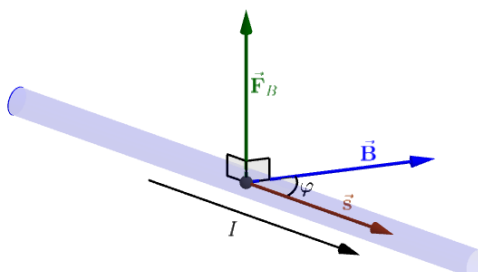
$$\vec{F}_B = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.11)$$

a v tomto tvaru je známá jako *Lorentzova síla*.

Následující vztah zavádí jinou formulaci magnetické síly  $\vec{F}_B$  ve tvaru

$$\vec{F}_B = I\vec{s} \times \vec{B}, \quad (1.12)$$

vyjařující sílu působící na *přímý* vodič, kterým protéká elektrický proud  $I$ , kde vektor  $\vec{s}$  má směr shodný se směrem proudu a jeho velikost odpovídá délce uvažované části vodiče. Takto popsaná síla se nazývá *Ampérova síla* a vyjádření v tomto tvaru je v praxi využívána více<sup>4</sup>.



Obrázek 1.4: Ampérova síla  $\vec{F}_B$  působící na přímý vodič s proudem.

Pokud vodič není přímý, můžeme ho myšlenkově rozdělit na nekonečně malé části  $d\vec{s}$  a vyjádřit elementární sílu ve tvaru

$$d\vec{F}_B = Id\vec{s} \times \vec{B}. \quad (1.13)$$

Celkovou sílu pak získáme jako součet těchto elementárních příspěvků pomocí integrálu.

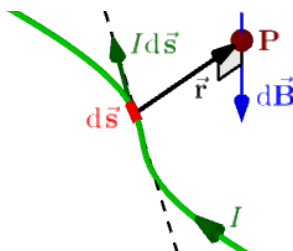
---

<sup>4</sup>Je snazší vyjádřit sílu působící na vodič o určité délce, než sílu působící na jednu nabitou částici.

**Biotův-Savartův zákon.** Podobnou úvahu jako v (1.13) využijeme pro zavedení analogie ke Coulombovu zákonu (1.4). Níže uvedený zákon (1.14) vyjadřuje elementární magnetickou indukci vytvořenou proudovým elementem  $I d\vec{s}$ <sup>5</sup> v libovolném bodě  $P$  magnetického pole, určeného polohovým vektorem  $\vec{r}$ , a je základem k popisu magnetického pole v okolí vodiče s proudem. Zákon vyjadřujeme ve tvaru

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad (1.14)$$

kde  $\mu$  je *permeabilita prostředí*, označovaná jako *magnetická konstanta*. Situaci ilustruje obrázek 1.5.

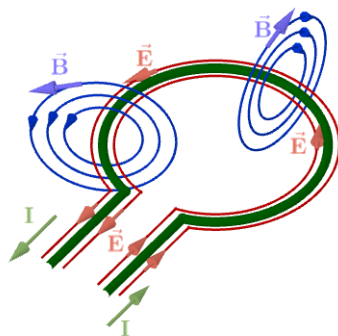


Obrázek 1.5: Elementární magnetická indukce  $d\vec{B}$  v bodě  $P$ .

**Magnetický indukční tok.** Míru magnetického pole procházejícího smyčkou definujeme analogicky k toku elektrické intenzity vztahem

$$\Phi_B = \iint_{S^+} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (1.15)$$

kde  $d\vec{S}$  značí vektor o velikosti  $dS$ , který je kolmý k orientované ploše  $S^+$ . Ve vztahu znovu vystupuje plošný integrál, což nás opět odkazuje na část 3.3.



Obrázek 1.6: Magnetické pole v okolí vodiče s proudem.

Obrázky 1.3 a 1.4 vyjadřují působení vnějšího magnetického pole popsaného vektorem  $\vec{B}$  na pohybující se částici. Obrázek 1.6 ovšem ilustruje magnetické pole indukované v okolí vodiče s proudem. Tedy popisuje magnetické pole, které vzniká v okolí pohybujících se nabitých částic a ukazuje tak souvislost mezi elektrickým a magnetickým polem.

<sup>5</sup>Proudovým elementem je označována velikost proudu procházejícího elementárně malou délkou vodiče  $ds$ .

# Kapitola 2

## Křivky a křivkový integrál

Jakkoliv jsou zjednodušené podoby fyzikálních zákonů pro základní pochopení jejich fungování nutné, v reálných aplikacích si s nimi nevystačíme. Zpravidla neplatí, že veličiny jako rychlost, zrychlení nebo síla jsou konstantní. Ani to, že pohyb se děje po přímkách. Podklady k této kapitole byly čerpány z literatury [1], [11], [5] a [2].

Vrátíme se zpět k příkladu 1.1, kdy jsme práci  $W$  vykonanou konstantní silou  $\vec{F}$  vyjádřili jako  $W = Fs \cos \varphi$ . Nyní zodpovíme otázku, co se stane, když tato síla konstantní nebude. Pro jednoduchost se zpočátku budeme zabývat případem, kdy působící síla posouvá částici v jednom přímém směru, řekněme ve směru osy  $x$ , tzn.  $\vec{F}(x, y, z) = (f(x), 0, 0)$ , kde  $f(x)$  je funkce vyjadřující velikost síly v závislosti na poloze částice na ose  $x$ . Situaci ilustruje obrázek 2.1.

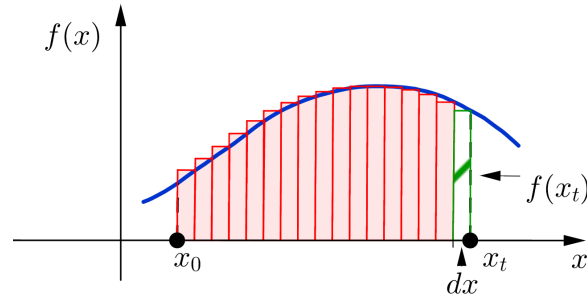
Interval  $[x_0, x_t]$  rozdělíme na  $n \in \mathbb{N}$  malých částí (podintervalů)  $dx$ , na kterých můžeme velikost působící síly  $\vec{F}$  považovat za konstantní. Pro jednotlivé úseky  $dx$  můžeme využít vztah (1.2) ve tvaru

$$dW = \bar{f} dx,$$

kde  $\bar{f}$  představuje střední hodnotu velikosti síly na intervalu  $dx$ ,  $dx$  je velikost posunutí částice a  $\varphi$  úhel, který svírá působící síla se směrem pohybu částice. Ten je přirozeně nulový a tedy  $\cos \varphi = 1$ . Pokud budeme zvyšovat počet částí  $dx$  (označíme  $n \rightarrow \infty$ ), potom se velikost jednotlivých podintervalů bude stále zmenšovat (označíme  $dx \rightarrow 0$ ). Když nyní sečteme všechny malé příspěvky  $dW$ , dostáváme

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n dW_k = \int_{x_0}^{x_t} f(x) dx. \quad (2.1)$$

Tím jsme vyřešili případ, kdy působící síla  $\vec{F}$  posouvá částici v jednom přímém směru (ve směru osy  $x$ ). Odtud již snadno přejdeme k obecnému případu, kdy předpokládáme, že všechny tři složky působící síly jsou nenulové, tedy síla je definována vektorovou funkcí  $\vec{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ , kde vystupují skalární funkce prostorových souřadnic, a síla pohybuje částici po obecné prostorové křivce. Mluvíme o *silovém vektorovém poli*, které si můžeme představit jako prostor, ve kterém na každý jednotlivý bod působí nenulová síla  $\vec{F}$ , která má



Obrázek 2.1: Závislost síly na poloze částice.

v daném okamžiku svojí velikost i směr. Změnu polohy částice můžeme označit

$$d\vec{s} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz, \quad (2.2)$$

kde  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  jsou po řadě jednotkové vektory ve směru os  $x, y, z$ . Vektor  $d\vec{s}$  je v každém bodě uvažované křivky jejím tečným vektorem a pro elementární změnu práce platí

$$dW = \vec{F} d\vec{s} = f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz. \quad (2.3)$$

V případě, že je vektorové pole nezávislé na čase (tzn. v čase neměnné), mluvíme o *stacionárním*, v opačném případě o *nestacionárním* vektorovém poli.

Nyní tedy pracujeme s obecnou silou  $\vec{F}(x, y, z)$  a uvažovaná částice se pohybuje po obecné křivce, nikoliv po přímce. Celková práce  $W$  je tedy dána součtem jednotlivých elementárních příspěvků „posbíraných podél křivky“. Nejdříve objasníme, co v dalším textu budeme rozumět pod pojmem *křivka* a v návaznosti na to přejdeme k definici křivkových integrálů.

## 2.1 Křivka a její vlastnosti

Poměrně přirozená je představa křivky jako čáry, která není rovná. Z pohledu matematiky existuje několik definic, které odpovídají konkrétnímu matematickému oboru. Hlavními podklady pro zpracování této kapitoly byly zdroje [7], [1], [11] a [3].

Pokud mluvíme o křivce, musíme vědět, jak křivka vypadá, např. jestli se jedná o křivku mezi dvěma různými body nebo jestli okrajové body křivky jsou totožné, případně jestli tolerujeme křížení křivky nebo ostré vrcholy. V tomto textu budeme pracovat s následující definicí.

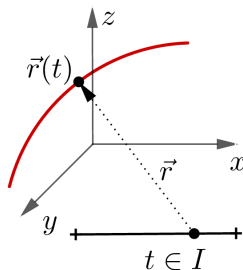
**Definice 2.1.** Je dán interval  $I \subset \mathbb{R}$ . Na intervalu  $I$  definujeme vektorovou funkci  $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , pro níž platí, že

- i)  $\vec{r}$  je prostá na vnitřku intervalu  $I$ ,
- ii)  $\vec{r}$  je na  $I$  spojitá a má zde spojitou první derivaci (tj.  $\vec{r} \in C^1(I)$ ),
- iii)  $\|\vec{r}'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in I$ ,



a která zobrazuje interval  $I$  na množinu  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ . Takto vzniklou množinu obrazů  $\mathcal{K}$  nazveme **křivka**.<sup>6</sup>

**Poznámka.** Křivka  $\mathcal{K}$  definovaná ve smyslu [definice 2.1](#) bývá rovněž nazývána *hladkým obloukem*.



Obrázek 2.2: Křivka jako obraz vektorové funkce  $\vec{r}$ .

Zjednodušeně můžeme výše uvedenou definici interpretovat tak, že křivka je obrazem funkce, která zobrazí body z daného intervalu na množinu bodů v prostoru. Funkce  $\vec{r}$  bývá nazývána *parametrizací křivky*, vektor  $\vec{r}(t)$  se nazývá polohovým vektorem křivky s parametrem  $t \in I$ . Situaci ilustruje [obrázek 2.2](#). Zde je na místě zmínit, že každá křivka může být parametrizována nekonečně mnoha způsoby a na výběru konkrétní parametrizace závisí vlastnosti dané křivky. V [definici 2.1](#) nám podmínka *i*) kladená na funkci  $\vec{r}$  zajišťuje, že se křivka v žádném bodě nepřekříží, tedy že každým bodem prostoru projde právě jednou. Podmínkou *ii*) vyjadřujeme, že křivka není nikde přerušena a má ve všech svých bodech tečné vektory. A konečně poslední podmínku nejlépe interpretuje fyzikální představa. Pokud si jako parametr  $t$  představíme čas, potom vektorová funkce  $\vec{r}$  popisuje pohyb bodu po křivce. Konkrétně  $\vec{r}(t)$  značí polohu bodu na křivce v daném čase  $t$ . Podmínka *iii*) zajišťuje, že se pohyb po křivce nezastaví (rychlost nebude nulová).

**Definice 2.2.** Křivku nazveme **uzavřenou**, pokud pro  $I = [a, b]$  platí  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ .

**Definice 2.3.** Necht'  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Říkáme, že množina  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$  je po částech hladká křivka, jestliže existuje dělení  $\mathcal{D} = a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < b$  intervalu  $I$  takové, že pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  je množina

$$\kappa_i := \mathcal{K}|_{\langle t_{i-1}, t_i \rangle}$$

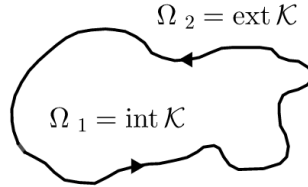
křivkou podle [definice 2.1](#).

**Definice 2.4.** Mějme křivku  $\mathcal{K} = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$ . Řekneme, že křivka je orientovaná, pokud má počáteční a koncový bod. Pokud označíme  $\vec{r}(a)$  jako počáteční a  $\vec{r}(b)$  jako koncový bod, hovoříme o **kladné orientaci** a křivku značíme  $\mathcal{K}^+$ . V opačném případě křivku nazýváme **záporně orientovanou** a značíme  $\mathcal{K}^-$ .

**Definice 2.5.** Mějme uzavřenou křivku  $\mathcal{K}$ , která vytváří hranici omezené množiny  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (označujeme  $\partial\Omega = \mathcal{K}$ ). Takovou křivku nazveme **kladně orientovanou**, pokud při pohybu po křivce ve směru orientace leží množina  $\Omega$  na levé straně.

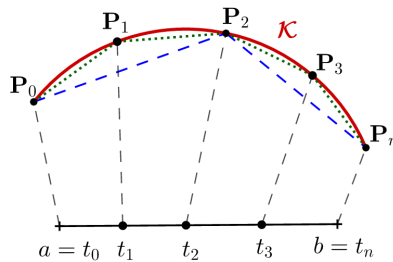
<sup>6</sup>Definice v tomto znění požaduje, aby křivka  $\mathcal{K}$  byla jednoduchá, spojitě diferencovatelná a regulární.

**Poznámka.** Kladnou orientaci křivky někdy označujeme jako orientaci souhlasnou s parametrizací. V případě uzavřené křivky hovoříme o kladné orientaci, pokud pohyb po křivce probíhá proti směru hodinových ručiček (viz [obrázek 2.3](#)). Obrázek také ukazuje situaci v  $\mathbb{R}^2$ , kdy uvažovaná uzavřená křivka  $\mathcal{K}$  rozdělí rovinu na dvě specifické oblasti.  $\Omega_1$  představuje vnitřek křivky  $\mathcal{K}$  (značí se  $\text{int } \mathcal{K}$ ), analogicky  $\Omega_2$  je vnějšek křivky  $\mathcal{K}$  (značí se  $\text{ext } \mathcal{K}$ ).



Obrázek 2.3: Kladně orientovaná uzavřená křivka.

Při práci s křivkami často potřebujeme znát jejich délku. Křivku můžeme pomyslně rozdělit body  $P_i, i = 0, \dots, n$ , mezi nimiž ji aproximujeme úsečkami (viz [obrázek 2.4](#)). Vznikne tak lomená čára, jejíž délka je dána součtem délek jednotlivých lineárních příspěvků. Čím větší bude počet „dělicích“ bodů, tím lépe bude součet jednotlivých příspěvků vzdáleností aproximovat reálnou délku křivky. Hledáme vlastně limitu součtu délek jednotlivých úseček za předpokladu, že vzdálenosti mezi body  $P_i$  se blíží k 0.



Obrázek 2.4: Aproximace křivky lomenou čarou.

**Definice 2.6.** Mějme křivku  $\mathcal{K} = \{\vec{\mathbf{r}}(t) : t \in [a, b]\}$ . Pro  $n \in \mathbb{N}$  uvažujme dělení

$$\mathcal{D} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

intervalu  $I = [a, b]$ . Pokud existuje  $d \in \mathbb{R}^+$  takové, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \mathcal{D} \text{ s normou dělení } \rho(\mathcal{D}) = \max_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} |t_k - t_{k-1}| < \delta$$

platí

$$\left| \sum_{k=1}^n \|\vec{\mathbf{r}}(t_k) - \vec{\mathbf{r}}(t_{k-1})\| - d \right| < \varepsilon, \quad (2.4)$$

potom číslo  $d = \text{meas}(\mathcal{K})$ <sup>7</sup> nazveme **délkou křivky**  $\mathcal{K}$ .

<sup>7</sup>Míra křivky vyjadřuje její velikost, tedy délku.

## 2.2 Křivkový integrál

**Definice 2.7.** Mějme interval  $I = [a, b]$ . Necht'  $\mathcal{K} = \{\vec{\mathbf{r}}(t) : t \in I\}$  je kladně orientovaná křivka a funkce  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá.

Zavedeme dělení  $\mathcal{D} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, n \in \mathbb{N}\}$  intervalu  $I$ , body  $\vec{\mathbf{r}}(t_k), k = 1, \dots, n$  tak tvoří dělení  $\mathcal{D}(\mathcal{K})$  křivky  $\mathcal{K}$ .

Definujeme integrální součty

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{D}(\mathcal{K})) = \sum_{k=1}^n f(\vec{\mathbf{r}}(\xi_k)) \Delta s_k, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{S}_i(f, \mathcal{D}(\mathcal{K}^+)) = \sum_{k=1}^n f(\vec{\mathbf{r}}(\mu_k)) \Delta r_{ki}, \quad (2.6)$$

kde  $\vec{\mathbf{r}} = (r_1, r_2, r_3)$ ,  $\Delta s_k = \|\vec{\mathbf{r}}(t_k) - \vec{\mathbf{r}}(t_{k-1})\|$ ,  $\Delta r_{ki} = r_i(t_k) - r_i(t_{k-1})$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\xi_k, \mu_k \in [t_{k-1}, t_k]$ .

Potom **křivkový integrál 1. druhu** definujeme vztahem

$$\int_{\mathcal{K}} f(\vec{\mathbf{r}}) ds = \lim_{\max_k \Delta s_k \rightarrow 0} \mathcal{S}(f, \mathcal{D}(\mathcal{K})), \quad (2.7)$$

a **křivkový integrál 2. druhu** vztahem

$$\int_{\mathcal{K}^+} f(\vec{\mathbf{r}}) dr_i = \lim_{\max_k \Delta s_k \rightarrow 0} \mathcal{S}_i(f, \mathcal{D}(\mathcal{K}^+)), \quad (2.8)$$

jestliže limity integrálních součtů na pravých stranách rovností (2.7) a (2.8) existují.

