

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Oskulační křivky

Plzeň, 2018

Veronika Osmiková

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, jejichž úplný seznam je součástí práce.

V Plzni dne 31. července 2018

.....

Veronika Osmiková

Poděkování

Děkuji své vedoucí bakalářské práce RNDr. Světlaně Tomiczkové, PhD. za odbornou pomoc, ochotu, trpělivost a za její cenné rady při zpracování této práce.

Abstrakt

Tato práce se věnuje oskulačním křivkám a jejich systémům. Nejprve jsou uvedeny definice základních pojmů. Dále se práce věnuje definici dotyku řádu q dvou křivek a jeho souvislosti s oskulačními křivkami. Poté je zpracován výčet různých typů oskulačních křivek zahrnující jejich definici, oskulační a hyperoskulační vlastnosti, způsob výpočtu a vždy nejméně jeden příklad. Dále se práce zabývá vlastnostmi systémů oskulačních křivek na základě variací Tait-Kneserovy věty.

Klíčová slova

oskulační křivka, dotyk řádu q , Tait-Kneserova věta

Abstract

This thesis deals with osculating curves and their families. First, definitions of basic terms are given. Further, the thesis deals with the definition of the contact of q th order of two curves and its relation to the osculating curves. Then, a list of different kinds of osculating curves, including their definition, osculating and hyperosculating properties, the calculation method and at least one example is given. Further, the thesis deals with families of osculating curves and their properties based on variations of the Tait-Kneser theorem.

Keywords

osculating curves, contact of q -th order, Tait-Kneser theorem

Obsah

Úvod	2
Rešerše	3
1 Definice	4
2 Řád dotyku křivek	5
3 Oskulační křivky	8
3.1 Přímka	11
3.2 Kružnice	12
3.3 Kuželosečky	23
3.4 Polynomy	25
3.5 Lineární lomená funkce	31
3.6 Šroubovice	37
4 Vlastnosti systémů oskulačních křivek	43
4.1 Tait-Kneserova věta	43
Seznam příložených programů	51
Závěr	53

Úvod

V geometrii, zejména deskriptivní, je „oskulační kružnice“ všeobecně známý pojem, spojovaný především s konstrukcí kuželoseček. Méně známé je použití slova „oskulační“, které lze přeložit jako líbající či objímající, v souvislosti s dalšími typy křivek, například pro oskulační kuželosečky nebo oskulační šroubovice. Přitom s některými z křivek, kterým se věnuje tato práce, běžně pracujeme, aniž bychom si vždy uvědomovali, že se jedná o oskulační křivky.

V první kapitole je uveden přehled definic pojmů z diferenciální geometrie, které jsou používány v této práci.

Ve druhé kapitole je podrobně popsán pojem „dotyk řádu dvou křivek“, který je klíčový k porozumění problematice oskulačních křivek. Dále je v této kapitole uvedeno, jak dotyk určitého řádu ovlivní vzájemnou polohu dvou křivek na okolí bodu dotyku.

Ve třetí kapitole je uvedeno, jak dotyk dvou křivek souvisí s oskulačními křivkami. Nejprve je zaveden pojem „obecně nejvýše možný řád dotyku“ pro křivku daného typu. Dále je uvedeno, jak obecně nejvýše možný řád dotyku pro křivku daného typu určit, a poté jsou pomocí tohoto pojmu definovány „oskulační“ a „hyperoskulační křivky“. Následuje šest podkapitol, které se jednotlivě věnují těm křivkám, které je za jistých podmínek vhodné využít jako oskulační křivky, což jsou: přímka, kružnice, kuželosečky, polynomy, lineární lomená funkce a cylindrická šroubovice.

Čtvrtá kapitola se zabývá vlastnostmi systémů rovinných oskulačních křivek stejného typu. Pomocí Tait-Kneserovy věty a jejích variant je zde popsáno chování systémů většiny oskulačních křivek uvedených v předchozí kapitole.

Rešerše

Jedním z cílů této práce je zpracovat rešerši na téma oskulační křivky. Většina nalezených zdrojů se věnuje oskulační kružnici, proto je jí i v této práci věnováno více prostoru, než jiným křivkám. Nejucelenější informace o oskulační kružnici je možno nalézt v publikaci [1], z níž je převzata též většina definic uvedených v této práci.

Jediný článek, který se naopak o kružnicích nezmiňuje, je článek [2]. Zde se autor zabývá převážně stejnoměrnou konvergencí posloupnosti křivek procházejících daným počtem bodů, jejichž limitní křivkou, jak se body blíží k sobě, je právě oskulační křivka. Z tohoto článku je do této práce převzato pouze několik okrajových informací o oskulačních kuželosečkách, ale mohl by být dobrým podkladem pro případné rozšíření této práce, neboť obsahuje několik kapitol věnovaných oskulačním plochám.

Dvojice článků [3] a [6] pojednává o Tait-Kneserově větě, která popisuje vlastnosti systémů oskulačních křivek daného typu. Článek [3] se zaměřuje spíše na teorii kolem základního znění Tait-Kneserovy věty pro kružnici, a článek [6] se převážně věnuje variantám této věty a jejich důkazům pro další typy křivek. Tyto články poskytují nejucelenější přehled různých typů rovinných oskulačních křivek ze všech nalezených zdrojů. Ovšem pro většinu oskulačních křivek, s výjimkou přímkou, kružnice a Taylorova polynomu, jsem nikde nenalezla zpracovaný postup výpočtu nebo vyjádřené vzorce pro výpočet parametrů těchto křivek. Článek [4] je jediný zdroj věnující se prostorové oskulační křivce a to cylindrické šroubovici. Je zde také uveden postup výpočtu parametrů oskulační kružnice prostorové křivky.

1 Definice

Nejprve uveďme definice pojmů, které je důležité znát pro správné porozumění následujících kapitol (převzato z [1]).

Mějme křivku c popsanou vektorovou funkcí $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t), t \in I$, kde t je obecný parametr, nebo $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s), s \in I^*$, kde parametr s je oblouk. Označme $\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}$ a $\dot{\mathbf{p}}(s) = \frac{d\mathbf{p}(s)}{ds}$.

