

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra matematiky



# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

## LINEÁRNÍ A NELINEÁRNÍ OSCILÁTORY

Vedoucí práce:

doc. Ing. Gabriela Holubová, Ph.D.

Vypracoval:

Ondřej Sobota

Plzeň, 2021

# ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2020/2021

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Ondřej SOBOTA**  
Osobní číslo: **A18B0053P**  
Studijní program: **B1101 Matematika**  
Studijní obor: **Matematika a její aplikace**  
Téma práce: **Lineární a nelineární oscilátory**  
Zadávající katedra: **Katedra matematiky**

### Zásady pro vypracování

1. Nastudovat standardní lineární modely kmitavých soustav, soustředit se na vlastnosti řešení v závislosti na parametrech modelu, speciální pozornost věnovat úlohám v rezonanci.
2. Uvažovat nelineární kmitavé soustavy s různými typy nelinearit (kubická, skákající apod.) a analyzovat jejich (rezonanční i nerezonanční) chování.
3. Porovnat teoretické výsledky s numerickými experimenty.

Rozsah bakalářské práce: **cca 20 stran**  
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**  
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

- A. Kufner: Obyčejné diferenciální rovnice. Západočeská univerzita, Plzeň 1993.
- R. Brepta, L. Půst, F. Turek: Mechanické kmitání. Sobotáles, Praha 1994.
- J. M. Alonso, R. Ortega: Roots of unity and unbounded motions of an asymmetric oscillator. Journal of differential equations 143, 1998, 201-220.
- I. Kovacic, M. J. Brennan: The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour. John Wiley & Sons, 2011.

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. Ing. Gabriela Holubová, Ph.D.**  
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **1. října 2020**  
Termín odevzdání bakalářské práce: **25. května 2021**



*Radová*

---

**Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová**  
děkanka

*Brandner*

---

**Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.**  
vedoucí katedry

# Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod odborným dohledem vedoucí bakalářské práce a výhradně s použitím uvedených pramenů.

V Plzni dne .....

.....

Ondřej Sobota

# Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Gabriele Holubové, Ph.D. za trpělivost, ochotu, vstřícnost a obrovské množství času, které mi po celou dobu vypracovávání bakalářské práce věnovala.

## **Abstrakt**

Tato bakalářská práce je zaměřena na studium lineárních i nelineárních oscilátorů a zejména na situaci, kdy dochází k tzv. rezonanci. Nejprve detailně rozebereme chování lineárního oscilátoru. Poté se zaměříme na řešení Duffingovy rovnice pomocí metody homotopické analýzy a na závěr provedeme numerické experimenty ve snaze objasnit, co způsobuje nárůst amplitudy řešení úlohy se skákající nelinearitou. Část výsledků je odvozena analyticky a část je založena na numerických experimentech.

## **Klíčová slova**

Lineární oscilátor, nelineární oscilátor, Duffingova rovnice, metoda homotopické analýzy, skákající nelinearita

## **Abstract**

This bachelor thesis is focused on the study of linear and nonlinear oscillators and especially on the situation where the so-called resonance occurs. First, we analyze in detail the behavior of a linear oscillator. Then we focus on the solution of the Duffing equation using the homotopy analysis method and finally we perform numerical experiments in an attempt to clarify what causes the increase in the amplitude of the solution of the problem with jumping nonlinearity. Some of the results are derived analytically and some are based on numerical experiments.

## **Key words**

Linear oscillator, nonlinear oscillator, Duffing equation, Homotopy analysis method, The jumping nonlinearity

# Obsah

Čestné prohlášení	iii
Poděkování	iv
Abstrakt	v
<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Lineární oscilátory</b>	<b>2</b>
2.1 Odvození rovnice matematického kyvadla . . . . .	2
2.2 Volné kmity . . . . .	4
2.2.1 Netlumené kmity . . . . .	4
2.2.2 Tlumené kmity . . . . .	6
2.3 Vázané kmity . . . . .	9
2.3.1 Netlumené kmity . . . . .	9
2.3.2 Tlumené kmity . . . . .	18
<b>3 Přehled základních nelineárních oscilátorů</b>	<b>30</b>
3.1 Matematické kyvadlo . . . . .	30
3.2 Duffingův oscilátor . . . . .	30
3.3 Asymetrický oscilátor . . . . .	30
3.4 Van der Polův oscilátor . . . . .	31
3.5 Pružné (elastické) kyvadlo . . . . .	31
3.6 Spojená kyvadla . . . . .	31
<b>4 Duffingova rovnice</b>	<b>32</b>
4.1 Metoda homotopické analýzy (HAM) . . . . .	32
4.2 Aproximace řešení metodou HAM . . . . .	36
<b>5 Asymetrický oscilátor</b>	<b>44</b>
5.1 Matematické kyvadlo se zarážkami . . . . .	44
5.2 Volné kmity . . . . .	45
5.2.1 Netlumené kmity . . . . .	45
5.2.2 Tlumené kmity . . . . .	47
5.3 Vázané kmity . . . . .	50
5.3.1 Netlumené kmity . . . . .	50
5.3.2 Tlumené kmity . . . . .	59

# Kapitola 1

## Úvod

V této práci se budeme zabývat matematickým popisem lineárních a nelineárních oscilátorů. Soustředíme se na typické chování systémů a zejména na situaci, kdy dochází k tzv. rezonanci. Rezonance je jev, který nastává v případě, že vlastní frekvence systému je rovna budící frekvenci systému. Výsledkem je potom prudký nárůst amplitudy oscilací, tento jev může být žádoucí, ale také velice nebezpečný.

Klasickým příkladem, kde rezonance může mít fatální následky, jsou pády budov, konkrétněji mostů. Mnoho mostů v minulosti spadlo díky účinkům rezonance. Most jako systém přirozeně osciluje s vlastní frekvencí, a pokud některý z vnějších vlivů (skupina osob procházející přes most, vítr, doprava) budí systém s frekvencí stejnou, nebo blízkou, jako je vlastní frekvence systému, amplituda kmitů systému narůstá. Pokud tato hodnota přesáhne únosnost materiálu, přirozeně dochází k mechanickému selhání konstrukce mostu a velice rychle může dojít k jejímu úplnému zničení. V roce 1940 rezonance způsobila pád známého Tacoma Narrows Bridge ve Washingtonu v USA.

V hudebnictví je rezonance naopak žádoucím a stěžejním jevem. Většina hudebních nástrojů využívá rezonance k zesílení zvukových vln, a tím pádem i zesílení zvuků.

Ve druhé kapitole nejprve odvodíme model matematického kyvadla a následně nalezneme tvar řešení tlumeného, resp. netlumeného a buzeného, resp. nebuzeného systému. Detailně popíšeme chování modelu pro jednotlivé situace a pro buzené systémy odvodíme vztah amplitudové charakteristiky.

Třetí kapitola uvádí přehled základních nelineárních oscilátorů a nastiňuje jejich aplikace v praxi. V posledních dvou kapitolách se budeme podrobněji věnovat dvěma z těchto nelineárních systémů. Prvním systémem bude Duffingova rovnice obsahující kubickou nelinearitu. Využitím tzv. metody homotopické analýzy nalezneme přibližné řešení Duffingovy rovnice a popíšeme vztah amplitudy tohoto řešení a frekvence buzeného systému. Získané analytické výsledky porovnáme s numerickými experimenty. Druhým systémem bude asymetrický oscilátor, který je po částech lineární. Řešení tohoto systému nebudeme hledat analyticky, ale pokusíme se experimentálně objasnit, jak se dá zajistit zvětšování jeho amplitudy. Ve snaze zkoumat nárůst amplitudy řešení provedeme dvě volby pravých stran rovnice. Nejprve zvolíme harmonickou pravou stranu rovnice s frekvencí takovou, aby se period kmitání vlastních a buzených kmitů rovnaly. Ve druhém případě zvolíme pravou stranu jako řešení homogenní rovnice. I přesto, že úloha není lineární, pro obě uvedené volby pravé strany dochází k nárůstu amplitudy.



## Kapitola 2

# Lineární oscilátory

Jedním ze základních příkladů využití obyčejných diferenciálních rovnic je problematika matematického kyvadla. V této kapitole si detailně rozebereme všechny situace, které mohou pro tento model nastat a pro buzené systémy odvodíme vztah amplitudové charakteristiky, popisující vazbu mezi amplitudou řešení a volbou vstupních frekvencí.

### 2.1 Odvození rovnice matematického kyvadla

Polohu hmotného bodu popisuje funkce  $y(t)$ , určuje úhel, který svírá nehmotné kyvadlo se svislým směrem. Předpokládáme, že délka závěsu je neměnná a kyvadlo je umístěno do roviny s homogenním gravitačním polem. Odpor vzduchu a tření v závěsu při pohybu kyvadla je zanedbáno.

Na hmotný bod působí tíhová síla, kterou můžeme rozložit do dvou složek. První složka  $F_N$  míří ve směru závěsu a druhá  $F_T$  působí ve směru tečny na dráhu hmotného bodu. Normálová složka síly  $F_N$  působí proti síle závěsu, a proto dále budeme uvažovat pouze tečnou složku síly  $F_T$ .

Podle druhého Newtonova zákona platí

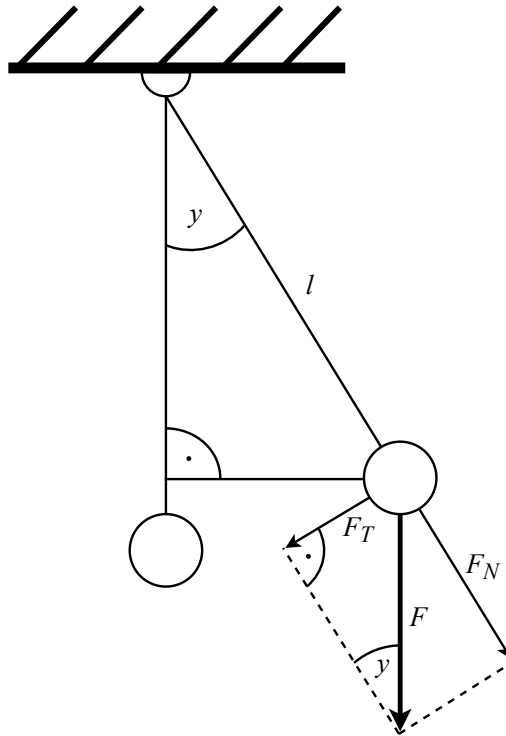
$$F = ma,$$

kde  $F$  je síla působící na hmotný bod,  $m$  je hmotnost a  $a$  je okamžité zrychlení hmotného bodu. Z obrázku 2.1 je patrné, že velikost tečné složky síly lze vyjádřit následovně

$$\begin{aligned} F &= -mg \sin y(t) = ma, \\ a &= -g \sin y(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení. Uvažujeme jedinou budící sílu  $F$  a to gravitační (tíhovou). Na pravé straně rovnice se objevuje záporné znaménko, díky opačné orientaci úhlu  $y$  a tečné složky  $F_T$ . Zrychlení  $a$  souvisí se změnou úhlu  $y$  podle vzorce obloukové délky

$$\begin{aligned} s &= ly, \\ v &= \frac{ds}{dt} = l \frac{dy}{dt}, \\ a &= \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2y}{dt^2}, \end{aligned} \tag{2.2}$$



Obr. 2.1: Model matematického kyvadla.

kde  $s$  je oblouková délka.

Potom

$$l \frac{d^2 y}{dt^2} = -g \sin y(t),$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin y(t) = 0.$$

Označíme-li  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , dostáváme pohybovou rovnici matematického kyvadla

$$y''(t) + \omega^2 \sin y(t) = 0. \quad (2.3)$$

Pro dostatečně malá  $y$  můžeme funkci  $\sin y$  nahradit lineárním členem  $y$  (tj. Taylorovým polynomem 1. stupně) a rovnice (2.3) pak přejde na tvar

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad (2.4)$$

kde  $\omega$  je vlastní frekvence systému.

Volné kmitání s tlumením je popsáno diferenciální rovnicí ve tvaru

$$y''(t) + 2by'(t) + \omega^2 y = 0,$$

kde  $b$  je koeficient tlumení.

Vázané tlumené kmitání s budící silou  $f(t)$  je popsáno diferenciální rovnicí ve tvaru

$$y''(t) + 2by'(t) + \omega^2 y(t) = f(t),$$

nejčastěji budeme uvažovat  $f(t) = D \sin \Omega t$ , nebo  $f(t) = D e^{-bt} \sin \Omega$ , kde  $\Omega$  je budící frekvence systému.

## 2.2 Volné kmity

**Definice 1.1** Reálnou spojitou nezápornou funkci  $E(t)$  nazveme obálkou funkce  $y(t)$  o definičním oboru  $D_y$ , pokud

- a)  $\forall t \in D_y : |y(t)| \leq E(t)$ ,
- b)  $\exists t_0 \in D_y : y(t_0) = E(t_0)$ .

**Poznámka 1.2** Obálka  $E(t)$  konkrétní funkce  $y(t)$  není dána jednoznačně.

### 2.2.1 Netlumené kmity

Uvažujme počáteční úlohu pro homogenní diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru:

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Obecné řešení rovnice (2.5) má tvar:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

po aplikování počátečních podmínek (2.6) dostáváme hodnoty koeficientů  $A = y_0$ ,  $B = \frac{y_1}{\omega}$ , tedy

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{y_1}{\omega} \sin \omega t.$$

Použitím vztahu

$$\begin{aligned} A \cos \omega t + B \sin \omega t &= C \sin(\omega t + \psi), \\ C &= \sqrt{A^2 + B^2}, \quad B \sin \psi = A \cos \psi, \end{aligned}$$

získáváme výsledné řešení počáteční úlohy (2.5), (2.6) ve tvaru:

$$\begin{aligned} y(t) &= X \sin(\omega t + \varphi), \\ X &= \sqrt{y_0^2 + \frac{y_1^2}{\omega^2}} \end{aligned}$$

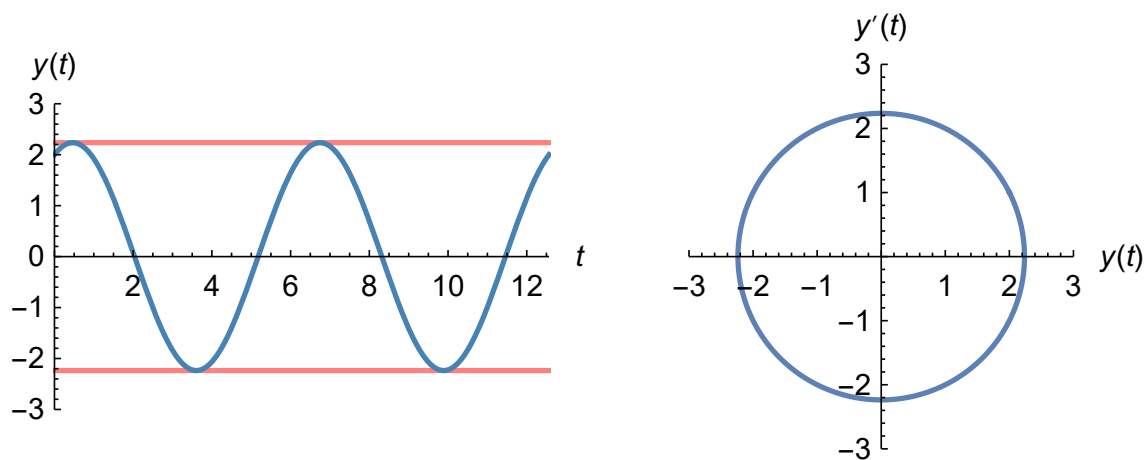
a pro  $\varphi$  platí:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y_0 \omega}{y_1} && \text{pro } y_1 \neq 0, \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} && \text{pro } y_1 = 0 \quad \wedge \quad y_0 > 0, \\ \varphi &= -\frac{\pi}{2} && \text{pro } y_1 = 0 \quad \wedge \quad y_0 < 0. \end{aligned}$$

V následujícím textu budeme zápis  $\operatorname{tg} \varphi = k$  chápat v rozšířeném limitním smyslu, tj. pro  $k = \pm\infty$  je  $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ .

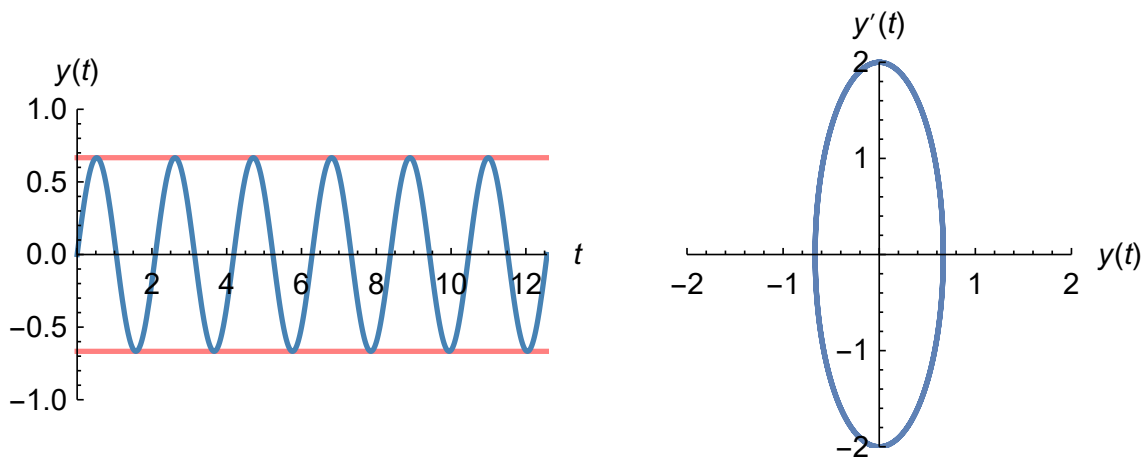
V tomto případě uvažujeme obálku  $E(t) = X$ , tj. jako konstantní funkci.

Na obr. 2.2 je znázorněno řešení počáteční úlohy (2.5), (2.6) společně se svým fázovým portrétem pro volbu parametrů  $y_0 = 2$ ,  $y_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ . Funkce  $y(t)$  popisuje harmonický kmitavý pohyb s amplitudou výchylky  $y = \sqrt{5}$ , frekvencí  $\omega = 1$  a fázovým posuvem  $\varphi = \arctg 2$ .



Obr. 2.2: Řešení počáteční úlohy (2.5), (2.6) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 2$ ,  $y_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ .

Na obr. 2.3 je znázorněno řešení počáteční úlohy (2.5), (2.6) společně se svým fázovým portrétem pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 2$ ,  $\omega = 3$ . Funkce  $y(t)$  popisuje harmonický kmitavý pohyb s amplitudou výchylky  $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , frekvencí  $\omega = 3$  a fázovým posuvem  $\varphi = 0$ .



Obr. 2.3: Řešení počáteční úlohy (2.5), (2.6) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 2$ ,  $\omega = 3$ .

### 2.2.2 Tlumené kmity

Uvažujme počáteční úlohu pro homogenní diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru:

$$y''(t) + 2by'(t) + \omega^2 y = 0, \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1. \end{cases} \quad (2.8)$$

#### Podkritické tlumení

Obecné řešení rovnice (2.7) pro  $\omega^2 > b^2$  má tvar:

$$y(t) = Ae^{-bt} \cos \sqrt{\omega^2 - b^2} t + Be^{-bt} \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

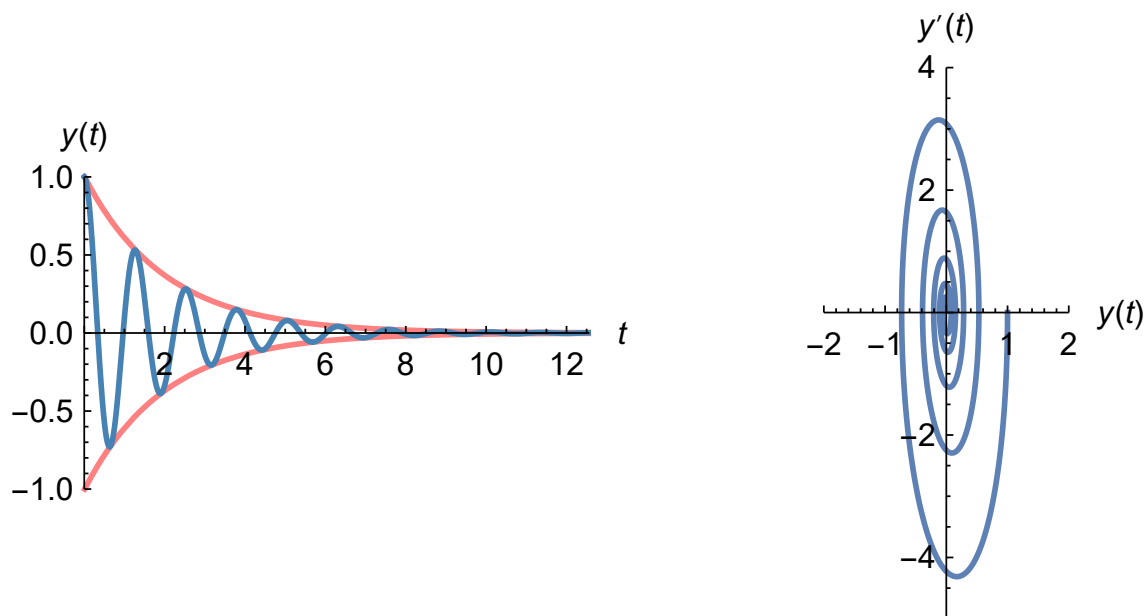
použitím počátečních podmínek (2.8) dostáváme výsledné řešení příslušné počáteční úlohy pro rovnici (2.7) ve tvaru:

$$y(t) = X e^{-bt} \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} t + \varphi),$$

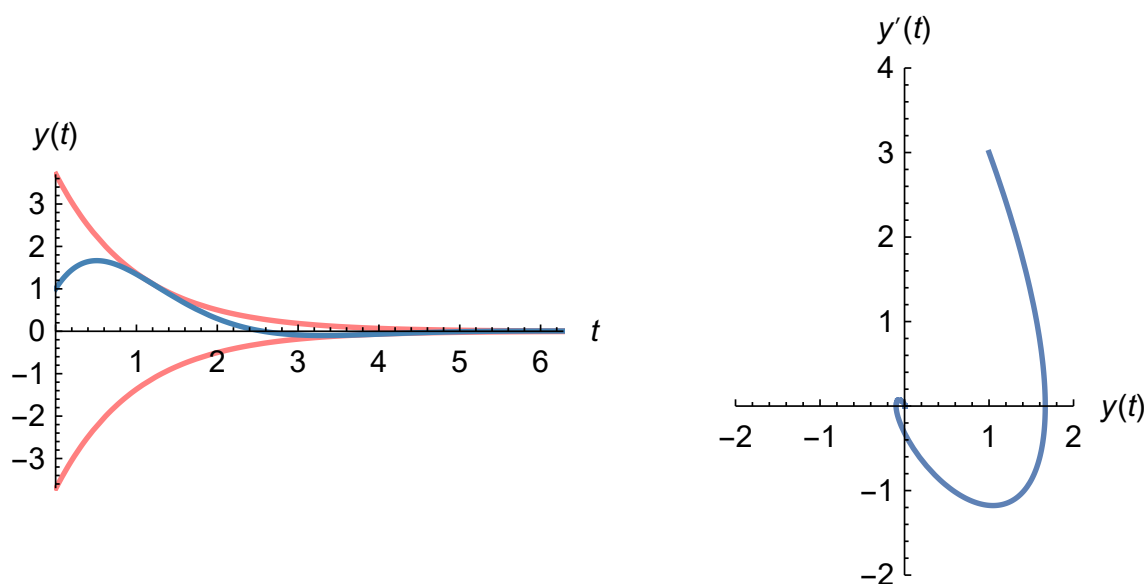
kde

$$X = \sqrt{y_0^2 + \frac{(y_1 + by_0)^2}{\omega^2 - b^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0 \sqrt{\omega^2 - b^2}}{y_1 + by_0}.$$

Na obr. 2.4 - 2.5 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (2.7), (2.8) společně se svými obálkami a fázovými portréty pro dané volby parametrů. Systém koná oscilatorický pohyb, amplituda výchylky funkce  $y(t)$  s rostoucím časem klesá. Obálku lze volit jako  $E(t) = X e^{-bt}$ .



Obr. 2.4: Řešení počáteční úlohy (2.7), (2.8) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 5$ ,  $b = 0.5$ .



Obr. 2.5: Řešení počáteční úlohy (2.7), (2.8) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 3$ ,  $\omega = 1.5$ ,  $b = 1$ .

### Kritické tlumení

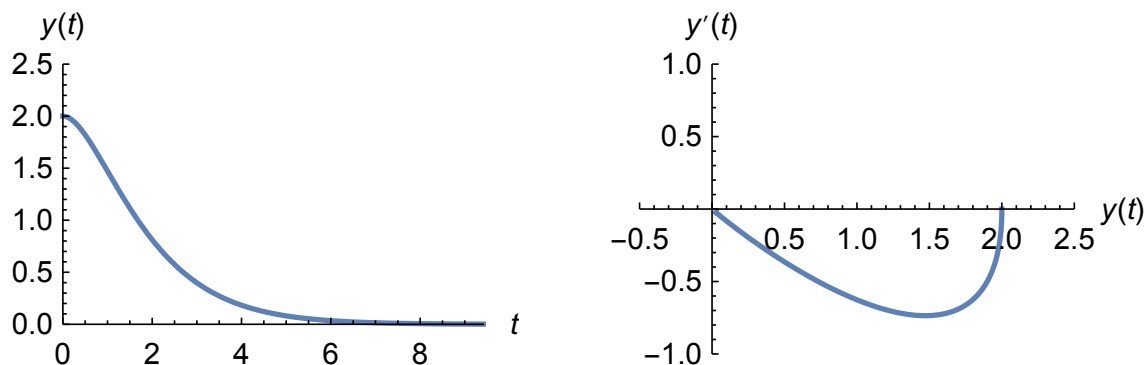
Obecné řešení rovnice (2.7) pro  $\omega = b$  má tvar:

$$y(t) = Ae^{-bt} + Bte^{-bt}, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

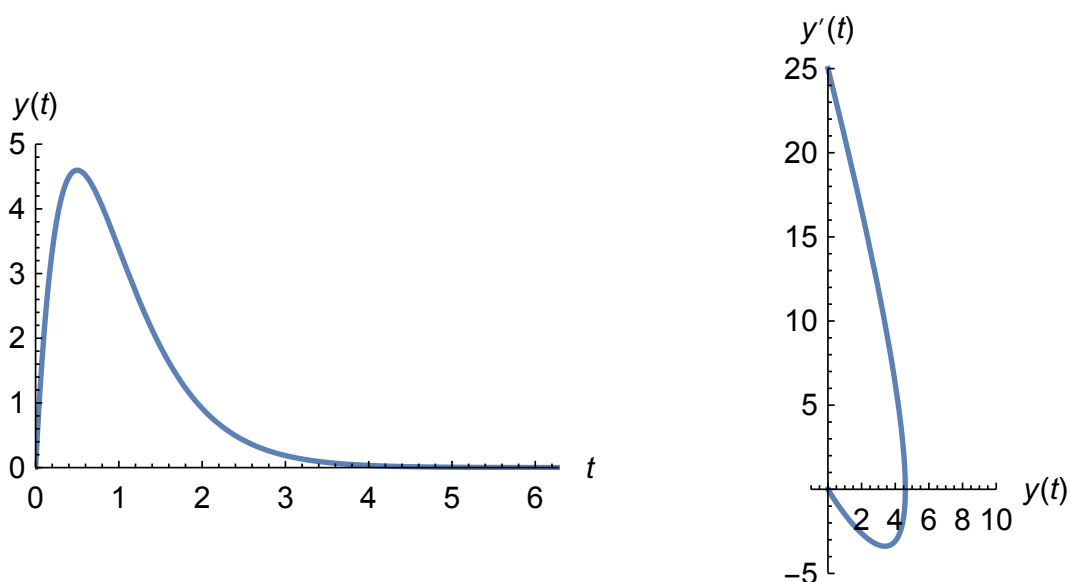
použitím počátečních podmínek (2.8) dostáváme výsledné řešení příslušné počáteční úlohy pro rovnici (2.7) ve tvaru:

$$y(t) = y_0e^{-bt} + (y_1 + y_0b)te^{-bt}.$$

Na obr. 2.6 - 2.7 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (2.7), (2.8) společně se svými fázovými portréty pro danou volbu parametrů. Systém koná mezní aperiodický pohyb, tj. systém neosciluje a rovnovážné poloze se dostatečně přiblíží již ve velmi krátkém čase. Obálku v tomto případě určovat nebudeme.



Obr. 2.6: Řešení počáteční úlohy (2.7), (2.8) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $y_0 = 2$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $b = 1$ .



Obr. 2.7: Řešení počáteční úlohy (2.7), (2.8) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 25$ ,  $\omega = 2$ ,  $b = 2$ .

### Nadkritické tlumení

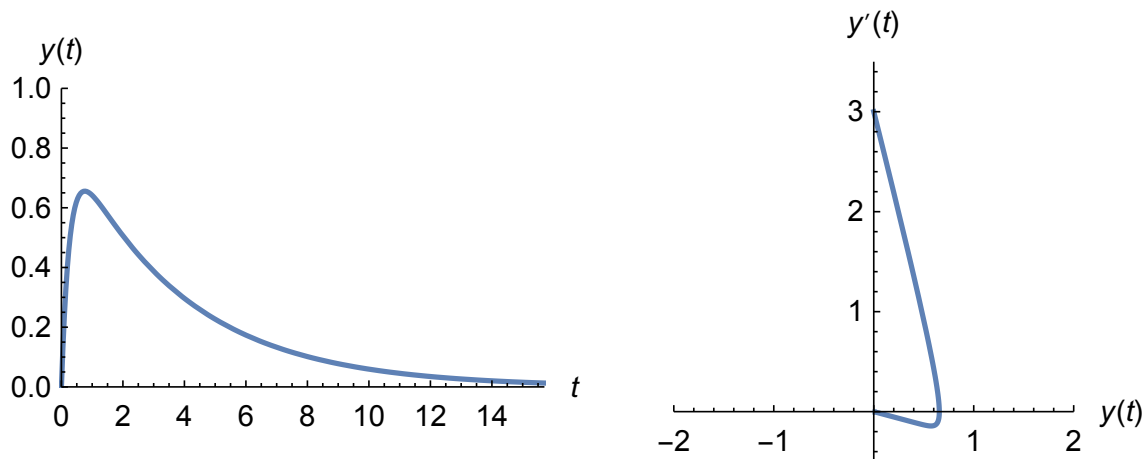
Obecné řešení rovnice (2.7) pro  $\omega^2 < b^2$  má tvar:

$$y(t) = Ae^{-bt} \cosh \sqrt{b^2 - \omega^2} t + Be^{-bt} \sinh \sqrt{b^2 - \omega^2} t, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

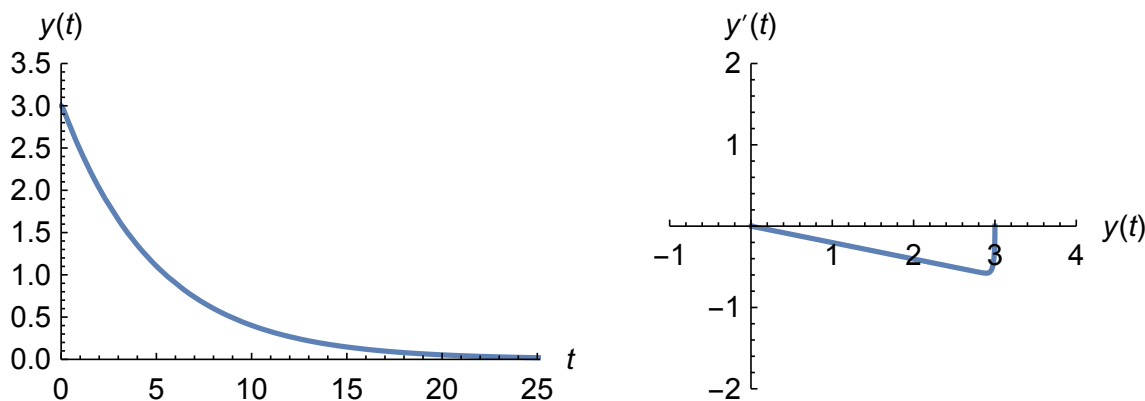
použitím počátečních podmínek (2.8) dostáváme výsledné řešení příslušné počáteční úlohy pro rovnici (2.7) ve tvaru:

$$y(t) = y_0 e^{-bt} \cosh \sqrt{b^2 - \omega^2} t + \frac{y_1 + y_0 b}{\sqrt{b^2 - \omega^2}} e^{-bt} \sinh \sqrt{b^2 - \omega^2} t.$$

Na obr. 2.8 - 2.9 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (2.7), (2.8) společně se svými fázovými portréty pro dané volby parametrů. Systém koná aperiodický pohyb, opět se rychle blíží své rovnovážné poloze. Ani v tomto případě obálku určovat nebudeme.