**Poznámka.** Výpočetní tvary pro křivkové integrály jsou

$$\int_{\mathcal{K}} f(\vec{\mathbf{r}}) ds = \int_a^b f(\vec{\mathbf{r}}(t)) \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| dt, \quad (2.9)$$

$$\int_{\mathcal{K}^+} f(\vec{\mathbf{r}}) dr_i = \int_a^b f(\vec{\mathbf{r}}(t)) r_i'(t) dt, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Jednou ze základních aplikací křivkového integrálu 1. druhu je výpočet délky  $d$  křivky  $\mathcal{K}$  ve tvaru

$$d = \int_{\mathcal{K}} 1 ds = \int_a^b \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(r_1'(t))^2 + (r_2'(t))^2 + (r_3'(t))^2} dt.$$

Křivkový integrál 2. druhu se využívá například při určování práce vektorového pole podél orientované křivky, případně při výpočtech obsahů rovinných útvarů.

**Poznámka.** Je-li křivka  $\mathcal{K}$  po částech hladká, potom křivkový integrál podél křivky  $\mathcal{K}$  vyjadřujeme jako součet integrálů podél jednotlivých hladkých částí  $\kappa_j$ ,  $j = 1, \dots, n$

$$\int_{\mathcal{K}} f(\vec{r}) \, ds = \sum_{j=1}^n \int_{\kappa_j} f(\vec{r}) \, ds, \quad (2.11)$$

$$\int_{\mathcal{K}^+} f(\vec{r}) \, dr_i = \sum_{j=1}^n \int_{\kappa_j} f(\vec{r}) \, dr_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

Výpočet křivkových integrálů nezávisí na způsobu, jakým parametrizujeme křivku  $\mathcal{K}$  (viz např. [2]). Dále pak z výpočetního tvaru (2.10) plyne, že

$$d\vec{r} = d\vec{s}, \quad (2.13)$$

kde  $d\vec{s}$  je vektor známý ze vztahu (2.2), jehož velikost odpovídá nekonečně malé délce křivky. Především ve fyzikálních vyjádřeních se častěji užívá označení  $d\vec{s}$ , což dodržíme i dále v této práci. Vektor  $d\vec{s}$  můžeme vyjádřit také jako součin  $\vec{\tau} \cdot ds$ , kde  $\vec{\tau}$  je jednotkový tečný vektor k malému úseku křivky  $\mathcal{K}$ , jehož velikost je  $ds$ .

Nyní se znovu vrátíme k pokračování příkladu 1.1 a s využitím definovaných vztahů ukážeme, jak vyjádřit celkovou práci  $W$  vykonanou silou  $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$  podél křivky  $\mathcal{K}^+$ . Odvodili jsme vztah (2.3) vyjadřující elementární práci  $dW$ . Chceme-li určit celkovou práci  $W$ , musíme sečíst všechny elementární příspěvky podél dané křivky. K tomu využijeme křivkový integrál 2.druhu a dostáváme

$$W = \int_{\mathcal{K}^+} \vec{F} \, d\vec{s} = \int_{\mathcal{K}^+} f_1 \, dx + f_2 \, dy + f_3 \, dz. \quad (2.14)$$

Hodnota předchozího integrálu obecně závisí na tvaru křivky, po které se pohybujeme. Tento fakt ilustruje příklad 2.4. Nicméně hned v příkladu 2.5 ukážeme a později v kapitole 4 popíšeme vektorová pole, ve kterých hodnota integrálu závisí pouze na počátečním a koncovém bodě orientované křivky, nikoliv na jejím celkovém tvaru.

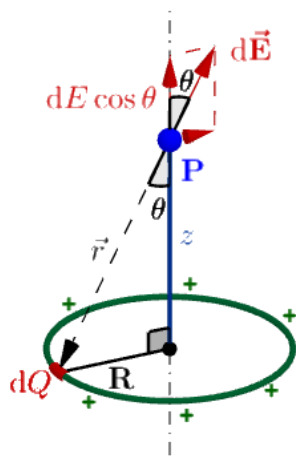
**Definice 2.8.** Mějme kladně orientovanou uzavřenou křivku  $\mathcal{K}$  a vektorové pole  $\vec{f} : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Potom integrál podél uzavřené křivky označujeme

$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{f}(\vec{r}) \, d\vec{s}$$

a hovoříme o **cirkulaci vektorového pole  $\vec{f}$**  po uzavřené křivce  $\mathcal{K}$ .

## 2.3 Křivkové integrály v příkladech

**Příklad 2.1.** Uvažujme tenký nevodivý prstenec o poloměru  $R$  s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem o délkové hustotě  $\tau$ . Ptáme se, jaká je intenzita  $\vec{E}$  elektrického pole v bodě  $P$ , který je ve vzdálenosti  $z$  od roviny prstence na jeho ose souměrnosti (viz obrázek 2.5).



Obrázek 2.5: Prstenec s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem.

*Řešení.* Intenzita  $\vec{\mathbf{E}}$  v bodě  $P$  je dána působením náboje rozloženého podél prstence. Pokud budeme uvažovat, že každá nekonečně malá část prstence představuje bodový náboj, potom podle vztahu (1.6) můžeme vyjádřit elementární příspěvek elektrické intenzity jako

$$d\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|dQ|}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}. \quad (2.15)$$

Rozložení náboje je určeno délkovou hustotou  $\tau$ , vyjádříme  $dQ = \tau ds$ , kde  $ds$  je elementární délka prstence. Velikost elektrické intenzity tohoto jednoho bodového náboje je

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\tau ds}{r^2}, \quad (2.16)$$

kde  $r := \|\vec{r}\|$ .

Ze symetrie situace znázorněné na obrázku 2.5 vidíme, že složky vektoru  $\vec{\mathbf{E}}$  kolmé na osu souměrnosti se navzájem vruší. Velikost intenzity tak ovlivní pouze složky ve směru osy souměrnosti, které vyjádříme jako  $dE \cos \theta$ , kde  $\theta$  je úhel, který svírá vektor  $\vec{r}$  s osou prstence. Integrací výrazu  $dE \cos \theta$  podél prstence získáme výslednou elektrickou intenzitu  $E$ , která bude ležet na ose prstence.

Prstenec vyjádříme parametricky jako kružnici  $\mathcal{K}$  s poloměrem  $R$  a středem v počátku souřadnicového systému jako

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \vec{\mathbf{s}}(\varphi) &= (R \cos \varphi, R \sin \varphi), \\ \vec{\mathbf{s}}'(\varphi) &= (-R \sin \varphi, R \cos \varphi), \quad \varphi \in (0, 2\pi), \end{aligned}$$

pro  $r^2$  z Pythagorovy věty platí

$$r^2 = R^2 + z^2,$$

a  $\cos \theta$  vyjádříme jako

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Integrací  $dE \cos \theta$  podél křivky  $\mathcal{K}$  získáme hledanou intenzitu v bodě  $P$  ve tvaru

$$\begin{aligned} E &= \int_{\mathcal{K}} dE \cos \theta = \int_{\mathcal{K}} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\tau}{R^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\tau z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathcal{K}} ds = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\tau z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \|\vec{s}'(\varphi)\| d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\tau z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\tau z R}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{z \tau 2\pi R}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Uvědomíme-li si význam délkové hustoty náboje  $\tau$ , potom výraz  $\tau 2\pi R$  představuje celkový náboj  $Q$ , který je rozložený na prstenci. Závěrem tedy dostáváme vztah

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{z Q}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad \square$$

**Příklad 2.2.** Určeme hmotnost tenkého drátu (s jednotkovým průřezem), který má tvar oblouku spirály s parametrizací  $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$  pro  $t \in [0, \pi]$ , a jehož hustota je určena funkcí  $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

*Řešení.* Vyjdeme ze základního vyjádření hustoty

$$h = \frac{m}{V},$$

kde  $m$  představuje hledanou hmotnost a  $V$  objem. Protože pracujeme s tenkým drátem jednotkového průřezu, můžeme objem  $V$  zaměnit za délku drátu  $d$ . Tedy pro hmotnost dostáváme

$$m = h \cdot d.$$

K výpočtu hmotnosti drátu využijeme křivkový integrál 1.druhu podle (2.9), kde

$$\begin{aligned} \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} \\ &= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2 \cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + 1)} \\ &= \sqrt{e^{2t} \cdot 3} dt = e^t \cdot \sqrt{3}, \end{aligned}$$

tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} h(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt &= \int_0^{\pi} \sqrt{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t}} \cdot e^t \sqrt{3} dt \\ &= \int_0^{\pi} e^t \sqrt{2} e^t \sqrt{3} dt = \sqrt{6} \int_0^{\pi} e^{2t} dt \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} [e^{2t}]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{6}}{2} (e^{2\pi} - 1). \quad \square \end{aligned}$$

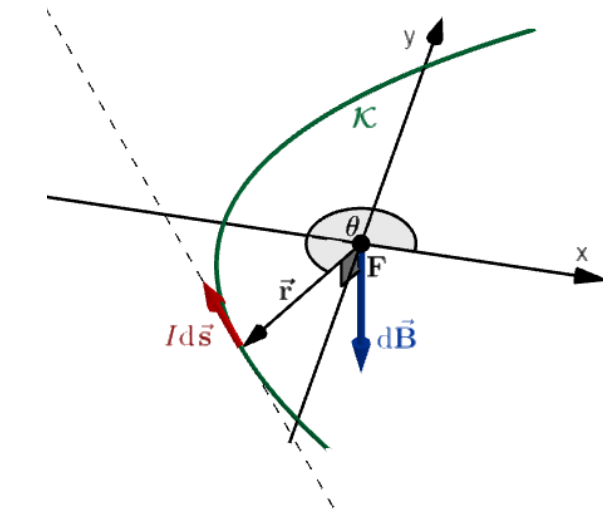
**Příklad 2.3.** Určeme magnetickou indukci pole, kterou indukuje konstantní proud velikosti  $I$  nekonečně dlouhého vodiče tvaru paraboly v ohnisku  $F$  této paraboly.

*Řešení.* Parabola je rovinná křivka, můžeme ji umístit tedy do roviny  $xy$  tak, že osou paraboly bude osa  $x$  a ohnisko  $F$  umístíme do počátku souřadnicového systému. Parabolu označíme jako  $\mathcal{K}$  a parametrizujeme vektorovou funkcí

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \left( \frac{t^2}{2p} - \frac{p}{2}, t, 0 \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde parametr  $p > 0$  vyjadřuje vzdálenost ohniska  $F$  od řídicí přímky  $d$  (viz obrázek 2.7).

Pro určení magnetické indukce v ohnisku  $F = [0, 0, 0]$  vyjdeme z Biotova-Savartova zákona (1.14) a náčrtu situace na obrázku 2.6.



Obrázek 2.6: Obrázek k příkladu 2.3.

Nejdříve určíme vektor  $d\vec{\mathbf{s}}$  jako

$$d\vec{\mathbf{s}} = d\vec{\mathbf{r}} = \left( \frac{t}{p}, 1, 0 \right) dt$$

a normu vektoru  $\vec{\mathbf{r}}$  jako

$$\|\vec{\mathbf{r}}\| = \sqrt{\left( \frac{t^2}{2p} - \frac{p}{2} \right)^2 + t^2}.$$

Nyní vyjádříme vektorový součin

$$d\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{r}} = \left( \frac{t}{p}, 1, 0 \right) dt \times \left( \frac{t^2}{2p} - \frac{p}{2}, t, 0 \right) = \left( 0, 0, \frac{t^2}{2p} + \frac{p}{2} \right) dt$$

a dosazením do (1.14) dostáváme

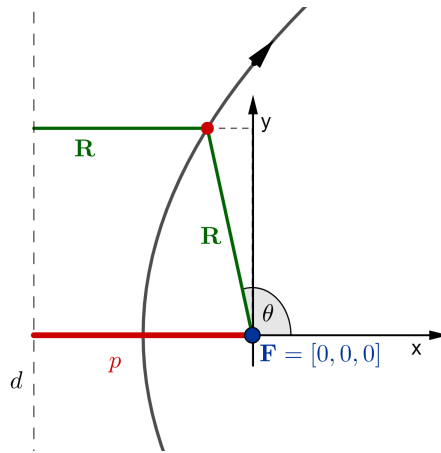
$$d\vec{\mathbf{B}}(F) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\left( 0, 0, \frac{t^2}{2p} + \frac{p}{2} \right) dt}{\left( \left( \frac{t^2}{2p} - \frac{p}{2} \right)^2 + t^2 \right)^{3/2}}. \quad (2.17)$$

Celkovou magnetickou indukci v bodě ohniska bychom získali integrací vztahu (2.17), nicméně chceme se vyhnout výpočtu nevlastního integrálu, proto je vhodnější převést úlohu do polárních souřadnic a integrovat přes úhel  $\theta$ , který svírá průvodič bodu na parabole s kladným směrem osy  $x$  (viz obrázek 2.6). Pro parametr  $t$  vyjádřený v polárních souřadnicích platí  $t = R \sin \theta$ , kde  $R = \|\vec{r}(t)\|$ . Z obrázku 2.7 určíme  $R = \frac{p}{1 - \cos \theta}$  a dostáváme

$$t = \frac{p \cdot \sin \theta}{1 - \cos \theta},$$

$$dt = \frac{-p}{1 - \cos \theta} d\theta, \quad \theta \in [2\pi, 0].$$

Interval pro úhel  $\theta$  je zřejmý z naznačeného směru proudu, který prochází vodičem.



Obrázek 2.7: Popis paraboly pomocí parametru  $p$  a úhlu  $\theta$ .

Dosazením do vztahu (2.17) dostáváme

$$d\vec{\mathbf{B}}(F) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \left( 0, 0, \frac{\frac{p^2 \cdot \sin^2 \theta}{2p(1 - \cos \theta)^2} + \frac{p}{2}}{\left[ \left( \frac{p^2 \cdot \sin^2 \theta}{2p(1 - \cos \theta)^2} - \frac{p}{2} \right)^2 + \frac{p^2 \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \right]^{3/2}} \right) \cdot \frac{-p}{1 - \cos \theta} d\theta,$$

což po úpravách dává

$$d\vec{\mathbf{B}}(F) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( 0, 0, -\frac{2}{p} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) d\theta.$$

Integrací jednotlivých složek vektoru  $d\vec{\mathbf{B}}$  dostáváme

$$\vec{\mathbf{B}} = \int_{\mathcal{K}} d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{2\pi}^0 \left( 0, 0, -\frac{2}{p} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( 0, 0, \frac{2\pi}{p} \right) = \left( 0, 0, \frac{\mu_0 I}{2p} \right).$$

□



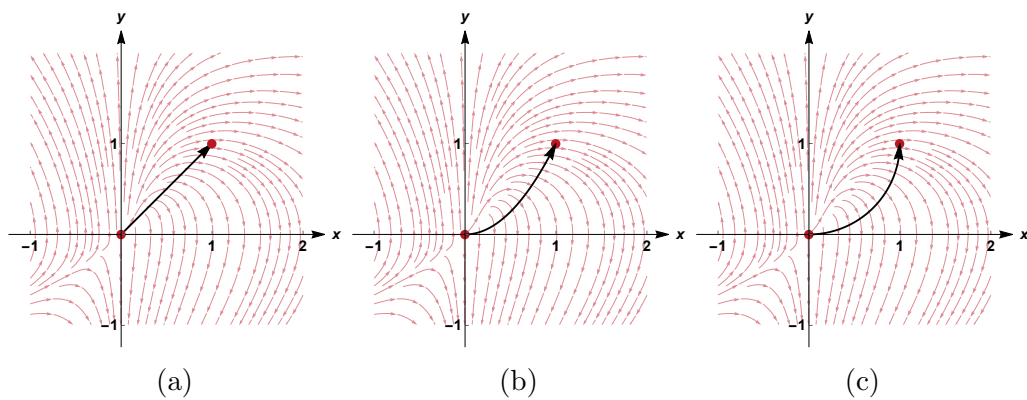
**Příklad 2.4.** Uvažujme silové pole  $\vec{F} = (xy, y - x, 0)$ . Určeme práci  $W$ , kterou toto pole vykoná při přemístění hmotného bodu<sup>8</sup> z pozice  $A = [0, 0, 0]$  do pozice  $B = [1, 1, 0]$  po křivce  $\mathcal{K}$ :

a)  $y = x$ ,

b)  $y = x^2$ ,

c) kratší oblouk kružnice  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ .

*Řešení.* Pro práci  $W$  platí vztah (2.14). V našem případě nejprve parametrizujeme křivky, po kterých se hmotný bod pohybuje, a následně využijeme vztah (2.10) k samotnému výpočtu křivkového integrálu. Vzhledem k nulové třetí souřadnici můžeme silové pole a jednotlivé křivky znázornit v rovině  $xy$  (viz obrázek 2.8).



Obrázek 2.8: Silové pole k příkladu 2.4.

ad a) Křivka  $\mathcal{K}$  představuje úsečku, kterou můžeme parametrizovat jako

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (t, t, 0), \quad t \in [0, 1], \\ \vec{r}'(t) &= (1, 1, 0) dt.\end{aligned}$$

Potom pro práci vykonanou podél křivky  $\mathcal{K}$  platí

$$W = \int_0^1 (t^2, t - t, 0) \cdot (1, 1, 0) dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

ad b) Křivka  $\mathcal{K}$  nyní představuje část paraboly, kterou můžeme parametrizovat jako

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (t, t^2, 0), \quad t \in [0, 1], \\ \vec{r}'(t) &= (1, 2t, 0) dt.\end{aligned}$$

<sup>8</sup>Hmotným bodem je nazýván abstraktní model reálného objektu, jehož rozměry a tvar jsou pro sledovaný jev zanedbatelné.

Potom pro práci vykonanou podél křivky  $\mathcal{K}$  platí

$$W = \int_0^1 (t^3, t^2 - t, 0) \cdot (1, 2t, 0) dt = \int_0^1 (t^3 + 2t^3 - 2t^2) dt = \left[ \frac{3t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

ad c) Křivka  $\mathcal{K}$  představuje kratší část kružnice se středem v bodě  $[0, 1, 0]$ , kterou můžeme parametrizovat jako

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}(\varphi) &= (\cos \varphi, 1 + \sin \varphi, 0), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \\ \vec{\mathbf{r}}'(\varphi) &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) d\varphi. \end{aligned}$$

Pro výpočet integrálu využijeme software *Wofram Mathematica 11.2* a pro práci vykonanou podél křivky  $\mathcal{K}$  dostáváme

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\cos \varphi(1 + \sin \varphi), (1 + \sin \varphi) - \cos \varphi, 0) \cdot (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\cos^3 \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Z příkladu vidíme, že hodnota křivkového integrálu tohoto pole je různá pro pohyb po různých křivkách.  $\square$

**Příklad 2.5.** Uvažujme shodné zadání jako v [příkladu 2.4](#) s tím rozdílem, že nyní je silové pole určeno silou  $\vec{\mathbf{F}} = (2xy, x^2, 0)$ .

