

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

DIFUZE V DISKRÉTNÍM PROSTŘEDÍ

PLZEŇ, 2021

PETRA ŠTUMPFOVÁ

nahradit listem zadání

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni, dne 27. července 2021

.....
vlastnoruční podpis

Poděkování

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování panu RNDr. Jonáši Volkovi, Ph.D., nejen za cenné rady a odborný dohled nad mou prací, ale i za ochotu, vstřícnost a trpělivost při konzultacích. Dále bych chtěla poděkovat své rodině, blízkým a především svému příteli za psychickou podporu a trpělivost při vytváření této práce.

Abstrakt

Budeme se zabývat dynamickými systémy v diskrétním prostředí, které budeme modelovat neorientovanými grafy. Jako výchozí bod uvedeme zákon zachování, z něhož podrobně odvodíme difuzní rovnici na daném grafu. Zanalyzujeme model, který je řízen lineárním zákonem na grafu o dvou a více vrcholech, jako příklady uvedeme rovnice na kružnici a cestě. V poslední části představíme model difuze dané vybraným nelineárním zákonem na grafu o dvou vrcholech. Kromě difuze mezi vrcholy postupně přidáme různé kombinace exponenciální a logistické vnitřní dynamiky v jednotlivých vrcholech. Zaměříme se především na kvalitativní vlastnosti zkoumaných systémů, a to především klidové stavy a jejich stabilitu.

Klíčová slova: diferenciální rovnice, reakčně-difuzní rovnice, nelineární difuze, diskrétní prostředí, rovnice na grafech.

Abstract

We deal with dynamic systems in a discrete structure, which we model by undirected graphs. As a starting point, we present the conservation law, from which we deduce the diffusion equation on a given graph in detail. We analyze the model, which is operated by a linear law on a graph of two or more vertices, as examples we present equations on a cycle and a path. In the last part, we present a model of diffusion operated by a selected nonlinear law on a graph with two vertices. In addition to the diffusion between the vertices, we gradually add various combinations of exponential and logistic internal dynamics in the individual vertices. We focus mainly on qualitative properties of the investigated systems, especially on equilibria and their stability.

Keywords: differential equations, reaction-diffusion equations, nonlinear diffusion, discrete spatial structure, equations on graphs.

Obsah

1	Motivace a základní poznatky	1
1.1	Zákon zachování	1
1.1.1	Difuze	2
1.1.2	Diskrétní prostředí	3
1.1.3	Toková funkce	4
1.1.4	Reakce	5
1.1.5	Známé výsledky	9
1.2	Základní poznatky	10
2	Lineární difuze na dvou vrcholech	13
2.1	Závislost na směru	15
2.2	Záporný difuzní parametr	16
3	Lineární difuze na více vrcholech	19
3.1	Lineární difuze na n vrcholech	19
3.2	Lineární difuze na třech vrcholech	21
3.2.1	Lineární difuze na kružnici o třech vrcholech	21
3.2.2	Lineární difuze na cestě o třech vrcholech	22
4	Nelineární difuze na dvou vrcholech	24
4.1	Difuze	24
4.2	Difuze s reakcí	28
4.2.1	Exponenciální růst	28
4.2.2	Exponenciální a logistický růst	34
4.2.3	Logistický růst	38
	Závěr	42
	Literatura	44

Motivace a základní poznatky 1

1.1 Zákon zachování

Mnoho procesů v přírodě a kolem nás funguje na základě zákonů zachování různých veličin. Zkoumejme v této diplomové práci chování látky, jež je uzavřena v určitém prostoru.

Začněme připomenutím spojitého případu, viz např. [6, 8]. Pro jednoduchost uvažujme 1D model, například úsek trubice o konečné nenulové délce $(b - a)$ orientované podél osy x v prostoru, viz Obrázek 1.1. V této trubici bude proměnná koncentrace jisté látky dána funkcí $u(x, t)$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $t \geq 0$. Tok této látky se bude řídit funkcí $\phi(x, t)$. Uvažujme, že průřez této trubice je konstantní jednotkový a koncentrace látky se ve směru y ani z nemění, respektive funkce u a ϕ jsou proměnné pouze podél osy x a závisí na čase. Pak je celková hmota látky v daném čase a úseku určena integrálem

$$\int_a^b u(x, t) dx.$$

Jestliže se hmota v čase trubicí pohybuje, pak je časová změna celkové hmoty v tyči dána rozdílem látky, která vteče v bodě a a která vyteče v bodě b , tj.

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t). \quad (1.1)$$

Rovnice (1.1) se nazývá zákon zachování v integrálním tvaru. Mějme podmínku, že funkce u a ϕ jsou hladké. Levou stranu rovnice (1.1) pak můžeme upravit

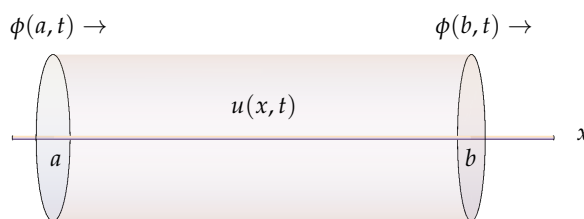
$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx = \int_a^b u_t(x, t) dx,$$

kde u_t značí parciální derivaci funkce u podle proměnné t , a s využitím fundamentální věty matematické analýzy

$$\phi(a, t) - \phi(b, t) = \int_b^a \phi_x(x, t) dx = - \int_a^b \phi_x(x, t) dx.$$

Zákon zachování v (1.1) má tedy pak tvar

$$\int_a^b u_t(x, t) dx = - \int_a^b \phi_x(x, t) dx, \quad (1.2)$$

Obrázek 1.1: Trubice o délce $(b - a)$ orientovaná podél osy x .

tedy

$$\int_a^b (u_t(x, t) + \phi_x(x, t)) dx = 0.$$

Tato rovnost platí pro všechny intervaly $[a, b]$, a musí tedy platit

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = 0, \quad (1.3)$$

kde $x \in \mathbb{R}$ a $t \geq 0$. Rovnice (1.3) se nazývá lokální zákon zachování.

Obdobně by šlo zákon zachování odvodit i ve více dimenzích. Pak bychom uvažovali prostor o objemu V , koncentrace látky by byla dána funkcí $u(\mathbf{x}, t)$ a tok látky by udávala vektorová funkce $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t)$. V případě 3D modelu by pak rovnice (1.1) s využitím Gaussovy-Ostrogradského věty měla tvar

$$\frac{d}{dt} \iiint_V u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \iint_{\partial V} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = - \iiint_V \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Po úpravě dostáváme

$$\iiint_V (u_t(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = 0.$$

Jelikož tato zákonitost musí platit při každé volbě objemu V , musí platit

$$u_t(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) = 0,$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a $t \geq 0$, což je parciální rovnice udávající lokální zákon zachování v prostoru.

1.1.1 Difuze

V 1D modelu jsme obdrželi parciální diferenciální rovnici (1.3), kdy u a ϕ na sobě nezávisí. Máme tak jednu rovnici pro dvě neznámé funkce. Doplňme proto ještě tzv. konstitutivní vztah mezi funkcemi ϕ a u , kdy ϕ bude operátorem u .

Zvolme nejprve nejjednodušší případ

$$\phi(x, t) = c \cdot u(x, t),$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Pak je (1.3) ve tvaru

$$u_t(x, t) + c \cdot u_x(x, t) = 0.$$

Tímto jsme získali vztah pro transportní rovnici. Jedná se o nejjednodušší rovnici, jejíž řešení je ve formě tzv. cestujících vlny. Používá se např. pro modelování šíření signálů, atd., viz [8].

V této práci se budeme zabývat difuzí, zvolme proto jiný konstitutivní vztah ve tvaru

$$\phi(x, t) = -d \cdot u_x(x, t), \quad (1.4)$$

kde $d > 0$, či ve více dimenzích

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) = -d \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t),$$

kde $\nabla_{\mathbf{x}}$ je prostorový gradient. Tímto jsme získali tzv. Fickův zákon, který říká, že hustota difuzního toku ϕ je úměrná záporně vzatému gradientu koncentrace u . Pak dosadíme (1.4) do (1.3) a získáme

$$u_t(x, t) - d \cdot u_{xx}(x, t) = 0 \quad (1.5)$$

či ve více dimenzích

$$u_t(\mathbf{x}, t) - d \cdot \Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) = 0,$$

kde $\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t))$ je tzv. Laplaceův operátor vzhledem k proměnné \mathbf{x} .

Obdrželi jsme difuzní rovnici, která v přírodě popisuje například vedení tepla. Druhý termodynamický zákon říká, že teplo samovolně přechází z teplejšího tělesa na studenější, čím větší je rozdíl teplot, tím rychleji přenos tepla probíhá. Obdobně se chová například i hmyz, jež se přesouvá z míst s vysokou koncentrací do míst, kde je menší zastoupení jeho druhu, ve směru největšího úbytku koncentrace, viz např. [8].

1.1.2 Diskrétní prostředí

Doposud jsme popisovali systém ve spojitém prostředí. Z určitého důvodu se ale může v přírodě látka šířit i na prostředí diskrétním, například uveďme neuronovou síť, souostroví, různé biotopy, atd., viz např. [10]. Pak je vhodné prostředí reprezentovat diskrétní strukturou modelovanou například grafem. Mějme proto libovolný souvislý orientovaný graf G bez smyček, množinu vrcholů označme $V = \{1, 2, \dots, n\}$ a množinu hran $E \subset V \times V$. Vyberme jeden vrchol i , koncentraci zkoumané látky v tomto vrcholu v daném čase označme $x_i(t)$, všechny jeho sousedy označme j , koncentraci látky v těchto vrcholech označme $x_j(t)$.

Pak zaveďme funkci

$$\phi(i, j, t) : E \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

kteřá bude udávat tok po orientované hraně $(i, j) \in E$ v čase $t \geq 0$. Funkce $\phi(i, j, t)$ popisuje tok po hraně z vrcholu i do vrcholu j , analogicky mějme $\phi(j, i, t)$ udávající tok z j do i . Začínáme s tím, že graf G uvažujeme orientovaný, neboť v takové struktuře nelze formálně zavést tok mezi vrcholy i a j a jeho směr pomocí neuspořádané dvojice $\{i, j\}$. Změna koncentrace ve vrcholu i je pak dána

$$x_i'(t) = \sum_{j \in N^+(i)} \phi(j, i, t) - \sum_{j \in N^-(i)} \phi(i, j, t), \quad (1.6)$$

kde $N^+(i)$ značí všechny sousedy j vrcholu i , z nichž vede hrana do i , a $N^-(i)$ značí všechny sousedy j , do nichž vede hrana z i .

Z formálních důvodů nyní provedme symetrizaci grafu G , konkrétně jestliže v G existovala hrana z i do j , pak v novém grafu bude existovat hrana také z j do i (pokud již neexistovala v G).

Označme tento nový graf $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$. Rozšířme tok ϕ na graf \tilde{G} , tj. definujme $\tilde{\phi} : \tilde{E} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ jako

$$\tilde{\phi}(i, j, t) = \begin{cases} \phi(i, j, t), & \text{pokud } (i, j) \in E, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom můžeme přepsat (1.6) jako

$$x_i'(t) = \sum_{(i,j) \in E} (\tilde{\phi}(j, i, t) - \tilde{\phi}(i, j, t)). \quad (1.7)$$

Označme nově funkci $D(i, j, t)$ jako

$$D(i, j, t) := \tilde{\phi}(j, i, t) - \tilde{\phi}(i, j, t),$$

kde $D : \tilde{E} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Zřejmě platí $D(i, j, t) = -D(j, i, t)$.

Ukažme, že se celková hmotota $\sum_{i \in V} x_i(t)$ v grafu s časem nemění. Z linearity derivování a vlastnosti funkce $D(i, j, t)$ dostaneme

$$\left(\sum_{i \in V} x_i(t) \right)' = \sum_{i \in V} x_i'(t) = \sum_{i \in V} \sum_{(i,j) \in E} (\tilde{\phi}(j, i, t) - \tilde{\phi}(i, j, t)) = \sum_{(i,j) \in E} \underbrace{(D(i, j, t) + D(j, i, t))}_{=0} = 0.$$

Označíme-li celkovou hmotou zkoumané látky v daném čase jako $s(t) := \sum_{i \in V} x_i(t)$. Platí $s'(t) = 0$, a tedy $s(t) = s(0)$ pro všechna $t \geq 0$.

Poznámka 1.1. Zatím nic nebrání tomu, aby koncentrace byla záporná. To zajistí až konkrétní volba konstitutivního vztahu mezi D a x (viz dále).

Jelikož nyní máme diskrétní zákon zachování (1.7) popsany na symetrickém grafu \tilde{G} , lze na toto nahlížet jako na vztah v neorientovaném grafu $G_0 = (V, E_0)$, kde bude dvojice hran (i, j) a (j, i) z množiny \tilde{E} reprezentována jednou neorientovanou hranou $\{i, j\} \in E_0 \subset \binom{V}{2}$, tj. z (1.7) a definice funkce $D(i, j, t)$ dostaneme

$$x_i'(t) = \sum_{j \in N_0(i)} D(i, j, t), \quad (1.8)$$

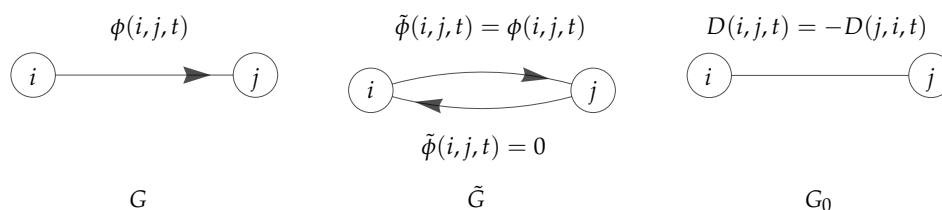
kde $N_0(i)$ značí množinu všech vrcholů j , které jsou s i spojeny hranou v grafu G_0 . Postup symetrizace grafu G je znázorněn na Obrázku 1.2. Od teď budeme uvažovat reprezentaci neorientovaným grafem a funkcí D , pro stručnost píšme dále pouze $G = (V, E)$ místo $G_0 = (V, E_0)$. Upozorníme ale, že ve funkci D zůstává zachována daná informace o tom, zda daný tok přispívá do vrcholu i , či do vrcholu j .

1.1.3 Toková funkce

Obdobně jako ve spojitém případě jsme obdrželi jednu rovnici (resp. jeden systém ODR) (1.8) pro dvě neznámé funkce x a D , kde $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$. Musíme proto znovu dodat vazbu mezi x a D .

Motivováni Fickovým zákonem (1.4) začněme s tím, že tok $\tilde{\phi}(i, j, t)$ z i do j bude dán

$$\tilde{\phi}(i, j, t) = d \cdot (x_i(t) - x_j(t))^+,$$

Obrázek 1.2: Ilustrace postupu symetrizace orientovaného grafu G .

tj. z i do j dochází k toku, pokud $x_i(t) > x_j(t)$, a naopak pro $x_j(t) > x_i(t)$ dochází k toku z j do i . Navíc tento tok je lineárně úměrný rozdílu koncentrací mezi těmito dvěma vrcholy, viz [16]. Platí

$$D(i, j, t) = \tilde{\phi}(j, i, t) - \tilde{\phi}(i, j, t) = d \cdot (x_j(t) - x_i(t))^+ - d \cdot (x_i(t) - x_j(t))^+ = -d \cdot (x_i(t) - x_j(t)),$$

tj.

$$x_i'(t) = \sum_{j \in N(i)} D(i, j, t) = -d \sum_{j \in N(i)} (x_i(t) - x_j(t)).$$

Tento systém lineárních diferenciálních rovnic lze ekvivalentně zapsat pomocí Laplaceovy matice L_G grafu G , viz [4], která je dána předpisem

$$l_{ij} = \begin{cases} \deg(i) & \text{pro } i = j, \\ -1 & \text{pro } i \neq j \text{ taková, že } \{i, j\} \in E, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

jako

$$\mathbf{x}'(t) = -L_G \mathbf{x}(t). \quad (1.9)$$

Analýza rovnice (1.9) je detailně uvedena v Kapitole 3.