Obr. 2.8: Řešení počáteční úlohy (2.7), (2.8) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 3$ ,  $\omega = 1$ ,  $b = 2$ .



Obr. 2.9: Řešení počáteční úlohy (2.7), (2.8) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $y_0 = 3$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 2$ ,  $b = 10$ .

## 2.3 Vázané kmity

### 2.3.1 Netlumené kmity

Uvažujme počáteční úlohu pro nehomogenní diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru:

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = D \sin \Omega t, \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1. \end{cases} \quad (2.10)$$



Obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice můžeme vyjádřit jako součet libovolného partikulárního řešení dané nehomogenní diferenciální rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice (rovnice bez pravé strany).

Rezonancí rozumíme rovnost vlastní a budící frekvence, tj.  $\Omega = \omega$ , pravá strana rovnice je tedy součástí fundamentálního systému.

### Bez rezonance

Řešení homogenní rovnice (2.9) má tvar:

$$y_h(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Nyní využijeme metodu odhadu a získáváme partikulární řešení rovnice (2.9) pro  $\Omega \neq \omega$  ve tvaru:

$$y_p(t) = \frac{D}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t.$$

Použitím počátečních podmínek (2.10) a prostým sečtením homogenního a partikulárního řešení dostáváme řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) ve tvaru:

$$y(t) = X \sin(\omega t + \varphi) + Y \sin \Omega t,$$

kde

$$X = \sqrt{y_0^2 + \frac{(y_1(\omega^2 - \Omega^2) - D\Omega)^2}{\omega^2(\omega^2 - \Omega^2)^2}}, \quad Y = \frac{D}{\omega^2 - \Omega^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0\omega(\omega^2 - \Omega^2)}{y_1(\omega^2 - \Omega^2) - D\Omega}.$$

Pro další úpravy použijeme následující odvození:

Nechť  $a, b \in \mathbb{C}$ :

$$a = A(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad b = B(\cos \beta + i \sin \beta).$$

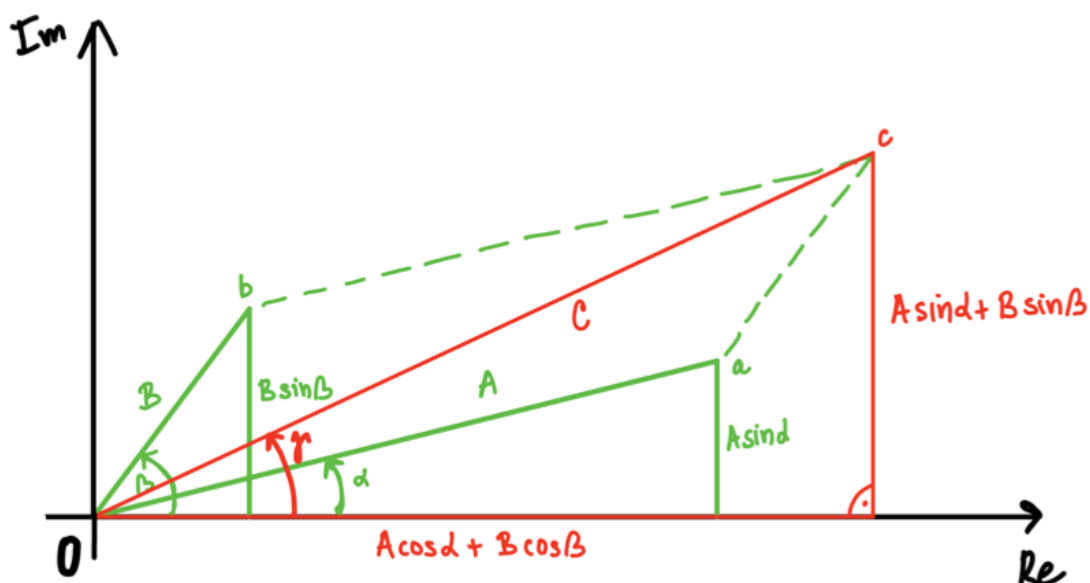
Označme  $c = C(\cos \gamma + i \sin \gamma)$  součet komplexních čísel  $a, b$ .

$$c = A \cos \alpha + B \cos \beta + i(A \sin \alpha + B \sin \beta),$$

Pro reálnou, resp imaginární, část komplexního čísla  $c$  platí:

$$\operatorname{Re}(c) = C \cos \gamma = A \cos \alpha + B \cos \beta,$$

$$\operatorname{Im}(c) = C \sin \gamma = A \sin \alpha + B \sin \beta.$$



Obr. 2.10: Komplexní čísla  $a$ ,  $b$ ,  $c$  znázorněna v Gaussově rovině.

Z obr. 2.10 je pak patrné, že platí:

$$C \sin \gamma = A \sin \alpha + B \sin \beta, \quad (2.11)$$

$$C = \sqrt{(A \cos \alpha + B \cos \beta)^2 + (A \sin \alpha + B \sin \beta)^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB (\cos(\alpha - \beta))}, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A \sin \alpha + B \sin \beta}{A \cos \alpha + B \cos \beta}. \quad (2.13)$$

Použitím vztahů (2.11) - (2.13) dostáváme výsledné řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) ve tvaru:

$$y(t) = E(t) \sin \gamma(t),$$

$$E(t) = \sqrt{X^2 + \frac{D^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} + \frac{2XD}{\omega^2 - \Omega^2} \cos((\omega - \Omega)t + \varphi)}, \quad (2.14)$$

kde funkce  $E(t)$  je obálkou řešení  $y(t)$ .

Speciálně pro  $X = \frac{D}{\omega^2 - \Omega^2}$  má řešení tvar:

$$y(t) = \frac{D}{\omega^2 - \Omega^2} (\sin(\omega t + \varphi) + \sin \Omega t).$$

Po úpravě získáváme výsledný tvar řešení pro  $X = \frac{D}{\omega^2 - \Omega^2}$ :

$$y(t) = \frac{2D}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \frac{(\omega - \Omega)t + \varphi}{2} \sin \frac{(\omega + \Omega)t + \varphi}{2},$$

obálku řešení  $y(t)$  lze volit jako

$$E(t) = \frac{2D}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \frac{(\omega - \Omega)t + \varphi}{2}. \quad (2.15)$$

Dosazením  $X = \frac{D}{\omega^2 - \Omega^2}$  do vztahu (2.14) a použitím známého goniometrického vztahu

$$\cos^2 z = \frac{1 + \cos 2z}{2}$$

ukážeme, že v tomto případě jsou vztahy (2.14) a (2.15) identické:

$$E(t) = \sqrt{\frac{2D^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} (1 + \cos((\omega - \Omega)t + \varphi))},$$

$$E(t) = \frac{D\sqrt{2}}{\omega^2 - \Omega^2} \sqrt{2 \cos^2 \frac{(\omega - \Omega)t + \varphi}{2}},$$

$$E(t) = \frac{2D}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \frac{(\omega - \Omega)t + \varphi}{2}.$$

V tomto případě mohou vznikat tzv. zázněje (rázy). Jedná se o zvláštní případ složeného kmitání, které vzniká při skládání dvou kmitání o velmi blízkých frekvencích. Malá odlišnost ve vstupních frekvencích způsobí, že se v daném, pravidelně se opakujícím, okamžiku potkají maxima obou sinusových průběhů (dojde k zesílení výsledného signálu), nebo se naopak maximum jednoho průběhu potká s minimem toho druhého (dojde k úplnému vypnutí výsledného signálu). Tohoto jevu se využívá například při ladění hudebních nástrojů.

Symbolem  $Y_{st}$  označme partikulární řešení rovnice (2.9) s konstantní pravou stranou a platí

$$Y_{st} = \frac{D}{\omega^2}.$$

Pro další úpravy zavádíme novou proměnnou

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega}$$

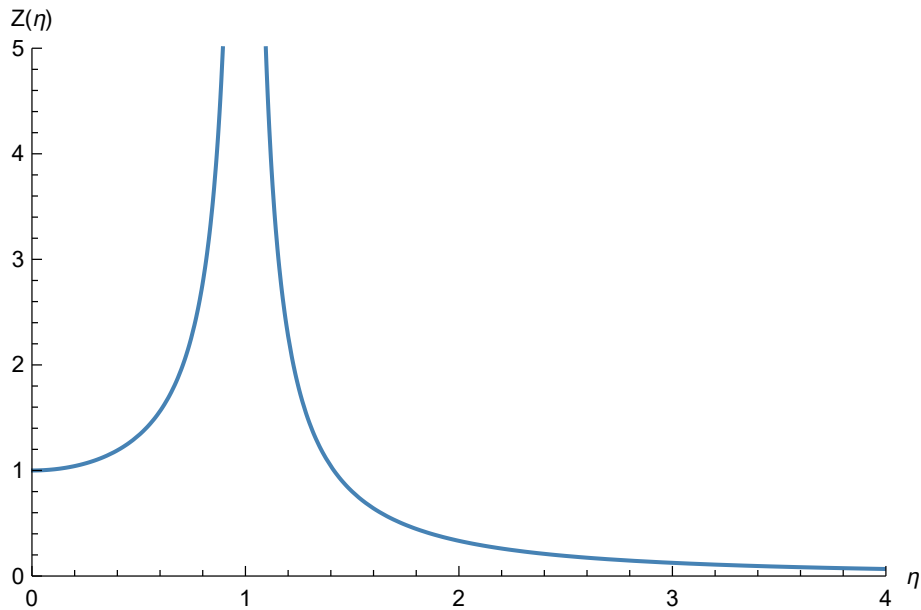
a veličinu danou vztahem

$$Z(\eta) = \frac{Y}{Y_{st}}, \quad (2.16)$$

nazveme amplitudovou charakteristikou.

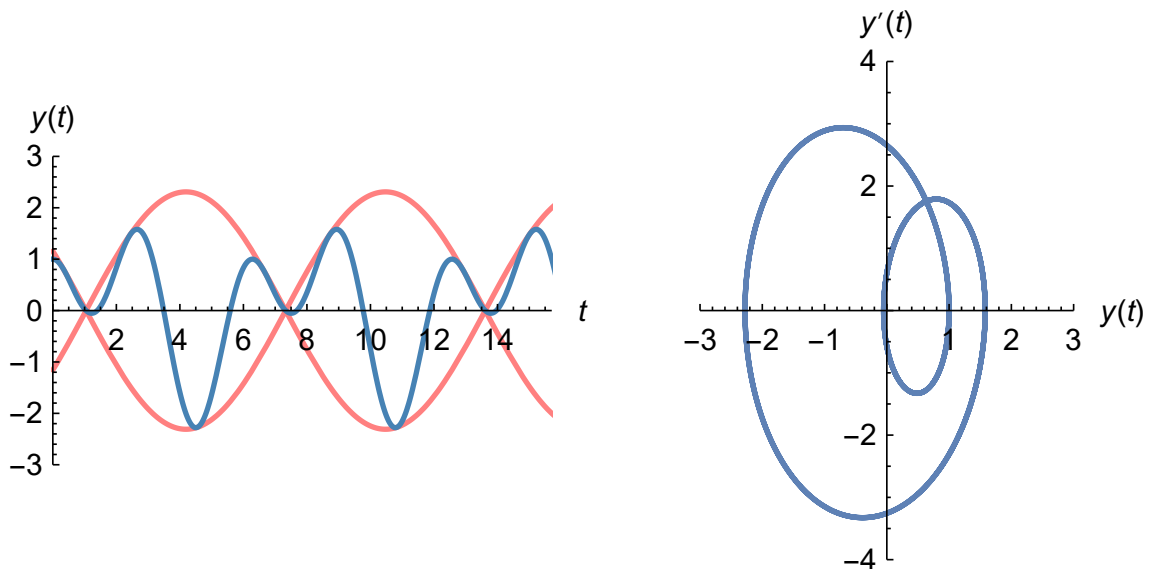
Konkrétně tedy

$$Z(\eta) = \frac{\frac{D}{\omega^2 - \Omega^2}}{\frac{D}{\omega^2}} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \eta^2}.$$

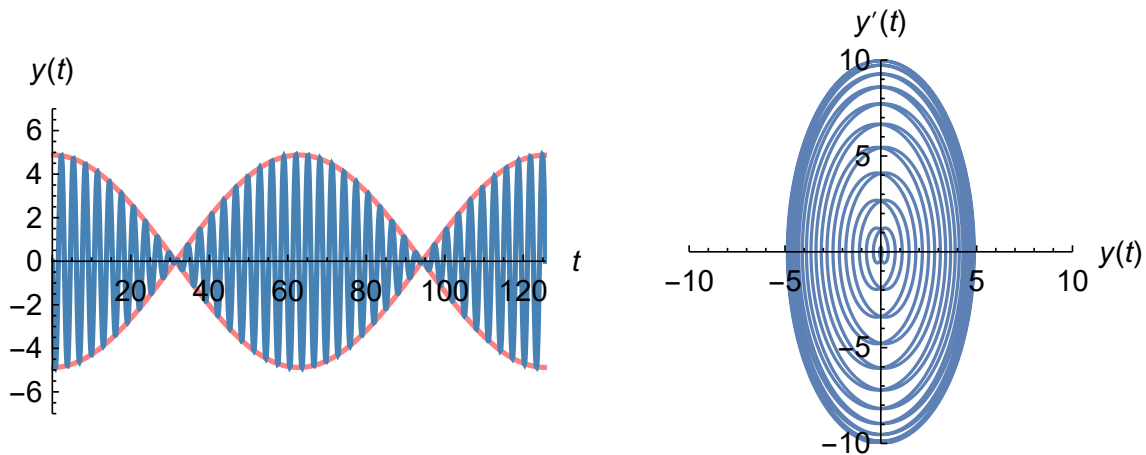


Obr. 2.11: Amplitudová charakteristika počáteční úlohy (2.9), (2.10). Pro  $\eta = 1$ , tj. rezonanci, roste amplitudová charakteristika  $Z(\eta)$  nade všechny meze.

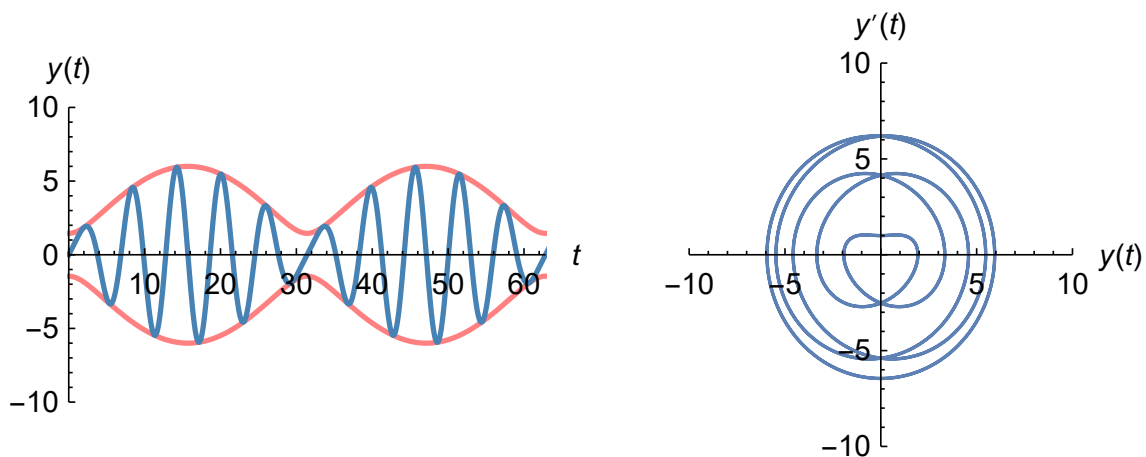
Na obr. 2.12 - 2.18 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) společně se svými obálkami a fázovými portréty pro dané volby parametrů. K zánějším dochází na obr. 2.12 - 2.13.



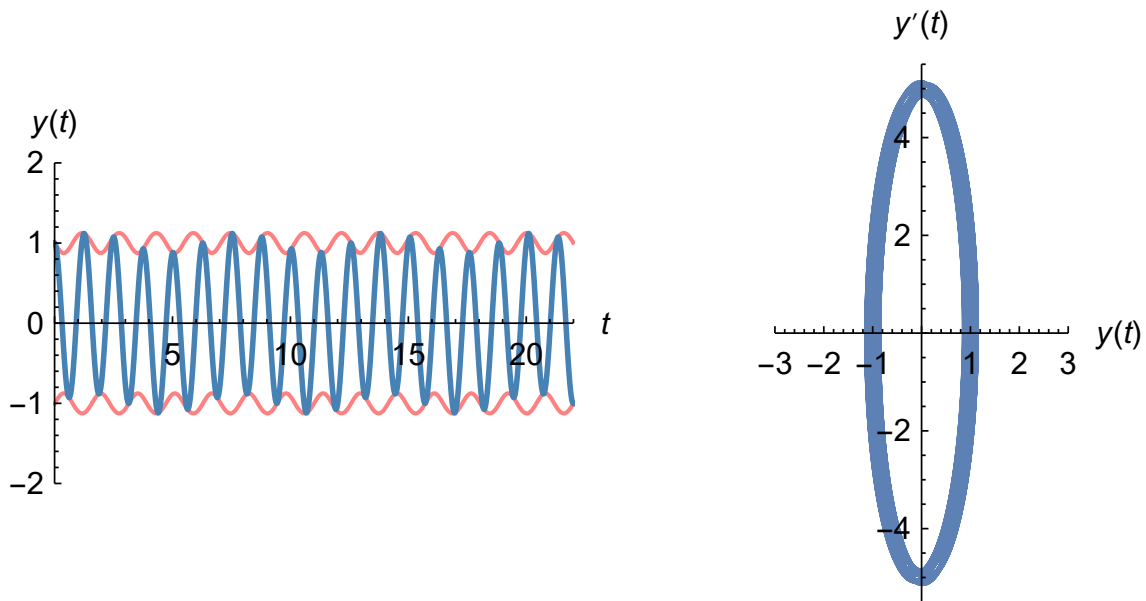
Obr. 2.12: Řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 2$ ,  $\Omega = 1$ ,  $D = 2\sqrt{3}$ . Pro tuto volbu parametrů jsou si amplitudy obou kmitů rovny, ale frekvence  $\omega$ ,  $\Omega$  jsou relativně odlišné, záněje proto nejsou moc patrné.



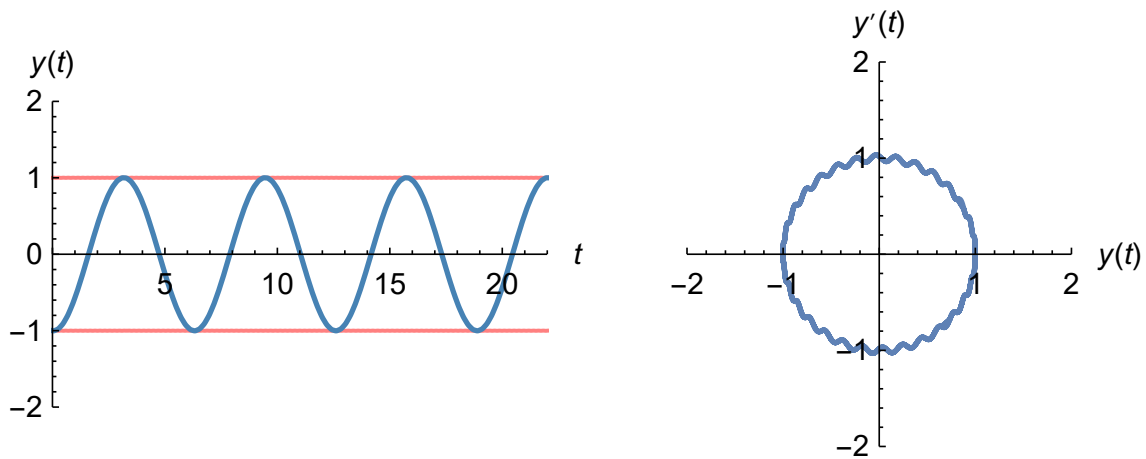
Obr. 2.13: Řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = -10$ ,  $\omega = 2$ ,  $\Omega = 2.1$ ,  $D = 1$ . Stejně jako na obr. 2.12 i v tomto případě dochází k záznejím, navíc jsou si ale frekvence  $\omega$ ,  $\Omega$  velmi blízké, a proto je frekvence řešení  $y(t)$  větší.



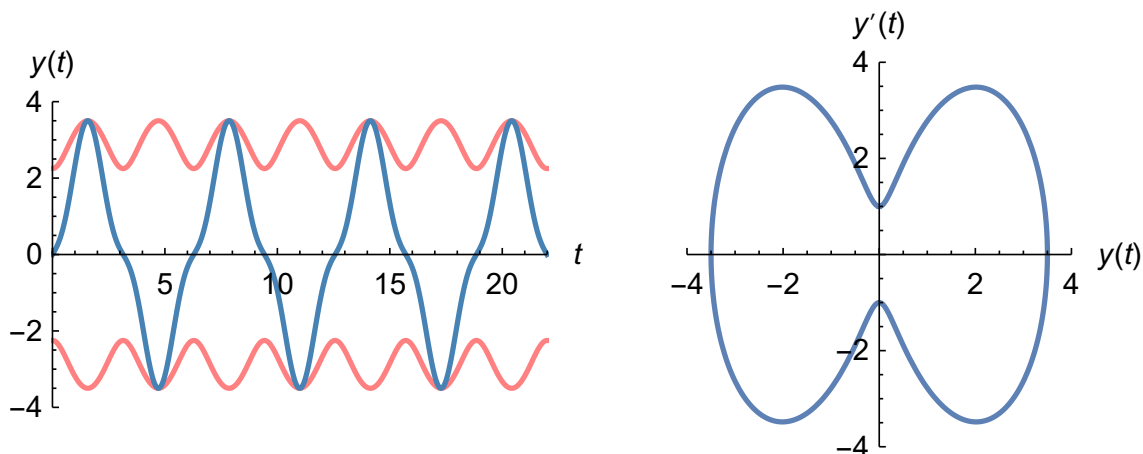
Obr. 2.14: Řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\Omega = \frac{6}{5}$ ,  $D = 1$ . V tomto případě se amplitudy obou kmitání nerovnaj, ale frekvence  $\omega$ ,  $\Omega$  jsou si stále blízké.



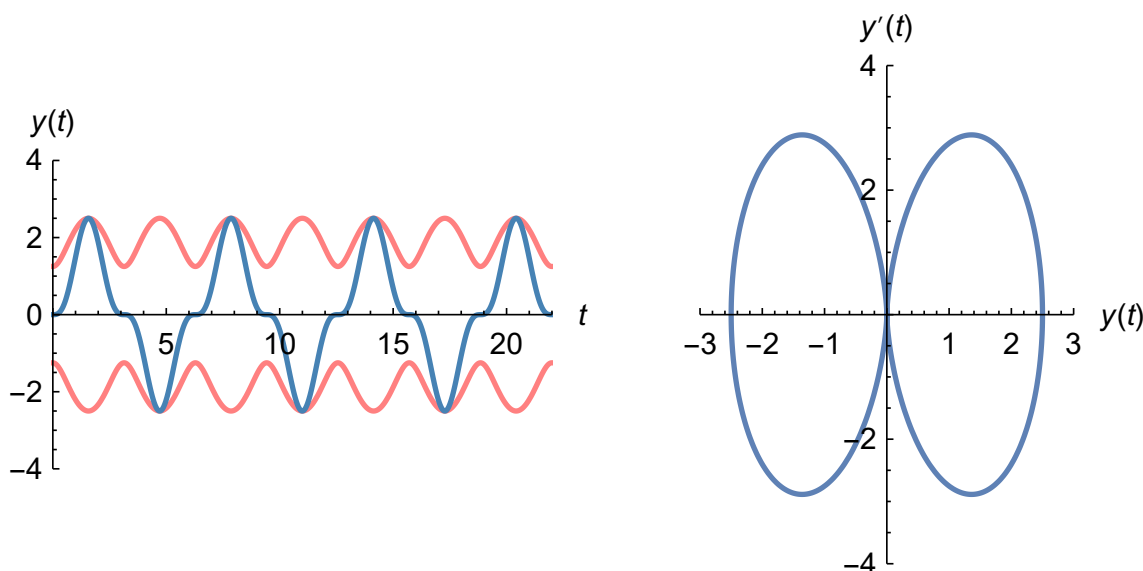
Obr. 2.15: Řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 5$ ,  $\Omega = 1$ ,  $D = 3$ .



Obr. 2.16: Řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\Omega = 30$ ,  $D = 1$ .



Obr. 2.17: Řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\Omega = 3$ ,  $D = 5$ .



Obr. 2.18: Řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\Omega = 3$ ,  $D = 5$ .

## S rezonancí

Řešení homogenní rovnice (2.9) má tvar:

$$y_h(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

V případě rezonance, tj. pro  $\Omega = \omega$ , využijeme metody odhadu a dostáváme partikulární řešení rovnice (2.9) ve tvaru:

$$y_p(t) = \frac{-Dt}{2\omega} \cos \omega t.$$

Použitím počátečních podmínek (2.10) a prostým sečtením homogenního a partikulárního řešení dostáváme řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) ve tvaru:

$$y(t) = X \sin(\omega t + \varphi) - \frac{Dt}{2\omega} \cos \omega t,$$

$$X = \sqrt{y_0^2 + \frac{(D + 2\omega y_1)^2}{4\omega^4}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2y_0\omega^2}{2\omega y_1 + D}.$$

Nyní upravíme řešení do výhodnějšího tvaru

$$y(t) = X \sin(\omega t + \varphi) - \frac{Dt}{2\omega} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

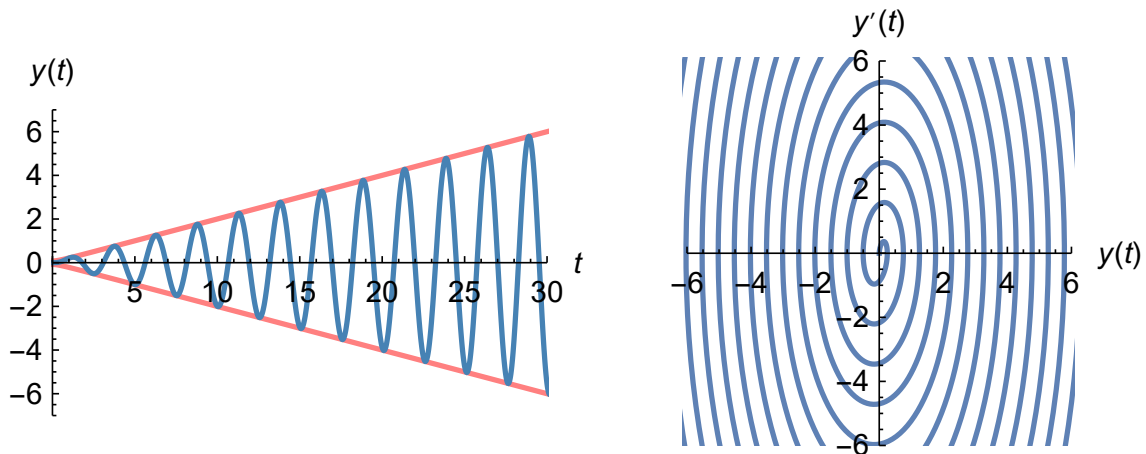
a následným použitím vztahů (2.11) - (2.13) dostáváme výsledné řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) ve tvaru:

$$y(t) = E(t) \sin \gamma(t),$$

$$E(t) = \sqrt{X^2 + \frac{D^2 t^2}{4\omega^2} - \frac{XDt}{\omega} \sin \varphi},$$

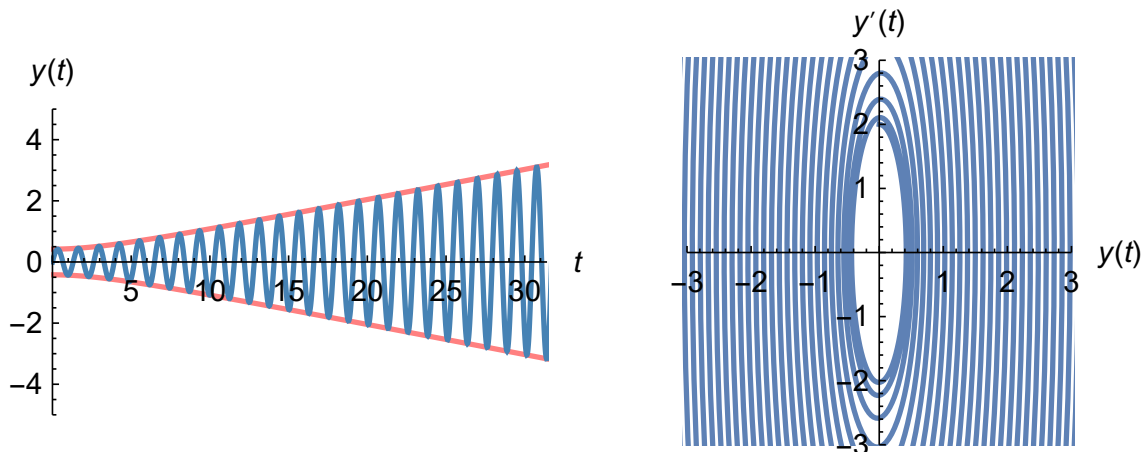
kde funkce  $E(t)$  je obálkou řešení  $y(t)$ .

Na obr. 2.19 - 2.21 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) společně se svými obálkami a fázovými portréty pro dané volby parametrů. Jelikož dochází k rezonanci, s rostoucím časem amplituda řešení roste nade všechny meze a řešení je neomezené.

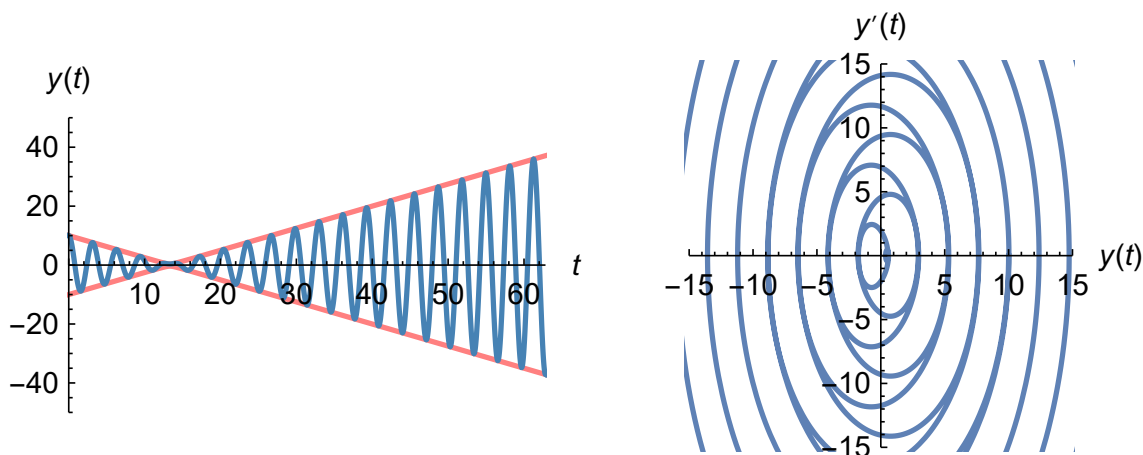


Obr. 2.19: Řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 2.5$ ,  $\Omega = 2.5$ ,  $D = 1$ .





Obr. 2.20: Řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 2$ ,  $\omega = 5$ ,  $\Omega = 5$ ,  $D = 1$ .



Obr. 2.21: Řešení počáteční úlohy (2.9), (2.10) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 5$ ,  $\Omega = 5$ ,  $D = 1$ .

### 2.3.2 Tlumené kmity

#### Netlumená budící síla

Uvažujme počáteční úlohu pro nehomogenní diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru:

$$y''(t) + 2by'(t) + \omega^2 y(t) = D \sin \Omega t, \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1. \end{cases} \quad (2.18)$$

V této sekci budeme uvažovat pouze podkritické tlumení.

