

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

**Zobecněná symetrie
geometrických dat**

Plzeň, 2021

Kateřina Uhrová

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2020/2021

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Kateřina UHROVÁ**
Osobní číslo: **A17N0006K**
Studijní program: **N1101 Matematika**
Studijní obor: **Učitelství matematiky pro střední školy**
Téma práce: **Zobecněná symetrie geometrických dat**
Zadávací katedra: **Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování

1. Seznamte se s problematikou určování symetrie geometrických dat, především s metodou určování reflexní symetrie s využitím diferencovatelné míry symetrie pro bodové množiny a její implementací.
2. Vyzkoušejte různé nastavení vah a parametrů pro různá zobecnění reflexní symetrie, např. pro nastavování různé významnosti vstupních bodů, pro přibližnou symetrii, pro lokální symetrii, pro zahrnutí dalších atributů vstupních dat. Zhodnoťte použitelnost dané metody v jednotlivých dílčích oblastech.
3. Na základě provedených experimentů navrhněte potřebné změny a doplňky pro danou metodu, implementujte je, vyzkoušejte, výsledky zhodnoťte a popište v textu práce.
4. Analyzujte a popište možnosti vhodného užití studované problematiky v matematickém vzdělávání na různých stupních a typech škol.
5. Zpracujte příslušný tématický celek využitelný v oblasti komunikace vědy s ohledem na podporu zájmu o technické a přírodovědné obory.

Rozsah diplomové práce: **cca 45 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

- L. Hruša, I. Kolingerová, L. Váša: Robust, Fast and Flexible Symmetry Plane Detection Using Differentiable Symmetry Measure, nabídnuto k publikaci do časopisu The Visual Computer J.H.Conway, H. Burgiel, C.Goodman-Strauss: The Symmetries of Things, AK Peters Ltd., 2008
- další literatura dle zadání vedoucí práce

Vedoucí diplomové práce: **Prof. Dr. Ing. Ivana Kolingerová**
Katedra informatiky a výpočetní techniky

Datum zadání diplomové práce: **1. října 2020**
Termín odevzdání diplomové práce: **21. května 2021**



Radová

Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
děkanka

Brandner

Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 25. července 2021

.....

Kateřina Uhrová

Poděkování

Děkuji Prof. Dr. Ing. Ivaně Kolingerové za odborné vedení a pomoc při zpracování diplomové práce. Dále bych chtěla poděkovat Ing. Lukáši Hrudovi za cenné rady a pomoc při práci se softwarem.

Abstract

This thesis deals with generalized symmetry of geometric data. The existing method of determining reflective symmetry using a differentiable measure of symmetry is used. The aim of this thesis is to set the parameters and weights of this method to generalize for different types of models, on which the existing method do not work very well, or to detect local, approximate symmetry, or to set different significance of entry points. Necessary method changes for various types of models are designed and implemented. The concept of symmetry is also analyzed in connection with mathematics education and relevant educational thematic unit is created.

Keywords

symmetry, measure of symmetry, axial symmetry, central symmetry, rotate symmetry

Anotace

Tato práce se zabývá zobecněnou symetrií geometrických dat. Je využito existující metody určování reflexní symetrie s využitím diferencovatelné míry. Cílem práce je vhodným nastavením parametrů a vah této metody nalézt zobecnění pro různé typy modelů, na nichž dosavadní metoda příliš nefunguje, nebo pro detekci lokální, přibližné symetrie, či nastavení různé významnosti vstupních bodů. Jsou navrženy a implementovány potřebné změny metody pro různé typy modelů. Pojem symetrie je také analyzován v souvislosti s matematickým vzděláváním a je vytvořen příslušný vzdělávací tematický celek.

Klíčová slova

symetrie, míry symetrie, osová symetrie, středová symetrie, rotační symetrie

Obsah

1	Úvod	12
2	Symetrie	13
2.1	Teorie grup	13
2.2	Transformace symetrie	15
2.3	Shodná zobrazení	18
2.3.1	Shodnosti v rovině	19
2.3.2	Shodnosti v prostoru	20
3	Detekce symetrie	22
3.1	Objekt a jeho symetrie	22
3.2	Reprezentace objektu	22
3.3	Detekce symetrie podle typu symetrie	23
3.4	Metoda založená na diferencovatelné míře symetrie	24
3.4.1	Míra symetrie	25
3.4.2	Algoritmus metody detekce symetrie	26
3.4.3	Parametry a váhy metody	27
4	Testování metody, jejích parametrů a vah	31
5	Nerovnoměrně vzorkovaná geometrická data	36
5.1	Váha využívající hustoty bodů	37
5.2	Obsah trojúhelníkového vějíře bodů	39
5.3	Hustota bodů a vzdálenost bodů	40
5.4	Navrhovaná metoda detekce symetrie u modelů s nerovnoměrně rozloženými body	41
6	Různá významnost vstupních bodů	43
6.1	Hodnota váhy významných bodů	43
6.2	Automatická detekce významných bodů	45
7	3D reálné scény	47
8	Zařazení symetrie v matematickém vzdělávacím systému	50
8.1	Rámcové vzdělávací programy	50
8.1.1	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání	51
8.1.2	Rámcový vzdělávací program pro střední odborné školy	53
8.1.3	Rámcový vzdělávací program pro gymnázia	54
8.2	Symetrie v matematickém vzdělávání	56

8.3	Tematický celek	57
8.3.1	Využité aplikace	57
8.3.2	Symetrie všude kolem nás	59
9	Závěr	64
A	Implementace a uživatelská dokumentace	70
B	Tabulky	75

Seznam obrázků

2.1	Rovinné obrazce s osami souměrnosti: a) rovnostranný trojúhelník, b) čtverec, c) rovnoběžník.	18
4.1	Výsledky metody s výchozím nastavením parametrů a váhy dle [7].	31
4.2	Výsledky metody s výchozím nastavením parametrů a váhy dle [7].	32
4.3	Objekty s obarvením bodů podle velikosti míry symetrie k dané rovině symetrie. Obarvení dáno lineární interpolací od sytě žluté (nejmenší symetrie) po sytě zelenou (největší symetrie).	32
4.4	Výsledky metody [7] s parametry $ \mathbf{X}_{simp} = 500$, $ \mathbf{X}_{cand} = 50$ na objektech s chybějícími částmi.	33
4.5	Výsledky detekce tří rovin symetrie za podmínek definovaných v [7].	33
4.6	Výsledky detekce třech rovin symetrie s použitím $\kappa = 20$ bez omezení velikosti míry symetrie.	33
4.7	Výsledky detekce tří rovin symetrie s použitím $\alpha = 10 \cdot \frac{15}{l_{avg}}$	34
4.8	Výsledky metody při použití Gaussovy křivosti a symetrie normálových vektorů (a, b, c, d) a při použití pouze Gaussovy křivosti (e, f).	34
4.9	Výsledné roviny symetrie s využitím ohodnocení pomocí vzdálenosti bodů (rov. 3.5).	35
5.1	Model s nerovnoměrným vzorkováním bodů.	36
5.2	Nerovnoměrně vzorkované objekty s obarvením bodů podle velikosti míry symetrie k dané rovině symetrie. Obarvení dáno lineární interpolací od sytě žluté (nejmenší symetrie) po sytě zelenou (největší symetrie)	36
5.3	Výsledky metody s použitím definovaných vah pro hustotu bodů. První řada demonstruje výsledky metody bez použití vah. Druhá řada ukazuje výsledky metody s využitím váhy z rov. 5.1. Třetí řada využívá váhu z rov. 5.2 a poslední řada z rov. 5.3.	38
5.4	Výsledná rovina symetrie pomocí hustoty bodů s využitím rov. 5.3.	38
5.5	Nalezená nejlepší symetrie (horní řada) a druhá nejlepší symetrie (dolní řada) s využitím hustoty bodů.	39
5.6	Porovnání výsledných rovin symetrie získaných bez využití vah (první řada) a s užitím váhy obsahu trojúhelníkového vějíře (druhá řada).	40
5.7	Srovnání výsledných rovin symetrie získaných bez využití vah (první řada) a s užitím nesymetrického obsahu trojúhelníkového vějíře (druhá řada).	40

5.8	Porovnání výsledných rovin symetrie získaných bez využití vah (první řada), s užitím váhy vzdálenosti bodů (druhá řada) a s užitím hustoty a vzdálenosti bodů (třetí řada).	41
5.9	Výsledné roviny symetrie na dodatečně navzorkovaných datech (zelené modely v první řadě) a námi detekovaná nejlepší rovina navrhovaným postupem (žluté modely ve druhé řadě).	42
6.1	Výsledné lokální roviny symetrie s různou významností vstupních bodů. Červeně jsou označeny významné body. Hodnota k určuje váhu významných bodů.	43
6.2	Výsledné lokální roviny symetrie s různou významností vstupních bodů. Červeně jsou označeny významné body. Hodnota k určuje váhu významných bodů.	44
6.3	Výsledné lokální roviny symetrie s různou významností vstupních bodů pomocí rov. 6.2. Červeně jsou označeny významné body. Hodnota w_{ij}^s udává váhu významného bodu.	44
6.4	Výsledné lokální roviny symetrie s různou významností vstupních bodů pomocí rov. 6.3. Červeně jsou označeny významné body. Konstanta m je parametr rovnice 6.3, hodnota w_{ij}^s určuje váhu významného bodu.	45
6.5	Detekované části významných bodů navrhovaným postupem. Červeně jsou označeny významné body, n udává velikost sousedství, vektor s je směr použitý při detekci extrému.	46
6.6	Detekované části významných bodů (červeně) s výslednými rovinami symetrie určené různou významností vstupních bodů pomocí rov. 6.3. Hodnota n udává velikost sousedství, konstanta m je parametr rov. 6.3.	46
7.1	Detekce roviny symetrie na reálných 3D scénách s výchozím nastavením parametrů a vah.	47
7.2	Detekce rovin symetrie pomocí významných bodů. Váha volena dle def. 6.3, $m = 2$	48
7.3	Detekce rovin symetrie pomocí významných bodů. Váha volena dle def. 6.3, $m = 2$	49
8.1	Ukázka testovacího modulu z aplikace LearningApps.	58
8.2	Ukázka digitální knihy vytvořené v aplikaci Book Creator. Obrázky použité v a) jsou volné pro komerční užití na webové stránce [25]. Obrázek brouka z c) detekován pomocí metody a programu [7].	59
8.3	Ukázka aktivity symetrie útvarů v aplikaci Geogebra.	61
8.4	Ukázka aktivity rotační symetrie útvarů v aplikaci Geogebra.	62
A.1	Uživatelské rozhraní aplikace.	71

A.2	Sekce pro nastavení detekce významných bodů.	72
A.3	Ukázka vizualizace modelu lva.	73

Seznam tabulek

B.1	Tabulka parametrů metody s jejich stručným popisem a výchozími hodnotami.	75
-----	---	----

Použité značky a symboly

\mathbb{E}_n	euklidovský prostor
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	aritmetický vektor vektorového prostoru tvořeného n -ticemi reálných čísel (souřadný vektor)
\mathbf{A}	množiny
\mathbf{A}	matice
f	geometrické zobrazení
X, Y, Z	body
o, p, q	přímky
ρ	roviny
$ XY $	velikost úsečky XY
$ \mathbf{X} $	velikost množiny (počet prvků množiny)
$\ \mathbf{x}\ $	euklidovská norma vektoru \mathbf{x}

V kapitolách 3 - 6 je pro body použito značení \mathbf{x} z důvodu jednotnosti s literaturou, ze které bylo čerpáno.

1 Úvod

Symetrie je pro mnoho oblastí stěžejním pojmem. Její využití najdeme v oblasti teoretické fyziky, matematiky, geometrie a informatiky. Každé z těchto odvětví ji však zkoumá trochu jinak. Nás v této práci zajímá především informatický přístup, kdy hledáme symetrii konkrétních objektů definovaných pomocí trojúhelníkové sítě nebo množiny bodů.

Cílem této práce je zobecnění detekce symetrie objektů získané pomocí metody Ing. Lukáše Hrudy. Tato metoda spočívá v maximalizaci diferencovatelné míry symetrie, která udává míru podobnosti objektu přes danou rovinu. Různým nastavením parametrů a vah metody se snažíme o detekci přibližné symetrie, lokální symetrie a také různou významnost vstupních bodů. Jsou navrženy a implementovány potřebné změny metody a doplňující váhy. Tato práce také zpracovává problematiku symetrie v souvislosti s matematickým vzděláváním na různých stupních a typech škol.

Po dohodě s vedoucí diplomové práce došlo k drobnému odchylení od zadání. Bylo upuštěno od řešení symetrie bodu s atributy, protože bylo zapotřebí věnovat ostatním bodům více času než byl původní odhad a časové nároky už by jinak byly neúměrné.

V první části práce je představena definice symetrie v rámci teorie grup a transformací symetrie. Jsou také představena shodná zobrazení v rovině a prostoru v důsledku učitelského zaměření této práce. V další kapitole jsou popsány známé metody detekce rovin a metoda Ing. Lukáše Hrudy (viz kapitola 3).

Dále již následuje testování metody, jejich parametrů a dosavadních navržených vah, tak jak byly implementovány Ing. Lukášem Hrudou. Námi navrhované úpravy a modifikace pro různá data jsou popsány v kapitolách 5 - 7. V kapitole 5 se práce věnuje nerovnoměrně vzorkovaným geometrickým objektům, kde metoda nejvíce selhává. Různou významnost vstupních bodů a tedy i lokální symetrii řeší následující kapitola 6. Lokální symetrie je řešena i pro 3D reálné scény v kapitole 7.

V závěru práce se soustředíme na učitelskou část. Nejprve je problematika symetrie popsána v souvislosti se základními školskými dokumenty, poté je popsán vytvořený vzdělávací tematický celek.

Pro snažší manipulaci s programem bylo také v rámci práce implementováno uživatelské rozhraní, pomocí kterého mohou být provedeny jednotlivé testy. Implementace a uživatelská dokumentace je uvedena v příloze A.

2 Symetrie

V této sekci se budeme zabývat teorií symetrie. Geometrický objekt je symetrický, jestliže existuje operace nebo transformace (posunutí, škálování, rotace, zrcadlení), při níž je daný objekt neměnný. Symetrie však zasahuje i do jiných oblastí matematiky, a tak lze její definici zobecnit prostřednictvím teorie grup a transformací [14, 23, 32].

2.1 Teorie grup

Matematická disciplína zabývající se grupami se nazývá teorie grup. Před zavedením grupy si nejprve definujeme důležité pojmy.

Definice 2.1. (Binární operace)

Nechť \mathbf{A} je množina. Zobrazení $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ se nazývá **binární operace** na množině \mathbf{A} . Je-li \star binární operace na množině \mathbf{A} , pak prvek $x \star y$ (kde $x, y, x \star y \in \mathbf{A}$) nazýváme kompozicí prvků x, y vzhledem k binární operaci \star .

Definice 2.2. (Vlastnosti binární operace)

Nechť \star a \circ jsou binární operace na množině \mathbf{A} a $x, y, z \in \mathbf{A}$ její libovolné prvky. Operaci \star na množině \mathbf{A} nazveme

1. **asociativní**, pokud

$$x \star (y \star z) = (x \star y) \star z, \quad (2.1)$$

2. **komutativní**, pokud

$$x \star y = y \star x, \quad (2.2)$$

3. s **neutrálním prvkem** $e \in \mathbf{A}$ vzhledem k operaci \star , pokud

$$x \star e = e \star x = x, \quad (2.3)$$

4. s **inverzním prvkem** $x^{-1} \in \mathbf{A}$ k prvku x vzhledem k operaci \star , pokud existuje prvek neutrální e a platí

$$x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e. \quad (2.4)$$

5. Operace \circ je **distributivní** vzhledem k operaci \star , pokud $\forall x, y, z \in \mathbf{A}$ platí

$$x \circ (y \star z) = (x \circ y) \star (x \circ z), \quad (2.5)$$

$$(y \star z) \circ x = (y \circ x) \star (z \circ x). \quad (2.6)$$

Definice 2.3. (Grupa)

Grupa je množina \mathbf{G} spolu s binární operací, která je asociativní, má neutrální prvek a každý prvek má prvek inverzní.

Značení: Grupu \mathbf{G} s binární operací \star na množině \mathbf{A} zapíšeme $\mathbf{G} = (\mathbf{A}, \star)$. Množina \mathbf{A} se nazývá nosič neboli nosná množina grupy.

Někdy se také v definici grupy uvádí podmínka uzavřenosti na množině. Ta však plyne již z definice binární operace.

Definice 2.4. (Abelova grupa)

Pokud binární operace v grupě \mathbf{G} je navíc komutativní, nazýváme grupu \mathbf{G} **komutativní** (neboli Abelova).

Definice 2.5.

Grupu s jedním prvkem nazýváme **triviální** grupa, v ostatních případech hovoříme o grupě **netriviální**.

Definice 2.6. (Řád grupy)

Řádem grupy \mathbf{G} rozumíme mohutnost $|\mathbf{G}|$ neboli počet prvků grupy. Je-li $|\mathbf{G}| < \infty$, je grupa \mathbf{G} konečná. V opačném případě je \mathbf{G} nekonečná.

Definice 2.7. (Podgrupa)

Nechť $\mathbf{G} = (\mathbf{A}, \star)$ je grupa a $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$. Množina \mathbf{H} je **podgrupa** grupy \mathbf{G} , jestliže platí

1. Jestliže $x \in \mathbf{H}$, pak $x^{-1} \in \mathbf{H}$.
2. Jestliže $x, y \in \mathbf{H}$, pak $x \star y \in \mathbf{H}$.

Tedy $\mathbf{H} = (\mathbf{B}, \star)$ je podgrupa grupy $\mathbf{G} = (\mathbf{A}, \star)$, jestliže \mathbf{H} je neprázdná, uzavřená vůči operaci \star (def. 2.7 podmínka 2.) a uzavřená na inverzi (def. 2.7 podmínka 1.). Podgrupa \mathbf{H} splňuje tedy vlastnosti grupy. Vlastnost asociativity se totiž z grupy \mathbf{G} dědí automaticky. Existence neutrálního prvku $e \in \mathbf{B}$ plyne z uzavřenosti operace \star na množině \mathbf{B} . Podgrupa \mathbf{H} grupy \mathbf{G} , pro kterou platí $\mathbf{H} \neq \mathbf{G}$, se nazývá *vlastní* podgrupa.

Věta 2.1. Každá grupa $\mathbf{G} = (\mathbf{A}, \star)$ má alespoň dvě podgrupy:

1. *triviální* - podgrupa $\mathbf{E} = (\{e\}, \star)$ obsahující pouze neutrální prvek,
2. *nevlastní* - celá grupa \mathbf{G} .

Důkaz.

1. Ověříme, že struktura $\mathbf{E} = (\{e\}, \star)$ splňuje podmínky definice pro podgrupu (2.7).
Tedy $e \in \mathbf{A}$, pak $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{G}$, $e \star e = e \in \mathbf{A}$. Inverzní prvek k prvku e je opět prvek e . Pak tedy $\mathbf{E} = (\{e\}, \star)$ je podgrupou grupy \mathbf{G} .
2. Grupa \mathbf{G} samozřejmě splňuje podmínky definice podgrupy (2.7) a platí $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{G}$, takže grupa \mathbf{G} je podgrupou sebe sama.

2.2 Transformace symetrie

Symetrie se zkoumá prostřednictvím transformace objektů. Transformace je speciální typ funkce (např. otočení, posunutí, osová souměrnost, zvětšování nebo zmenšování). Transformace, která ponechá objekt nezměněný, se nazývá symetrií daného útvaru. Tato kapitola je věnována obecnému principu transformace a jejích vlastností.

Definice 2.8. (Transformace systému)

Mějme dán *systém*, který zkoumáme (např. body funkce, křivka, trojúhelníková síť). Tento systém se může nacházet v určitém *stavu*. Množina všech možných stavů systému se nazývá *stavový prostor*. Pak **transformací systému** rozumíme zobrazení stavového systému do sebe. Transformaci T zapisujeme

$$u \xrightarrow{T} v \quad \text{nebo} \quad v = T(u), \quad (2.7)$$

kde u a v jsou stavy systému.

Stav u tedy transformací T přechází na obraz v , který je také stavem systému. Každý stav může mít více stejných obrazů, ale stav nemusí sám být obrazem.

Definice 2.9. (Skládání transformací)

Nechť S a T jsou dvě transformace. Pak **složená transformace** vznikne nejprve provedením transformace S a potom T . Tato složená transformace se obvykle značí:

$$u \xrightarrow{S} v \xrightarrow{T} w \quad \text{nebo} \quad w = T(v) = S(T(u)) = (S \circ T)(u). \quad (2.8)$$

Věta 2.2. (Transformační grupa)

Množina všech bijektivních transformací stavového prostoru systému tvoří grupu. Tato grupa se nazývá **transformační grupa**.

Důkaz.

1. Složení dvou transformací je opět zobrazení stavového prostoru do sebe. Množina transformací systému je *uzavřená*.

2. Skládání transformací je *asociativní*, tedy

$$S \circ (T \circ W) = (S \circ T) \circ W. \quad (2.9)$$

3. Operace skládání má *neutrální* transformaci I , která nemění žádnou transformaci. Tedy pro ni platí

$$u \xrightarrow{I} v \quad \text{nebo} \quad u = I(u), \quad (2.10)$$

$$T \circ I = I \circ T = T. \quad (2.11)$$

4. Jelikož jsou všechny transformace T bijektivní, pak ke každé transformaci existuje *inverzní* transformace T^{-1} :

$$u \xrightarrow{T} v \quad \text{nebo} \quad v = T(u), \quad (2.12)$$

$$v \xrightarrow{T^{-1}} u \quad \text{nebo} \quad u = T^{-1}(v), \quad (2.13)$$

$$T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I. \quad (2.14)$$

Nyní je ještě zapotřebí pro stavový prostor systému definovat relaci ekvivalence.

Definice 2.10. (Stavová ekvivalence)

Relace mezi dvěma stavy je **ekvivalencí**, pokud je relace (značíme \equiv) :

1. **reflexivní** - pro všechny stavy u platí

$$u \equiv u, \quad (2.15)$$

2. **symetrická** - pro všechny stavy u, v platí

$$u \equiv v \Leftrightarrow v \equiv u, \quad (2.16)$$

3. **tranzitivní** - pro všechny stavy u, v, w platí

$$u \equiv v, v \equiv w \Rightarrow u \equiv w. \quad (2.17)$$

Relace ekvivalence určuje jednoznačný rozklad stavového prostoru na *třídy* (resp. podprostor) *ekvivalence*. Stavů tvořící jednu třídu jsou navzájem ekvivalentní a žádný jiný stav ze stavového prostoru mimo tuto třídu není ekvivalentní stavu ve třídě. Ekvivalence tedy dělí množinu na vzájemně disjunktí podmnožiny. Třída ekvivalence reprezentuje aspekt situace, který zůstává neměnný při možných změnách stavů systému (transformací).