Motivováni [9] budeme především zkoumat také nelineární konstitutivní vztahy, konkrétně se zaměříme na funkci ve tvaru

$$D(i, j, t) = -d \cdot (x_i(t) - x_j(t))x_i(t)x_j(t).$$

1.1.4 Reakce

V daném prostoru nemusí látka pouze difundovat, ale může i vznikat či zanikat působením vnitřního či vnějšího zdroje. Doplňme proto ve spojitém případě v $1D$ do rovnice (1.1) tzv. zdrojovou funkci f , která bude závislá na místě x , čase t a dané koncentraci u , tedy

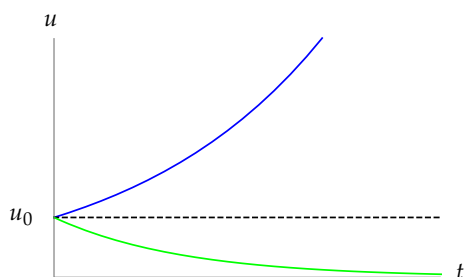
$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b f(x, t, u(x, t)) dx. \quad (1.10)$$

Pak je (1.3) ve tvaru

$$\int_a^b (u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t, u(x, t))) dx = 0, \quad (1.11)$$

resp.

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t, u(x, t)).$$



Obrázek 1.3: Časový průběh řešení rovnice (1.13) s počáteční podmínkou u_0 pro $r > 0$ (modře) a $r < 0$ (zeleně).

V diskretním prostředí bychom obdobně dostali (1.8) jako

$$x'_i(t) = \sum_{j \in N(i)} D(i, j, t) + f_i(t, x_i(t)), \quad (1.12)$$

kde $f_i(t, x_i)$ popisuje zdroj ve vrcholu i .

V případě lineárních difuzzních konstitutivních vztahů $\phi(x, t) = -d \cdot u_x(x, t)$ ve spojitém případě, resp. $D(i, j, t) = -d \cdot (x_i(t) - x_j(t))$ v diskretním případě dostáváme

$$u_t(x, t) = d \cdot u_{xx}(x, t) + f(x, t, u(x, t)),$$

resp.

$$x'_i(t) = -d \sum_{j \in N(i)} (x_i(t) - x_j(t)) + f_i(t, x_i(t)).$$

Věnujme se nyní detailněji dvěma možným tvarům zdrojové funkce f , které v této práci zahrneme do dále zkoumaných populačních modelů.

Pro tuto chvíli uvažujme, že se látka prostorem nešíří a její změna je tedy dána pouze lokálními zdroji. V následujících odstavcích si detailně popíšeme dva základní modely, a to exponenciální a logistický růst.

Exponenciální reakce

Thomas Robert Malthus položil základy teorie populačního růstu. Na základě relativní míry porodnosti a úmrtnosti tvrdil, že růst populace se řídí exponenciálním zákonem

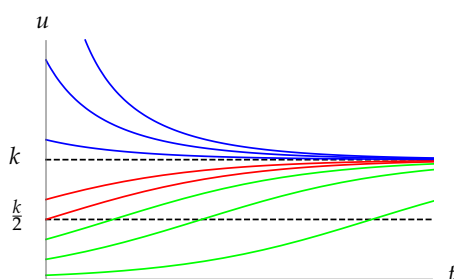
$$u'(t) = r \cdot u(t), \quad (1.13)$$

kde $r \in \mathbb{R}$ je reakční parametr daný rozdílem míry porodnosti a úmrtnosti a $u(t)$ popisuje velikost populace v čase t .

Rovnice (1.13) má řešení

$$u(t) = u_0 \cdot e^{rt},$$

viz Obrázek 1.3. Budeme-li hledat tzv. klidové stavy systému (1.13), tj. stavy, kdy se velikost populace s časem nemění, snadno pro $r \neq 0$ obdržíme $u(t) \equiv 0$, který je tzv. asymptoticky



Obrázek 1.4: Časový průběh řešení rovnice (1.14) s počáteční podmínkou u_0 pro $u_0 > k$ (modře), pro $k > u_0 \geq \frac{k}{2}$ (červeně) a $u_0 < \frac{k}{2}$ (zeleně).

stabilní (pro $r = 0$ je klidovým stavem jakýkoliv počáteční stav u_0). Pro $r > 0$ řešení systému (1.13) exponenciálně roste nade všechny meze, pro $r < 0$ řešení systému exponenciálně klesá ke klidovému stavu $u(t) \equiv 0$ (pro $r = 0$ zůstává $u(t)$ konstantní rovno počátečnímu stavu).

Tento přístup má ale mnohá úskalí, především nijak nezahrnuje průběh života jedinců a očekává stále stejnou reprodukci. Taktéž předpokládá neomezené zdroje a prostor, ve kterém populace žije.

Logistická reakce

Pierre François Verhulst je spojen s populačním modelem, který je popsán tzv. logistickou rovnicí. Tento model je oproti Malthusovu realističtější, neboť zahrnuje informaci o tzv. kapacitě prostředí. Tato kapacita zohledňuje mj. omezené zdroje a prostor, což má vliv na růst velikosti populace. Tento model má tvar

$$u'(t) = r \cdot u(t) \cdot \left(1 - \frac{u(t)}{k}\right), \quad (1.14)$$

kde $r > 0$ je reakční parametr (uvažuje se, že malé populace mají tendenci růst), $k > 0$ je parametr udávající zmíněnou kapacitu prostředí a $u(t)$ opět popisuje velikost populace v čase t .

Rovnice (1.14) má řešení

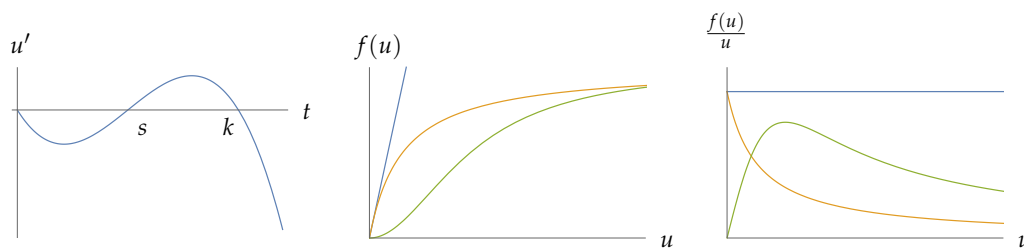
$$u(t) = u_0 \cdot \frac{k e^{rt}}{k + u_0 (e^{rt} - 1)},$$

viz Obrázek 1.4. Klidové stavy systému (1.14) splňují

$$r \cdot u(t) \cdot \left(1 - \frac{u(t)}{k}\right) = 0.$$

To platí pro $u(t) \equiv 0$ a $u(t) \equiv k$. Systém má tendenci ustálit se pro $t \rightarrow \infty$ na hranici kapacity prostředí k (a to tím, že ke k roste pro $u_0 < k$, resp. exponenciálně klesá pro $u_0 > k$).

Tím jsme si detailněji představili dvě funkce, jež v této práci budeme dále potřebovat. Jevů, které ovlivňují vnitřní dynamiku populace, a funkcí, jež toto popisují, je nepřeberné množství.



Obrázek 1.5: Graf funkce pravé strany úlohy (1.15) pro $k > s > 0$ a $r > 0$ (vlevo). Hollingovy funkce I. typu (modře), II. typu (oranžově), III. typu (zeleně) (uprostřed) a jejich přepočít na jednoho jedince (vpravo).

Uvedme pro přehled ještě alespoň další dvě.

Bistabilní dynamika modelována rovnicí

$$u'(t) = r \cdot u(t) \cdot \left(1 - \frac{u(t)}{k}\right) \cdot \left(\frac{u(t)}{s} - 1\right), \quad (1.15)$$

kde $r > 0$ je reakční parametr, $k > 0$ kapacita prostředí a $s \in (0, k)$ tzv. kritická hodnota, se používá k popisu tzv. Aleeho efektu, viz Obrázek 1.5.

Populace, které jsou menší než kritická hodnota s zde vymírají. Například různé druhy zvířat žijí ve smečkách a nejsou schopny přežít a ubránit se predátorům, nebo naopak lovit potravu v malých skupinách či individuálně. Dalším důvodem může být nedostatečný počet jedinců k reprodukci, a proto populace zanikne. Tento problém můžeme pozorovat i u rostlin, jež nejsou samosprašné, tedy k opylování je potřebný další jedinec. Jestliže se tedy v dostatečně malé vzdálenosti nenachází další jedinec, dochází k úhynu rostliny, viz [10].

Jakmile je velikost populace vyšší než kritická hodnota s , řídí se populace v podstatě logistickým zákonem, viz (1.14), tedy velikost populace se v čase ustálí na hodnotě kapacity prostředí k .

Jako další uvedme skupinu tzv. Hollingových funkcí, jež zahrnují vliv vnějších zdrojů. Tyto zdroje způsobují vlastní dynamiku popsanou funkcí, tzv. funkční odpověď. V přírodě se může jednat o predátora, jež ohrožuje zkoumanou populaci (kořist). Crawford Stanley Holling uvažoval různé typy funkční reakce, viz [6]. Ve všech případech se tato zdrojová funkce uvažuje se záporným znaménkem.

Odezva typu I ve tvaru

$$f(u) = r \cdot u, \quad r > 0,$$

popisuje lineární nárůst spotřeby kořisti vzhledem k velikosti populace u . Odezvy typu I způsobují u kořisti úmrtnost v přepočtu na jedince nezávislou na hustotě.

Odezva typu II uvažuje, že podíl ulovené kořisti v přepočtu na jedince klesá monotónně s hustotou kořisti. Funkční odpověď je dána

$$f(u) = \frac{r \cdot u}{h + u}, \quad r > 0, \quad h > 0.$$

Naopak odezva typu III ve tvaru

$$f(u) = \frac{r \cdot u^2}{h + u^2}, \quad r > 0, \quad h > 0,$$

uvažuje, že podíl ulovené kořisti na jednoho jedince nejdříve roste a od určité prahové hodnoty monotónně klesá, viz Obrázek 1.15.

V případě funkčních odpovědí se sleduje pouze vývoj populace kořisti a vliv predátora na ni se uvažuje jako vnější zdroj popsaný funkční odpovědí. Je přirozené snažit se dále sledovat i vývoj populace predátora, což vede na složitější tzv. interakční modely, viz [10].

1.1.5 Známé výsledky

Představili jsme si základní fenomény pro tuto diplomovou práci, a to difuzi na diskretním prostředí a různé reakce popisující vnitřní či vnější zdroje.

Motivováni populačními modely z předchozích odstavců budeme uvažovat, že naše modely na grafech popisují velikosti populací v prostorově separovaných oblastech (např. souostroví, atd.). Budeme tedy zkoumat populační model, kdy populace difunduje mezi jednotlivými lokalitami (vrcholy grafu) a její vnitřní dynamika v daném místě se bude řídit jedním z výše popsaných zákonů (exponenciální či logistický růst).

V práci [5] nalezneme výsledky pro model na dvou vrcholech, jež uvažuje lineární difuzní zákon, tedy

$$D(i, j, t) = -d(x_i(t) - x_j(t)), \quad d > 0,$$

a navíc různé zdrojové funkce. K lineární difuzi přidává exponenciální, logistickou a bistabilní dynamiku, kdy uvažuje také jejich různé kombinace na jednotlivých vrcholech. Studuje kvalitativní vlastnosti těchto modelů, především klidové stavy a jejich stabilitu. Uvažuje různé parametry ovlivňující reakční funkce, jež vedou na existenci nových klidových stavů, analyzuje tedy vyskytující se bifurkace vzhledem k přítomným parametrům.

Dále zmiňme práci [9], kde byly analyzovány modely difuze na diskretním prostředí, nejdříve na dvou vrcholech, a poté na libovolném neorientovaném grafu G , jež se řídily především nelineárními zákony. Například zmiňme tokovou funkci

$$D(i, j, t) = -d \cdot (x_i(t) - x_j(t)) \cdot (x_i(t) - x_j(t) - 1) \cdot (x_i(t) - x_j(t) + 1),$$

či

$$D(i, j, t) = -d \cdot (x_i(t) - x_j(t)) \cdot (1 - x_i(t) + x_j(t)) \cdot (1 + x_i(t) - x_j(t)) \cdot (x_i(t) - x_j(t) - a) \cdot (x_i(t) - x_j(t) + a),$$

kdy první z funkcí popisuje v závislosti na znaménku parametru d model nelineární difuze či shlukování a druhá z funkcí modeluje případ koexistence populací na jednotlivých vrcholech. Autor se opět věnuje kvalitativním vlastnostem, klidovým stavům a stabilitě.

V této diplomové práci se zaměříme na obdobné otázky, avšak v její hlavní části zvolme kombinaci přístupů z [5] a [9].

Hlavním výsledkem bude analýza nelineárního difuzního zákona v prostředí neorientovaného grafu o dvou vrcholech ve tvaru

$$D(i, j, t) = -d \cdot (x_i(t) - x_j(t)) \cdot x_i(t) \cdot x_j(t), \quad (1.16)$$

kde $d > 0$ je difuzní parametr. Obdobně jako v [5] budeme dále uvažovat k výše popsané nelineární difuzi v (1.16) vnitřní dynamiku populace, tedy různé reakční funkce, viz Kapitulu 1.1.4. Vyšetříme klidové stavy a jejich stabilitu. Zaměříme se i na další kvalitativní popis řešení těchto systémů.

1.2 Základní poznatky

V předchozí kapitole jsme doposud bez hlubšího detailního vysvětlování používali vcelku široký matematický aparát. Záměrem bylo uvést čtenáře do problematiky a motivovat zkoumané problémy. Neuváděli jsme proto přesné definice a vlastnosti používaných pojmů, jež jsme potřebovali k odvození některých zákonitostí.

Nyní tedy pro úplnost stručně shrňme definice a věty, které budeme v rámci studia difuze v diskrétním prostředí nadále potřebovat. Čerpali jsme především z literatury [1, 7, 14], kde lze najít i další detaily.

DEFINICE 1.2. Systémem obyčejných diferenciálních rovnic (autonomním) rozumíme soustavu

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (1.17)$$

kde $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ je vektor neznámých funkcí a $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je daná vektorová funkce. Funkce $\mathbf{x}(t)$, která splňuje (1.17), a navíc $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ je řešení tzv. počáteční úlohy

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), & t \in I \subset \mathbb{R}, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Řešení $\mathbf{x}(t)$ počáteční úlohy (1.18) definované na intervalu $I_0 \subset I$ se nazývá maximální, pokud nelze rozšířit interval jeho existence, tj. neexistuje řešení $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ úlohy (1.18) definované na intervalu I_1 , kdy $I_0 \subsetneq I_1$, takové, že $\tilde{\mathbf{x}}|_{I_0} = \mathbf{x}$.

Poznámka 1.3. Diferenciální rovnici (1.17) budeme také nazývat dynamickým systémem a řešení trajektorií.

Dále uveďme důsledek tzv. Picardovy-Lindelöfovy věty o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy (1.18).

VĚTA 1.4. Předpokládejme, že $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ v (1.18) je vektorová funkce třídy C^1 . Potom existuje právě jedno maximální řešení $\mathbf{x}(t)$ počáteční úlohy (1.18).

Poznámka 1.5. Nechť je interval existence maximálního řešení interval (a, b) . Tento interval může být omezený i neomezený. Při studiu asymptotických vlastností, tj. chování řešení na okrajích tohoto intervalu, tj. pro $t \rightarrow a+$ či $t \rightarrow b-$ budeme pro jednoduchost vždy psát $t \rightarrow -\infty$ či $t \rightarrow +\infty$.