Obecné řešení rovnice (2.17) pro  $\omega^2 > b^2$  má tvar:

$$y(t) = Ae^{-bt} \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t + Be^{-bt} \cos \sqrt{\omega^2 - b^2} t + Y \sin(\Omega t + \psi), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

$$Y = \frac{D}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{-2b\Omega}{\omega^2 - \Omega^2},$$

použitím počátečních podmínek (2.18) dostáváme výsledné řešení příslušné počáteční úlohy pro rovnici (2.17) ve tvaru:

$$y(t) = X e^{-bt} \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} t + \varphi) + Y \sin(\Omega t + \psi),$$

kde

$$X = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A},$$

$$A = y_1 + b y_0 + \frac{D\Omega(\Omega^2 - \omega^2 + 2b^2)}{(\omega^2 - b^2) + 4b^2\Omega^2}, \quad B = y_0 + \frac{2D\Omega}{(\omega^2 - b^2) + 4b^2\Omega^2}.$$

Použitím vztahů (2.11) - (2.13) dostáváme výsledné řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) ve tvaru:

$$y(t) = E(t) \sin \gamma(t),$$

$$E(t) = \sqrt{X^2 e^{-2bt} + Y^2 + 2XY e^{-bt} \cos\left((\sqrt{\omega^2 - b^2} - \Omega)t + (\varphi - \psi)\right)},$$

kde funkce  $E(t)$  je obálkou řešení  $y(t)$ .

Symbolem  $Y_{st}$  označme partikulární řešení rovnice (2.17) s konstantní pravou stranou a platí

$$Y_{st} = \frac{D}{\omega^2}.$$

Pro další úpravy zavádíme novou proměnnou

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega}$$

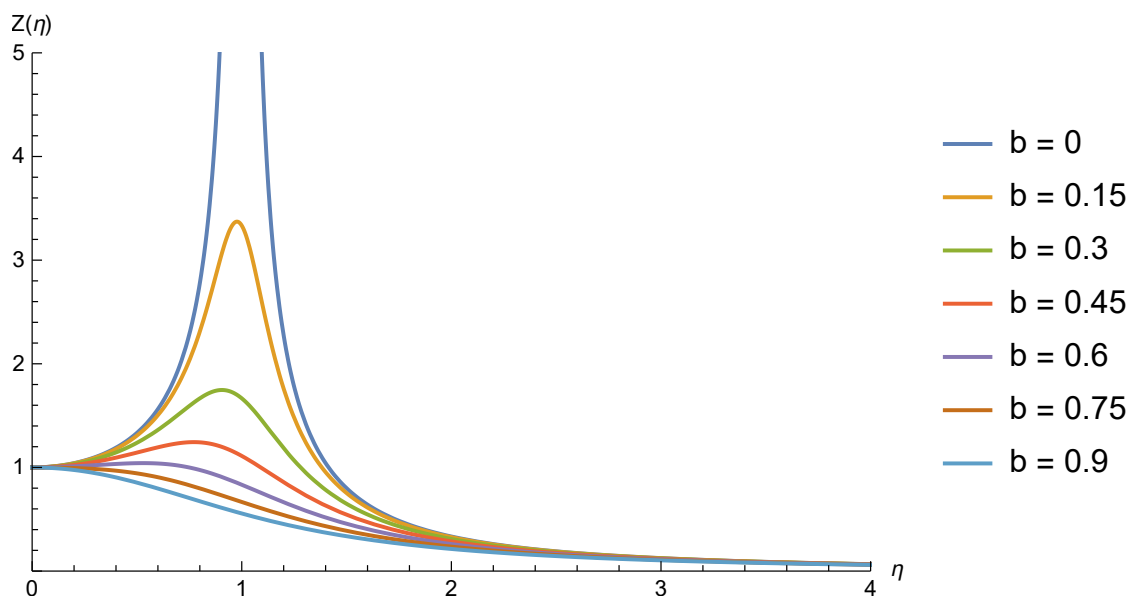
a veličinu danou vztahem

$$Z(\eta) = \frac{Y}{Y_{st}}, \tag{2.19}$$

nazveme amplitudovou charakteristikou.

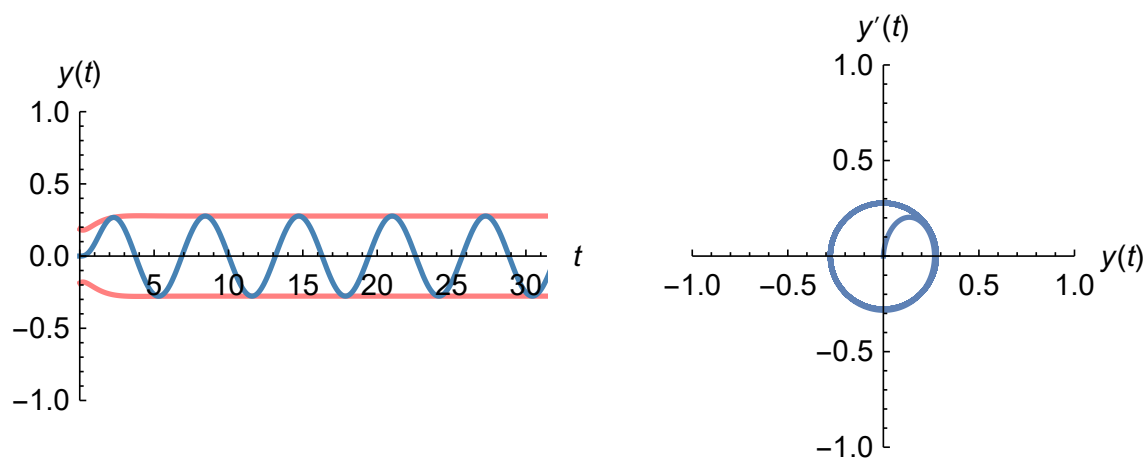
Konkrétně tedy

$$Z(\eta) = \frac{\frac{D}{\omega^2}}{\frac{D}{\omega^2}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\frac{b^2}{\omega^2}\eta^2}}.$$

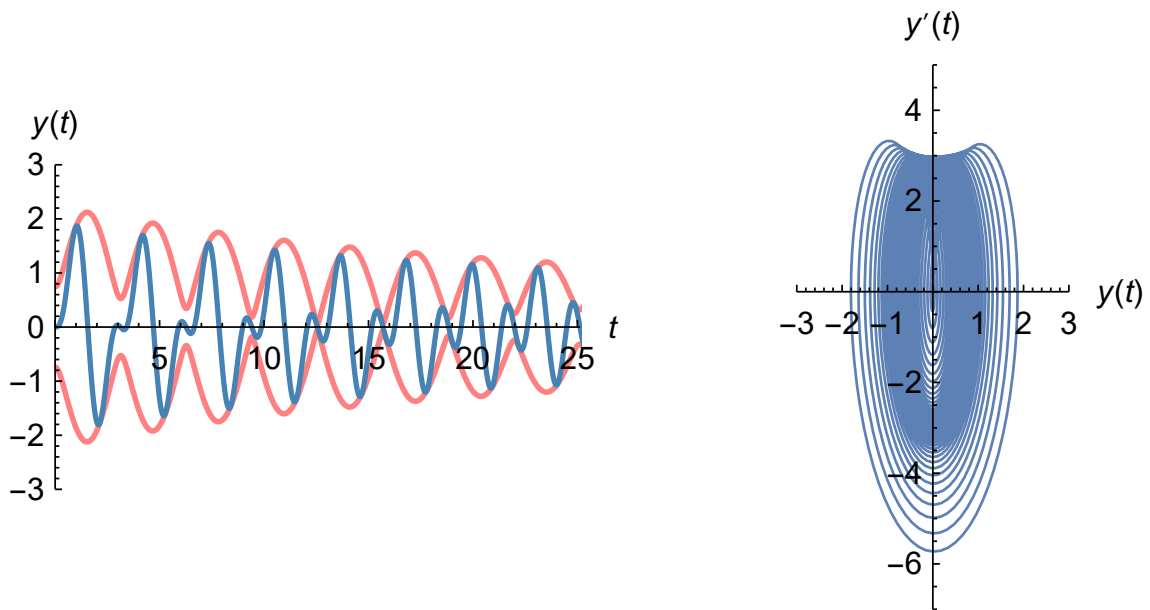


Obr. 2.22: Amplitudová charakteristika počáteční úlohy (2.17), (2.18) pro  $\omega = 1$ .

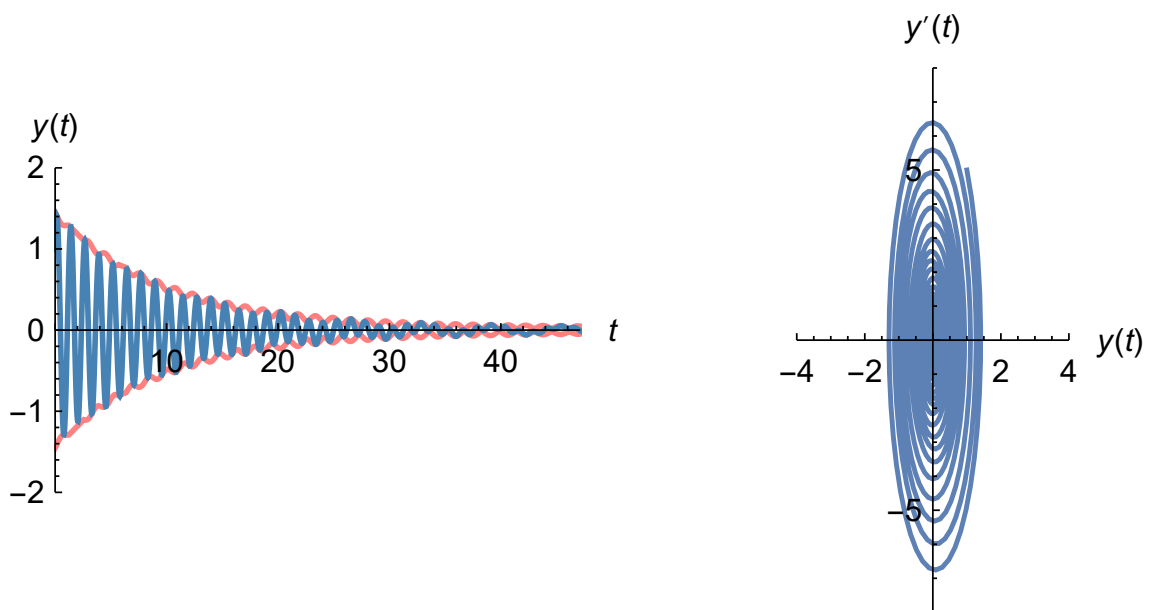
Na obr. 2.23 - 2.29 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) společně se svými obálkami a fázovými portréty pro dané volby parametrů. Řešení nejprve koná aperiodický pohyb, ale po čase se ustálí na periodické funkci s konstantní amplitudou.



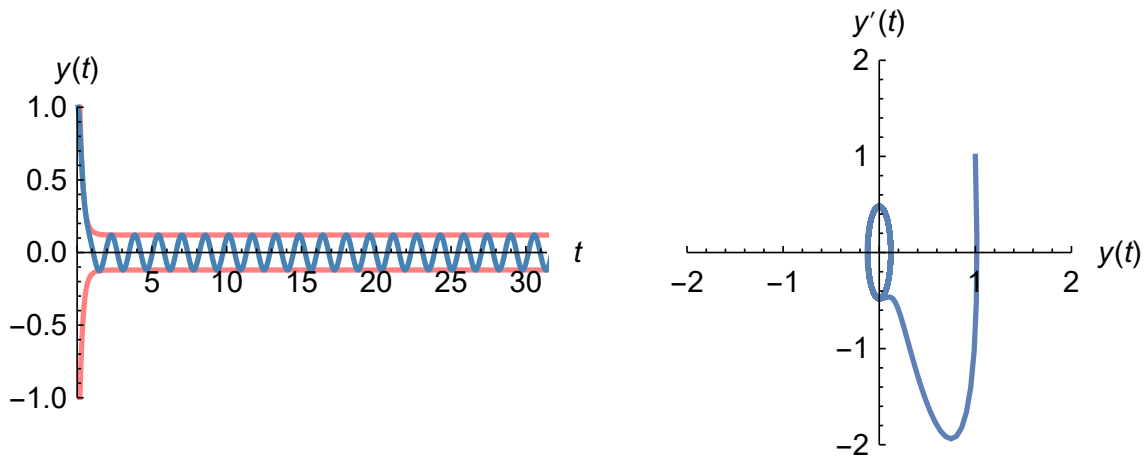
Obr. 2.23: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 2$ ,  $\Omega = 1$ ,  $D = 1$ ,  $b = 1$ .



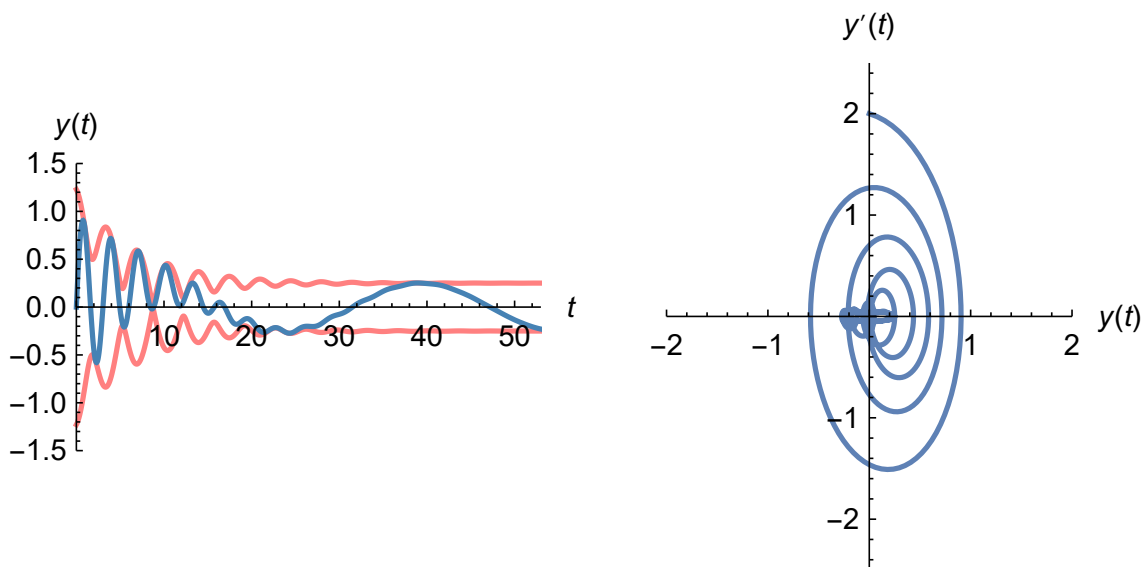
Obr. 2.24: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 2$ ,  $\Omega = 4$ ,  $D = 1$ ,  $b = 0.05$ .



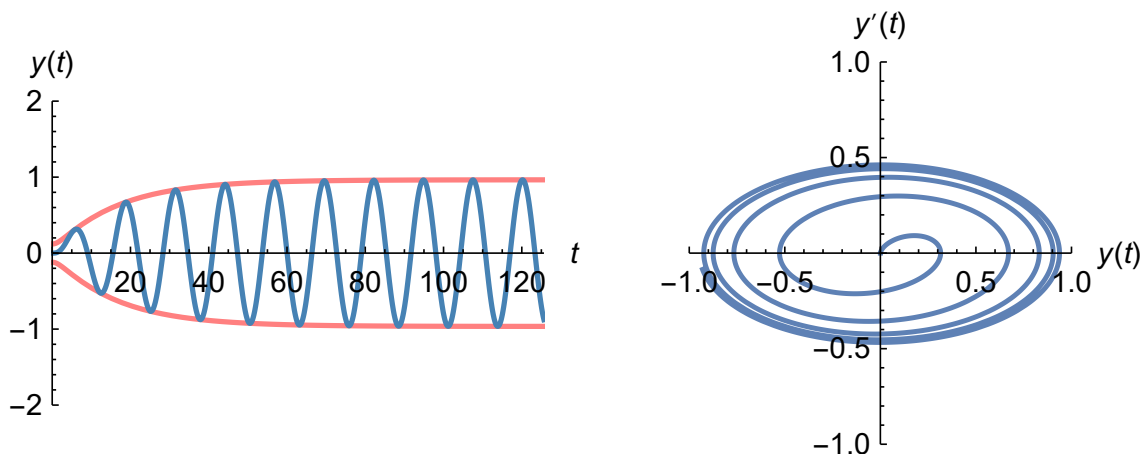
Obr. 2.25: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 5$ ,  $\omega = 5$ ,  $\Omega = 1$ ,  $D = 1$ ,  $b = 0.1$ .



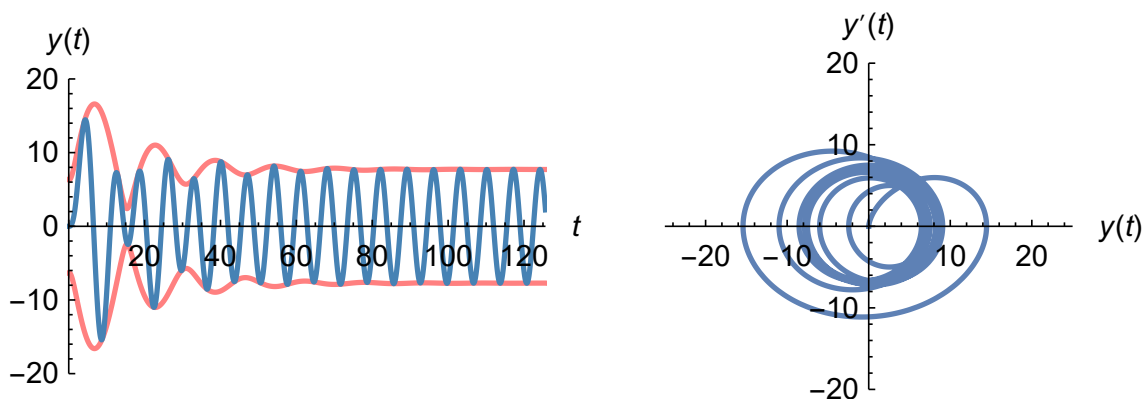
Obr. 2.26: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 1$ ,  $\omega = 5$ ,  $\Omega = 4$ ,  $D = 4$ ,  $b = 4$ .



Obr. 2.27: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 2$ ,  $\omega = 2$ ,  $\Omega = \frac{1}{5}$ ,  $D = 1$ ,  $b = \frac{3}{20}$ .



Obr. 2.28: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = \frac{1}{2}$ ,  $\Omega = \frac{\sqrt{5}}{18}$ ,  $D = 1$ ,  $b = \frac{1}{16}$ . Speciální případ volby parametrů, kdy  $\Omega = \sqrt{\omega^2 - b^2}$ .



Obr. 2.29: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = \frac{1}{2}$ ,  $\Omega = \frac{9}{10}$ ,  $D = 1$ ,  $b = \frac{1}{16}$ .

### Tlumená budící síla

Uvažujme počáteční úlohu pro nehomogenní diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru:

$$y''(t) + 2by'(t) + \omega^2 y(t) = De^{-bt} \sin \Omega t, \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1. \end{cases} \quad (2.21)$$

V této sekci budeme uvažovat pouze případ, kde budící síla má stejné tlumení jako systém, tj. podkritické.

### 3.2.2.1 Bez rezonance

Obecné řešení rovnice (2.20) pro  $\omega^2 > b^2$  a zároveň  $\Omega \neq \sqrt{\omega^2 - b^2}$  má tvar:

$$y(t) = Ae^{-bt} \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t + Be^{-bt} \cos \sqrt{\omega^2 - b^2} t + \frac{D}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2} e^{-bt} \sin \Omega t, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

použitím počátečních podmínek (2.21) dostáváme řešení příslušné počáteční úlohy pro rovnici (2.20) ve tvaru:

$$y(t) = Xe^{-bt} \sin \left( \sqrt{\omega^2 - b^2} t + \varphi \right) + \frac{D}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2} e^{-bt} \sin \Omega t,$$

$$X = \sqrt{y_0^2 + \frac{((\omega^2 - b^2 - \Omega^2)(y_1 + by_0) - D\Omega)^2}{(\omega^2 - b^2)(\omega^2 - b^2 - \Omega^2)^2}}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{y_0 \sqrt{\omega^2 - b^2} (\omega^2 - b^2 - \Omega^2)}{(\omega^2 - b^2 - \Omega^2)(y_1 + by_0) - D\Omega}.$$

Po úpravě pomocí vztahů (2.11) - (2.13) dostáváme výsledné řešení počáteční úlohy (2.20), (2.21) ve tvaru:

$$y(t) = E(t) \sin \gamma(t),$$

$$E(t) = e^{-bt} \sqrt{X^2 + \left( \frac{D}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2} \right)^2 + \frac{2XD}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2} \cos \left( (\sqrt{\omega^2 - b^2} - \Omega)t + \varphi \right)}, \quad (2.22)$$

kde funkce  $E(t)$  je obálkou řešení  $y(t)$ .

Speciálně pro  $X = \frac{D}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2}$  má řešení tvar:

$$y(t) = e^{-bt} \frac{D}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2} \left( \sin \left( \sqrt{\omega^2 - b^2} t + \varphi \right) + \sin \Omega t \right).$$

Po úpravě dostáváme výsledný tvar řešení pro  $X = \frac{D}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2}$ :

$$y(t) = e^{-bt} \frac{2D}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2} \cos \frac{(\sqrt{\omega^2 - b^2} - \Omega)t + \varphi}{2} \sin \frac{(\sqrt{\omega^2 - b^2} + \Omega)t + \varphi}{2},$$

obálku řešení  $y(t)$  lze volit jako

$$E(t) = e^{-bt} \frac{2D}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2} \cos \frac{(\sqrt{\omega^2 - b^2} - \Omega)t + \varphi}{2}. \quad (2.23)$$

Dosazením  $X = \frac{D}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2}$  do vztahu (2.22) a použitím známého goniometrického vztahu

$$\cos^2 z = \frac{1 + \cos 2z}{2}$$

ukážeme, že v tomto případě jsou vztahy (2.22) a (2.23) identické:

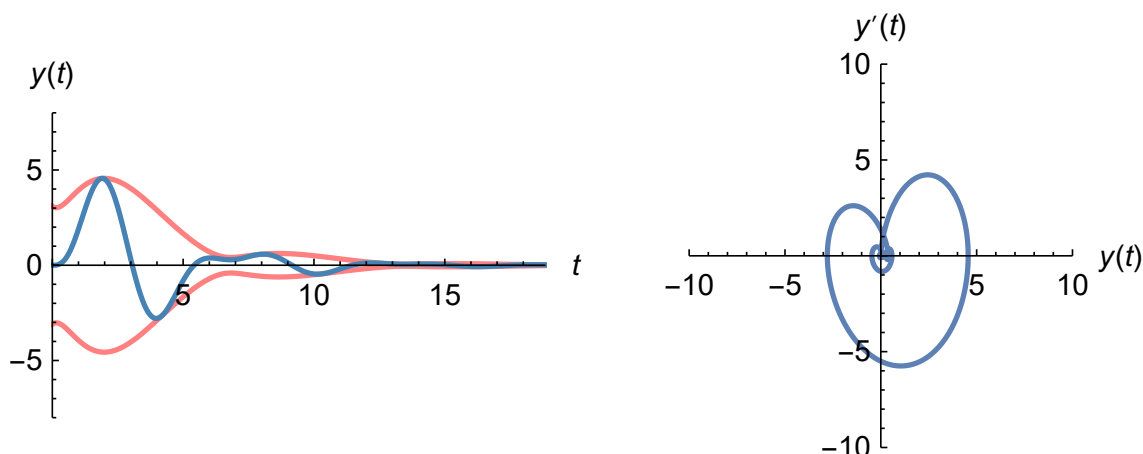
$$E(t) = e^{-bt} \sqrt{\frac{2D^2}{(\omega^2 - b^2 - \Omega^2)^2} \left( 1 + \cos \left( (\sqrt{\omega^2 - b^2} - \Omega)t + \varphi \right) \right)},$$

$$E(t) = e^{-bt} \frac{D\sqrt{2}}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2} \sqrt{2 \cos^2 \frac{(\sqrt{\omega^2 - b^2} - \Omega)t + \varphi}{2}},$$

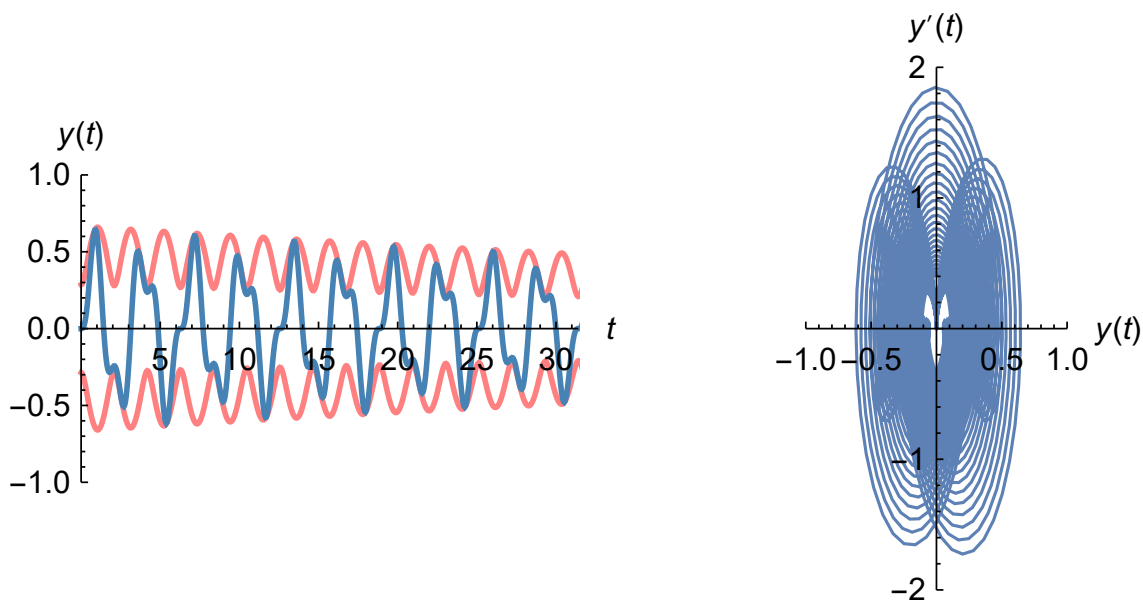
$$E(t) = e^{-bt} \frac{2D}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2} \cos \frac{(\sqrt{\omega^2 - b^2} - \Omega)t + \varphi}{2}.$$

I v tomto případě mohou vznikat zázrněje.

Na obr. 2.30 - 2.35 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (2.20), (2.21) společně se svými obálkami a fázovými portréty pro dané volby parametrů. Obálka řešení konverguje k nule.

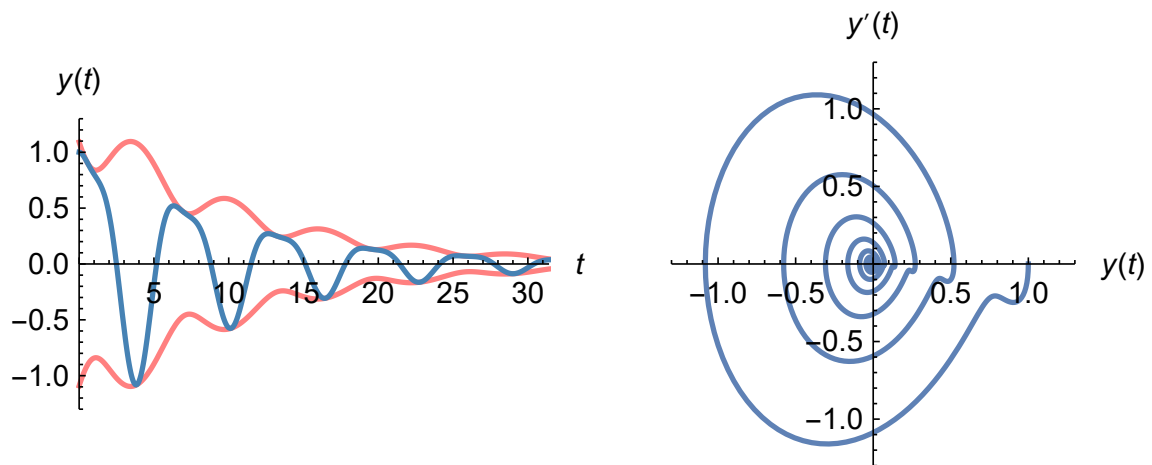


Obr. 2.30: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = \frac{11}{10}$ ,  $\Omega = 2$ ,  $D = 10$ ,  $b = \frac{3}{10}$ .

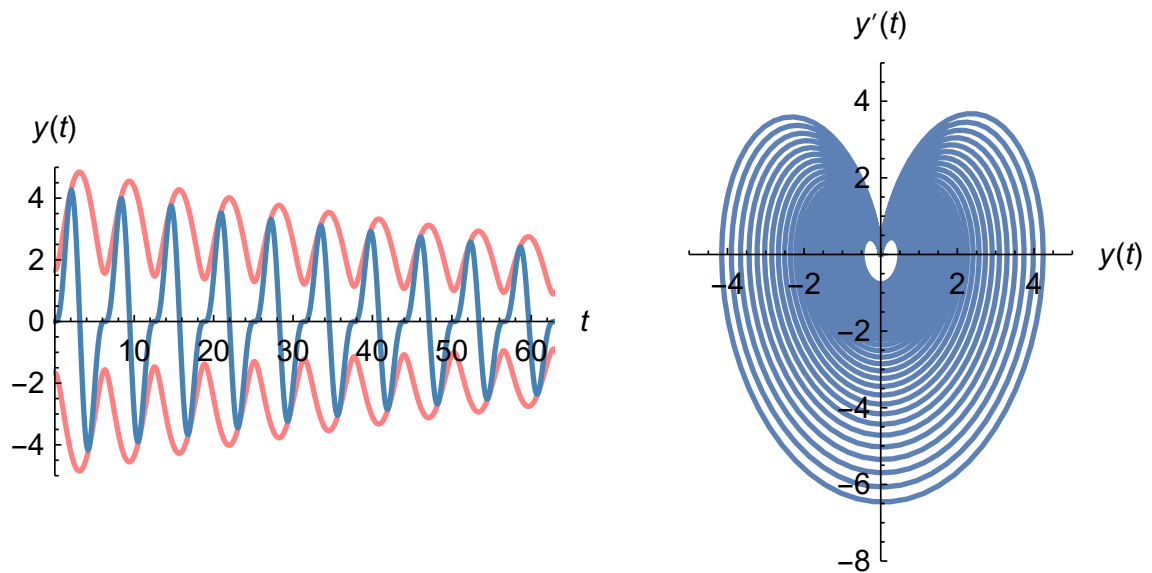


Obr. 2.31: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 5$ ,  $\Omega = 2$ ,  $D = 10$ ,  $b = \frac{1}{100}$ .

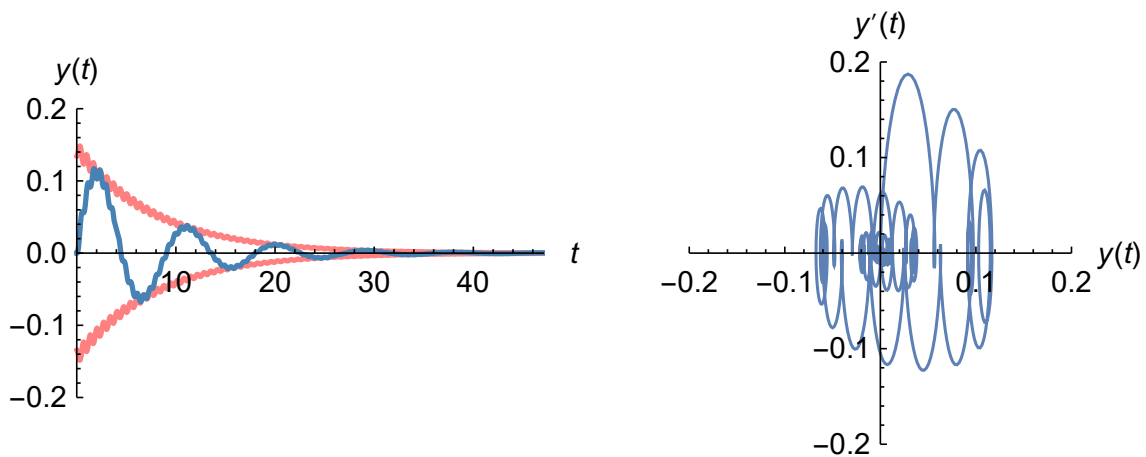




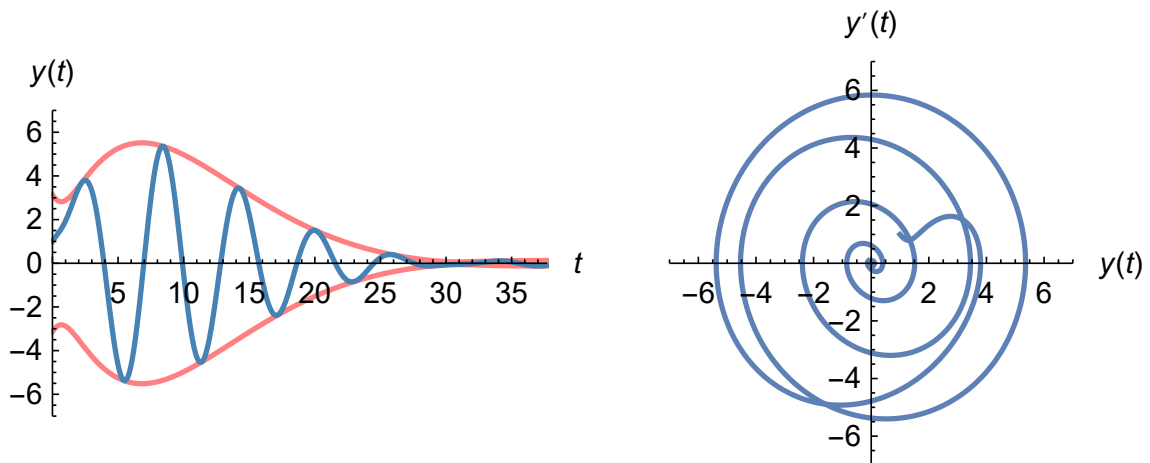
Obr. 2.32: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\Omega = 2$ ,  $D = 1$ ,  $b = \frac{1}{10}$ .