*Řešení.* Parametrizace křivek i postup výpočtu je shodný s předchozím příkladem, tvar silového pole s jednotlivými křivkami ilustruje [obrázek 2.9](#) a platí

ad a)

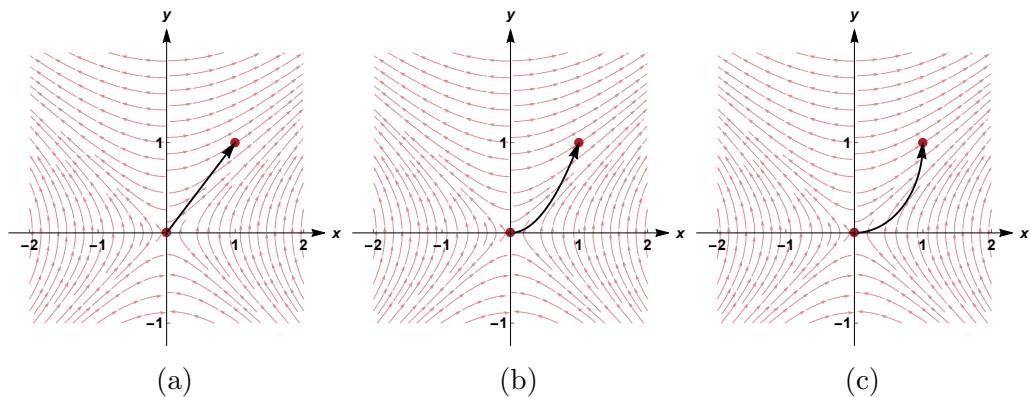
$$W = \int_0^1 (2t^2, t^2, 0) \cdot (1, 1, 0) dt = \int_0^1 (3t^2) dt = \left[ \frac{3t^3}{3} \right]_0^1 = 1.$$

ad b)

$$W = \int_0^1 (2t^3, t^2, 0) \cdot (1, 2t, 0) dt = \int_0^1 (4t^3) dt = \left[ \frac{4t^4}{4} \right]_0^1 = 1.$$

ad c)

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (2 \cos \varphi (1 + \sin \varphi), \cos^2 \varphi, 0) \cdot (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-2 \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos^3 \varphi) d\varphi = 1. \end{aligned}$$



Obrázek 2.9: Silové pole k příkladu 2.5.

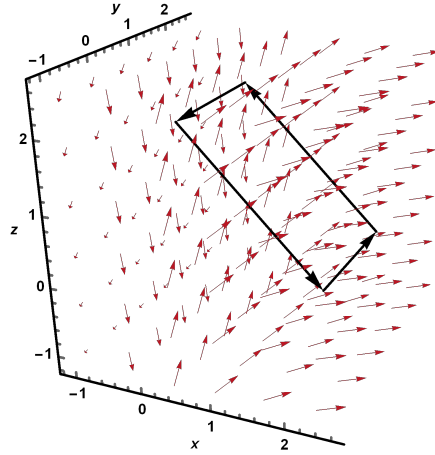
V případě tohoto silového pole nezávisí hodnota integrálu na křivce, po které se pohybujeme. Takové pole se nazývá *potenciální* a podrobně ho popíšeme v kapitole 4.  $\square$

**Příklad 2.6.** Uvažujme pole elektrické intenzity  $\vec{\mathbf{E}} = (x^3, x^2, x)$ . Určeme práci  $W$ , která se vykoná při pohybu jednotkového náboje podél lomené čáry definované body  $A, B, C, D, A$ , kde  $A = [2, 0, 0]$ ,  $B = [2, 2, 0]$ ,  $C = [0, 2, 2]$ ,  $D = [0, 0, 2]$ .

*Řešení.* Lomená čára je uzavřenou, po částech hladkou křivkou, kterou označíme  $\mathcal{K}$ . Situaci znázorňuje obrázek 2.10. Jednotlivé části křivky  $\mathcal{K}$  jsou úsečky, které ji rozdělují na čtyři části

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \cup \mathcal{K}_4.$$

Práci  $W$  určíme pomocí křivkového integrálu, kdy výpočet rozdělíme na čtyři integrály podle vztahu (2.12). Pro každý integrál budeme postupovat stejně jako v příkladu 2.4.



Obrázek 2.10: Uzavřená křivka v elektrickém poli.

Parametrizujeme jednotlivé úsečky a dostáváme

$$\begin{aligned}\vec{s}_1(t) &= (2, 2t, 0), & \vec{s}'_1(t) &= (0, 2, 0) dt, \\ \vec{s}_2(t) &= (2 - 2t, 2, 2t), & \vec{s}'_2(t) &= (-2, 0, 2) dt, \\ \vec{s}_3(t) &= (0, 2 - 2t, 0), & \vec{s}'_3(t) &= (0, -2, 0) dt, \\ \vec{s}_4(t) &= (2t, 0, 2 - 2t), & \vec{s}'_4(t) &= (2, 0, -2) dt, \quad t \in [0, 1].\end{aligned}$$

Nyní můžeme přejít k integraci podle vztahu (2.10)

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}_1} \vec{\mathbf{E}} d\vec{s}_1 &= \int_0^1 (2^3, 2^2, 2) \cdot (0, 2, 0) dt = 8 [t]_0^1 = 8, \\ \int_{\mathcal{K}_2} \vec{\mathbf{E}} d\vec{s}_2 &= \int_0^1 ((2 - 2t)^3, (2 - 2t)^2, (2 - 2t)) \cdot (-2, 0, 2) dt = \\ &= [4t^4 - 16t^3 + 22t^2 - 12t]_0^1 = -2, \\ \int_{\mathcal{K}_3} \vec{\mathbf{E}} d\vec{s}_3 &= \int_0^1 (0, 0, 0) \cdot (0, -2, 0) dt = 0, \\ \int_{\mathcal{K}_4} \vec{\mathbf{E}} d\vec{s}_4 &= \int_0^1 ((2t)^3, (2t)^2, 2t) \cdot (2, 0, -2) dt = [4t^4 - 2t^2]_0^1 = 2.\end{aligned}$$

Výslednou práci  $W$  získáme součtem předchozích integrálů podél jednotlivých úseček, tedy

$$W = \sum_{i=1}^4 \int_{\mathcal{K}_i} \vec{\mathbf{E}} d\vec{s}_i = 8 - 2 + 0 + 2 = 8. \quad \square$$

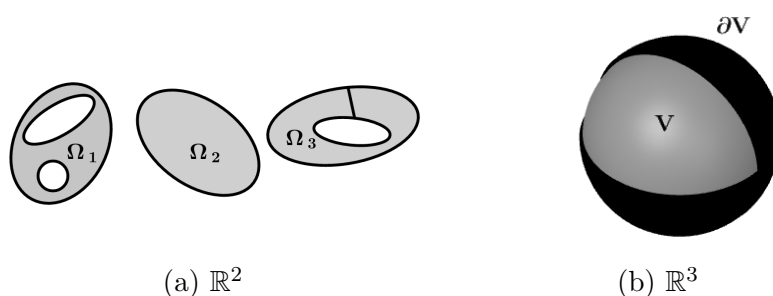
# Kapitola 3

## Plocha a plošný integrál

Než se dostaneme k samotné definici plochy, je nutné nejprve definovat *oblast* v rovině a v prostoru. Podkladem pro zpracování této kapitoly byly [11], [1] a [2].

**Definice 3.1.** *Oblastí* nazýváme množinu  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , která je současně otevřená a souvislá. Množinu, která je otevřená a jejíž hranice je tvořena jedinou uzavřenou křivkou, nazýváme **jednoduše souvislou oblastí**.

**Poznámka.** Na [obrázku 3.1a](#) vidíme v rovině tři množiny, které jsou oblastmi.  $\Omega_1$  je souvislá, ostatní dvě jsou jednoduše souvislé. Tuto rovinnou představu můžeme vyzdvihnout do prostoru, na [obrázku 3.1b](#) je znázorněna jednoduše souvislá oblast  $V$  a uzavřená plocha  $\partial V$  představuje hranici této oblasti.



Obrázek 3.1: Ukázky oblastí v rovině a v prostoru.

### 3.1 Plocha a její vlastnosti

**Definice 3.2.** *Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  je omezená oblast jejíž hranice  $\partial\Omega$  je tvořena křivkou konečné délky. Dále mějme definovanou vektorovou funkci  $\vec{r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , pro kterou platí, že*

- i)  $\vec{r}$  je spojitá na  $\Omega$  a má zde spojitě první parciální derivace,
- ii)  $\vec{r}$  je prostá na vnitřku  $\Omega$ ,

iii)  $\forall [u, v] \in \text{int}\Omega$  platí

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \neq \vec{0},$$

a která zobrazuje oblast  $\Omega$  na množinu  $S = \{\vec{r}(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))\}$ . Taktéž vzniklou množinu obrazů  $S$  nazveme **plocha**.<sup>9</sup>

Pokud platí, že  $\Omega = \bar{\Omega}$  (tzn.  $\Omega$  je uzavřená) a kromě konečně mnoha bodů platí

$$\forall [u_0, v_0] \in \partial\Omega \quad \exists [u_1, v_1] \in \partial\Omega, [u_0, v_0] \neq [u_1, v_1]$$

takové, že  $\vec{r}([u_0, v_0]) = \vec{r}([u_1, v_1])$ , pak množinu  $S$  nazýváme **uzavřenou plochou**.

Nechť množina  $S$  je křivkově souvislá<sup>10</sup> a lze ji rozdělit na konečný počet ploch. Potom  $S$  nazveme **po částech hladkou plochou**.

**Poznámka.** Podobně jako jsme křivku z definice 2.1 nazvali hladkým obloukem, můžeme nyní plochu ve smyslu definice 3.2 nazvat *hladkým listem*. Analogii s křivkami nacházíme i dále, kdy jako parametry vektorové funkce  $\vec{r}$  nyní vystupují proměnné  $u, v$ , vektor  $\vec{r}(u_0, v_0)$  je průvodič bodu plochy  $S$  (odpovídá polohovému vektoru) a funkce  $\vec{r}$  je opět parametrická reprezentace plochy.

**Definice 3.3.** O ploše  $S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \Omega\}$  řekneme, že je **orientovaná**, jestliže u ní rozlišujeme dvě strany, zpravidla vnější a vnitřní (případně horní a dolní). Pokud existuje jednotkový normálový vektor  $\vec{n}$ , volíme jej v každém bodě uvažované plochy  $S$  tak, aby směřoval stále na stejnou stranu. Říkáme, že plocha  $S$  je orientovaná souhlasně (nesouhlasně) se svou parametrizací, jestliže

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}, \quad \left( \vec{n} = -\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \right), \quad (3.1)$$

kde  $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ ,  $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ . Značíme  $S = S^+$ , ( $S = S^-$ ).

Pokud hovoříme o uzavřených plochách, což jsou povrchy těles, označíme stranu za vnější, pokud vektor  $\vec{n}$  směřuje ven z tělesa. Pokud směřuje dovnitř tělesa, hovoříme o vnitřní straně.

Plocha  $S$  je orientovaná souhlasně se svým okrajem<sup>11</sup>  $\partial S$ , pokud při obíhání po tomto okraji ve směru jeho orientace je horní strana plochy  $S$  po levé ruce. V opačném případě je plocha orientovaná nesouhlasně se svým okrajem.

## 3.2 Gaussova plocha

Fyzika i okolní svět se často vyznačují symetriemi. Toho se dá s výhodou využít v případě, že jsou fyzikální zákony vyjádřeny ve vhodném tvaru. Na začátku kapitoly 1 jsme vyjádřili Coulombův zákon (1.4) představující hlavní zákon elektrostatiky. Jeho tvar však neposkytuje zjednodušení v případě symetrických situací,

<sup>9</sup>Analogicky k definici křivky se jedná o plochu jednoduchou a regulární.

<sup>10</sup>Každé dva body množiny  $S$  lze spojit křivkou ležící v  $S$ .

<sup>11</sup>Okrajem rozumíme obraz hranice množiny  $\Omega$ .

proto se ke Coulombovu zákonu zavádí ekvivalentní Gaussův zákon elektrostatiky (6.1), který lze výhodně využít v situacích symetrického rozložení náboje. **Gaussova plocha**  $\mathcal{G}$  je myšlená uzavřená plocha vytvořená kolem určité konfigurace nábojů. Může mít libovolný tvar, v praxi je vhodné volit právě symetrické útvary jako jsou povrch koule, povrch válce apod.

### 3.3 Plošné integrály

Hovoříme-li o toku, často si představíme proud nějaké kapaliny určitou plochou. V každém bodě této plochy mají všechny částice kapaliny svou rychlost  $\vec{v}$ . Jednotlivé vektory vytváří vektorové pole rychlostí. Místo vektoru rychlosti si však můžeme představit libovolné vektorové pole. Uvažujme tedy elektrické pole, tok elektrického pole označme  $\Phi_E$  a  $S$  označme plochu, kterou elektrické pole protéká. Představme si libovolně malou část této plochy o velikosti  $dS$ . Nechť  $d\Phi_E$  představuje „jak mnoho“ elektrického pole vyjádřeného vektorovou funkcí  $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$  proteče touto plochou za jednotku času. Tuto představu můžeme interpretovat ještě víc intuitivně a to tak, že si představíme  $d\Phi_E$  jako objem kapaliny, který proteče plochou za jednotku času. Z toho snadno určíme, že velikost  $d\Phi_E$  závisí na úhlu  $\varphi$ , který svírá vektorové pole  $\vec{E}$  s normálou k ploše  $dS$  a platí

$$d\Phi_E = E \cdot dS \cdot \cos \varphi, \quad (3.2)$$

kde  $E = \|\vec{E}\|$ .

Vektorově můžeme vztah (3.2) přepsat do tvaru

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (3.3)$$

kde  $d\vec{S}$  představuje vektor kolmý k malé části plochy jehož velikost odpovídá velikosti této plochy označené v úvodu jako  $dS$ . V zápisu (3.3) můžeme  $d\vec{S}$  nahradit součinem  $\vec{n} \cdot dS$ , kde  $\vec{n}$  představuje jednotkový normálový vektor k malé části plochy  $S$ , jejíž velikost je  $dS$ .

Dospěli jsme k vyjádření elementární změny toku vektorového pole  $d\Phi$ , podobně jako jsme ve vztahu (2.3) vyjádřili elementární změnu práce  $dW$ . K vyjádření celkového toku  $\Phi_E$  budeme počítat všechny tyto malé příspěvky, tentokrát pomocí *plošných integrálů*.

**Definice 3.4.** *Nechť  $S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \Omega\}$  je orientovaná plocha a mějme funkci  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Nechť  $\mathcal{D}(\Omega) = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  je dělení množiny  $\Omega$ , potom  $S_k = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \Omega_k, k = 1, 2, \dots, n\}$  tvoří dělení  $\mathcal{D}(S)$  plochy  $S$ . Zvolíme bod  $[u_k, v_k] \in \Omega_k$ , jeho obraz  $\vec{r}(u_k, v_k) \in S_k$  a jednotkový normálový vektor k ploše  $S_k$  v bodě  $\vec{r}(u_k, v_k)$  je  $\vec{n}_k = (n_{k1}, n_{k2}, n_{k3})$ . Velikost plochy  $S_k$  označíme  $\Delta S_k$ . Definujeme integrální součty*

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{D}(S)) = \sum_{k=1}^n f(\vec{r}(u_k, v_k)) \Delta S_k, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{S}_i(f, \mathcal{D}(S^+)) = \sum_{k=1}^n f(\vec{r}(u_k, v_k)) n_{ki} \Delta S_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Potom **plošný integrál 1. druhu** definujeme vztahem

$$\iint_S f(\vec{r}) \, dS = \lim_{\max_k \Delta S_k \rightarrow 0} \mathcal{S}(f, \mathcal{D}(S)), \quad (3.6)$$

a **plošný integrál 2. druhu** vztahem

$$\iint_{S^+} f(\vec{r}) n_i \, dS = \lim_{\max_k \Delta S_k \rightarrow 0} \mathcal{S}_i(f, \mathcal{D}(S^+)), \quad (3.7)$$

jestliže limity integrálních součtů na pravých stranách rovností (3.6) a (3.7) existují.

**Poznámka.** Výpočtové vztahy plošných integrálů:

$$\iint_S f(\vec{r}) \, dS = \iint_{\Omega} f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv, \quad (3.8)$$

$$\iint_{S^+} f(\vec{r}) n_3 \, dS = \iint_{\Omega} f(\vec{r}(u, v)) \frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(u, v)} \, du \, dv. \quad (3.9)$$

Výraz  $\frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(u, v)}$  představuje Jakobián zobrazení množiny  $\Omega$  do průmětu  $S_{xy}$  plochy  $S$  do roviny  $xy$ , pro nějž platí

$$\frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Podobně můžeme vyjádřit  $n_1 \, dS = \frac{\partial(r_2, r_3)}{\partial(u, v)}$  a  $n_2 \, dS = -\frac{\partial(r_1, r_3)}{\partial(u, v)}$ .

Je-li plocha  $S$  po částech hladká, potom plošný integrál vyjadřujeme jako součet integrálů přes jednotlivé hladké části  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$

$$\iint_S f(\vec{r}) \, dS = \sum_{j=1}^n \iint_{\Gamma_j} f(\vec{r}) \, dS, \quad (3.10)$$

$$\iint_{S^+} f(\vec{r}) n_3 \, dS = \sum_{j=1}^n \iint_{\Gamma_j^+} f(\vec{r}) n_3 \, dS. \quad (3.11)$$

Pokud je plocha  $S$  tvořena grafem funkce  $z = z(x, y)$  a ortogonální průmět plochy  $S$  do roviny  $xy$  označíme  $S_{xy}$ , potom plošný integrál získáme pomocí vztahu

$$\iint_S f(\vec{r}) \, dS = \iint_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy. \quad (3.12)$$

U křivky jsme definovali její délku, což jinými slovy můžeme označit za *velikost* křivky. Stejně tak budeme pro další práci potřebovat určit velikost zkoumané plochy.