Existence a jednoznačnost řešení platí za podmínek, které budou v dalším textu vždy splněny. Zaměříme se proto na studium zmíněných asymptotických vlastností, tj. tzv. klidových stavů dynamického systému (1.17) a jejich stability.

DEFINICE 1.6. Řekneme, že $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ je klidový stav dynamického systému (1.17), pokud platí

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Klidový stav $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ je:

- stabilní, pokud pro všechna $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že všechna řešení $\mathbf{x}(t)$ úlohy (1.17) splňující $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta$ splňují pro všechna $t > 0$

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon,$$

- asymptoticky stabilní, je-li stabilní a splňuje $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ pro $t \rightarrow \infty$,
- nestabilní, není-li stabilní.

Uvedme nyní definici systému lineárních diferenciálních rovnic a tvrzení, které rozlišuje (asymptoticky) stabilní a nestabilní klidové stavy takového systému na základě vlastních čísel matice soustavy.

DEFINICE 1.7. Systémem lineárních diferenciálních rovnic (autonomním, s konstantními koeficienty) rozumíme soustavu

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.19)$$

kde $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ je vektor neznámých funkcí a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je daná matice.

VĚTA 1.8. Klidový stav $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ dynamického systému (1.19) je:

- asymptoticky stabilní, jestliže všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} mají záporné reálné části,
- stabilní, jestliže všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} mají nekladné reálné části a ke každému vlastnímu číslu majícímu nulovou reálnou část a násobnost $m \in \mathbb{N}$ existuje m lineárně nezávislých vlastních vektorů,
- nestabilní, jestliže existuje alespoň jedno vlastní číslo matice \mathbf{A} s kladnou reálnou částí.

Nyní se vraťme k nelineárnímu systému (1.17). Uvedme tvrzení obdobné Větě 1.8 pro nelineární systémy, které bude založené na vlastních číslech Jacobiovy matice zobrazení \mathbf{f} .

DŮSLEDEK 1.9. Předpokládejme, že $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ v (1.17) je vektorová funkce třídy C^1 a $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$. Klidový stav \mathbf{x}^* je:

- asymptoticky stabilní, jestliže všechna vlastní čísla Jacobiovy matice $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ zobrazení \mathbf{f} v bodě \mathbf{x}^* mají záporné reálné části,
- nestabilní, jestliže existuje alespoň jedno vlastní číslo Jacobiovy matice $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ s kladnou reálnou částí.

Poznámka 1.10. V případě nelineárního systému (1.17) nedokážeme pomocí předchozího Důsledku 1.9 rozhodnout o stabilitě \mathbf{x}^* v případě, že $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ má vlastní číslo s nulovou reálnou částí. V tomto případě se musí použít jiné techniky, např. tzv. nulokliny, teorie Ljapunovových funkcí, atd.

Poznámka 1.11. Pro naše potřeby budeme často používat $\mathbf{x}(t) = [x(t), y(t)]$ a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} f(x(t), y(t)) \\ g(x(t), y(t)) \end{bmatrix},$$

neboli pro systém dvou diferenciálních rovnic mějme

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)), \\ y'(t) = g(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Dále zmiňme dvě důležité věty, které popisují další kvalitativní vlastnosti řešení nelineárního systému (1.17). Začneme Poincarého-Bendixonovou větou popisující systém v rovině.

VĚTA 1.12. *Mějme dynamický systém (1.17), kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je třídy C^1 . Předpokládejme omezenou, uzavřenou, neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}^2$. Jestliže nějaká trajektorie leží v M pro všechna $t \geq 0$, pak tato trajektorie:*

- je klidovým stavem, či uzavřenou trajektorií, nebo
- se pro $t \rightarrow \infty$ blíží ke klidovému stavu či uzavřené trajektorii ležící v M , nebo
- se pro $t \rightarrow \infty$ blíží k jiným trajektoriím spojujícím klidové stavy v M (tzv. homoklinickým či heteroklinickým trajektoriím).

V závěru této kapitoly zmiňme Bonyho větu o invarianci, která nám za určitých předpokladů zaručí, že daná trajektorie neopustí jistou vybranou množinu.

VĚTA 1.13. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená množina a $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce třídy C^1 . Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- každé řešení $\mathbf{x}(t)$ diferenciální rovnice $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, pro které $\mathbf{x}(t_0) \in M$, splňuje $\mathbf{x}(t) \in M$ pro všechna $t > t_0$, kde toto řešení existuje,
- pro každý bod $\mathbf{x} \in \partial M$ a každý tzv. Bonyho vnější normálový vektor $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ k M v bodě \mathbf{x} platí $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$.

Poznámka 1.14. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená množina a $\mathbf{x} \in \partial M$. Nechť $B(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená koule se středem \mathbf{y} taková, že $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{y})$ a $M \cap B(\mathbf{y}) = \emptyset$. Potom se vektor $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ nazývá Bonyho vnějším normálovým vektorem k M v bodě \mathbf{x} .

Poznámka 1.15. Mějme oblast M , jejíž hranici ∂M lze lokálně popsat funkcí třídy C^1 . Tato funkce má v každém bodě tečnou nadrovinu. Pak existuje i (klasický) vnější normálový vektor v každém bodě hranice ∂M . Jestliže existuje (klasický) vnější normálový vektor, pak Bonyho vnější normálový vektor neexistuje, nebo je libovolným násobkem (klasického) vnějšího normálového vektoru. Jestliže Bonyho vnější normálový vektor neexistuje, pak je předpoklad Věty 1.13 splněn. Jestliže Bonyho vnější normálový vektor existuje, stačí ověřit předpoklady Věty 1.13 pro (klasický) vnější normálový vektor.

Poznámka 1.16. Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$, která má tu vlastnost, že je-li $[x_0, y_0] \in M$, potom řešení (1.18) leží v M pro všechna $t \geq 0$, nazveme pozitivně invariantní, či jen invariantní.

Pokud nebude řečeno jinak, vždy budeme chápat veškeré funkce závislé na čase t , pro většinu přehlednost však budeme v zápisu vynechávat nezávisle proměnnou t , a psát tak pouze x místo $x(t)$, y místo $y(t)$, atd.

Lineární difuze na dvou vrcholech 2

V této kapitole si detailně shrňme poznatky o nejjednodušším případě, a to lineární difuzi na dvou vrcholech bez reakce. Tato část bude sloužit jako výchozí bod pro další studium, konkrétně nelineární difuzi s případnými reakcemi.

Připomeňme, že lineární difuzi dostaneme volbou tokové funkce

$$D(i, j, t) = -d(x_i(t) - x_j(t)), \quad d > 0, \quad (2.1)$$

mezi vrcholy i a j . V případě grafu o dvou vrcholech, viz Obrázek 2.1, kde označíme $x(t) := x_1(t)$ a $y(t) := x_2(t)$, dostaneme systém

$$\begin{cases} x' = -d(x - y), \\ y' = -d(y - x). \end{cases} \quad (2.2)$$

Na úvod uveďme, že skutečně platí zachování populace zmíněné v Kapitole 1.1.3, a navíc platí, že populace při volbě (2.1) zůstává nezáporná.

LEMMA 2.1. Řešení soustavy (2.2) splňuje

$$x(t) + y(t) = x_0 + y_0 \quad \text{pro všechna } t \geq 0.$$

Navíc je-li $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$, platí

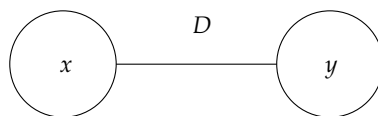
$$x(t) \geq 0, \quad y(t) \geq 0 \quad \text{pro všechna } t \geq 0.$$

Důkaz. Označme $s := x + y$. Potom

$$s' = x' + y' = D(x, y) + D(y, x) = -d(x - y) - d(y - x) = 0.$$

Zřejmě tedy $s(t) = s_0$, tj. $x(t) + y(t) = x_0 + y_0$, pro všechna $t \geq 0$.

Zbytek tvrzení jinými slovy říká, že první kvadrant fázového prostoru je pozitivně invariantní. Toto dokažme pomocí Bonyho věty 1.13. Hranicí prvního kvadrantu jsou nezáporné poloosy x a y . Dokažme, že na těchto poloosách míří vektorové pole dynamického systému (2.2) dovnitř



Obrázek 2.1: Graf o dvou vrcholech. Funkce D udává způsob, jakým dochází k šíření mezi oběma vrcholy.

prvního kvadrantu. Nechť $x \geq 0$ a $y = 0$, pak $(f(x, y), g(x, y)) = (-x, x)$ a vnější normálový vektor má tvar $\nu(x, y) = (0, -1)$. Dostáváme tedy

$$(f(x, y), g(x, y)) \cdot \nu(x, y) = (-x, x) \cdot (0, -1) = -x \leq 0.$$

Obdobně bychom toto obdrželi pro nezápornou poloosu y , a z Bonyho věty dostáváme požadovanou invarianci prvního kvadrantu. \square

Systém (2.2) je lineární, a tedy jej lze vyřešit analyticky. Uvažujme $x_0 + y_0 = s_0$, kde $s_0 > 0$ je celkový součet populace. Pak díky Lemmatu 2.1 platí $y(t) = s_0 - x(t)$. Řešme tedy pouze rovnici

$$x'(t) = -d(x(t) - (s_0 - x(t))) = -d(2x(t) - s_0).$$

Řešení této diferenciální rovnice je

$$x(t) = c \cdot e^{-2dt} + \frac{s_0}{2}, \quad c \in \mathbb{R},$$

analogicky pro $y(t)$. Pro počáteční podmínku x_0, y_0 má řešení systému (2.2) tvar

$$\begin{cases} x(t) = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) e^{-2dt} + \frac{s_0}{2} \\ y(t) = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) e^{-2dt} + \frac{s_0}{2}, \quad s_0 > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Klidový stav $\mathbf{x}^* = [x^*, y^*]$ splňuje podmínku

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0,$$

kde \mathbf{f} je funkce pravých stran (2.2). V případě systému (2.2) se tato soustava redukuje pouze na jednu rovnici

$$-d(x^* - y^*) = 0. \quad (2.4)$$

Okamžitě vidíme, že (2.4) platí pro $x^* = y^*$, tedy

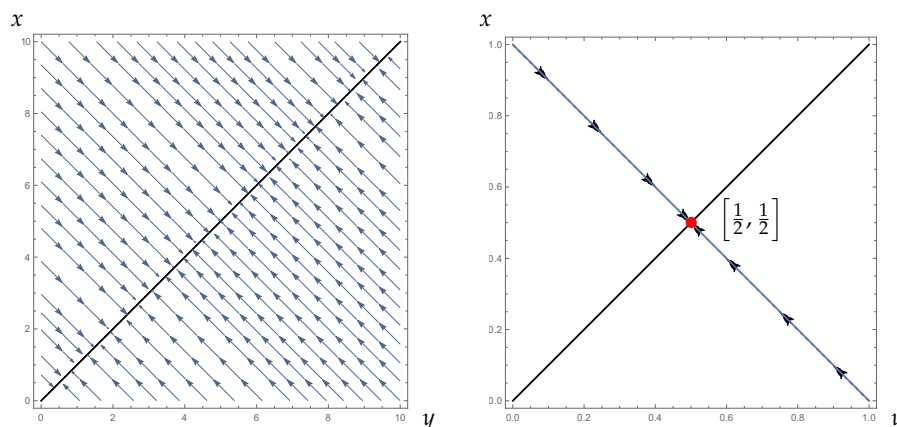
$$[x^*, y^*] = [p, p], \quad p \geq 0.$$

Klidových stavů je tak nekonečně mnoho a leží na ose prvního kvadrantu fázového prostoru, viz Obrázek 2.2. Budeme-li uvažovat dodatečnou podmínku $x_0 + y_0 = 1$, pak pro všechna $t \geq 0$ platí

$$x(t) + y(t) = 1.$$

Uvažujme pak pouze přímku v celém fázovém prostoru kolmou právě na přímku klidových stavů $[p, p]$, viz Obrázek 2.2. Celková populace je tedy normovaná a klidový stav je

$$[x^*, y^*] = \left[\frac{x_0 + y_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2} \right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]. \quad (2.5)$$



Obrázek 2.2: Fázový prostor úlohy (2.2) (vlevo), s dodatečnou podmínkou $x + y = 1$ (vpravo).

VĚTA 2.2. Klidové stavy $\mathbf{x}^* = [p, p]$, $p \geq 0$, rovnice (2.2) jsou stabilní. Navíc pro $x_0 + y_0 = 1$ je klidový stav $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ asymptoticky stabilní.

Důkaz. Systém (2.2) je lineární a matice této soustavy je

$$-d \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice jsou

$$\lambda_1 = -2d, \quad \lambda_2 = 0$$

a příslušné vlastní vektory

$$v_1 = (-1, 1), \quad v_2 = (1, 1).$$

Pro $d > 0$, je klidový stav \mathbf{x}^* podle Věty 1.8 stabilní, neboť všechna vlastní čísla jsou nekladná. Díky nulovému vlastnímu číslu λ_2 však tyto stavy nejsou asymptoticky stabilní, viz Obrázek 2.2.

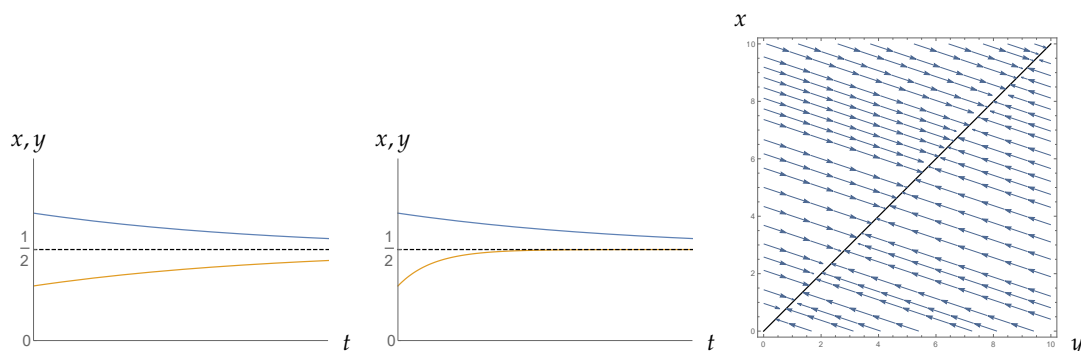
Navíc pro $x_0 + y_0 = 1$ uvažujeme pouze přímku ve fázovém prostoru kolmou na vektor v_2 , a tedy klidový stav $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ je s touto dodatečnou vazbou asymptoticky stabilní díky $\lambda_1 < 0$. \square

2.1 Závislost na směru

Odražme se v této kapitole od systému (2.2) a prozkoumejme jeho „přirozené“ rozšíření, kdy difuze mezi vrcholy bude opět lineárně úměrná rozdílu velikosti jednotlivých populací, avšak s jinou konstantou úměrnosti. Mějme tedy konkrétně systém

$$\begin{cases} x' = -d_1(x - y), \\ y' = -d_2(y - x). \end{cases} \quad (2.6)$$

Ukažme, že obdoba Lemmatu 2.1 o zachování celkové populace v tomto případě neplatí.



Obrázek 2.3: Časový průběh jednotlivých složek systému (2.2) tj. pro $d > 0$ (vlevo), resp. systému (2.6) pro $d_1 > d_2 > 0$ (uprostřed) a jeho fázový portrét (vpravo).