Definice 1 Mějme bod $P(t_0)$ křivky c . Vektor, jehož počáteční bod je umístěn v počátku soustavy souřadnic a koncový bod je bod $P(t_0)$, nazveme **průvodičem** bodu $P(t_0)$ a značíme $\mathbf{p}(t_0)$.

Definice 2 Bud' $P(t_0)$ regulární bod křivky c . **Tečnou t** křivky c v jejím bodě $P(t_0)$ rozumíme přímku, která je pro $h \rightarrow 0$ limitní polohou sečny, procházející bodem $P(t_0)$ a dalším bodem $P(t_0 + h)$ křivky c . Bod $P(t_0)$ nazýváme **dotykovým bodem** dané tečny.

Definice 3 **Oskulační rovinou** křivky c v jejím regulárním bodě $P(t_0)$ rozumíme rovinu, která je pro $h \rightarrow 0$ limitní polohou roviny, která je určena tečnou křivky c v bodě $P(t_0)$ a dalším bodem $P(t_0 + h)$ křivky c .

Definice 4 Přímku, která prochází bodem $P(t_0)$ křivky c a je kolmá na tečnu křivky c v $P(t_0)$, nazveme **normálou** křivky c v bodě $P(t_0)$. **Hlavní normálou** n křivky c v bodě $P(t_0)$ rozumíme normálu, která leží v oskulační rovině příslušné bodu $P(t_0)$ křivky c .

Definice 5 **Binormálou** b křivky c v jejím bodě $P(t_0)$ rozumíme přímku, která prochází bodem $P(t_0)$ a je kolmá na oskulační rovinu příslušnou bodu $P(t_0)$.

Definice 6 Velikost vektoru $\ddot{\mathbf{p}}(s_0)$ nazýváme **první křivostí křivky** c v bodě $P(s_0)$ a značíme ${}^1k(s_0)$. Převrácená hodnota první křivosti se nazývá **poloměr křivosti**.

Definice 7 Číslo 2k vypočtené pro daný bod $P(s_0)$ křivky c z rovnice

$${}^2k = -\dot{\mathbf{b}}\mathbf{n}$$

kde \mathbf{b} je jednotkový vektor binormály a \mathbf{n} je jednotkový vektor hlavní normály, nazveme **druhou křivostí křivky** c v bodě $P(s_0)$.

2 Řád dotyku křivek

Podkladem pro tuto kapitolu je publikace [1] a článek [3].

Než si definujeme oskulační křivky, seznámíme se blíže s pojmem dotyk určitého řádu dvou křivek, který je pro problematiku oskulačních křivek klíčový. Mějme křivku g popsanou vektorovou funkcí $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\tau)$, $\tau \in J$, popř. $\mathbf{g} = \mathbf{g}(s)$, $s \in J^*$ její parametrizaci obloukem, a bod X_0 společný bod křivek g a c (popis křivky c viz kapitola 1), na jehož okolí budeme zkoumat vztah obou křivek. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že jsou obě křivky vztažené k témuž obloukovému parametru s a společný bod je v $s = 0$, tj. $X_0 = \mathbf{p}(0) = \mathbf{g}(0)$.

Definice 8 *Křivky c a g mají ve společném bodě X_0 **dotyk nejméně q -tého řádu**, neboli dotyk nejméně $(q + 1)$ bodový, jsou-li splněny podmínky*

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{d}(s)}{s^k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, q), \quad (1)$$

kde $\mathbf{d}(s) = \mathbf{p}(s) - \mathbf{g}(s)$.

Věta 1 *Nutná a postačující podmínka pro to, aby křivky křivky c a g měly ve společném bodě X_0 **dotyk nejméně q -tého řádu**, neboli dotyk nejméně $(q + 1)$ bodový, je platnost následujících rovností*

$$\mathbf{p}(0)^{(k)} = \mathbf{g}(0)^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \dots, q) \quad (2)$$

za předpokladu existence potřebného počtu derivací.

Důkaz: Jelikož se jedná zároveň o nutnou i postačující podmínku, je vztah mezi dotykem nejméně q -tého řádu obou křivek a platností rovností 2 ekvivalencí. Nejprve si dokážeme, že dotyk nejméně řádu q obou křivek implikuje platnost rovností 2 (nutná podmínka). Funkce $\mathbf{p}(s)$ a $\mathbf{g}(s)$ nahradíme na dostatečně malém okolí společného bodu $s = 0$ následujícími rozvoji

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(s) &= \mathbf{p}(0) + \dot{\mathbf{p}}(0)s + \frac{1}{2!}\ddot{\mathbf{p}}(0)s^2 + \frac{1}{3!}\dddot{\mathbf{p}}(0)s^3 + \dots \\ \mathbf{g}(s) &= \mathbf{g}(0) + \dot{\mathbf{g}}(0)s + \frac{1}{2!}\ddot{\mathbf{g}}(0)s^2 + \frac{1}{3!}\dddot{\mathbf{g}}(0)s^3 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

a tyto dosadíme do vztahu $\mathbf{d}(s) = \mathbf{p}(s) - \mathbf{g}(s)$

$$\mathbf{d}(s) = [\mathbf{p}(0) - \mathbf{g}(0)] + s[\dot{\mathbf{p}}(0) - \dot{\mathbf{g}}(0)] + \frac{s^2}{2!}[\ddot{\mathbf{p}}(0) - \ddot{\mathbf{g}}(0)] + \frac{s^3}{3!}[\dddot{\mathbf{p}}(0) - \dddot{\mathbf{g}}(0)] + \dots \quad (4)$$

Podle definice 8 platí pro dotyk nejméně q -tého řádu vztahy 1. Dosazením výrazu 4 do těchto vztahů dostaneme