**Věta 3.1.** *Nechť  $S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \Omega\}$  je hladká plocha, potom její velikost vyjádříme vztahem*

$$P = \text{meas}(S) = \iint_{\Omega} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv. \quad (3.13)$$

Vrátíme se k úvahám ze začátku této části. Vztahem (3.3) jsme vyjádřili elementární změnu toku  $d\Phi_E$ . Nás zajímá celkový tok vektorového pole uvažovanou plochou  $S$ , tedy součet elementárních příspěvků  $d\Phi_E$ . K tomu využijeme plošný integrál 2.druhu a dostáváme

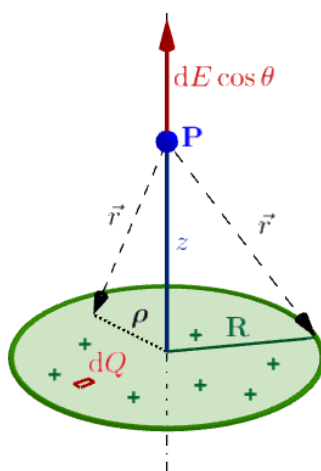
$$\Phi_E = \iint_{S^+} \vec{E} \, d\vec{S} = \iint_{S^+} \vec{E} \, \vec{n} \, dS = \iint_{\Omega} \vec{E} (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, du \, dv. \quad (3.14)$$

Vztah (3.14) odpovídá definici toku elektrické intenzity uvedené v (1.7) pouze s tím rozdílem, že v (1.7) uvažujeme *uzavřenou* plochu. Často se také využívá vyjádření po složkách ve tvaru

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \vec{E} \, d\vec{S} &= \iint_{S^+} (E_1, E_2, E_3) \, \vec{n} \, dS = \\ &= \iint_{S_{yz}} E_1 \frac{n_1}{|n_1|} \, dy \, dz + \iint_{S_{xz}} E_2 \frac{n_2}{|n_2|} \, dz \, dx + \iint_{S_{xy}} E_3 \frac{n_3}{|n_3|} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.4 Plošné integrály v příkladech

**Příklad 3.1.** *V návaznosti na příklad 2.1 uvažujeme nyní ebonitový disk o poloměru  $R$ , který má na svém horním povrchu spojitě rozložený kladný náboj o plošné hustotě  $\sigma$ . Ptáme se, jaká je intenzita  $\vec{E}$  elektrického pole v bodě  $P$ , který je ve vzdálenosti  $z$  od roviny disku na jeho ose souměrnosti (viz obrázek 3.2).*



Obrázek 3.2: Disk rovnoměrně nabitý kladným nábojem.

*Řešení.* Postupujeme stejně jako v [příkladu 2.1](#). Nyní máme rozložení náboje definované plošnou hustotou  $\sigma$ , vyjádříme tedy  $dQ = \sigma dS$ , kde  $dS$  je elementární velikost plochy disku. Ze vztahu (2.15) dostáváme

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\sigma dS}{r^2}.$$

Elektrickou intenzitu v bodě  $P$  opět ovlivňuje pouze složka vektoru  $d\vec{E}$ , která působí ve směru osy souměrnosti a jejíž velikost vyjádříme jako  $dE \cos \theta$ , kde  $\theta$  je úhel, jež svírá vektor  $\vec{r}$  s osou souměrnosti disku (viz [obrázek 3.2](#)). Střed disku umístíme do počátku souřadnicového systému a parametrizujeme plochu disku  $S$  funkcí

$$\vec{r}(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \quad \rho \in [0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Pro Jakobián dostáváme

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \rho \cos \varphi}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho \sin \varphi}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \rho \cos \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \rho \sin \varphi}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = (\rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi) = \rho, \quad (3.16)$$

dále pro  $r^2$  platí

$$r^2 = \rho^2 + z^2,$$

a nakonec vyjádříme

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Celkovou intenzitu  $E$  získáme pomocí plošného integrálu ve tvaru

$$\begin{aligned} E &= \iint_{S^+} dE \cos \theta = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \iint_{S^+} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dS = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho d\varphi = \\ &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[ \frac{(\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^R d\varphi = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{-2}{\sqrt{z^2}} d\varphi = \\ &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma z 2\pi}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme pro elektrickou intenzitu  $E$  vztah

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right).$$

□

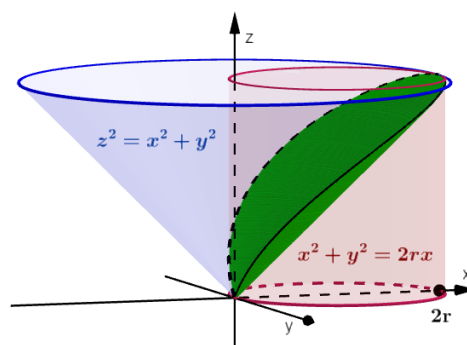
**Příklad 3.2.** Určeme hmotnost plochy  $S$ , která je tvořena částí kuželové plochy  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ohraničené válcovou plochou  $x^2 + y^2 = 2rx$ , a jejíž plošná hustota je určena funkcí  $\rho(x, y, z) = x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2$ .

Řešení. Vyjdeme ze vztahu (3.12) a dostáváme

$$\begin{aligned}
 & \iint_S (x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) \, dS = \\
 &= \iint_{S_{xy}} [x^2 y^2 + (x^2 + y^2)^2] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy = \\
 &= \iint_{S_{xy}} [x^2 y^2 + (x^2 + y^2)^2] \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} \, dx \, dy = \\
 &= \iint_{S_{xy}} [x^2 y^2 + (x^2 + y^2)^2] \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} \, dx \, dy = \\
 &= \iint_{S_{xy}} [x^2 y^2 + (x^2 + y^2)^2] \sqrt{2} \, dx \, dy.
 \end{aligned}$$

Plochu, jejíž hmotnost hledáme, znázorňuje [obrázek 3.3](#). Hranici plochy v průmětu do roviny  $xy$  tvoří kružnice, kterou parametrizujeme

$$\vec{r}(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \quad \rho \in [0, 2r \cos \varphi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$



Obrázek 3.3: Plocha k příkladu 3.2

Stejně jako v [příkladu 3.1](#) má Jakobián tvar (3.16), můžeme tedy využít výpočtový

tvár plošného integrálu podle vztahu (3.9) a pro hmotnost  $m$  plochy  $S$  dostaneme

$$\begin{aligned}
 m &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2r \cos \varphi} \sqrt{2}[\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2] \rho \, d\rho \, d\varphi = \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2r \cos \varphi} (\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \rho^4) \rho \, d\rho \, d\varphi = \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2r \cos \varphi} \rho^5 (\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 1) \, d\rho \, d\varphi = \\
 &= \sqrt{2} \frac{2^6 r^6}{6} \int_0^{2\pi} \cos^6 \varphi (\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 1) \, d\varphi = \\
 &= \sqrt{2} \frac{64r^6}{6} \frac{87\pi}{128} = \frac{87\sqrt{2}}{12} \pi r^6.
 \end{aligned}$$

□

**Příklad 3.3.** *Jaký je tok  $\Phi_E$  Gaussovou plochou  $\mathcal{G}$  tvořenou povrchem válce o poloměru  $R$ , který se nachází v homogenním elektrickém poli  $\vec{\mathbf{E}}$ ? Osa válce je rovnoběžná se směrem pole.*

*Řešení.* Tok elektrické intenzity  $\Phi_E$  určuje vztah (1.7). Homogenní elektrické pole pro jednoduchost umístíme ve směru osy  $x$ , tedy pro něj platí  $\vec{\mathbf{E}} = (k, 0, 0)$ ,  $k = \text{konst.}$  Povrch válce je uzavřená, po částech hladká plocha tvořená dvěma podstavami a pláštěm. Protože má být osa válce rovnoběžná se směrem pole, bez újmy na obecnosti můžeme osu válce umístit na osu  $x$ . Potom levou podstavu, pro kterou  $x = x_0$ , označíme  $S_1$ , plášť označíme  $S_2$  a pravou podstavu, pro kterou  $x = x_1$ , označíme  $S_3$ . Zvolíme orientaci plochy tak, že jednotkový normálový vektor  $\vec{n}$  směřuje vždy ven z plochy. Výsledný tok elektrické intenzity určíme jako součet plošných integrálů přes jednotlivé hladké části, tedy

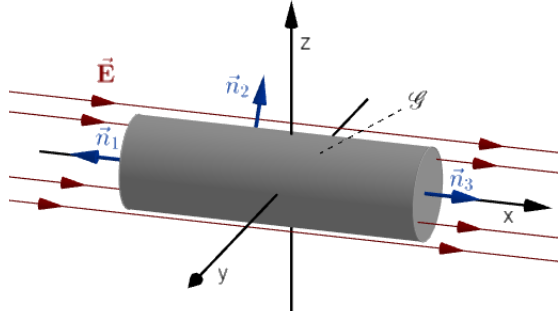
$$\Phi_E = \iint_{S^+} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{S}} = \iint_{S^+} \vec{\mathbf{E}} \vec{n} \, dS = \iint_{S_1^+} \vec{\mathbf{E}} \vec{n}_1 \, dS_1 + \iint_{S_2^+} \vec{\mathbf{E}} \vec{n}_2 \, dS_2 + \iint_{S_3^+} \vec{\mathbf{E}} \vec{n}_3 \, dS_3, \quad (3.17)$$

kde  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$ ,  $\vec{n}_3$  jsou vnější jednotkové normálové vektory ploch  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . Plášť válce parametrizujeme jako

$$\vec{\mathbf{r}}(u, \varphi) = (u, R \cos \varphi, R \sin \varphi), \quad u \in [x_0, x_1], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

a platí

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{r}}_u &= (1, 0, 0), \\
 \vec{\mathbf{r}}_\varphi &= (0, -R \sin \varphi, R \cos \varphi).
 \end{aligned}$$



Obrázek 3.4: Gaussova plocha tvořená povrchem válce.

Plochy podstav  $S_1$  a  $S_3$  parametrizujeme jako

$$\begin{aligned}\vec{s}_1(\rho, \varphi) &= (x_0, \rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \\ \vec{s}_3(\rho, \varphi) &= (x_1, \rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \quad \rho \in [0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Z obrázku 3.4 vidíme, že jednotkový normálový vektor k ploše  $S_1$  je  $\vec{n}_1 = (-1, 0, 0)$ . Podobně jednotkový normálový vektor k ploše  $S_3$  je  $\vec{n}_3 = (1, 0, 0)$ . Jednotkový normálový vektor k plášti  $S_2$  určíme podle vztahu (3.1), tedy

$$\begin{aligned}\vec{n}_2 &= \frac{(1, 0, 0) \times (0, -R \sin \varphi, R \cos \varphi)}{\|(1, 0, 0) \times (0, -R \sin \varphi, R \cos \varphi)\|} = \frac{(0, -R \cos \varphi, -R \sin \varphi)}{R} = \\ &= (0, -\cos \varphi, -\sin \varphi).\end{aligned}$$

Pro jednotlivé integrály ze vztahu (3.17) platí

$$\begin{aligned}\iint_{S_1^+} (k, 0, 0)(-1, 0, 0) dS_1 &= \iint_{S_{yz}} -k dy dz = -k \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho d\varphi = -k\pi R^2, \\ \iint_{S_2^+} (k, 0, 0)(0, -\cos \varphi, -\sin \varphi) dS_2 &= 0, \\ \iint_{S_3^+} (k, 0, 0)(1, 0, 0) dS_3 &= \iint_{S_{yz}} k dy dz = k \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho d\varphi = k\pi R^2.\end{aligned}$$

Výsledný tok elektrické intenzity  $\Phi_E$  je dán součtem předchozích integrálů

$$\Phi_E = -k\pi R^2 + 0 + k\pi R^2 = 0.$$

Tento výsledek není překvapivý, protože podstavami projde stejné množství elektrického pole dovnitř Gaussovy plochy i ven z ní, tedy celkový tok plochou  $\mathcal{G}$  je nulový.

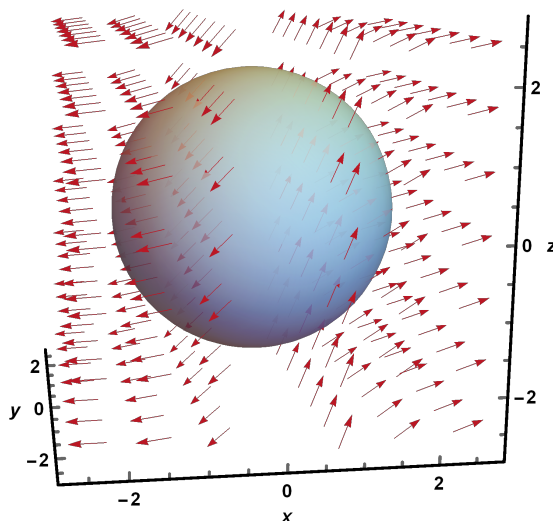
Dalším způsobem řešení jednotlivých integrálů by bylo vyjádření součinu  $\vec{E} \cdot \vec{n}$  ve tvaru  $\|\vec{E}\| \cdot \|\vec{n}\| \cos \alpha$ , kde  $\alpha$  představuje úhel mezi vektory  $\vec{E}$  a  $\vec{n}$ . Jinými slovy

vyjádříme integrály pomocí úhlu, který svírá vektor elektrického pole s jednotkovým normálovým vektorem plochy. Pak bychom dostali

$$\begin{aligned} \iint_{S_1^+} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 &= \iint_{S_1^+} \|\vec{\mathbf{E}}\| \cdot \|\vec{n}_1\| \cos \pi \, dS_1 = -\|\vec{\mathbf{E}}\| \iint_{S_1^+} dS_1 = -\|\vec{\mathbf{E}}\| \pi R^2, \\ \iint_{S_2^+} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{n}_2 \, dS_2 &= \iint_{S_2^+} \|\vec{\mathbf{E}}\| \cdot \|\vec{n}_2\| \cos \frac{\pi}{2} \, dS_2 = 0, \\ \iint_{S_3^+} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{n}_3 \, dS_3 &= \iint_{S_3^+} \|\vec{\mathbf{E}}\| \cdot \|\vec{n}_3\| \cos 0 \, dS_3 = \|\vec{\mathbf{E}}\| \iint_{S_3^+} dS_3 = \|\vec{\mathbf{E}}\| \pi R^2. \end{aligned}$$

Výsledný tok  $\Phi_E$  je opět součtem předchozích integrálů, tedy nulový.  $\square$

**Příklad 3.4.** Uvažujme pole elektrické intenzity z příkladu 2.6, tedy  $\vec{\mathbf{E}} = (x^3, x^2, x)$ . Určeme tok elektrické intenzity tohoto pole kulovou plochou se středem v počátku a poloměrem  $R$ . Situace je znázorněna na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Gaussova plocha tvořená povrchem koule v elektrickém poli.

*Řešení.* Nejprve parametrizujeme plochu  $S$ ,

$$S : \vec{\mathbf{r}}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Dále vyjádříme vektory  $\vec{\mathbf{r}}_u$  a  $\vec{\mathbf{r}}_v$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}_u &= (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0), \\ \vec{\mathbf{r}}_v &= (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v). \end{aligned}$$

Podle (3.14) a s využitím *Wolfram Mathematica 11.2* získáváme

$$\begin{aligned}
 \oiint_{S^+} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{S}} &= \oiint_{\Omega} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v) \, du \, dv = \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} R^3 \cos^3 u \cos^3 v & R^2 \cos^2 u \cos^2 v & R \cos u \cos v \\ -R \sin u \cos v & R \cos u \cos v & 0 \\ -R \cos u \sin v & -R \sin u \sin v & R \cos v \end{vmatrix} du \, dv = \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} R^3 \cos u \cos^2 v (R^2 \cos^3 u \cos^3 v + R \cos u \sin u \cos^2 v + \sin v) \, du \, dv = \\
 &= \frac{4\pi R^5}{5}. \quad \square
 \end{aligned}$$

# Kapitola 4

## Diferenciální operátory

Tato a následující kapitola budou čistě matematické a postupně v nich odvodíme analogie Newtonovy-Leibnizovy formule (4.1) pro křivku, rovinnou oblast i plochu a vyslovíme důležité integrální věty, které později využijeme pro získání diferenciálních tvarů Maxwellových rovnic v kapitole 6. Podkladem pro zpracování této kapitoly byly především zdroje [7], [2] a [1].

Základním stavebním kamenem následujících řádků bude Newtonův vzorec pro výpočet určitého integrálu pomocí primitivní funkce daný vztahem

$$\int_a^b (f(t))' dt = f(b) - f(a). \quad (4.1)$$

Uvedený vztah platí pro funkce na úsečce  $[a, b]$ , tedy podmnožině  $\mathbb{R}$ . Pokud bychom místo úsečky uvažovali křivku  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ , potom intuitivně zaměňujeme koncové body úsečky za koncové body křivky. Body na křivce jsou v prostoru definované vektorovou funkcí  $\vec{r}$  (viz definice 2.1), tedy koncové body křivky odpovídají hodnotám této vektorové funkce v bodech  $a, b$ , tzn. koncovými body křivky jsou  $\vec{r}(a), \vec{r}(b)$ . Pro pravou stranu (4.1) tak dostáváme rozdíl  $f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$ . Budeme se snažit najít analogii k derivaci funkce  $f$  na levé straně vztahu (4.1), kterou označíme jako  $Df$  a správnou definici integrálu tak, aby platilo

$$\int_{\mathcal{K}} Df = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)). \quad (4.2)$$

Vcelku přirozeně získáme analogii k  $(f(t))'$  ve tvaru  $[f(\vec{r}(t))]' := Df$ , tedy budeme hledat „součet“ funkčních hodnot  $Df$  ve všech bodech uvažované křivky  $\mathcal{K}$ .

Nejprve zavedeme první ze zde uvedených diferenciálních operátorů, pomocí něhož vyjádříme  $[f(\vec{r}(t))]'$ .

**Definice 4.1.** *Nechť  $f : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f = f(x, y, z)$  je diferencovatelné skalární pole a  $A \in \mathfrak{D}$ . Potom vektor*

$$\text{grad } f(A) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), \frac{\partial f}{\partial z}(A) \right) \quad (4.3)$$

*nazýváme **gradient** skalární funkce  $f$  v bodě  $A$ .*



Zavedeme-li vektorový diferenciální operátor  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ , potom

$$\text{grad } f(A) = \nabla f(A).$$

Pro derivaci složené funkce  $[f(\vec{\mathbf{r}}(t))]'$  platí

$$\begin{aligned} [f(\vec{\mathbf{r}}(t))]' &= \nabla f(\vec{\mathbf{r}}(t)) \cdot \vec{\mathbf{r}}(t)' = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\mathbf{r}}(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\mathbf{r}}(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{\mathbf{r}}(t))\right) \cdot \left(\frac{dr_1}{dt}(t), \frac{dr_2}{dt}(t), \frac{dr_3}{dt}(t)\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Označme  $g_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $g_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $g_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$ . Potom  $\vec{\mathbf{g}} = (g_1, g_2, g_3)$  popisuje vektorové pole a odpovídá hledanému výrazu  $Df$ . Pro křivkový integrál tak dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \vec{\mathbf{g}} d\vec{\mathbf{r}} &\stackrel{(2.13)}{=} \int_{\mathcal{K}} \vec{\mathbf{g}} d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathcal{K}} g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz \\ &:= \int_a^b \left( g_1(\vec{\mathbf{r}}(t)) \frac{dr_1}{dt} + g_2(\vec{\mathbf{r}}(t)) \frac{dr_2}{dt} + g_3(\vec{\mathbf{r}}(t)) \frac{dr_3}{dt} \right) dt = \int_a^b \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}}(t)) \cdot \vec{\mathbf{r}}'(t) dt. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Získali jsme stejný vztah jako (2.10), nyní však pro vektorové pole popsané funkcí  $\vec{\mathbf{g}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Zároveň odvození (4.4) objasnilo výpočtový tvar integrálu 2.druhu. Z téhož vztahu je vidět, že obdoba Newtonova vzorce je platná pouze pro speciální vektorová pole nazývaná *potenciální*.