Označme opět $s := x + y$ a zvolme $d_1 \neq d_2 = d_1 + \delta$, $\delta \in \mathbb{R} - \{0\}$. Potom pro $x_0 \neq y_0$

$$\begin{aligned} s' &= x' + y' = -d_1(x - y) - d_2(y - x) \\ &= -d_1(x - y) - (d_1(y - x) + \delta(y - x)) = \delta(x - y) \neq 0. \end{aligned}$$

Zřejmě tedy je-li $x_0 \neq y_0$, platí $s(t) \neq s_0$, tj. $x(t) + y(t) \neq x_0 + y_0$, pro všechna $t > 0$. Systém (2.6) tedy pro $d_1 \neq d_2$ popisuje nejen difuzní proces, ale zahrnuje i určitou interakci závislou na rozdílu parametrů d_1 a d_2 a na rozdílu počtu jedinců x a y v jednotlivých vrcholech.

Tento fakt je dán tím, že systém (2.6) nevzešel ze zákona zachování (1.12). Tento ve své podstatě negativní výsledek zde uvádíme pro úplnost a dokreslení významu zákona zachování a důležitost pečlivé volby tokové funkce D . Zároveň lze na toto nahlížet jako na motivaci, proč dále volíme vždy jednotný difuzní parametr.

Nicméně klidové stavy jsou opět $\mathbf{x}^* = [p, p]$, $p \geq 0$, a jsou stabilní (neasymptoticky). Pravá strana lineárního systému (2.6) je dána maticí

$$\begin{pmatrix} -d_1 & d_1 \\ d_2 & -d_2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice jsou

$$\lambda_1 = -d_1 - d_2, \quad \lambda_2 = 0.$$

Vlastní vektory mají tvar

$$v_1 = \left(-\frac{d_1}{d_2}, 1\right), \quad v_2 = (1, 1).$$

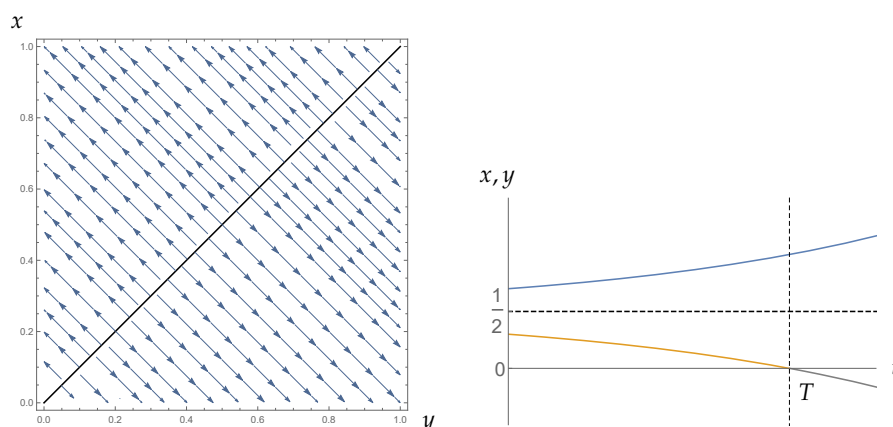
Klidový stav

$$\mathbf{x}^* = [p, p], \quad p \geq 0,$$

je tedy podle Věty 1.8 stabilní. Situaci ilustrujeme na Obrázku 2.3.

2.2 Záporný difuzní parametr

V případě spojité difuzní rovnice (1.5) nelze jednoduše otočit znaménko difuzního parametru (tj. otočit směr běhu času), např. [2]. Je proto přirozené se ptát, zda je toto možné v diskrétním



Obrázek 2.4: Fázový portrét systému (2.2) pro $d < 0$ (vlevo). Časový průběh jednotlivých složek systému (2.2) pro $d < 0$ (vpravo).

prostředí. Motivací pro nás může být fakt, že v tomto případě by tok mířil do míst, kde je větší populace, a tedy by šlo o model shlukování, viz [9].

Zachovejme tvar systému (2.2) a difuzní parametr uvažujme záporný, tedy

$$\begin{cases} x' = -d(x - y), \\ y' = -d(y - x), \end{cases} \quad (2.7)$$

kde $d < 0$.

Pro systém (2.7) platí opět, že celková populace se zachovává, tedy $x(t) + y(t) = x_0 + y_0$ pro všechna $t \geq 0$.

Ovšem neplatí již, že pro nezáporné počáteční podmínky zůstávají populace nezáporné. Zde pro $x_0 \neq y_0$ dojde v konečném čase $T > 0$ ke shluknutí veškeré populace v jednom z vrcholů. Rovnice (2.7) by však dále uvažovala čerpání dalších jedinců z již prázdné lokality (populace v druhém vrcholu by začala být záporná), viz Obrázek 2.4.

Klidové stavy se oproti (2.2) nezmění, jejich tvar je $\mathbf{x}^* = [p, p]$, kde $p \geq 0$, avšak změní se jejich stabilita. Pravá strana systému (2.7) je opět dána maticí

$$-d \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice jsou stejná

$$\lambda_1 = -2d, \quad \lambda_2 = 0.$$

Klidové stavy

$$[x^*, y^*] = [p, p], \quad p \geq 0,$$

jsou ale v tomto případě nestabilní, neboť existuje kladné vlastní číslo $\lambda_1 = -2d > 0$ díky $d < 0$.

V Kapitole 4 budeme uvažovat nelineární tokovou funkci

$$D(i, j, t) = -d(x_i(t) - x_j(t))x_i(t)x_j(t),$$

kteřá tuto nepříjemnou vlastnost nemá. První kvadrant zde zůstává invariantní i pro záporné parametry $d < 0$, a tedy lze v tomto případě model použít také v případě shlukování.

Lineární difuze na více vrcholech 3

3.1 Lineární difuze na n vrcholech

Obecně se dále podíváme na libovolný neorientovaný graf G o n vrcholech, který je souvislý a bez smyček. Jestliže by se skládal z několika komponent, bylo by možné každou komponentu považovat za samostatný podgraf a zkoumat chování systému na každém podgrafu jednotlivě.

Zvolme opět lineární tokovou funkci (2.1). Získáme systém, který lze zapsat pomocí matice sousednosti $\mathbf{A}_G = (a_{ij})_{n \times n}$, kde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{i, j\} \in E, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dostáváme systém

$$x'_i = -d \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i - x_j), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Jak již bylo uvedeno v Kapitole 1.1.3, ekvivalentně můžeme úlohu (3.1) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}' = -d\mathbf{L}_G\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

kde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ a \mathbf{L}_G je Laplaceova matice grafu G , viz (1.9).

Pro námi zvolenou tokovou funkci se opět celková populace zachovává, tj. celkový součet populace je s časem konstantní. Znovu také jednotlivé populace zůstávají v čase nezáporné.

Poznámka 3.1. Počáteční podmínky $x_i(0)$ dynamického systému (3.1) označme symbolem $x_{i,0}$.

LEMMA 3.2. Řešení úlohy (3.1) splňuje

$$\sum_{i=1}^n x_i(t) = \sum_{i=1}^n x_{i,0} \quad \text{pro všechna } t \geq 0.$$

Navíc je-li $x_{i,0} \geq 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$, platí

$$x_i(t) \geq 0 \quad \text{pro všechna } t \geq 0 \text{ a všechna } i = 1, 2, \dots, n.$$

Důkaz. Zvolme $s := \sum_{i=1}^n x_i$. Potom podle (3.1) je

$$s' = \sum_{i=1}^n x_i' = -d \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i - x_j).$$

Vzhledem k tomu, že matice sousednosti neorientovaného grafu G je symetrická a na diagonále nulová, můžeme uvažovat pouze horní trojúhelníkovou matici, a tedy psát

$$s' = -d \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (a_{ij}(x_i - x_j) + a_{ji}(x_j - x_i)) = 0.$$

Zřejmě tedy $s(t) = s_0$, tj. $\sum_{i=1}^n x_i(t) = \sum_{i=1}^n x_{i,0}$, pro všechna $t \geq 0$.

Obdobně jako v Lemmatu 2.1 budeme dále dokazovat invarianci v tomto případě kladného ortantu, který si označíme jako množinu M . Hranici ∂M tvoří body $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, kde některé složky jsou nulové a některé jsou kladné. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$x_1, x_2, \dots, x_k = 0 \quad \text{a} \quad x_{k+1}, \dots, x_n > 0.$$

V tomto bodě může existovat nekonečně mnoho Bonyho vnějších normálových vektorů, všechny mají nicméně tvar

$$\nu(\mathbf{x}) = (-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_k, 0, 0, \dots, 0),$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ jsou libovolná. Pro vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ platí

$$f_i(\mathbf{x}) = -d \cdot \deg(i)x_i + d \sum_{j \in N(i)} x_j = 0 + d \sum_{j \in N(i)} x_j \geq 0, \quad \text{je-li} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nu(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}), f_{k+1}(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \cdot (-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_k, 0, 0, \dots, 0) \\ &= -\alpha_1 f_1(\mathbf{x}) - \alpha_2 f_2(\mathbf{x}) - \dots - \alpha_k f_k(\mathbf{x}) \leq 0. \end{aligned}$$

Z Bonyho věty 1.13 nyní dostáváme invarianci prvního ortantu. □

Podrobnější přístup k tomuto problému lze nalézt v [9].

Dále zformulujeme tvrzení, které nám poskytne informaci o rovnovážných stavech systému (3.1) a jejich stabilitě.

VĚTA 3.3. *Systém (3.1) má nekonečně mnoho klidových stavů ve tvaru*

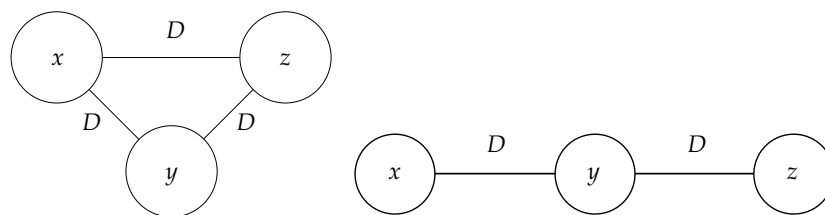
$$\mathbf{x}^* = \left[\frac{s_0}{n}, \dots, \frac{s_0}{n} \right], \quad s_0 = \sum_{i=1}^n x_{i,0} \geq 0,$$

kteří jsou stabilní. Navíc pro $\sum_{i=1}^n x_{i,0} = 1$ je $\mathbf{x}^ = \left[\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right]$ asymptoticky stabilní klidový stav.*

Důkaz. Dokažme, že $\mathbf{x}^* = \left[\frac{s_0}{n}, \dots, \frac{s_0}{n} \right]$ je klidový stav, tedy splňuje $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$. Řešíme pak rovnici

$$-d\mathbf{L}_G \mathbf{x} = 0. \tag{3.3}$$

Shrňme nyní pro nás užitečné vlastnosti Laplaceovy matice \mathbf{L}_G souvislého neorientovaného grafu, viz např. [4].

Obrázek 3.1: Grafy o třech vrcholech, kružnice K_3 (vlevo) a cesta P_3 (vpravo).

- Matice L_G má pouze jedno nulové vlastní číslo $\lambda_1 = 0$.
- Matice L_G má všechna další vlastní čísla $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ kladná.
- Vlastní vektor příslušný nulovému vlastnímu číslu je vektor $(1, 1, \dots, 1)$.

Homogenní soustava (3.3) má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}^* = c \cdot (1, 1, \dots, 1), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Podle Lemmatu 3.2 platí $\sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{i=1}^n x_{i,0} = s_0$, tedy $n \cdot c = s_0$, a tedy

$$\mathbf{x}^* = \frac{s_0}{n} \cdot (1, 1, \dots, 1).$$

Navíc z linearity a faktu, že matice $-d \cdot L_G$ má všechna vlastní čísla nezáporná, z čehož právě jedno nulové, jsou tyto klidové stavy neasymptoticky stabilní.

Pokud $\sum_{i=1}^n x_{i,0} = 1$, uvažujeme ve fázovém prostoru pouze nadrovinu kolmou na vektor $(1, 1, \dots, 1)$, a tedy ze zápornosti ostatních vlastních čísel matice $-dL_G$ dostáváme asymptotickou stabilitu klidového stavu $\mathbf{x}^* = \left[\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right]$. \square

3.2 Lineární difuze na třech vrcholech

Tvrzení uvedená v Kapitole 3.1 nyní budeme ilustrovat na konkrétních příkladech. Zvolme grafy o 3 vrcholech.

Mějme neorientovaný souvislý graf G o třech vrcholech bez smyček. Tento graf může být buď kružnice, tedy úplný graf $K_3 = C_3$, nebo cesta P_3 . Úlohu můžeme zapsat ve tvaru

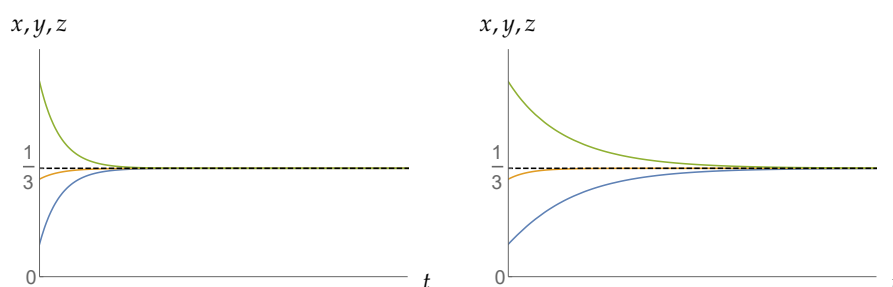
$$\mathbf{x}' = -dL_G \mathbf{x},$$

kde $\mathbf{x} = [x, y, z]$ je vektor neznámých a L_G je Laplaceova matice grafu G .

3.2.1 Lineární difuze na kružnici o třech vrcholech

Vyšetřeme nejprve chování systému, jestliže uvažujeme kružnici o třech vrcholech. Po úpravách získáváme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{cases} x' = d(-2x + y + z), \\ y' = d(x - 2y + z), \\ z' = d(x + y - 2z). \end{cases} \quad (3.4)$$



Obrázek 3.2: Časový průběh řešení s počátečními podmínkami systému (3.4) na kružnici $G = K_3$ (vlevo). Časový průběh řešení s počátečními podmínkami systému (3.5) na cestě $G = P_3$ (vpravo). Navíc je zde v obou případech znázorněn klidový stav $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Uvedeme zde důsledek Věty 3.3 o klidových stavech systému (3.4), kde se navíc věnujeme vyšetření jejich typu, viz [14].