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{[\mathbf{p}(0) - \mathbf{g}(0)]}{s^k} + \frac{[\dot{\mathbf{p}}(0) - \dot{\mathbf{g}}(0)]}{s^{k-1}} + \frac{[\ddot{\mathbf{p}}(0) - \ddot{\mathbf{g}}(0)]}{2!s^{k-2}} + \frac{[\ddot{\mathbf{p}}(0) - \ddot{\mathbf{g}}(0)]}{3!s^{k-3}} + \dots \right) = 0 \quad (5)$$

pro $k = 0, 1, \dots, q$. Zvolme $k = q$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} & \left(\frac{[\mathbf{p}(0) - \mathbf{g}(0)]}{s^q} + \frac{[\dot{\mathbf{p}}(0) - \dot{\mathbf{g}}(0)]}{s^{q-1}} + \frac{[\ddot{\mathbf{p}}(0) - \ddot{\mathbf{g}}(0)]}{2!s^{q-2}} + \frac{[\ddot{\mathbf{p}}(0) - \ddot{\mathbf{g}}(0)]}{3!s^{q-3}} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{[\mathbf{p}^{(q-1)}(0) - \mathbf{g}^{(q-1)}(0)]}{(q-1)!s} + \frac{[\mathbf{p}^{(q)}(0) - \mathbf{g}^{(q)}(0)]}{q!} + \frac{s[\mathbf{p}^{(q+1)}(0) - \mathbf{g}^{(q+1)}(0)]}{(q+1)!} + \dots \right) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Tato rovnost platí jen v případě, že jsou čitatelé prvních $q + 1$ sčítanců rovny nule, tj. jsou splněny podmínky 2, což jsme chtěli dokázat.

Nyní ještě ukážeme, že je tato podmínka také postačující, tj. splnění podmínek 2 implikuje dotyk nejméně řádu q obou křivek. Vzhledem k platnosti podmínek 2 se ve vztahu 4 odečtou všechny derivace až do řádu k včetně, čímž pro $k = 0, 1, \dots, q$ dostaneme následujících $q + 1$ rovností

$$\mathbf{d}(s) = \frac{s^{k+1}}{(k+1)!}[\mathbf{p}(0)^{(k+1)} - \mathbf{g}(0)^{(k+1)}] + \frac{s^{k+2}}{(k+2)!}[\mathbf{p}(0)^{(k+2)} - \mathbf{g}(0)^{(k+2)}] + \dots \quad (7)$$

Rovnosti vydělíme výrazem s^k

$$\frac{\mathbf{d}(s)}{s^k} = \frac{s}{(k+1)!}[\mathbf{p}(0)^{(k+1)} - \mathbf{g}(0)^{(k+1)}] + \frac{s^2}{(k+2)!}[\mathbf{p}(0)^{(k+2)} - \mathbf{g}(0)^{(k+2)}] + \dots \quad (8)$$

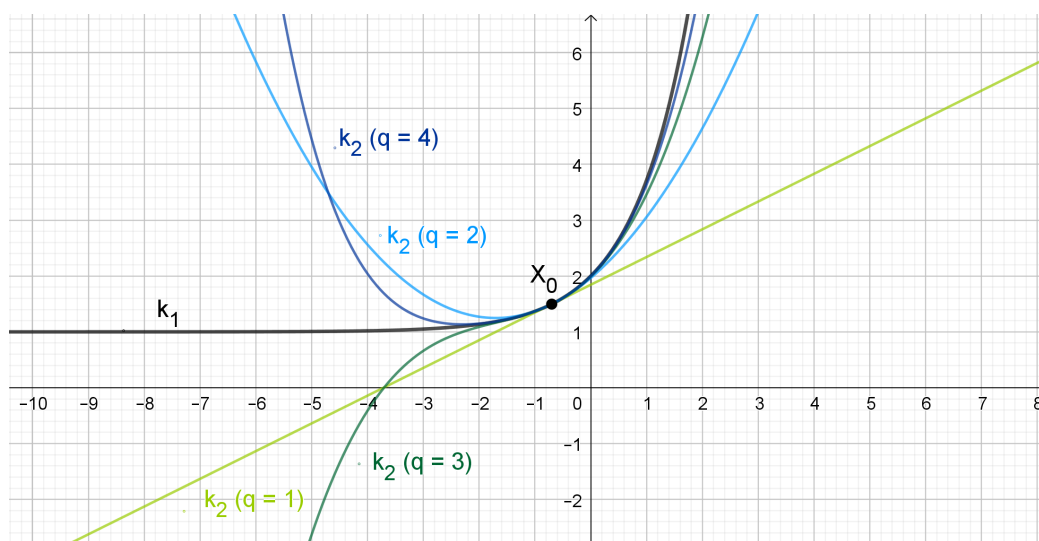
kde $k = 0, 1, \dots, q$. Pro limitu $s \rightarrow 0$ všech těchto výrazů platí

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{(k+1)!}[\mathbf{p}(0)^{(k+1)} - \mathbf{g}(0)^{(k+1)}] + \frac{s^2}{(k+2)!}[\mathbf{p}(0)^{(k+2)} - \mathbf{g}(0)^{(k+2)}] + \dots = 0 \quad (9)$$

což odpovídá podmínkám v definici 8 dotyku nejméně q -tého řádu, čímž je důkaz proveden.

Důsledek 1 *Nutná a postačující podmínka pro to, aby křivky g a c měly ve společném bodě X dotyk nejméně řádu q , tj.: $(q + 1)$ bodový, je dáno pro:*
 $q = 1$ rovností jednotkových tečných vektorů
 $q = 2$ rovností jednotkových tečných vektorů, jednotkových vektorů hlavních normál a rovností první křivosti
 $q = 3$ rovností jednotkových tečných vektorů, jednotkových vektorů hlavních normál, rovností první a druhé křivosti a rovností derivace první křivosti.

Důkaz viz [1].



Obrázek 1: Vliv hodnoty řádu dotyku q křivek k_1 a k_2 v bodě X_0 na jejich vzájemnou polohu.

Nakonec se podívejme, jak dotyk určitého řádu dvou křivek ovlivní jejich vzájemnou polohu na malém okolí dotykového bodu. Mějme křivky k_1 a k_2 popsané funkcemi

$$\begin{aligned} k_1 : y &= f(x) \\ k_2 : y &= g(x) \end{aligned} \tag{10}$$

Nechť mají tyto křivky ve společném bodě x_0 dotyk řádu q , tj platí:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x_0) &= g^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \dots, q \\ f^{(q+1)}(x_0) &\neq g^{(q+1)}(x_0) \end{aligned} \tag{11}$$

Pro rozdíl $d(x) = f(x) - g(x)$ získáme v dostatečně malém okolí bodu x_0 rozvoj

$$d(x) = \frac{f^{(q+1)}(0) - g^{(q+1)}(0)}{(q+1)!}x^{(q+1)} + \frac{f^{(q+2)}(0) - g^{(q+2)}(0)}{(q+2)!}x^{(q+2)} + \dots \quad (12)$$

Nechť pro dostatečně malé ϵ platí $x_0 - \epsilon < x_a < x_0 < x_b < x_0 + \epsilon$. Je-li q sudé, je $d(x)$ v x_a a x_b různého znaménka a křivka k_2 leží v malém okolí bodu x_0 na různých stranách křivky k_1 . Je-li q liché, je $d(x)$ v x_a a x_b , téhož znaménka a křivka k_2 leží v určitém okolí bodu x_0 na téže straně křivky k_1 . (viz obrázek 1).