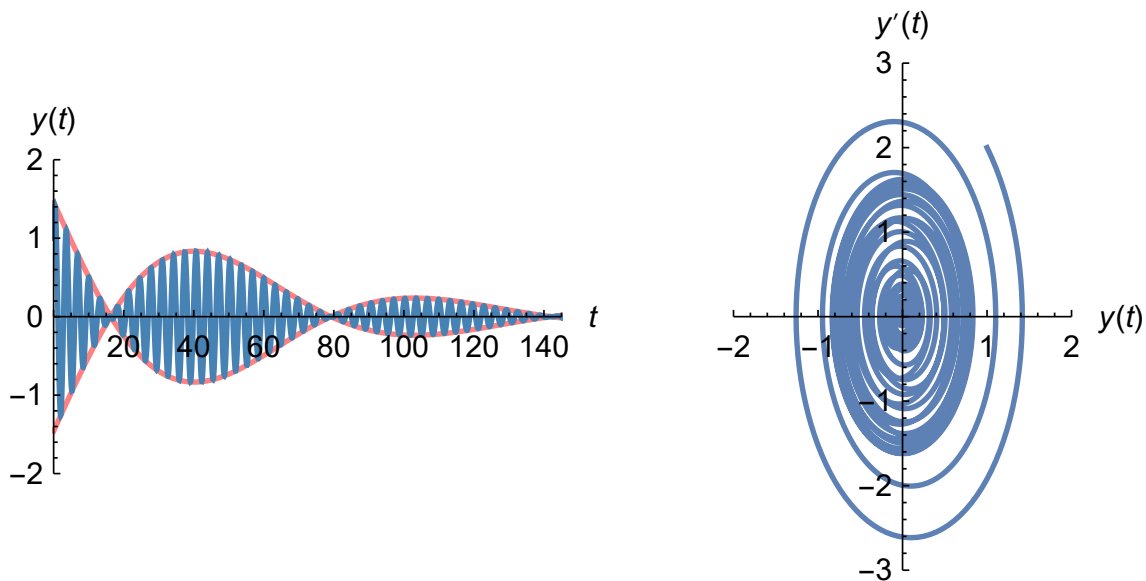
Obr. 2.33: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\Omega = 2$ ,  $D = 5$ ,  $b = \frac{1}{100}$ .



Obr. 2.34: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\Omega = 10$ ,  $D = 1$ ,  $b = \frac{1}{8}$ .



Obr. 2.35: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\Omega = \frac{6}{5}$ ,  $D = 4$ ,  $b = \frac{1}{8}$ .



Obr. 2.36: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $\omega = 2$ ,  $\Omega = 1.9$ ,  $D = 0.39$ ,  $b = \frac{1}{100}$ . Speciální případ volby parametrů, kdy  $X = \frac{D}{\omega^2 - b^2 - \Omega^2}$ , tlumení  $b$  je velmi malé a frekvence  $\omega, \Omega$  jsou si blízké. V tomto případě dochází k zázračným.

### 3.2.2.2 S rezonancí

Obecné řešení rovnice (2.20) pro  $\omega^2 > b^2$  a zároveň  $\Omega = \sqrt{\omega^2 - b^2}$  má tvar:

$$y(t) = Ae^{-bt} \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t + Be^{-bt} \cos \sqrt{\omega^2 - b^2} t + \frac{-D}{2\Omega} te^{-bt} \cos \Omega t, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

použitím počátečních podmínek (2.21) dostáváme řešení příslušné počáteční úlohy:

$$y(t) = Xe^{-bt} \sin(\Omega t + \varphi) + \frac{-Dt}{2\Omega} e^{-bt} \cos \Omega t,$$

$$X = \sqrt{\frac{(2y_1\Omega + 2by_0\Omega + bDt + D)^2 + \Omega^2 (2y_0\Omega + Dt)^2}{4\Omega^4}}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{\Omega(2y_0\Omega + Dt)}{2y_1\Omega + 2by_0\Omega + bDt + D}.$$

Upravíme tvar řešení do výhodnějšího tvaru

$$y(t) = e^{-bt} \left( X \sin(\Omega t + \varphi) + \frac{-Dt}{2\Omega} \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

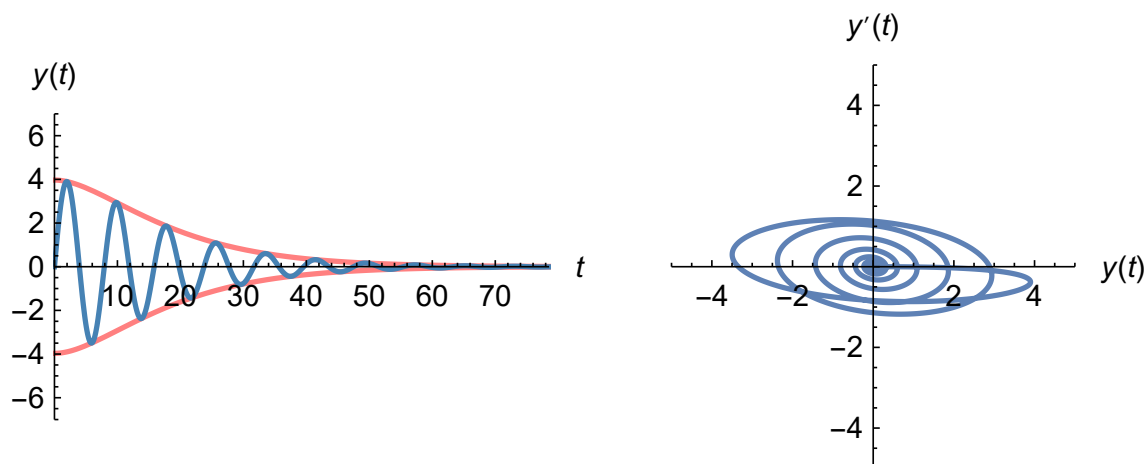
a použitím vztahů (2.11) - (2.13) získáváme konečný tvar řešení počáteční úlohy (2.20), (2.21) ve tvaru:

$$y(t) = E(t) \sin \gamma(t),$$

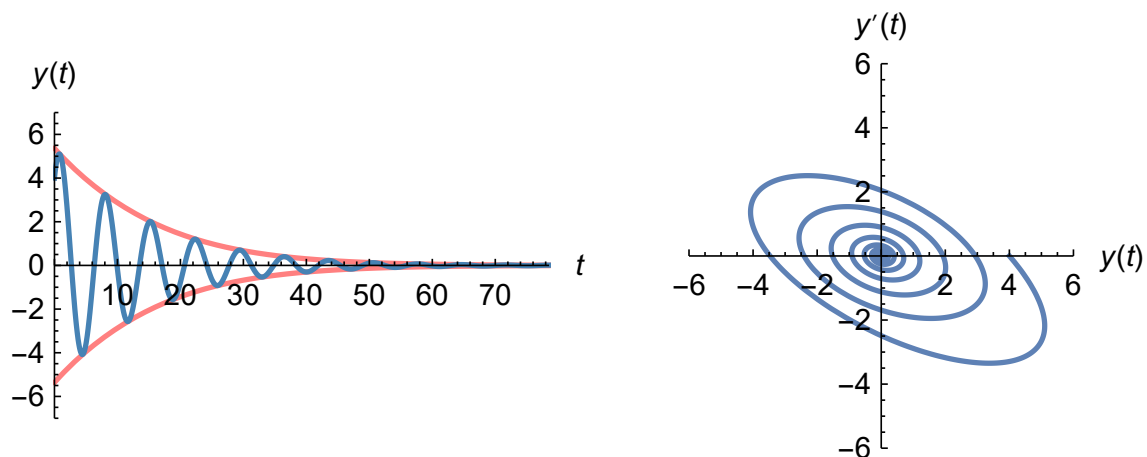
$$E(t) = e^{-bt} \sqrt{X^2 + \frac{D^2 t^2}{4\Omega^2} - \frac{XDt}{\Omega} \sin \varphi},$$

kde funkce  $E(t)$  je obálkou řešení  $y(t)$ .

Na obr. 2.37 - 2.38 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (2.20), (2.21) společně se svými obálkami a fázovými portréty pro dané volby parametrů. I když v tomto případě dochází k rezonanci, řešení je omezené a amplituda klesá až do nuly.



Obr. 2.37: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = \frac{8}{10}$ ,  $D = 5$ ,  $b = \frac{1}{10}$ .



Obr. 2.38: Řešení počáteční úlohy (2.17), (2.18) a jeho fázový portrét (modře), obálka řešení (červeně) pro volbu parametrů  $y_0 = 4$ ,  $y_1 = 0$ ,  $\omega = \frac{9}{10}$ ,  $D = 5$ ,  $b = \frac{1}{10}$ .

## Kapitola 3

# Přehled základních nelineárních oscilátorů

V této kapitole si neklademe za cíl sepsat vyčerpávající seznam všech nelineárních oscilátorů, zmiňujeme pouze pár ze základních oscilátorů, které upoutaly naši pozornost. V dalších kapitolách budeme analyzovat dva z těchto systémů více podrobněji. Informace v této kapitole byly čerpány z [1], [2], [3] a [10].

### 3.1 Matematické kyvadlo

V kapitole lineárních oscilátorů jsme pomocí rovnováhy sil odvodili rovnici (2.3) popisující pohyb matematického kyvadla a následně jsme zkoumali rovnici (2.4) vzniklou její linearizací. Linearizovaná rovnice aproximuje řešení uspokojivě jen pro malé výchylky od rovnovážné polohy, a proto má smysl řešit i původní nelineární rovnici.

Matematické kyvadlo je popsáno následující nelineární diferenciální rovnicí 2. řádu ve tvaru

$$u''(t) + \omega^2 \sin u(t) = 0,$$

kde  $\omega \in \mathbb{R}$ .

### 3.2 Duffingův oscilátor

Duffingova rovnice je jedním z nejjednodušších nelineárních modelů, k lineárnímu modelu je přidán pouze jeden člen, a to kubická tuhost. Popisuje širokou škálu fyzikálních systémů a v současnosti je ukázkovým modelem, na kterém může být vyložena řada základních pojmů nelineární dynamiky. Více se tímto systémem budeme zabývat v Kapitole 4.

Duffingův oscilátor je popsán následující nelineární diferenciální rovnicí 2. řádu ve tvaru

$$u''(t) + 2bu'(t) + \omega^2 u(t) + \lambda u^3(t) = D \cos \Omega t,$$

kde  $b, \lambda, D, \Omega > 0$  a  $\omega \in \mathbb{R}$ .

### 3.3 Asymetrický oscilátor

Asymetrický oscilátor je označení pro obyčejné lineární kyvadlo obohacené o tzv. skákající nelinearitu. Jedná se o po částech lineární funkci popisující tuhost asymetrického oscilátoru, která

typicky nabývá různých hodnot pro kladné, resp. záporné úhly. Blíže se tímto modelem budeme zabývat v Kapitole 5.

Asymetrický oscilátor je popsán následující nelineární diferenciální rovnicí 2. řádu ve tvaru

$$u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0,$$

kde  $u^+(t) = \max\{u(t), 0\}$ ,  $u^-(t) = \max\{-u(t), 0\}$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

### 3.4 Van der Polův oscilátor

Van der Pol popsal tento oscilátor ve svém článku z roku 1928. Jedná se o systém s nelineárním členem tlumení, kterým se modelují oscilace jak ve fyzikálních, tak biologických vědách. Například v biologii se autorům R. Fitzhugh a J. Nagumo podařilo rozšířit tuto rovnici do roviny jako model akčních potenciálů neuronů. Rovnice byla také využita v seismologii k modelování dvou tektonických desek v geologické poruše.

Van der Polův oscilátor je popsán následující nelineární diferenciální rovnicí 2. řádu ve tvaru

$$u''(t) - \varepsilon (1 - u^2(t)) u'(t) + u(t) = 0,$$

kde  $\varepsilon > 0$ .

### 3.5 Pružné (elastické) kyvadlo

Elastické kyvadlo je model popisující pohyb hmotného bodu zavěšeného na nehmotné pružině o klidové nezátžené délce  $l$ . Funkce  $u$  popisuje odchylku kyvadla od svislého směru a  $v$  změnu délky pružiny vůči její klidové délce. Pružné kyvadlo je model, kterým lze sledovat řadu pozoruhodných jevů, například v minulosti byly pomocí něj modelovány vazby mezi kmíty molekuly  $\text{CO}_2$ .

Elastické kyvadlo je popsáno soustavou dvou nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu ve tvaru

$$\begin{cases} u''(t) + \frac{2}{l + v(t)} u'(t)v'(t) + \omega_u^2 \sin u(t) = 0, \\ v''(t) - (l + v(t)) (u'(t))^2 - \lambda \cos u(t) + \omega_v^2 v(t) = 0, \end{cases}$$

kde  $l, \lambda > 0$  a  $\omega_u, \omega_v \in \mathbb{R}$ .

### 3.6 Spojená kyvadla

Tento model sestává ze dvou identických kyvadel, jejichž závaží jsou propojena pružinou o tuhosti  $k$ . Funkce  $u$ , resp.  $v$  popisují odchylku prvního, resp. druhého kyvadla od svislého směru. Oproti standardnímu modelu s jedním kyvadlem v tomto případě, díky propojení pružinou, dochází k výměně energie mezi oběma kyvadly. Rovnice byla například využita k vysvětlení některých jevů slunečního záření.

Spojená kyvadla jsou popsána soustavou dvou nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu ve tvaru

$$\begin{cases} u''(t) + \omega^2 \sin u(t) + k(\sin u(t) - \sin v(t)) = 0, \\ v''(t) + \omega^2 \sin v(t) - k(\sin u(t) - \sin v(t)) = 0, \end{cases}$$

kde  $k > 0$  a  $\omega \in \mathbb{R}$ .

## Kapitola 4

# Duffingova rovnice

Duffingova rovnice byla pojmenována podle německého inženýra George Duffinga, který se akademické činnosti věnoval pouze ve svém volném čase. Koncept nelineárních kmitů byl znám již dlouho předtím, než Duffing zveřejnil svoji známou knihu o kmitání, ve které se poprvé objevila jeho známá rovnice. Duffing byl ale prvním autorem, který se začal zabývat rovnicemi s kvadratickou a kubickou nelinearitou (viz [5]). Termín Duffingovy rovnice se v dnešní době používá pro diferenciální rovnice s kubickým členem tuhosti bez ohledu na typ tlumení nebo buzení. Obecná Duffingova rovnice s kubickými a kvadratickými nelinearitami charakterizuje velkou škálu MEMS/NEMS<sup>1</sup> oscilátorů, které se hojně využívají ve fotovoltaiice, mikroelektronice nebo optice (viz [9]).

Duffingova rovnice se pro velkou část nelineárních systémů dá využít jako hrubý popis chování, když nelineární člen nahradíme příslušným Taylorovým polynomem třetího stupně. Díky tomu se následné zkoumání kvalitativních vlastností výrazně zjednoduší.

V následujícím textu budeme uvažovat poč. úlohu pro Duffingovu rovnici ve tvaru:

$$u''(t) + 2bu'(t) + \omega^2 u(t) + \lambda u^3(t) = D \cos \Omega t, \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

kde neznámá funkce  $u = u(t)$  popisuje polohu v čase  $t$ ,  $b$  je tlumení,  $\omega$  lineární tuhost,  $\lambda$  nelineární (kubická) tuhost,  $D$  amplituda periodické budící síly a  $\Omega$  frekvence periodické budící síly. Takto zvolená rovnice (4.1) popisuje tlumený, periodicky buzený oscilátor s nelineárním členem tuhosti.

### 4.1 Metoda homotopické analýzy (HAM)

Metoda homotopické analýzy, dále také HAM, je metoda na řešení silně nelineárních diferenciálních rovnic. Od ostatních analytických metod se liší v několika následujících vlastnostech. Hlavní výhodou (viz [4], [7]) je její široké využití, HAM je nezávislá na velikosti vstupních parametrů řešené diferenciální rovnice. Lze ji využít na většinu nelineární problematiky napříč

---

<sup>1</sup>MEMS = mikro-elektromechanický systém, NEMS = nano-elektromechanický systém

vědními obory. Poslední výhodou je bezpochyby volnost, kterou nám HAM nabízí při volbě pomocného lineárního operátoru  $L$ .

Základním principem metody HAM (viz [11] nebo [6]) je koncept tzv. homotopického spojení. Jedná se o spojitou transformaci mezi dvěma objekty, v našem případě operátory, které pojí společná vlastnost v určitém aspektu. Například kružnice může být spojitě transformována na elipsu nebo čtverec, nikoli však třeba na hyperbolu.

Uvažujme nelineární diferenciální rovnici

$$N[u(t)] = 0, \quad (4.3)$$

kde  $N$  je nelineární operátor. Použitím parametru  $p \in \langle 0, 1 \rangle$  a homotopické transformace můžeme sestavit systém rovnic

$$(1 - p)L[U(t, p) - u_0(t)] = c_0 p N[U(t, p)], \quad (4.4)$$

kde  $L$  je pomocný lineární operátor,  $u_0(t)$  počáteční odhad  $u(t)$  a  $c_0$  parametr zajišťující následnou konvergenci Taylorova rozvoje (viz níže). Tento systém často označujeme jako rovnici homotopického spojení a její řešení  $U(t, p)$  závisí na parametru  $p$ .

Pro  $p = 0$  přechází (4.4) na lineární rovnici

$$L[U(t, p) - u_0(t)] = 0 \quad (4.5)$$

a počáteční odhad  $U(t, 0) = u_0(t)$  je jejím řešením. Naopak pro  $p = 1$  je rovnice (4.4) ekvivalentní s původní nelineární rovnicí (4.3). Z toho důvodu se spojitou změnou parametru  $p$  řešení  $U(t, p)$  rovnice (4.4) deformuje z počátečního odhadu  $u_0(t)$  na řešení uvažované nelineární rovnice (4.3). Pokud rozvineme  $U(t, p)$  do Taylorovy řady vzhledem k  $p$  se středem v  $p = 0$

$$U(t, p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) p^n \quad (4.6)$$

a za předpokladu, že parametr  $c_0$  byl zvolen tak, aby řada (4.6) konvergovala v  $p = 1$ , dostáváme řešení původní nelineární diferenciální rovnice (4.3) ve tvaru

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t). \quad (4.7)$$

V tomto textu budeme HAM využívat k řešení Duffingovy rovnice ve tvaru (4.1) (ukázka použití na jednoduchém příkladu viz [8]).

Uvažujme parametr  $p \in \langle 0, 1 \rangle$  a funkci  $U(t, p) : \mathbb{R}^+ \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , která popisuje spojitý přechod od počátečního odhadu  $U(t, 0) = u_0(t)$  k přesnému řešení  $U(t, 1) = u(t)$  Duffingovy rovnice v závislosti na parametru  $p$ .

Nelineární operátor  $N[U(t, p), t]$  má v našem případě podobu

$$N[U(t, p), t] = \frac{\partial^2 U(t, p)}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial U(t, p)}{\partial t} + \omega^2 U(t, p) + \lambda^2 U(t, p) - D \cos \Omega t \quad (4.8)$$

a lineární operátor  $L[U(t, p)]$  můžeme zvolit ve tvaru

$$L[U(t, p)] = \frac{\partial^2 U(t, p)}{\partial t^2} + \Omega^2 U(t, p). \quad (4.9)$$



Řešení  $U(t, p)$  rozvineme do Taylorovy řady vzhledem k parametru  $p$

$$U(t, p) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) p^n \quad (4.10)$$

s koeficienty

$$u_n(t) = \frac{\partial^n U(t, 0)}{\partial p^n} \frac{1}{n!}. \quad (4.11)$$

**Lemma 4.1.1.** *Nechť  $L[U(t, p)]$  je lineární operátor daný předpisem (4.9), potom  $\forall n \in \mathbb{N}$ :*

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n} ((1-p)L[U(t, p) - u_0(t)]) = (1-p) \frac{\partial^n L[U(t, p) - u_0(t)]}{\partial p^n} - n \frac{\partial^{n-1} L[U(t, p) - u_0(t)]}{\partial p^{n-1}}. \quad (4.12)$$

*Důkaz.* Důkaz provedeme matematickou indukcí.

Pro další úpravy označme výraz na levé, resp. pravé straně rovnice (4.12) symbolem  $V_L^n$ , resp.  $V_P^n$ .

Ověříme platnost tvrzení pro  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} V_L^1 &= \frac{\partial}{\partial p} ((1-p)L[U(t, p) - u_0(t)]) = (1-p) \frac{\partial L[U(t, p) - u_0(t)]}{\partial p} + \frac{d(1-p)}{dp} L[U(t, p) - u_0(t)] = \\ &= (1-p) \frac{\partial L[U(t, p) - u_0(t)]}{\partial p} - L[U(t, p) - u_0(t)] = V_P^1. \end{aligned}$$

Nechť tvrzení platí pro  $n = m$ . Ukážeme, že platí i pro  $n = m + 1$ .

$$\begin{aligned} V_L^{m+1} &= \frac{\partial^{m+1}}{\partial p^{m+1}} ((1-p)L[U(t, p) - u_0(t)]) = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial^m}{\partial p^m} ((1-p)L[U(t, p) - u_0(t)]) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \left( (1-p) \frac{\partial^m L[U(t, p) - u_0(t)]}{\partial p^m} - m \frac{\partial^{m-1} L[U(t, p) - u_0(t)]}{\partial p^{m-1}} \right) = \\ &= (1-p) \frac{\partial^{m+1} L[U(t, p) - u_0(t)]}{\partial p^{m+1}} - (m+1) \frac{\partial^m L[U(t, p) - u_0(t)]}{\partial p^m} = V_P^{m+1} \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.1.2.** *Nechť  $N[U(t, p), t]$  je nelineární operátor daný předpisem (4.8), potom  $\forall n \in \mathbb{N}$ :*

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n} (c_0 p N[U(t, p), t]) = n c_0 \frac{\partial^{n-1} N[U(t, p), t]}{\partial p^{n-1}} + c_0 p \frac{\partial^n N[U(t, p), t]}{\partial p^n}. \quad (4.13)$$

*Důkaz.* Důkaz provedeme matematickou indukcí.

Pro další úpravy označme výraz na levé, resp. pravé straně rovnice (4.13) symbolem  $Z_L^n$ , resp.  $Z_P^n$ .

Ověříme platnost tvrzení pro  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} Z_L^1 &= \frac{\partial}{\partial p} (c_0 p N[U(t, p), t]) = c_0 \frac{dp}{dp} N[U(t, p), t] + c_0 p \frac{\partial N[U(t, p), t]}{\partial p} = \\ &= c_0 N[U(t, p), t] + c_0 p \frac{\partial N[U(t, p), t]}{\partial p} = Z_P^1. \end{aligned}$$

Nechť tvrzení platí pro  $n = m$ . Ukážeme, že platí i pro  $n = m + 1$ ;

$$\begin{aligned}
Z_L^{m+1} &= \frac{\partial^{m+1}}{\partial p^{m+1}} (c_0 p N[U(t, p), t]) = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial^m}{\partial p^m} (c_0 p N[U(t, p), t]) \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial p} \left( m c_0 \frac{\partial^{m-1} N[U(t, p), t]}{\partial p^{m-1}} + c_0 p \frac{\partial^m N[U(t, p), t]}{\partial p^m} \right) = \\
&= m c_0 \frac{\partial^m N[U(t, p), t]}{\partial p^m} + c_0 \frac{\partial^m N[U(t, p), t]}{\partial p^m} + c_0 p \frac{\partial^{m+1} N[U(t, p), t]}{\partial p^{m+1}} = \\
&= (m + 1) c_0 \frac{\partial^m N[U(t, p), t]}{\partial p^m} + c_0 p \frac{\partial^{m+1} N[U(t, p), t]}{\partial p^{m+1}} = Z_P^{m+1}.
\end{aligned}$$

□

Pokud rovnici homotopického spojení (4.4)  $n$ -krát parciálně zderivujeme podle  $p$  a použijeme Lemmata 2.1., 2.2. dostáváme

$$(1-p) \frac{\partial^n L[U(t, p) - u_0(t)]}{\partial p^n} - n \frac{\partial^{n-1} L[U(t, p) - u_0(t)]}{\partial p^{n-1}} = n c_0 \frac{\partial^{n-1} N[U(t, p), t]}{\partial p^{n-1}} + c_0 p \frac{\partial^n N[U(t, p), t]}{\partial p^n}.$$

Nyní díky linearitě  $L$  a za předpokladu záměnnosti parciálních derivací dostáváme

$$\begin{aligned}
(1-p)L \left[ \frac{\partial^n U(t, p)}{\partial p^n} \right] + (p-1)L \left[ \frac{\partial^n U(t, 0)}{\partial p^n} \right] - nL \left[ \frac{\partial^{n-1} U(t, p)}{\partial p^{n-1}} \right] + nL \left[ \frac{\partial^{n-1} U(t, 0)}{\partial p^{n-1}} \right] = \\
= n c_0 \frac{\partial^{n-1} N[U(t, p), t]}{\partial p^{n-1}} + c_0 p \frac{\partial^n N[U(t, p), t]}{\partial p^n}.
\end{aligned}$$

Dosadíme za  $p = 0$  a využijeme vztah pro Taylorovy koeficienty  $u_n(t)$ . Musíme však uvažovat zvlášť případ  $n = 1$  a  $n \geq 2$ .

- Pro  $n = 1$  dostáváme

$$\begin{aligned}
L \left[ \frac{\partial U(t, p)}{\partial p} \right] \Big|_{p=0} &= c_0 N[U(t, p), t] \Big|_{p=0} \\
L[u_1(t)] &= c_0 N[U(t, p), t] \Big|_{p=0}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

- Pro  $n \geq 2$  dostáváme

$$L \left[ \frac{\partial^n U(t, p)}{\partial p^n} \right] \Big|_{p=0} - n L \left[ \frac{\partial^{n-1} U(t, p)}{\partial p^{n-1}} \right] \Big|_{p=0} = n c_0 \frac{\partial^{n-1} N[U(t, p), t]}{\partial p^{n-1}} \Big|_{p=0},$$

po vydělení  $n!$  a použití vztahu (4.11) získáváme

$$L[u_n(t) - u_{n-1}(t)] = c_0 \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} N[U(t, p), t]}{\partial p^{n-1}} \Big|_{p=0}. \tag{4.15}$$

Sjednocením vztahů (4.14) – (4.15) dostáváme tzv. deformační rovnici  $n$ -tého řádu

$$L[u_n(t) - \chi_n u_{n-1}(t)] = c_0 \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} N[U(t, p), t]}{\partial p^{n-1}} \Big|_{p=0}, \tag{4.16}$$

kde

$$\chi_n = \begin{cases} 0 & n = 1, \\ 1 & n \geq 2. \end{cases} \tag{4.17}$$

## 4.2 Aproximace řešení metodou HAM

Počáteční odhad  $u_0(t)$  uvažujme ve tvaru

$$u_0(t) = z \sin(\Omega t + \varphi), \quad (4.18)$$

kde  $z, \Omega, \varphi \in \mathbb{R}$ . Všimněme si, že platí  $L[u_0(t)] = 0$ ,  $u_0(0) = z \sin \varphi$ ,  $u_0'(0) = z\Omega \cos \varphi$ .

Deformační rovnici prvního řádu získáme ze vztahů (4.16), (4.17) a (4.9) dosazením za  $n = 1$ :

$$u_1''(t) + \Omega^2 u_1(t) = c_0 N[u_0(t), t], \quad (4.19)$$

Nelineární výraz na pravé straně rovnice (4.19) má po dosazení ze vztahu (4.8) podobu:

$$\begin{aligned} N[u_0(t), t] &= (z \sin(\Omega t + \varphi))'' + 2b(z \sin(\Omega t + \varphi))' + \omega^2 z \sin(\Omega t + \varphi) + \lambda(z \sin(\Omega t + \varphi))^3 - D \cos \Omega t = \\ &= (\omega^2 z - \Omega^2 z) \sin(\Omega t + \varphi) + 2b\Omega z \cos(\Omega t + \varphi) + \lambda z^3 \sin^3(\Omega t + \varphi) - D \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Využijeme vztahu  $\sin^3(\Omega t + \varphi) = \frac{3}{4} \sin(\Omega t + \varphi) - \frac{1}{4} \sin(3(\Omega t + \varphi))$ :

$$\begin{aligned} N[u_0(t), t] &= (\omega^2 z - \Omega^2 z) \sin(\Omega t + \varphi) + 2b\Omega z \cos(\Omega t + \varphi) + \\ &+ \lambda z^3 \left( \frac{3}{4} \sin(\Omega t + \varphi) - \frac{1}{4} \sin(3(\Omega t + \varphi)) \right) - D \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Požadujeme, aby řešení  $u_1(t)$  rovnice (4.19) bylo omezené, nesmí proto docházet k rezonanci. Pravá strana rovnice (4.19) tedy nesmí obsahovat výrazy  $\sin \Omega t$ ,  $\cos \Omega t$ , které jsou ve fundamentálním systému levé strany rovnice (4.19).

Dosadíme (4.20) do (4.19), využijeme vztahů

$$\sin(\Omega t + \varphi) = \cos \varphi \sin \Omega t + \sin \varphi \cos \Omega t,$$

$$\cos(\Omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos \Omega t - \sin \varphi \sin \Omega t$$

a koeficienty před  $\sin \Omega t$  i před  $\cos \Omega t$  položíme rovny nule. Tím získáme následující soustavu dvou rovnic.