Definice 2.11. (Transformace symetrie)

Transformace, které ponechávají třídy ekvivalence invariantní (neměnné), se nazývají **transformace symetrie**. Nechť S je transformace symetrie, pak pro všechny stavy u platí

$$u \xrightarrow{S} v \equiv u \quad \text{nebo} \quad S(u) = v \equiv u. \quad (2.18)$$

Věta 2.3. (Grupa symetrie)

Množina všech invertibilních transformací symetrie stavového prostoru systému pro relaci ekvivalence tvoří grupu, kterou nazýváme **grupa symetrie**.

Důkaz. Nechť \mathbf{G} je množina všech invertibilních transformací symetrie a \mathbf{T} je transformační grupa, $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{G}$. Skládání transformací symetrie je uzavřená operace a pro všechny transformace existuje inverzní prvek, neboť jde o invertibilní transformace (tj. lze k nim nalézt inverzní transformaci).

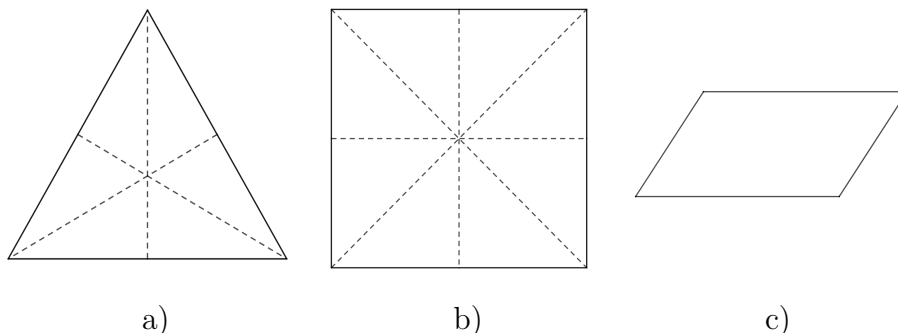
Transformace náležející do grupy symetrií daný objekt vůbec nezmění. Transformovaný objekt vypadá stejně jako před transformací. Může dojít k přemístění jednotlivých bodů, ale tvar a poloha objektu zůstávají stejné.

Příkladem symetrického rovinného obrazce je kruh. Grupa symetrií se skládá ze všech možných otočení okolo středu, osové souměrnosti podle libovolné osy procházející středem kruhu a neutrální transformaci, při které nenastane žádná změna. Invariance kruhu vzhledem k otočení kolem středu nazýváme *rotační symetrie*. Invariance vůči souměrnosti podle osy procházející středem je pak *zrcadlení*. Libovolné dvě symetrické transformace kruhu můžeme složit a získáme opět symetrickou transformaci. Inverzní transformace k otočení je otočení v opačném směru, inverzní transformace k zrcadlení je opět zrcadlení. Inverzní transformace k transformaci složené z konečné kombinace zrcadlení a rotací získáme kombinací zpětných zrcadlení a zpětných rotací. Tedy vidíme, že všechny tyto transformace tvoří opravdu grupu.

V případě rovnostranného trojúhelníku obsahuje grupa symetrie neutrální transformaci, transformaci otočení okolo těžiště trojúhelníku (bod, ve kterém se protínají osy souměrnosti) o $\frac{2\pi}{3}$ a $\frac{4\pi}{3}$ (resp. 2π)¹ a osovou souměrnost přes osy

¹Každý objekt je po otočení o 2π stejný, proto se zpravidla neuvádí.

úhlů (viz obr. 2.1a). Tedy grupa transformací obsahuje 6 (resp. 7) symetrických transformací.



Obr. 2.1: Rovinné obrazce s osami souměrnosti: a) rovnostranný trojúhelník, b) čtverec, c) rovnoběžník.

Čtverec má také několik symetrických transformací. Grupa symetrie obsahuje neutrální transformaci, transformaci zrcadlení přes osy vyznačené na obr. 2.1b a transformaci rotace okolo těžiště o $\frac{\pi}{2}$, π a $\frac{3\pi}{2}$ (resp. 2π). Poslední obrazec (obr. 2.1c) je rovnoběžník, který není symetrický. Každý stav je ekvivalentní pouze sám sobě, grupa symetrie tedy obsahuje pouze jednu transformaci, a to neutrální. O takovém obrazci hovoříme jako o *asymetrickém*.

2.3 Shodná zobrazení

Symetrie může být definována podle typu transformace na *osovou* (resp. rovinnou) symetrii, *rotační* a *středovou* symetrii. Tyto transformace patří mezi shodná zobrazení v rovině a prostoru. V této kapitole se tedy budeme věnovat definici shodných zobrazení souvisejících se symetrií.

Definice 2.12. (Shodné zobrazení)

Nechť \mathbb{E}_n , \mathbb{E}'_n jsou dva euklidovské prostory, pak afinní zobrazení $f : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}'_n$ se nazývá **shodné zobrazení** (neboli shodnost), jestliže pro každé dva body $X, Y \in \mathbb{E}_n$ a jejich obrazy $X', Y' \in \mathbb{E}'_n$ platí

$$|X'Y'| = |XY|. \quad (2.19)$$

Body X , pro jejichž obrazy platí $X' = X$, se nazývají **samodružné body**.

Shodná transformace euklidovského prostoru \mathbb{E}_n ($f : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_n$) má analytické vyjádření:

$$f : \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (2.20)$$

kde \mathbf{A} je ortonormální matice (tedy platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}$).

Shodné transformace dělíme na *přímé* a *nepřímé*. Je-li $\det(\mathbf{A}) = 1$, jde o přímou shodnost, zatímco $\det(\mathbf{A}) = -1$ značí nepřímou shodnost. Vzhledem k tomu, že matice \mathbf{A} je ortonormální, jiná situace nastat nemůže.

2.3.1 Shodnosti v rovině

Přímé shodnosti

Mezi přímé shodnosti v rovině patří identita, posunutí, otočení a středová souměrnost. **Identita** je speciálním případem shodného zobrazení, které každému bodu X roviny přiřazuje stejný bod $X' = X$. Jde tedy o transformaci, v níž jsou všechny body i geometrické útvary samodružné. Analytické vyjádření identity je následující

$$id : \mathbf{x}' = \mathbf{x}. \quad (2.21)$$

Posunutí je transformace bez samodružných bodů, tedy pro nás není vzhledem k symetrii významná. Existuje-li v transformaci právě jeden samodružný bod S , pak se jedná o **otočení** neboli rotaci se středem S .

Definice 2.13. (Otočení)

Otočení $\mathcal{R}_{S,\varphi}$ kolem bodu S o orientovaný úhel φ je zobrazení v rovině, ve kterém se zobrazí bod S na bod $S' = S$ a každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že $|XS| = |X'S|$ a orientované úhly XSX' a φ mají stejnou velikost a jsou shodně orientované.

Analytické vyjádření transformace otočení s užitím ortonormální matice \mathbf{A} je definováno

$$\mathcal{R}_{S,\varphi} : \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} (\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \mathbf{s}, \quad (2.22)$$

kde φ je úhel otočení ($\varphi \neq 0$).

Speciálním případem otočení pro $\varphi = \pm\pi$ je **středová souměrnost** se středem S :

$$\mathcal{S}_S : \mathbf{x}' = -\mathbf{x} + 2\mathbf{s}, \quad (2.23)$$

Definice 2.14. (Středová souměrnost)

Středová souměrnost \mathcal{S}_S se středem S je zobrazení v rovině, ve kterém se zobrazí bod S na bod $S' = S$ a každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že $|XS| = |X'S|$ (bod S je středem úsečky XX').

Nepřímé shodnosti

Mezi nepřímé shodnosti v rovině patří osová souměrnost s přímkou samodružných bodů a posunutá souměrnost (neboli posunuté zrcadlení) bez samodružných bodů. Popíšeme pouze **osovou souměrnost**, která nás v rámci symetrie zajímá.

Definice 2.15. (Osová souměrnost)

Osová souměrnost \mathcal{O}_o s osou o je zobrazení v rovině, které zobrazí každý bod $X \in o$ na $X' = X$ a každý bod $X \notin o$ na X' tak, že úsečka XX' je kolmá na osu o a střed úsečky XX' leží na ose o .

Přímka o se nazývá osa souměrnosti a je přímkou samodružných bodů. Analytické vyjádření osové souměrnosti s užitím ortonormální matice \mathbf{A} je

$$\mathcal{O}_o : \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (2.24)$$

kde vektor \mathbf{b} je normálovým vektorem osy souměrnosti o .

2.3.2 Shodnosti v prostoru

Přímé shodnosti

Přímými shodnostmi v prostoru jsou identita, posunutí, otočení kolem osy, osová souměrnost a šroubový pohyb, který vznikne složením rotace a posunutí. Nás bude zajímat pouze transformace otočení (neboli rotace) kolem osy a osová souměrnost.

Definice 2.16. (Otočení)

Otočení $\mathcal{R}_{o,\varphi}$ kolem přímky o o orientovaný úhel φ je shodné zobrazení v prostoru, které přiřazuje každému bodu $X \in o$ bod $X' = X$ a každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že paty kolmic z bodů X, X' k přímce o splývají v tomtéž bodě S_x , rovina XS_xX' je kolmá k ose o , a orientovaný úhel XS_xX' má velikost φ .

Přímka o se nazývá osa otočení a je přímkou samodružných bodů. Speciálně pro úhel $\varphi = \pm\pi$ se jedná o **osovou souměrnost** \mathcal{O}_o s osou o .

Definice 2.17. (Osová souměrnost)

Osová souměrnost $\mathcal{O}_{o,\varphi}$ s osou o je shodné zobrazení v prostoru, které přiřazuje každému bodu $X \in o$ bod $X' = X$ a každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o .

Nepřímé shodnosti

Mezi nepřímé shodnosti v prostoru řadíme rovinnou souměrnost (zrcadlení), posunutou souměrnost (posunuté zrcadlení), otočenou souměrnost (otočené zrcadlení) a středovou souměrnost.

Definice 2.18. (Rovinná souměrnost)

Rovinná souměrnost podle roviny ρ je shodné zobrazení S_ρ , které zobrazuje každý bod $X \in \rho$ na bod $X' = X$ a každý bod $X \notin \rho$ na bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k rovině ρ a střed přímky XX' leží v rovině ρ .

Rovina ρ se nazývá rovina souměrnosti a je rovinou samodružných bodů. Poslední nás zajímá **středová souměrnost** jako speciální příklad otočené souměrnosti.

Definice 2.19. (Středová souměrnost)

Středová souměrnost se středem S je shodné zobrazení S_s , které zobrazuje bod S na bod $S' = S$ a každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX' .

Bod S se nazývá střed souměrnosti a je jediným samodružným bodem.

Z výše zmíněných definic je patrné, že všechny typy symetrií spolu navzájem souvisí. Osová symetrie je dána zrcadlením, které mapuje každý bod objektu na bod, který také náleží objektu. Rotační symetrie je transformace rotace okolo bodu, ve kterém se protínají osy symetrie. Pro rotační symetrii definujeme **řád rotační symetrie**.

Definice 2.20. (Řád rotační symetrie)

Řád rotační symetrie nazýváme číslo n , které udává počet transformací o různé úhly φ náležící grupě symetrie objektu.

Tedy rotační symetrie řádu n znamená, že rotace o úhel $\frac{2\pi}{n}$ je ekvivalentní původnímu objektu. Číslo n také udává počet os souměrnosti. Trojúhelník na obr. 2.1a má řád rotační symetrie roven 3, neboť má 3 osy souměrnosti a 3 rotační symetrie. Rovnoběžník na obr. 2.1c však nemá žádnou osu souměrnosti a nemá ani rotační symetrii. Pro objekt, který má jednu osu souměrnosti, platí $n = 1, \varphi = 2\pi$. Tedy má jednočetnou symetrii, která se však za symetrii nepovažuje, neboť každý objekt je po otočení o 2π ekvivalentní sám sobě. Středová souměrnost se středem S je ekvivalentní rotaci kolem bodu S o π . Čtverec tedy narozdíl od rovnostranného trojúhelníku je středově symetrický.

3 Detekce symetrie

Detekce symetrie je v počítačové grafice velmi důležitá. Informace o symetrii může být užitečná ve spoustě různých problémů, jako je zarovnání objektů do souřadného systému, komprese, symetrické úpravy a rekonstrukce neúplných objektů. V geometrickém modelování je symetrie jedním z charakteristických rysů tvaru objektu. Detekce symetrie je také předmětem zájmu mnoha inženýrských oborů [7].

V této kapitole se budeme zabývat shrnutím dosavadních metod detekce symetrie a popíšeme metodu z [7], která je předmětem této práce. Nejprve je však zapotřebí také definovat samotný objekt zkoumání a jednotlivé druhy reprezentace objektu. Informace následujících kapitol byly čerpány z [7, 8, 9].

3.1 Objekt a jeho symetrie

Tato práce je zaměřena na detekci symetrie 3D objektů, proto definujeme objekt následovně.

Definice 3.1. Objekt je množina bodů \mathbf{X} v euklidovském prostoru \mathbb{E}_3 , jestliže $\mathbf{X} \subset \mathbb{E}_3$ a $\mathbf{X} \neq \emptyset$.

Jelikož symetrie je transformace, která ponechává objekt nezměněný (viz kap. 2.2). Můžeme symetrii geometrického objektu definovat následovně.

Definice 3.2. Mějme neprázdnou množinu objektu $\mathbf{X} \subset \mathbb{E}_3$ a transformaci $T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}_3$. Pak T je transformace symetrie, jestliže $T(\mathbf{x}) \in \mathbf{X}$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Objekt \mathbf{X} je symetrický podle transformace T , jestliže se aplikací transformace T všechny body objektu \mathbf{X} zobrazí opět na body objektu \mathbf{X} .

3.2 Reprezentace objektu

V rámci této práce se setkáváme se dvěma reprezentacemi 3D objektu - diskrétní množina bodů a trojúhelníková síť.

Diskrétní množina bodů

Diskrétní množina bodů, někdy nazývané také mračno bodů, je používán k reprezentaci vzorkovaného 3D povrchu nebo méně často k reprezentaci vzorkovaného objemu. Většinou bývá výstupem 3D scannerů. Objekt \mathbf{X} reprezentovaný diskrétní množinou n bodů definujeme jako

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{E}_3, i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Trojúhelníková síť

Trojúhelníková síť je běžným způsobem reprezentace povrchu 3D objektu v počítačové grafice. Trojúhelníková síť aproximuje povrch po částech rovinnými útvary - trojúhelníky. Pro trojúhelníkovou síť objektu \mathbf{X} je zapotřebí vytvořit množinu vrcholů $\mathbf{V}_x = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{E}_3\}, i = 1, \dots, n$ a množinu trojúhelníků $\mathbf{T}_x = \{\mathbf{t}_i^{\mathbf{X}}\}, i = 1, \dots, m$. Každý trojúhelník $\mathbf{t}_i^{\mathbf{X}} \in \mathbf{T}_x$ je určen indexy vrcholů $\mathbf{x}_{v_1}, \mathbf{x}_{v_2}, \mathbf{x}_{v_3} \in \mathbf{V}_x$, které jej definují. Objekt \mathbf{X} reprezentovaný trojúhelníkovou sítí je pak definován jako sjednocení všech trojúhelníků objektu:

$$\mathbf{X} = \bigcup_{i=1}^m \mathbf{t}_i^{\mathbf{X}}. \quad (3.2)$$

Trojúhelníková síť na rozdíl od diskrétního setu bodů obsahuje více informací. Díky snadnému přechodu od trojúhelníkové sítě k diskrétní množině bodů se často využívají metody fungující pro trojúhelníkové sítě i na diskrétní množině bodů. Obrácený postup však není tak rozšířený, neboť přechod z reprezentace diskrétní množiny bodů na trojúhelníkovou síť je velmi složitý [9].

V rámci trojúhelníkové sítě definujeme ještě pojem **sousedství** vrcholu trojúhelníkové sítě, také nazývaný jako *trojúhelníkový vějíř*. Sousedství vrcholu $\mathbf{x}_i \in \mathbf{V}_x$ je množina obsahující vrchol \mathbf{x}_i a všechny ostatní vrcholy, se kterými vrchol \mathbf{x}_i sdílí trojúhelník. Toto sousedství lze rekurzivně zvětšovat přidáváním dalších sousedních vrcholů sdílející s vrcholy v množině trojúhelníků. Takto můžeme množinu rozšiřovat do požadované velikosti sousedství (tzv. *n-sousedství*).

3D objekty mohou být reprezentovány i dalšími jinými způsoby - parametrické a implicitní vyjádření ploch, parametrické křivky nebo binární funkce. Navíc mohou mít objekty přidružené další vlastnosti - barva, množství, teplota nebo tlak.

3.3 Detekce symetrie podle typu symetrie

Detekce symetrií na 3D objektech se může lišit podle různých kritérií. Cílem může být detekce **perfektní** symetrie. Kdy se přesně podle def. 3.2 všechny body mapují opět na body objektu. Tato detekce je však obtížná a na objektech reálného světa nemožná, protože ty většinou nejsou úplně symetrické. Proto se v rámci detekce na 3D objektech hovoří o **přibližné** symetrii. Přibližnou symetrii však nelze přesně definovat, a tak je obtížné určit, zda daná transformace přibližnou symetrii zachycuje nebo ne. Často se pak hovoří o *silné symetrii* - přibližná symetrie velmi blízká perfektní, a *slabé symetrii* - symetrie, která je vzdálená od perfektní [9].

Symetrii také můžeme dělit podle toho, jestli ji hledáme pro celý objekt, pak ji nazýváme **globální symetrií**, nebo ji hledáme pouze pro symetrickou část

objektu a nazýváme ji **lokální**. Většinou se detekce zaměřují na globální symetrii. Lokální reflexní symetrii pro 3D trojúhelníkové sítě detekuje Simari et al. [35].

Podle typu transformace dělíme symetrie na 3D objektech na **reflexní** (zrcadlení), **rotační** a **rigidní** (*rigid*). Reflexní symetrie je nejčastějším typem detekované symetrie reálných 3D objektů. Tato symetrie je reprezentována transformací souměrnosti podle roviny, která se nazývá **rovina symetrie**.

Sun and Sherrah v [38] a Kakarala et al. v [13] detekují reflexní symetrii procházející počátkem. Tyto metody však nejsou dobré pro objekty se slabší symetrií. Li et al. v [16] svojí detekcí reflexní symetrie předchozí metody překonává v přesnosti a odolnosti vůči hluku.

Schiebener et al. v [33] a Nagar a Raman v [24] navrhují metody detekce reflexní roviny symetrie na diskrétní množině bodů. Reflexní symetrií na modelech trojúhelníkových sítí se dále zabývají metody od Cailliere et al. v [3] a Sipiran et al. v [36].

Rotační symetrie je reprezentována transformací rotace kolem dané osy o určitý úhel. Tato symetrie je tedy popsána osou rotace a hodnotou určující úhel otočení. Speciálním příkladem je *kruhová symetrie*, která je určena pouze osou rotace, neboť je objekt symetrický pro jakýkoliv úhel otočení. Rotační symetrii na trojúhelníkových sítích detekuje např. Martinet et al. v [19]. Thrun a Wegbreit v [40] navrhl metodu detekující nejen rotační symetrii, ale také reflexní a další kombinace těchto symetrií.

Rigidní symetrie je nejběžnější symetrií, která v geometrických datech nastává. Jak už název napovídá, tato symetrie je reprezentována rigidní transformací, což je kombinace otočení a posunutí [9]. Bokeloh et al. v [1] a Lipman et al. v [17] se různými způsoby zabývají detekcí rigidní symetrie na diskrétní množině bodů. Mavridis et al. v [20] detekuje rigidní symetrii pro objekty s chybějícími částmi.

Známa a populární metoda pro detekci dalších zobecněných symetrií byla navržena v práci od Mitra et al. v [22]. Existují ještě další typy symetrie a detekční metody, ty však pro tuto práci nejsou důležité, a tak se jejich výčtem a popisem nebudeme zabývat.

3.4 Metoda založená na diferencovatelné míře symetrie

Cílem této práce je zobecnění detekce reflexní symetrie pomocí metody Ing. Lukáše Hrudý [7] založené na diferencovatelné míře symetrie. V této kapitole si tedy danou metodu detekce podrobně představíme. Čerpáme přitom z informací obsažených v [7, 8].

3.4.1 Míra symetrie

Definice 3.3.

Nechť ρ je obecná rovina s implicitní rovnicí $\rho : ax + by + cz + d = 0$, kde $\mathbf{k}_\rho = [a, b, c, d]^T$ je vektor koeficientů roviny ρ . Pak vektorová funkce $\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}) \in \mathbb{E}_3$ zrcadlící bod $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ přes rovinu ρ je definována

$$\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \frac{\mathbf{n}_\rho^T \mathbf{x} + d}{\mathbf{n}_\rho^T \mathbf{n}_\rho} \mathbf{n}_\rho, \quad (3.3)$$

kde $\mathbf{n}_\rho = [a, b, c]^T$ jsou souřadnice normálového vektoru roviny ρ .

Komponenty funkce $\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x})$ jsou spojité a diferencovatelné s ohledem na ρ kromě $\mathbf{k}_\rho = [0, 0, 0, d]^T$. Tento vektor však nereprezentuje platnou rovinu.

Definice 3.4.

Nechť množina $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ reprezentuje 3D objekt definovaný dle def. 3.2. **Míra symetrie**, která vyhodnocuje symetrii objektu vzhledem k dané rovině ρ , je definována

$$s_{\mathbf{X}}(\rho) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \varphi(\|\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_j\|), \quad (3.4)$$

kde $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbf{X}$, funkce $\varphi(l)$ je *funkce podobnosti*, pro kterou platí $\varphi(0) = 1$ a hodnota funkce φ se se zvyšujícím l snižuje k 0, ω_{ij} je váha dvojice bodů, která umožňuje upravit důležitost této dvojice na základě dalších informací.