**Definice 4.2.** *Nechť  $\vec{\mathbf{g}}$  je spojitě vektorové pole na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že vektorové pole  $\vec{\mathbf{g}}$  je potenciální na  $\Omega$ , jestliže existuje (reálná) funkce  $f$  definovaná na  $\Omega$  taková, že pro každé  $x \in \Omega$  platí*

$$\nabla f(x) = \vec{\mathbf{g}}(x).$$

*Každou takovou funkci  $f$  nazýváme **potenciálem vektorového pole  $\vec{\mathbf{g}}$  na oblasti  $\Omega$** .*

Výsledkem je, že hodnota integrálu potenciálního vektorového pole nezávisí na tvaru křivky, podél které integrujeme. To jsme ilustrovali při řešení příkladu 2.5, kdy hodnota integrálu byla pro různé křivky stejná. Pro zadané pole  $\vec{\mathbf{F}} = (2xy, x^2, 0)$  existuje potenciál  $f = x^2y$  a hodnota integrálu v tomto poli tak závisí pouze na počátečním a koncovém bodu křivky.

**Věta 4.1.** *Nechť  $\vec{\mathbf{g}}$  je spojitá vektorová funkce a  $f$  je potenciál vektorového pole  $\vec{\mathbf{g}}$  na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Nechť existují body  $A, B \in \Omega$  a křivka  $\mathcal{K} \subset \Omega$ , jejímž počátečním bodem je  $A = \vec{\mathbf{r}}(a)$  a koncovým bodem je  $B = \vec{\mathbf{r}}(b)$ .<sup>12</sup> Potom pro křivkový integrál podél křivky  $\mathcal{K}$  platí*

$$\int_{\mathcal{K}^+} \vec{\mathbf{g}} d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathcal{K}^+} g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz = f(\vec{\mathbf{r}}(b)) - f(\vec{\mathbf{r}}(a)) = f(B) - f(A), \quad (4.6)$$

kde  $\vec{\mathbf{r}}(t)$  je parametrizace křivky  $\mathcal{K}$  na intervalu  $[a, b]$ .

<sup>12</sup>Tímto určením jsme křivku orientovali.

Pokud bychom uvažovali křivkový integrál potenciálního pole po uzavřené křivce, potom se počáteční a koncový bod křivky rovnají a jako důsledek věty 4.1 dostáváme

$$\oint_{\mathcal{K}^+} \vec{g} \, d\vec{s} = 0,$$

tedy cirkulace potenciálního vektorového pole je nulová.

**Poznámka.** Jak jsme již zmínili, s potenciálním vektorovým polem jsme se setkali v příkladu 2.5. Změníme zadání části c) tak, že za křivku budeme nyní uvažovat celou kružnici  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ , nejen její kratší oblouk. Uvažujeme tedy potenciální vektorové pole  $\vec{F} = (2xy, x^2, 0)$  a ptáme se na práci  $W$ , kterou toto pole vykoná při přemístění hmotného bodu podél kružnice. Využijeme parametrizaci z řešení příkladu 2.5 a dostáváme

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos^3 \varphi) \, d\varphi = \\ &= \left[ \cos^2 \varphi + \frac{3 \sin \varphi}{4} - \frac{2 \sin^3 \varphi}{3} + \frac{\sin 3\varphi}{12} \right]_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

**Definice 4.3.** Necht'  $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je diferencovatelná vektorová funkce. Potom funkci

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \quad (4.7)$$

nazýváme **divergencí** vektorového pole definovaného funkcí  $\vec{f}$ .

Divergence definuje zobrazení vektorového pole na skalární funkci a vyjadřuje, kolik pole v daném bodě „vzniká“ nebo „zaniká“. V souvislosti s divergencí hovoříme o tzv. *zřídlovosti vektorového pole*. V místech, kde je divergence kladná, dochází k zesilování pole, v místech, kde je záporná, vektorové pole zeslabuje. Z pohledu elektrického pole jsou v bodech, kde jsou umístěny kladné náboje, tzv. *zřídla* a naopak v bodech se záporným nábojem jsou tzv. *nory*. O nezřídlovém poli hovoříme v okamžiku, kdy pro všechny body uvažovaného vektorového pole je divergence nulová.

**Definice 4.4.** Necht'  $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je diferencovatelná vektorová funkce. Potom vektorovou funkci

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \quad (4.8)$$

nazýváme **rotace vektorového pole**  $\vec{f}$ .

Rotace definuje rozbrazení prvků vektorového pole na prvky „transformovaného“ vektorového pole, tedy operátor rotace vytváří nové vektorové pole. Rotace poskytuje informaci o *vírovosti* daného pole, ale také vyjadřuje, „jaké další pole“ může

být popsáným polem vytvořené. Platí, že vektor  $\vec{\text{rot}} \vec{\mathbf{f}}$  je ve všech bodech kolmý na prvky vektorového pole  $\vec{\mathbf{f}}$ . Zároveň je rovnoběžný s osou, kolem které se vektorové pole v daném bodě otáčí (tzn. rotuje)<sup>13</sup> a velikost vektoru  $\vec{\text{rot}} \vec{\mathbf{f}}$  vyjadřuje rychlost otáčení pole v tomto bodě, což společně označujeme jako dříve zmíněnou *vírovost* pole. V bodech s nenulovou rotací vznikají víry, naopak pole označujeme za *nevírové*, pokud v každém bodě uvažovaného pole je rotace nulová.

**Poznámka.** Divergenci a rotaci vektorového pole  $\vec{\mathbf{f}}$  můžeme vyjádřit pomocí operátoru  $\nabla$  jako

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{\mathbf{f}} &= \nabla \cdot \vec{\mathbf{f}} \\ \text{rot } \vec{\mathbf{f}} &= \nabla \times \vec{\mathbf{f}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

kde  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  jsou jednotkové vektory ve směru souřadných os.

---

<sup>13</sup>Směr otáčení je daný pravidlem pravé ruky.

# Kapitola 5

## Integrální věty

Stejně jako v předchozí kapitole budeme hledat analogie Newtonova-Leibnizova vzorce (4.1) a zjednodušeně můžeme říci, že definujeme podmínky, za kterých lze určit křivkový integrál pomocí dvojného, najít souvislost mezi křivkovým a plošným integrálem a nakonec vyjádřit plošný integrál pomocí trojného. Pokud bychom postup vyjádřili schématicky, budeme hledat výrazy na pravých stranách rovností tak, aby platilo

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Omega} \vec{f} \, d\vec{s} &= \iint_{\Omega} \dots \, d\Omega, \\ \oint_{\partial S} \vec{f} \, d\vec{s} &= \iint_S \dots \, d\vec{S}, \\ \oiint_{\partial V} \vec{f} \, d\vec{S} &= \iiint_V \dots \, dV,\end{aligned}$$

kde  $\Omega$  je oblast v rovině, jejíž okraj je tvořený uzavřenou rovinnou křivkou  $\partial\Omega$ ,  $S$  je plocha v prostoru, jejíž okraj je tvořený uzavřenou prostorovou křivkou  $\partial S$  a nakonec  $V$  je oblast v prostoru, jejíž okraj je tvořený uzavřenou prostorovou plochou  $\partial V$ . Podklady k této kapitole byly čerpány z literatury [6] a [7].

### 5.1 Greenova věta

Uvažujme oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a její hranici  $\partial\Omega$ . Odvodíme podobně jako na začátku kapitoly 4 analogii k Newtonovu-Leibnizovu vzorci (4.1). Začneme pravou stranou, kdy se nabízí jako obdobu „funkce“ uvažovat vektorové pole  $\vec{f}$ . Snažíme se tedy najít integrál a tvar integrované derivace na levé straně, kterou opět označíme  $D\vec{f}$ . Integrujeme přes oblast, na levé straně (4.1) tak dostáváme dvojný integrál  $\iint_{\Omega} D\vec{f}$ . Pravou stranu můžeme vyjádřit v podobě dříve odvozeného křivkového integrálu vektorového pole podle (4.6), kde křivka  $\mathcal{K}$  odpovídá hranici  $\partial\Omega$ . V  $\mathbb{R}^2$  tak dostáváme

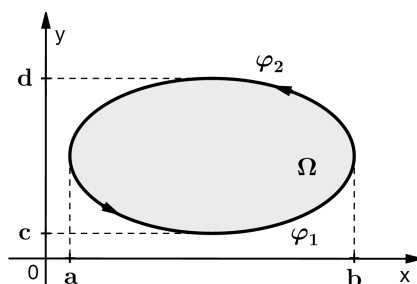
$$\iint_{\Omega} D\vec{f} = \int_{\mathcal{K} \equiv \partial\Omega} f_1 \, dx + f_2 \, dy.$$

Hledaná „derivace  $D\vec{f}$ “ bude zřejmě jedna z možných parciálních derivací  $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ , případně jejich kombinace.

Vyšetříme nejdřív podobu integrálu  $\iint_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial y}$ . Předpokládáme, že hranice oblasti  $\Omega$  je tvořena dvěma hladkými funkcemi  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  definovanými na intervalu  $[a, b]$  tak, že platí

$$\Omega := \{[x, y] : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

tj. oblast  $\Omega$  leží „mezi“ uvedenými funkcemi, jak ilustruje [obrázek 5.1](#).



Obrázek 5.1: Oblast ohraničená dvěma hladkými funkcemi.

S využitím Fubiniovy věty (viz např. [6]) dostáváme

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b f_1(x, \varphi_2(x)) - f_1(x, \varphi_1(x)) dx.$$

Grafy obou funkcí definují křivky  $\mathcal{K}_1(t) = (t, \varphi_1(t))$  a  $\mathcal{K}_2(t) = (t, \varphi_2(t))$  pro  $t \in [a, b]$ . Při dalších úpravách hraje zásadní roli orientace těchto křivek. Poznamenejme, že v případě opačné orientace křivky se změni znaménko integrálu. S využitím (4.5) dostáváme

$$\begin{aligned} \int_a^b [f_1(x, \varphi_2(x)) - f_1(x, \varphi_1(x))] dx &= \int_a^b f_1(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b f_1(x, \varphi_1(x)) dx = \\ &= - \int_b^a f_1(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b f_1(x, \varphi_1(x)) dx = - \int_{\mathcal{K}_2} f_1 dx - \int_{\mathcal{K}_1} f_1 dx = \\ &= - \int_{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2} f_1 dx, \end{aligned}$$

kde  $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$  přirozeně představuje hranici  $\partial\Omega$  a platí

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial\Omega} f_1 dx. \quad (5.1)$$

Pro zaměněné souřadnice stejným postupem dostáváme

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy = \int_{\partial\Omega} f_2 dy. \quad (5.2)$$

Odečtením (5.1) od (5.2) dostáváme podobu hledané „derivace  $D\vec{f}$ “. Předchozí odvození můžeme považovat za náznak důkazu následující věty (důkaz lze najít např. v publikacích [1] nebo [2]).

**Věta 5.1 (Greenova).** *Nechť  $\mathcal{K}^+$  je uzavřená, kladně orientovaná a po částech hladká křivka v  $\mathbb{R}^2$ , která tvoří hranici  $\partial\Omega^+$  oblasti  $\Omega$ . Nechť pro  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  platí, že funkce  $f_1, f_2$  a jejich parciální derivace  $\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x}$  jsou spojité na  $\bar{\Omega} = \text{int}\Omega \cup \partial\Omega$ . Potom platí*

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial\Omega^+} f_1 dx + f_2 dy = \oint_{\mathcal{K}^+} \vec{f} d\vec{s}. \quad (5.3)$$

V mnoha reálných aplikacích se setkáme s úlohami, které vedou na výpočet křivkového integrálu 2. druhu po uzavřené křivce. Stejně tak je tomu i v případě dále uvedených fyzikálních zákonů elektromagnetismu (6.5) a (6.8). Při splnění předpokladů Greenovy věty lze tedy výpočet křivkového integrálu podél křivky  $\mathcal{K}$  převést na výpočet dvojného integrálu přes oblast, jejíž hranici tvoří zmíněná křivka  $\mathcal{K}$ .

**Důsledek věty 5.1** V případě, že oblast  $\Omega$  splňuje předpoklady věty 5.1, potom velikost její plochy můžeme vypočítat pomocí vztahu

$$\text{meas}(\Omega) = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega^+} x dy - y dx. \quad (5.4)$$

Opět můžeme k ukázce využít část c) příkladu 2.4, kde místo kratšího oblouku kružnice budeme uvažovat celou kružnici, tedy uzavřenou křivku. Protože uvedené silové pole splňuje předpoklady Greenovy věty, můžeme ji použít pro výpočet křivkového integrálu. Formulujeme tedy zadání a uvedeme řešení přímým výpočtem i s užitím Greenovy věty.

**Příklad 5.1.** *Uvažujme silové pole  $\vec{F} = (xy, y - x)$ . Určeme práci  $W$ , kterou toto pole vykoná při přemístění hmotného bodu po kružnici  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ , kdy pohyb probíhá proti směru hodinových ručiček z bodu  $[1, 1]$ .*

*Řešení.* Obrázek 5.2 ilustruje oblast  $\Omega$ , kterou parametrizujeme jako

$$\vec{s}(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, 1 + \rho \sin \varphi), \quad \rho \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

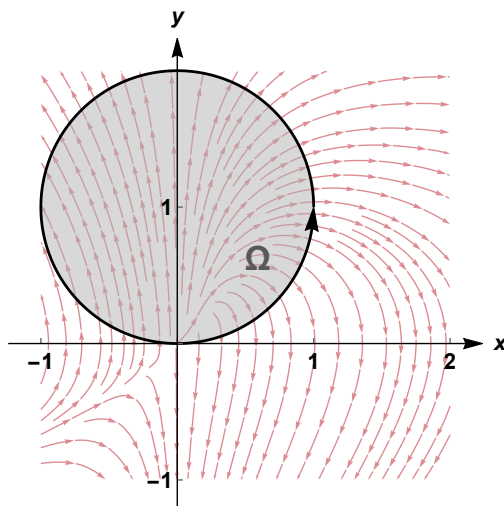
a jejíž hranice je tvořena kružnicí  $\mathcal{K}$ .

Nejprve určíme práci stejným způsobem, jako v příkladu 2.4. Parametrizujeme kružnici  $\mathcal{K}$  vektorovou funkcí

$$\begin{aligned} \vec{s}(\varphi) &= (\cos \varphi, 1 + \sin \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \\ \vec{s}'(\varphi) &= (-\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Pro práci podél kružnice  $\mathcal{K}$  dostáváme

$$W = \oint_{\mathcal{K}} \vec{F} d\vec{s} = \oint_{\mathcal{K}} (xy, y - x) d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (\cos^3 \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi = -\pi.$$



Obrázek 5.2: Uzavřená křivka v elektrickém poli k ilustraci užití Greenovy věty.

Nyní určíme křivkový integrál pomocí Greenovy věty, tedy

$$\begin{aligned} W &= \oint_{\kappa} \vec{\mathbf{F}} \, d\vec{\mathbf{s}} = \iint_{\Omega} (-1 - x) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-1 - \rho \cos \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos \varphi \right) d\varphi = -\pi. \end{aligned}$$

□

## 5.2 Stokesova věta

Pro použití v reálných aplikacích nemá [věta 5.1](#) (Greenova) dostatečně univerzální podobu. Budeme-li uvažovat obecně, můžeme rovinnou oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  přenést do  $\mathbb{R}^3$ , deformovat a získat tak plochu  $S := \{\vec{\mathbf{r}}(u, v), [u, v] \in \Omega\}$ . Při odvození Greenovy věty hrála klíčovou roli orientace křivky, která tvořila hranici rovinné oblasti. Stejně tak při odvození následujícího zobecnění budeme požadovat, aby plocha  $S$  a její okraj  $\partial S$  byly souhlasně orientované (viz [definice 3.3](#)). Pouze připomene, že plocha  $S$  je souhlasně orientovaná se svým okrajem  $\partial S$ , pokud při obíhání podél okraje ve směru jeho orientace je „horní“ strana plochy, určená normálovým vektorem  $\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v}{\|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v\|}$ , po levé ruce.

Vyjdeme z [věty 5.1](#) a uvažujeme rovinné vektorové pole  $\vec{\mathbf{f}} = (f_1(x, y), f_2(x, y), 0)$ . Potom pro rotaci platí  $\text{rot } \vec{\mathbf{f}} = \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cdot \vec{\mathbf{k}}$ , kde  $\vec{\mathbf{k}}$  je jednotkový vektor ve směru souřadnicové osy  $z$ . Pokud jsou splněny předpoklady [věty 5.1](#), můžeme ji přepsat do tvaru

$$\iint_{\Omega} \text{rot } \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{k}} \, dx \, dy = \oint_{\partial\Omega^+} \vec{\mathbf{f}} \, d\vec{\mathbf{s}}. \quad (5.5)$$

Z rovinné oblasti  $\Omega$  se přesuneme na plochu  $S \subset \mathbb{R}^3$  a dostáváme obdobu vztahu (5.5) ve tvaru následující věty.

**Věta 5.2 (Stokesova).** *Nechť existuje vektorové pole  $\vec{\mathbf{f}} \in C^1(\Omega)^{14}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Nechť oblast  $\Omega$  obsahuje orientovanou plochu  $S, \bar{S} = (S \cup \partial S) \subset \Omega$ . Předpokládáme, že okraj  $\partial S$  je tvořen křivkou a plocha  $S$  je orientovaná souhlasně se svým okrajem. Potom platí*

$$\iint_{S^+} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{f}} \, d\vec{\mathbf{S}} = \oint_{\partial S^+} \vec{\mathbf{f}} \, d\vec{\mathbf{s}}. \quad (5.6)$$

Ze vztahů (5.5) a (5.6) je na první pohled vidět, že Greenova věta je rovinným případem Stokesovy věty. Samotná Stokesova věta pak dává do souvislosti křivkový a plošný integrál.