$\sin \Omega t$  :

$$c_0 \left( (\omega^2 z - \Omega^2 z) \sin \varphi - 2b\Omega z \sin \varphi + \frac{3}{4} \lambda z^3 \cos \varphi \right) = 0, \quad (4.21)$$

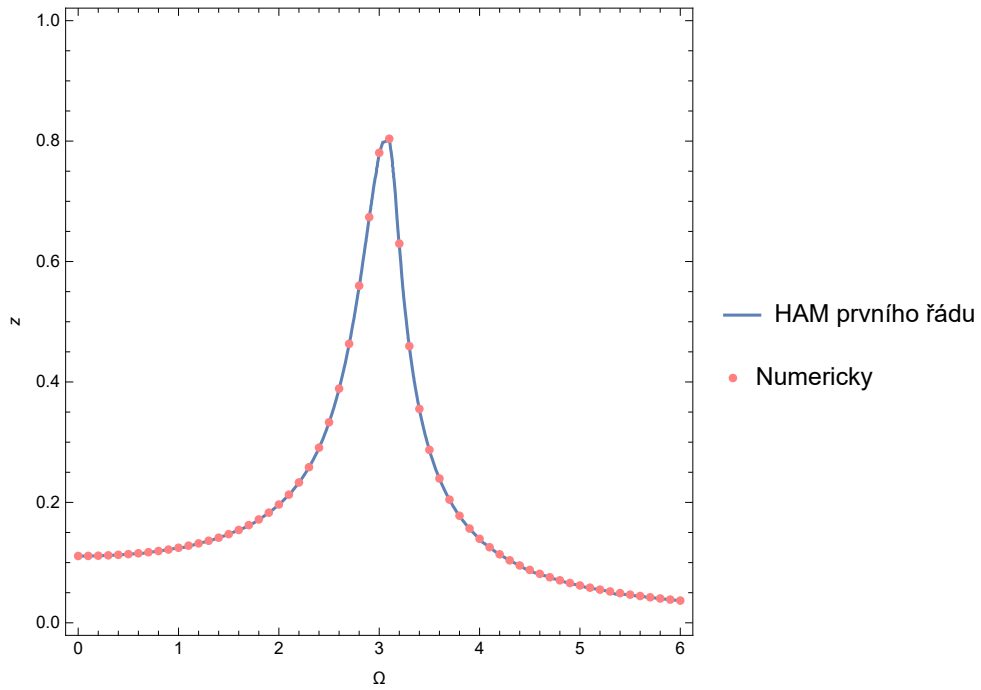
$\cos \Omega t$  :

$$c_0 \left( (\omega^2 z - \Omega^2 z) \cos \varphi + 2b\Omega z \cos \varphi + \frac{3}{4} \lambda z^2 \sin \varphi - D \right) = 0. \quad (4.22)$$

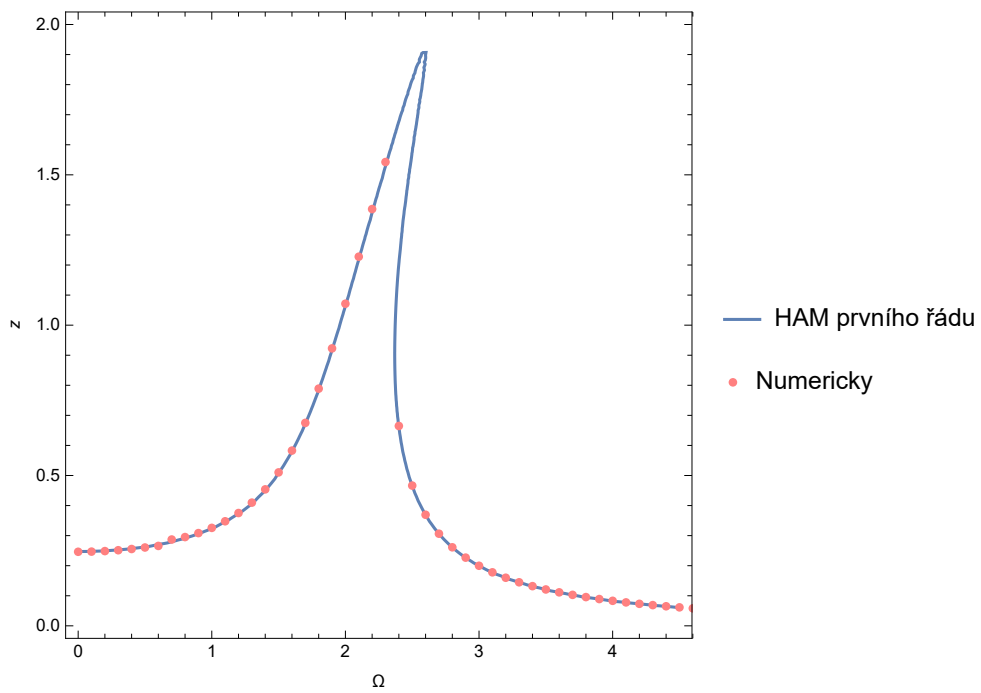
Poznamenejme, že parametr  $c_0$  nemá vliv na další úpravy. Umocníme oba vztahy na druhou a sečtením dostáváme výsledný tvar křivky, popisující vztah mezi amplitudou  $z$  a budící frekvencí  $\Omega$ . Tento vztah můžeme chápat jako amplitudovou charakteristiku řešení rovnice (4.1) pomocí HAM prvního řádu, protože popisuje vzájemnou vazbu mezi amplitudou  $z$  a budící frekvencí  $\Omega$ .

$$\left( z(\omega^2 + \Omega^2) + \frac{3}{4} \lambda z^3 \right) + 4b^2 z^2 \Omega^2 = D^2. \quad (4.23)$$

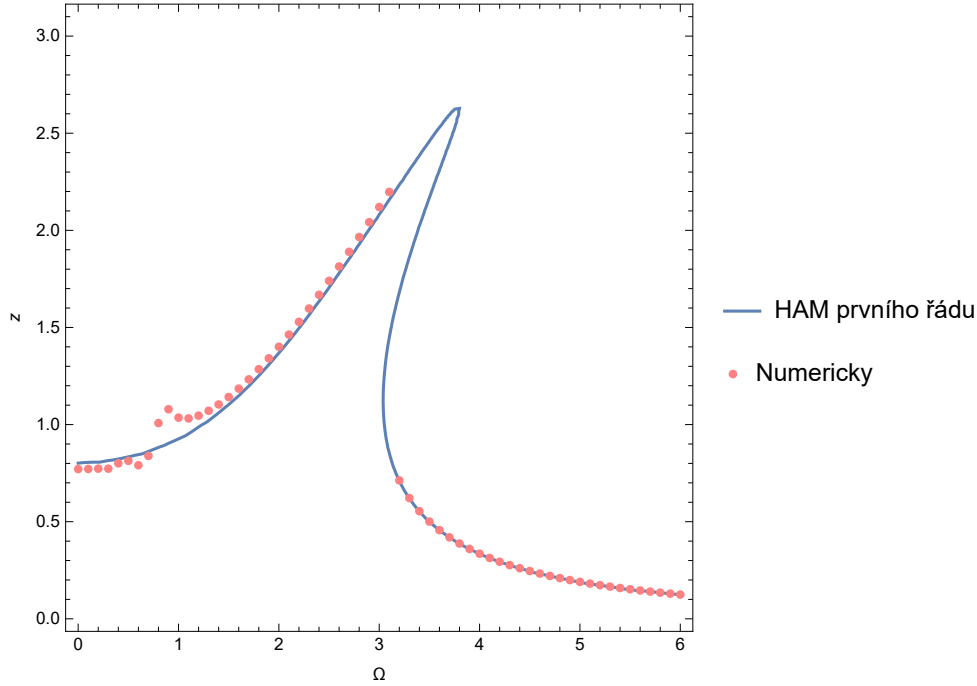
Na obr. 4.1 - 4.3 je znázorněna amplitudová charakteristika řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) získaná metodou HAM prvního řádu, resp. numerickým výpočtem (viz poznámka níže). Amplitudovou charakteristikou u nelineárních systémů myslíme závislost amplitudy na budící frekvenci, nikoliv na bezrozměrných veličinách jako u lineárních systémů.



Obr. 4.1: Amplitudová charakteristika řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) pro volbu parametrů  $b = 0.1$ ,  $\omega = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $D = 1$ .



Obr. 4.2: Amplitudová charakteristika řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) pro volbu parametrů  $b = 0.2$ ,  $\omega = 2$ ,  $\lambda = 2$ ,  $D = 4$ .



Obr. 4.3: Amplitudová charakteristika řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) pro volbu parametrů  $b = 0.2$ ,  $\omega = 3$ ,  $\lambda = 1$ ,  $D = 1$ .

**Poznámka 4.2.1.** Numerické hodnoty na obr. 4.1 - 4.3 byly získány za pomoci software *Mathematica*. Nalezené hodnoty jsou extrémní hodnoty amplitudy řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) v závislosti na parametru  $\Omega$  pro časy z intervalu  $\langle 100, 200 \rangle$ . Maxima byla hledána pro časy vzdálené od počátku, abychom zmírnili vliv počátečních podmínek na hodnoty amplitudy.

Za předpokladu, že hledané řešení  $u_1(t)$  je omezené, přechází rovnice (4.19) na tvar

$$u_1''(t) + \Omega^2 u_1(t) = \frac{-c_0 \lambda z^3}{4} \sin(3\Omega t + 3\varphi), \quad (4.24)$$

kde za  $z$  dosazujeme ze vztahu (4.23) a za  $\varphi$  z (4.21), nebo (4.22).

Řešení Duffingovy rovnice (4.1) můžeme aproximovat následovně

$$u(t) = U(t, 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \cdot 1^n \sim u_0(t) + u_1(t) \quad (4.25)$$

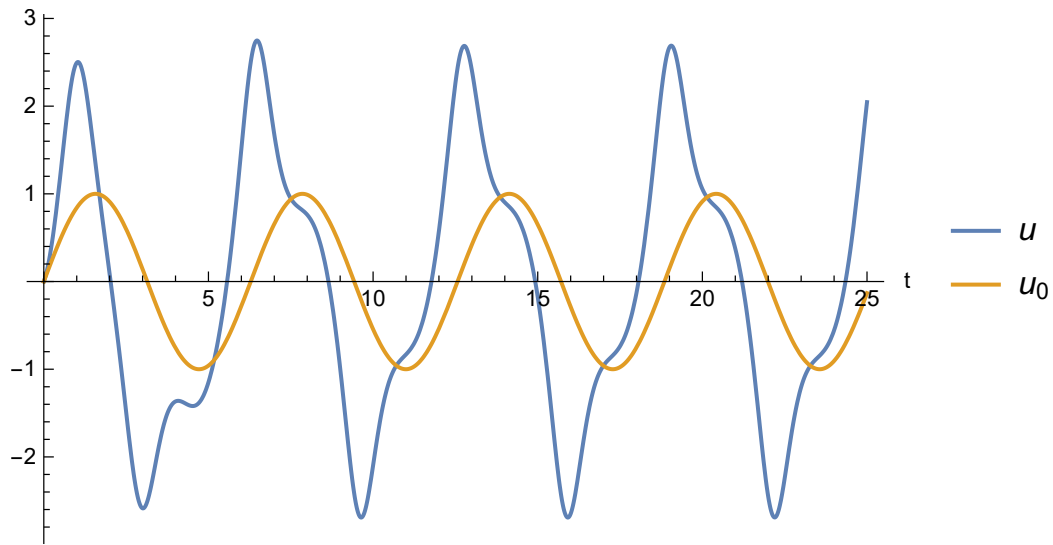
a počáteční podmínky (4.2) pro aproximované řešení (4.25) přecházejí na tvar

$$\begin{cases} u_0(0) + u_1(0) = 0, \\ u_0'(0) + u_1'(0) = 1. \end{cases} \quad (4.26)$$

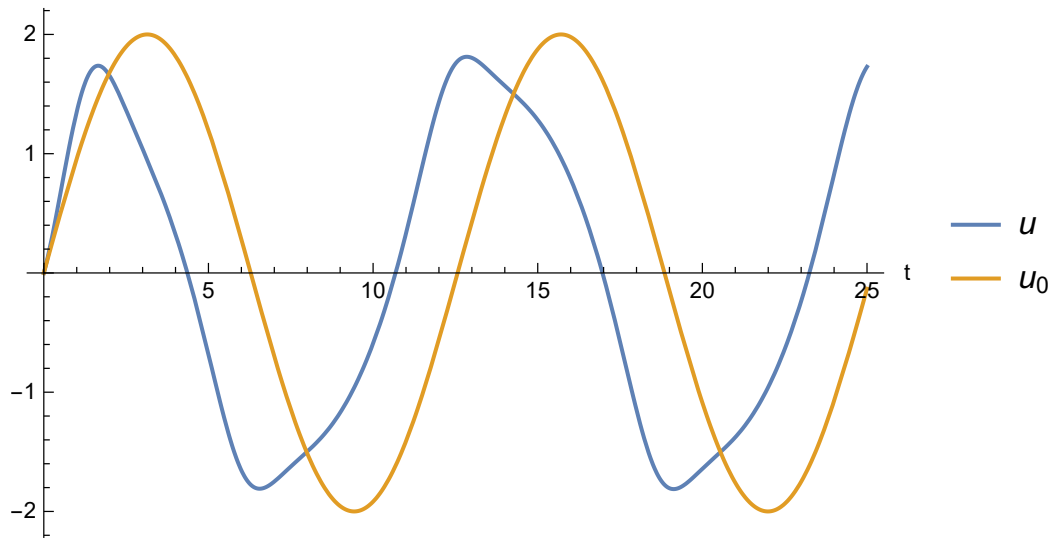
Řešení počáteční úlohy (4.24), (4.26) má tvar

$$u_1(t) = -z \sin \varphi \cos \Omega t + \frac{(1 - z\Omega \cos \varphi) \sin \Omega t}{\Omega} + \frac{c_0 \lambda z^3 (\cos \Omega t - 1) \sin(3\Omega t + 3\varphi)}{4\Omega^3}. \quad (4.27)$$

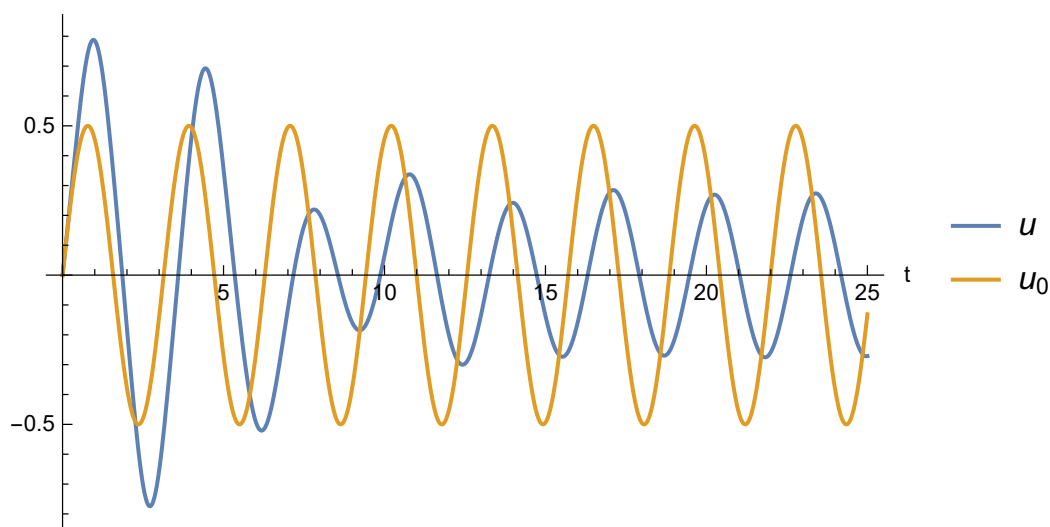
Na obr. 4.4 - 4.6 jsou znázorněna numerická řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) (modře) a řešení příslušné počáteční úlohy získaná metodou HAM nultého řádu (žlutě).



Obr. 4.4: Řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) a aproximace řešení dané počáteční úlohy metodou HAM multého řádu pro volbu parametrů  $b = 0.5$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $D = 8$ ,  $\Omega = 1$ .

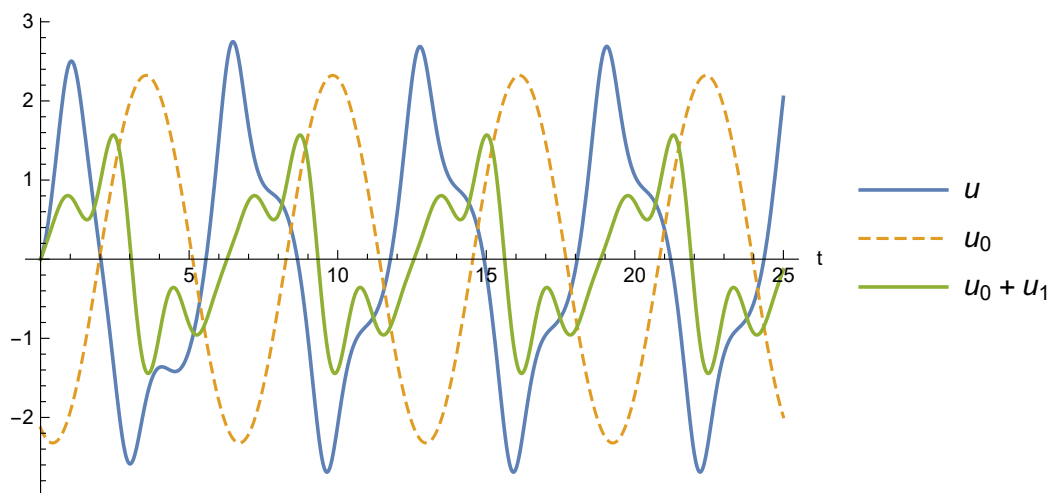


Obr. 4.5: Řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) a aproximace řešení dané počáteční úlohy metodou HAM multého řádu pro volbu parametrů  $b = 0.5$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $D = 8$ ,  $\Omega = 1$ .

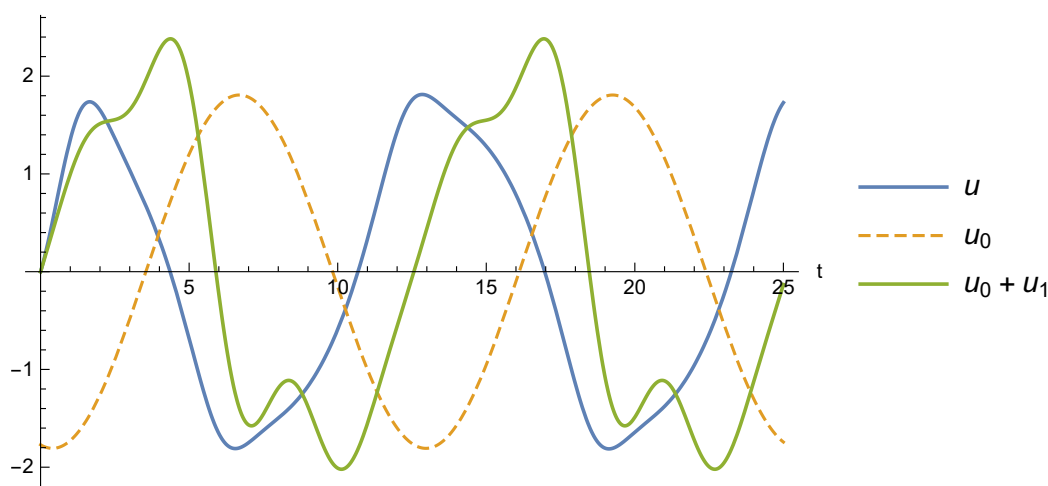


Obr. 4.6: Řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) a aproximace řešení dané počáteční úlohy metodou HAM multého řádu pro volbu parametrů  $b = 0.5$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $D = 8$ ,  $\Omega = 1$ .

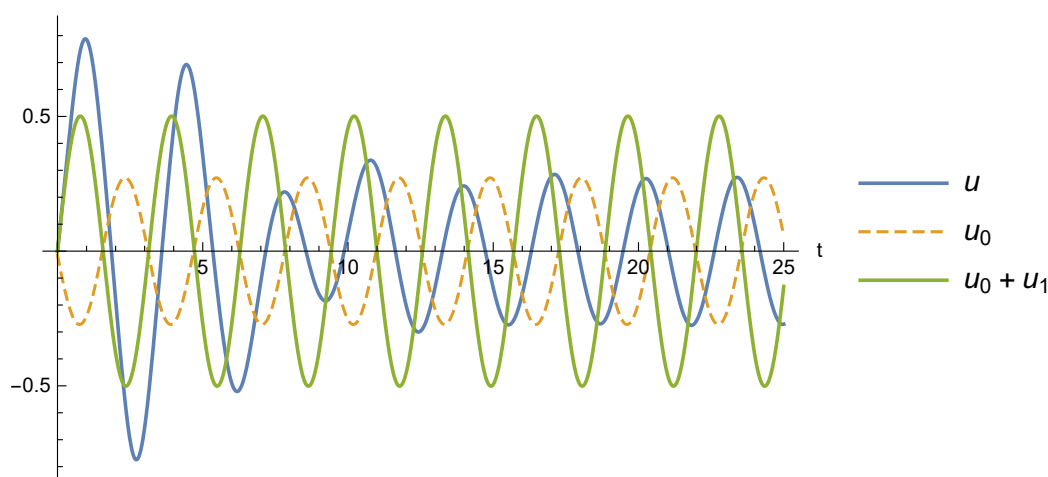
Na obr. 4.7 - 4.9 jsou znázorněna numerická řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) (modře), počáteční odhady řešení  $u_0$  (žlutě) a řešení příslušné počáteční úlohy získaná metodou HAM prvního řádu (zeleně). Počáteční odhad  $u_0$  je zde dán vztahem (4.18), kde parametry  $z$ ,  $\varphi$  jsme dopočítali ze vztahů (4.23) a (4.21).



Obr. 4.7: Řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2), počáteční odhad  $u_0$  a aproximace řešení dané počáteční úlohy metodou HAM prvního řádu pro volbu parametrů  $b = 0.5$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $D = 8$ ,  $\Omega = 1$ .



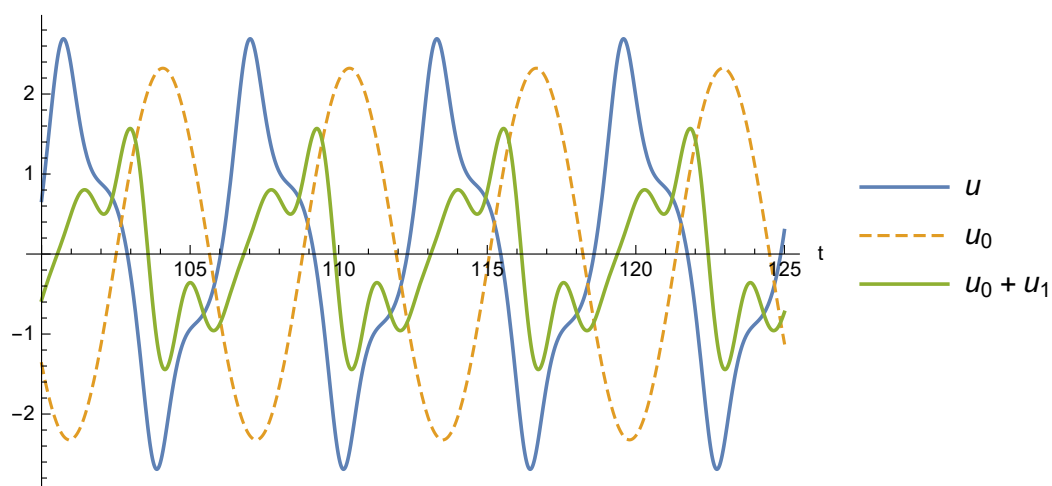
Obr. 4.8: Řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2), počáteční odhad  $u_0$  a aproximace řešení dané počáteční úlohy metodou HAM prvního řádu pro volbu parametrů  $b = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $D = 4$ ,  $\Omega = 0.5$ .



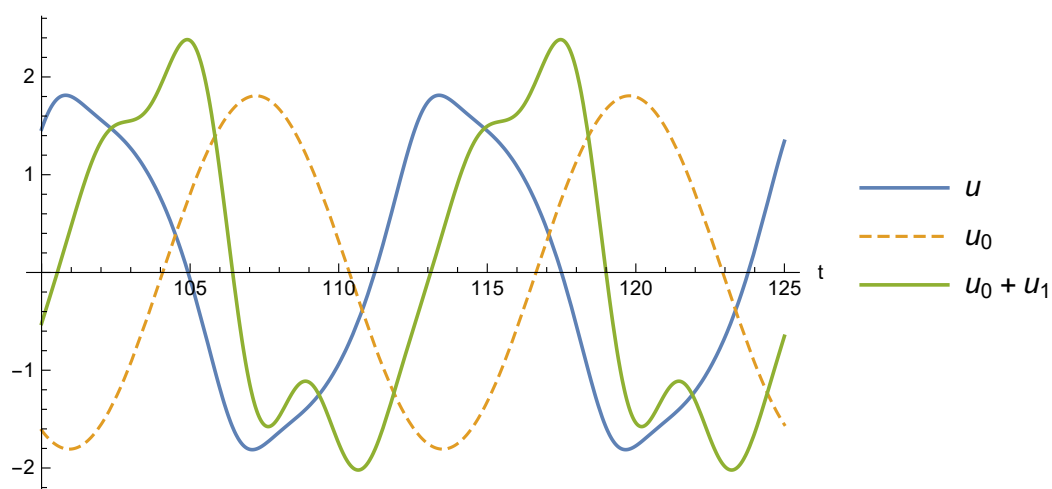
Obr. 4.9: Řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2), počáteční odhad  $u_0$  a aproximace řešení dané počáteční úlohy metodou HAM prvního řádu pro volbu parametrů  $b = 0.3$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 5$ ,  $D = 1$ ,  $\Omega = 2$ .

Na obr. 4.10 - 4.12 jsou znázorněna numerická řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) (modře), počáteční odhady řešení  $u_0$  (žlutě) a řešení příslušné počáteční úlohy získaná metodou HAM prvního řádu (zeleně) pro stejné volby parametrů jako na obr. 4.7 - 4.9. Řešení  $u(t)$  je vykresleno pro časy vzdálené od počátku, abychom zkoumali, jak se řešení chová, pokud již není zatíženo počátečními podmínkami. I přesto, že počáteční odhad  $u_0$  pro časy blízké nule není dobrou aproximací řešení  $u(t)$ , s rostoucím časem se amplituda počátečního odhadu  $u_0$  velmi blíží amplitudě řešení  $u(t)$ . Naopak aproximace řešení  $u_0 + u_1$  splňuje počáteční podmínky (4.2), chováním se ale přesnému řešení příliš neblíží. Přesnost aproximace silně závisí na vstupních parametrech rovnice (4.1), tato skutečnost může být způsobena „naivní“ volbou počátečních podmínek (4.26).

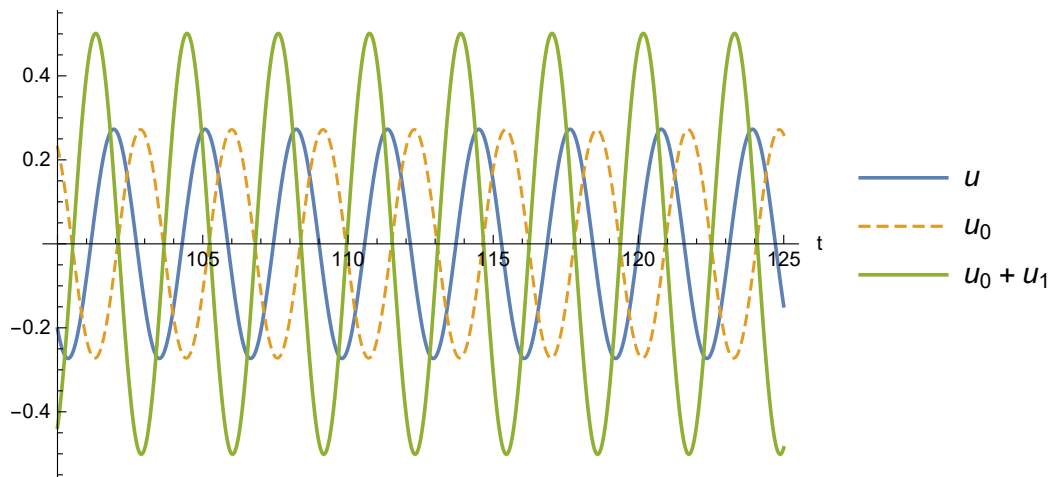




Obr. 4.10: Řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2), počáteční odhad  $u_0$  a aproximace řešení dané počáteční úlohy metodou HAM prvního řádu pro volbu parametrů  $b = 0.5$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $D = 8$ ,  $\Omega = 1$ .



Obr. 4.11: Řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2), počáteční odhad  $u_0$  a aproximace řešení dané počáteční úlohy metodou HAM prvního řádu pro volbu parametrů  $b = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $D = 4$ ,  $\Omega = 0.5$ .



Obr. 4.12: Řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2), počáteční odhad  $u_0$  a aproximace řešení dané počáteční úlohy metodou HAM prvního řádu pro volbu parametrů  $b = 0.3$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 5$ ,  $D = 1$ ,  $\Omega = 2$ . Počáteční odhad  $u_0$  a řešení  $u(t)$  jsou pro zobrazené časy až na posun téměř identické.

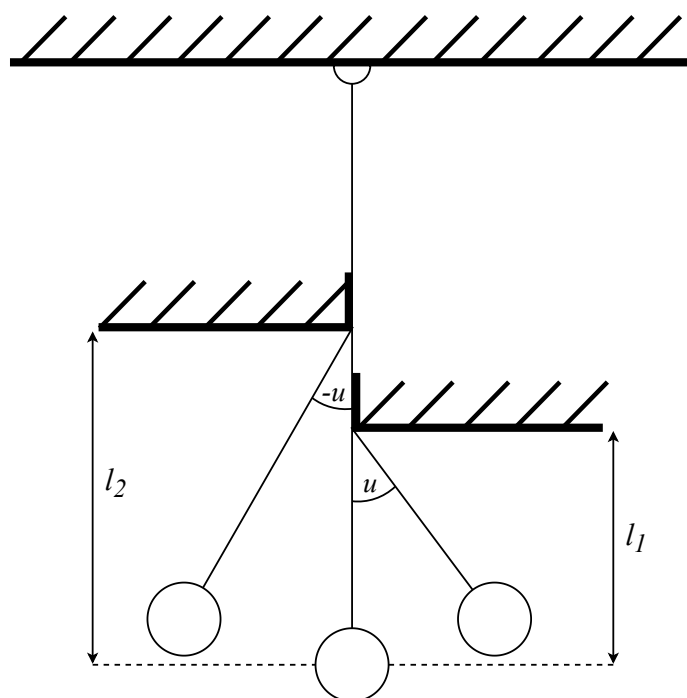
Obdobným způsobem můžeme v odvozování pokračovat pro druhou iteraci, výrazy se ale rychle stávají komplikovanými a zpřesnění, kterého tímto dosáhneme, není příliš veliké.

## Kapitola 5

# Asymetrický oscilátor

### 5.1 Matematické kyvadlo se zarážkami

Uvažujme matematické kyvadlo se dvěma zarážkami, které zkracují aktivní délku závěsu v závislosti na poloze hmotného bodu.



Obr. 5.1: Model matematického kyvadla se zarážkami.

Nechť úhel  $u$  je kladný v pravé polorovině a záporný v levé polorovině. Označme  $l_1$  aktivní délkou závěsu v pravé polorovině a  $l_2$  aktivní délkou závěsu v levé polorovině. Stejně jako v případě matematického kyvadla bez zarážek je délka závěsu neměnná, gravitační pole homogenní a odpor vzduchu společně se třením v závěsu zanedbány.

Pokud pohyb kyvadla rozdělíme na dva případy, tj.  $u > 0$ , resp.  $u < 0$  a provedeme stejné odvození jako v kapitole jednoduchého matematického kyvadla, můžeme psát

$$u > 0 : \quad u''(t) + \frac{g}{l_1} \sin u(t) = 0, \quad (5.1)$$

$$u < 0 : \quad u''(t) + \frac{g}{l_2} \sin u(t) = 0. \quad (5.2)$$

Označíme  $\alpha = \frac{g}{l_1}$ ,  $\beta = \frac{g}{l_2}$  a provedeme obdobnou linearizaci jako u jednoduchého matematického kyvadla

$$u > 0 : \quad u''(t) + \alpha u(t) = 0, \quad (5.3)$$

$$u < 0 : \quad u''(t) + \beta u(t) = 0. \quad (5.4)$$

Rovnice (5.3), (5.4) můžeme jednotně zapsat pomocí kladné a záporné části  $u$  a dostáváme výsledný vztah popisující pohyb matematického kyvadla se dvěma zarážkami ve tvaru

$$u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, \quad (5.5)$$

kde  $u^+(t) = \max\{u(t), 0\}$ ,  $u^-(t) = \max\{-u(t), 0\}$  a  $\alpha = \frac{g}{l_1}$ ,  $\beta = \frac{g}{l_2}$ .