Funkce podobnosti je definována pomocí modifikované Wendlandovy funkce

$$\varphi(l) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{2.6}\alpha l)^5 (8(\frac{1}{2.6}\alpha l)^2 + 5\frac{1}{2.6}\alpha l + 1) & \alpha l \leq 2.6, \\ 0 & \alpha l > 2.6, \end{cases} \quad (3.5)$$

kde α je tvarový parametr funkce. Funkce podobnosti je rovna 0 pro $\alpha l > 2.6$. To znamená, že míra symetrie $s_{\mathbf{X}}(\rho)$ je ovlivněna pouze body, které od $\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}_i)$ mají menší vzdálenost než $\frac{2.6}{\alpha}$. K určení těchto bodů je použita 3D mřížka o velikosti $\frac{2.6}{\alpha} \times \frac{2.6}{\alpha} \times \frac{2.6}{\alpha}$. Výpočet míry symetrie $s_{\mathbf{X}}(\rho)$ je ovlivněn pouze body spadajícími do stejné buňky mřížky s $\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}_i)$ a body v sousedících buňkách mřížky.

Hodnota parametru α ovlivňuje přesnost hledané roviny symetrie. Jelikož je většinou zapotřebí detekovat přibližnou symetrii, byla tato hodnota na základě důkladného testování nastavena na $\alpha = \frac{15}{l_{avrg}}$. Hodnota l_{avrg} je průměrná vzdálenost bodů množiny \mathbf{X} od těžiště.

3.4.2 Algoritmus metody detekce symetrie

Na vstupu je objekt jako množina bodů $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ (viz def. 3.2) reprezentovaný buď trojúhelníkovou sítí nebo diskrétní množinou bodů. Samotná detekce roviny symetrie dle [7] se skládá z následujících kroků:

1. Zjednodušení objektu \mathbf{X}_{simp} ,
2. vytvoření kandidátních rovin \mathbf{X}_{cand} ,
3. prořezání kandidátních rovin,
4. výběr nejlepších kandidátních rovin (výpočet míry symetrie $s_{\mathbf{X}_{simp}}$),
5. nalezení maxima míry symetrie.

Výstupem je nalezená rovina symetrie $\rho : ax + by + cz + d = 0$ s výslednou maximální hodnotou míry symetrie $s_{\mathbf{X}}(\rho)$.

Zjednodušení objektu

Výpočet míry symetrie pomocí brutální síly má složitost $O(n^2)$. Pro detekci symetrie však musí být míra symetrie vyhodnocována opakovaně, a tak může být detekce výpočetně náročná. Přistupuje se tedy k zjednodušení objektu snížením počtu bodů množiny \mathbf{X} a tím snížením složitosti výpočtu.

Náhodné převzorkování není vhodné, neboť nemusí zachovat tvar původního objektu. Nová množina bodů \mathbf{X}_{simp} se vytvoří pomocí 3D mřížky o velikosti $\frac{l_{avg}}{k} \times \frac{l_{avg}}{k} \times \frac{l_{avg}}{k}$. Pro každou buňku mřížky vznikne jeden bod nové množiny \mathbf{X}_{simp} , který je definován průměrem souřadnic všech bodů obsažených v buňce mřížky. Tento zjednodušující krok se opakuje pro zvyšující se k , dokud počet bodů množiny \mathbf{X}_{simp} nedosáhne požadované hodnoty.

Vytvoření kandidátních rovin

Aby nebylo vybráno příliš mnoho kandidátních rovin je vytvořena množina \mathbf{X}_{cand} , která je zjednodušením původní množiny \mathbf{X} . Kandidátní rovinu symetrie pak volíme pro každou dvojici $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbf{X}_{cand}$, kde $i \neq j$. Pro volbu $|\mathbf{X}_{cand}| = 100$ tak vznikne přibližně 5000 až 6000 kandidátních rovin.

Zmenšení počtu kandidátních rovin

Kandidátních rovin je stále zbytečně mnoho a mnohé z nich jsou si vzájemně velmi podobné. Proto se v této části kandidátní roviny upravují a některé vyřazují.

Definice 3.5.

Vzdálenost mezi dvěma rovinami ρ a σ určenými vektory jejich koeficientů \mathbf{k}_ρ , \mathbf{k}_σ je definována

$$D(\rho, \sigma) = \begin{cases} \|\hat{\mathbf{k}}_\rho - \hat{\mathbf{k}}_\sigma\| & \mathbf{n}_\rho^T \mathbf{n}_\sigma \leq 0, \\ \|\hat{\mathbf{k}}_\rho + \hat{\mathbf{k}}_\sigma\| & \mathbf{n}_\rho^T \mathbf{n}_\sigma < 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

kde $\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|} [a, b, c, \frac{d}{l_{avg}}]^T$ a \mathbf{n}_ρ a \mathbf{n}_σ jsou normálové vektory rovin.

Při vytváření kandidátních rovin se kontrolují vzdálenosti. Jestliže nově vytvořená rovina σ má od nejbližší dříve vytvořené roviny ρ vzdálenost menší než požadovanou hodnotu δ , pak není zahrnuta mezi kandidátní roviny. Rovina ρ je nahrazena průměrem rovin ρ a σ určeným následovně

$$avg(\rho, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{n}_\rho\|} \mathbf{k}_\rho + \frac{1}{\psi \|\mathbf{n}_\sigma\|} \mathbf{k}_\sigma & \mathbf{n}_\rho^T \mathbf{n}_\sigma \leq 0, \\ \frac{1}{\|\mathbf{n}_\rho\|} \mathbf{k}_\rho - \frac{1}{\psi \|\mathbf{n}_\sigma\|} \mathbf{k}_\sigma & \mathbf{n}_\rho^T \mathbf{n}_\sigma < 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

kde ψ je počet kandidátních rovin, z nichž rovina ρ vznikla. Kandidátní roviny, které vzniknou průměrováním méně než ψ_{min} rovin, jsou dále odstraněny, jelikož mohou být považovány za odlehle hodnoty. Zbylé roviny jsou považovány za sadu kandidátních rovin.

Nejlepší kandidátní roviny

V této části dochází k výpočtu míry symetrie $s_{\mathbf{x}_{simp}}$ pro všechny kandidátní roviny. K hledání maxima míry symetrie se vybere κ kandidátních rovin s největší mírou symetrie.

Nalezení maxima míry symetrie

K nalezení lokálního maxima míry symetrie se používá kvazi-newtonovská metoda optimalizace L-BFGS (Limited memory Broyden-Fletcher-Golfarb-Shanno algoritmus [18]). Tato metoda používá gradient míry symetrie a díky diferencovatelnosti míry rychle konverguje s dostatečnou přesností. Před začátkem optimalizace je objekt transformován spolu s rovinou někam blízko počátku, aby se vyhnulo velkým změnám pozice roviny, kterou při velké vzdálenosti způsobí i malá změna normálového vektoru roviny. To by pak mělo špatný vliv na konvergenci optimalizace. Nakonec je tedy nalezeno κ lokálních maxim míry symetrie. Za výslednou rovinu symetrie je prohlášena ta s největší mírou symetrie.

3.4.3 Parametry a váhy metody

Metoda Ing. Hrudý [7] detekující reflexní symetrii obsahuje několik parametrů. Tyto parametry jsou defaultně nastaveny na výchozí hodnoty, které ve většině

experimentů vykazují dobré výsledky. Změnou parametrů bychom však mohli na některých modelech docílit ještě přesnějších výsledků. V této kapitole se blíže seznámíme s rolí jednotlivých parametrů a možností jejich využití, představíme také váhy dvojic bodů použité při výpočtu míry symetrie. Bylo by žádoucí, pokud by změnou parametrů nebo nastavením vah bylo možné zobecnit detekci symetrie (např. pro lokální, či přibližnou symetrii). Informace této kapitoly jsou převážně čerpány z [7, 8].

Parametry

Vstupní objekt může obsahovat velké množství bodů, pro něž by detekce symetrie byla příliš výpočetně náročná. Proto dochází ke zjednodušení objektu na cílovou množinu bodů \mathbf{X}_{simp} . Velikost této množiny se nastavuje na $|\mathbf{X}_{simp}| = 1000$. Zvětšením počtu bodů množiny \mathbf{X}_{simp} zvyšujeme přesnost, ale na úkor výpočetní náročnosti.

Další parametr udává počet bodů množiny \mathbf{X}_{cand} . Body této množiny jsou využity k vytvoření množiny kandidátních rovin. Pro každé dva body je nalezena rovina symetrie a ta se pak stává kandidátní rovinou. Takže počet kandidátních rovin roste kvadraticky s počtem bodů množiny \mathbf{X}_{cand} . Výchozí hodnota je nastavena na $|\mathbf{X}_{cand}| = 100$.

Jelikož kandidátních rovin je stále zbytečně mnoho a řada z nich je velmi podobná, metoda přistupuje ke zmenšení počtu kandidátních rovin. Jestliže je nově vytvořená kandidátní rovina blíže než parametr δ k nějaké nejbližší dříve vytvořené kandidátní rovině, pak není tato rovina automaticky přidána, ale je nahrazena průměrem těchto rovin. Hodnota δ je defaultně nastavena na 0.1. S nízkou hodnotu δ je zachováno více rovin, což samozřejmě zvyšuje čas výpočtu.

Dalším parametrem je ψ_{min} , který udává minimální počet rovin, jejichž průměrováním musí vzniknout kandidátní rovina. Takže každá kandidátní rovina, která vznikne z méně než ψ_{min} rovin, je pak ze setu kandidátních rovin vymazána. Čím menší je toto číslo, tím více kandidátních rovin je zachováno, ale opět se zvyšuje výpočetní náročnost. Výchozí hodnota je nastavena na 4.

Parametrem κ je určen počet nejlepších kandidátních rovin, ze kterých začíná proces optimalizace. Ten je defaultně nastaven na 5.

Všechny výše zmíněné parametry ovlivňují přesnost, ale na úkor výpočetní náročnosti. Metoda využívá ještě jednoho parametru. Tím je parametr tvaru α Wendlandovy funkce ve výpočtu míry symetrie. Výchozí hodnota je nastavena na $\alpha = \frac{15}{l_{avg}}$, kde l_{avg} je průměrná vzdálenost bodů od těžiště objektu.

Váhy

Výpočet míry symetrie také zahrnuje váhy dvojice bodů, pomocí kterých můžeme vstupním bodům nastavovat různou významnost, a docílit tak lepších výsledků. Metoda je primárně nastavena pro vyhledávání nejvýznamnější roviny symetrie s výchozím nastavením vah $w_{ij} = 1$. Ing. Lukáš Hruša v [7] navrhuje dvě varianty metody pro různé nastavení vah. Tyto váhy si nyní popíšeme. Nejprve však následuje samotná definice váhy.

Definice 3.6.

Váhy v míře symetrie jsou vyjádřeny

$$w_{ij} = w_{ij}^s w_{ij}^d(\rho), \quad (3.8)$$

kde w_{ij}^s je *statistická váha* a $w_{ij}^d(\rho)$ je *dynamická váha*.

Dynamická váha je závislá na rovině a může být reprezentovaná symetrií normálových vektorů nebo směrů základních křivostí odpovídajících dvojice bodů vůči dané rovině. Statické váhy reprezentují důležitost daného páru bodů. Váhy mohou být nastaveny manuálně nebo pomocí nějaké funkce pro konkrétní dva body.

První varianta metody používá pro statistickou váhu Gaussovu křivost a pro dynamickou váhu symetrii normál. Druhá modifikace používá pouze váhy statistické, ohodnocené podle vzdálenosti dvojice bodů.

Gaussova křivost a symetrie normál

Jak již bylo řečeno, první modifikace využívá ohodnocení bodů pomocí Gaussovy křivosti a symetrie normál. Tato modifikace může být použita pouze pro manifoldní trojúhelníkové sítě, kde lze pro každý vrchol určit Gaussovu křivost pomocí výpočtu [21] a jednotkový normálový vektor je dán sumou normálových vektorů trojúhelníků sousedících s vrcholem. Pak je dána množina Gaussových křivostí $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ a množina jednotkových normálových vektorů $\mathbf{N} = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_n\}$, kde g_i je Gaussova křivost v bodě \mathbf{x}_i množiny bodů objektu \mathbf{X} a \mathbf{n}_i je jednotkový vektor v bodě \mathbf{x}_i množiny bodů objektu \mathbf{X} .

Během zjednodušení modelu (viz odst. 3.4.2) je nutné také určit nové hodnoty pro Gaussovu křivost a normálové vektory. Normálový vektor \mathbf{n}_i bodu $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_{simp}$ je určen normalizovaným průměrem normálových vektorů všech bodů v buňce mřížky. Gaussova křivost g_i odpovídající bodu $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_{simp}$ je určena jako maximum absolutních hodnot Gaussových křivostí bodů v mřížkové buňce. Tímto postupem tak z původních množin \mathbf{N} a \mathbf{G} vzniknou nové zjednodušené množiny \mathbf{N}_{cand} a \mathbf{G}_{cand} .

Definice 3.7. (Symetrie normálových vektorů)

Nechť ρ je obecná rovina reprezentovaná vektorem koeficientů \mathbf{k}_ρ a $\mathbf{r}_n(\rho, \mathbf{n}) = \mathbf{n} - 2 \frac{\mathbf{n}_\rho^T \mathbf{n}}{\mathbf{n}_\rho^T \mathbf{n}_\rho} \mathbf{n}_\rho$ je funkce, která mapuje jednotkový normálový vektor \mathbf{n} přes rovinu ρ . Pak symetrie normálových vektorů \mathbf{n}_i a \mathbf{n}_j je definována jako podobnost funkce $\mathbf{r}_n(\rho, \mathbf{n}_i)$ a \mathbf{n}_j . Dynamická váha je dána

$$w_{ij}^d(\rho) = \varphi(\arccos(\mathbf{r}_n(\rho, \mathbf{n}_i)^T \mathbf{n}_j)), \quad (3.9)$$

kde $\varphi(l)$ je Wendlandova funkce z rov. 3.5 s tvarovým parametrem $\alpha = 4$.

Definice 3.8. (Podobnost Gaussových křivostí)

Statická váha je dána

$$w_{ij}^s = \begin{cases} \frac{\min(|g_i|, |g_j|)}{\max(|g_i|, |g_j|)} & |g_i| \neq \frac{g_{avg}}{h} \wedge |g_j| \neq \frac{g_{avg}}{h} \wedge g_i g_j > 0, \\ 0 & jinak, \end{cases} \quad (3.10)$$

kde g_{avg} je průměrná absolutní hodnota Gaussovy křivosti ve všech bodech a h je konstanta nastavená na $h = 100$. Když křivosti g_i a g_j mají obě stejné znaménko a jejich absolutní hodnoty jsou větší než prahová hodnota $\frac{g_{avg}}{h}$, pak je statická váha nenulová.

Při použití této váhy je však upraven algoritmus definovaný v odst. 3.4.2. K vytvoření množiny \mathbf{X}_{cand} zjednodušením modelu se použije 200 bodů. Ke zmenšení množiny kandidátních rovin se nepoužívá vzdálenost, ale využívají se definované váhy. Rovina se definuje jako kandidátní, pokud platí

$$w_{ij}^s > 0 \wedge w_{ij}^d(\rho) > 0.25, \quad (3.11)$$

kde w_{ij}^s a $w_{ij}^d(\rho)$ jsou statická a dynamická váha dvojice bodů $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_{cand}$ a $\mathbf{x}_j \in \mathbf{X}_{cand}$ vypočtené pomocí \mathbf{N}_{cand} a \mathbf{G}_{cand} .

Vzdálenost bodů

Druhá metoda modifikace využívá k ohodnocení dvojice bodů vzdálenost těchto bodů. Tím jsou zvýhodněny body s větší vzájemnou vzdáleností.

Definice 3.9. (Vzdálenost bodů)

Váhy jsou v tomto případě definovány následovně

$$w_{ij}^s(\rho) = \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{l_{avg}}, \quad (3.12)$$

$$w_{ij}^d(\rho) = 1,$$

kde l_{avg} je průměrná vzdálenost všech bodů od těžiště objektu.

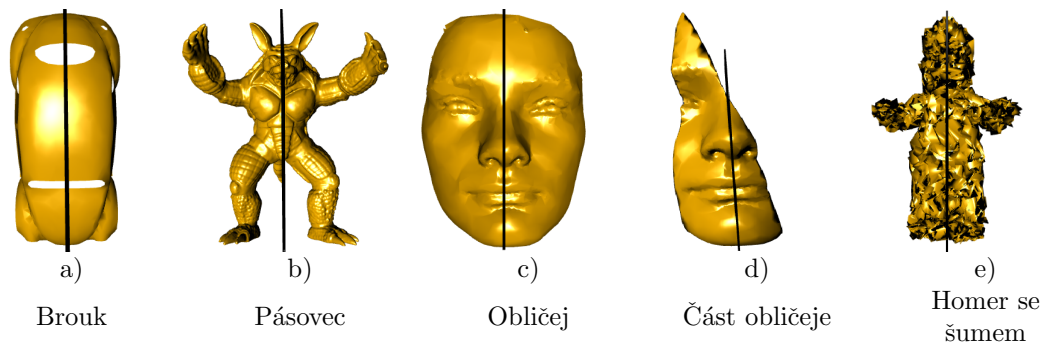
4 Testování metody, jejích parametrů a vah

V této kapitole popíšeme výsledky testování metody [7]. Program poskytnutý Ing. Lukášem Hrudou byl testován na počítači s CPU *Intel(R) Core(TM) i5-10310U*, s nainstalovanou pamětí RAM *8 GB* a operačním systémem *Windows 10*. Námi navržené změny byly implementovány v programovacím jazyce *C#*. Bližší informace o implementaci a ovládání programu jsou uvedeny v příloze A.

Jednotlivé parametry metody a váhy byly již popsány v předchozí kapitole, k nahlédnutí jsou také se svými výchozími hodnotami v tabulce v příloze B. Při detekci roviny symetrie budou dále použity tyto výchozí hodnoty metody, pokud nebude řečeno jinak.

Vstupem metody je objekt definovaný jako množina bodů $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ (viz def. 3.2). Tento objekt může být reprezentovaný diskrétní množinou bodů nebo pomocí trojúhelníkové sítě.

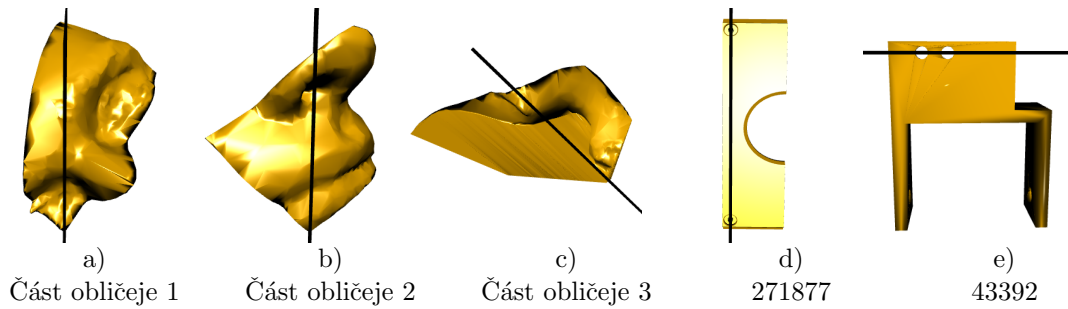
Metoda užívající míru symetrie [7] s výchozím nastavením parametrů a váhy dvojice bodů $w_{ij} = 1$ velmi dobře funguje na různých typech dat, např. silně symetrické objekty, realistické 3D scannery a objekty s chybějícími částmi nebo zašuměné verze objektů [7]. Obr. 4.1 ukazuje některé příklady výše zmíněných objektů.



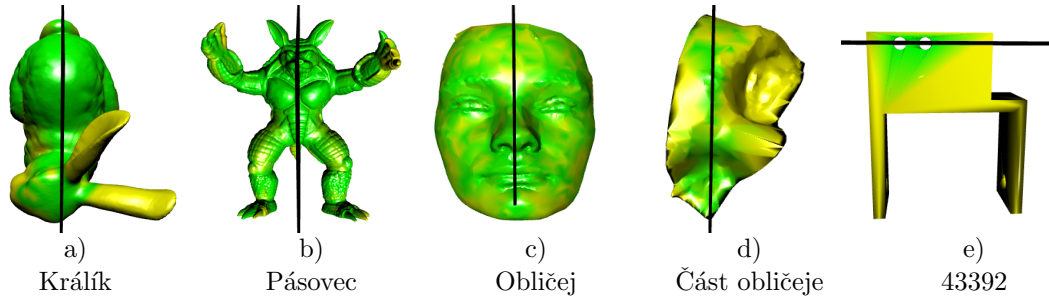
Obr. 4.1: Výsledky metody s výchozím nastavením parametrů a váhy dle [7].

Metoda ale příliš dobře nefunguje na malých částech obličeje nebo na objektech s nerovnoměrným rozložením bodů, kde se vyskytují shluky mnoha bodů a pak odlehlá místa s malým množstvím bodů. Fungování metody [7] s výchozím nastavením parametrů a vah na těchto modelech demonstruje obr. 4.2. Vidíme, že nerovnoměrné rozložení bodů na modelech (viz obr. 4.2d, 4.2e) příliš ovlivní výslednou rovinu symetrie.

Body modelu můžeme obarvit podle velikosti míry symetrie odpovídající konkrétní rovině. Takové výsledky můžeme vidět na obr. 4.3. Názorněji tak vidíme, které body jsou vůči dané rovině nejvíce symetrické a které nejméně, a to může být využito v různých dalších aplikacích.



Obr. 4.2: Výsledky metody s výchozím nastavením parametrů a váhy dle [7].

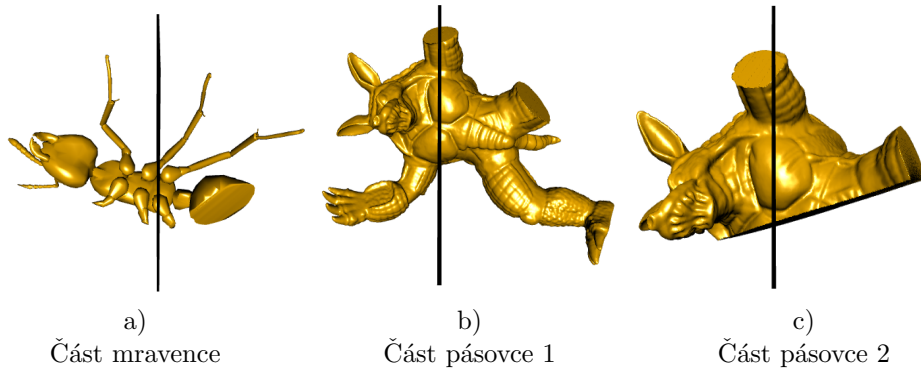


Obr. 4.3: Objekty s obarvením bodů podle velikosti míry symetrie k dané rovině symetrie. Obarvení dáno lineární interpolací od sytě žluté (nejmenší symetrie) po sytě zelenou (největší symetrie).