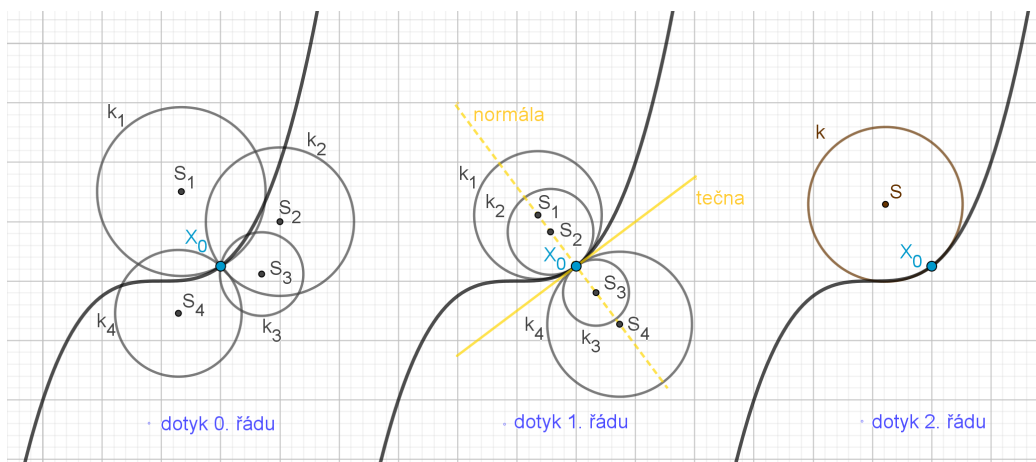
3 Oskulační křivky

Podkladem pro tuto kapitolu je publikace [1] a článek [3].

O oskulační křivce g lze uvažovat jako o křivce, která aproximuje danou křivku c na okolí jejího zvoleného bodu X lépe, než kterákoli jiná křivka pocházející ze stejného systému křivek jako křivka g (např.: systém kružnic). Obecně platí, že libovolná křivka k aproximuje křivku c na okolí společného bodu X_0 tím lépe, čím vyšší je řád dotyku obou křivek v daném bodě. Ovšem skutečnost, že mají dvě křivky ve společném bodě dotyk určitého řádu, nezaručuje, že je jedna z nich oskulační křivkou té druhé. Zavedeme si proto další pojem.

Definice 9 *Nechť r je počet parametrů, jimiž je křivka k v prostoru jednoznačně určena. **Obecně nejvyšší možný řád dotyku** (zkráceně **ONM řád dotyku**) pro křivku k je řád dotyku $q_{ONM} = r - 1$.*

Například, je-li křivka k kružnice, lze ji v prostoru jednoznačně určit třemi parametry ($r = 3$) a má tedy $q_{ONM} = 2$ (tříbodový). Kružnic, které mají s křivkou c v bodě X_0 dotyk řádu nižšího než q_{ONM} (tj. $q \in \{0, 1\}$) je možno nalézt nekonečně mnoho (viz obrázek 2 vlevo a uprostřed). Naopak kružnice, která má s křivkou c v bodě X_0 dotyk řádu q_{ONM} je (za předpokladu, že X_0 je regulární bod křivky c) právě jedna (viz obrázek 2 vpravo).



Obrázek 2: Dotyk řádu $n = 0, 1, 2$ kružnic k_i s křivkou c v bodě X_0 .

Je-li křivka k rovinná algebraická křivka stupně $d \geq 1$, pak lze počet jejích parametrů spočítat pomocí vzorce

$$r = n(d) - \nu, \quad (13)$$

kde $n(d) = d(d+3)/2$ je nejvyšší možný počet parametrů pro křivku stupně d , a $\nu \in \{0, 1, \dots, n(d)\}$ udává, kolik z těchto parametrů je pro křivku k pevně zvoleno.

Příklad 1 Určeme ONM řád dotyku pro:

- Kuželosečku
- Polynom 2. stupně

Řešení:

- Nechť křivka k je kuželosečka popsána obecnou rovnicí

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \quad (14)$$

Kuželosečka je algebraická křivka stupně $d = 2$ obecně bez pevně zvolených parametrů, tj. $\nu = 0$. Dosadíme do vzorce 13.

$$r = n(d) - \nu = \frac{2(2+3)}{2} - 0 = 5.$$

Kuželosečka k má tedy dle definice 9 obecně nejvýše možný řád dotyku $q = r - 1 = 4$ (pětibodový).

b) Necht' křivka k je grafem polynomu druhého stupně popsaného rovnicí

$$g(x) = \bar{A}x^2 + \bar{B}x + \bar{C}. \quad (15)$$

Opět se jedná o algebraickou křivku stupně $d = 2$, ovšem tentokrát bude ν různé od nuly. Polynom druhého stupně je parabola, tedy křivka k , která se řadí mezi kuželosečky, a lze ji vyjádřit pomocí rovnice 14. Nutná podmínka pro to, aby kuželosečka byla parabolou, je nulovost právě jednoho z koeficientů u kvadratických členů v rovnici 14. Další omezení vychází ze skutečnosti, že polynomy jsou funkce $y = y(x)$ jedné reálné proměnné a tedy platí, že pro každé x existuje právě jedno y . To lze zajistit pouze v případě, kdy je osa paraboly rovnoběžná s osou y , tj.: když koeficient před smíšeným členem způsobujícím natočení osy paraboly je roven nule. Zvolili jsme tedy dva parametry z rovnice 14 tak, abychom získali polynom druhého stupně, tj. $\nu = 2$. Dosadíme

$$r = n(d) - \nu = \frac{2(2+3)}{2} - 2 = 5 - 2 = 3.$$

Křivka k , která je grafem polynomu druhého stupně, má ONM řád dotyku $q = 2$ (tříbodový).