## 5.2 Volné kmity

### 5.2.1 Netlumené kmity

Uvažujme počáteční úlohu pro homogenní nelineární diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru:

$$u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, \quad (5.6)$$

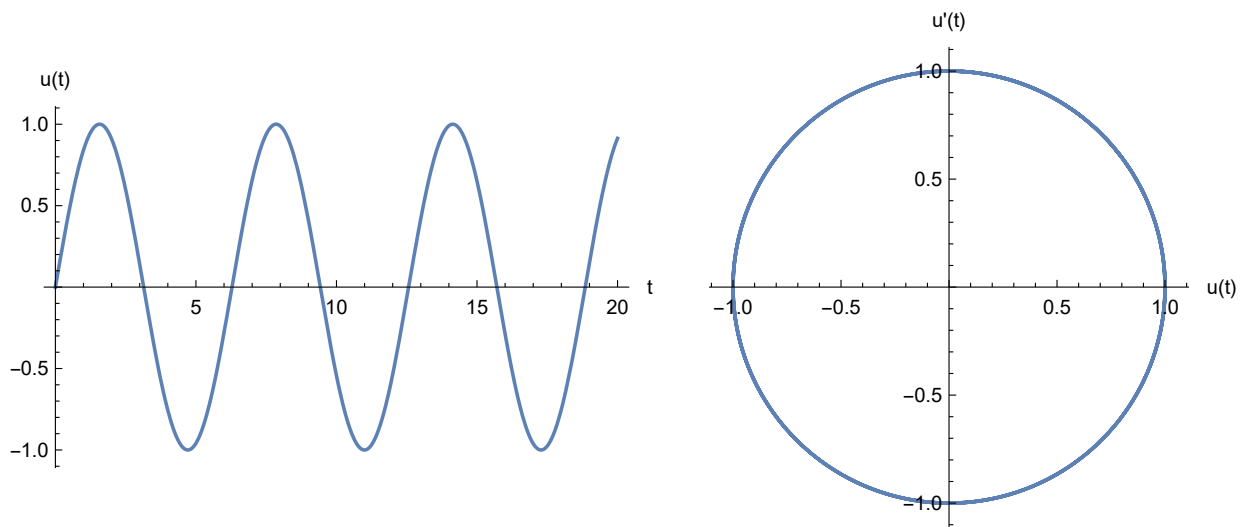
$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \quad (5.7)$$

Řešení lze analyticky popsat „lepením“ kladných a záporných částí, tj. postupně řešíme počáteční úlohu (5.6), (5.7) a navazujeme tak, abychom dostali hladké řešení (v bodech napojení sedí 1. i 2. derivace). Výsledné řešení dané počáteční úlohy má tvar:

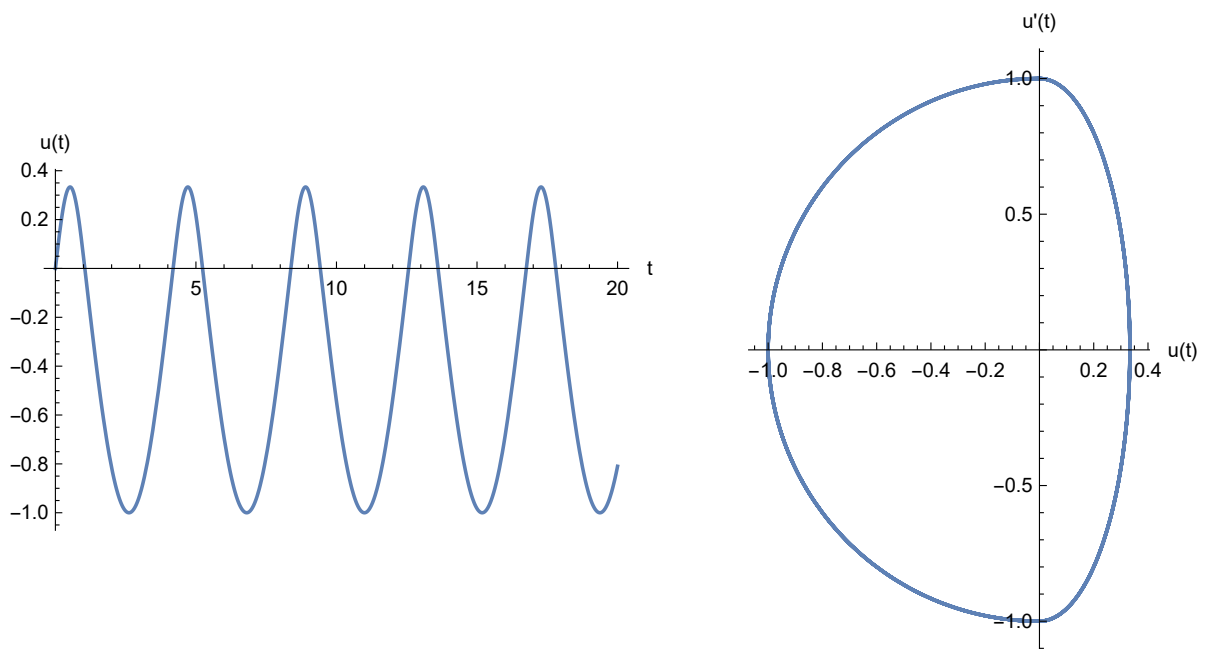
$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin \sqrt{\alpha} t & \text{pro } t \in \langle 0, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \rangle + kT, \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \sin \sqrt{\beta} (t - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}) & \text{pro } t \in \langle \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \rangle + kT, \end{cases} \quad (5.8)$$

kde  $T = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$  a  $k \in \mathbb{Z}$ .

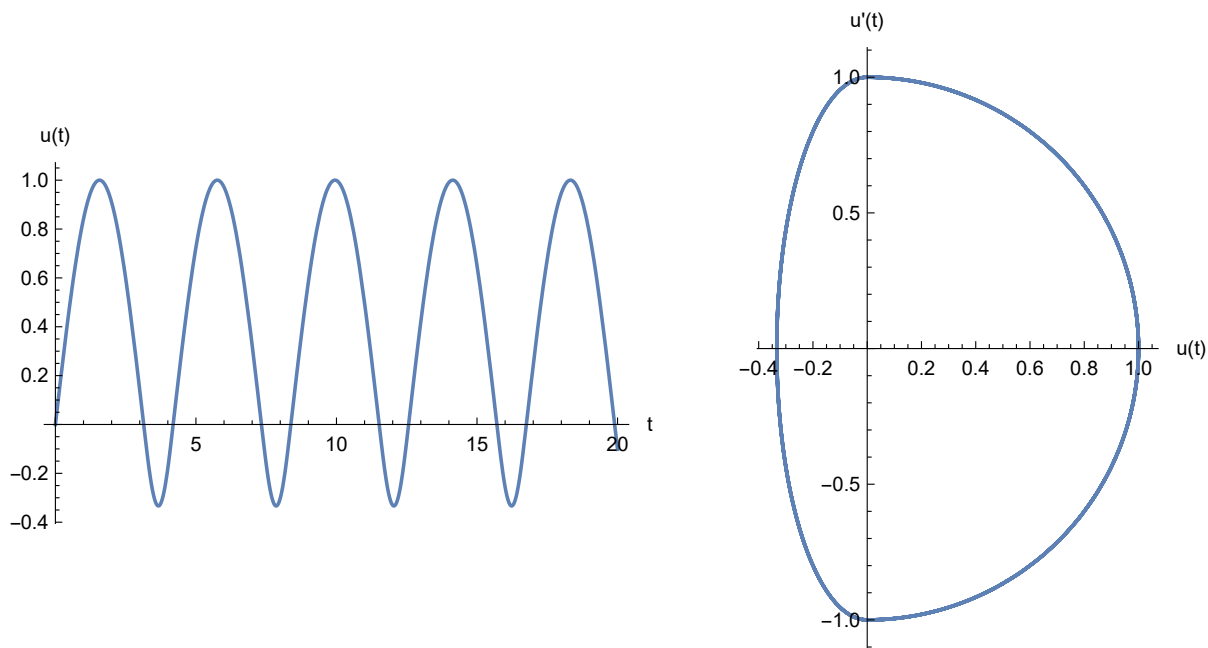
Na obr. 5.2 - 5.4 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (5.6), (5.7) společně se svými fázovými portréty pro danou volbu parametrů. Systém koná periodický pohyb s periodou  $T$  a kladné, resp. záporné části řešení  $u(t)$  mají konstantní amplitudu.



Obr. 5.2: Řešení počáteční úlohy (5.6), (5.7) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = \beta = 1$ . Pro tuto volbu parametrů přechází rovnice (5.6) na lineární rovnici a řešení  $u(t)$  koná harmonický kmitavý pohyb.



Obr. 5.3: Řešení počáteční úlohy (5.6), (5.7) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 9, \beta = 1$ . Parametr  $\alpha > \beta$ , a proto amplituda kladných kmitů je menší než amplituda záporných kmitů.



Obr. 5.4: Řešení počáteční úlohy (5.6), (5.7) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 9$ . Opačná volba parametrů  $\alpha$ ,  $\beta$  než na obr. 5.3. Analogicky v tomto případě je amplituda řešení pro kladné kmity větší než pro záporné kmity.

### 5.2.2 Tlumené kmity

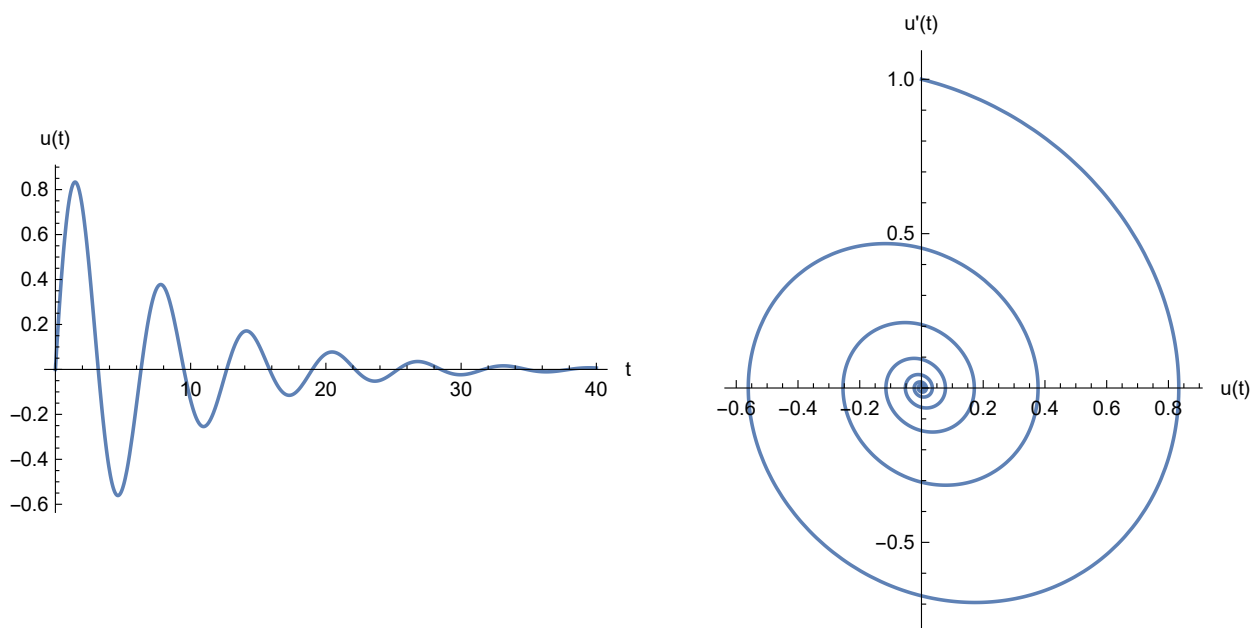
Uvažujme počáteční úlohu pro homogenní nelineární diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru:

$$u''(t) + bu'(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, \quad (5.9)$$

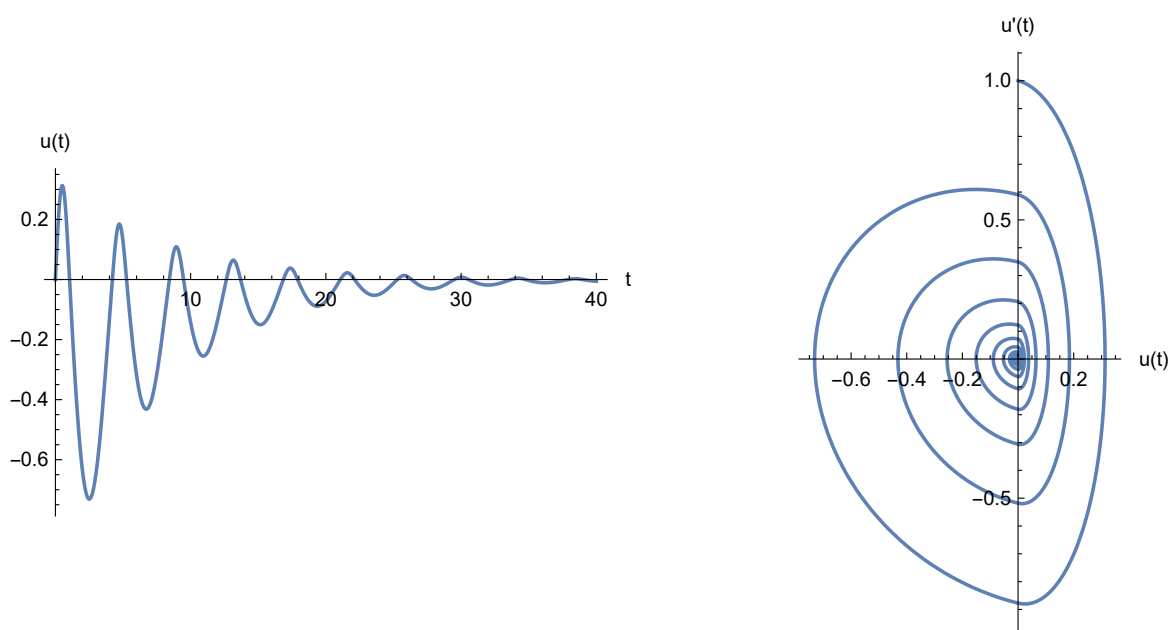
$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \quad (5.10)$$

Analytický tvar řešení lze obdobně jako pro volné netlumené kmity získat „lepením“ kladných a záporných částí.

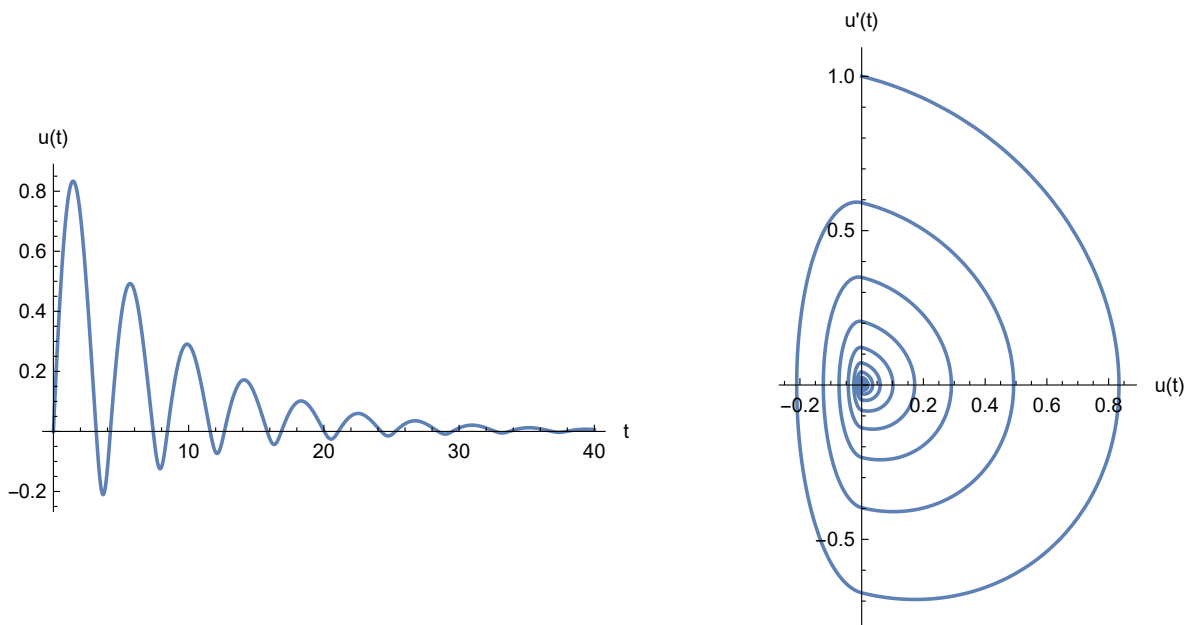
Na obr. 5.5 - 5.8 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (5.9), (5.10) společně se svými fázovými portréty pro danou volbu parametrů. Systém koná oscilatorický pohyb a amplituda řešení  $u(t)$  s rostoucím časem klesá. Výjimkou je obr. 5.8, kde řešení  $u(t)$  je díky volbě  $b$  utlumené dříve, než dojde k oscilatorickému pohybu.



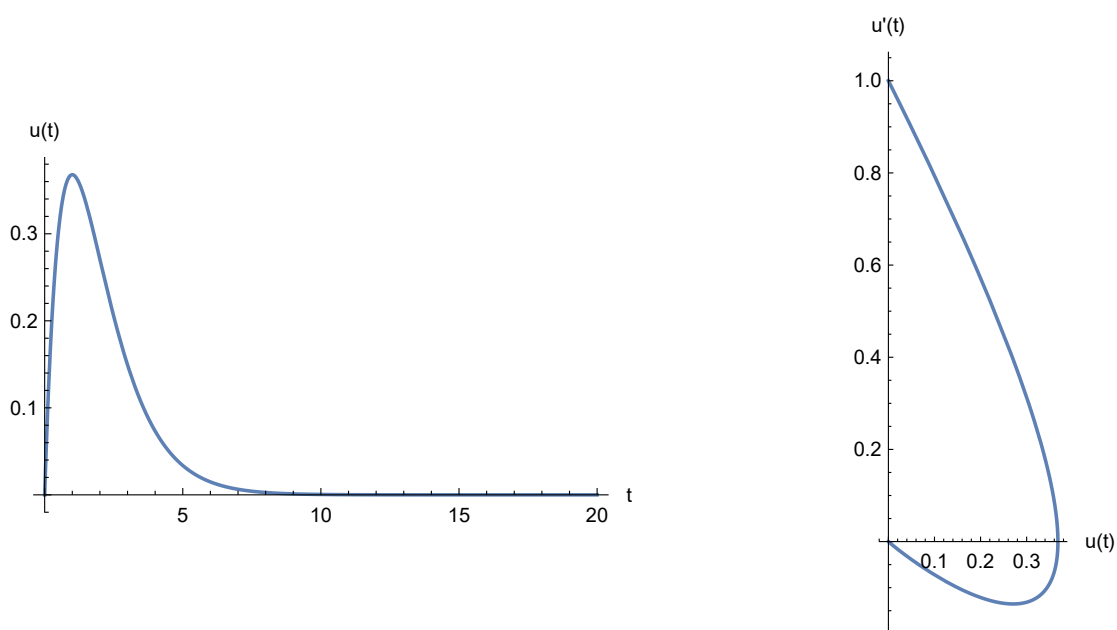
Obr. 5.5: Řešení počáteční úlohy (5.9), (5.10) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = \beta = 1$ ,  $b = 0.25$ . Pro volbu parametrů  $\alpha = \beta$  přechází rovnice (5.9) na lineární rovnici.



Obr. 5.6: Řešení počáteční úlohy (5.9), (5.10) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 9$ ,  $\beta = 1$ ,  $b = 0.25$ . Díky odlišným volbám  $\alpha$ ,  $\beta$  není řešení  $u(t)$  souměrné podle vodorovné osy.



Obr. 5.7: Řešení počáteční úlohy (5.9), (5.10) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 9$ ,  $b = 0.25$ .



Obr. 5.8: Řešení počáteční úlohy (5.9), (5.10) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $b = 2$ . Systém se pro takto zvolené tlumení  $b$  přiblíží své rovnovážné poloze již po velmi krátkém čase.



## 5.3 Vázané kmity

### 5.3.1 Netlumené kmity

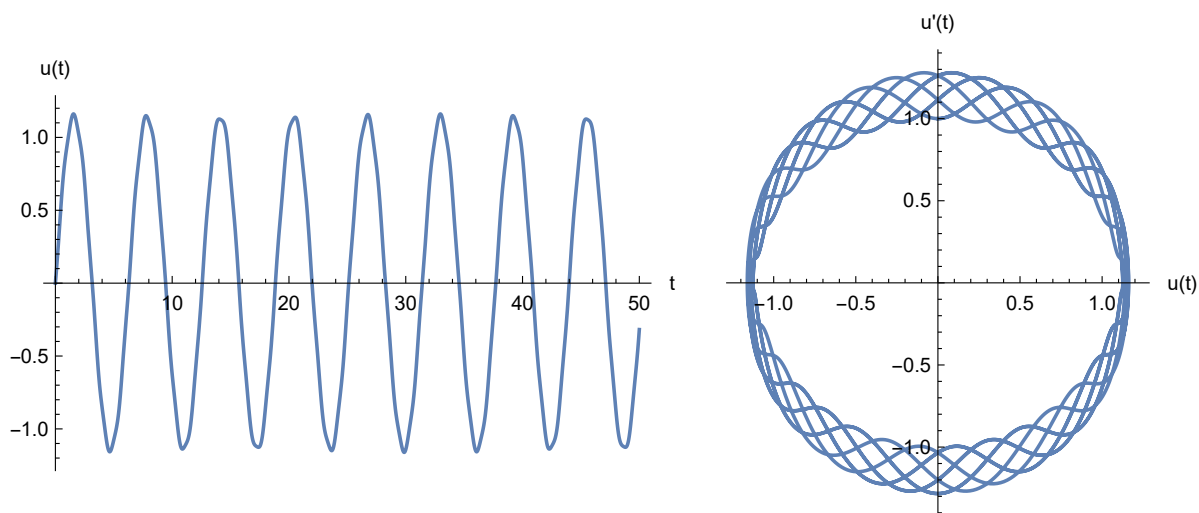
Uvažujme počáteční úlohu pro homogenní nelineární diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru:

$$u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = f(t), \quad (5.11)$$

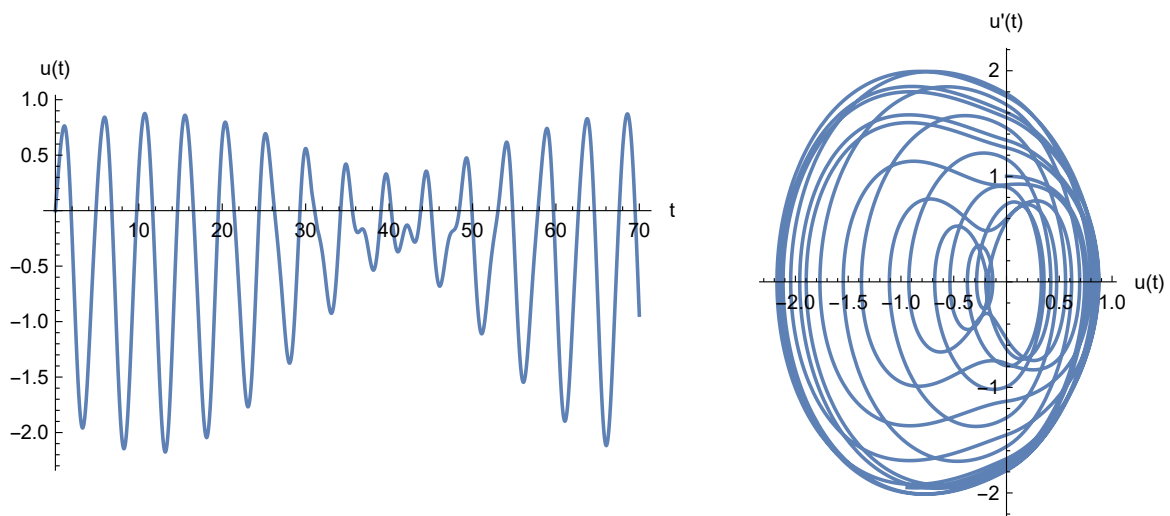
$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \quad (5.12)$$

#### Bez rezonance

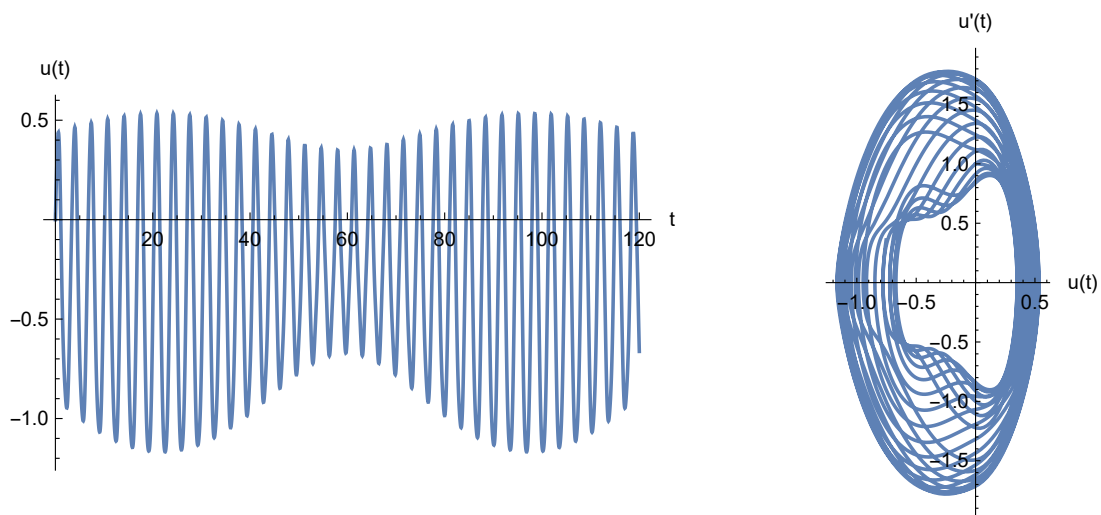
V tomto případě volíme funkci  $f$  na pravé straně rovnice (5.11) ve tvaru  $f(t) = D \sin \Omega$ , kde  $D, \Omega \in \mathbb{R}$ . Na obr. 5.9 - 5.15 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) společně se svými fázovými portréty pro danou volbu parametrů. Na obr. 5.10 - 5.15 se řešení  $u(t)$  svým chováním blíží záznějším. Podrobnější analýzou lze získat hodnoty parametrů, pro které skutečně dochází k záznějším.



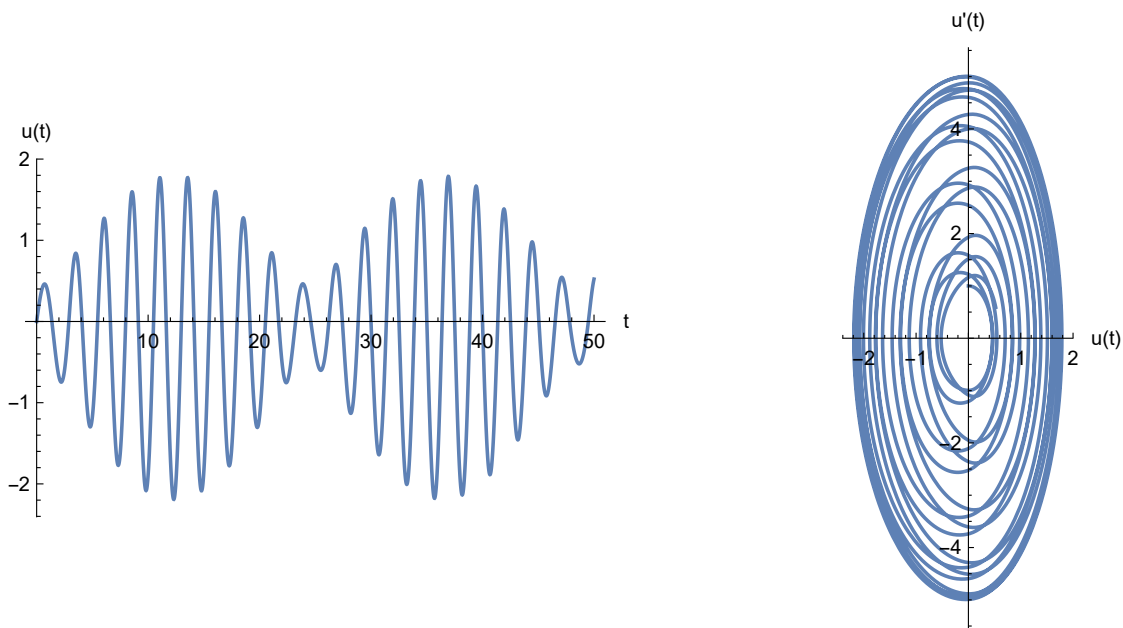
Obr. 5.9: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\Omega = 7.2$ ,  $D = 1$ .



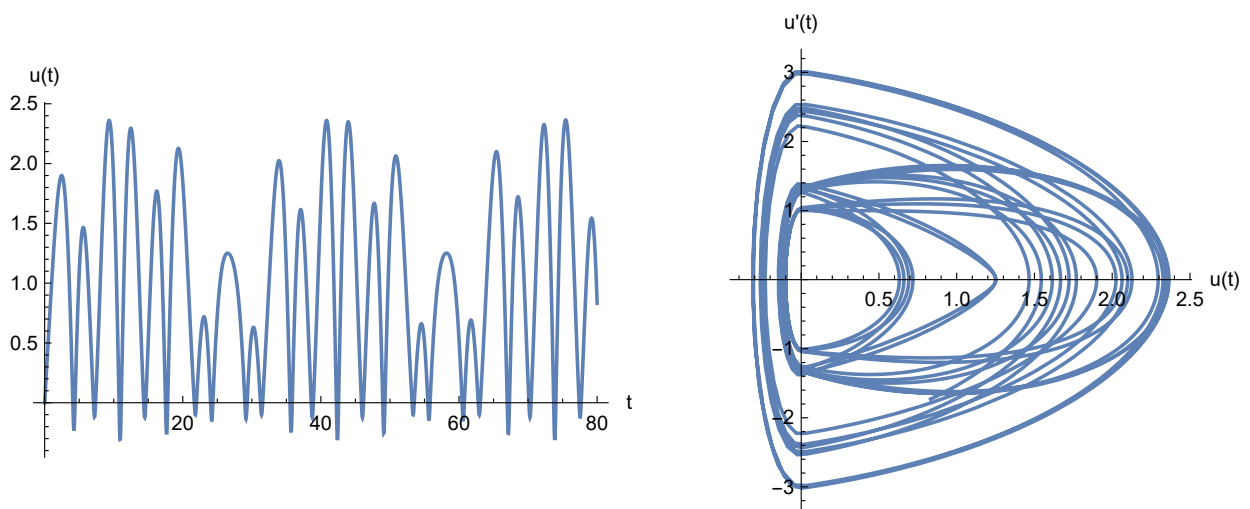
Obr. 5.10: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 3.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 2.5$ ,  $D = 1$ .



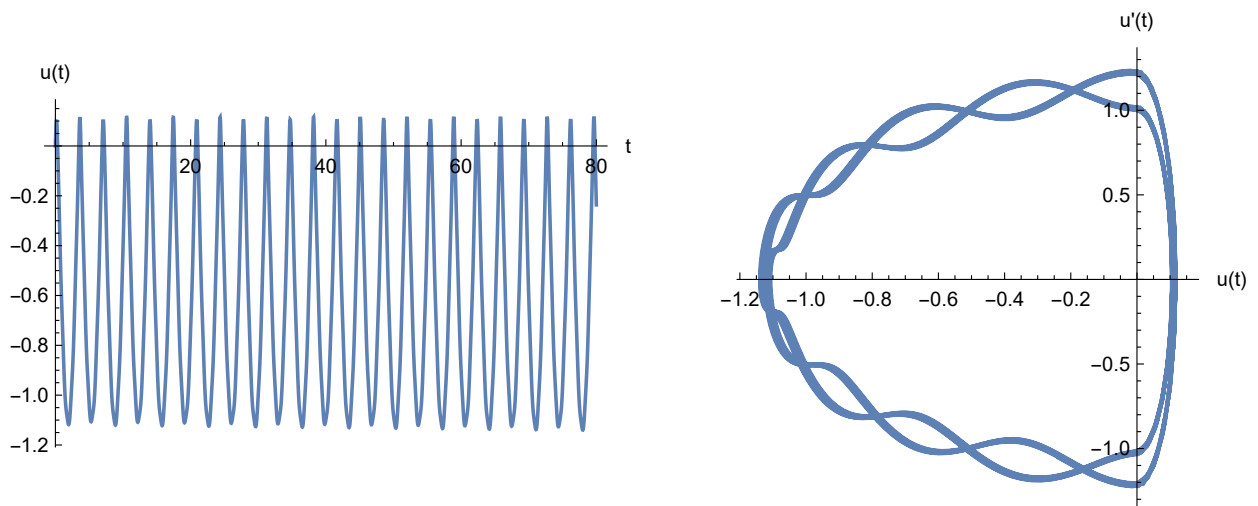
Obr. 5.11: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 8.2$ ,  $\beta = 1.9$ ,  $\Omega = 5.5$ ,  $D = 1$ .