Cílem této práce je zobecnění reflexní symetrie, pojd'me se tedy podívat, jak změna parametrů může ovlivnit výslednou rovinu symetrie. Bylo testováno 20 modelů různých typů. Nedoporučujeme volit příliš nízké hodnoty počtu bodů množiny \mathbf{X}_{simp} k zjednodušení modelu a počtu bodů množiny \mathbf{X}_{cand} určující kandidátní roviny (defaultně používáno $|\mathbf{X}_{simp}| = 1000$ a $|\mathbf{X}_{cand}| = 100$). Při velmi malých hodnotách nedokáže metoda u většiny testovaných objektů symetrickou rovinu nalézt (např. $|\mathbf{X}_{simp}| = 100$, $|\mathbf{X}_{cand}| = 10$). Mírné snížení (např. o 50 %) výsledky většinou nezmění až na objekty s chybějícími částmi (viz obr. 4.4). U těchto objektů je rovina symetrie velmi přibližná. Pro nalezení přibližné symetrie by mohlo stačit použití menšího počtu bodů pro zjednodušení modelu. Snížení hodnot těchto parametrů by se možná mohlo použít u nesymetrických modelů k rychlejšímu nalezení přibližné symetrie.

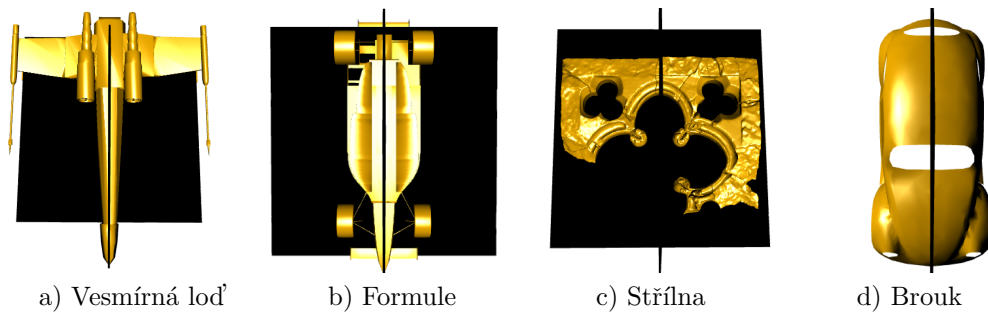
Snížením hodnot parametrů δ a ψ_{min} je ponecháno více kandidátních rovin. Výsledné roviny symetrie však už zůstávají stejné. Naopak zvýšením hodnot parametrů mohou být dobří kandidáti vymazáni. Při změně hodnot na $\delta = 0.5$, $\psi_{min} = 8$ se výsledné roviny opět příliš neliší, ve velmi malém množství vyjde špatná nebo pouze přibližná symetrická rovina.

Parametr κ je vhodné měnit pouze, pokud máme za cíl najít více rovin symetrie. Hlavní symetrie se se změnou parametru κ zpravidla nezmění. V [7] je navržena pro násobnou symetrii volba $\kappa = 20$. Bylo by dobré umět rozhodnout o tom, které symetrie jsou ještě dobré a které už nikoli. Metoda zatím navrhuje,



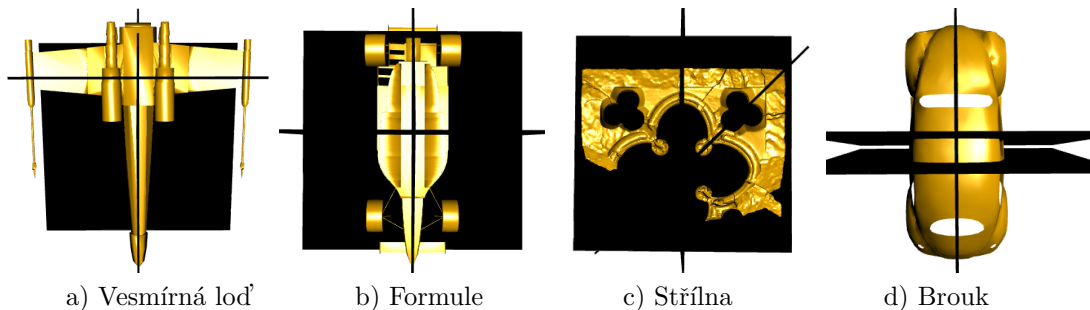
Obr. 4.4: Výsledky metody [7] s parametry $|\mathbf{X}_{simp}| = 500$, $|\mathbf{X}_{cand}| = 50$ na objektech s chybějícími částmi.

že výsledné roviny symetrie musí mít alespoň 70 % míry symetrie nejlepší detekované roviny symetrie a zároveň jejich vzdálenost (definovaná v def. 3.5) je menší než 0.25. Podmínka velikosti míry symetrie je dosti omezující. Na obr. 4.5 vidíme, že při hledání tří rovin symetrie podle výše zmíněných podmínek jsou mnohdy nalezené pouze 2 nebo jen 1 rovina symetrie.



Obr. 4.5: Výsledky detekce tří rovin symetrie za podmínek definovaných v [7].

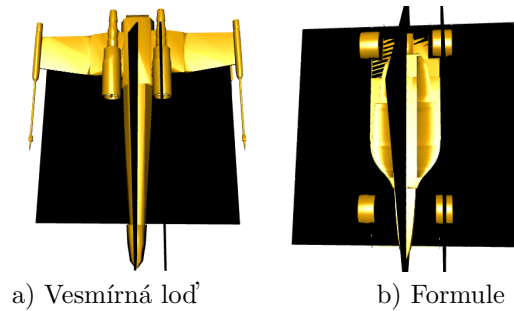
Pokud nebudeme velikost míry symetrie nijak omezovat, můžeme nalézt další přibližné symetrické roviny (viz obr. 4.6). Tímto způsobem však mohou být také objeveny roviny, které už pro nás nejsou příliš významné (viz obr. 4.6d).



Obr. 4.6: Výsledky detekce třech rovin symetrie s použitím $\kappa = 20$ bez omezení velikosti míry symetrie.

Hodnota posledního parametru α nemá vliv na nejlepší rovinu symetrie, jak uvádí Ing. Lukáš Hruďa v [7]. Můžeme si však všimnout, že může ovlivňovat další

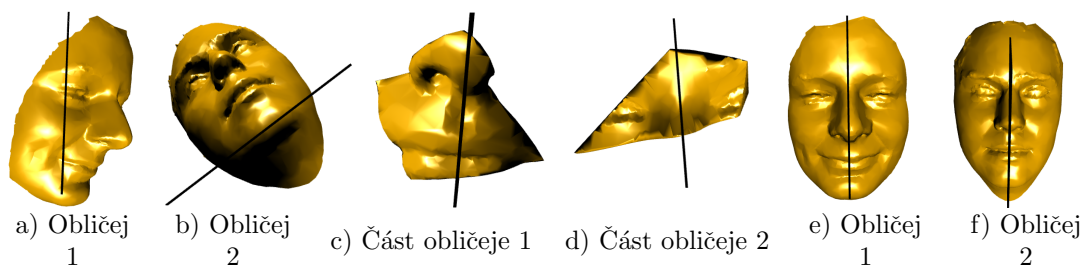
detekované roviny symetrie. Na obrázku 4.7 vidíme změnu výsledků detekce tří rovin symetrie s použitím parametru $\alpha = 10 \cdot \frac{15}{l_{avg}}$. Můžeme vidět, že v případě vesmírné lodi na obr. 4.7a se třetí detekovaná rovina symetrie se změnou parametru posunula do oblasti motoru a v případě formule na obr. 4.7b do oblasti kol. Změna parametru α by se tak mohla využít k detekci lokálních symetrií.



Obr. 4.7: Výsledky detekce tří rovin symetrie s použitím $\alpha = 10 \cdot \frac{15}{l_{avg}}$.

Gaussova křivost a symetrie normálových vektorů

Použití Gaussovy křivosti a symetrie normálových vektorů může být využito na velmi malé části obličeje (obr. 4.8c, 4.8d) [7]. Křivosti jsou obecně velmi dobré k detekci rysů na 3D modelech hlav [12]. Při našem testování jsme ověřili, že na malých částech obličeje funguje metoda velmi pěkně. Bohužel na některých modelech hlav podává tato váha úplně špatné výsledky (viz obr. 4.8a, 4.8b). Způsobuje to symetrie normálových vektorů. Lepších výsledků na modelech hlav dosahuje použití pouze Gaussovy křivosti. Tento příklad demonstrují obr. 4.7e, 4.8f, kde jsou zobrazeny výsledky detekce na stejných modelech jako na obr. 4.8a, 4.8b. Vidíme, že v případě použití Gaussovy křivosti dochází k nalezení správné roviny symetrie.



Obr. 4.8: Výsledky metody při použití Gaussovy křivosti a symetrie normálových vektorů (a, b, c, d) a při použití pouze Gaussovy křivosti (e, f).

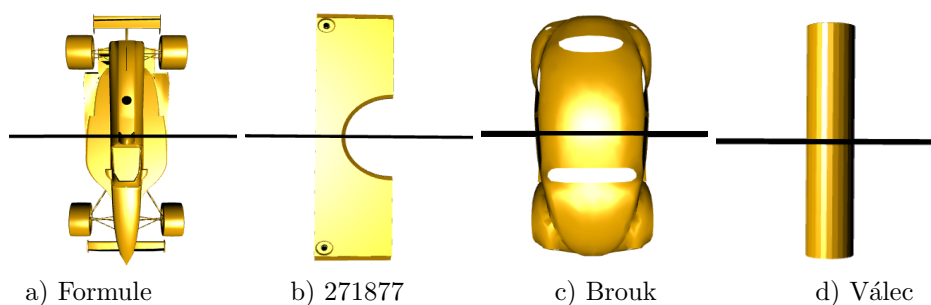
Použití Gaussovy křivosti je navíc omezeno pouze na manifoldní sítě². V případě symetrie normálových vektorů ještě způsobují problémy modely, u nichž se vysky-

²Manifoldní síť je struktura sítě, která musí splňovat podmínky vyrobitelnosti modelu (konkrétněji viz [6])

tují trojúhelníky s nulovým obsahem. Ty způsobují chybu ve výpočtu a nelze symetrii nalézt. Tuto chybu se nám podařilo odstranit vynecháním těchto problémových trojúhelníků při výpočtu symetrie.

Vzdálenost bodů

Druhá úprava metody s využitím vzájemné vzdálenosti bodů může být použita u modelů, které jsou dominantní v horizontální ose, k nalezení roviny kolmé k této ose. Bodům, které jsou od sebe více vzdáleny je dle def. 3.5 přiřazena větší váha (odpovídají vzdálenosti těchto bodů), než těm bližším. Na takovýchto modelech dosahuje tato váha velmi dobrých výsledků (viz obr. 4.9).

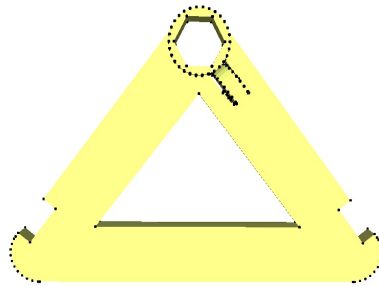


Obr. 4.9: Výsledné roviny symetrie s využitím ohodnocení pomocí vzdálenosti bodů (rov. 3.5).

Pro detekci symetrie na modelech hlav bychom tedy doporučovali použít raději Gaussovu křivost samotnou. K nalezení horizontální roviny symetrie na širších modelech je vhodné použít váhu vzdálenosti bodů, která funguje velmi pěkně. V dalších kapitolách se již budeme věnovat vlastním implementovaným návrhům úprav metody a jejich výsledkům.

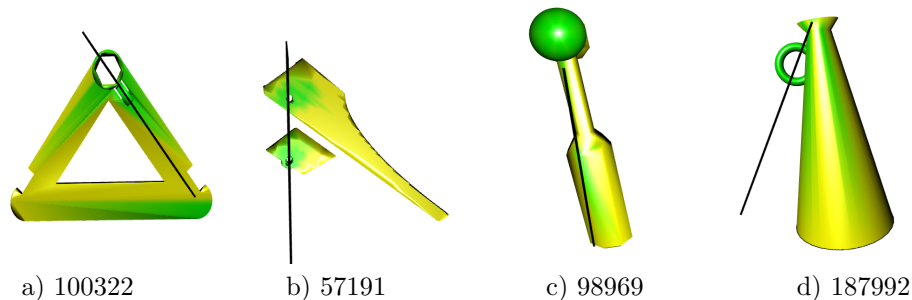
5 Nerovnoměrně vzorkovaná geometrická data

V této kapitole se zaměříme na modely s nerovnoměrným rozložením bodů (viz obr. 5.1), pro které dosavadní metoda [7] nedosahuje příliš dobrých výsledků. Všechny testované modely v této kapitole jsou převzaté z velké databáze 3D modelů Thingi10K [43], označení odpovídá identifikačnímu číslu v databázi. K testování bylo náhodně vybráno 50 objektů z této databáze.



Obr. 5.1: Model s nerovnoměrným vzorkováním bodů.

Rovina symetrie je vlivem nerovnoměrného rozložení bodů nalezena v místech s větší hustotou bodů. Na obr. 5.2 můžeme vidět, že nejsymetričtější body k odpovídající výsledné rovině symetrie jsou právě v místech s velkým shlukem bodů. Většinou se jedná o lokální velmi symetrické oblasti. Tento problém byl prozatím řešen dodatečným navzorkováním dat. Požaduje se však, aby metoda byla flexibilní na různých typech dat bez většího zásahu uživatele.



Obr. 5.2: Nerovnoměrně vzorkované objekty s obarvením bodů podle velikosti míry symetrie k dané rovině symetrie. Obarvení dáno lineární interpolací od sytě žluté (nejmenší symetrie) po sytě zelenou (největší symetrie)

Potřebujeme tedy místům s menší hustotou dát větší důležitost. Změna parametrů metody by v tomto případě k lepším výsledkům nevedla. Rozložení bodů můžeme zachytit, využijeme-li obsahu trojúhelníkového vějíře bodů nebo hustoty bodů.

Hustotu bodů však nevztahujeme k jednotce plochy, ale k okolí bodu \mathbf{x}_i . Toto okolí je dáno buňkou 3D mřížky obsahující bod \mathbf{x}_i a sousedícími buňkami. Velikost 3D mřížky je však neměnná a proto hustotu bodů definujeme následovně.

Definice 5.1. (Hustota bodů)

Mějme bod $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$. Hustotou bodů D v okolí bodu \mathbf{x}_i nazýváme počet bodů ve 3D mřížkovém okolí bodu \mathbf{x}_i , které tvoří buňka mřížky obsahující bod \mathbf{x}_i a s ní sousedící buňky.

3D mřížka je implicitně volena s velikostí $\frac{2.6}{\alpha} \times \frac{2.6}{\alpha} \times \frac{2.6}{\alpha}$ a odpovídá mřížce použité při výpočtu míry symetrie (viz def. 3.4).

5.1 Váha využívající hustoty bodů

Váhu využívající hustoty bodů definujeme třemi různými způsoby.

Definice 5.2.

Statické váhy pro hustoty bodů definujeme následovně

$$w_{ij}^s = \frac{1}{D(\mathbf{x}_i)}, \quad (5.1)$$

nebo

$$w_{ij}^s = \frac{1}{D(\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}_i))}, \quad (5.2)$$

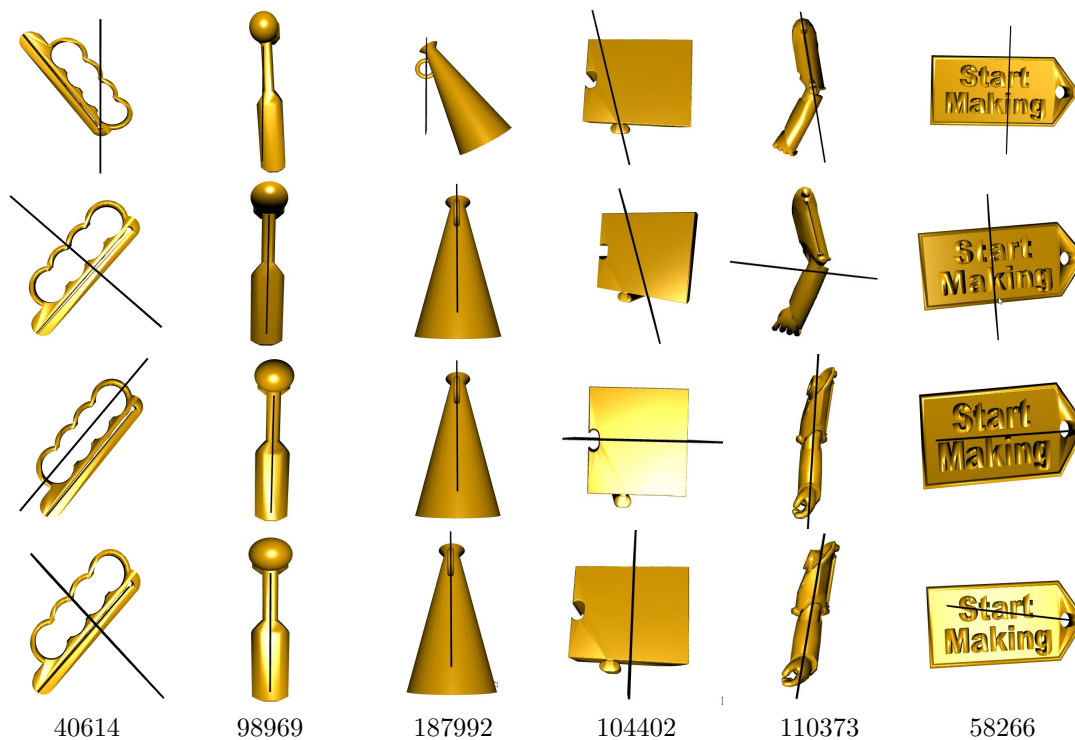
nebo

$$w_{ij}^s = \frac{1}{\text{Max}(D(\mathbf{x}_i), D(\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}_i)))}, \quad (5.3)$$

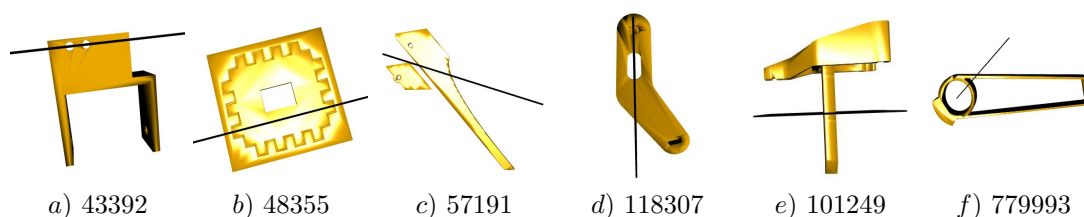
kde $D(\mathbf{x}_i)$ je hustota bodů v okolí bodu \mathbf{x}_i , $D(\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}_i))$ je hustota bodů v okolí $\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}_i)$.

Využitím hustoty bodů zmírníme vliv bodů v hustších oblastech. Tyto celkem triviální váhy dosahují na některých objektech poměrně pěkných výsledků. V některých případech se mohou lišit, na některých modelech funguje lépe jedna a na jiném druhá, ale obecně dosahují zlepšení na 50 % modelů. Na obr. 5.3 můžeme vidět různé výsledky, které použitím výše definovaných vah můžeme získat. Na modelech 98969 a 187992 dostáváme stejné výsledky u všech tří vah. Na jiných se výsledky liší a někde zabírá jedna metoda a jinde zase jiná. Dobré výsledky dosahuje metoda s váhou z rov. 5.2 také na modelech 40614, 104402, 1103473 a 58266. Na modelech 40614, 104402 a 58266 je pomocí dalších vah nalezena jiná, také vhodná rovina.

Pomocí těchto tří vah se bohužel nedaří vylepšit výsledky na všech modelech (pouze na přibližně 58 % testovaných modelů). Na ostatních modelech nefunguje ani jedna výše navrhaná váha, hustší oblasti bodů stále ovlivňují hlavní rovinu symetrie. Ukázkou několika z nich můžeme vidět na obr. 5.4, kde je použita váha z rov. 5.3.



Obr. 5.3: Výsledky metody s použitím definovaných vah pro hustotu bodů. První řada demonstuje výsledky metody bez použití vah. Druhá řada ukazuje výsledky metody s využitím váhy z rov. 5.1. Třetí řada využívá váhu z rov. 5.2 a poslední řada z rov. 5.3.

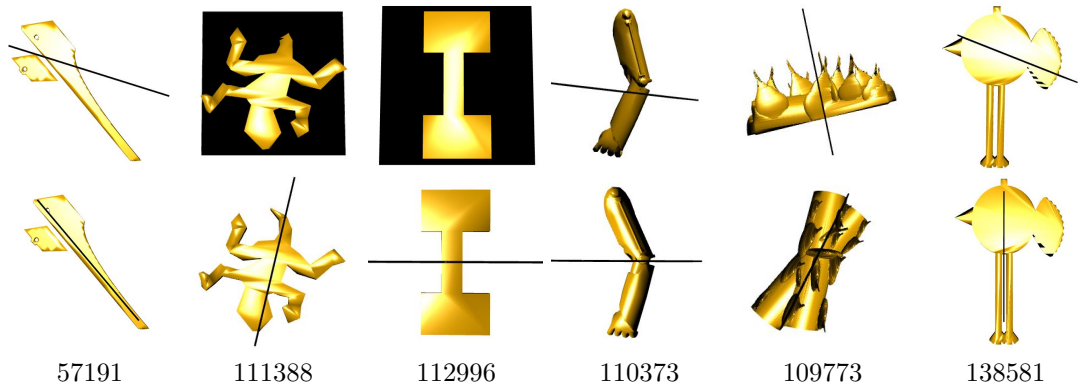


Obr. 5.4: Výsledná rovina symetrie pomocí hustoty bodů s využitím rov. 5.3.

U poloviny objektů vychází velmi pěkně i druhá symetrie, v některých případech je dokonce lepší než první (viz obr. 5.5). Horní řada obsahuje výsledné nejlepší roviny symetrie, zatímco dolní řada ukazuje druhou nejlepší rovinu symetrie. U modelů 57191, 111388, 112996 je využito váhy z rov. 5.3 a u dalších tří modelů váhy z rov. 5.1.

V dalším kroku jsme zjišťovali vliv změny velikosti 3D mřížky ve výpočtu hustoty bodů (změna hodnoty $\frac{2.6}{\alpha}$). Zmenšením nebo zvětšením okolí bodu bychom mohli v některých místech ještě více váhy snížit nebo zvýšit. Tato modifikace bohužel však nevede k lepším výsledkům.