Definice 10 Křivku g , která má s danou křivkou c ve společném bodě X_0 dotyk řádu ONM, nazveme **oskulační křivkou** křivky c v bodě X_0 .

Poznámka: Oskulační křivka g křivky c v regulárním bodě X_0 je určen jednoznačně.

Definice 11 Křivku g , která má s danou křivkou c ve společném bodě X_0 dotyk řádu vyššího než obecně možného, nazveme **hyperoskulační křivkou** křivky c v bodě X_0 . Bod X_0 pak nazveme **extatický bod** křivky c .

Jak již bylo řečeno, oskulační křivky slouží k aproximaci dané křivky c na okolí jejího daného bodu X_0 . Z toho důvodu je logické požadovat, aby oskulační křivka g byla jednodušší (snáze narýsovatelná či použitelná ve výpočtech) než křivka c a zároveň, aby křivku c aproximovala co nejlépe, tj. aby oskulační křivka g měla co možná největší řád dotyku obecně nejvýše možného. Následující podkapitoly se jednotlivě věnují právě těm křivkám, které je vhodné využít jako oskulační křivky.

3.1 Přímka

Podkladem pro tuto kapitolu je publikace [1].

Přímka je nejjednodušší křivka g , jakou můžeme pro oskulaci zvolit. V prostoru E^3 ji popíšeme vektorovou funkcí

$$g : \mathbf{g}(\tau) = A\tau + B, \quad A, B \in R^3, \tau \in J \subset R.$$

Jelikož se jedná o rovinnou algebraickou křivku, uvedeme si také její popis pomocí funkce jedné reálné proměnné v prostoru E^2

$$g : y = g(x) = ax + b, \quad a, b \in R, x \in J \subset R.$$

Pro přímku je $d = 1$ a $\nu = 0$. Dosazením do vzorce 13 dostaneme $r = 2$ a tedy řád dotyku obecně nejvýše možného pro přímku je $q = 1$ (dvoubodový dotyk).

Podle důsledku 1 platí pro dotyk prvního řádu dvou křivek rovnost jejich jednotkových tečných vektorů ve společném bodě X_0 , tj.: obě křivky mají v X_0 společnou tečnu. Jelikož je křivka g přímkou, je zároveň onou společnou tečnou v bodě X_0 . Oskulační přímka g křivky c je tedy její tečna v bodě X_0 . V případě, že má přímka s křivkou c v daném bodě dotyk vyššího (nejméně druhého) řádu, nazveme ji hyperoskulační přímkou nebo též inflexní tečnou.

Podívejme se na dotyk rovinné křivky c s přímkou g , které jsou popsány funkcemi jedné reálné proměnné

$$\begin{aligned} c : y &= f(x) \\ g : y &= g(x) \end{aligned} \tag{16}$$

Podmínka, aby křivka c a přímka g měly ve společném bodě X_0 dotyk nejméně prvního řádu, je podle věty 1 rovnost jejich funkčních hodnot a prvních derivací, tj. platnost rovností

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0) \\ f'(x_0) &= g'(x_0) \end{aligned} \tag{17}$$

Za těchto podmínek je přímka g oskulační přímkou (tečnou) křivky c v bodě X_0 . Kdybychom přidali další podmínky pro dotyk vyšších řádů (rovnost druhých a vyšších derivací), záviselo by splnění těchto podmínek už pouze na křivce c , neboť druhá (a všechny následující) derivace rovnice přímky

jsou identicky nulové. Na základě podmínek 17 určíme vzorce pro výpočet parametrů oskulační přímky g křivky c v bodě X_0 . Nejprve zderivujeme rovnici přímky.

$$\begin{aligned}g(x) &= ax + b \\g'(x) &= a\end{aligned}$$

Dosaďme $x = x_0$ a zohledněme podmínky 17.

$$\begin{aligned}f(x_0) &= ax_0 + b \\f'(x_0) &= a.\end{aligned}$$

Odtud vyjádříme a a b .

$$\begin{aligned}a &= f'(x_0) \\b &= f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.\end{aligned}\tag{18}$$

Přímka g , jejíž parametry jsou vypočteny pomocí vzorců 18, je tečnou křivky c v bodě $X_0 = [x_0, f(x_0)]$.

3.2 Kružnice

Podkladem pro tuto kapitolu je publikace [1] a články [3] a [4].

Křivku g zvolenou jako kružnici popíšeme vektorovou funkcí

$$g : \mathbf{g}(\tau) = (r \cdot \cos(\tau) + x_s, r \cdot \sin(\tau) + y_s, 0),\tag{19}$$

kde r je poloměr a x_s, y_s jsou souřadnice středu kružnice. Tato funkce popisuje kružnici ležící v rovině xy , což (jak vyplyne z následujících vět) je pro zkoumání oskulačních kružnic dostačující. Dále si uvedeme ještě středovou rovnici kružnice

$$g : (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2.\tag{20}$$

Nyní určíme řád dotyku obecně nejvýše možného pro kružnici g . Kružnice je kuželosečka, tedy algebraická křivka druhého stupně. Z obecné rovnice kuželosečky 14 získáme obecnou rovnici kružnice volbou dvou parametrů $A = B \neq 0, C = 0$ (tj. $\nu = 2$). Počet parametrů kružnice dle vzorce 13 je

$$\begin{aligned}r &= n(2) - 2 \\r &= 5 - 2 \\r &= 3\end{aligned}$$

Nejvýše obecně možný řád dotyku pro kružnici g tedy je $q = 2$ (tříbodový).

Definice 12 Kružnice g , která prochází bodem X_0 křivky c , v němž ${}^1k \neq 0$, a má v něm s křivkou c dotyk druhého řádu (tříbodový), se nazývá **oskulační kružnice** křivky c v bodě X_0 . Střed $S[x_s, y_s]$ kružnice g se nazývá **střed křivosti** a její poloměr r **poloměrem křivosti** křivky c v bodě X_0 .

Pozn: Oskulační kružnice se též nazývá kružnice křivosti, neboť hodnota její první křivosti (konstantní ve všech bodech kružnice) je rovna první křivosti křivky c v bodě X_0 .