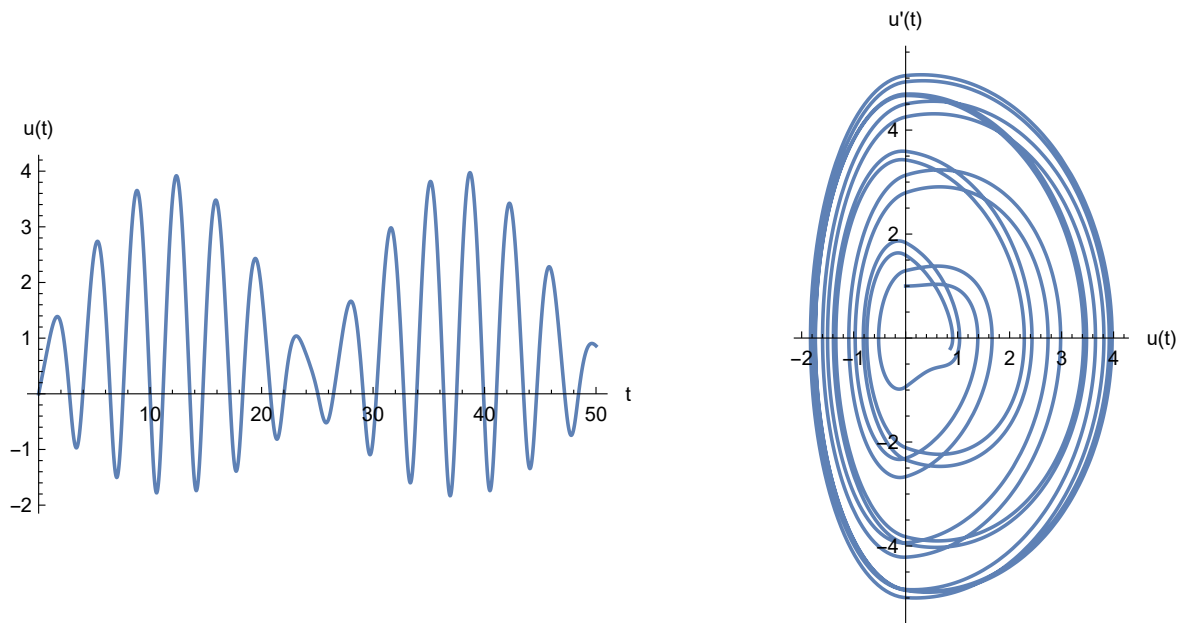
Obr. 5.12: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 7.2$ ,  $\beta = 4.9$ ,  $\Omega = \sqrt{7.2}$ ,  $D = 1$ .



Obr. 5.13: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 100$ ,  $\Omega = 1$ ,  $D = 1$ .



Obr. 5.14: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 100$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $D = 1$ .



Obr. 5.15: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 6.7$ ,  $\Omega = \frac{\sqrt{1.5} + \sqrt{6.7}}{2}$ ,  $D = 1$ . Speciální volba parametrů, kdy  $\Omega = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2}$ .

## V rezonanci

1) Nejprve volíme pravou stranu rovnice (5.11) jako  $f(t) = D \sin \Omega t$ . Pokud má docházet k rezonanci, musíme zajistit, aby frekvence nebuzeného systému byla shodná s frekvencí pravé

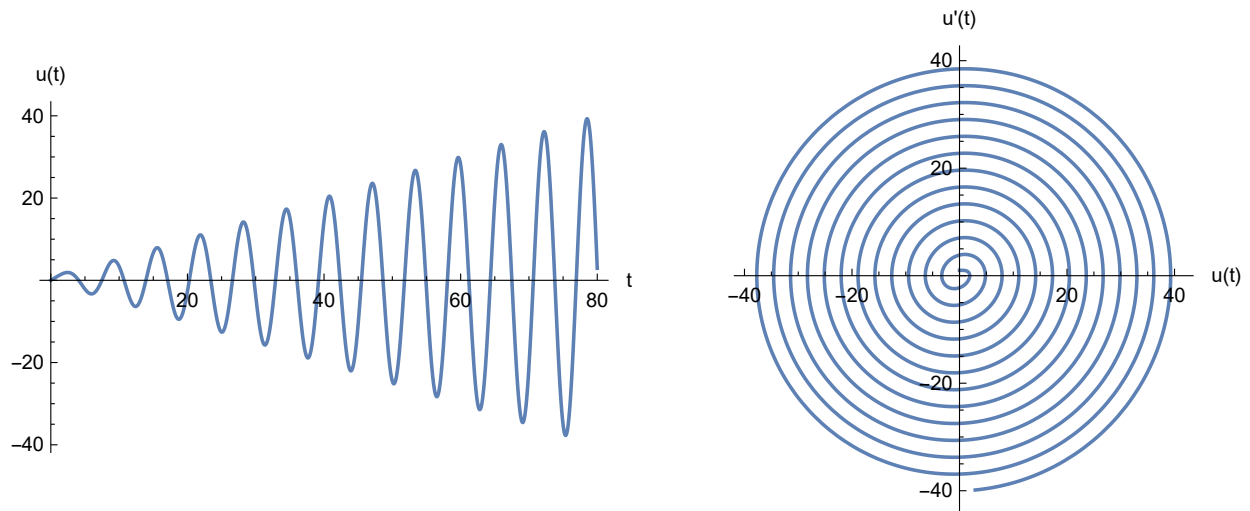
strany, tj.

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

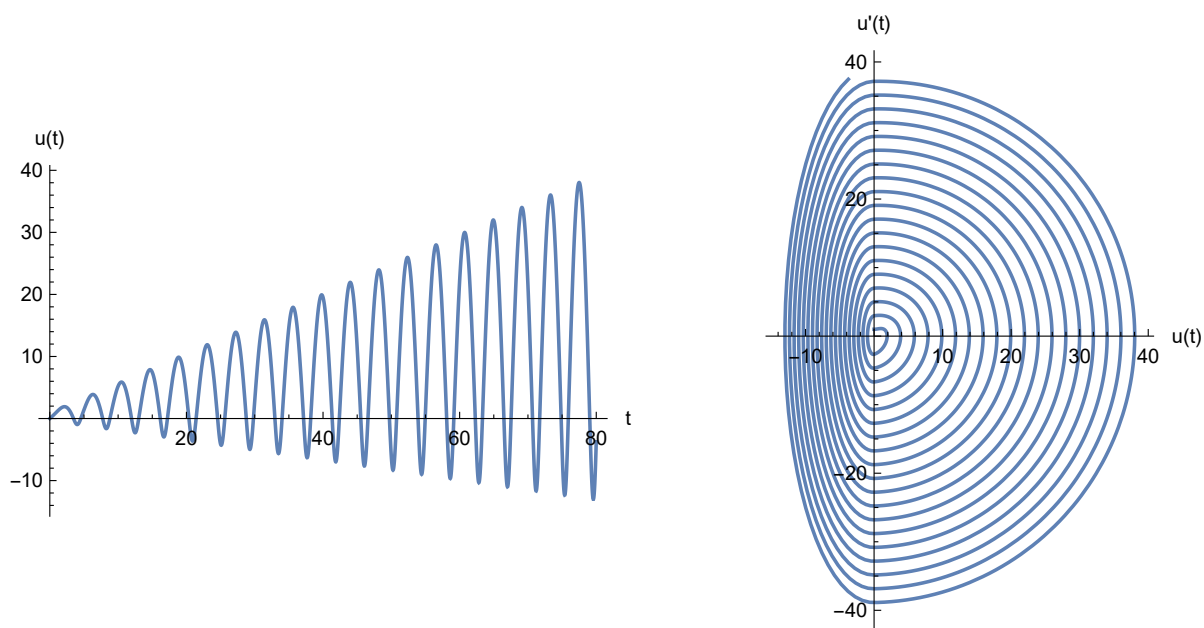
Po sečtení výrazů na levé straně rovnice, vykrácení  $\pi$  a vyjádření  $\Omega$ , získáváme podmínku pro zajištění rezonance ve tvaru

$$\Omega = \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}. \quad (5.13)$$

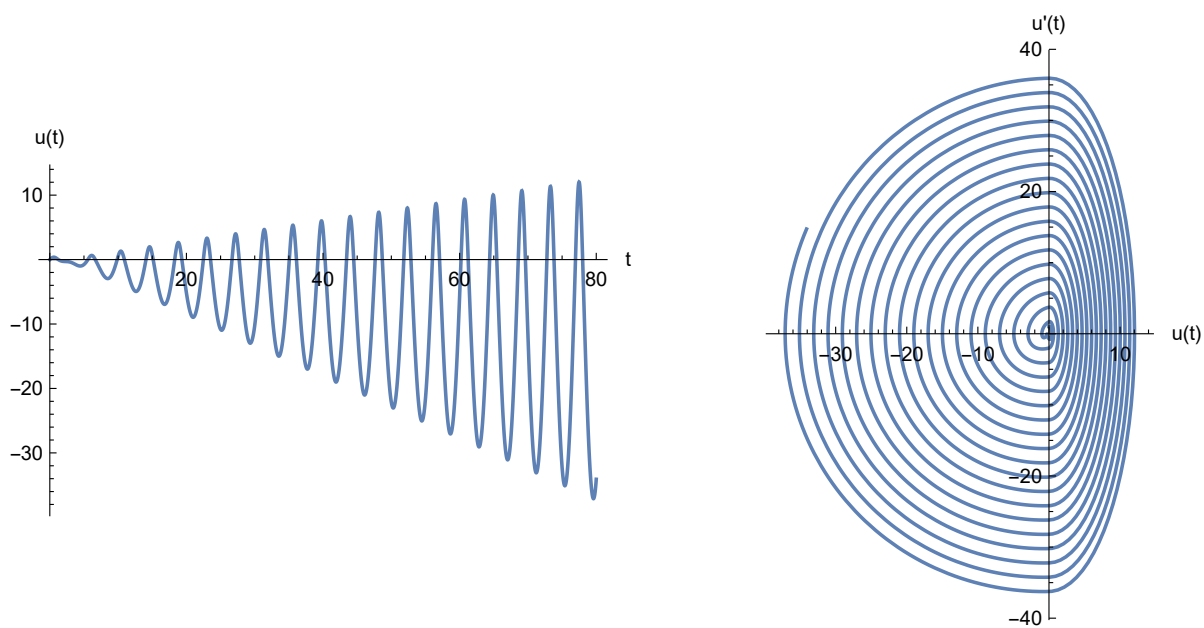
Na obr. 5.16 - 5.18 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) společně se svými fázovými portréty pro danou volbu parametrů. Jelikož dochází k rezonanci, amplituda výchylky roste nade všechny meze a řešení je neomezené.



Obr. 5.16: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = \beta = 1$ ,  $D = 1$ . Řešení je lineární, neboť pro  $\alpha = \beta$  je rovnice 5.11 lineární.



Obr. 5.17: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 9$ ,  $D = 1$ .



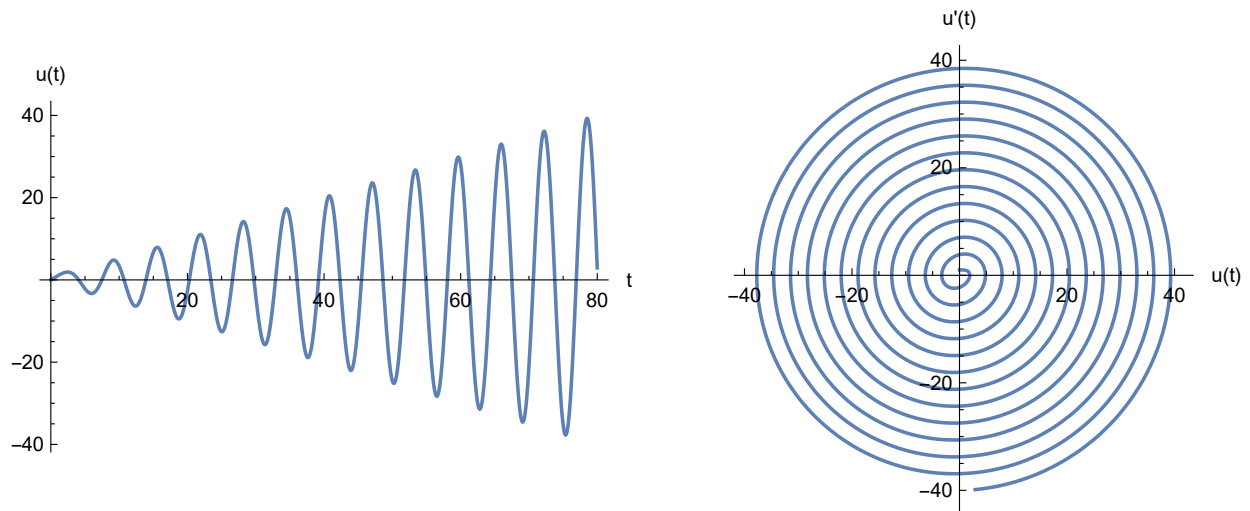
Obr. 5.18: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 9$ ,  $\beta = 1$ ,  $D = 1$ .

**2)** Další možnost, jak můžeme zkusit docílit rezonance, je následující. Volíme funkci  $f$  na pravé straně rovnice (5.11) rovnu řešení dané diferenciální rovnice bez pravé strany, značíme  $u_H(t)$ ,

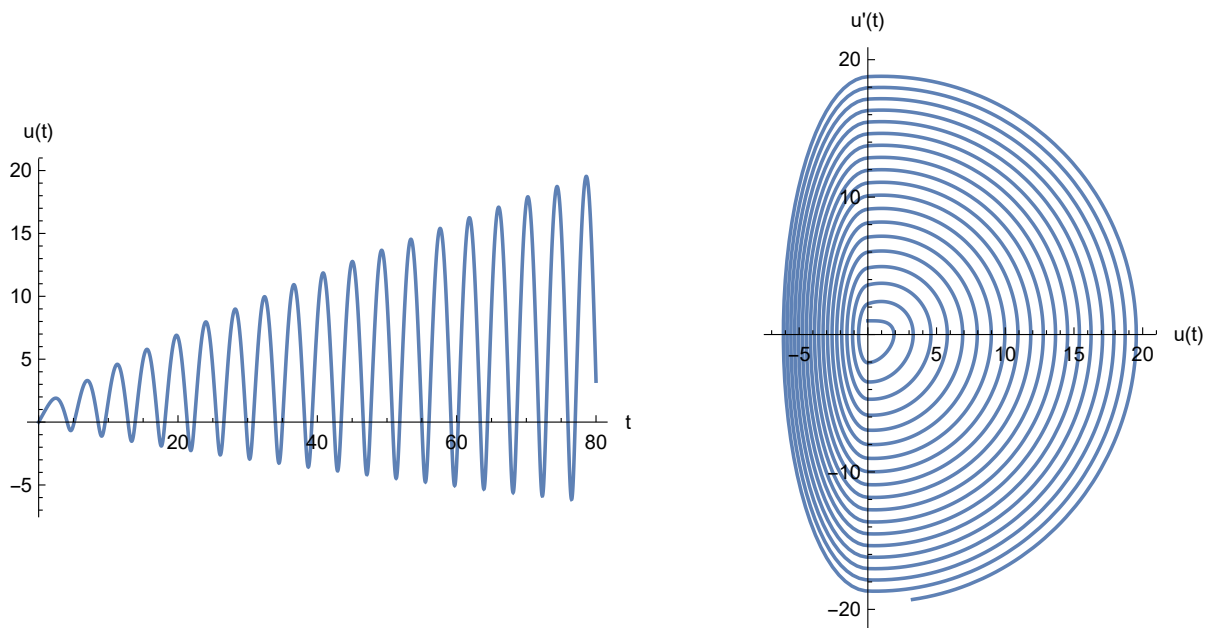
tj.

$$f(t) = u_H(t).$$

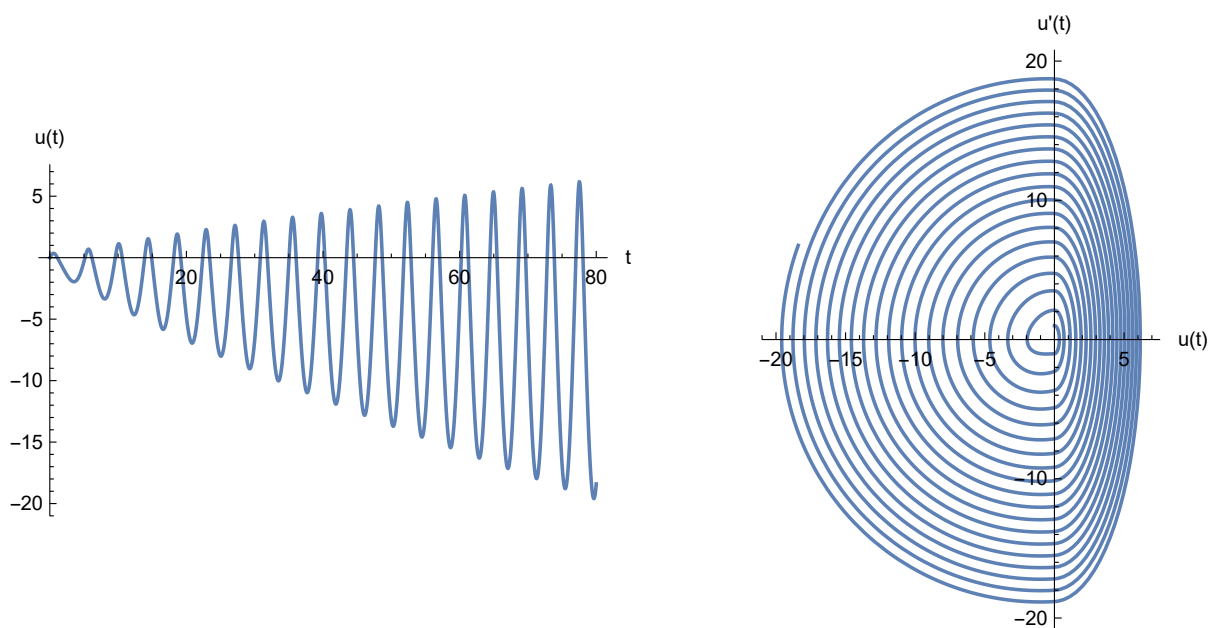
Na obr. 5.19 - 5.21 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) společně se svými fázovými portréty pro danou volbu parametrů. Řešení  $u_H(t)$ , které následně dosazujeme jako pravou stranu  $f(t)$ , hledáme numericky. Stejně jako v předchozí volbě funkce na pravé straně  $f(t)$  dochází k rezonanci a proto s rostoucím časem amplituda výchylky roste nade všechny meze a řešení je neomezené.



Obr. 5.19: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = \beta = 1$ . Díky volbě  $\alpha = \beta$  přechází rovnice (5.11) na lineární rovnici.



Obr. 5.20: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 1, \beta = 9$ .

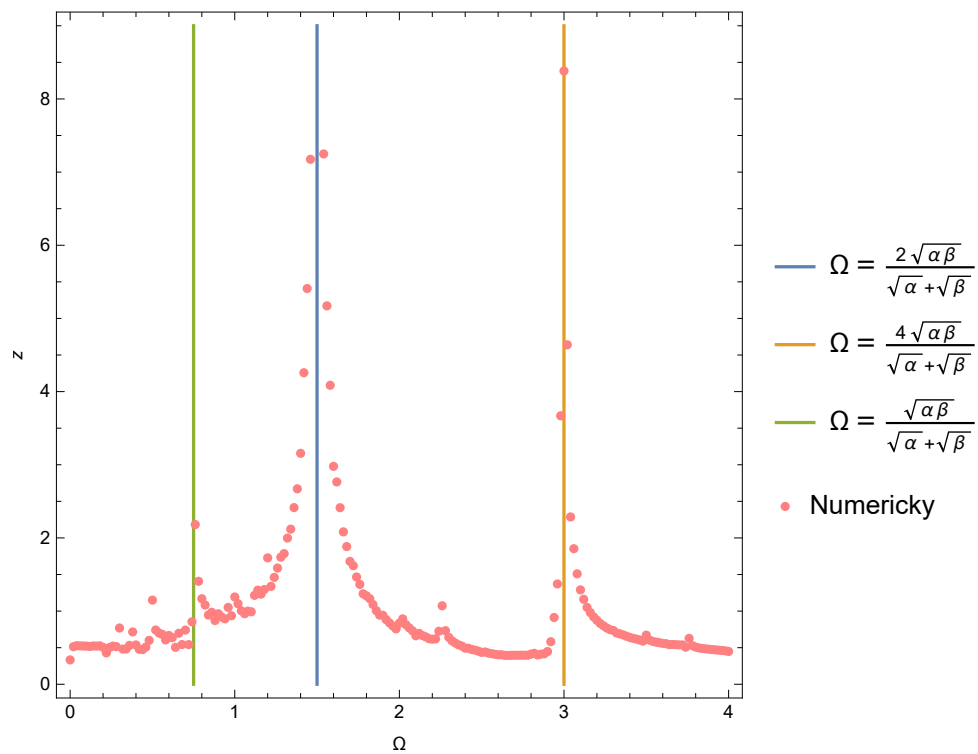


Obr. 5.21: Řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 9, \beta = 1$ .

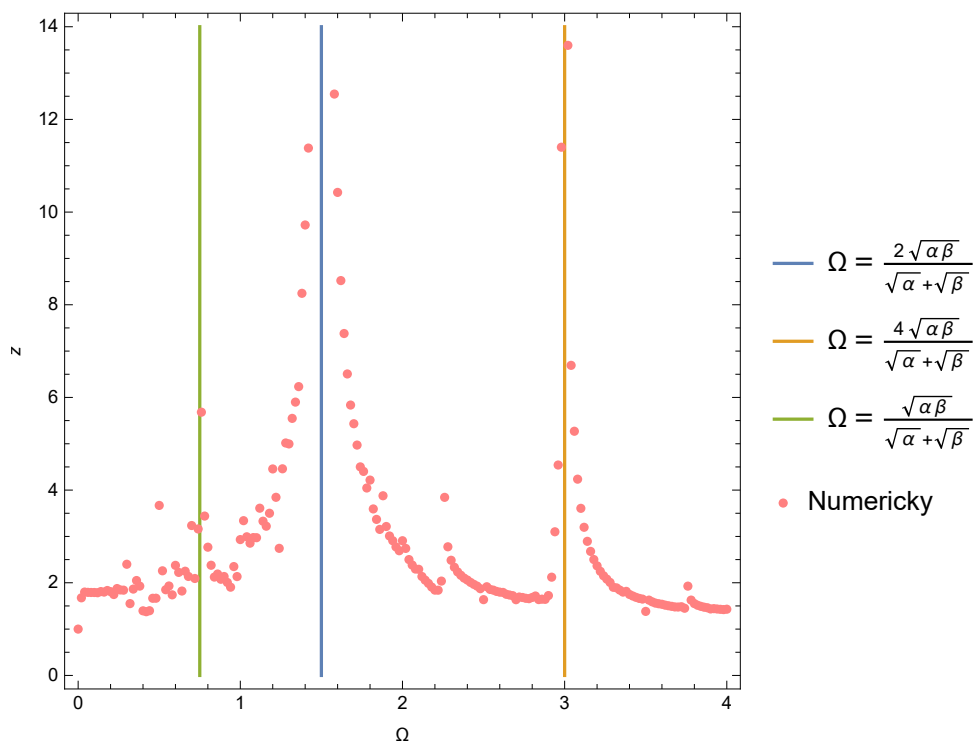
Na obr. 5.22 - 5.23 je znázorněna amplitudová charakteristika řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) získaná numerickým výpočtem (viz poznámka níže). Když se  $\Omega$  blíží k  $\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$  roste



absolutní hodnota amplitudy výchylky nade všechny meze. Je patrné, že k výraznějšímu nárůstu amplitudy dochází i pro další hodnoty  $\Omega$ , evidentně se jedná o násobky a zlomky původní volby  $\Omega$  ze vztahu (5.13).



Obr. 5.22: Amplitudová charakteristika řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) pro volbu parametrů  $\alpha = 9$ ,  $\beta = 1$ .



Obr. 5.23: Amplitudová charakteristika řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) pro volbu parametrů  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 9$ .

**Poznámka 5.3.1.** Numerické hodnoty na obr. 5.22 - 5.23 byly získány za pomoci software *Mathematica*. Nalezené hodnoty jsou extrémní hodnoty amplitudy řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) v závislosti na parametru  $\Omega$  pro časy z intervalu  $\langle 100, 200 \rangle$ . Maxima byla hledána pro časy vzdálené od počátku, abychom zmírnili vliv počátečních podmínek na hodnoty amplitudy.

### 5.3.2 Tlumené kmity

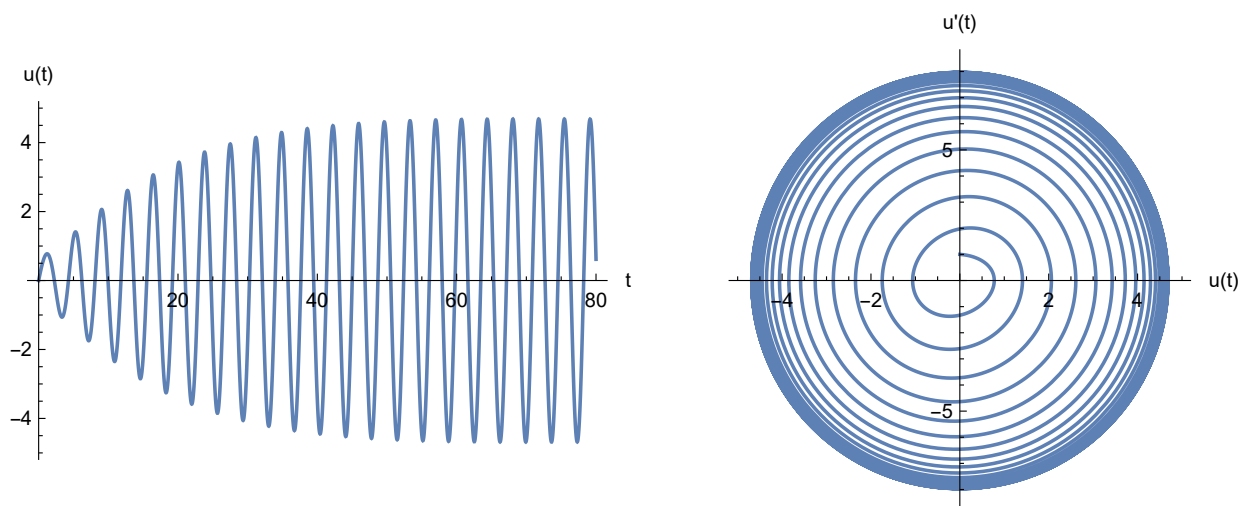
Uvažujme počáteční úlohu pro homogenní nelineární diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru:

$$u''(t) + bu'(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = f(t), \quad (5.14)$$

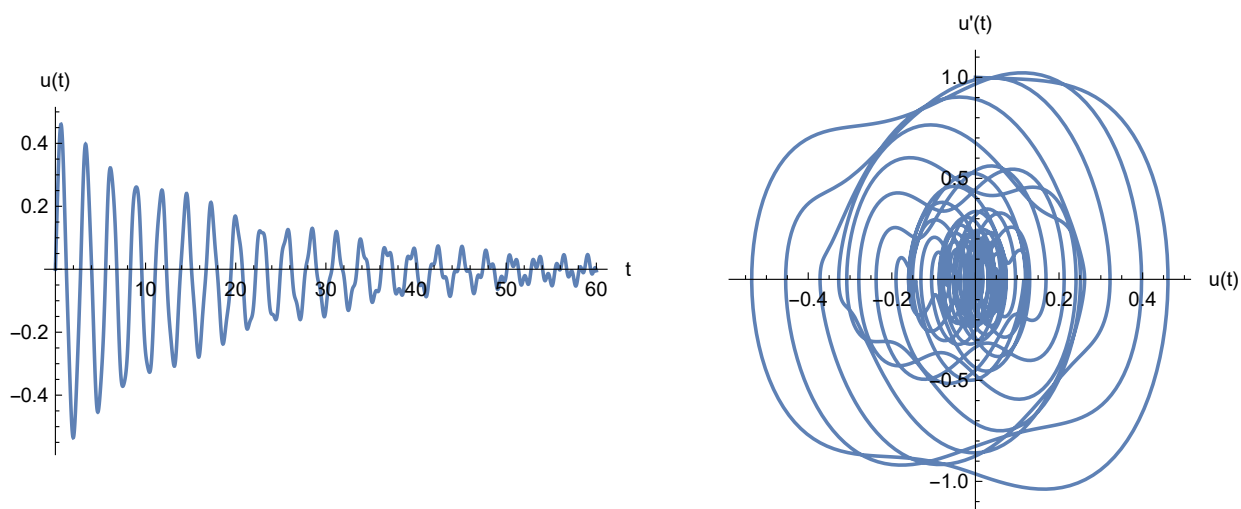
$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \quad (5.15)$$

#### Bez rezonance

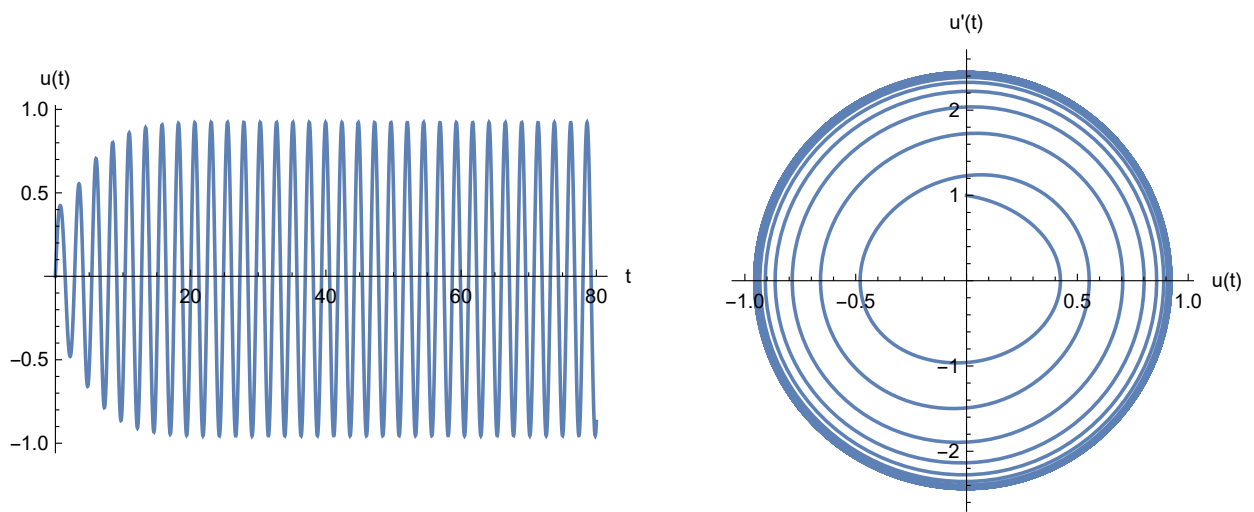
V tomto případě volíme funkci  $f$  na pravé straně rovnice (5.14) ve tvaru  $f(t) = D \sin \Omega t$ , kde  $D, \Omega \in \mathbb{R}$ . Na obr. 5.24 - 5.30 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) společně se svými fázovými portréty pro danou volbu parametrů.



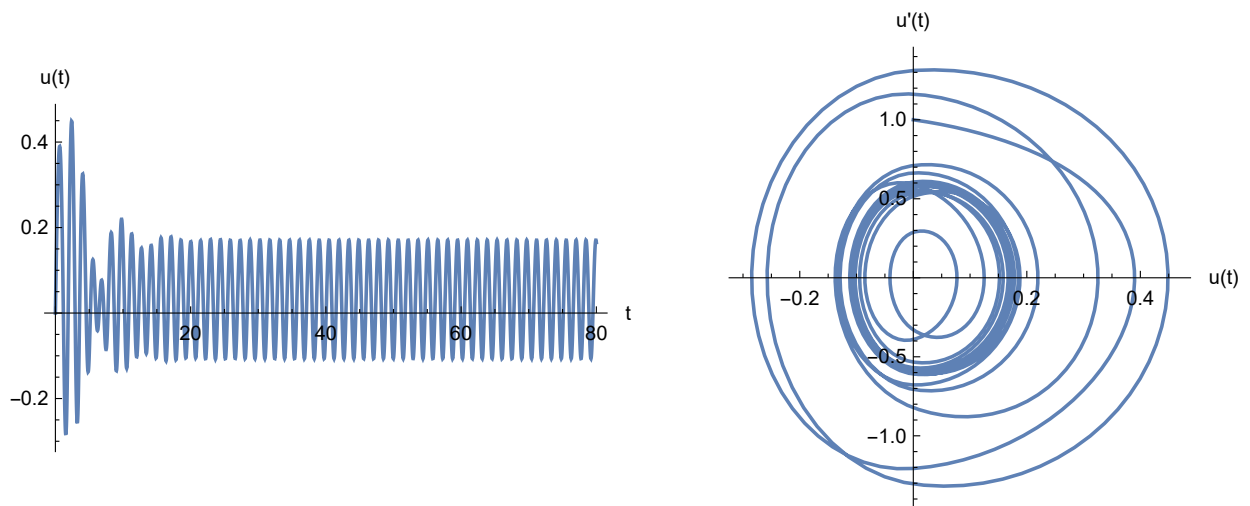
Obr. 5.24: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 1.7$ ,  $\beta = \Omega = 3$ ,  $b = 0.1$ ,  $D = 1$ .