Další modifikace spočívá v nesymetričnosti vah. Doposud byly váhy počítány symetricky, tedy $w_{ij} = w_{ji}$. Takže je zde možnost úpravy detekce i pro nesymetrické váhy. Při nerovnoměrném rozložení dat by právě nesymetrický výpočet vah mohl pomoci k lepší přesnosti. V případě hustoty bodů, ale nedojde k nějakému



Obr. 5.5: Nalezená nejlepší symetrie (horní řada) a druhá nejlepší symetrie (dolní řada) s využitím hustoty bodů.

velkému zlepšení. Na některých modelech získáme správnou rovinu symetrie, jedná se však přibližně jen o 38 % modelů. U některých modelů, kde fungoval symetrický výpočet, však nesymetrický selhal.

5.2 Obsah trojúhelníkového vějíře bodů

Této váhy lze využít pouze na manifoldní síti. Místa s malým výskytem bodů jsou tvořena velkými trojúhelníky, zatímco hustě navzorkovaná místa obsahují velké množství trojúhelníků s malým obsahem. Toho je možné využít. Definujeme statickou váhu následovně.

Definice 5.3.

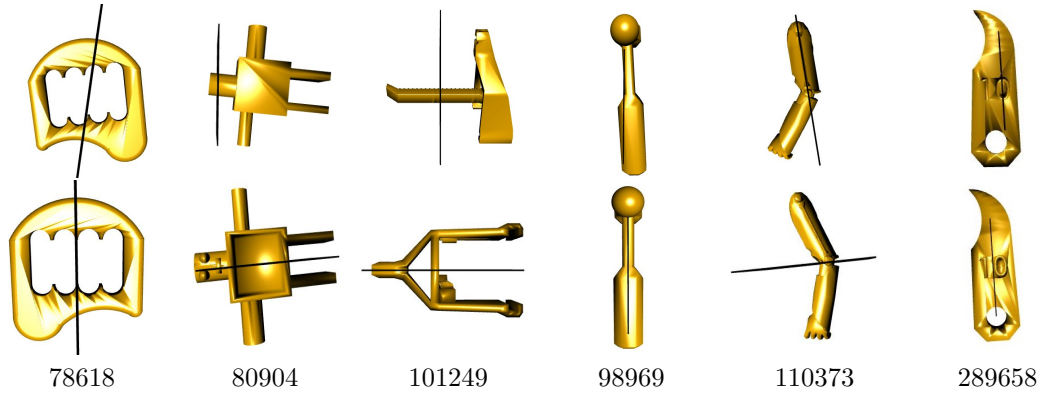
Statická váha využívající obsah trojúhelníkového vějíře

$$w_{ij}^s = \sum_{t_{\mathbf{x}_i}=0}^n S_{t_{\mathbf{x}_i}}, \quad (5.4)$$

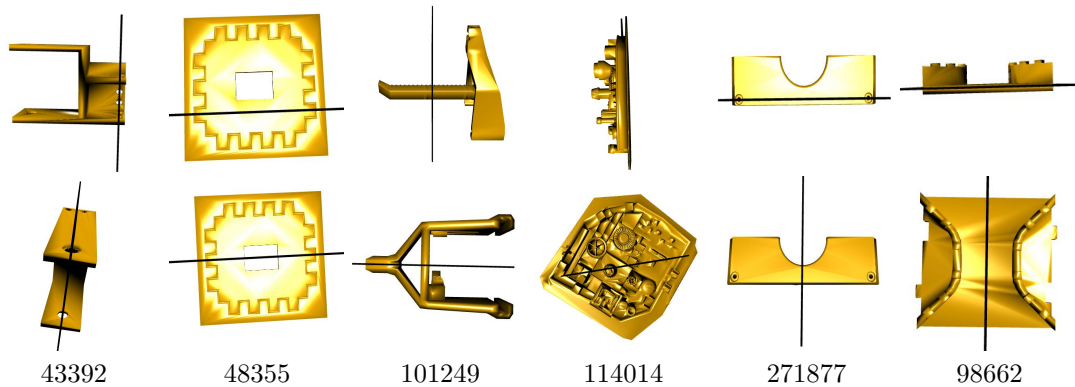
kde $S_{t_{\mathbf{x}_i}}$ je obsah trojúhelníku, jehož vrcholem je bod \mathbf{x}_i .

Tato váha bohužel nedosahuje příliš dobrých výsledků. Na některých modelech se nám podaří dostat správnou rovinu symetrie (viz obr. 5.6). Těchto případů je však méně než u předchozí váhy, ale zase tato váha funguje tam, kde předchozí váha selhává.

Vylepšení nastává, pokud zahrneme nesymetrii vah. Použití symetrických vah může při nerovnoměrném rozložení bodů značně ovlivnit výsledky, především při použití váhy obsahu trojúhelníkového vějíře. Některé velké trojúhelníky nemusí být do symetrických vah zahrnuty a nebo jsou zahrnuty dvakrát. Využití nesymetričnosti vah zajistí, že hlavní symetrie je nalezena v 50 % případů. Navíc jsou nalezeny symetrie, které nebyly nalezeny u vah využívající hustotu bodů (viz obr. 5.7). Výpočetní náročnost se však užitím nesymetrických vah zvyšuje.



Obr. 5.6: Porovnání výsledných rovin symetrie získaných bez využití vah (první řada) a s užitím váhy obsahu trojúhelníkového vějíře (druhá řada).



Obr. 5.7: Srovnání výsledných rovin symetrie získaných bez využití vah (první řada) a s užitím nesympetrického obsahu trojúhelníkového vějíře (druhá řada).

5.3 Hustota bodů a vzdálenost bodů

U některých modelů, kde selhávají váhy hustoty bodů a obsahu vějířů, bychom potřebovali ještě posílit vzdálenější body. Samotná váha vzdálenosti bodů však nemusí být dostačující, protože nerespektuje nerovnoměrné rozložení bodů, viz druhá řada na obr. 5.8. Navrhujeme tedy využít současně vzdálenost bodů s hustotou bodů z rov. 5.3, která dosahuje nejlepších výsledků.

Definice 5.4. (Hustota bodů a vzdálenost bodů)

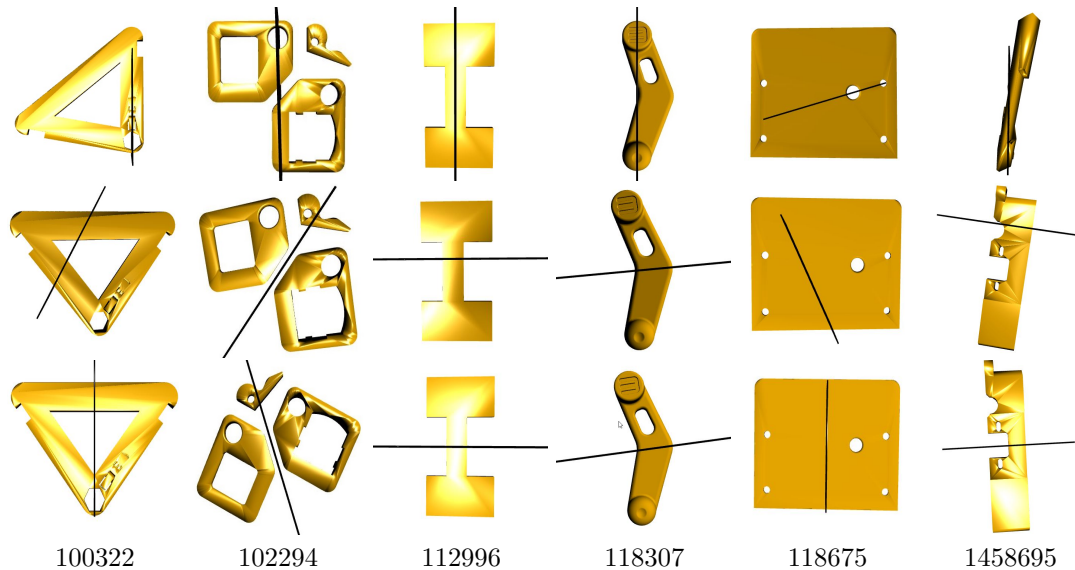
Statická váha je definována jako

$$w_{ij}^s = \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{l_{avg}} \cdot \frac{1}{\text{Max}(D(\mathbf{x}_i), D(\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}_i)))}, \quad (5.5)$$

kde l_{avg} je průměrná vzdálenost bodů, $D(\mathbf{x}_i)$ je hustota bodů v okolí bodu \mathbf{x}_i , $D(\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}_i))$ je hustota bodů v okolí $\mathbf{r}(\rho, \mathbf{x}_i)$.

Ukázka výsledné roviny symetrie na modelech, kde je vhodné tuto váhu použít, je zobrazena ve třetí řadě na obr. 5.8. Je také možné využít kombinaci trojúhelníkového vějíře bodu a vzdálenost bodů. Pro některé modely je tato kombinace

vhodnější k získání správné roviny symetrie než kombinace hustoty bodů a vzdálenosti bodů. Obecně však tato kombinace nedosahovala příliš dobrých výsledků a proto ji dále nevyužíváme.



Obr. 5.8: Porovnání výsledných rovin symetrie získaných bez využití vah (první řada), s užitím váhy vzdálenosti bodů (druhá řada) a s užitím hustoty a vzdálenosti bodů (třetí řada).

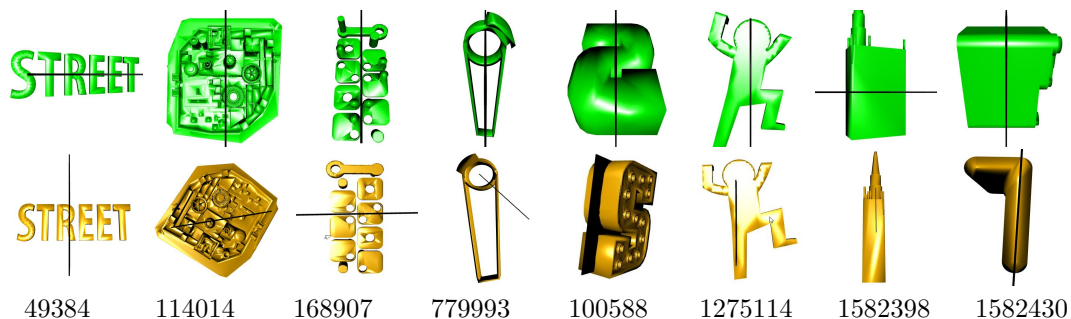
5.4 Navrhovaná metoda detekce symetrie u modelů s nerovnoměrně rozloženými body

K detekci nejlepší symetrie na nerovnoměrně vzorkovaných datech se nám nepodařilo najít pouze jednu ideální váhu, která by úspěšně fungovala na většině dat. Navrhujeme tedy k detekci roviny symetrie postupně použít následující váhy:

1. detekce s užitím hustoty bodů dle definovaných rovnic,
2. detekce s užitím nesymetrického obsahu trojúhelníkového vějíře bodu (pouze pro manifoldní síť),
3. detekce s užitím hustoty a vzdálenosti bodů,
4. detekce druhé nejlepší roviny symetrie pomocí již zmíněných vah.

Námi detekované hlavní roviny symetrie na nepřevzorkovaných datech jsme porovnávali s výsledky detekce na modelech, které byly pro přesnější výsledky upraveny dodatečným navzorkováním. Výše zmíněným postupem jsme našli odpovídající rovinu ve 42 případech z 50 testovaných modelů. Na ostatních 8 nepřevzorkovaných modelech je detekovaná rovina stále ovlivněna nerovnoměrným vzorkováním a nepodařilo se nám najít váhu, která by dosahovala lepších výsledků.

Tyto modely jsou zobrazeny na obr. 5.9. Můžeme porovnat detekované roviny symetrie na upravených datech dodatečným vzorkováním (zelené modely převzaté z [7]) s rovinami nalezenými při využitím některé z výše zmíněných vah z navrhovaného postupu (žluté modely).



Obr. 5.9: Výsledné roviny symetrie na dodatečně navzorkovaných datech (zelené modely v první řadě) a námi detekovaná nejlepší rovina navrhovaným postupem (žluté modely ve druhé řadě).

Pro modely s nerovnoměrným rozložením bodů byly navrženy dvě váhy - váha využívající obsah trojúhelníkového vějíře bodu a váha využívající hustotu bodů. Jelikož dosahují na různých modelech různých výsledků, na základě testování byl stanoven postup volby vah. Pomocí navržených vah se však nepodařilo detekovat roviny symetrie pro všechny testované modely.

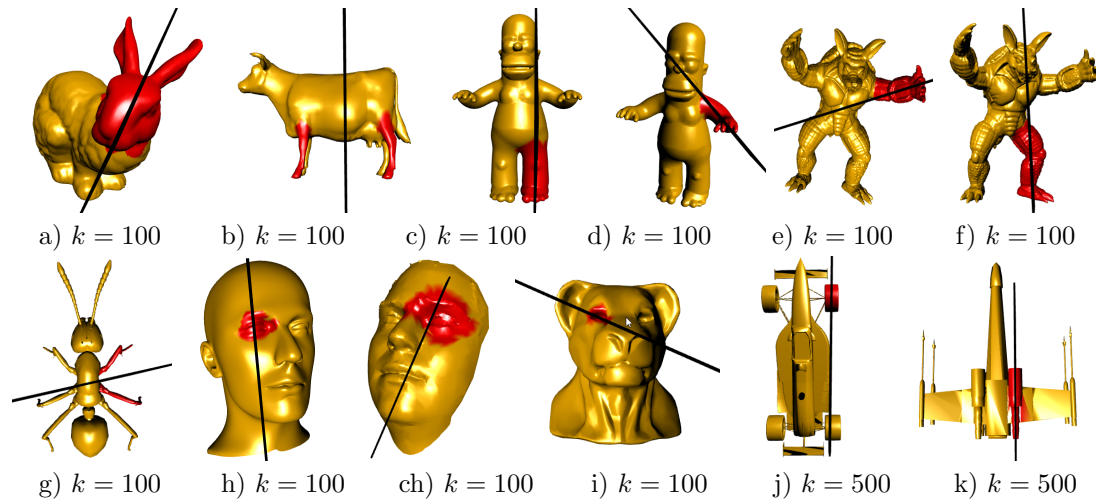
6 Různá významnost vstupních bodů

Další částí našeho zkoumání bylo, zda lze výpočet roviny symetrie ovlivnit nastavením různé významnosti vstupních bodů. Tedy některým bodům přiřadit vyšší váhu a tím docílit, že se pro symetrii přednostně hodnotí jen nějaká část modelu. Snažíme se tedy detekovanou symetrii lokalizovat do určité části modelu.

Bylo vybráno několik modelů, u nichž se barevně rozlišily významné (červené) a nevýznamné body. Výpočet symetrie probíhá s výchozím nastavením všech parametrů s tím rozdílem, že pokud body \mathbf{x}_i a \mathbf{x}_j mají červenou barvu, pak se statická váha volí následovně

$$w_{ij}^s = k, \quad (6.1)$$

kde k je konstanta. Tímto přístupem se tedy roviny procházející významnou (červenou) oblastí zvýhodňují oproti ostatním, a to v závislosti na volbě hodnoty konstanty k . Na obr. 6.1 můžete vidět výsledné roviny symetrie s nastavením různé významnosti bodů. Hodnoty konstanty k byly voleny experimentálně a jsou uvedeny pod každým modelem.

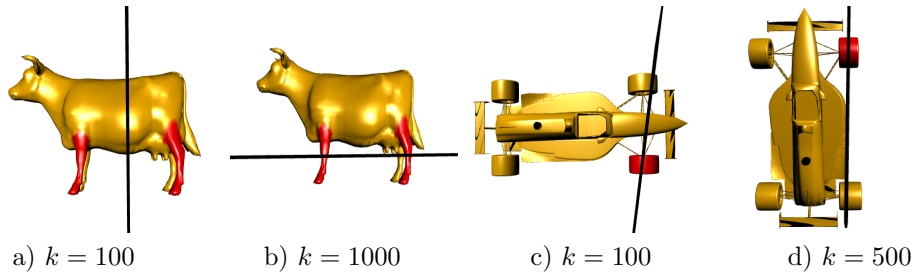


Obr. 6.1: Výsledné lokální roviny symetrie s různou významností vstupních bodů. Červeně jsou označeny významné body. Hodnota k určuje váhu významných bodů.

Z výsledků je patrné, že nastavením různé významnosti vstupních bodů lze velmi dobře ovlivnit výslednou rovinu symetrie. Tímto způsobem tedy můžeme nalézt lokální symetrie.

6.1 Hodnota váhy významných bodů

V předchozích experimentech (viz obr. 6.1) byla hodnota konstanty k volena experimentálně. To však není příliš vhodné, malá hodnota nemusí dostatečně výsledek ovlivnit. Navíc také pro různé hodnoty můžeme dostávat odlišné výsledky lokální symetrie (obr. 6.2).

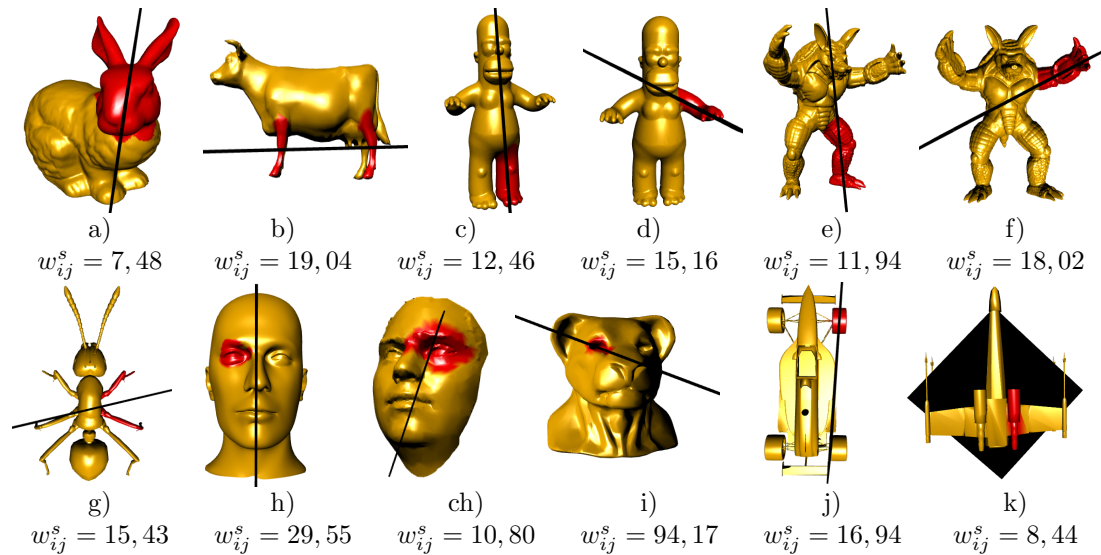


Obr. 6.2: Výsledné lokální roviny symetrie s různou významností vstupních bodů. Červeně jsou označeny významné body. Hodnota k určuje váhu významných bodů.

Váha významného bodu musí být tím větší, čím méně významných bodů máme, a naopak, pokud za významné body považujeme většinu bodů, pak můžeme volit váhu menší. Statická váha významných bodů je tedy volena následovně

$$w_{ij}^s = 2 \cdot \frac{|\mathbf{X}|}{|\mathbf{X}_{\text{featured}}|}, \quad (6.2)$$

kde $|\mathbf{X}|$ je počet všech bodů modelu, $|\mathbf{X}_{\text{featured}}|$ je počet všech významných bodů modelu. Samozřejmě za předpokladu, že $|\mathbf{X}_{\text{featured}}| \neq 0$. Podíl je násoben dvěma, aby váha nebyla příliš nízká. Pokud by tedy všechny body byly významné, pak se všem bodům přiřadí $w_{ij}^s = 2$ a výslednou rovinu symetrie to neovlivní, pouze se zvětší její míra symetrie.



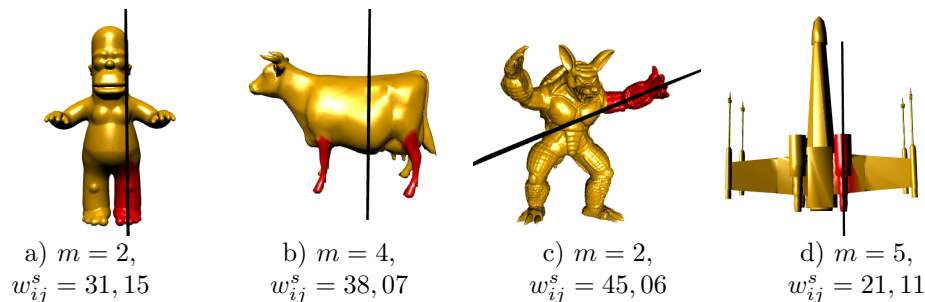
Obr. 6.3: Výsledné lokální roviny symetrie s různou významností vstupních bodů pomocí rov. 6.2. Červeně jsou označeny významné body. Hodnota w_{ij}^s udává váhu významného bodu.

Lokální symetrie detekované pomocí výše definované váhy významných bodů vidíme na obr. 6.3. Námí zvolená hodnota dokáže ovlivnit výpočet roviny symetrie a nalézt lokální symetrii významné části modelu. Pouze u modelů na obr. 6.3h, 6.3i a 6.3k je váha nepostačující a je zapotřebí volit jinou. Volbou jiné hodnoty váhy můžeme také u některých modelů získat přesnější lokální symetrii. Definujme tedy

nový vztah pro hodnotu váhy významných bodů, a to následovně

$$w_{ij}^s = m \cdot \frac{|\mathbf{X}|}{|\mathbf{X}_{\text{featured}}|}, \quad (6.3)$$

kde $m = 2, 3, 4, 5, \dots$ je libovolná konstanta. Užití takto definované váhy můžeme vidět na obr. 6.4, kde jsou zobrazeny pouze modely, u kterých dochází k nalezení přesnější lokální symetrie významných částí. Hodnota konstanty m a hodnota definované váhy pomocí rovnice 6.3 jsou uvedeny u každého modelu. Implicitní hodnota konstanty m je stanovena na $m = 2$.



Obr. 6.4: Výsledné lokální roviny symetrie s různou významností vstupních bodů pomocí rov. 6.3. Červeně jsou označeny významné body. Konstanta m je parametr rovnice 6.3, hodnota w_{ij}^s určuje váhu významného bodu.

Na většině testovaných modelů postačuje ponechat výchozí hodnotu konstanty m . Pokud však není detekována správná rovina symetrie, je doporučeno hodnotu m zvýšit.