DŮSLEDEK 3.4. *Klidový stav $\mathbf{x}^* = [p, p, p]$, $p \geq 0$, systému (3.4) je stabilní. Navíc pro $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ je klidový stav $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ asymptoticky stabilní typu hvězda.*

Důkaz. První tvrzení je přímým důsledkem Věty 3.3. Ukažme tedy typ klidového stavu $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ v případě $x_0 + y_0 + z_0 = 1$. Matice lineární soustavy (3.4) má tvar

$$d \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla jsou

$$\lambda_{1,2} = -3d, \quad \lambda_3 = 0$$

a příslušné vlastní vektory mají tvar

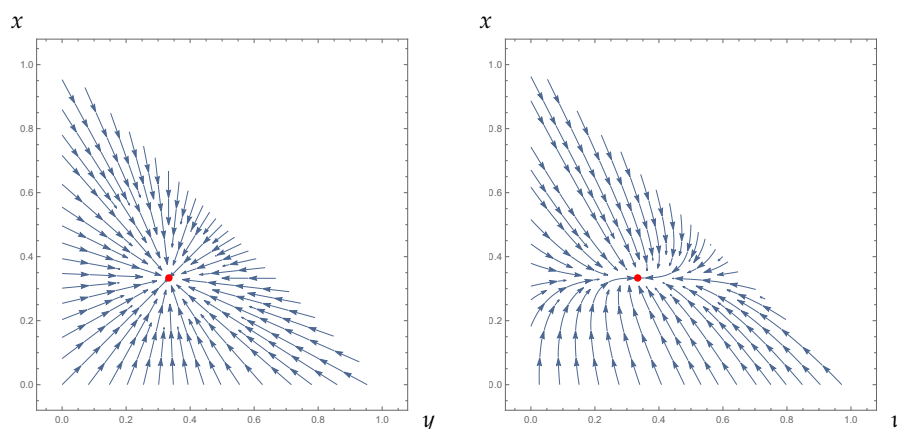
$$\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1).$$

Je-li $x_0 + y_0 + z_0 = 1$, pak uvažujeme pouze rovinu kolmou na vektor \mathbf{v}_3 . Protože uvažujeme pouze $d > 0$, jsou vlastní čísla λ_1, λ_2 záporná, a tedy klidový stav $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ je asymptoticky stabilní. Navíc lze říct, že se jedná o stabilní klidový stav typu hvězda, neboť $\lambda_1 = \lambda_2$ a vlastní vektory příslušné těmto vlastním číslům jsou lineárně nezávislé, viz Obrázek 3.3. \square

3.2.2 Lineární difuze na cestě o třech vrcholech

Odstraníme-li hranu mezi prvním a třetím vrcholem, vznikne z kružnice cesta. Tuto situaci lze popsat soustavou ve tvaru

$$\begin{cases} x' = d(-x + y), \\ y' = d(x - 2y + z), \\ z' = d(y - z). \end{cases} \quad (3.5)$$



Obrázek 3.3: Průmět fázového portréту systému (3.4) na kružnici $G = K_3$ (vlevo), a systému (3.5) na cestě $G = P_3$ (vpravo) za podmínky $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ do roviny xy . Navíc je zde znázorněn klidový stav $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (červeně).

DŮSLEDEK 3.5. *Klidový stav $\mathbf{x}^* = [p, p, p]$, $p \geq 0$, systému (3.5) je stabilní. Navíc pro $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ je klidový stav $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ asymptoticky stabilní typu uzlu.*

Důkaz. Opět se věnujme pouze typu asymptoticky stabilního stavu $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ v případě $x_0 + y_0 + z_0 = 1$. Matice

$$d \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

má vlastní čísla

$$\lambda_1 = -3d, \quad \lambda_2 = -d, \quad \lambda_3 = 0$$

a příslušné vlastní vektory mají tvar

$$v_1 = (1, -2, 1), \quad v_2 = (-1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

Pro $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ leží příslušná trajektorie opět v rovině kolmé na vektor v_3 , a tedy klidový stav $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ je asymptoticky stabilní uzlu, neboť vlastní čísla $\lambda_1 = -3d$ a $\lambda_2 = -d$ jsou pro $d > 0$ záporná různá, viz Obrázek 3.3. Navíc díky $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ se trajektorie blíží pro $t \rightarrow \infty$ k rovnovážnému stavu tečně s vektorem v_2 . \square

Odstranění jedné hrany z grafu o třech vrcholech tedy stabilitu systému nijak neovlivnilo. Pouze se změnila rychlost průběhu difuze, viz Obrázek 3.2.

Nelineární difuze

na dvou vrcholech 4

4.1 Difuze

Vraťme se v této kapitole ke grafu o dvou vrcholech. Opusťme nyní prostředí, ve kterém se tok řídí lineárním zákonem (2.1). Motivováni [9] se věnujme detailně případu, kdy se tok po hraně mezi jednotlivými vrcholy bude řídit vztahem

$$D(i, j, t) = -d(x_i(t) - x_j(t))x_i(t)x_j(t), \quad d > 0. \quad (4.1)$$

Rozdíl mezi těmito přístupy ilustrujeme na Obrázku 4.1, kde vidíme, že v případě (2.1) je difuze nejsilnější, když se vzdalujeme od klidového stavu $\frac{1}{2}$, oproti vztahu (4.1), kdy je difuze nejsilnější mezi klidovým stavem $\frac{1}{2}$ a novými klidovými stavy, které odpovídají situaci, kdy je celá populace nashromážděna v jedné z lokalit (detailně viz dále).

Studujme tedy systém

$$\begin{cases} x' = -d(x - y)xy, \\ y' = -d(y - x)xy. \end{cases} \quad (4.2)$$

Tento systém lze zjednodušit vydělením obou rovnic systému (4.2) konstantou $d > 0$ a zavedením nového času $\tau := d \cdot t$. Využitím $\dot{x} := \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = x' \cdot \frac{1}{d}$ dostáváme z první rovnice (4.2)

$$x' \cdot \frac{1}{d} = (y - x)xy,$$

tj.

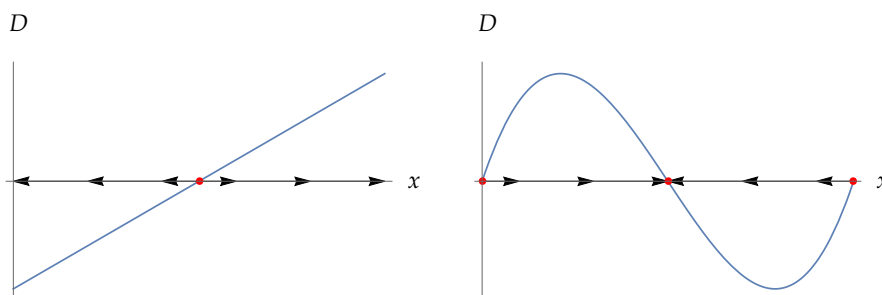
$$\dot{x} = (y - x)xy.$$

Obdobně bychom postupovali u druhé rovnice (4.2). Pak po přeznačení $\dot{x} := x'$, $\dot{y} := y'$ získáváme systém bez parametrů ve tvaru

$$\begin{cases} x' = (y - x)xy, \\ y' = (x - y)xy. \end{cases} \quad (4.3)$$

Poznámka 4.1. Nelineární systém (4.3) je pro $x, y \geq 0$ symetrický podle osy $x = y$.

Celková populace se v systému (4.3) opět zachovává.



Obrázek 4.1: Časový průběh grafu funkce $D(x, 1-x) = 1-2x$ (vlevo) a $D(x, 1-x) = (1-2x)(1-x)x$ (vpravo).

LEMMA 4.2. Řešení soustavy (4.3) splňuje

$$x(t) + y(t) = x_0 + y_0 \quad \text{pro všechna } t \geq 0.$$

Navíc je-li $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$, platí

$$x(t) \geq 0, \quad y(t) \geq 0 \quad \text{pro všechna } t \geq 0.$$

Důkaz. Pro $s := x + y$ platí

$$s' = x' + y' = (y-x)xy + (x-y)xy = 0.$$

Tedy $s(t) = s_0$, tj. $x(t) + y(t) = x_0 + y_0$, pro všechna $t > 0$. Invarianci prvního kvadrantu zde dostáváme z Bonyho věty 1.13 přímo, neboť vektorové pole je na hranici prvního kvadrantu nulové. \square

Klidové stavy tohoto systému vyhovují podmínce $f(\mathbf{x}^*) = 0$, tedy v tomto případě opět jediné rovnici

$$(y-x)xy = 0.$$

To platí pro

$$\mathbf{x}_0^* = [p, p], \quad p > 0,$$

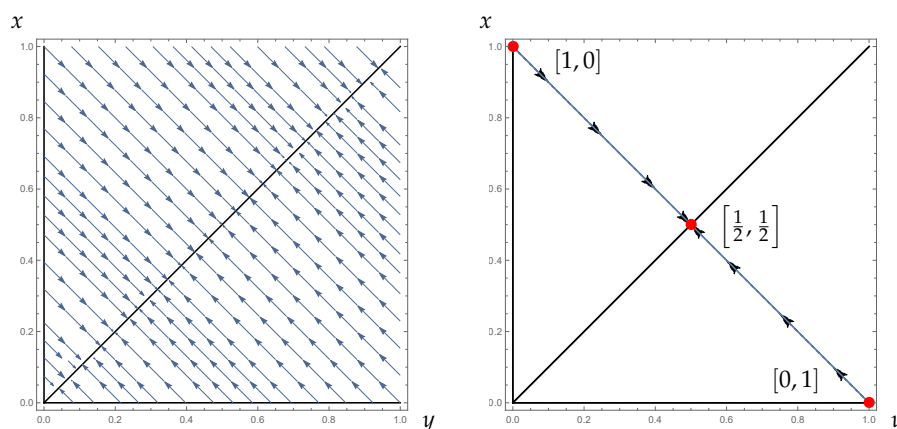
$$\mathbf{x}_1^* = [p, 0], \quad p \geq 0,$$

$$\mathbf{x}_2^* = [0, p], \quad p \geq 0.$$

Uvažujeme-li dodatečnou podmínku $x_0 + y_0 = 1$, klidové stavy pak mají tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0^* &= \left[\frac{x_0+y_0}{2}, \frac{x_0+y_0}{2} \right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \\ \mathbf{x}_1^* &= [x_0 + y_0, 0] = [1, 0], \\ \mathbf{x}_2^* &= [0, x_0 + y_0] = [0, 1]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Definujme nyní nulokliny, jejichž průnikem jsou klidové stavy systému. Tyto křivky rozdělují fázovou rovinu na oblasti, v nichž zůstává znaménko derivace dané složky stejné, viz Obrázek 4.2.



Obrázek 4.2: Fázový portrét úlohy (4.3) s vyznačenými klidovými stavy, respektive nuloklinami danými v (4.5) (černě), (vlevo). S dodatečnou podmínkou $x + y = 1$ (vpravo).

DEFINICE 4.3. Množina $N_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : f(x, y) = 0\}$ se nazývá nuloklina vzhledem k proměnné x . Obdobně definujeme nuloklinu N_y vzhledem k proměnné y .

LEMMA 4.4. Nulokliny systému (4.3) jsou

$$N_x = N_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = 0 \vee y = 0 \vee x = y\}. \quad (4.5)$$

Důkaz. Nuloklina N_x splňuje $x'(t) = 0$, tedy

$$(y - x)xy = 0.$$

Tato rovnost platí pro

$$x = 0 \quad \text{nebo} \quad y = 0 \quad \text{nebo} \quad x = y,$$

čímž jsme získali množinu N_x . Stejný výsledek bychom obdrželi pro nuloklinu N_y . \square

VĚTA 4.5. Klidové stavy systému (4.3) jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0^* &= [p, p], & p > 0, & \text{ stabilní,} \\ \mathbf{x}_1^* &= [p, 0], & p \geq 0, & \text{ nestabilní,} \\ \mathbf{x}_2^* &= [0, p], & p \geq 0, & \text{ nestabilní.} \end{aligned}$$

Navíc pro $x_0 + y_0 = 1$ je $\mathbf{x}_0^* = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ asymptoticky stabilní.

Důkaz. Vyšetřeme stabilitu klidových stavů. Systém (4.3) je nelineární, pokusme se proto rozhodnout podle Důsledku 1.9. Jacobiho matice systému (4.3) je ve tvaru

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 - 2xy & -x^2 + 2xy \\ -y^2 + 2xy & x^2 - 2xy \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{J}(p, p) = p^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}(p, 0) = p^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{J}(0, p) = p^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{J}(p, p)$ jsou

$$\lambda_1 = -2p^2, \quad \lambda_2 = 0.$$

Vlastní vektory mají tvar

$$v_1 = (-1, 1), \quad v_2 = (1, 1).$$

Protože $p > 0$, pak $\lambda_1 < 0$. Vlastní číslo λ_2 je nulové, přičemž systém (4.3) je nelineární, tedy nelze rozhodnout o stabilitě klidového stavu \mathbf{x}_0^* na základě linearizace. Využijme tedy znalosti tvaru nuloklin v (4.5). Vektor pravých stran $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ pro $x > 0$ a $y > 0$ je kolmý na polopřímku $x = y$, což plyne z Lemmatu 4.2 o zachování celkové populace, neboť se vždy pohybujeme po přímce $x + y = s_0$. Pro $y > x$ míří vektorové pole stejným směrem jako vektor $(1, -1)$, pro $y < x$ pak s vektorem $(-1, 1)$. Polopřímka $x = y$ ve fázovém prostoru tedy opět tvoří stabilní klidové stavy. Pro $x_0 + y_0 = 1$ uvažujeme pouze přímku ve fázovém prostoru kolmou na vektor v_2 , a tedy navíc díky zápornosti λ_1 je klidový stav $\mathbf{x}_0^* = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ asymptoticky stabilní.

Vlastní čísla matice $\mathbf{J}(p, 0)$ jsou

$$\lambda_1 = p^2, \quad \lambda_2 = 0.$$

Pro $p > 0$ je pak $\lambda_1 > 0$, a díky tomu klidový stav \mathbf{x}_1^* je nestabilní.

Stejně vlastní čísla matice $\mathbf{J}(0, p)$ jsou

$$\lambda_1 = p^2, \quad \lambda_2 = 0.$$

Klidový stav \mathbf{x}_2^* je pro $p > 0$ nestabilní.

Uvažujme ještě $p = 0$, pak všechny tři klidové stavy splynou v jeden bod fázového prostoru $[0, 0]$. Z nuloklin opět vidíme, podobně jako výše, že tento klidový stav je stabilní. \square

Pro počáteční podmínky splňující $x_0 + y_0 = 1$ se tak systém ustaluje v $\mathbf{x}_0^* = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, nebo zůstane v bodě $\mathbf{x}_1^* = [1, 0]$, případně $\mathbf{x}_2^* = [0, 1]$, viz Obrázek 4.2.

Zachovejme dále tvar systému (4.3) a difuzní parametr uvažujme záporný, tedy

$$\begin{cases} x' = d(y - x)xy, \\ y' = d(x - y)xy, \end{cases} \quad (4.6)$$

kde $d < 0$. V tomto případě se vlastně změní vektorové pole systému (4.3) na opačné. Vymění se tedy i stabilita klidových stavů. Dochází tedy pro $x_0 \neq y_0$ ke shlukování populace v jednom z vrcholů. Nicméně oproti případu s lineární difuzí (2.7) k tomuto dochází až pro $t \rightarrow \infty$. Populace tedy zůstávají nezáporné i v případě záporného $d < 0$, viz [9].

4.2 Difuze s reakcí

V tomto odstavci se věnujme situaci, kdy v jednotlivých lokalitách přidáme vnitřní zdroje. Připomeňme, že situace s lineární difuzí a jednotlivými kombinacemi reakčních funkcí (exponenciální, logistická a bistabilní dynamika) je studována v [5].

V našem případě se podívejme na případ nelineární difuze popsané tokovou funkcí (4.1) a jednotlivé volby zdrojových funkcí. Začneme se studiem exponenciálního růstu v obou vrcholech.

4.2.1 Exponenciální růst

Uvažujme neorientovaný graf o dvou vrcholech s nelineární difuzí, viz systém (4.3). V každém vrcholu přidejme exponenciální reakci závislou na reakčním parametru r

$$\begin{cases} x' = (y - x)xy + rx, \\ y' = (x - y)xy + ry. \end{cases} \quad (4.7)$$

Předpokládáme $r \geq 0$, tento parametr nyní zahrnuje nejen reakční parametr, ale nově i difuzní parametr $d > 0$, k čemuž bychom došli opět zavedením nového času $\tau = d \cdot t$ a přeznačením $r := \frac{r}{d}$.

Pro $r = 0$ je reakce nulová, a tedy mezi vrcholy probíhá pouze difuze popsána v Kapitole 4.1.

Poznámka 4.6. Nelineární systém (4.7) je pro $x, y \geq 0$ opět symetrický podle osy $x = y$.