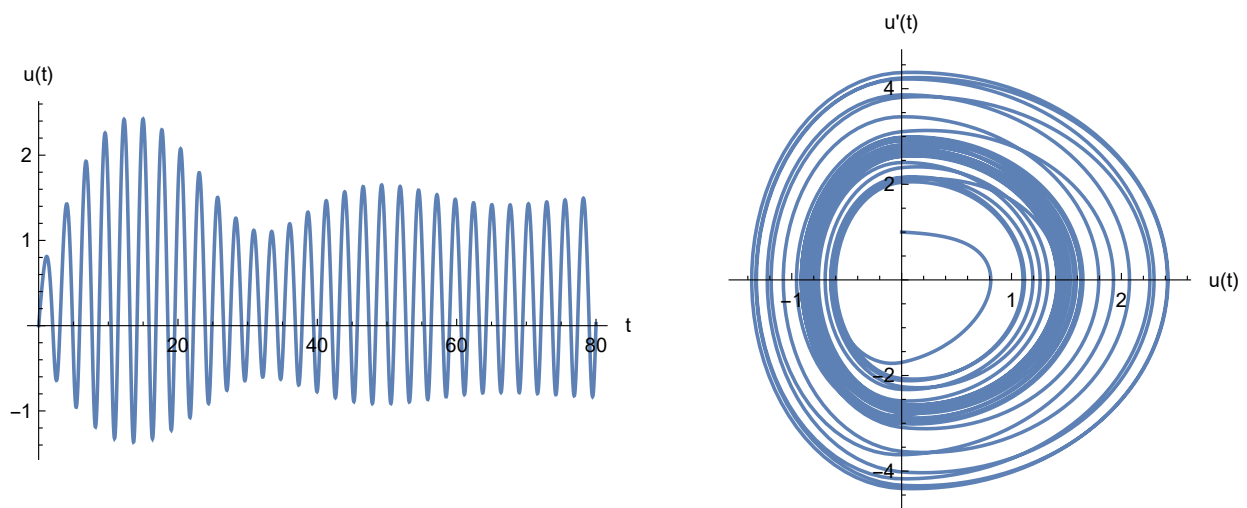
Obr. 5.25: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 7.2$ ,  $\beta = 6.5$ ,  $\Omega = 4.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $D = 1$ .



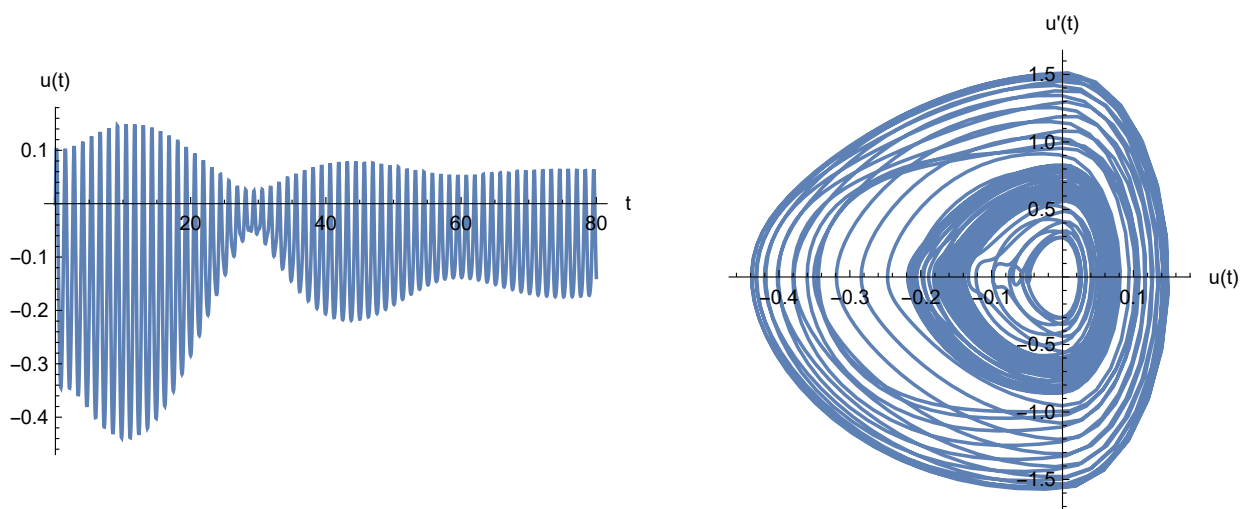
Obr. 5.26: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 6.8$ ,  $\beta = 6.3$ ,  $\Omega = \sqrt{6.8}$ ,  $b = 0.4$ ,  $D = 1$ .



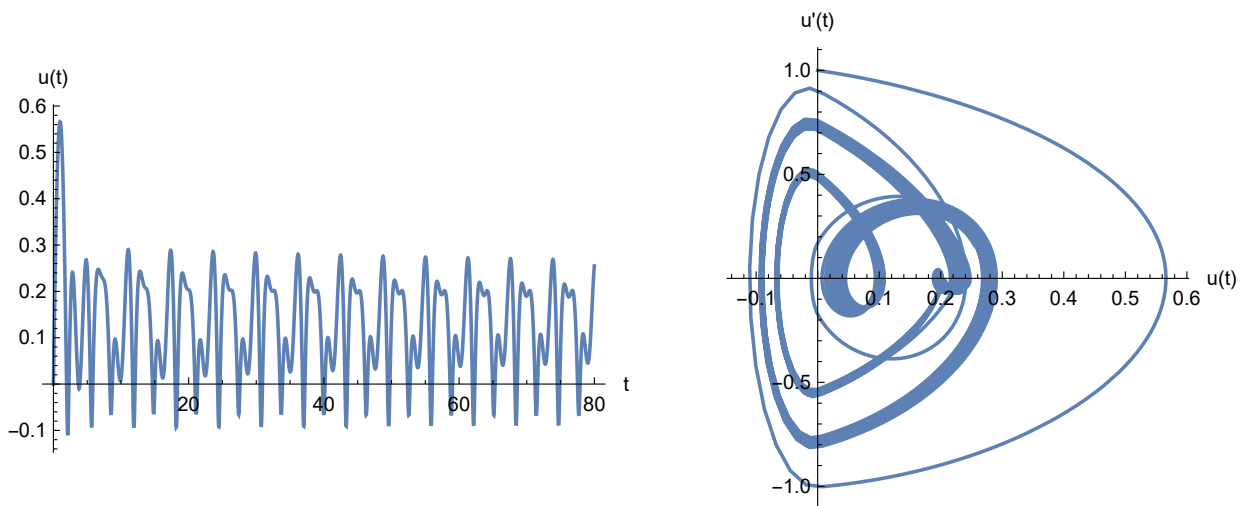
Obr. 5.27: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 8$ ,  $\beta = 18.5$ ,  $\Omega = \sqrt{18.5}$ ,  $b = 0.5$ ,  $D = 1$ .



Obr. 5.28: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 9.25$ ,  $\Omega = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{9.25}}{2}$ ,  $b = 0.1$ ,  $D = 1$ .



Obr. 5.29: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 100$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $b = 0.1$ ,  $D = 1$ .



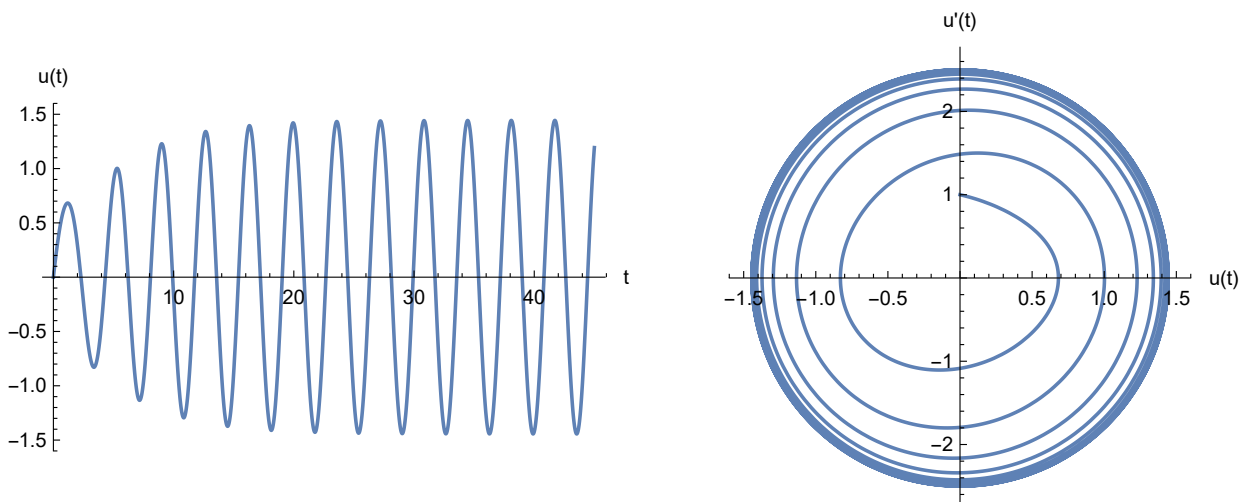
Obr. 5.30: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 90$ ,  $\Omega = 2$ ,  $b = 0.435$ ,  $D = 1$ .

### V rezonanci

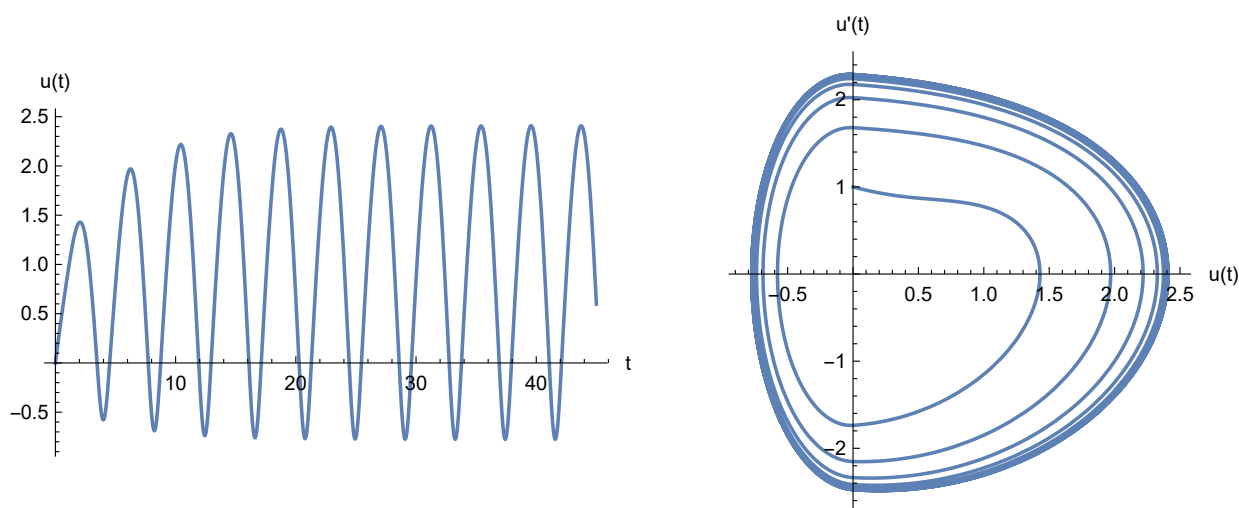
1) Nejprve volíme pravou stranu rovnice (5.14) jako  $f(t) = D \sin \Omega t$ . Identicky jako pro případ bez tlumení, pokud má docházet k rezonanci, musí frekvence  $\Omega$  splňovat následující podmínku

$$\Omega = \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}. \quad (5.16)$$

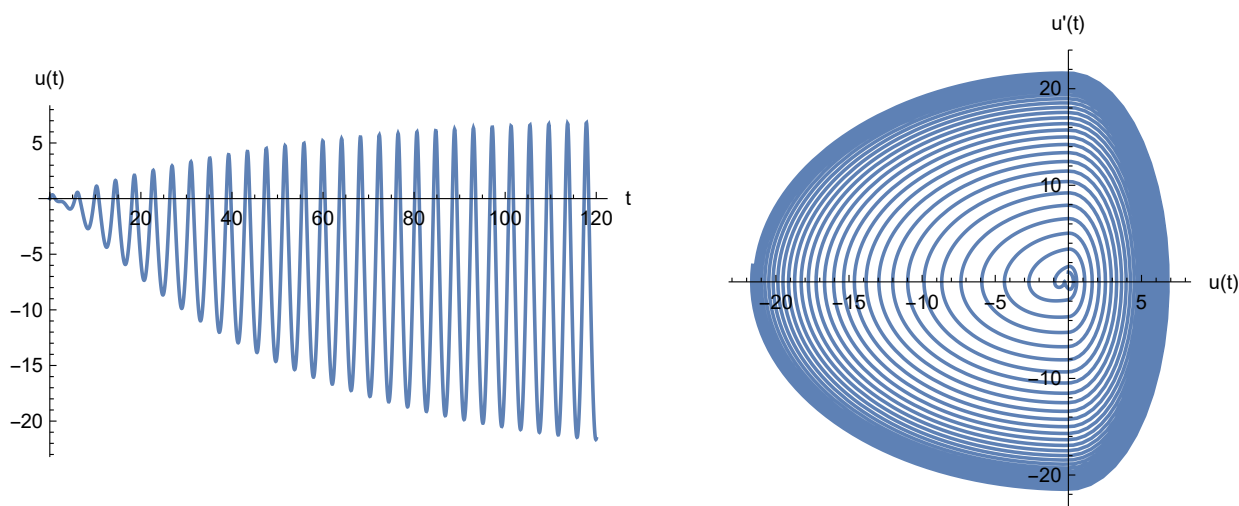
Na obr. 5.31 - 5.33 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) společně se svými fázovými portréty pro danou volbu parametrů. Systém koná oscilatorický pohyb, amplituda výchylky řešení  $u(t)$  se po čase ustálí na pevné hodnotě.



Obr. 5.31: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = \beta = 3$ ,  $b = 0.4$ ,  $D = 1$ .



Obr. 5.32: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 9.5$ ,  $b = 0.4$ ,  $D = 1$ .



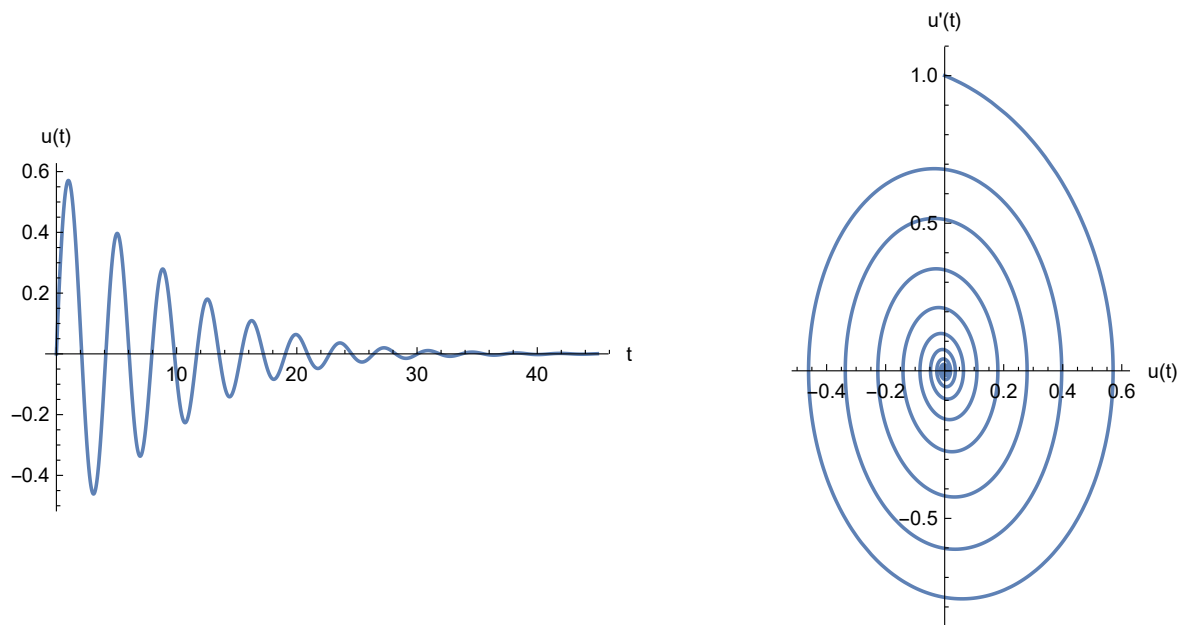
Obr. 5.33: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 1$ ,  $b = 0.04$ ,  $D = 1$ . V tomto případě díky malému tlumení  $b$  dojde k ustálení amplitudy po značně delším čase než v předchozích případech.

**2)** Jako druhou možnost, jak docílit rezonance, opět volíme funkci  $f$  na pravé straně rovnice (5.11) jako numerické řešení dané diferenciální rovnice bez pravé strany, značíme  $u_H(t)$ , tj.

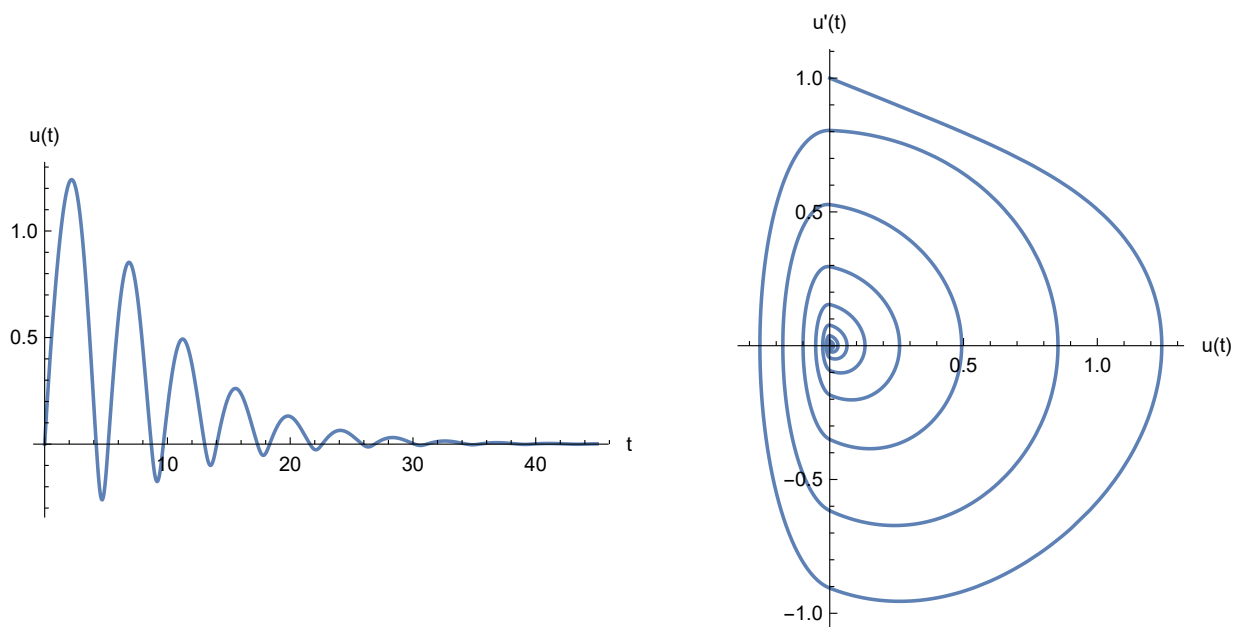
$$f(t) = u_H(t).$$

Na obr. 5.19 - 5.21 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) společně se svými fázovými portréty pro danou volbu parametrů. Abychom zajistili, že bude docházet k rezonanci, volíme funkci  $f$  na pravé straně rovnice (5.14) jako řešení dané diferenciální rovnice bez pravé strany.

Na obr. 5.34 - 5.37 jsou znázorněna řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) společně se svými fázovými portréty pro danou volbu parametrů. Systém koná oscilatorický pohyb a amplituda výchylky řešení  $u(t)$  s rostoucím časem klesá k nule.

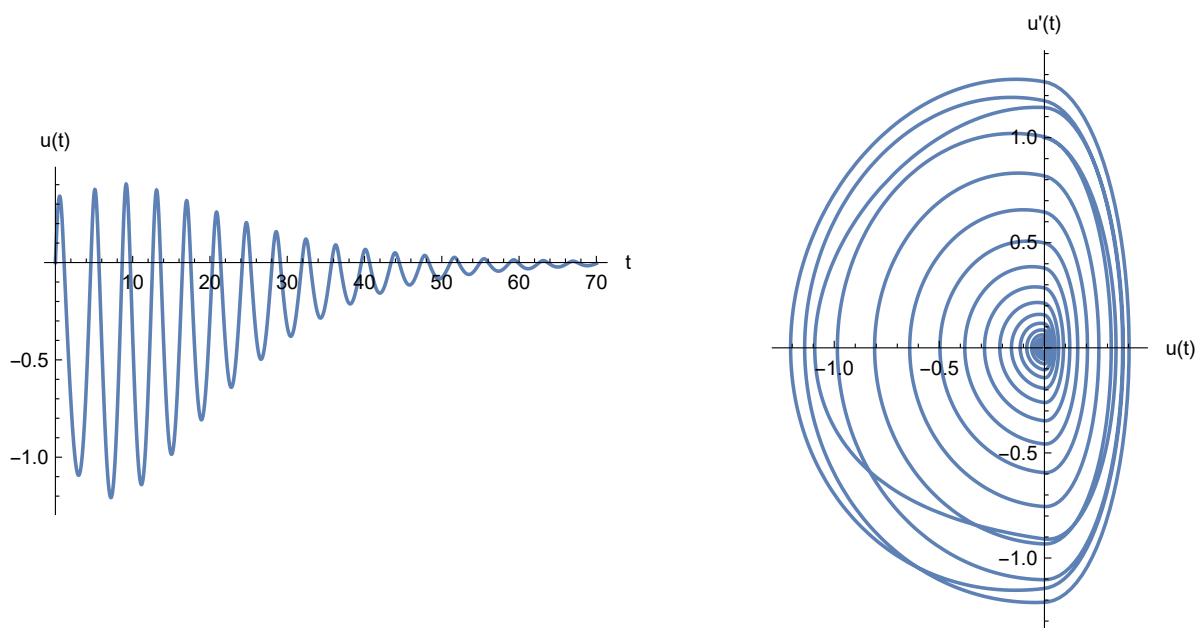


Obr. 5.34: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = \beta = 3$ ,  $b = 0.4$ .

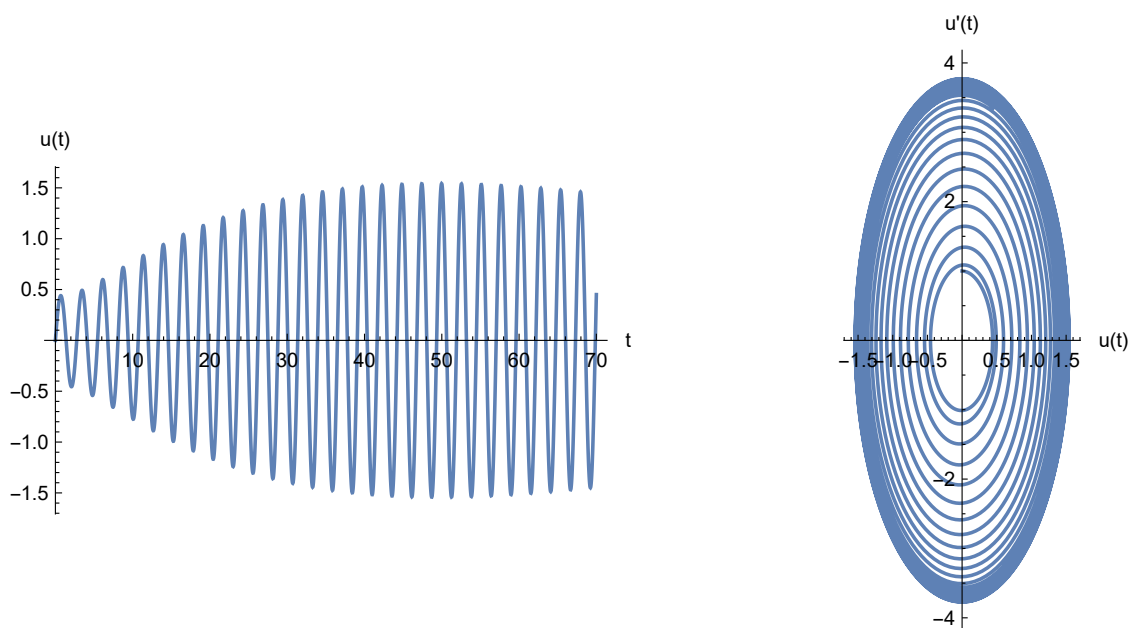


Obr. 5.35: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 9.5$ ,  $b = 0.4$ .





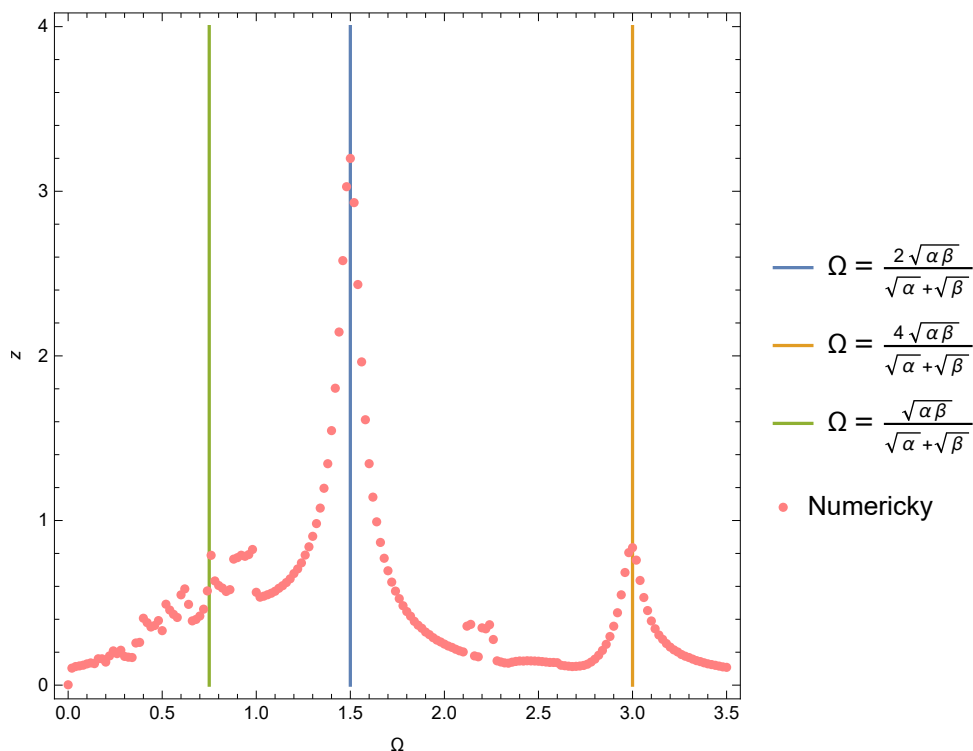
Obr. 5.36: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 8.7$ ,  $\beta = 1.3$ ,  $b = 0.2$ .



Obr. 5.37: Řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) a jeho fázový portrét pro volbu parametrů  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 6$ ,  $b = 0.04$ .

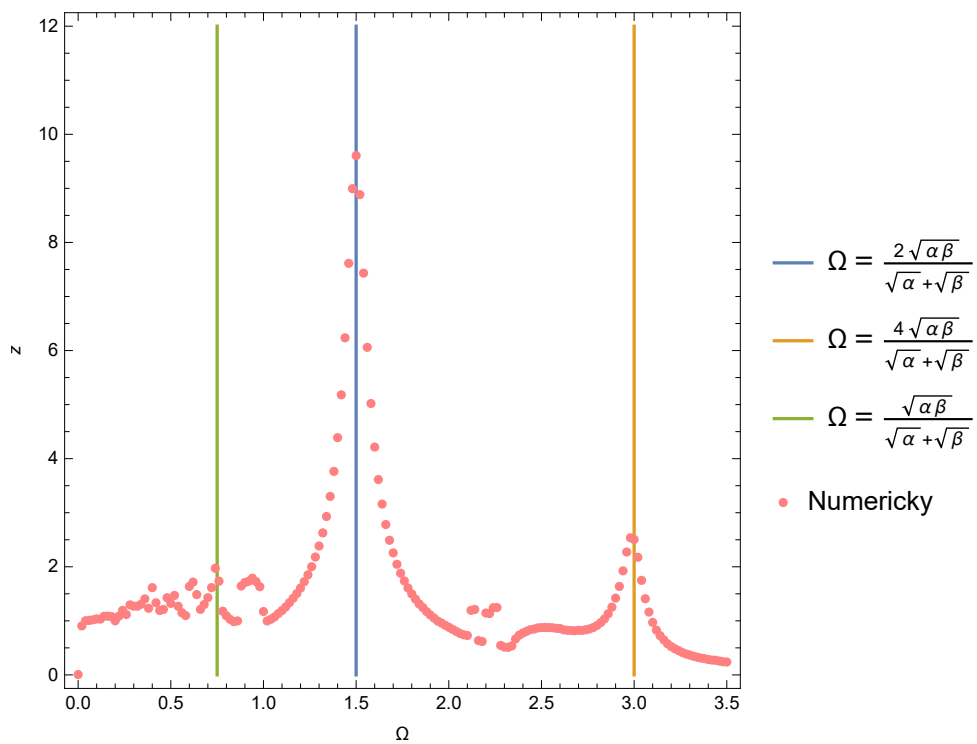
Na obr. 5.38 - 5.39 je znázorněna amplitudová charakteristika řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) získaná numerickým výpočtem (viz poznámka níže). Když se  $\Omega$  blíží k  $\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$  absolutní

hodnota amplitudy výchylky  $z$  výrazně roste. Díky tomu, že je systém tlumený, ale nedochází k růstu  $z$  nade všechny meze. Stejně jako pro netlumený systém i zde dochází k patrnému nárůstu amplitudy i pro jiné volby  $\Omega$ , opět se jedná o násobky a zlomky původní volby  $\Omega$  ze vztahu (5.13).



Obr. 5.38: Amplitudová charakteristika řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) pro volbu parametrů  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $b = 0.1$ .

**Poznámka 5.3.2.** Numerické hodnoty na obr. 5.38 - 5.39 byly získány za pomoci software Mathematica. Nalezené hodnoty jsou extrémní hodnoty amplitudy řešení počáteční úlohy (5.14), (5.15) v závislosti na parametru  $\Omega$  pro časy z intervalu  $\langle 100, 200 \rangle$ . Maxima byla hledána pro časy vzdálené od počátku, abychom zmírnili vliv počátečních podmínek na hodnoty amplitudy.



Obr. 5.39: Amplitudová charakteristika řešení počáteční úlohy (5.11), (5.12) pro volbu parametrů  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 9$ ,  $b = 0.1$ .

# Literatura

- [1] R. Brepta, F. Turek, E. Kalenská, and L. Pust. *Mechanické kmitání*. Sobotáles, 1994.
- [2] L. O. e Silva and J. Mendonça. Asymmetric pendulum. *Physical Review A*, 46(10):6700, 1992.
- [3] L. K. Grover and A. M. Sengupta. From coupled pendulums to quantum search. *Mathematics of quantum computation*, pages 119–134, 2002.
- [4] J.-H. He. Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method. *Applied Mathematics and Computation*, 156(2):527–539, 2004.
- [5] I. Kovacic and M. J. Brennan. *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*. John Wiley & Sons, 2011.
- [6] S. Liao. Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(4):983–997, 2009.
- [7] S. Liao. *Homotopy analysis method in nonlinear differential equations*. Springer, 2012.
- [8] L. Shijun. Homotopy analysis method: a new analytic method for nonlinear problems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 19(10):957–962, 1998.
- [9] F. Tajaddodianfar, M. R. H. Yazdi, and H. N. Pishkenari. Nonlinear dynamics of mems/nems resonators: analytical solution by the homotopy analysis method. *Microsystem Technologies*, 23(6):1913–1926, 2017.
- [10] M. Tsatsos. The Van der Pol equation. *arXiv preprint arXiv:0803.1658*, 2008.
- [11] G. Zhang and Z. Wu. Homotopy analysis method for approximations of duffing oscillator with dual frequency excitations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 127:342–353, 2019.