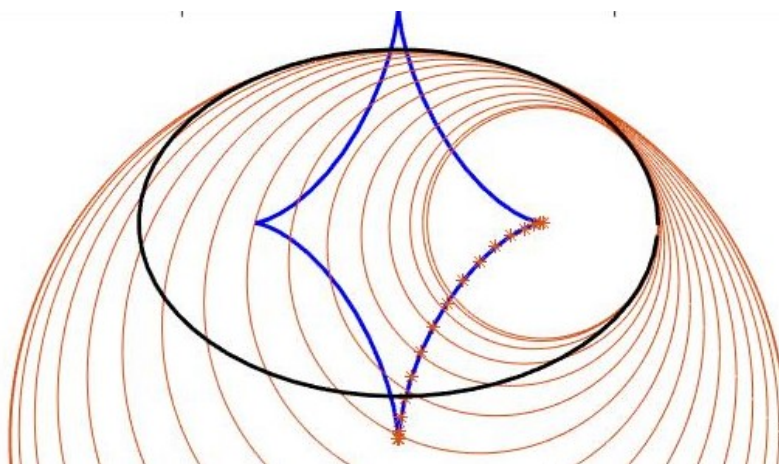
Věta 2 Oskulační kružnice v bodě $P(t_0)$ prostorové křivky c leží v oskulační rovině křivky c v tomto bodě, její poloměr se rovná příslušnému poloměru r první křivosti křivky c a její střed S má průvodič

$$\mathbf{s}(t_0) = \mathbf{p}(t_0) + r\mathbf{n}, \quad (21)$$

tedy leží na hlavní normále křivky c v uvažovaném bodě.

Tím, že poloměr r oskulační kružnice křivky c v bodě X_0 je převrácenou hodnotou první křivosti křivky c v X_0 , je ukázán geometrický význam těchto hodnot.

Poznámka: Křivka, která je tvořena středy oskulačních kružnic křivky c , se nazývá **evoluta** křivky c . Na obrázku 3 je modře vykreslena evoluta elipsy a hnědě několik oskulačních kružnic této elipsy.



Obrázek 3: Evoluta elipsy

Věta 3 *Pravouhlý průmět prostorové křivky do její oskulační roviny v uvažovaném bodě je rovinná křivka, mající s danou prostorovou křivkou ve zmíněném bodě společnou oskulační kružnici.*

Z vět 2 a 3 plyne, že oskulační kružnice křivky c (uvažujeme-li c jako prostorovou křivku) není ovlivněna její druhou křivostí. Při dalším studiu vlastností oskulačních kružnic tedy můžeme pro jednoduchost a bez újmy na obecnosti předpokládat, že c je křivka rovinná.

Následující tři věty poskytují návod na určení parametrů oskulační kružnice g v případech, kdy je křivka c zadána explicitně, implicitně a parametricky.

Věta 4 *Křivka c popsaná explicitně funkcí $y = y(x)$ má v bodě $X_0[x_0, y(x_0)]$, pro který je $y'' \neq 0$, oskulační kružnici g , jejíž poloměr r a souřadnice x_s, y_s středu S jsou dány vzorci*

$$r = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|} \quad x_s = x_0 - y' \frac{1+(y')^2}{y''} \quad y_s = y_0 + \frac{1+(y')^2}{y''}. \quad (22)$$

Důkaz: Ukážeme, že kružnice g s parametry vypočtenými ze vzorců 22 je oskulační kružnicí křivky c v bodě X_0 , tj. že g a c mají v bodě X_0 dotyk nejméně druhého řádu. Nutnou a postačující podmínkou pro dotyk nejméně druhého řádu dvou křivek je rovnost jejich hodnot ve společném bodě až do druhé derivace včetně. Zderivujeme obě křivky dvakrát podle proměnné x

$$\begin{aligned} c : y &= y(x) & g : (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 - r^2 &= 0 \\ y' &= y'(x) & x - x_s + (y - y_s)y' &= 0 \\ y'' &= y''(x) & 1 + (y')^2 + (y - y_s)y'' &= 0 \end{aligned}$$

Jelikož máme křivku c zadanou explicitně a kružnici g popsanou středovou rovnicí (implicitně), zajistíme splnění podmínek dotyku nejméně druhého řádu dosazením funkční hodnoty a derivací křivky c (vyčíslených pro bod X_0) do středové rovnice kružnice a jejich derivací

$$\begin{aligned} (x_0 - x_s)^2 + (y(x_0) - y_s)^2 - r^2 &= 0 \\ x_0 - x_s + (y(x_0) - y_s)y'(x_0) &= 0 \\ 1 + (y'(x_0))^2 + (y(x_0) - y_s)y''(x_0) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Z těchto rovnic vyjádříme parametry r, x_s, y_s a po úpravě získáme přesně vzorce 22.

Věta 5 *Křivka c popsaná implicitně funkcí $F(x, y) = 0$ má ve svém bodě $X[x_0, y_0]$ oskulační kružnici g , jejíž parametry jsou dány vzorci*

$$r = \frac{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}{|J|} \quad x_s = x_0 - F_x \frac{F_x^2 + F_y^2}{J} \quad y_s = y_0 - F_y \frac{F_x^2 + F_y^2}{J} \quad (24)$$

kde

$$J = F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2,$$

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad F_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad F_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial xy}$$

za předpokladu, že c nemá v bodě X tečnu rovnoběžnou s osou y .