VĚTA 4.7. *Systém (4.7) má nestabilní klidový stav $\mathbf{x}^* = [0, 0]$. Nulokliny tohoto systému jsou*

$$\begin{aligned} N_x &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = 0 \vee x = y + \frac{r}{y} \right\}, \\ N_y &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y = 0 \vee y = x + \frac{r}{x} \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Důkaz. Nuloklina N_y splňuje $y'(t) = 0$. Po úpravě

$$y((x - y)x + r) = 0.$$

Tato rovnost platí pro

$$y = 0 \quad \text{nebo} \quad y = x + \frac{r}{x},$$

čímž jsme získali množinu N_y . Analogicky bychom obdrželi nuloklinu N_x . Klidové stavy se nacházejí v průnicích těchto množin.

Vyšetřeme nejprve průběh funkce

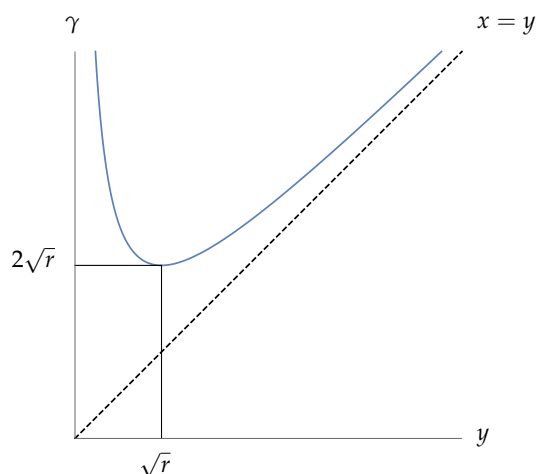
$$\gamma(x) = x + \frac{r}{x}, \quad x > 0. \quad (4.9)$$

Obor hodnot této funkce je podmnožinou \mathbb{R}_+ , neboť uvažujeme pouze $r > 0$ a $x > 0$. První derivace je ve tvaru

$$\gamma'(x) = 1 - \frac{r}{x^2}.$$

Stacionární bod této funkce splňuje $\gamma'(x) = 0$, tedy $x = \sqrt{r}$ a $\gamma(\sqrt{r}) = 2\sqrt{r}$. Z druhé derivace

$$\gamma''(x) = \frac{2r}{x^3}$$



Obrázek 4.3: Graf funkce $\gamma(x)$ v (4.9) se znázorněným minimem a asymptotou $x = y$.

pro $x > 0$ pak můžeme říct, že funkce je pro $x > 0$ konvexní, a tedy daný stacionární bod je globálním minimem. Doplňme ještě

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \gamma(x) = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) = \infty.$$

Asymptotou funkce $\gamma(x)$ pro $x \rightarrow \infty$ je osa $x = y$, viz Obrázek 4.3. Analogicky funkci $\gamma(y) = y + \frac{r}{y}$ z nulokliny N_x bychom vyšetřili obdobně. Křivky $\gamma(x)$ a $\gamma(y)$ tedy nemají žádný společný bod.

Klidovým stavem tak může být pouze počátek $[x^*, y^*] = [0, 0]$, tj. průsečík přímek $x = 0$ a $y = 0$.

Proveďme linearizaci systému (4.7). Jacobiho matice je ve tvaru

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 - 2xy + r & -x^2 + 2xy \\ -y^2 + 2xy & x^2 - 2xy + r \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice jsou

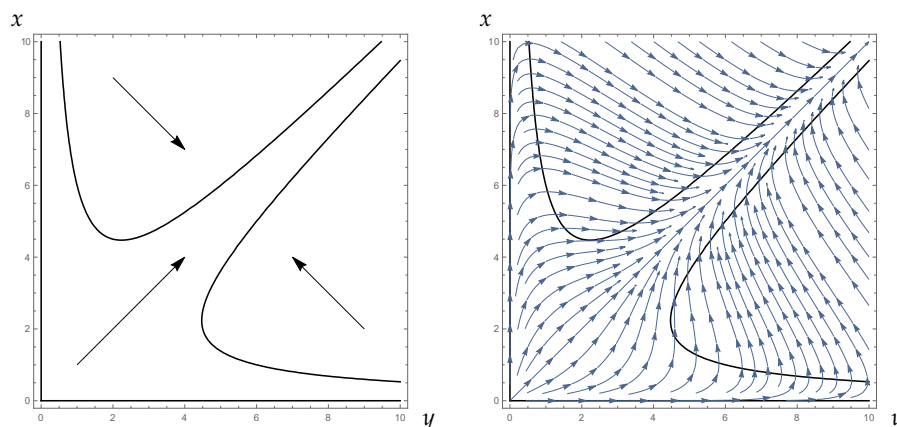
$$\lambda_{1,2} = r > 0.$$

Klidový stav $[x^*, y^*] = [0, 0]$ je nestabilní hvězda, neboť existují dva lineárně nezávislé příslušné vlastní vektory, např. $v_1 = (1, 0)$ a $v_2 = (0, 1)$, viz Obrázek 4.4. \square

Pro popis systému (4.7) nyní definujme křivku, která prochází bodem, kde má funkce $\gamma(x)$ v (4.9), z nulokliny N_y , nulovou derivaci. Tato křivka je jednoznačně určena jednou trajektorií systému (4.7).

Nechť $(x_N(t), y_N(t))$ značí řešení systému (4.7) s počáteční podmínkou $[x_0, y_0] = [\sqrt{r}, 2\sqrt{r}]$.

Definujme funkci $\tilde{y}(x) : [0, \sqrt{r}] \rightarrow [0, 2\sqrt{r}]$, která je ostře rostoucí, platí $\tilde{y}(0) = 0$ a $\tilde{y}(\sqrt{r}) = 2\sqrt{r}$



Obrázek 4.4: Fázový portrét systému (4.7).

a pro všechna $t \in (-\infty, 0)$ je

$$y_N(t) = \tilde{y}(x_N(t)).^1$$

Potom definujeme následující množinu

$$K := \left\{ (x, \tilde{y}(x)) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{r} \right\}. \quad (4.10)$$

Dále zdefinujeme tři oblasti ve fázovém prostoru úlohy (4.7), viz Obrázek 4.6, díky kterým budeme moci popsat monotonií trajektorií.

Pro $y \geq x$ definujeme

$$\Omega_0 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : (0 < x \leq \sqrt{r}, x \leq y \leq \tilde{y}(x)) \vee \left(\sqrt{r} < x, x \leq y \leq x + \frac{r}{x} \right) \right\}, \quad (4.11)$$

$$\Omega_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \left(0 < x \leq \sqrt{r}, x + \frac{r}{x} \leq y \right) \vee \left(\sqrt{r} < x, x + \frac{r}{x} < y \right) \right\}, \quad (4.12)$$

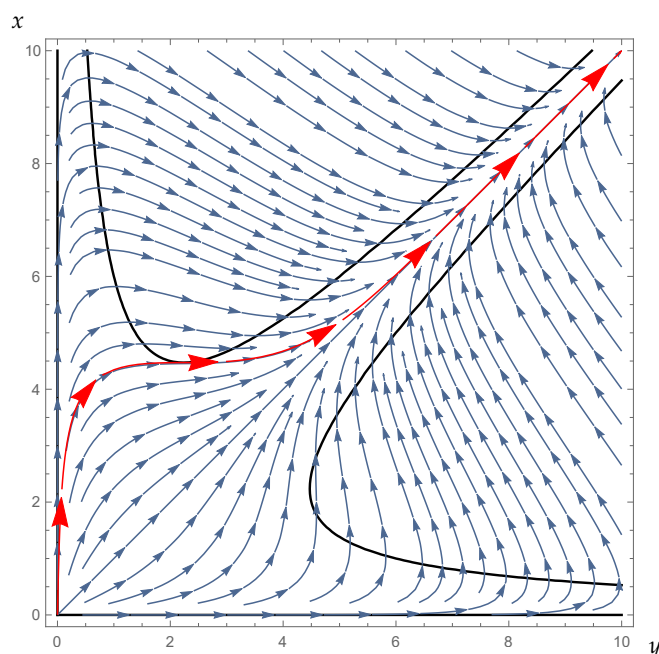
$$\Omega_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < x < \sqrt{r}, \tilde{y}(x) < y < x + \frac{r}{x} \right\}. \quad (4.13)$$

V následující větě opět uvažujeme pouze $y \geq x$, pro $y \leq x$ platí analogická tvrzení díky symetrii (viz Poznámku 4.6).

VĚTA 4.8. *Nechť $y_0 \geq x_0 > 0$, $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ jsou oblasti definované postupně v (4.11), (4.12) a (4.13) a nechť $(x(t), y(t))$ je řešení systému (4.7) s počáteční podmínkou $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Potom platí $x'(t) > 0$ pro všechna $t > 0$ a*

1. *jestliže $[x_0, y_0] \in \Omega_0$, pak je $y'(t) > 0$ pro všechna $t > 0$,*
2. *jestliže $[x_0, y_0] \in \Omega_1$, pak existuje $t_1 > 0$ takové, že $y'(t) < 0$ pro všechna $t \in (0, t_1)$ a $y'(t) > 0$ pro všechna $t \in (t_1, \infty)$,*

¹Obdobně jako v důkazu Věty 4.8 lze dokázat, že oblast $[0, \sqrt{r}] \times [0, 2\sqrt{r}]$ je negativně invariantní, viz Bonyho větu 1.13. Z Poincarého-Bendixonovy věty 1.12 pak plyne, že trajektorie $(x_N(t), y_N(t))$ pro $t \rightarrow -\infty$ se musí blížit ke klidovému stavu $[0, 0]$, neboť v této oblasti neexistuje uzavřená trajektorie. Navíc z nuloklin ihned dostáváme $x_N(t)' > 0, y_N(t)' > 0$ pro $t \in (-\infty, 0)$, což ověřuje existenci a vlastnosti funkce $\tilde{y}(x)$.



Obrázek 4.5: Červeně znázorněna trajektorie $(x_N(t), y_N(t))$ systému (4.7), jejíž součástí je i křivka K dána v (4.10) (černě jsou znázorněny nulokliny tohoto systému).

3. jestliže $[x_0, y_0] \in \Omega_2$, pak existují $t_1, t_2 > 0$ taková, že $y'(t) > 0$ pro všechna $t \in (0, t_1)$, $y'(t) < 0$ pro všechna $t \in (t_1, t_2)$ a $y'(t) > 0$ pro všechna $t \in (t_2, \infty)$.

Důkaz. Uvažujeme $y \geq x > 0$, a tedy $y + \frac{r}{y} > x$. Podle Věty 4.7 je $x'(t) = f(x(t), y(t)) > 0$ pro všechna $t > 0$. Vyřešme chování druhé složky $y(t)$. Pro $y = 0$ a $y = x + \frac{r}{x}$ je $g(x, y) = 0$, pro dané x platí

$$\text{je-li } y \in \left(0, x + \frac{r}{x}\right), \text{ pak } g(x, y) > 0$$

a

$$\text{je-li } y \in \left(x + \frac{r}{x}, +\infty\right), \text{ pak } g(x, y) < 0.$$

1. Necht $[x_0, y_0] \in \Omega_0$. Chceme ukázat, že oblast Ω_0 je pozitivně invariantní. Využijme Věty 1.13. Zvolme

$$M := \Omega_0 \cup \{[0, 0]\},$$

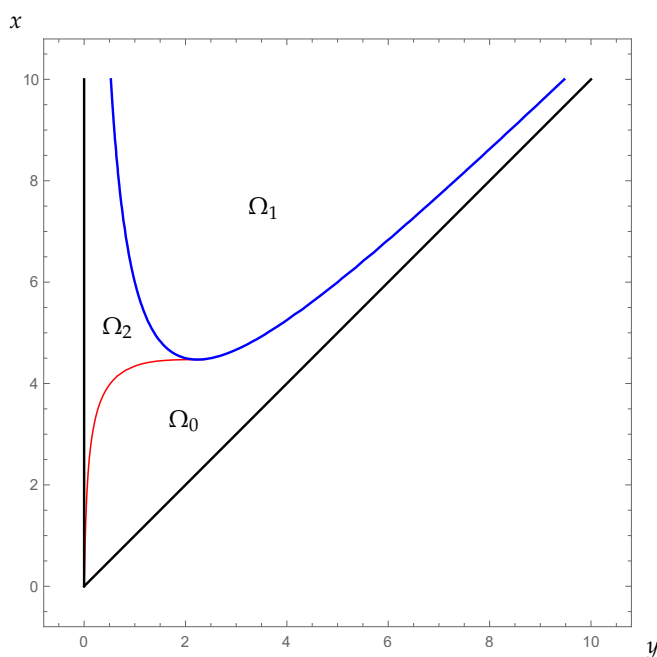
tj.

$$\partial M := [0, 0] \cup K \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x > \sqrt{r}, y = x + \frac{r}{x} \right\} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = y \}.$$

Dokažme, že platí

$$v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$$

pro všechna $x \in \partial M$.



Obrázek 4.6: Oblasti Ω_0 , Ω_1 a Ω_2 se zvýrazněnou křivkou K (červeně) a částí množiny N_y pro $x, y > 0$ (modře).

Jestliže uvažujeme bod $[0, 0]$, jsou předpoklady Věty 1.13 triviálně splněny, neboť se jedná o klidový stav, a tedy $v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$.

Pro $(x, y) \in K$ je tečný vektor ke křivce K vektor (x', y') , protože K je trajektorie, viz Obrázek 4.5. Pak Bonyho vnější normálový vektor $v(\mathbf{x})$ je vektor kolmý na $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, a tedy opět

$$v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

Pro $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x > \sqrt{r}, y = x + \frac{r}{x}\}$ je tečný vektor k nuloklině N_y pro $y > x$ ve tvaru $(x, 1 - \frac{r}{x^2})$. Bonyho vnější normálový vektor je

$$v(\mathbf{x}) = \left(\frac{r}{x^2} - 1, x \right)$$

a

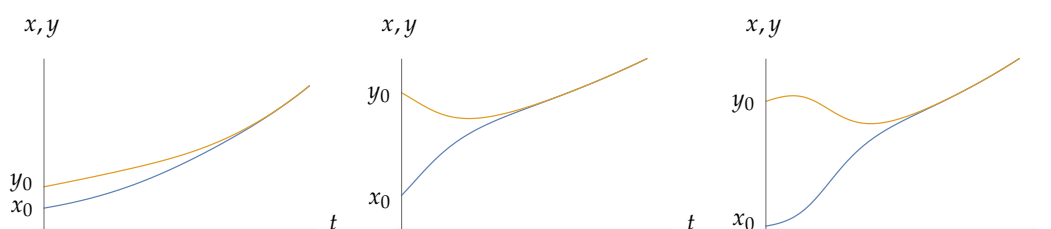
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x', 0) = ((y - x)xy + rx, 0),$$

kde $y = x + \frac{r}{x}$, tedy

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(2rx + \frac{r^2}{x}, 0 \right).$$

Pak pro $x > \sqrt{r}$ je

$$v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \underbrace{\left(\frac{r}{x^2} - 1 \right)}_{<0} \cdot \underbrace{\left(2rx + \frac{r^2}{x} \right)}_{>0} < 0.$$



Obrázek 4.7: Časový průběh řešení systému (4.7) pro počáteční podmínky $[x_0, y_0] \in \Omega_0$ (vlevo), $[x_0, y_0] \in \Omega_1$ (uprostřed), $[x_0, y_0] \in \Omega_2$ (vpravo).

Zbýlá část $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = y\}$ hranice ∂M je tvořena jednou z trajektorií (viz Poznámku 4.6), z čehož okamžitě dostáváme, že vektorové pole je zde kolmé na vnější normálový vektor.

Tím jsme ověřili předpoklady Věty 1.13 pro celou hranici množiny M . Množina M je tedy pozitivně invariantní. Neboť bod $[0, 0]$ je rovnovážným stavem, je stejně tak pozitivně invariantní i množina Ω_0 . Jelikož z nuloklin víme, že na Ω_0 je $y'(t) > 0$, platí tvrzení 1.