**Poznámka.** Vrátime se k příkladu 2.6 a nyní ukážeme jeho řešení s využitím věty 5.2 (Stokesovy). Je vhodné uvažovat nejjednodušší možnou plochu, jejíž hranice je tvořena uzavřenou křivkou  $\mathcal{K}$ . V našem případě leží  $A, B, C, D$  v jedné rovině, tedy uvažovanou plochou bude část této roviny, jejíž hranici tvoří úsečky  $\vec{\mathbf{s}}_1, \vec{\mathbf{s}}_2, \vec{\mathbf{s}}_3, \vec{\mathbf{s}}_4$ . Plochu  $S$  pak můžeme parametrizovat například

$$\vec{\mathbf{r}}(s, t) = (2 - 2s, 2t, 2s), \quad s, t \in [0, 1].$$

Abychom mohli větu použít, musí být splněn předpoklad, že plocha je orientovaná souhlasně se svou hranicí. Pro jednotkový normálový vektor  $\vec{\mathbf{n}}$  plochy  $S$  dostáváme

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}_s &= (-2, 0, 2), \\ \vec{\mathbf{r}}_t &= (0, 2, 0), \\ \vec{\mathbf{n}} &= \frac{\vec{\mathbf{r}}_s \times \vec{\mathbf{r}}_t}{\|\vec{\mathbf{r}}_s \times \vec{\mathbf{r}}_t\|} = \frac{(4, 0, 4)}{4} = (1, 0, 1). \end{aligned}$$

Plocha je tedy orientovaná souhlasně se svou hranicí, jak je rovněž znázorněno na obrázku 5.3, a můžeme větu 5.2 použít. Určíme rotaci pole  $\vec{\mathbf{E}}$

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = \operatorname{rot}(x^3, x^2, x) = (0, 1, 2x)$$

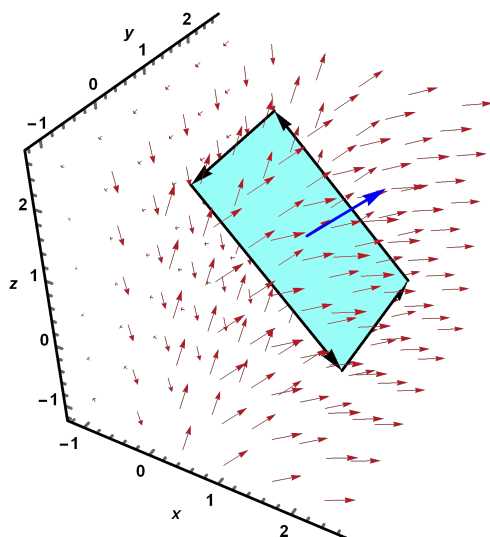
a integrací dostáváme

$$\begin{aligned} W &= \iint_{S^+} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{S}} = \iint_{S^+} (0, 1, 2x) \vec{\mathbf{n}} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (0, 1, 2(2-2s)) \cdot (1, 0, 1) \, 4 \, ds \, dt = \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 4 - 4s \, ds \, dt = 4 \int_0^1 2 \, dt = 8. \end{aligned}$$

Dospěli jsme ke stejnému výsledku jako v případě přímé aplikace křivkového integrálu v příkladu 2.6. Souvislost mezi křivkovým a plošným integrálem v podobě Stokesovy věty hraje významnou roli při popisu interakce mezi elektrickým a magnetickým polem, jak uvidíme v kapitole 6.

<sup>14</sup>Funkce patří do třídy  $C^1(\Omega)$ , jestliže má ve všech bodech množiny  $\Omega$  spojitě první parciální derivace.





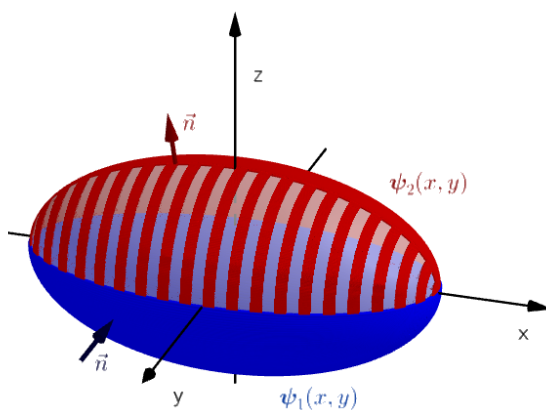
Obrázek 5.3: Uzavřená křivka v elektrickém poli k ilustraci užití Stokesovy věty.

### 5.3 Gaussova-Ostrogradského věta

V poslední části této kapitoly se posuneme ještě dál a budeme uvažovat oblast  $V \subset \mathbb{R}^3$ , jejíž hranicí je uzavřená plocha  $\partial V \subset \mathbb{R}^3$ . Budeme postupovat podobně jako v případě odvození [věty 5.1](#) (Greenovy), tedy uvažujeme, že hranice  $\partial V$  je tvořena dvěma hladkými funkcemi  $\psi_1$  a  $\psi_2$  definovanými v  $\mathbb{R}^3$  tak, že platí

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\},$$

tj. oblast  $V$  tvoří „objem“ mezi těmito funkcemi a grafy funkcí definují všechny body ploch  $S_1 = (x, y, \psi_1(x, y))$  a  $S_2 = (x, y, \psi_2(x, y))$ , jak ilustruje [obrázek 5.4](#). Funkce  $\psi_1(x, y)$  a  $\psi_2(x, y)$  jsou parametrizacemi ploch  $S_1, S_2$  a platí  $(x, y) \in V_{xy}$ , kde  $V_{xy}$  je průmět  $V$  do roviny  $xy$ .



Obrázek 5.4: Oblast ohraničená dvěma hladkými dvourozměrnými funkcemi.

Uvažujme na oblasti  $V$  vektorové pole  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ . Pro výpočet bude opět hrát roli orientace, kterou v případě plochy určuje směr normálového vektoru  $\vec{n}$ .

Pro plochu  $S_2$  směřuje vektor  $\vec{n}$  ven z oblasti  $V$ , plocha je orientovaná souhlasně se svou parametrizací ( $S_2^+$ ) a o vektoru  $\vec{n}$  hovoříme jako o *vektoru vnější normály*. Naopak je tomu v případě plochy  $S_1$ , kdy je plocha orientovaná nesouhlasně s parametrizací ( $S_1^-$ ).

S využitím Fubiniovy věty pro  $\frac{\partial f_3}{\partial z}$  dostáváme

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial f_3}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{V_{xy}} \left( \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \iint_{V_{xy}} [f_3(x, y, \psi_2(x, y)) - f_3(x, y, \psi_1(x, y))] dx dy \\ &= \iint_{S_2^+} f_3 dx dy - \iint_{S_1^-} f_3 dx dy \\ &= \iint_{S_1 \cup S_2} f_3 dx dy = \iint_{\partial V^+} f_3 dx dy. \end{aligned}$$

Změnou orientace plochy  $S_1$  (tzn. změnou znaménka u plošného integrálu přes plochu  $S_1$ ) jsme zajistili, že hranice oblasti  $\partial V$  je ve všech bodech orientovaná pomocí vnější normály.

Stejný výpočet bychom využili pro složky  $\frac{\partial f_2}{\partial y}$  a  $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ . Pokud tedy nyní použijeme složkové vyjádření plošného integrálu jako v (3.15), dostáváme

$$\iiint_V \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial V^+} f_1 dy dz + f_2 dz dx + f_3 dx dy = \iint_{\partial V^+} \vec{f} d\vec{S}$$

a můžeme formulovat následující větu.

**Věta 5.3 (Gaussova-Ostrogradského).** *Nechť  $V$  je omezená oblast, jejíž hranice je tvořena uzavřenou orientovanou a po částech hladkou plochou  $\partial V^+$ . Nechť vektorové pole  $\vec{f} \in C^1(\bar{V})$ , potom platí*

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{f} dV = \iint_{\partial V^+} \vec{f} d\vec{S}. \quad (5.7)$$

**Poznámka.** Vrátime se k příkladu 3.4, kde jsme určovali tok elektrické intenzity kulovou plochou. Nyní ukážeme platnost Gaussovy-Ostrogradského věty, kdy vektorové pole  $\vec{E} = (x^3, x^2, x)$  splňuje předpoklady a můžeme tedy určit divergenci pole  $\vec{E}$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 3x^2.$$

Kulová plocha vytváří objem  $V$ , který vyjádříme ve sférických souřadnicích

$$V = (\rho \cos u \cos v, \rho \sin u \cos v, \rho \sin v), \quad \rho \in [0, R], u \in [0, 2\pi], v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

a platí  $dV = \rho^2 \cos v \, d\rho \, du \, dv$ . Podle (5.7) dostáváme

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} \, dV &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R 3\rho^2 \cos^2 u \cos^2 v \rho^2 \cos v \, d\rho \, du \, dv = \\ &= \frac{3R^5}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2 u \cos^3 v \, du \, dv = \frac{3R^5}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos^3 v \left[ u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_0^{2\pi} \, dv = \\ &= \frac{3\pi R^5}{5} \frac{1}{4} \left[ 3 \sin v + \frac{1}{3} \sin 3v \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi R^5}{5}. \end{aligned}$$

Výsledek je shodný s tím, který jsme získali přímou integrací v [příkladu 3.4](#). Z pohledu elektrického pole předchozí věta vlastně vyjadřuje, že chování pole na povrchu tělesa<sup>15</sup> odpovídá zřídlovosti pole uvnitř tělesa. [Věta 5.2](#) (Stokesova) a [Věta 5.3](#) (Gaussova-Ostrogradského) jsou zásadní při odvozování diferenciálních tvarů Maxwellových rovnic, jak uvidíme v [části 6.2](#).

<sup>15</sup>Povrch je reprezentovaný hranicí  $\partial V$ .

# Kapitola 6

## Maxwellovy rovnice

V předchozích kapitolách jsme se seznámili s pojmy křivkového a plošného integrálu a vyjádřili jsme souvislosti pomocí integrálních vět 5.1, 5.2, 5.3. V této kapitole si ukážeme jejich využití při formulaci fyzikálních zákonů, konkrétně se zaměříme na čtyři fundamentální rovnice elektromagnetismu, dnes známé jako *Maxwellovy rovnice*. Hlavními zdroji ke zpracování této kapitoly byly podklady [10], [9] a [5].

James Clerk Maxwell (1831 - 1879) jako první matematicky formuloval zákony elektromagnetismu. Ve své době bylo vyjádření teorie elektromagnetického pole nové a revoluční, navíc popis rovnic v souřadnicovém tvaru byl komplikovaný. Přesto se pro další fyziky stal výchozím bodem a vyjasněním původního Maxwellova zápisu vznikl fyzikálně názornější integrální tvar, ze kterého se odvozuje tvar diferenciální. V následujících kapitolách uvedeme Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru a využijeme uvedený matematický aparát potřebný k odvození diferenciálních tvarů, což je také cílem této práce.

### 6.1 Integrální tvary Maxwellových rovnic

**Gaussův zákon elektrostatiky.** První Maxwellova rovnice vyjadřuje vztah mezi celkovým tokem elektrické intenzity  $\Phi_E$  uzavřenou plochou  $S$  a celkovým nábojem  $Q$ , který tato plocha obklopuje. Jinými slovy „kolik volného náboje se nachází uvnitř plochy, tolik elektrické intenzity plochou projde“. Tento zákon lze považovat za jinou formulaci Coulombova zákona (1.4) a pro elektrostatické problémy jsou tyto dva zákony ekvivalentní. Gaussův zákon se s výhodou využívá tam, kde je možné nalézt určitou symetrii v rozložení náboje. Vyjádříme-li tok elektrické intenzity  $\vec{E}$  pomocí vztahu (1.7), dostáváme Gaussův zákon elektrostatiky přes uzavřenou plochu ve tvaru

$$\oiint_{S^+} \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon}. \quad (6.1)$$

**Gaussův zákon pro magnetické pole.** Druhá Maxwellova rovnice říká, že magnetický indukční tok  $\Phi_B$  uzavřenou plochou  $S$  je nulový. Jinými slovy „kolik

indukce  $\vec{\mathbf{B}}$  směřuje dovnitř plochy, tolik odchází ven“. Tok vyjádříme podle vztahu (1.15) a dostáváme

$$\oiint_{S^+} \vec{\mathbf{B}} \, d\vec{\mathbf{S}} = 0. \quad (6.2)$$

**Faradayův zákon.** Tento zákon má několik různých formulací, jejichž základní myšlenkou je změna. Michael Faraday byl první, kdo experimentálně ověřil, že v čase se měnící magnetické pole vytváří pole elektrické. Indukovaný proud vzniká při pohybu magnetu smyčkou<sup>16</sup>. Indukované elektromotorické napětí  $\mathcal{E}$  vyjadřuje práci, kterou vykoná jednotkový náboj  $Q$  při vytváření indukovaného proudu  $I$ . Tento proces vzniku proudu se nazývá *elektromagnetická indukce*. Elektromotorické napětí  $\mathcal{E}$  můžeme vyjádřit pomocí magnetického indukčního toku  $\Phi_B$  jako

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (6.3)$$

kde znaménko minus vyjadřuje, že indukované elektromotorické napětí brání změně magnetického indukčního toku. Výše uvedený vztah rovněž vyjadřuje, že indukované elektromotorické napětí je nenulové pouze tehdy, když se magnetický indukční tok mění. A zároveň říká, že směr indukovaného proudu  $I$  ve smyčce bude takový, aby magnetické pole indukované tímto proudem působilo proti magnetickému poli, které indukovalo proud  $I$ .

Nyní vyjádříme práci  $W$ , kterou vykoná indukované elektrické pole na náboji  $Q_0$  jako

$$W = Q_0 \mathcal{E},$$

kde  $\mathcal{E}$  vyjadřuje indukované elektromotorické napětí představující práci připadající na jednotkový náboj  $Q$ . Pokud budeme uvažovat, že práci  $W$  vykoná síla  $\vec{\mathbf{F}}$  při pohybu částice s nábojem  $Q_0$  po uzavřené křivce  $\mathcal{K}$ , vracíme se tím k příkladu 1.1 a jeho výsledku (2.14). Potom můžeme s pomocí vztahu pro elektrickou intenzitu (1.5) psát

$$W = \oint_{\mathcal{K}^+} \vec{\mathbf{F}} \, d\vec{\mathbf{s}} = \oint_{\mathcal{K}^+} \vec{\mathbf{E}} Q_0 \, d\vec{\mathbf{s}} = Q_0 \oint_{\mathcal{K}^+} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{s}},$$

odkud dostáváme

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{K}^+} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{s}}. \quad (6.4)$$

Porovnáním (6.3) a (6.4) získáváme vyjádření Faradayova zákona a tedy třetí Maxwellovy rovnice ve tvaru

$$\oint_{\mathcal{K}^+} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (6.5)$$

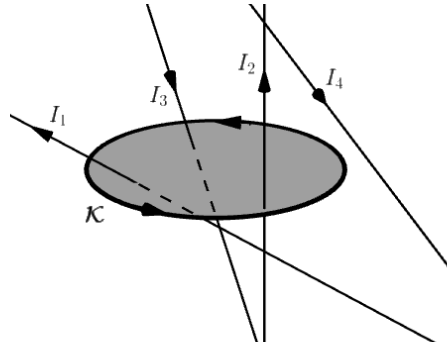
<sup>16</sup>Smyčku budeme dále chápat jako uzavřenou, po částech hladkou křivku.

**Ampérův-Maxwellův zákon.** Čtvrtá Maxwellova rovnice plyne ze spojení dvou zákonů: Ampérova a Maxwellova.

*Ampérův zákon* je analogií ke Gaussovu zákonu (6.1). Podobně jako Gaussův zákon je zobecněním Coulombova zákona pro elektrické pole vytvořené bodovými náboji, je Ampérův zákon stejným zobecněním Biotova-Savartova zákona (1.14) a platí

$$\oint_{\mathcal{K}^+} \vec{\mathbf{B}} \, d\vec{\mathbf{s}} = \mu I_c, \quad (6.6)$$

kde  $I_c$  označuje celkový proud, který protéká plochou, jejíž hranicí je křivka  $\mathcal{K}$ . Pro celkový proud na obrázku 6.1 platí  $I_c = I_1 + I_2 - I_3$ , kde znaménka proudů určuje pravidlo pravé ruky vzhledem k orientaci křivky  $\mathcal{K}$ .



Obrázek 6.1: Celkový proud procházející plochou ohraničenou křivkou  $\mathcal{K}$ .

*Maxwellův zákon magnoelektrické indukce* vznikl jako analogie k Faradayovu zákonu (6.5), který říká, že změna toku magnetické indukce  $\Phi_B$  vytváří elektrické pole. Maxwellův zákon ukazuje, že platí i obrácený jev, tedy že změna toku elektrické intenzity  $\Phi_E$  indukuje pole magnetické. Uvažujme kondenzátor v okamžiku nabíjení. Elektrody kondenzátoru jsou nabíjeny vodivostním proudem  $I^{17}$ . Uvažujme plochy  $S_1$  a  $S_2$  tak, jak je znázorněno na obrázku 6.2. Plochou  $S_2$  neprochází žádný proud  $I$ , takže pokud bychom nyní aplikovali Ampérův zákon (6.6) pro  $\partial S_1^+ = \partial S_2^+$ , dostaneme spor

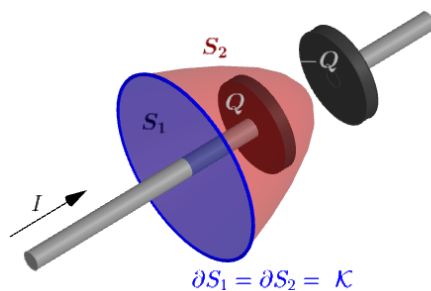
$$\oint_{\partial S_1^+} \vec{\mathbf{B}} \, d\vec{\mathbf{s}} = \mu I_c \quad \wedge \quad \oint_{\partial S_2^+} \vec{\mathbf{B}} \, d\vec{\mathbf{s}} = 0.$$

Vodivostní proud  $I$  ovšem mění elektrické pole  $\vec{\mathbf{E}}$  vznikající mezi elektrodami a to vede ke vzniku magnetického pole, což popisuje Maxwellův zákon

$$\oint_{\mathcal{K}^+} \vec{\mathbf{B}} \, d\vec{\mathbf{s}} = \mu \varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu I_M, \quad (6.7)$$

kde  $I_M$  se nazývá *Maxwellův proud*.