Důkaz: Do vzorců 22 dosadíme za y' , y'' vztahy pro první a druhou derivaci implicitní funkce, tj. výrazy

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$y'' = \frac{1}{(F_y)^3} \begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} = \frac{-J}{(F_y)^3}$$

a upravíme

$$r = \frac{\left(1 + \left(-\frac{F_x}{F_y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{-J}{(F_y)^3}\right|} = \frac{\frac{((F_x)^2 + (F_y)^2)^{\frac{3}{2}}}{|F_y|^3}}{\frac{|J|}{|F_y|^3}} = \frac{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}{|J|}$$

$$x_s = x_0 - \left(-\frac{F_x}{F_y}\right) \frac{1 + \left(-\frac{F_x}{F_y}\right)^2}{\frac{-J}{(F_y)^3}} = x_0 - \frac{F_x}{F_y} \frac{\frac{(F_x)^2 + (F_y)^2}{(F_y)^2}}{\frac{J}{(F_y)^3}} = x_0 - F_x \frac{F_x^2 + F_y^2}{J}$$

$$y_s = y_0 + \frac{1 + \left(-\frac{F_x}{F_y}\right)^2}{\frac{-J}{(F_y)^3}} = y_0 - \frac{\frac{(F_x)^2 + (F_y)^2}{(F_y)^2}}{\frac{J}{(F_y)^3}} = y_0 - F_y \frac{F_x^2 + F_y^2}{J}$$

Dostali jsme vzorce 24. Tyto jsou tedy pouze jinak zapsané vzorce 22 z věty 4, jejíž platnost jsme již dokázali.

Věta 6 *Křivka c s parametrickým vyjádřením $x = \phi(t), y = \psi(t)$ má ve svém bodě $X_0[\phi_0, \psi_0]$ osculační kružnici, jejíž parametry jsou dány výrazy*

$$r = \frac{((\phi')^2 + (\psi')^2)^{3/2}}{|\phi'\psi'' - \phi''\psi'|}; \quad x_s = \phi_0 - \psi' \frac{(\phi')^2 + (\psi')^2}{\phi'\psi'' - \phi''\psi'}; \quad y_s = \psi_0 + \phi' \frac{(\phi')^2 + (\psi')^2}{\phi'\psi'' - \phi''\psi'} \quad (25)$$

kde $(\phi'\psi'' - \phi''\psi') \neq 0$.

Důkaz této věty se provádí obdobně jako u předchozí věty, tj. ukáže se, že vzorce 25 jsou pouze jinak zapsané vzorce 22, jejichž platnost jsme již dokázali.

Poznámka: Vzorce 22, 24 a 25 nelze použít v případě, kdy se jmenovatelé v těchto výrazech rovnají nule. Tato situace nastane v bodech X_0 , které jsou inflexními body křivky c . V limitě pro $X \rightarrow X_0$ se hodnota jmenovatelů blíží k nule a hodnota parametrů r, x_s, y_s tak roste nade všechny meze. Z toho plyne, že se první křivost osculační kružnice (i první křivost křivky c v X_0) neomezeně blíží k nule, tj.: osculační kružnice se neomezeně blíží k tečně v inflexním bodě X_0 . Jelikož máme stále nejméně trojbodový dotyk, jedná se o inflexní tečnu, nebo též osculační kružnici s nekonečně velkým poloměrem.

Definice 13 *Kružnice g , která prochází bodem X_0 křivky c , v němž ${}^1k \neq 0$, a má v něm s křivkou c dotyk nejméně třetího řádu (čtyřbodový), se nazývá **hyperoskulační kružnice** křivky c v uvažovaném bodě X_0 .*

Poznámka: Bod, ve kterém má křivka c hyperoskulační kružnici o dotyku lichého řádu se nazývá vrchol křivky.

Věta 7 *V bodě X_0 křivky $c: y = f(x)$, pro který platí*

$$3y'(y'')^2 - (1 + (y')^2)y''' = 0 \quad (26)$$

má osculační kružnice s křivkou c dotyk řádu nejméně třetího (čtyřbodový), tj. je kružnicí hyperoskulační.

Myšlenka důkazu: Aby měla osculační kružnice s křivkou c v bodě X dotyk nejméně třetího řádu, musí kromě rovnic 23, z nichž jsme určili tři parametry kružnice, navíc platit rovnost třetích derivací obou křivek ve

společném bodě. Tuto podmínku získáme zderivováním poslední rovnice ze soustavy 23. Po jednoduché úpravě dostaneme rovnici 26.

Poznámka: Podmínku 26 splňují také inflexní body křivky c .

Podmínka hyperoskulace neobsahuje žádný z parametrů oskulační kružnice, tj. skutečnost, zda kružnice oskuluje či hyperoskuluje v daném bodě její parametry už nijak neovlivní. Změní se však vzájemná poloha obou křivek, jak bylo popsáno na konci minulé kapitoly: zatímco v bodě X_0 ve kterém mají g a c dotyk 2. řádu (sudého) přechází g z jedné strany křivky c na druhou, tak v bodě X_0 v němž g hyperoskuluje má s c dotyk 3. řádu (lichého), a tedy g zůstává na okolí bodu X_0 na jedné straně křivky c .

Věta 8 *Předpokládejme, že poloměr oskulační kružnice je spojitou funkcí parametru $x \in I$ rovinné křivky c , tj. pro křivku c platí ${}^1k \neq 0$ pro $x \in I$, a existuje potřebný počet derivací funkce $r(x)$. Potom je poloměr r hyperoskulační kružnice lokálně extrémní hodnotou poloměru křivosti pro danou rovinou křivku c .*

Důkaz: Hledáme lokální extrém funkce $r = r(x)$ dané předpisem

$$r(x) = \frac{(1 + (y(x)')^2)^{3/2}}{y(x)''},$$

tj. hledáme bod, který bude vyhovovat rovnici $r'(x) = 0$ a zároveň nebude inflexním bodem funkce $r(x)$. Po zderivování $r(x)$ a následných úpravách dostaneme rovnici 26, což je podmínka hyperoskulace. Hledaný bod lokálního extrému poloměru křivosti je tedy bod, v němž oskulační kružnice křivky c hyperoskuluje.

Poznámka: Pokud pro bod X_0 křivky c platí, že $\lim_{x \rightarrow x_0} {}^1k(x) = 0$, potom je $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{{}^1k(x)} \approx \infty$. Bod X_0 je tedy bodem nespojitosti 2. druhu funkce $r(x)$.

Příklad 2 *Nechť křivka c je graf funkce $y = x^5$, $x \in \mathbb{R}$. Pro tuto křivku*

- a) *upravme vzorce pro výpočet parametrů r, s_x, s_y a vykresleme několik oskulačních kružnic,*

- b) vykresleme funkci křivosti a z podle jejích grafu odhadněme počet vrcholů a inflexních bodů křivky c ,
- c) určíme všechny inflexní body. Dále vypočtíme přesný řád dotyku inflexní tečny s křivkou c a vykresleme ji,
- d) nalezneme všechny vrcholy křivky c a vykresleme příslušné hyperoskulační kružnice.