6.2 Automatická detekce významných bodů

Doposud byly významné body v modelech vybírány ručně pomocí dostupného 3D vizualizačního programu. To obnáší znalost daného programu a určitou míru trpělivosti a především čas. Proto by bylo efektivnější detekovat jednotlivé části automaticky. Určitě existuje řada složitých detekčních algoritmů, které jsou však nad rámec této práce. My navíc potřebujeme na různých modelech detekovat různé části v závislosti na potřebách uživatele. Detekce významných částí tedy nemůže být plně automatická. U většiny modelů potřebujeme detekovat vnější části jako ruce, nohy, kola auta. Na těchto částech můžeme snadno najít extrém. Extrém v daném směru s definujeme následovně.

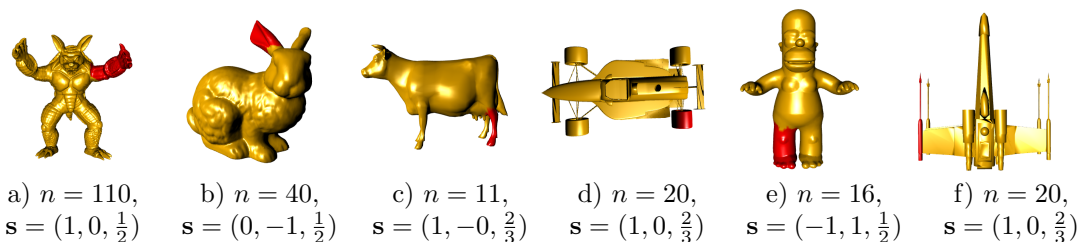
Definice 6.1.

Bod $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$, pro který je $\mathbf{x}_i^T \mathbf{s}$ maximální, označíme za *extrém* objektu v daném směru s .

Takto získaný významný bod \mathbf{x}_i se stane výchozím pro objevení dalších bodů významné části modelu. Výnamnost bodu postupně rozšiřujeme na jeho sousední

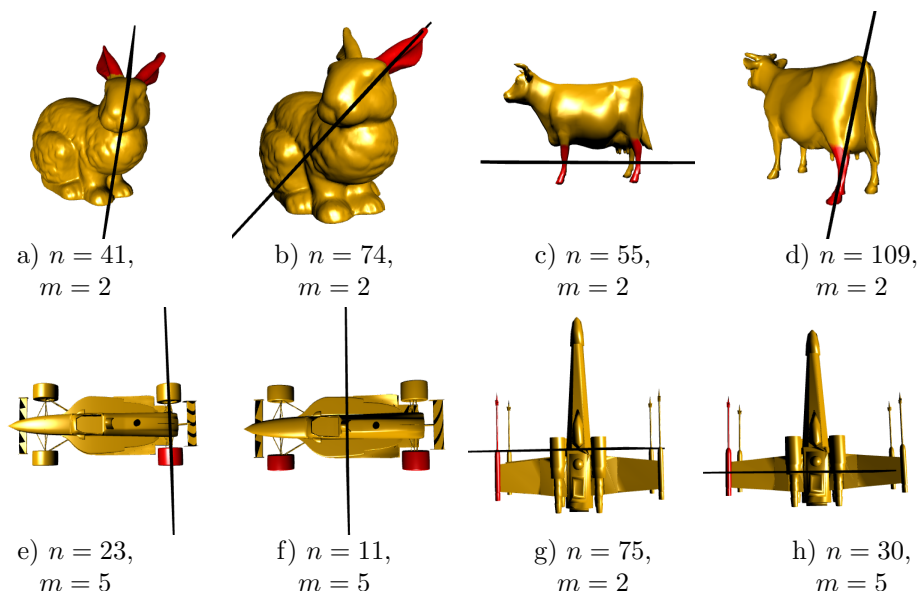
vrcholy. To jsou vrcholy, které s ním sdílejí trojúhelník (body na trojúhelníkovém vějíři). Tento postup se opakuje do požadované vzdálenosti (n -sousedství).

Navrhovaný algoritmus poskytuje velmi jednoduché vyhledání významných oblastí vnějších částí modelů. Na obr. 6.5 je zobrazeno několik takto získaných významných oblastí. Při detekci významných oblastí je však nezbytné zadání směru a požadované velikosti n -sousedství. Velikost n -sousedství nelze odhadnout, protože je pouze na uživateli, jak velkou oblast potřebuje, proto musí být tato hodnota zjištěna experimentálně.



Obr. 6.5: Detekované části významných bodů navrhovaným postupem. Červeně jsou označeny významné body, n udává velikost sousedství, vektor s je směr použitý při detekci extrému.

K detekci více částí modelu stačí zadat požadované směry a provést stejný algoritmus. Ukázkou můžeme vidět na obr. 6.6, kde jsou také zobrazeny výsledné lokální symetrie. Použité parametry jsou vždy uvedeny u konkrétního modelu. Pomocí námi navrhovaného algoritmu však nemůžeme detekovat vnitřní části modelu (např. oči na modelech hlavy).

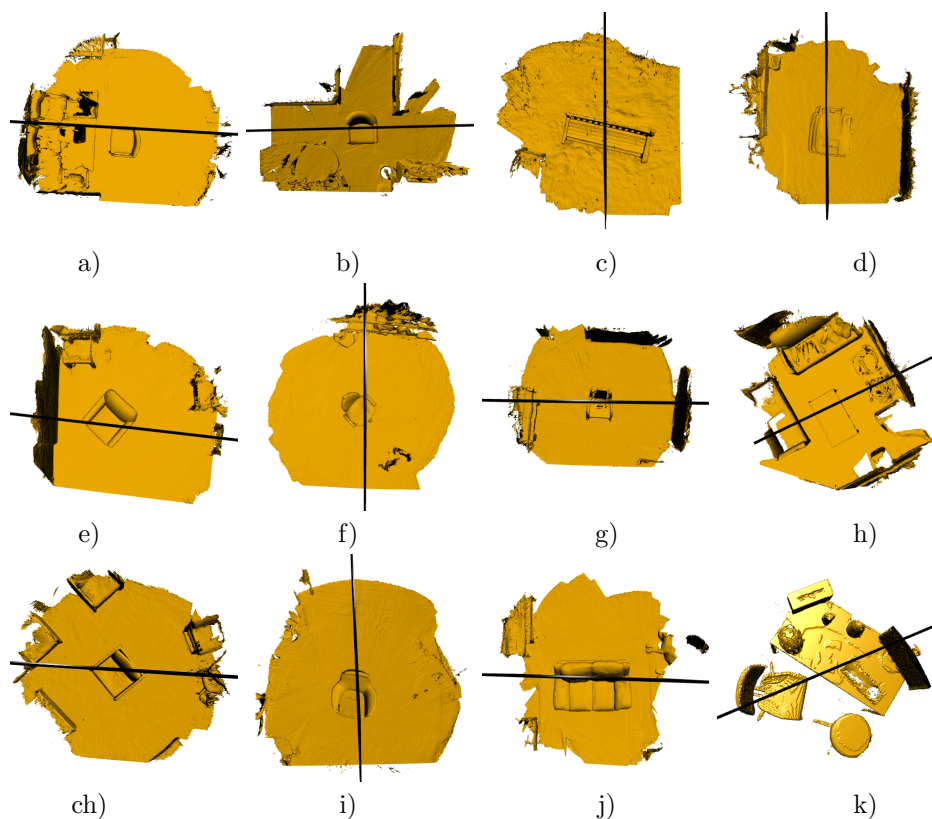


Obr. 6.6: Detekované části významných bodů (červeně) s výslednými rovinami symetrie určené různou významností vstupních bodů pomocí rov. 6.3. Hodnota n udává velikost sousedství, konstanta m je parametr rov. 6.3.

7 3D reálné scény

Navržená metoda detekce reflexní symetrie [7] funguje velmi dobře na různé škále reálných modelů. Většina testovaných dat se většinou skládala z jednoho převažujícího objektu. V této kapitole se budeme věnovat modelům reálných scén, které se skládají z jednoho či více stěžejních objektů. Cílem je zjistit, zda metoda dokáže nalézt nějakou přibližnou symetrii některého z objektů. Všechny modely jsou převzaty z databáze reálných scén [4].

Většina modelů je tvořena reálnou scénou jednoho objektu (např. židle, křeslo). Součástí modelů je i podlaha a nepřesná část okolí (viz obr. 7.1). Právě tyto části způsobují, že symetrii daného středového objektu nejsme schopni použitím metody detekce s výchozím nastavením parametrů a vah nalézt. Na obr. 7.1 vidíme, že výsledná symetrie sice objektem ve středu modelu prochází, ale o jeho symetrii se nejedná. Výsledná symetrie více reaguje na celkový tvar modelu.



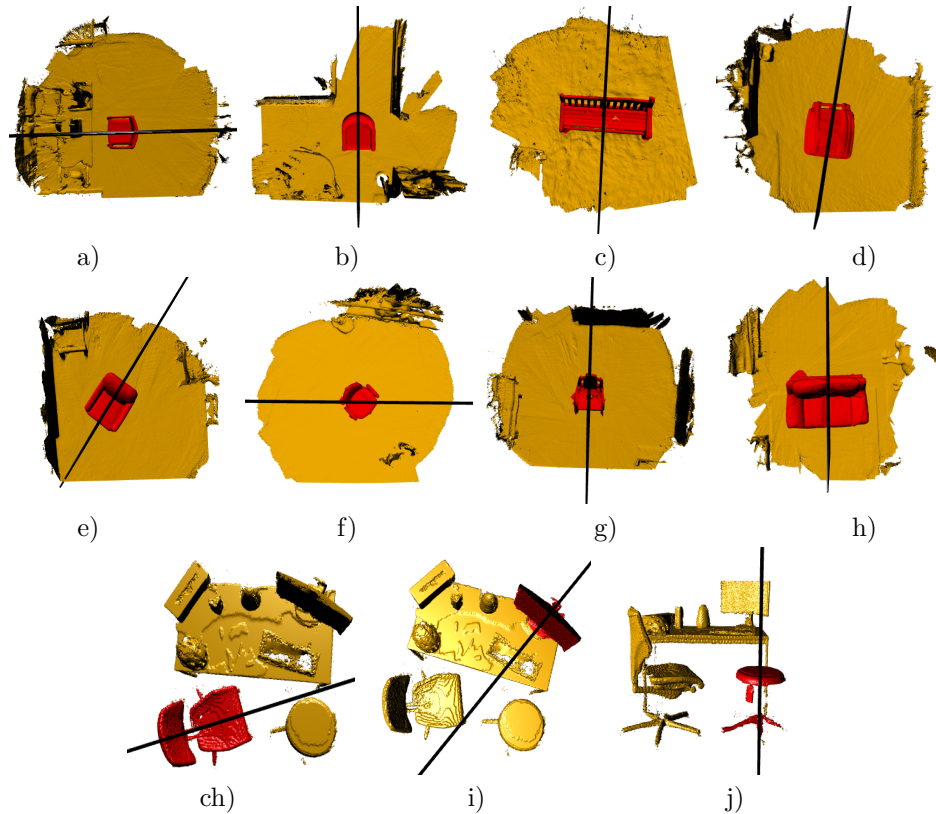
Obr. 7.1: Detekce roviny symetrie na reálných 3D scénách s výchozím nastavením parametrů a vah.

Důvodů, proč metoda selhává, je samozřejmě více. Objekt, pro který hledáme symetrii, tvoří velmi malou část modelu. Také musíme vzít v úvahu, že jde o modely, které se průměrně skládají z 500000 bodů. Během detekce se však model zjednoduší na pouhých 1000 bodů. Pak tedy daný objekt obsahuje pouhý zlomek bodů. Poslední model, model pracovního stolu (obr. 7.1k) je tvořen stolem

s počítačem a dvěma židlemi. Výsledná symetrie je opět ovlivněná celým modelem a nedokáže detekovat symetrii alespoň jednoho z objektů modelu.

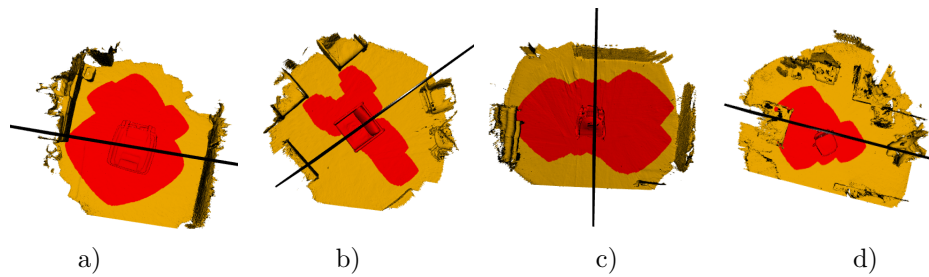
Nabízí se možnost zvýšit počet bodů pro zjednodušení modelu nebo změny parametru α . Tyto změny však nedosahují lepších výsledků a výpočet velmi zpomalují. Zlepšení nedosahují ani dosavadní navržené váhy. Navrhujeme proto využít významnost bodů z předchozí kapitoly. Významnými definujeme body objektů, pro které hledáme symetrii. Tyto body obarvíme červenou barvou. Statickou váhu w_{ij}^s volíme dle vztahu 6.3, pokud jsou body \mathbf{x}_i a \mathbf{x}_j červené. Ostatním bodům je přiřazena statická váha $w_{ij}^s = 1$. Zbylé parametry jsme ponechali s výchozími hodnotami.

Významné body byly vybrány ručně pomocí vizualizačního 3D programu. Dále byl navýšen počet bodů pro zjednodušení modelu $|\mathbf{X}_{simp}| = 2000$ a také navýšen počet kandidátních rovin $|\mathbf{X}_{cand}| = 200$. Na obr. 7.2 vidíme vybrané objekty (červené) a výslednou symetrii za použití výše uvedeného přístupu. Na většině modelů jsme schopni detekovat symetrii významného objektu.



Obr. 7.2: Detekce rovin symetrie pomocí významných bodů. Váha volena dle def. 6.3, $m = 2$.

Navržená metoda tedy velmi dobře funguje pro takto upravené objekty. Pokud však vybereme větší část modelu, výsledky už nejsou dobré (viz obr. 7.3). Pomoci by zde mohla automatická detekce významných bodů pomocí extrému. Vhodný směr detekce by mohlo být možné nalézt pomocí automatické segmentace. Otevírají se nám zde tedy další možnosti pro budoucí práci.



Obr. 7.3: Detekce rovin symetrie pomocí významných bodů. Váha volena dle def. 6.3, $m = 2$.

8 Zařazení symetrie v matematickém vzdělávacím systému

V této části se budeme zabývat zařazením tématu symetrie v matematickém vzdělávání. Vycházíme z toho, jak je toto téma obsaženo v základních dokumentech, které vymezují obsah a rozsah daného učiva a potřebné klíčové kompetence na různých stupních a typech škol. Těmito dokumenty jsou rámcové vzdělávací programy pro základní vzdělávání, pro gymnázia a pro střední odborné vzdělávání.

V úvodu této kapitoly jsou popsány očekávané výstupy a učivo související s tématem symetrie z jednotlivých rámcových vzdělávacích programů. Podkapitola 8.2 zpracovává, kdy se konkrétně žáci se symetrií v matematice setkávají. Poslední část se věnuje navrženému tematickému celku, který byl vytvořen v souvislosti s očekávanými výstupy rámcových vzdělávacích programů.

8.1 Rámcové vzdělávací programy

Rámcové vzdělávací programy (RVP) tvoří obecný rámec stanovující konkrétní cíle, formu, délku a povinný obsah vzdělávání podle zaměření daného oboru vzdělávání. Dále popisují organizační uspořádání, profesní profil, podmínky průběhu a ukončování vzdělávání. Specifikují také klíčové kompetence důležité pro rozvoj osobnosti žáků a podmínky pro vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami [42].

Rámcové vzdělávací programy musí odpovídat nejnovějším poznatkům vědních disciplín, pedagogiky a psychologie. Podle těchto hledisek jsou rámcové vzdělávací programy revidovány a upravovány. Dle pravidel definovaných v rámcových vzdělávacích programech si jednotlivé školy vypracovávají své realizační programové dokumenty, zvané školní vzdělávací programy (ŠVP) [42].

Rámcové vzdělávací programy pro střední odborné vzdělávání (dále pouze RVP SOV) jsou rozříděné podle kategorií soustavy oborů vzdělávání. Tyto kategorie zahrnují všechny stupně středního vzdělávání definované školským zákonem [42]. Těmito stupni jsou střední vzdělávání, střední vzdělávání s výučním listem a střední vzdělávání s maturitní zkouškou. Obsah a rozsah učiva se liší podle stupně a zaměření střední školy. Symetrie spadá do základního učiva, které je obsaženo ve všech stupních středního vzdělávání. Vzhledem ke složitosti tohoto rozdělení se budeme zabývat pouze RVP pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV), RVP pro gymnázia (dále jen RVP G) a RVP pro střední odborné vzdělávání s výučním listem, konkrétně obor grafický design (dále pouze RVP GD) [27]-[30].

8.1.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

RVP ZV zařazuje matematiku do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Tato oblast je založena především na aktivních činnostech, kdy žáci pracují s matematickými objekty a užívají matematiku v reálných situacích. Žáci získávají vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě. Oblast se prolíná celým základním vzděláváním, umožňuje získat matematickou gramotnost a vytváří předpoklady pro další studium [28].

Vzdělávací obsah vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace je rozdělen do 4 tématických okruhů ve 2 stupních základního vzdělávání.

Tematické okruhy 1. stupně jsou:

- číslo a početní operace,
- závislosti, vztahy a práce s daty,
- geometrie v rovině a prostoru,
- nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Tematické okruhy 2. stupně jsou:

- číslo a proměnná,
- závislosti, vztahy a práce s daty,
- geometrie v rovině a prostoru,
- nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Symetrii zařazujeme do tematického okruhu Geometrie v rovině a prostoru. Zaměříme se tedy pouze na něj a uveďme očekávané výstupy dle RVP ZV.

Očekávané výstupy vzdělávacího obsahu Geometrie v rovině a prostoru na 1. stupni jsou následující (vyznačené výstupy souvisí s tématem této práce):

„Žák

- **rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa, nachází v realitě jejich reprezentaci;**
- porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky;
- **rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině;**
- narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce;

- sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran;
- sestrojí rovnoběžky a kolmice;
- určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu;
- **rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru.**“ ([28], s. 33).

Očekávané výstupy vzdělávacího obsahu Geometrie v rovině a prostoru na 2. stupni jsou následující (vyznačené výstupy souvisí s tématem této práce):

„Žák

- zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku;
- **charakterizuje a třídí základní rovinné útvary;**
- určuje velikost úhlu měřením a výpočtem;
- odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů;
- využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových úloh;
- načrtne a sestrojí rovinné útvary;
- užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků;
- **načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osově souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar;**
- určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti;
- odhaduje a vypočítá objem a povrch těles;
- načrtne a sestrojí síť základních těles;
- načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině;
- analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu.“ ([28], s. 36).

Tyto očekávané výstupy žáci získají při osvojování následujícího učiva:

- **rovinné útvary** - lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, úhel, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník (lichoběžník, rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímk v rovině (typy úhlů), shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků), osově souměrné útvary;
- **metrické vlastnosti v rovině** - druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta, obvod a obsah obrazce;
- **prostorové útvary** kvádr, krychle, rotační válec, jehlan, rotační kužel, koule, kolmý hranol;
- **konstrukční úlohy** - množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice), osová souměrnost, středová souměrnost.

8.1.2 Rámcový vzdělávací program pro střední odborné školy

Pro tuto část jsme vybrali rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 82-41-M/05 grafický design. Matematika je v něm zařazena do oblasti Matematické vzdělávání.

„Obecným cílem Matematického vzdělávání v uměleckém školství je výchova člověka, který bude umět používat matematiku v různých životních situacích (v odborné složce vzdělávání, v dalším studiu, v osobním životě, budoucím zaměstnání, volném čase apod.)“ ([30], s. 36)

Oblast Matematické vzdělávání je rozdělena dle probíraného učiva do následujících tematických okruhů:

- operace s čísly a výrazy,
- funkce a její průběh, řešení rovnic a nerovnic,
- planimetrie,
- stereometrie,
- práce s daty.

Symetrii tedy můžeme zařadit do okruhů planimetrie a stereometrie. Uvedme tedy očekávané výstupy těchto okruhů. Vyznačené výstupy souvisejí s tématem symetrie.

„Žák:

- používá pojmy a vztahy: bod, přímka, rovina, polorovina, odchylka dvou přímek, vzdálenost bodu od přímky, vzdálenost dvou rovnoběžek, úsečka a její délka, úhel a jeho velikost;
- užívá věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků;
- určí prvky v trojúhelníku, jeho obvod a obsah;
- užívá goniometrické funkce k řešení v pravoúhlém trojúhelníku;
- **rozliší základní druhy mnohoúhelníků, určí jejich obvod a obsah;**
- rozlišuje pojmy kruh a kružnice, určí délku kružnice, obsah kruhu a jeho částí,
- určí v prostoru: vzájemnou polohu dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, odchylku dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, vzdálenost bodu od roviny, rozliší jednotlivá tělesa a určí jejich povrch a objem.“ ([30], s. 37).

Tyto tematické okruhy zahrnují následující učivo:

- základní planimetrické pojmy;
- trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku;
- rovinné obrazce;
- základní polohové a metrické vlastnosti v prostoru;
- tělesa, jejich povrchy a objemy.

8.1.3 Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

V RVP G je matematika obsažena ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. „Výuka matematiky na gymnáziu rozvíjí a prohlubuje pochopení kvantitativních a prostorových vztahů reálného světa, utváří kvantitativní gramotnost žáků a schopnost geometrického vhledu. Ovládnutí požadovaného matematického aparátu, elementy matematického myšlení, vytváření hypotéz a deduktivní úvahy jsou prostředkem pro nové hlubší poznání a přepokladem dalšího studia.

Během studia žáci objevují, že matematika nachází uplatnění v mnoha oborech lidské činnosti (např. v ekonomii, technice, ale i ve společenských vědách), že je ovlivňována vnějšími podněty (například z oblasti přírodních věd) a že moderní technologie jsou užitečným pomocníkem matematiky.“ ([29], str. 21, 22).

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v RVP G rozdělena do 5 tematických celků:

- argumentace a ověřování;
- číslo a proměnná;
- práce s daty, kombinatorika a pravděpodobnost;
- závislosti a funkční vztahy;
- geometrie.

Symetrie opět spadá do kategorie Geometrie, proto si její očekávané výstupy opět blíže představíme. Vyznačené výstupy souvisejí s tématem této práce.