2. Nechť $[x_0, y_0] \in \Omega_1$. Dokažme, že existuje $t_1 > 0$ takové, že $y(t_1) = x(t_1) + \frac{r}{x(t_1)}$.

Definujme opět množinu

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x > 0 \wedge x + \frac{x}{r} \leq y \leq y_0 \right\}.$$

Již jsme vyšetřili klidové stavy systému (4.7) ve Větě 4.7. V oblasti M neexistuje žádný klidový stav. Navíc jelikož v této oblasti mají $x'(t)$ a $y'(t)$ vždy stejné znaménko, nemůže v M existovat ani uzavřená trajektorie. Z Poincarého-Bendixsonovy věty 1.12 dostáváme, že trajektorie začínající v $[x_0, y_0]$ musí v určitém čase $t_1 > 0$ opustit množinu M . Ze směrů vektorového pole na hranici ∂M obdržíme, že toto musí nastat přechodem nulokliny N_y bodem, kde $x > \sqrt{r}$, tj. $y(t_1) = x(t_1) + \frac{r}{x(t_1)}$, a trajektorie přechází do oblasti Ω_0 , kde je její chování popsáno v bodě 1.

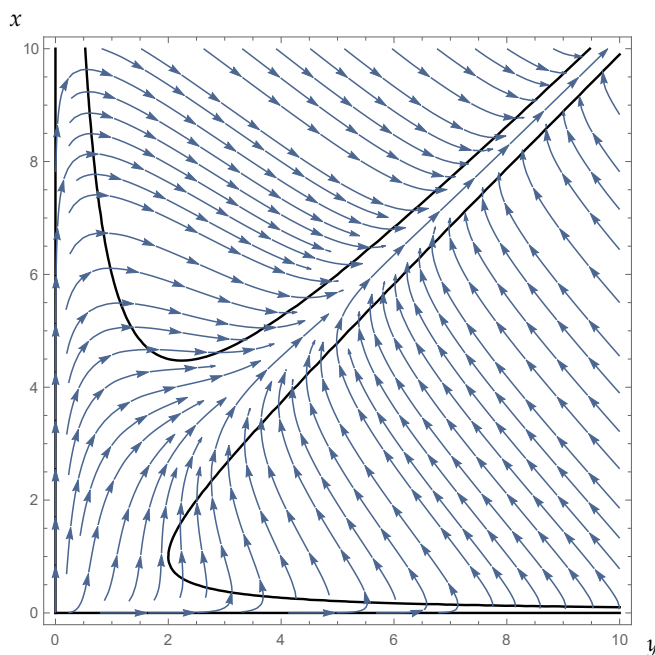
3. Nechť $[x_0, y_0] \in \Omega_2$. Z obdobného důvodu jako v předchozím bodě existuje $t_1 > 0$ takové, že $y(t_1) = x(t_1) + \frac{r}{x(t_1)}$, kde $x(t_1) < \sqrt{r}$.

Trajektorie tedy má v t_1 průsečík s nuloklinou N_y v bodě, kde $x < \sqrt{r}$, trajektorie tak přechází do oblasti Ω_1 , kde je její chování popsáno v bodě 2. \square

Tvrzení Věty 4.8 ilustrujeme na Obrázku 4.7.

Prozatím jsme se věnovali situaci, kdy je dynamika v obou vrcholech identická. Reakce je ovlivňována pouze parametrem r . Budeme-li uvažovat různé exponenciální reakce s různými parametry, bude se systém chovat obdobně. Mějme tak pro $r_1, r_2 > 0$ systém ve tvaru

$$\begin{cases} x' = (y - x)xy + r_1x, \\ y' = (x - y)xy + r_2y. \end{cases} \quad (4.14)$$



Obrázek 4.8: Fázový portrét a nulokliny (černě) systému (4.14) pro $r_2 > r_1 > 0$.

Tím porušíme symetrii prvního kvadrantu z Poznámky 4.6. Nulokliny systému (4.14) jsou

$$\begin{aligned} N_x &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n : x = 0 \vee x = y + \frac{r_1}{y} \right\}, \\ N_y &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n : y = 0 \vee y = x + \frac{r_2}{x} \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Změnou parametrů kvalitativně nezměníme chování funkce $\gamma(x)$ v (4.9). Nulokliny N_x a N_y dané v (4.15) mají pouze jediný průsečík, a to nestabilní klidový stav $\mathbf{x}^* = [0, 0]$.

Dále by bylo možné dokázat obdobné tvrzení jako Větu 4.8. Znázorníme proto chování systému (4.14) pouze na Obrázku 4.8.

4.2.2 Exponenciální a logistický růst

Dále uvažujme opět neorientovaný graf o dvou vrcholech, nelineární difuzi a v jednom vrcholu přidejme exponenciální reakci závislou na reakčním parametru $r > 0$ a v druhém obvyklou logistickou reakci závislou na stejném reakčním parametru $r > 0$ a kapacitním parametru $k > 0$

$$\begin{cases} x' = d(y - x)xy + rx, \\ y' = d(x - y)xy + ry \left(1 - \frac{y}{k}\right). \end{cases} \quad (4.16)$$

Tento systém je závislý na třech parametrech. Vydělením obou rovnic parametrem d a substitucí $u := \frac{x}{k}$ a $v := \frac{y}{k}$ získáme

$$\begin{cases} \frac{1}{dk} \cdot u' = \frac{1}{k^3} (v - u)uv + \frac{r}{dk} u, \\ \frac{1}{dk} \cdot v' = \frac{1}{k^3} (u - v)uv + \frac{r}{dk} v (1 - v). \end{cases}$$

Přeškálováním času $\tau := \frac{d}{k^2} \cdot t$ a označením $\dot{u} = \frac{du}{d\tau} = u' \cdot \frac{k^2}{d}$, $\dot{v} = \frac{dv}{d\tau} = v' \cdot \frac{k^2}{d}$ dostaneme

$$\begin{cases} \frac{1}{k^3} \cdot \dot{u} = \frac{1}{k^3} (v - u)uv + \frac{r}{dk} u, \\ \frac{1}{k^3} \cdot \dot{v} = \frac{1}{k^3} (u - v)uv + \frac{r}{dk} v (1 - v). \end{cases}$$

Vynásobením obou rovnic k^3 a zpětným přeznačením pak obdržíme systém závislý pouze na novém parametru $r := \frac{rk^2}{d}$ ve tvaru

$$\begin{cases} x' = (y - x)xy + rx, \\ y' = (x - y)xy + ry(1 - y). \end{cases} \quad (4.17)$$

Popišme nyní nulokliny systému (4.17) a vyšetřeme, zda tento systém má nějaký klidový stav, a pokud ano, tak jeho stabilitu.

VĚTA 4.9. *Systém (4.17) má nestabilní klidové stavy $\mathbf{x}_0^* = [0, 0]$, $\mathbf{x}_1^* = [0, 1]$ a stabilní klidový stav \mathbf{x}_2^* , kde $x_2^* > 0$ a $y_2^* > 0$.² Nulokliny tohoto systému jsou*

$$\begin{aligned} N_x &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n : x = 0 \vee x = y + \frac{r}{y} \right\}, \\ N_y &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n : y = 0 \vee y = \frac{r+x^2}{r+x} \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Důkaz. Klidové stavy tohoto systému splňují $x'(t) = 0$, $y'(t) = 0$. Řešme tedy soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x((y - x)y + r) &= 0, \\ y((x - y)x + r(1 - y)) &= 0. \end{aligned}$$

To platí pro triviálně pro $[x_0^*, y_0^*] = [0, 0]$. Pro $x = 0$ má druhá rovnice tvar

$$ry(1 - y) = 0,$$

a tedy $[x_1^*, y_1^*] = [0, 1]$. Třetí klidový stav $[x_2^*, y_2^*]$, viz Obrázek 4.11, je pak průsečík křivek

$$\begin{aligned} x &= y + \frac{r}{y}, \\ y &= \frac{r + x^2}{r + x}. \end{aligned}$$

Ve Větě 4.7 jsme již analyzovali chování funkce $\gamma(y) = y + \frac{r}{y}$, proto

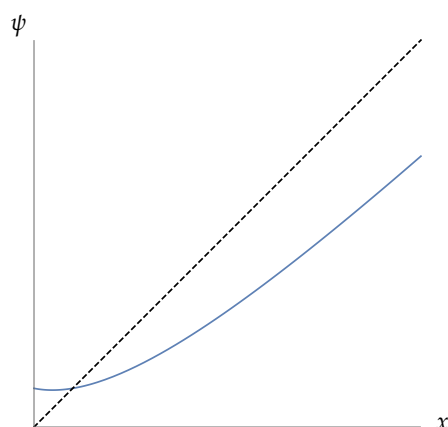
$$\begin{aligned} \text{je-li } x &\in \left(0, y + \frac{r}{y}\right), \text{ pak } f(x, y) > 0, \\ \text{je-li } x &\in \left(y + \frac{r}{y}, \infty\right), \text{ pak } f(x, y) < 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dále vyšetřeme chování funkce

$$\psi(x) = \frac{r + x^2}{r + x}. \quad (4.20)$$

Definiční obor této funkce je \mathbb{R}_+ , neboť uvažujeme pouze $x > 0$. První derivace má tvar

²Přesná hodnota tohoto klidového stavu má komplikovaný tvar a lze jej analyticky vyjádřit například pomocí software Wolfram Mathematica.

Obrázek 4.9: Graf funkce $\psi(x)$ v (4.20) se znázorněnou osou prvního kvadrantu (čárkovaně).

$$\psi'(x) = \frac{x^2 + 2rx - r}{(r+x)^2}.$$

Stacionární bod splňuje $\psi'(x) = 0$, to nastává pro nezápornou hodnotu

$$x_s = \sqrt{r^2 + r} - r.$$

Druhá derivace

$$\psi''(x) = \frac{2r(1+r)}{(r+x)^3}$$

je pro $x = x_s$

$$\psi''(x_s) = \frac{2}{\sqrt{r^2 + r}} > 0.$$

Stacionární bod je tedy minimem této funkce, a proto

$$\begin{aligned} \text{je-li } y \in \left(0, \frac{r+x^2}{r+x}\right), \text{ pak } g(x, y) > 0, \\ \text{je-li } y \in \left(\frac{r+x^2}{r+x}, \infty\right), \text{ pak } g(x, y) < 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dokažme ještě, že existuje právě jeden průsečík křivek $x = \gamma(y)$, $y = \phi(x)$, a to právě $[x_2^*, y_2^*]$. Daný průsečík splňuje

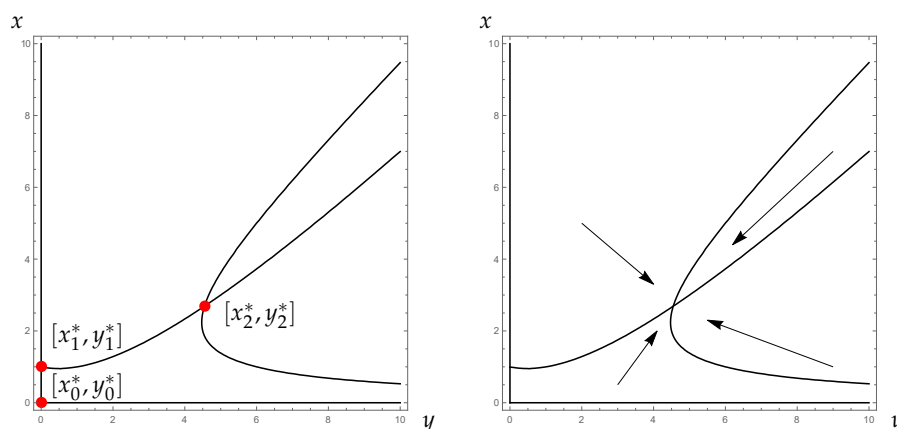
$$\psi(\gamma(y)) = \frac{r + \left(y + \frac{r}{y}\right)^2}{r + \left(y + \frac{r}{y}\right)} = y.$$

Získáme kubickou rovnici

$$y^3 - 2y^2 - r = 0. \quad (4.22)$$

Využijme k jejímu vyřešení Cardanových vzorců, viz např. [12]. Zavedme substituci

$$z = y + \frac{2}{3},$$



Obrázek 4.10: Klidové stavy systému (4.17) (vlevo) a zjednodušené zobrazení směrů vektorového pole systému (4.17) (vpravo).

čímž eliminujeme kvadratický člen. Rovnice (4.22) pak má tvar tzv. redukované kubické rovnice

$$z^3 - \frac{4}{3}z - r - \frac{16}{27} = 0.$$

Označme

$$p := -\frac{4}{3} \quad \text{a} \quad q := -r - \frac{16}{27} \quad (4.23)$$

a

$$D = 81q^2 + 12p^3. \quad (4.24)$$

Kubická rovnice má právě jedno reálné řešení a dvě komplexní řešení pro $D > 0$. V případě (4.23) získáme

$$D = 81r^2 + 96r > 0$$

pro všechna $r > 0$. Rovnice (4.22) má tedy právě jeden reálný kořen. Z vyšetření průběhu funkcí $\gamma(y)$, resp. $\psi(x)$ dostáváme, že se tyto křivky neprotínají mimo první kvadrant, a tudíž průsečík $[x_2^*, y_2^*]$ leží v prvním kvadrantu.

Dokažme dále stabilitu klidových stavů, viz Obrázek 4.11.

Proveďme linearizaci systému (4.17). Jacobiho matice má tvar

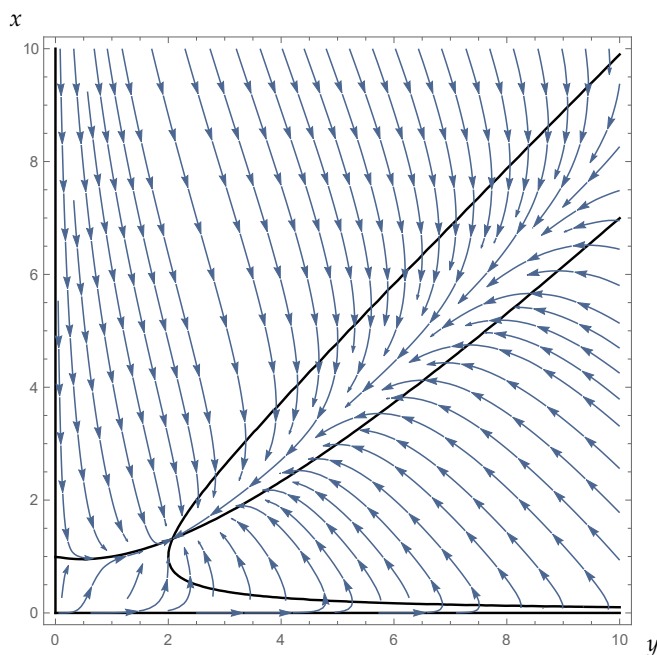
$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 - 2xy + r & -x^2 + 2xy \\ -y^2 + 2xy & x^2 - 2xy + r - 2ry \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}(0, 1) = \begin{pmatrix} 1+r & 0 \\ 1 & -r \end{pmatrix},$$

tedy existuje v obou případech alespoň jedno kladné vlastní číslo, a tedy v případě x_0^*, x_1^* se



Obrázek 4.11: Fázový portrét systému (4.17).

jedná o nestabilní klidové stavy.

Vlastní čísla matice $\mathbf{J}(0,0)$ jsou $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, proto se jedná o nestabilní klidový stav typu hvězda. Vlastní čísla matice $\mathbf{J}(0,1)$ splňují $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, proto je klidový stav $[0,1]$ nestabilní klidový stav typu sedlo.