<sup>17</sup>Vzniká působením elektrického pole ve vodiči na náboje, čímž způsobuje jejich uspořádaný pohyb.



Obrázek 6.2: Vznik Maxwellova proudu.

Spojením vztahů (6.6) a (6.7) dostáváme čtvrtou Maxwellovu rovnici v podobě Ampérova-Maxwellova zákona ve tvaru

$$\frac{1}{\mu} \oint_{\mathcal{K}} \vec{\mathbf{B}} \, d\vec{\mathbf{s}} = I_M + I_c. \quad (6.8)$$

Z předchozí rovnosti plyne, že pokud je celkový proud nenulový a elektrický tok se v čase nemění (např. vodičem protéká stejnosměrný proud), potom se (6.8) zjednoduší na Ampérův zákon (6.6). Naopak pokud je celkový proud nulový (např. uvnitř nebo vně kondenzátoru), získáme Maxwellův zákon magnoelektrické indukce (6.7). Čtvrtá Maxwellova rovnice tedy vyjadřuje, že magnetická indukce podél uzavřené křivky  $\mathcal{K}$  je rovna součtu Maxwellova proudu  $I_M$  a celkového proudu  $I_c$ , které protékají libovolnou plochou, jejíž hranicí je integrační křivka  $\mathcal{K}$ .

## 6.2 Odvození diferenciálních tvarů

Integrální tvary Maxwellových rovnic popisují chování elektromagnetického pole v oblasti. Pro popis tohoto pole v konkrétním bodě slouží tvary diferenciální. Před jejich odvozením zavedeme pro přehlednost následující veličiny

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{D}} &= \varepsilon \cdot \vec{\mathbf{E}}, \\ \vec{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu} \cdot \vec{\mathbf{B}}, \end{aligned}$$

kde  $\vec{\mathbf{D}}$  se nazývá *elektrická indukce* a  $\vec{\mathbf{H}}$  je *intenzita magnetického pole*. Můžeme tak přepsat všechny čtyři Maxwellovy rovnice pomocí veličin  $\vec{\mathbf{D}}$ ,  $\vec{\mathbf{B}}$ ,  $\vec{\mathbf{E}}$ ,  $\vec{\mathbf{H}}$  a dostaneme

soustavu

$$\oiint_{S^+} \vec{D} \, d\vec{S} = Q, \quad (6.9)$$

$$\oiint_{S^+} \vec{B} \, d\vec{S} = 0, \quad (6.10)$$

$$\oint_{\mathcal{K}^+} \vec{E} \, d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \Phi_B = \iint_{S^+} \vec{B} \, d\vec{S}, \quad (6.11)$$

$$\oint_{\mathcal{K}^+} \vec{H} \, d\vec{s} = \frac{d\Phi_E}{dt} + I_c, \quad \Phi_E = \iint_{S^+} \vec{D} \, d\vec{S}, \quad I_c = \iint_{S^+} \vec{J} \, d\vec{S}. \quad (6.12)$$

Přechod k diferenciálním tvarům zjednodušeně znamená, že se budeme snažit z rovností (6.9) až (6.12) eliminovat integrály a spojíme tím dohromady vše, o čem jsme hovořili v předchozích kapitolách.

**Gaussův zákon elektrostatiky.** V rovnosti (6.9) integrujeme přes uzavřenou orientovanou plochu. Tato plocha zřejmě tvoří hranici  $\partial V$  oblasti  $V \subset \mathbb{R}^3$  a levou stranu můžeme vyjádřit pomocí věty 5.3 (Gaussovy-Ostrogradského), tedy platí

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{D} \, dV = \oiint_{\partial V^+} \vec{D} \, d\vec{S}. \quad (6.13)$$

Abychom mohli integrály eliminovat, je nutné i pravou stranu (6.9) formulovat ve tvaru integrálu, což můžeme udělat, pokud náboj  $Q$  vyjádříme pomocí objemové hustoty  $\rho$  jako

$$Q = \iiint_V \rho \, dV. \quad (6.14)$$

Porovnáním levé strany (6.13) a pravé strany (6.14) přímo dostáváme první Maxwellovu rovnici v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (6.15)$$

Elektrické pole popsané elektrickou indukcí  $\vec{D}$ , resp. elektrickou intenzitou  $\vec{E}$ , má v každém svém bodě objemovou hustotu odpovídající divergenci  $\operatorname{div} \vec{D}$ , tedy zesílení nebo zeslabení pole v daném bodě.

**Gaussův zákon pro magnetické pole.** Úplně stejně jako v předchozím případě budeme postupovat i u druhé Maxwellovy rovnice a získáme tvar

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (6.16)$$

Na základě významu divergence nám (6.16) říká, že magnetické pole je v každém svém bodě nezářidlové. Tím jsme matematicky popsali tvrzení z části 1.2, kde jsme při popisu magnetické indukce hovořili o magnetickém dipólu jako základním elementu magnetického pole. Můžeme si představit analogii s elektrickým polem, kdy kladný náboj bude odpovídat severnímu pólu magnetu a záporný náboj jižnímu pólu. Pokud bychom touto analogií popsali magnetické pole, pak nulová divergence znamená, že počet kladných nábojů je pořád stejný jako počet záporných nábojů.



**Faradayův zákon.** V případě rovnice (6.11) probíhá integrace po orientované uzavřené křivce, která zřejmě tvoří hranici  $\partial S$  plochy  $S \subset \mathbb{R}^3$  a k odvození diferenciálního tvaru můžeme využít větu 5.2 (Stokesovu). Levou stranu (6.11) přepíšeme do tvaru

$$\iint_{S^+} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{S}} = \oint_{\mathcal{K}^+} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{s}}. \quad (6.17)$$

Pravou stranu (6.11) vyjádříme pomocí integrálu ve tvaru

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_{S^+} \vec{\mathbf{B}} \, d\vec{\mathbf{S}} \right). \quad (6.18)$$

Stejně jako v předchozí části porovnáme levou stranu (6.17) a pravou stranu (6.18) a dostáváme diferenciální tvar třetí Maxwellovy rovnice

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}. \quad (6.19)$$

Tedy vektorové pole  $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}}$ , které je kolmé na vektorové pole elektrické intenzity  $\vec{\mathbf{E}}$ , vyjadřuje změnu magnetické indukce  $\vec{\mathbf{B}}$  s opačným znaménkem. Což v řeči vektorů znamená v opačném směru.

**Ampérův-Maxwellův zákon.** Poslední rovnici odvodíme analogicky k předchozí opět s využitím věty 5.2 (Stokesovy) a dostáváme

$$\iint_{S^+} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} \, d\vec{\mathbf{S}} = \frac{d}{dt} \left( \iint_{S^+} \vec{\mathbf{D}} \, d\vec{\mathbf{S}} \right) + \iint_{S^+} \vec{\mathbf{J}} \, d\vec{\mathbf{S}},$$

což po eliminaci integrálů vyjádříme jako

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \frac{d\vec{\mathbf{D}}}{dt} + \vec{\mathbf{J}}. \quad (6.20)$$

### 6.3 Význam Maxwellových rovnic

Nyní si přehledně shrneme tvary Maxwellových rovnic

$$\oiint_{S^+} \vec{\mathbf{D}} \, d\vec{\mathbf{S}} = Q, \quad \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = \rho, \quad (\text{I})$$

$$\oiint_{S^+} \vec{\mathbf{B}} \, d\vec{\mathbf{S}} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0, \quad (\text{II})$$

$$\oint_{\mathcal{K}^+} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}, \quad (\text{III})$$

$$\oint_{\mathcal{K}^+} \vec{\mathbf{H}} \, d\vec{\mathbf{s}} = \frac{d\Phi_E}{dt} + I_c, \quad \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \frac{d\vec{\mathbf{D}}}{dt} + \vec{\mathbf{J}}. \quad (\text{IV})$$

Z výše uvedených rovnic je vidět určitá symetrie. V případě prvních dvou rovnic (I) a (II), kde vystupují indukce, elektrická  $\vec{D}$  a magnetická  $\vec{B}$ , se integruje přes uzavřenou plochu a v diferenciálních tvarech vystupuje operátor divergence. Tyto rovnice popisují zřídlovost obou polí a charakterizují tato pole odděleně pouze pomocí veličin každého z nich. Zbývající dvě rovnice (III) a (IV), kde vystupují intenzity, elektrická  $\vec{E}$  a magnetická  $\vec{H}$ , jsou popsány integrálem podél uzavřené křivky a v diferenciálních tvarech vystupuje operátor rotace. Tyto rovnice popisují vzájemné působení elektrického a magnetického pole. Podklady související s vizualizací elektromagnetického pole byly čerpány ze zdroje [16].

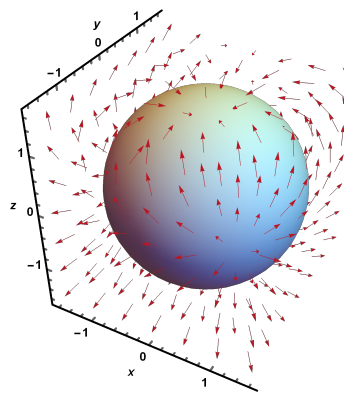
Pro ilustraci všech čtyř rovnic se vraťme k obrázku 1.6 ze začátku naší práce, kde je zobrazeno elektrické pole vodiče s proudem a indukované magnetické pole v okolí tohoto vodiče. Abychom mohli vizualizovat matematické vyjádření popsané rovnicemi (I) až (IV), obrázek zjednodušíme a budeme ho postupně rozvíjet.

Vizualizace vektorových polí je zpracována v softwaru *Wolfram Mathematica 11.2*. Základem pro popis elektrického pole je vyjádření elektrické intenzity bodového náboje podle (1.6). Pokud uvažujeme více nábojů, platí princip superpozice, tedy v každém bodě pole sečteme příspěvky elektrické intenzity  $\vec{E}_i$  od jednotlivých bodových nábojů  $Q_i$ , což můžeme vyjádřit jako

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}),$$

kde  $\vec{r}$  je polohový vektor libovolného bodu elektrického pole a  $N$  vyjadřuje počet nábojů, jejichž působení ovlivňuje intenzitu  $\vec{E}$ .

Pro účely vizualizace pole je možné zanedbat konstantu  $\frac{1}{4\pi\epsilon}$ . Pole můžeme parametricky popsat pomocí velikosti náboje  $Q$ , jeho polohy v prostoru  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  a pomocí polohy bodu v prostoru  $\vec{r} = (x, y, z)$ , ve kterém elektrické pole zkoumáme. Díky vizualizacím je možné si lépe představit nejen význam Maxwellových rovnic, ale i smysl diferenciálních operátorů, které v nich vystupují.



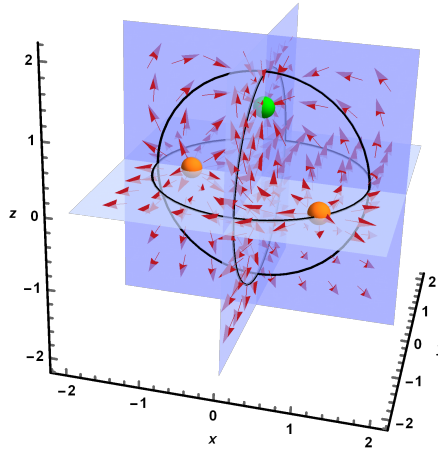
Obrázek 6.3: Ilustrace Gaussova zákona elektrostatiky.

Představme si tedy seskupení různých nábojů, kolem něž vytvoříme Gaussovu plochu<sup>18</sup>. Situaci popisuje obrázek 6.3 a podle Gaussova zákona elektrostatiky

<sup>18</sup>Pro ilustraci jsme zvolili kouli, nicméně tvar může být libovolný symetrický.

(I) platí, že množství elektrické indukce, které projde plochou, odpovídá velikosti volného náboje uvnitř plochy. Pro jednoduchost volíme tři náboje, dva kladné  $Q_1 = Q_2 = +1$  a jeden záporný  $Q_3 = -1$ . Kladné náboje jsou umístěny do bodů  $\vec{r}_{01} = (-1, 0, 0)$ ,  $\vec{r}_{02} = (1, -1, 0)$ , záporný náboj do bodu  $\vec{r}_{03} = (0, 0, 1)$ . Vektorové pole této konfigurace nábojů je vykresleno pomocí funkce `VectorPlot3D`. Z analýzy takto parametrizovaného elektrického pole na Gaussově ploše vidíme, že více siločar vychází ven než míří dovnitř, tedy uvnitř plochy očekáváme volný kladný náboj.

Pro představu, jak pole vypadá uvnitř tělesa, můžeme vytvořit řezy prostoru základními rovinami, jak je ukázáno na [obrázku 6.4](#). Kladné náboje jsou zde znázorněné oranžovou barvou, záporný náboj je zelený. Z obrázku je nyní vidět zřídlovost elektrického pole, kde v místech výskytu kladných nábojů jsou patrná zřídla a v místě se záporným nábojem zase nora.



Obrázek 6.4: Vzájemné působení nábojů v řezu.

Nyní nás může napadnout ilustrovat na tomto příkladu platnost Gaussovy-Ostrogradského věty. Informace k následujícím odstavcům byly čerpány z [15], [4], [12] a [13]. Máme k dispozici parametrizované elektrické pole a Gaussovou plochu  $\mathcal{S}$ , která tvoří objem  $V$ . Z výše popsané konfigurace nábojů pro jednotlivé složky vektoru elektrické intenzity  $\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon}(E_x, E_y, E_z)$  dostáváme

$$E_x = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + (z-1)^2)^{3/2}} + \frac{x+1}{((x+1)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{x-1}{((x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$E_y = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + (z-1)^2)^{3/2}} + \frac{y}{((x+1)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{y+1}{((x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$E_z = -\frac{z-1}{(x^2 + y^2 + (z-1)^2)^{3/2}} + \frac{z}{((x+1)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{z}{((x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Nicméně námi popsané vektorové pole  $\vec{\mathbf{E}}$  není spojitě diferencovatelné v bodech, ve kterých jsou umístěné náboje (nazveme je „nulové body“). Z definice elektrické intenzity bodového náboje (1.5) vidíme, že v nulových bodech, tzn. pro  $\|\vec{r}\| \rightarrow 0$ , vektorové pole diverguje. Divergence takového pole v nulových bodech také diverguje a ve všech ostatních bodech je nulová. Abychom mohli určit  $\iiint_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} dV$ , využijeme diferenciální tvar Gaussova zákona elektrostatiky (6.15). V případě diskrétně rozloženého náboje potřebujeme k matematickému popisu objemové hustoty  $\rho$  tzv. *Diracovu delta funkci*  $\delta$ , pro kterou definujeme

$$\begin{aligned} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= 0 && \text{pro } \vec{r} \neq \vec{r}_0, \\ \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= +\infty && \text{pro } \vec{r} = \vec{r}_0, \end{aligned}$$

kde  $\vec{r}_0$  je nulový bod, a pro kterou platí

$$\int_{-\beta}^{+\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dr = 1, \quad \beta > 0.$$

Diracova delta funkce  $\delta$  představuje tzv. *distribuci*, neboli *zobecněnou funkci* (více o distribucích lze najít například ve zdrojích [15] nebo [14]). Pro samostatný náboj  $Q$  umístěný v bodě  $\vec{r}_0$  dostáváme vyjádření objemové hustoty ve tvaru

$$\rho(\vec{r}) = |Q| \delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Pro naši konfiguraci nábojů na základě principu superpozice platí

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^3 |Q_i| \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}).$$

Pro levou stranu Gaussovy-Ostrogradského věty tak dostáváme

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} dV &= \iiint_V \sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{\varepsilon} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}) dV = \sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{\varepsilon} \iiint_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_{0i}) dV = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Pro určení plošného integrálu na pravé straně Gaussovy-Ostrogradského věty vyjádříme Gaussovu plochu  $\mathcal{G}$  ve sférických souřadnicích jako

$$\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v), \quad u \in [0, 2\pi], v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

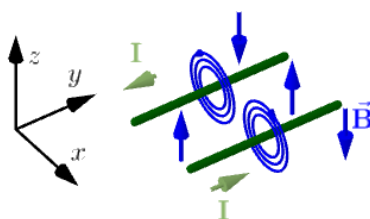
Pro jednotkový normálový vektor platí  $\vec{n} = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ , dále  $dS = R^2 \cos v du dv$  a pro plošný integrál tak dostáváme

$$\oiint_{S^+} \vec{\mathbf{E}} d\vec{S} = \oiint_{S^+} \vec{\mathbf{E}} \vec{n} dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon} (E_x(\vec{\mathbf{r}}(u, v)), E_y(\vec{\mathbf{r}}(u, v)), E_z(\vec{\mathbf{r}}(u, v))) \cdot \vec{n} dS.$$

Pro výpočet integrálu jsme využili příkaz `NIntegrate`, který vrací hodnotu numerické aproximace daného integrálu, čímž jsme získali výsledek 12.5664, což odpovídá hodnotě  $4\pi$ . Pro plošný integrál tedy dostáváme

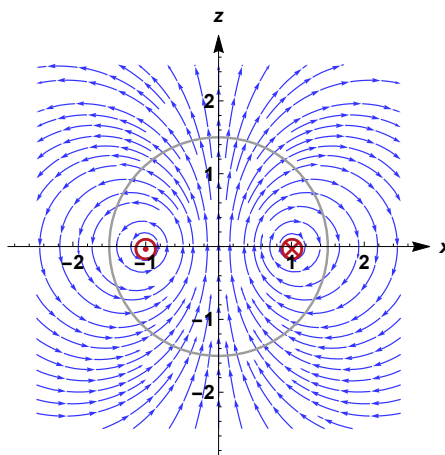
$$\oiint_{S^+} \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon} 4\pi = \frac{1}{\epsilon}. \quad (6.22)$$

Výsledky (6.21) a (6.22) jsou podle očekávání stejné. Z uvedeného postupu však vidíme, že elektrostatické pole bodových nábojů není úplně vhodné k ilustraci platnosti Gaussovy-Ostrogradského věty, na rozdíl od příkladu 3.4, kdy jsme platnost věty demonstrovali v poznámce na str. 43.



Obrázek 6.5: Magnetické pole v okolí přímého vodiče s proudem.