„Žák:

- **používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, na základě vlastností třídí útvary;**
- určuje vzájemnou polohu lineárních tvarů, vzdálenosti a odchylky;
- využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému;
- v úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů, pracuje s proměnnými a iracionálními čísly;
- řeší polohové a nepolohové konstrukční úlohy užitím všech bodů dané vlastnosti, pomocí shodných zobrazení a pomocí konstrukce na základě výpočtu;
- zobrazí ve volné rovnoběžné projekci hranol a jehlan, sestrojí a zobrazí rovinný řez těchto těles;
- řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí;
- užívá různé způsoby analytického vyjádření přímky v rovině (geometrický význam koeficientů);
- řeší analyticky polohové a metrické úlohy o lineárních útvarech v rovině;
- využívá charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření;
- z analytického vyjádření (z osové nebo vrcholové rovnice) určí základní údaje o kuželosečce;
- řeší analyticky úlohy na vzájemnou polohu přímky a kuželosečky.“ ([29], str. 22).

Probírané učivo této oblasti je rozděleno na 4 části:

- **geometrie v rovině** - klasifikace rovinných útvarů, jejich obvody a obsahy, shodnost a podobnost trojúhelníků, Pythagorova věta a Euklidovy věty, množiny bodů dané vlastnosti, úhly v kružnici, shodná zobrazení (osová a středová souměrnost, posunutí, otočení), stejnolehlost, konstrukční úlohy;
- **geometrie v prostoru** - polohové a metrické vlastnosti, základní tělesa a jejich povrchy a objemy, volné rovnoběžné promítání;
- **trigonometrie** - sinová a kosinová věta, trigonometrie pravoúhlého a obecného trojúhelníku;
- **analytická geometrie v rovině** - vektory a operace s nimi, analytická vyjádření přímky v rovině, kuželosečky. ([29], str. 25).

8.2 Symetrie v matematickém vzdělávání

Symetrie je všudypřítomná, vidíme ji kamkoli se podíváme, i když si ji neuvědomujeme. Vždyť první věc, kterou dítě po narození vnímá a soustředí na ni největší pozornost, je obličej matky. Ten je symetrický až na malé asymetrie, které nám však nevadí. Se symetrií se setkáváme každý den, jako by byla v lidských bytostech vrozená. Často je považována za jakýsi standard, kterým měříme estetickou krásu.

Se symetrií se v matematickém vzdělávání setkáváme velmi brzy. Už v předškolním vzdělávání³ se dítě učí různým rovinným útvarům a pro jejich identifikaci, nebo popis vlastností mohou využít i symetrii [11]. Žáci 1. ročníku základní školy by měli rozeznat a pojmenovat základní rovinné útvary. Měli by dokázat dokreslit osově souměrný obrázek. Ve 2. ročníku se žáci učí měřit a odhadovat délku úsečky a lomené čáry, což je pro symetrii přínosné. Ve 3. a 4. ročníku si žáci osvojí základy rýsování. V dalším ročníku by žáci měli ve čtvercové síti rozpoznat a znázornit jednoduché osově souměrné útvary a přeložením papíru určit osu souměrnosti útvaru. Žáci dokáží vymodelovat a popsat základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa.

Na druhém stupni základní školy se žáci zdokonalují v rýsování a měli by zvládnout načrtnout a sestrojít základní rovinné útvary. Žáci si osvojují věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků. Dále by měli zvládnout načrtnout a sestrojít síť jednoduchých těles a také jejich obraz v rovině. V rámci symetrie si žáci

³Rámcový program pro předškolní vzdělávání nebyl v předchozí kapitole zmíněn, protože nepatří do oblasti našeho zájmu. Matematika v něm není zahrnuta jako samostatná oblast vzdělávání, ale matematické kompetence jsou součástí oblasti Dítě a jeho psychika - poznávací schopnosti a funkce, představivost a fantazie, myšlenkové operace.

dále osvojují osovou a středovou souměrnost. Měli by být schopni určit osově a středově souměrný útvar a v osové či středové souměrnosti načrtnout a sestrojít obraz rovinného útvaru. Rotační symetrie se v rámcovém vzdělávacím programu pro základní školu nevyskytuje. Žáci se s osou rotace ale i tak setkávají v rámci rotačních těles (válec, kužel).

V sekundárním vzdělávání jsou v návaznosti na ZŠ probírány základní druhy shodných zobrazení: osová a středová souměrnost, posunutí, otočení, včetně jejich skládání. Geometrická zobrazení pak dále využíváme při řešení konstrukčních úloh. Dále můžeme symetrii také zahrnout do analytické geometrie v rovině. U kuželoseček se můžeme setkat s rotační symetrií. Většina těchto témat však není zahrnuta v RVP GP, což však neznamená, že nejsou zahrnutá v ŠVP. Symetrie (a to i rotační) by však ani u těchto oborů neměla být podceňována.

Se symetrií se můžeme setkat i v jiných doménách matematiky. V algebře to mohou být symetrické funkce, determinanty, či symetrické soustavy rovnic. V trigonometrii se setkáváme se symetrickými vztahy, např. $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$. Symetrie hraje také svoji roli v aplikaci integračních technik a při práci s diferenciálními formami. Tyto oblasti však do matematického základního a středního vzdělávání příliš nespádají.

8.3 Tematický celek

V této kapitole představíme tematický celek týkající se symetrie sestavený pro studenty střední školy. Mohou jej však využít i žáci základní školy. Tento tematický celek je vytvořen tak, aby jej bylo možné využít i během distanční výuky.

Studenti mohou pomocí volně dostupného matematického softwaru Geogebra [10] zkoumat osovou, středovou a rotační symetrii útvarů. Své znalosti si mohou ověřit v několika krátkých testech vytvořených autorkou této diplomové práce ve webové aplikaci LearningApps [15]. Všechny aktivity jsou dostupné z digitální knihy vytvořené pomocí aplikace Book Creator [2]. Tato kniha slouží studentům jako průvodce danou problematikou a všemi aktivitami (viz obr. 8.2). Kniha je dostupná pomocí odkazu v [41].

V následující podkapitole budou popsány již zmíněné využití aplikace a v podkapitole 8.3.2 je uveden příslušný tematický celek.

8.3.1 Využití aplikace

Pojďme si nyní krátce představit všechny aplikace využití v tomto tematickém celku.

Geogebra

Geogebra je dynamický matematický softwarový balíček, ve kterém můžeme využít geometrii, tabulkový procesor, algebru, grafy, statistiku a analýzu [10]. Aplikace je volně dostupná, každý si může vytvořit uživatelský účet a vytvářet si zde vlastní materiály. A tak není divu, že zde vzniká rychle rostoucí komunita uživatelů žijících téměř na všech zemích světa. Můžeme tedy využívat i materiály již vytvořené a sdílené. Geogebra je tak velmi rozšířená ve všech úrovních vzdělávání.

LearningApps

LearningApps je webová aplikace sloužící k podpoře vyučování a učení [15]. Obsahuje několik malých interaktivních modulů, které mohou být použity ve výukových materiálech. Opět lze využít materiály sdílené jinými uživateli. Aplikace bohužel zatím není dostupná v českém jazyce. To není překážkou v tvorbě materiálů, ale právě v dostupnosti a vyhledávání již vytvořených materiálů. Ukázka testovacího modulu z LearningApps je vidět na obr. 8.1.



Obr. 8.1: Ukázka testovacího modulu z aplikace LearningApps.

Book Creator

Book Creator je webová aplikace umožňující tvorbu digitálních knih [2]. Aplikace kombinuje text, obrázky, audio zvuk a video. Pomocí jednoduchého nástroje můžete vytvořit interaktivní originální knihu, která do hodin přinese jistou kreativitu a inovaci. Tvorba knih je opravdu jednoduchá, takže se na ní mohou podílet i sami studenti. Aplikace umožňuje sdílení knihovny celé třídy. Nevýhodou je opět nedostupnost aplikace v českém jazyce. Ukázku knihy lze vidět na obr. 8.2.

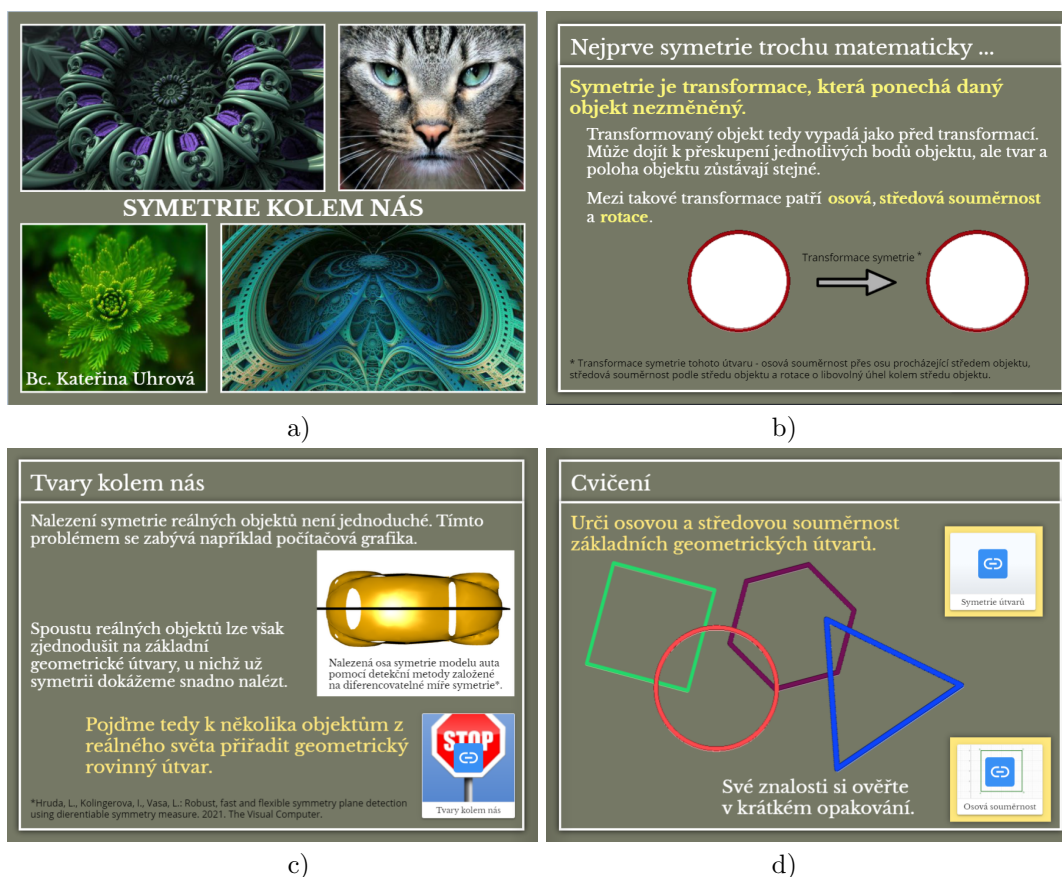
8.3.2 Symetrie všude kolem nás

Téma: Osová, středová a rotační symetrie

Cílová skupina: Studenti střední školy nebo žáci 2. stupně základní školy

Cíle:

1. Žák dokáže přiřadit odpovídající geometrický tvar k reálnému předmětu,
2. žák dokáže identifikovat osovou, středovou a rotační symetrii,
3. žák určí počet os souměrnosti základních geometrických útvarů,
4. žák dokáže aplikováním osové, středové a rotační symetrie vytvořit symetrický objekt.



Obr. 8.2: Ukázka digitální knihy vytvořené v aplikaci Book Creator. Obrázky použité v a) jsou volné pro komerční užití na webové stránce [25]. Obrázek brouka z c) detekován pomocí metody a programu [7].

Motivace: Symetrie je všudypřítomná. Je součástí našeho každodenního života a hlavně je to důležitý pojem vědy - teoretické fyziky, matematiky a geometrie. Symetrie fascinuje lidstvo už od starověku. Pojďme se na chvíli stát vědci, kteří zkoumají symetrii všude kolem nás.

Organizace výuky: Prezenční nebo distanční výuka.

Organizační forma: Frontální, skupinová nebo asynchroní on-line výuka.

Časové vymezení: 1,5 hodiny.

Zadání: Pod odkazem https://read.bookcreator.com/MXVmzM2bp6MEokb6PSaxIKaSUBQ2/KN0h_-hZR-eM8RNCbyxQ-w máte k dispozici digitální knihu, prostudujte si ji a projděte si jednotlivé aktivity. Svě vědomosti si ověřte pomocí průběžných testů.

Hodnocení: Žáci získávají zpětnou vazbu přímo při práci s knihou a jednotlivými aktivitami. Hodnocení se odvíjí především podle organizace výuky a organizační formy. Hodnotíme aktivitu a plnění daných úkolů. Při distanční výuce můžeme požadovat poskytnutí výsledků opakovacích testů. Aktivity však poskytují dostatečnou zpětnou vazbu a cílí na sebehodnocení žáků.

Aktivity v Geogebře

Sněhová vločka

Tato aktivita obsahuje tři interaktivní applety. Každý applet se věnuje jinému typu symetrického zobrazení. Applety zobrazují jednoduchou sněhovou vločku, body jsou pro lepší názornost obarveny tak, aby při daném zobrazení bylo poznat, co se s nimi děje.

Cílem této aplikace je zopakování si daných zobrazení a uvědomění si toho, k jakým změnám při nich dochází. Při zaškrtnutí tlačítka daného zobrazení se toto zobrazení aplikuje a v pravém dolním rohu appletu se objeví krátký komentář.

Splnění těchto cílů však není možné ověřit především při distanční výuce. Aktivita netestuje žákovu znalost, ani nedává žádnou zpětnou vazbu, je pouze názorná a zcela dobrovolná.

Symetrie útvarů

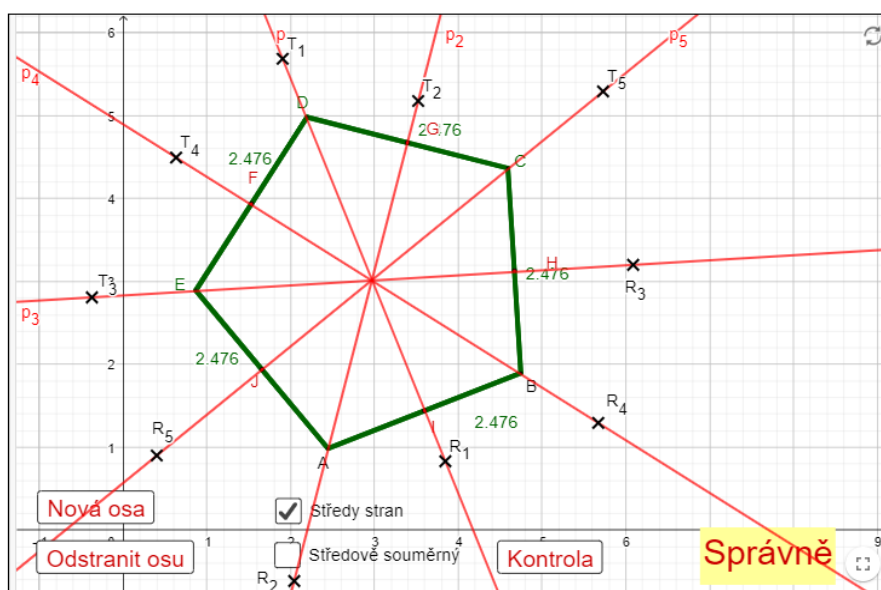
Cíl: Žák dokáže identifikovat osovou a středovou souměrnost a případně určí střed souměrnosti základních geometrických útvarů.

Zadání: Najděte všechny osy souměrnosti a případně střed souměrnosti útvarů.

Aktivita se skládá z devíti interaktivních appletů s geometrickým útvarem. Žáci u každého geometrického útvaru určují osy souměrnosti a rozhodují o středové souměrnosti, případně umísťují střed souměrnosti útvaru. Každý applet disponuje tlačítkem pro novou osu, která zobrazí novou osu pro umístění (maximálně 7 os). Dále tlačítko pro odstranění osy, které vždy odstraní osu s nejvyšším indexem. Také je zde umístěno zaškrťovací tlačítko „Středově souměrný“, které žáci označí v případě středové souměrnosti útvaru. Po zaškrtnutí se objeví střed, který žáci musí umístit na správnou pozici. Poslední tlačítko slouží pro kontrolu průběžnou i celkovou. Správně umístěné osy nebo střed se zvýrazní červenou bar-

vou. U některých útvarů, kde by mohlo být komplikované umístění os souměrnosti je k dispozici ještě tlačítko „Střed strany“, které zobrazí potřebné středy stran pro snazší umístění.

Hodnocení: Žáci pomocí appletů získávají okamžitou zpětnou vazbu po stisknutí tlačítka pro kontrolu. Tlačítko zvýrazní správně umístěné osy nebo střed souměrnosti a stručně popíše případnou chybu nebo informuje o správnosti (viz obr. 8.3).



Obr. 8.3: Ukázka aktivity symetrie útvarů v aplikaci Geogebra.

Symetrie křivek

Cíl: Žák dokáže identifikovat osovou a středovou souměrnost a případně určí střed souměrnosti rovinných křivek.

Zadání: Najděte všechny osy souměrnosti a případně střed souměrnosti rovinných křivek.

Aby se žáci setkali i s jinak definovanými útvary, je pro ně připraveno 5 rovinných křivek. Postup určení osové a středové souměrnosti je stejný jako u předchozí aktivity s tím rozdílem, že přibylo tlačítko „Osová souměrnost“, které přes danou osu zobrazí její osovou souměrnost. Toto tlačítko by mělo sloužit k přesnému umístění os u problematických křivek. Žáci navíc přesně vidí, co se při pohybu s osou souměrnosti děje s obrazem křivky. Při vygenerování všech os souměrnosti můžeme mezi zobrazením osové souměrnosti přepínat kliknutím na danou osu.

Hodnocení: Žáci mohou získat okamžitou zpětnou vazbu po stisknutí tlačítka „Kontrola“. Tlačítko zvýrazní správně umístěné osy nebo střed souměrnosti a stručně popíše případnou chybu nebo informuje o správnosti.

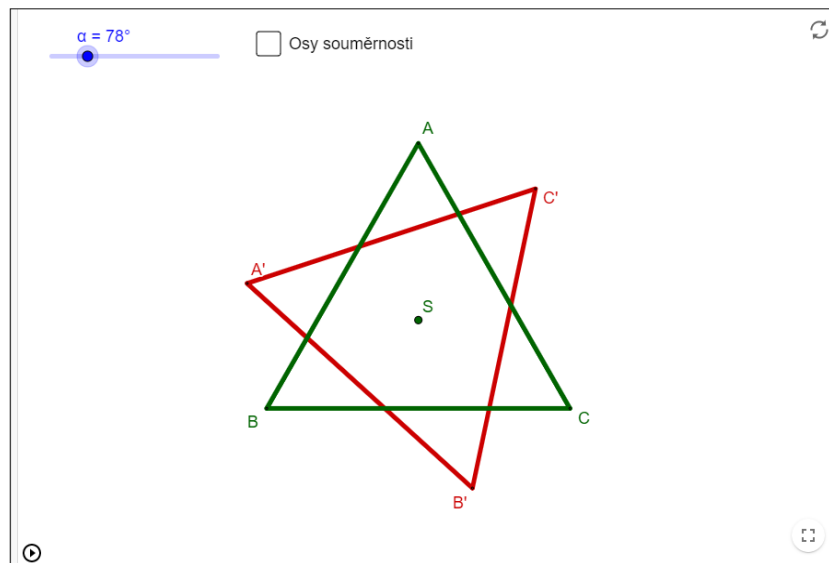
Rotační symetrie

Cíl: Žák dokáže určit řád rotační symetrie objektů vzhledem k bodu S.

Zadání: Určete řád rotační symetrie objektů vzhledem k bodu S.

Aktivita obsahuje 10 appletů s geometrickým objektem. V každém appletu se nachází posuvník úhlu otočení α , pomocí kterého dochází k otočení objektu kolem bodu S o daný úhel. U osově souměrných objektů je možné zobrazit si osy souměrnosti pro lepší přehlednost při otáčení objektu.

Hodnocení: Tato aktivita slouží pouze k procvičení. Nedává žákům žádnou zpětnou vazbu. K tomu slouží až opakovací test *Řád rotační symetrie*.



Obr. 8.4: Ukázka aktivity rotační symetrie útvarů v aplikaci Geogebra.

Vlastní sněhová vločka

Cíl: Žák dokáže aplikováním osově, středové a rotační symetrie vytvořit symetrický objekt.

Zadání: Vyberte si hodnotu řádu rotační symetrie n . Zobrazí se vám odpovídající počet os souměrnosti. Využijte je při tvorbě sněhové vločky. Dále můžete využít středové souměrnosti se středem S nebo rotace kolem středu S. Zapisujte si postup konstrukce. Vytvořené sněhové vločky předved'te ostatním spolužákům i s daným postupem.

Hodnocení: Žáci budou hodnoceni po předvedení své práce dle typu prezentace, která závisí na organizační formě. Při distanční výuce mohou žáci odevzdávat výsledky na společné úložiště tak, aby k nim měli všichni přístup. Při prezenční výuce lze prezentovat výsledky v rámci hodiny.

Opakovací testy

Tvary kolem nás

Cíl: Žák dokáže přiřadit odpovídající geometrický tvar k reálnému předmětu.

Zadání: Přiřaďte geometrický rovinný tvar odpovídajícímu reálnému předmětu (obr. 8.1).

Hodnocení: Žáci získají okamžitou zpětnou vazbu. Po kliknutí na vyhodnocení testu se chybné odpovědi zvýrazní a může dojít k opravě. O správnosti celého testu informuje vyskakovací ikona.

Osová souměrnost

Cíl: Žák dokáže určit počet všech os souměrnosti základních geometrických útvarů.

Zadání: Určete počet os souměrnosti geometrických útvarů.

Hodnocení: Žáci získají zpětnou vazbu ihned po kliknutí na vyhodnocení testu. Chybné odpovědi se zvýrazní a může dojít k opravení chyb. Při bezchybném vyhodnocení testu vyskočí informační ikona.

Osově souměrné vlajky

Cíl: Žák dokáže určit osy souměrnosti státních vlajek.

Zadání: Určete osy souměrnosti státních vlajek. Poznáte k jakým státům patří?

Hodnocení: Žáci získají okamžitou zpětnou vazbu. Osa souměrnosti každé vlajky musí být správně určena, jinak žáci nemohou přejít k následující. Po poslední otázce vyskočí informační ikona o správnosti testu.

Řád rotační symetrie

Cíl: Žák dokáže určit řád rotační symetrie vzhledem k bodu.

Zadání: Určete řád rotační symetrie objektů vzhledem k bodu S.

Hodnocení: Žáci získají zpětnou vazbu po kliknutí na vyhodnocení testu. Chybné odpovědi se zvýrazní a může dojít k opravení chyb. Při bezchybném vyhodnocení testu vyskočí informující ikona.

9 Závěr

Cílem práce bylo zobecnění symetrie geometrických dat a také analýza této problematiky v matematickém vzdělávání.