Vzhledem ke komplikovanému vyjádření $[x_2^*, y_2^*]$ ukažme asymptotickou stabilitu tohoto klidového stavu pomocí nuloklin systému (4.17). Zvolme si libovolně malé okolí bodu $[x_2^*, y_2^*]$. Z (4.19) a (4.21) plyne, že vektorové pole míří dovnitř okolí tohoto bodu, a tedy $[x_2^*, y_2^*]$ je asymptoticky stabilní klidový stav, viz Obrázek 4.10. \square

4.2.3 Logistický růst

Mějme neorientovaný graf o dvou vrcholech, nelineární difuzi mezi nimi a v každém vrcholu logistickou reakci závislou na reakčním parametru r a kapacitním parametru k (uvažujeme v obou rovnicích tyto parametry stejné). Pro $d, r, k \geq 0$ mějme úlohu ve tvaru

$$\begin{cases} x' = d(y-x)xy + rx\left(1 - \frac{x}{k}\right), \\ y' = d(x-y)xy + ry\left(1 - \frac{y}{k}\right). \end{cases} \quad (4.25)$$

Tento systém můžeme opět převést na jednoparametrický systém stejně jako v systému (4.16). Zaveďme tedy substituci $u := \frac{x}{k}$ a $v := \frac{y}{k}$ a přeškálujme čas $\tau := \frac{d}{k^2} \cdot t$. Po přeznačení pak

obdržíme systém závislý pouze na novém parametru $r := \frac{rk^2}{d}$ ve tvaru

$$\begin{cases} x' = (y - x)xy + rx(1 - x), \\ y' = (x - y)xy + ry(1 - y). \end{cases} \quad (4.26)$$

Poznámka 4.10. Nelineární systém (4.26) je pro $x, y \geq 0$ symetrický podle osy $x = y$.

Zabývejme se nyní nuloklinami systému (4.26) a jeho klidovými stavy.

VĚTA 4.11. *Systém (4.26) má nestabilní klidové stavy $\mathbf{x}_0^* = [0, 0]$, $\mathbf{x}_1^* = [1, 0]$ a $\mathbf{x}_2^* = [0, 1]$ a asymptoticky stabilní klidový stav $\mathbf{x}_3^* = [1, 1]$. Nulokliny tohoto systému jsou*

$$\begin{aligned} N_x &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n : x = 0 \vee x = \frac{r+y^2}{r+y} \right\}, \\ N_y &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n : y = 0 \vee y = \frac{r+x^2}{r+x} \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Důkaz. Klidové stavy systému (4.26) splňují $x'(t) = 0$ a $y'(t) = 0$. Díky symetrii prvního kvadrantu řešíme pouze $y'(t) = 0$, tedy

$$(x - y)xy + ry(1 - y) = 0.$$

To platí pro $y = 0$ a $y = \frac{r+x^2}{r+x}$. Obdobně pro $x'(t) = 0$. Ihned dostaneme tři klidové stavy

$$[x_0^*, y_0^*] = [0, 0],$$

$$[x_1^*, y_1^*] = [1, 0],$$

$$[x_2^*, y_2^*] = [0, 1].$$

Hledejme dále průsečíky křivek

$$x = \frac{r + y^2}{r + y}, \quad (4.28)$$

$$y = \frac{r + x^2}{r + x}. \quad (4.29)$$

Funkci $\psi(x) = \frac{r+x^2}{r+x}$ danou v (4.20) jsme již analyticky vyšetřili ve Větě 4.9. Proto

$$\text{je-li } y \in \left(0, \frac{r + x^2}{r + x}\right), \text{ pak } g(x, y) > 0$$

a

$$\text{je-li } y \in \left(\frac{r + x^2}{r + x}, \infty\right), \text{ pak } g(x, y) < 0.$$

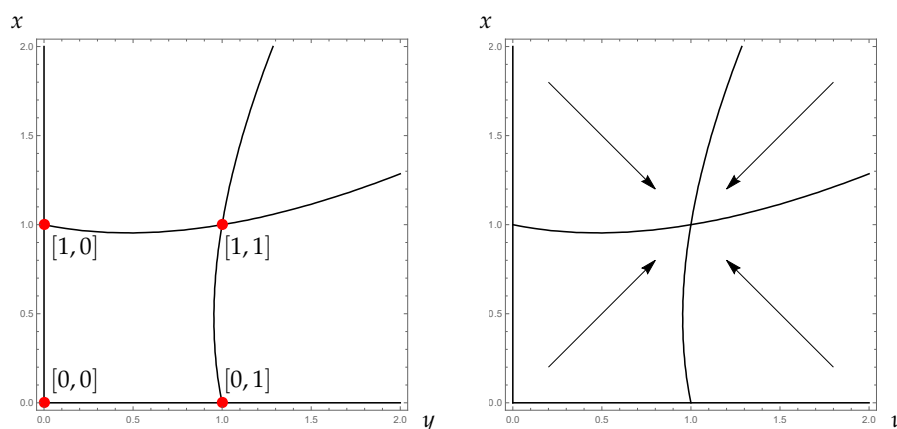
Analogicky

$$\text{je-li } x \in \left(0, \frac{r + y^2}{r + y}\right), \text{ pak } f(x, y) > 0$$

a

$$\text{je-li } x \in \left(\frac{r + y^2}{r + y}, \infty\right), \text{ pak } f(x, y) < 0,$$

viz Obrázek 4.12.



Obrázek 4.12: Klidové stavy systému (4.26) (vlevo) a zjednodušené zobrazení směrů vektorového pole systému (4.26) (vpravo).

Řešme rovnici

$$\gamma(\psi(x)) = \frac{r + \left(\frac{r+x^2}{r+x}\right)^2}{r + \frac{r+x^2}{r+x}} = x,$$

po úpravě

$$(x-1)(x^4 + 3rx^2 + 3r^2 + r^3) = 0.$$

Tato rovnice je splněna pouze pro

$$x = 1,$$

neboť druhá závorka je pro $x > 0, r > 0$ vždy kladná.

Tím jsme dokázali, že křivky (4.28) a (4.29) mají průsečík pouze v bodě

$$\mathbf{x}_3^* = [1, 1].$$

Navíc zlinearizujeme systém (4.26). Jacobiho matice je ve tvaru

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 - 2xy + r - 2rx & -x^2 + 2xy \\ -y^2 + 2xy & x^2 - 2xy + r - 2ry \end{pmatrix}.$$

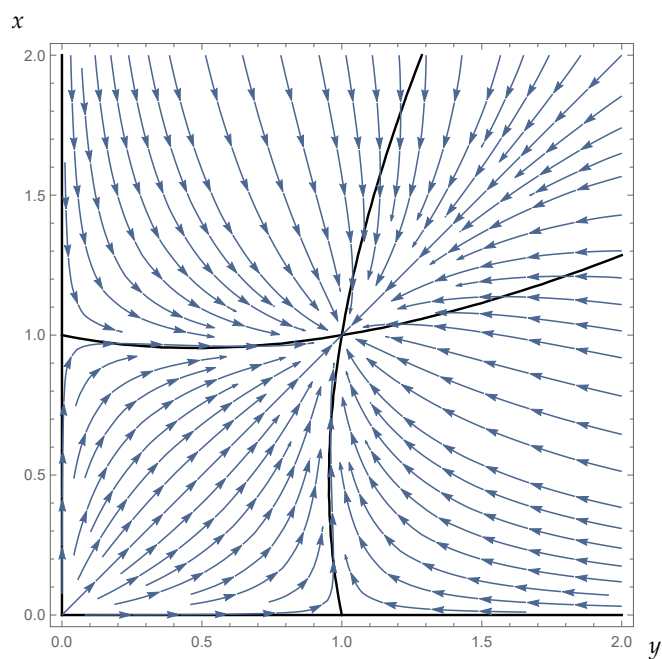
Pak

$$\mathbf{J}(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 - r & 1 \\ 1 & -1 - r \end{pmatrix},$$

kdy vlastní čísla mají tvar $\lambda_1 = -r - 2$ a $\lambda_2 = -r$. Obě jsou tedy záporná pro všechna $r > 0$, a proto je klidový stav $\mathbf{x}_3^* = [1, 1]$ stabilní typu uzlu. Dále

$$\mathbf{J}(1, 0) = \begin{pmatrix} -r & -1 \\ 0 & 1 + r \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 + r & 0 \\ -1 & -r \end{pmatrix},$$



Obrázek 4.13: Fázový portrét systému (4.26).

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

Ve všech těchto případech existuje alespoň jedno kladné vlastní číslo, a proto jsou klidové stavy \mathbf{x}_0^* , \mathbf{x}_1^* a \mathbf{x}_2^* nestabilní. Klidový stav $[0,0]$ je nestabilní hvězda, neboť $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, a $[0,1]$ a $[1,0]$ jsou nestabilní klidové stavy typu sedlo, neboť pro oba z nich platí $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, viz Obrázek 4.13. \square

Závěr

V úvodu jsme připomněli zákon zachování, se kterým se v přírodě setkáváme v různých obdobách. V případě diskrétního prostředí, které jsme reprezentovali neorientovaným grafem G , může mít tento zákon tvar reakčně-difuzní rovnice

$$x_i'(t) = \sum_{j \in N(i)} D(i, j, t) + f_i(x_i(t)), \quad (4.30)$$

kde funkce $D(i, j, t)$ popisuje tok modelované látky mezi vrcholy i a j v grafu G a funkce $f_i(x_i)$ popisují zdroje ve vrcholech grafu G . Z rozmanitých možností volby funkcí $f_i(x_i)$ jsme představili několik možných reakcí, a to exponenciální, logistickou a např. bistabilní dynamiku. Nejprve jsme prozkoumali čistě difuzní model bez reakčních funkcí $f_i(x_i)$, kdy difuze mezi jednotlivými vrcholy závisela lineárně na rozdílu koncentrací. Věnovali jsme se nejjednoduššímu grafu se dvěma vrcholy a poté obecně grafu na n vrcholech. Především jsme se však zabývali modelem nelineární difuze, která byla dána tokovou funkcí

$$D(i, j, t) = -d(x_i(t) - x_j(t))x_i(t)x_j(t), \quad d > 0. \quad (4.31)$$

Poté jsme k nelineární difuzi přidali některé kombinace zdrojových funkcí $f_i(x_i)$, tj. řešili jsme reakčně-difuzní systémy na grafu o dvou vrcholech ve tvaru

$$\begin{cases} x' = -d(x - y)xy + f_1(x), \\ y' = -d(y - x)xy + f_2(y), \end{cases}$$

kdy jsme konkrétně uvažovali funkce f_1, f_2 pocházející z modelu exponenciálního či logistického růstu. Vyšetřili jsme některé kvalitativní vlastnosti těchto modelů jako klidové stavy, stabilitu a monotonní chování řešení takových systémů.

Obecně lze říci, že zákon zachování (4.30) obsahuje tři základní stavební kameny, které mohou významným způsobem ovlivňovat výsledné chování konkrétního modelu:

- *toková funkce* D , která určuje vztah, jímž se řídí tok látky mezi danými vrcholy (lze uvažovat lineární, nebo nelineární),
- *graf* G , jehož struktura rovněž ovlivňuje difuzní proces,
- *reakční funkce* f_i , které mohou být voleny velice rozličně a být závislé na různých parametrech.

Nejen náš text, ale i další práce, např. [5, 9, 13], se věnují některým konkrétním kombinacím výše zmíněných principů. Nicméně je zřejmé, že se otevírá široký prostor otázek, které budou řešit zatím neprobádané směry. Zmiňme některé z nich.

Grafy

Mohli bychom se věnovat reakčně-difuzním rovnicím na obecném grafu G , a to jak s lineární, tak nelineární difuzí. Jelikož je v tomto případě obtížné, či dokonce nemožné získat nejen explicitní řešení, ale také další námi používané nástroje, například nulokliny, bude pravděpodobně k tomuto studiu potřeba nějaký speciální matematický aparát.

Bylo by také možné se podívat na některé speciální třídy grafů, např. triangulace pocházející z numerických modelů, rovinné grafy pocházející z biologických modelů, stromy, atd. Zejména je zajímavá otázka, zda bychom při studiu kvalitativních vlastností řešení rovnic na takových grafech mohli využít některé poznatky z teorie grafů (v naší práci viz např. Laplaceova matice grafu). Ještě konkrétněji bychom se mohli věnovat modelům na konkrétních grafech o více vrcholech pocházejících např. z biologických aplikací.

Další reakční funkce

V Kapitole 1.1.4 jsme uvedli kromě exponenciální a logistické dynamiky i další reakční funkce jako např. bistabilní dynamiku, či tzv. Hollingovy funkce. Takové zdroje spolu s nelineární difuzí mohou také přinést kvalitativně nové chování příslušných reakčně-difuzních rovnic na grafech.

Parametry

Již v práci [5] bylo zjištěno, že lineární difuze na grafu o dvou vrcholech s logistickými či bistabilními reakcemi vykazují zajímavé chování, a to bifurkace nových klidových stavů vzhledem k přítomným parametrům. Na grafu o n vrcholech s bistabilní reakcí je toto ukázáno v článku [13]. V naší práci jsme kombinovali exponenciální a logistické reakční dynamiky, které po převodu do bezrozměrného tvaru závisely pouze na jednom parametru. Vzhledem k tomuto parametru k bifurkacím nedocházelo. Výše zmíněné výsledky však motivují otázku, zda k bifurkacím nedochází, budeme-li uvažovat nelineární difuzi na dvou vrcholech a logistické reakce s různými kapacitami, či reakčními parametry

$$\begin{cases} x' = -d(x-y)xy + r_1x \left(1 - \frac{x}{k_1}\right), \\ y' = -d(y-x)xy + r_2y \left(1 - \frac{y}{k_2}\right), \end{cases}$$

a samozřejmě budeme-li uvažovat dynamiku bistabilní.

Další nelineární zákony

V návaznosti na [9] jsme zvolili tokovou funkci (4.31). Možností jak tokovou funkci volit je však mnoho, a tedy dále by bylo zajímavé hledat systémy řízené jinými tokovými funkcemi, jež mají např. určitou analogii v přírodě.

Nakonec poznamenejme, že všechny zmíněné směry lze opět v rovnici (4.30) kombinovat, a dostávat tak nové otevřené problémy.

Literatura

- [1] E.A. Coddington, N. Levinson: The Poincaré–Bendixson Theory of Two-Dimensional Autonomous Systems, *Theory of Ordinary Differential Equations* (1955), 389–403.
- [2] P. Drábek, G. Holubová: *Parciální diferenciální rovnice (Úvod do klasické teorie)*, ZČU, 2001.
- [3] P. Drábek: *Introduction to Bifurcation Theory*, ZČU, 2002.
- [4] C. Godsil, G. Royle: *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2004.
- [5] J. Hesoun: *Populační modely na diskretních oblastech*, Bakalářská práce, ZČU, 2020.
- [6] C. Holling: The Components of Predation as Revealed by a Study of Small-Mammal Predation of the European Pine Sawfly, *The Canadian Entomologist*, 91 (1959), 293–320.
- [7] W.G. Kelley, A.C. Peterson: *The Theory of Differential Equations*, Springer, 2010.
- [8] J.D. Logan: *An introduction to nonlinear partial differential equations*, Wiley-Interscience, 2008.
- [9] J. Matas: *Difuzní modely na grafech*, Bakalářská práce, ZČU, 2017.
- [10] J.D. Murray: *Mathematical Biology: I. An Introduction*, Springer, 2002.
- [11] J.D. Murray: *Mathematical Biology: II. Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, 2003.
- [12] L. Seifert: *Kubické a bikvadratické problémy*, Přírodovědecké vydavatelství, 1951.
- [13] P. Stehlík: Exponential number of stationary solutions for Nagumo equations on graphs, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 455 (2017), 1749–1764.
- [14] P. Stehlík, J. Volek: *Obyčejné diferenciální rovnice*, ZČU, 2019 (online).
- [15] S.H. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books, 1994.
- [16] J. Volek: *Parciální dynamické rovnice na diskretních prostorových oblastech*, Disertační práce, ZČU, 2016.