Přesuneme se nyní k ilustraci magnetického pole v okolí vodiče s proudem. Představme si nejprve jen rovnoběžné části vodiče znázorněné na obrázku 6.5. Protože vodičem protéká proud, indukuje se v okolí vodiče magnetické pole, směr tohoto pole je určen pomocí pravidla pravé ruky a v okolí samostatného vodiče má tvar soustředných kružnic.



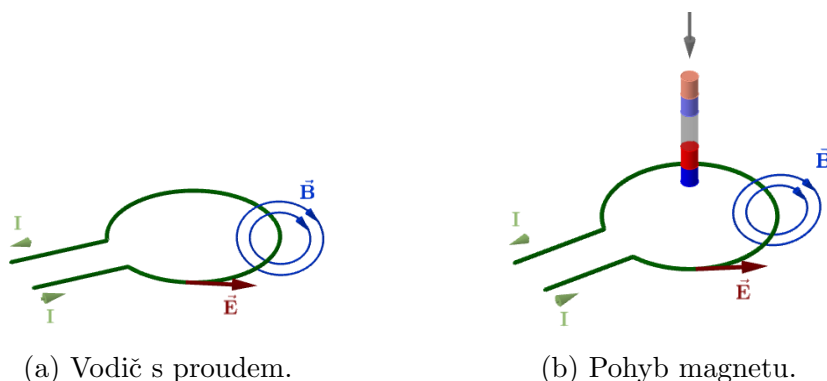
Obrázek 6.6: Magnetické pole rovnoběžných vodičů s proudem v rovině  $xz$ .

Magnetická pole obou vodičů se navzájem ovlivňují a tvar magnetického pole lze dobře ilustrovat v průmětu do roviny  $xz$ , jak je znázorněno na obrázku 6.6. Základem pro parametrizaci pole byl Biotův-Savartův zákon (1.14), podle kterého

pro magnetickou indukci pole tvořeného konstantním proudem  $I$  dostáváme

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\kappa} \frac{d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{r}}}{\|\vec{\mathbf{r}}\|^3}.$$

Pro potřeby vizualizace magnetického pole můžeme znovu zanedbat konstantu a věnovat se pouze výrazu uvnitř integrálu. Vodiče umístíme do bodů  $[-1, 0, 0]$  a  $[1, 0, 0]$  tak, že směřují rovnoběžně se souřadnicovou osou  $y$  a můžeme je tak parametrizovat jako přímky. Pro vodič protékaný proudem proti směru osy  $y$  dostaneme  $\ell_1(t) = (-1, -t, 0)$  a pro vodič protékaný proudem ve směru osy  $y$  máme  $\ell_2(t) = (1, t, 0)$ . Vektor  $\vec{\mathbf{r}}$  vyjadřuje polohu bodu v poli vzhledem k vodiči, parametricky  $\vec{\mathbf{r}} = \frac{(x, y, z) - \ell_1(t)}{\|(x, y, z) - \ell_1(t)\|}$ , resp.  $\vec{\mathbf{r}} = \frac{(x, y, z) - \ell_2(t)}{\|(x, y, z) - \ell_2(t)\|}$ . Protože chceme vyjádřit průmět do roviny  $xz$ , integrujeme pouze první a třetí složku vektoru  $\frac{d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{r}}}{\|\vec{\mathbf{r}}\|^3}$ . Pro vykreslení pole je využita funkce `StreamPlot`. Z obrázku 6.6 vidíme, že žádný bod magnetického pole není zdrojem ani norou, divergence pole je ve všech bodech pole nulová a tedy magnetické pole je nezdřídlové. Dále vidíme, že v prostoru mezi vodiči vzniká téměř homogenní magnetické pole, čehož se využívá například u cívek. Podle Gaussova zákona pro magnetismus (II) je tok magnetické indukce Gaussovou plochou nulový.

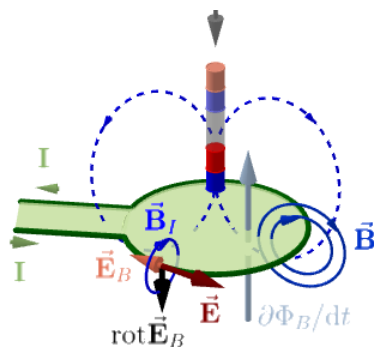


Obrázek 6.7: Indukované magnetické pole v okolí vodiče s proudem.

V tuto chvíli se můžeme přesunout k interakci mezi elektrickým a magnetickým polem, která je vyjádřena rovnicemi (III) a (IV). Posuneme se v našem obrázku dál a znázorníme elektrické pole v okolí nepřímého vodiče, kterým prochází proud  $I$ . Vektor elektrické intenzity má směr proudu a je v každém bodě pole tečným vektorem ke křivce vodiče. V okolí vodiče je rovněž v důsledku procházejícího proudu indukované magnetické pole. Situace je znázorněna na obrázku 6.7a.

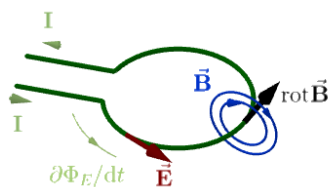
Nyní si představme, že budeme pohybovat jižním pólem magnetu směrem ke smyčce (viz obrázek 6.7b). Tímto pohybem způsobíme změnu indukčního toku uvnitř smyčky.

Magnetické pole v okolí pohybujícího se magnetu indukuje pole elektrické tak, aby jím vytvořené magnetické pole působilo proti změně indukčního toku. Indukované elektrické pole je časově proměnné, tedy nestacionární, s nenulovým vektorem rotace, který působí proti změně magnetického indukčního toku. Tuto interakci znázorňuje obrázek 6.8.



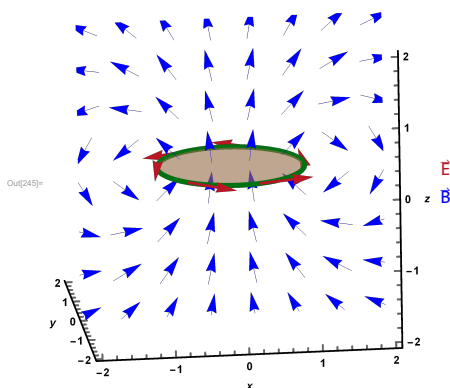
Obrázek 6.8: Změna magnetického pole indukuje pole elektrické.

Význam poslední rovnice je z předchozího zřejmý, jak ukazuje [obrázek 6.9](#). Budeme-li měnit velikost proudu procházející vodičem, bude se měnit i magnetické pole v okolí vodiče. Vektor rotace magnetického pole bude mít směr celkového proudu protékající vodičem.



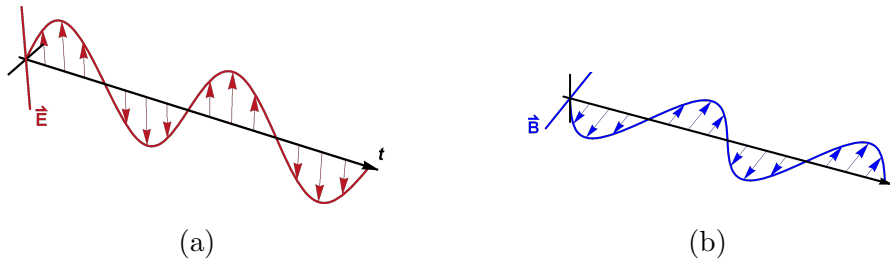
Obrázek 6.9: Změna elektrického pole indukuje pole magnetické.

Z obrázků (6.8) a (6.9) vidíme, že vektory elektrické intenzity  $\vec{E}$  a magnetické indukce  $\vec{B}$  jsou na sebe vždy kolmé. To vysvětluje přítomnost operátoru rotace v Maxwellových rovnicích (III) a (IV), které vyjadřují interakci elektrického a magnetického pole. Zároveň ještě můžeme na tomto vztahu popsat význam Stokesovy věty.

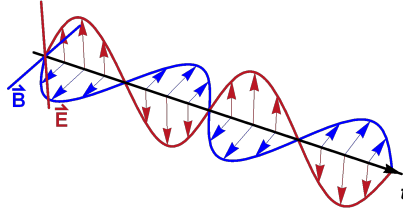


Obrázek 6.10: Tok vektorového pole plochou.

Na [obrázku 6.10](#) je ilustrovaná smyčka, kterou protéká konstantní proud  $I$ . V okolí smyčky se indukuje magnetické pole v důsledku pohybujících se nábojů



Obrázek 6.11: Změny elektrického a magnetického pole v čase.



Obrázek 6.12: Elektromagnetická vlna.

ve smyčce. Pro přehlednost jsme ilustrovali pouze řez magnetického pole v rovině  $(x, 0, z)$ . Ve smyčce je elektrické pole popsáno vektorem intenzity  $\vec{E}$ , který má směr tečny ke smyčce. Podle Stokesovy věty cirkulace vektoru  $\vec{E}$  podél smyčky odpovídá toku vektoru rotace  $\text{rot } \vec{E}$  plochou, jejíž hranicí je smyčka. Vektor rotace elektrického pole  $\text{rot } \vec{E}$  odpovídá vektoru magnetické indukce  $\vec{B}$ . V tomto stacionárním případě bude tok magnetické indukce  $\vec{B}$  plochou uvnitř smyčky nulový, což plyne z (6.10). Už nyní můžeme tušit, že elektrické a magnetické pole spolu velmi úzce souvisí, což potvrdíme v následujícím, posledním, odstavci.

Popíšeme nyní sílu Maxwellových rovnic v dnešním chápání elektromagnetického pole. Zaměříme se na přímý vodič, který leží v rovině  $xz$  a kterým prochází proud ve směru osy  $z$ . V případě, že budeme měnit orientaci proudu, bude se měnit elektrické pole. Časový průběh elektrické intenzity ukazuje obrázek 6.11a. Současně se ale v důsledku změny indukují magnetické pole, které je kolmé na pole  $\vec{E}$  a má vůči němu opačnou orientaci. Tedy v čase, kdy elektrická intenzita roste, magnetická indukce klesá. Časový průběh magnetické indukce popisuje obrázek 6.11b.

Musíme si uvědomit, že obě zmíněné změny probíhají zároveň. Dostáváme tak zcela zásadní pohled na elektromagnetismus v podobě elektromagnetické vlny. Ještě zajímavější je, že od okamžiku  $t_0$  neuvažujeme působení žádného dalšího vnější pole, vlna se šíří jen v důsledku vzájemného působení mezi elektrickým a magnetickým polem. To, co Michael Faraday tušil ze svých pokusů, James Clerk Maxwell popsal pomocí matematiky a ukázal, že elektřina a magnetismus nejsou dvě oddělené veličiny, ale dvě části jednoho celku.



# Závěr

V průběhu celé práce bylo cílem ukázat matematiku jako nástroj sloužící k popisu fyzikálních zákonů. Zaměřili jsme se na křivkové a plošné integrály vystupující v zákonech elektromagnetického pole, které jsou interpretovány Maxwellovými rovnicemi. Na začátku bylo nutné seznámit se s veličinami, které se vyskytují v teorii elektromagnetického pole a uvést základní vztahy, s nimiž jsme mohli dále pracovat. Následovalo vymezení pojmů křivka a plocha. Pro ně existuje z pohledu matematiky více definic, které se liší svou podobou podle oboru, jež je využívá. Pro potřeby naší práce jsme definovali křivku i plochu pomocí vektorové funkce, jejíž obrazem je jednoduchá, spojitě diferencovatelná regulární křivka, resp. plocha. Výčet pojmů základního matematického aparátu jsme zakončili definicemi křivkového a plošného integrálu a formulacemi jejich výpočetních tvarů. Kromě matematického zápisu jsme výše uvedené vysvětlili i s pomocí jednoduchých analogií z reálného světa.

Použití popsaných matematických nástrojů jsme demonstrovali na konkrétních příkladech týkajících se elektřiny a magnetismu. Na začátku práce jsme zmínili, že zjednodušené situace příliš neodpovídají skutečnosti, přesto jsme v zadání příkladů připustili určitou „nereálnost“. V [příkladu 2.3](#) jsme pro představu uvažovali nekonečně dlouhý vodič, abychom mohli zanedbat změny v chování magnetického pole vznikající na koncích vodiče, jímž protéká proud. Obecně jsme při řešení příkladů, stejně jako při formulacích nových pojmů, vždy vycházeli ze znázornění popsané situace. K vytvoření jednoduchých schémat a náčrtů jsme využívali aplikaci *GeoGebra Klasik*, která se ukázala jako schopný nástroj, jež lze pohodlně využít například v pedagogické praxi. Na druhou stranu k ilustraci vektorových polí a pro dílčí výpočty jsme pracovali softwaru *Wolfram Mathematica 11.2*.

Základní matematickou strukturu jsme v dalších kapitolách rozšířili o diferenciální operátory gradient, divergenci a rotaci. Postupným odvozováním jsme nacházeli analogie k Newtonovu-Leibnizovu vzorci pro určitý integrál, abychom mohli formulovat zásadní integrální věty. Jejich použití jsme demonstrovali na již dříve vyřešených příkladech, čímž mohla být ukázána jejich platnost pro tyto případy, přestože exaktními důkazy jsme se nezabývali. Vybaveni matematikou jsme mohli přistoupit k formulaci Maxwellových rovnic v integrálním tvaru a s využitím integrálních vět odvodit tvary diferenciální, abychom se v úplném závěru dostali k vysvětlení vzniku elektromagnetické vlny.

Během studování problematiky elektromagnetického pole jsme zaznamenali, že fyzika je založená na experimentech a pozorování. Fyzika vysvětluje, jak funguje reálný svět. Matematika naopak popisuje pomocí symboliky. Matematický popis vzniká na základě konkrétní představy, proto jsme často uváděli ilustraci

uvažovaného pole nebo náčrt situace. Nicméně dokonalost matematiky spočívá v její flexibilitě, kdy dokážeme vytvořit natolik obecné matematické nástroje, že je lze na základě analogií aplikovat v širokém spektru oborů. Právě z obecnosti plyne také jakási přísnost matematiky na splnění požadavků vyslovených vět, což jsme ukázali v poslední kapitole při pokusu ověřit platnost Gaussovy-Ostrogradského věty na elektrickém poli bodových nábojů. Ke splnění předpokladů integrálních vět bylo potřeba pole matematicky popsat pomocí Diracovy delta funkce, která je součástí teorie distribucí. Postup jsme sice naznačili, ale nevěnovali jsme se zmíněné teorii podrobně. Studium distribucí ve vazbě na elektrostatické pole stejně jako zkoumání elektromagnetismu z pohledu vlnění může být zajímavým rozšířením této práce.

Ukázali jsme sílu matematiky a jejího symbolického popisu na teorii elektromagnetického pole formulovaného Maxwellovými rovnicemi. Naprosto zásadní je znalost výnamu oněch matematických symbolů. Křivkové a plošné integrály totiž můžeme najít i v jiných fyzikálních rovnicích, například v dynamice tekutin nebo při určování statických momentů tuhého tělesa. Kdybychom chtěli naší práci zakončit filosoficky, můžeme definovaný matematický aparát považovat za jednu barvu, kterou lze vybarvit různé kousky obrazu. S pomocí různých barev, různých matematických nástrojů, pak dokážeme vybarvit celou realitu světa, kdy odstíny barev mohou odpovídat oborům, ve kterých se matematika uplatňuje.

# Literatura

- [1] BOUCHALA Jiří, VLACH Oldřich. *Křivkový a plošný integrál* [online]. Bouchala, Vlach, © 2012. Aktualizace 13. 6. 2012. [cit. 2. 10. 2019]. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/krivkovy\\_plosny\\_integral.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/krivkovy_plosny_integral.pdf).
- [2] BUDINSKÝ Bruno, CHARVÁT Jura. *Matematika II*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1990. ISBN 80-03-00219-2.
- [3] DRÁBEK Pavel, MÍKA Stanislav. *Matematická analýza I*. Plzeň: Západočeská univerzita, 1999. ISBN 80-7082-588-8.
- [4] EVANS Martin. *Revision of Electrostatics*. [online]. ©1999. Aktualizace 7. 9. 2013. [cit. 2. 5. 2020]. Dostupné z: <https://www2.ph.ed.ac.uk/~mevans/em/lec2.pdf>.
- [5] HALLIDAY David, RESNICK Robert, WALKER Jearl. *Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Kapitoly 22-33: Elektřina a magnetismus. Brno: VUTUM, 2006. ISBN 80-214-1868-0.
- [6] HAMHALTER Jan, TIŠER Jaroslav. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2005. ISBN 80-01-033357-0.
- [7] KRUMP Lukáš, SOUČEK Vladimír, TĚŠÍNSKÝ Jakub A. *Matematická analýza na varietách*. Praha: MFF UK, 2002.
- [8] MAŠEK Josef. *Řešené úlohy z matematiky*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2001. ISBN 80-7082-836-6.
- [9] MAYER Daniel. *Teorie elektromagnetického pole*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2001. ISBN 80-7082-826-9.
- [10] POLÁK Josef. K 100. výročí úmrtí Jamese Clerka Maxwella. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. [online]. Czech Digital Mathematics Library, 1979, sv.24, č.6, str. 301-312. [cit. 16. 4. 2020]. ISSN 0032-2423. Dostupné z: [https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/138982/PokrokyMFA\\_24-1979-6\\_1.pdf](https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/138982/PokrokyMFA_24-1979-6_1.pdf).
- [11] TOMICZEK Petr. *Matematická analýza 3*. [online]. [cit. 5. 1. 2020] Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~tomiczek/Data/MA3.pdf>.

- [12] TSYMBAL Egeny Y. *Electromagnetic Theory I*. [online]. University of Nebraska-Lincoln. [cit. 2. 5. 2020].  
Dostupné z: <https://unlcms.unl.edu/cas/physics/tsymbal/teaching/EM-913/section1-Electrostatics.pdf>.
- [13] WEINGARTNER Joseph C. *Classical Electrodynamics I*. [online]. 2010. [cit. 2. 5. 2020].  
Dostupné z: <http://physics.gmu.edu/~joe/PHYS685/Topic1.pdf>.
- [14] *Distribuce*. [online] Wikipedie. Aktualizace 1. 7. 2019. [cit. 2. 5. 2020]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Distribuce\\_\(matematika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Distribuce_(matematika)).
- [15] *Charge density*. [online] Wikipedia. Aktualizace 3. 1. 2020. [cit. 2. 5. 2020]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Charge\\_density](https://en.wikipedia.org/wiki/Charge_density).
- [16] *Mathematica Stack Exchange*. [online]. ©2020. [cit. 22. 4. 2020]. Dostupné z: <https://mathematica.stackexchange.com/questions/60254/biot-savart-law-magnetostatics-solution>.