Symetrii se podařilo zobecnit pro lokální symetrie využitím různé významnosti vstupních bodů. Tento postup se osvědčil i u objektů 3D reálných scén. Je však zapotřebí manuální detekce významných bodů. Ty můžeme detekovat buď pomocí některého vizualizačního programu nebo pomocí navrhovaného postupu, který však hledá významné body pomocí extrému v určitém směru a je tak dosti omezen.

U nerovnoměrně vzorkovaných dat, kde výsledky metody nebyly příliš dobré jsme navrhli několik vah, pomocí kterých se ve většině případů podařilo nalézt přibližnou symetrii. Pro snadné ověření výsledků a manipulaci s programem bylo vytvořeno jednoduché uživatelské rozhraní.

Problematika symetrie byla analyzována v souvislosti s matematickým vzděláváním, přitom bylo využito školských dokumentů na různých typech a stupních škol. Výsledkem je tematický celek, který se skládá z několika aktivit. Tyto aktivity využívají různé webové aplikace. Ke sloučení všech aktivit byla vytvořena digitální kniha. Tento tematický celek byl navržen tak, aby mohl být využitý i při distanční výuce. Aktivity dávají studentům dostatečnou zpětnou vazbu. Mohou ji využít žáci základních škol, i žáci středních škol k opakování.

Dalším vhodným námětem v této oblasti může být navržení postupu rozhodování o správnosti mnohonásobných rovin symetrie nebo využití mnohonásobných rovin při hledání lokálních rovin symetrie.

Reference

- [1] Bokeloh, M., Berner, A., Wand, M., Seidel, H.-P., Schilling, A.: Symmetry detection using feature lines. *Computer Graphics Forum* 28, 2. 2009, 697-706.
- [2] BookCreator [online]. ©2011-2021. Tool for Schools, Inc, Dostupné z: <https://bookcreator.com>.
- [3] Cailliere, D., Denis, F., Pele, D., Baskurt, A.: 3d mirror symmetry detection using hough transform. In: 15th IEEE International Conference on Image Processing. 2008, 1772-1775.
- [4] Choi S., Zhou Q., Koltun V. Robust reconstruction of indoor scenes. CVPR 2015. Dostupné z: <https://vladlen.info/publications/a-large-dataset-of-object-scans/>.
- [5] Dreyfus T., Eisenberg T.: *On Symmetry in School Mathematics* [online]. Poslední změna: 15. 1. 2000. [cit. 2. 4. 2021]. Dostupné z: <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/drei/>.
- [6] Hnídek, J.: Reprezentace 3D objektů. *Kurz počítačové grafiky*. [online]. ©2016. [cit. 10. 7. 2021]. Dostupné z https://jirihnidek.github.io/presentations/cg_3D_models.html#/.
- [7] Hruda, L., Kolingerová, I., Váša, L.: Robust, fast and flexible symmetry plane detection using differentiable symmetry measure. 2021. *The Visual Computer*. Dostupné z DOI: 10.1007/s00371-020-02034-w.
- [8] Hruda, L., Kolingerová, I., Váša, L.: Robust, fast and flexible symmetry plane detection based on differentiable symmetry measure: *Supplementary material*. 2021. Dostupné z: <https://drive.google.com/file/d/16LIF8kZHXXdrE6pRLY5fiH67zvzo89XB/view?usp=sharing>.
- [9] Hruda, L.: Symmetry detection in geometric models: The state of the art and concept of Ph.D.thesis. 2021. Dostupné z : <https://www.kiv.zcu.cz/site/documents/verejne/vyzkum/publikace/technicke-zpravy/2021a/Rigo-Hruda-2021.pdf>.
- [10] Geogebra [online]. ©2021. Dostupné z: <https://geogebra.org>.
- [11] Gunčaga, J., Kopáčová, J.: Symetria v primárnom vzdelávaní. *Učiteľ matematiky* [online]. 2019, **27**(2), 65-73. [cit. 30. 3. 2021].

- [12] Kubásková, K.: Rozpoznávání význačných rysů na modelech lidské hlavy. Plzeň, 2015. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta aplikovaných věd. Vedoucí práce Prof. Dr. Ing. Ivana Kolingerová.
- [13] Kakarala, R., Kaliamoorthi, P., Premachandran, V.: Three-dimensional bilateral symmetry plane estimation in the plane domain. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2013, 249-256.
- [14] Lávička, M.: *KMA/G2 Geometrie 2*. Pomocný učební text [online]. Plzeň, 2006 [cit. 10. 5. 2021]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Geometrie/Lavicka_G2.pdf.
- [15] LearninApps.org [online]. Dostupné z: <https://learningapps.org>.
- [16] Li, B., Johan, H., Ye, Y., Lu, Y.: Efficient 3d reflection symmetry detection: A view-based approach. 2016, **83**, 2-14.
- [17] Lipman, Y., Chen, X., Daubechies, I., Funkhouser, T.: Symmetry factored embedding and distance. In: ACM Transactions on Graphics (TOG). 2010, **29**, 103.
- [18] Liu, D.C., Nocedal, J.: On the limited memory bfgs method for large scale optimization. Mathematical programming. 1989, **45**, 503-528.
- [19] Martinet, A., Soler, C., Holzschuch, N., Sillion, F.X.: Accurate detection of symmetries in 3D shapes. ACM Transactions on Graphics (TOG). 2006, **25**(2), 439-464.
- [20] Mavridis, P., Sipiran, I., Andreadis, A., Papaioannou, G.: Object completion using k-sparse optimization. Computer Graphics Forum. 2015, **34**. Wiley Online Library. 13-21.
- [21] Meyer, M., Desbrun, M., Schröder, P., Barr, A.H.: Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. 2003. In: Visualization and mathematics III, 35-57.
- [22] Mitra, N.J., Guibas, L.J., Pauly, M.: Partial and approximate symmetry detection for 3d geometry. In: ACM Transactions on Graphics (TOG). 2006, **25**, 560-568.
- [23] Mourycová, E.: Hledání symetrie funkcí s využitím symetrie množiny bodů. Plzeň, 2020. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta aplikovaných věd. Vedoucí práce Prof. Dr. Ing. Ivana Kolingerová.

- [24] Nagar, R., Raman, S.: Detecting approximate reflection symmetry in a point set using optimization on manifold. In: IEEE Transactions on Signal Processing. 2019, **67**(6), 1582-1595.
- [25] Pixabay. [online]. 2020. Dostupné z <https://pixabay.com>.
- [26] Portál středoškolské matematiky. *Geometrická zobrazení* [online]. Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze, ©2010-2021 [cit. 10. 5. 2021]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/geom_zobr/?page=vz9.
- [27] *Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, 2018 [cit. 30. 3. 2021]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/file/45304_1.1/.
- [28] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, 2017 [cit. 30. 3. 2021]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/4986_1_1/.
- [29] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. Praha: VÚP v Praze, 2007 [cit. 30. 3. 2021]. Dostupné z: <http://www.nuv.cz/file/159>.
- [30] *Rámcový vzdělávací program pro obor 82-41-M/05 Grafický design* [online]. Praha, MŠMT, 2008 [cit. 30. 3. 2021]. Dostupné z: <http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%208241M05%20Graficky%20design.pdf>.
- [31] Rámcové vzdělávací programy. *Národní ústav pro vzdělávání* [online]. NÚV - Národní ústav pro vzdělávání, ©2011-2021 [cit. 19. 4. 2021]. Dostupné z: <http://www.nuv.cz/t/rvp>.
- [32] Rosen, J.: *Symmetry in science: an introduction to the general theory*. Springer-Verlag New York, 1995. ISBN 978-1-4612-2506-5.
- [33] Schiebener, D., Schmidt, A., Vahrenkamp, N., Asfour, T.: Heuristic 3d object shape completion based on symmetry and scene context. In: IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2016, 74-81.
- [34] Shi, Z., Alliez, P., Desbrun, M., Bao, H., Huang, J.: Symmetry and orbit detection via lie-algebra voting. In: Eurographics Symposium on Geometry Processing. 2016, **35**(5), 217-227.
- [35] Simari, P., Kalogerakis, E., Singh, K.: Folding meshes: Hierarchical mesh segmentation based on planar symmetry. In: Symposium on geometry processing. 2006, **256**, 111-119.

- [36] Sipiran, I., Gregor, R., Schreck, T.: Approximate symmetry detection in partial 3d meshes. In: Computer Graphics Forum. 2014, **33**, 131-140.
- [37] Speciale, P., Oswald, M.R., Cohen, A., Pollefeys, M.: A symmetry prior for convex variational 3D reconstruction. In: European Conference on Computer Vision. 2016, 313-328.
- [38] Sun, C., Sherrah, J.: 3d symmetry detection using the extended gaussian image. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1997, **19**(2), 164-168.
- [39] Sung, M., Kim, V.G., Angst, R., Guibas, L.: Data-driven structural priors for shape completion. ACM Transactions on Graphics (TOG). 2015, **34**(6), 175.
- [40] Thrun, S., Wegbreit, B.: Shape from symmetry. In: Proceeding of the Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). 2005, **2**, 1824-1831.
- [41] Uhrová, K.: Symetrie kolem nás. Digitální kniha vytvořená v aplikaci Book Creator. 2021. Dostupná z: https://read.bookcreator.com/MXVmzM2bp6MEokb6PSaxIKaSUBQ2/KN0h_-hZR-eM8RNCbyxQ-w.
- [42] Zákon č. 561/2004 Sb. o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). In. Sbírka zákonů. 24. 9. 2004. ISSN 1211-1244.
- [43] Zhou, Q., Jacobson, A.: Thingi10K: A dataset of 10,000 3d-printing models. arXiv preprint arXiv:1605.04797 (2016). Dostupné z: <https://ten-thousand-models.appspot.com/>.

PŘÍLOHA

A Implementace a uživatelská dokumentace

Tato kapitola popisuje technickou část práce. V první části popíšeme implementaci řešení a v druhé uživatelskou příručku aplikace.

Implementace

Metoda pro detekci reflexní symetrie navržená Ing. Lukášem Hrudou [7] je implementována v programovacím jazyce .NET/C#, verze .NET 4.6.1. Řešení se skládá z několika projektů, z nichž některé byly v rámci této práce upraveny a doplněny o další třídy a metody.

Níže je uveden seznam projektů řešení poskytnutých Ing. Lukášem Hrudou. Zvýrazněné projekty jsou ty, které byly v rámci této práce upraveny a rozšířeny [7].

- **Framework**,
- **Symmetry_GUI**,
- SlimDXRenderer,
- SlimDXRendererSystem,
- Visicounter.

Projekt *Framework* se stará o detekci osové symetrie a to především prostřednictvím třídy *SymmetryDetector*. *Symmetry_GUI* projekt byl z větší části vytvořen a upraven v rámci této práce. Tento projekt vytváří uživatelské rozhraní aplikace, s jehož pomocí jsou volány ostatní třídy. Poslední projekty *SlimDXRender*, *SlimDXRenderer* a *Visicounter* jsou vytvořeny pro vizualizaci objektu a jeho rovin symetrie.

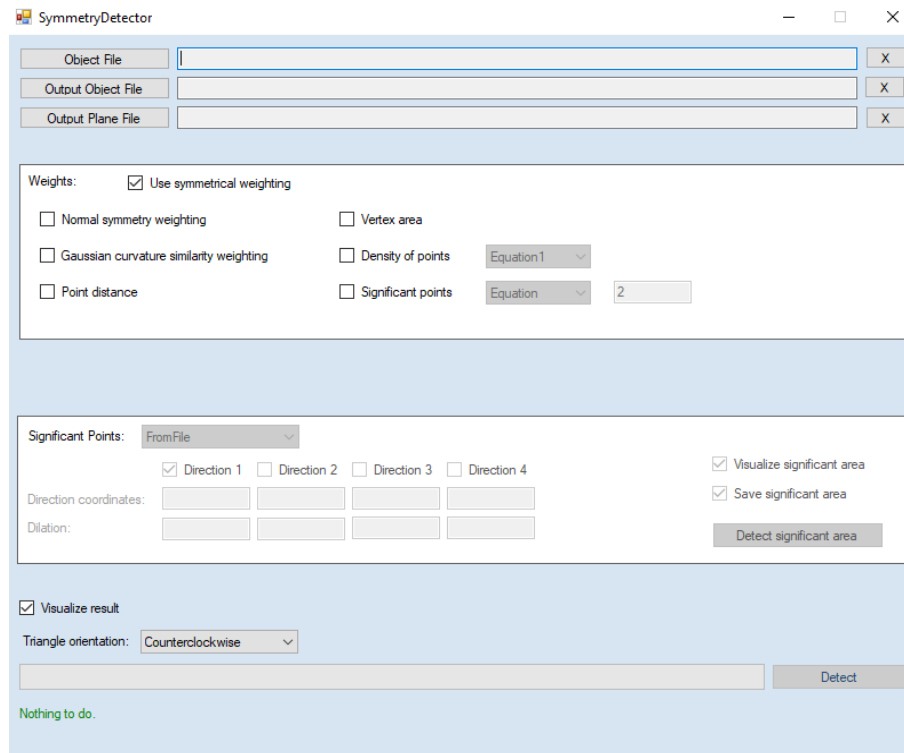
Uživatelská dokumentace

Aplikaci lze spustit pomocí souboru *Symmetry_GUI.exe*, který se nachází v adresáři *Symmetry_GUI/bin/Release*. Pro celkovou funkčnost aplikace je nutné, aby nad daném počítači bylo nainstalováno prostředí knihovny SlimDX. Po spuštění souboru se zobrazí okno s uživatelským rozhraním (viz obr. A.1).

Uživatelské rozhraní slouží pouze k testování vah dvojice bodů, nebo nalezení význačných bodů modelu. Není určeno ke změně parametrů metody, neboť to by mohlo být pro nezkušeného uživatele příliš složité.

V horní části se nachází tlačítka pro načtení souboru s modelem a souborů k uložení výsledků detekce. Střední část je určena pro volbu a nastavení vah

dvojice bodů. Dále následuje část pro nastavení nebo detekci významných bodů. Spodní část uživatelského okna už slouží k nastavení vizualizace řešení, obsahuje tlačítko pro detekci roviny a ukazatel průběhu výpočtu.



Obr. A.1: Uživatelské rozhraní aplikace.

Načtení souborů

První tři tlačítka v horní části uživatelského okna slouží k načtení souborů. Tlačítko *Object File* slouží k otevření souboru s modelem, pro který chceme rozpoznat rovinu symetrie. Aplikace umožňuje načtení souborů s příponami **.obj** a **.pc**.

Pomocí druhého tlačítka *Output Object File* můžeme soubor (s příponou **.obj**), do kterého se uloží model s výslednou detekovanou rovinou. Výslednou rovinu můžeme také uložit do textového souboru, který vybereme kliknutím na tlačítko *Output Plane File*. Veškeré výběry jsou vypsány v textovém poli vedle konkrétního tlačítka. Tyto výběry lze také zrušit tlačítkem vedle textového pole.

Nastavení vah

Oblast uživatelského okna označená jako *Weights* slouží k nastavení vah dvojice bodů. Zde můžete zaškrtnutím tlačítka *Symmetrical Weights* nastavit, zda chceme, aby se váhy počítaly symetricky či nesymetricky. Výchozí nastavení je pro symetrické váhy.

Dále můžeme volit mezi jednotlivými druhy navržených vah - symetrie normál (*Normal symmetry weighting*), Gaussova křivost (*Gaussian curvature similarity weighting*), vzdálenost bodů (*Point distance*), obsah trojúhelníkového vějíře bodů (*Vertex area*), hustota bodů (*Density of points*). U váhy hustota bodů lze volit pomocí výběrového tlačítka také typ rovnice, který se při výpočtu použije. *Equation1* určuje rov z 5.1, *Equation2* rovn z 5.2 a *Equation3* rovnici z 5.3.

Poslední možnost je varianta významných bodů (*Significant points*). U této volby je zapotřebí zvolit, jakým způsobem se váha bude volit. Buď se váha významných bodů určí pomocí rovnice 6.3 (*Equation*) nebo můžeme volit konkrétní hodnoty váhy (*Value*). Hodnota váhy se zadává do textového pole vedle výběrového tlačítka. Defaultně je nastavena na 20. V případě výběru určení váhy pomocí rovnice určuje hodnota v tomto textovém poli parametr m rovnice z rov. 6.3. Defaultně je parametr nastaven na hodnotu 2.

Význačné body

Tato část uživatelského okna je zablokována, dokud nedojde k výběru váhy pro významné body. Významné body můžeme určit z načteného souboru s modelem, který má významné body obarveny červeně (modely jsou k dispozici ve složce Colored). Nebo lze pomocí výběrového tlačítka (viz obr. A.2) zvolit manuální detekci významných bodů pomocí směrů.

Obr. A.2: Sekce pro nastavení detekce významných bodů.

Pro manuální detekci je možno zvolit až 4 směry, ve kterých bude nalezen extrém. Volbou velikosti n -sousedství (*Dilation*) určíme rozsah obarvení bodů začínající v detekovaném extrému. Defaultní nastavení je vždy 10. Samotnou detekci významných bodů provedeme kliknutím na tlačítko *Detect significant area*.

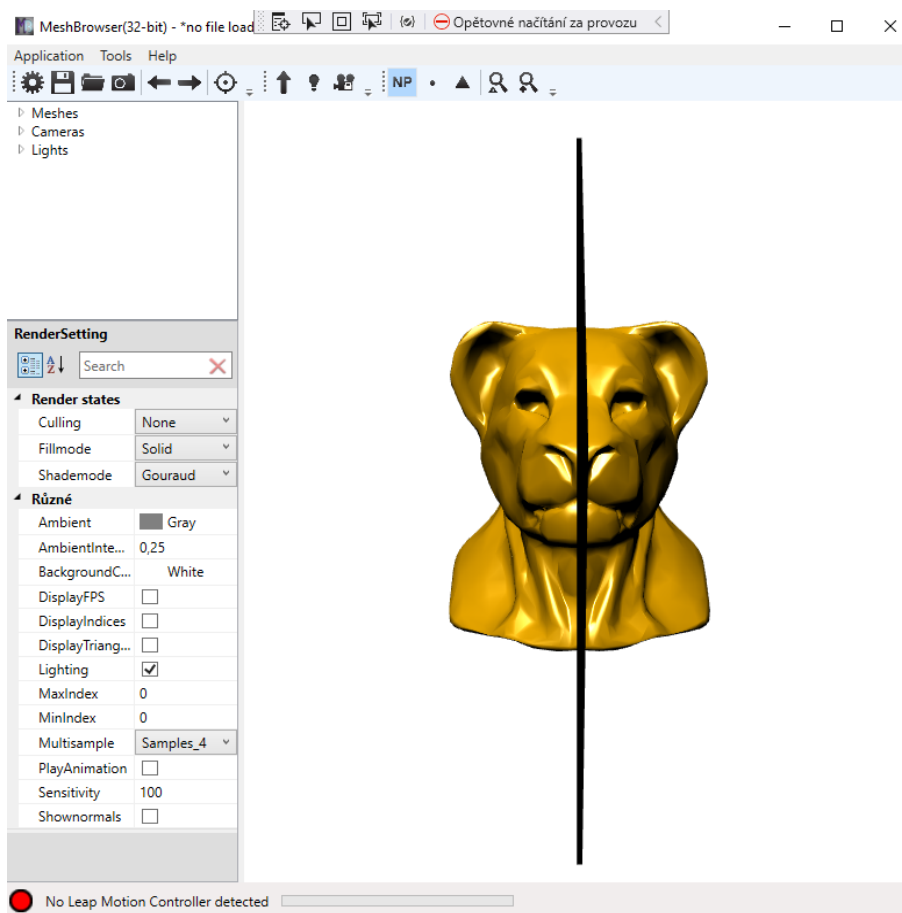
V této části jsou ještě k dispozici dvě tlačítka. Tlačítko pro vizualizaci detekovaných významných bodů (*Visualize significant area*). Zaškrtnutím tohoto tlačítka dojde po detekci k zobrazení celého modelu s obarvenými významnými body (červená barva) v 3D vizualizačním okně (více v kapitole Vizualizace). Tlačítko *Save significant area* slouží k uložení modelu s obarvenými významnými body. Po ukončení detekce se zobrazí okno k výběru souboru k uložení modelu.

Detekce

K detekci roviny symetrie slouží tlačítko *Detect* v dolní části uživatelského okna. Před detekcí můžeme ještě volit, zda chceme výsledek vizualizovat, nebo orientaci trojúhelníků (*Triangle orientation*). Výpočet detekce končí zobrazením okna s koeficienty výsledné roviny ρ a hodnotou míry symetrie této roviny $s_{\mathbf{x}}(\rho)$ a případně zobrazením modelu. Průběh výpočtu poznáme podle ukazatele a stručného popisu v levém dolním rohu uživatelského okna.

Vizualizace

Modely jsou vizualizovány v 3D vizualizačním okně MeshBrowser (viz obr. A.3). Můžeme zde libovolně manipulovat modelem pomocí myši či klávesnice.



Obr. A.3: Ukázka vizualizace modelu lva.

Stisknutím a držením levého tlačítka myši modelem můžeme otáčet, držením pravého tlačítka myši a pohybem můžeme model posouvat. Rolovacím tlačítkem myši model můžeme přibližovat a oddalovat. Vystačit si můžeme však i s klávesnicí. Klávesou *W* posouváme model dozadu, tlačítkem *S* dopředu. Klávesy *A/D* slouží k pohybu doleva/doprava a *Q/E* nahoru/dolů.

Podržením klávesy *L* a pohybem myši se mění pozice zdroje světla a můžeme si model lépe nasvítit. Další ovládací prvky naleznete v nabídce *Help* → *Control*.

B Tabulky

Parametr	Stručný popis	Výchozí hodnota
$ \mathbf{X}_{\text{simp}} $	počet bodů zjednodušení z původní množiny \mathbf{X}	1000
$ \mathbf{X}_{\text{cand}} $	počet bodů zjednodušení z původní množiny \mathbf{X} pro určení kandidátních rovin	100
δ	minimální vzdálenost dvou kandidátních rovin	0.1
ψ_{\min}	minimální počet rovin, ze kterého musí být kandidátní rovina vytvořena	4
α	parametr tvaru Wendlandovy funkce	$\frac{15}{l_{\text{avg}}}$
κ	počet nejlepších kandidátních rovin	5
w_{ij}	váha dvojice bodů \mathbf{x}_i a \mathbf{x}_j	1
k	hodnota váhy významných bodů (rov. 6.1)	20
m	parametr v rov. 6.3	2

Tabulka B.1: Tabulka parametrů metody s jejich stručným popisem a výchozími hodnotami.