Řešení:(Zpracováno v [zadavani.m](#))

a) Parametry oskulačních kružnic explicitně dané křivky c vypočteme pomocí vzorců 22. Budeme potřebovat předpisy prvních dvou derivací křivky c

$$\begin{aligned}y &= x^5 \\y' &= 5x^4 \\y'' &= 20x^3\end{aligned}$$

které do vzorců dosadíme

$$\begin{aligned}r &= \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1 + (5x^4)^2)^{3/2}}{|20x^3|} \\x_s &= x_0 - y' \frac{1 + (y')^2}{y''} = x - 5x^4 \frac{1 + (5x^4)^2}{20x^3} \\y_s &= y_0 + \frac{1 + (y')^2}{y''} = x^5 + \frac{1 + (5x^4)^2}{20x^3}\end{aligned}$$

Pomocí těchto vzorců můžeme určit parametry oskulačních kružnic ve všech bodech křivky c s výjimkou těch bodů x_0 , pro které je $y'' = 0$. V našem případě tuto výjimku splňuje jediný bod $x_0 = 0$. Na obrázku 4 jsou hnědě vykresleny oskulační kružnice v bodech $x_0 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

b) Funkce první křivosti křivky c má, podle grafu vykresleného na obrázku TTT, dva extrémy a jeden bod nespojitosti 2. druhu. Lze tedy očekávat, že křivka c má dva vrcholy a jeden inflexní bod.

c) Dle poznámky za větou 6 má křivka c oskulační kružnici s nekonečně velkým poloměrem, neboli inflexní tečnu, v bodech x_0 , pro které je $y''(x_0) = 0$. Jsou to přesně ty body x_0 , v nichž nelze použít vzorce z předchozí části

příkladu, tj. zde jediný bod $x_0 = 0$. Inflexní tečna v tomto inflexním bodě je dána rovnicí

$$g : g(x) = y'(0) \cdot x + y(0) - f'(0) \cdot 0, \quad x \in R.$$

Jelikož pro $x_0 = 0$ je $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$, je příslušná inflexní tečna totožná s osou x soustavy souřadnic (viz obrázek 4(žlutá)). Určeme nyní, jaký je přesně řád dotyku této inflexní tečny g s křivkou c . Jelikož funkce x^5 v bodě $x_0 = 0$ mění znaménko (tj. přechází z jedné strany osy x na druhou), očekáváme, že řád dotyku v tomto bodě je sudý.

Hledáme nejvyšší číslo q takové, že pro křivku c a inflexní tečnu platí

$$g(0)^{(k)} = y(0)^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, q.$$

Pro inflexní tečnu $g(x) = 0$ jsou všechny derivace identicky nulové, odtud

$$y(0)^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, q. \quad (27)$$

Určeme nyní řád dotyku q

$$\begin{aligned} y &= x^5 & \rightarrow & y(0) = 0 \\ y' &= 5x^4 & \rightarrow & y'(0) = 0 \\ y'' &= 20x^3 & \rightarrow & y''(0) = 0 \\ y''' &= 60x^2 & \rightarrow & y'''(0) = 0 \\ y^{(iv)} &= 120x & \rightarrow & y^{(iv)}(0) = 0 \\ y^{(v)} &= 120 & \rightarrow & y^{(v)}(0) = 120 \end{aligned}$$

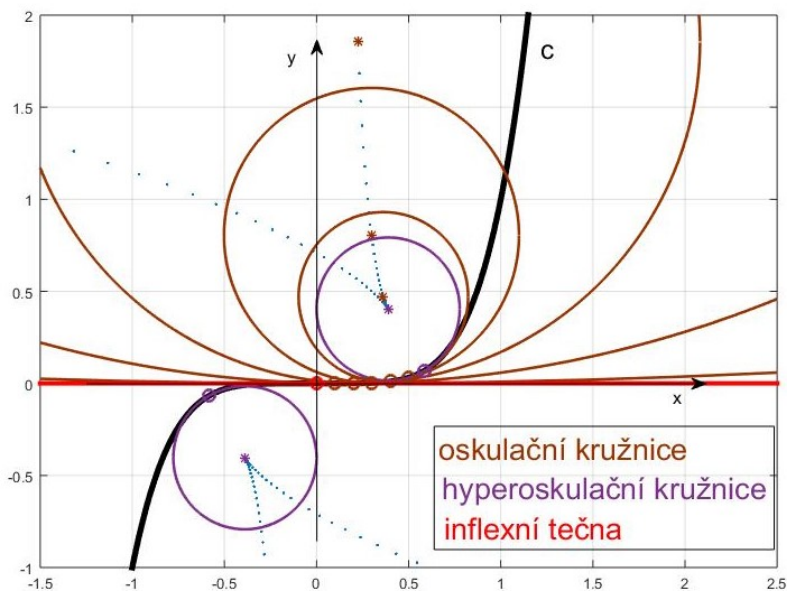
Rovnost 27 je splněna až do čtvrté derivace, což je podmínka pro dotyk nejméně čtvrtého řádu. Jelikož pro pátou derivaci již rovnost 27 splněna není, má inflexní tečna s křivkou c ve společném bodě dotyk přesně čtvrtého řádu.

d) Vrcholy, tj. body v nichž má oskulační kružnice s křivkou c dotyk nejméně třetího řádu, křivky c musí splňovat podmínku hyperoskulace z věty 7.

Dosaďme

$$\begin{aligned}
 3y'(y'')^2 - (1 + (y')^2)y''' &= 0 \\
 15x^4 \cdot (20x^3)^2 - (1 + (5x^4)^2) \cdot 60x^2 &= 0 \\
 75x^{10} - x^2 &= 0 \\
 x^2(75x^8 - 1) &= 0 \\
 \Rightarrow x_0 &= 0 \\
 75x^8 - 1 &= 0 \\
 \Rightarrow x_0 &= \pm \sqrt[8]{\frac{1}{75}}
 \end{aligned}$$

Nalezli jsme tři body, které splňují podmínku hyperoskulace. Jeden z nich je inflexní bod $x_0 = 0$, neboť v něm mají obě křivky dotyk řádu $q = 4$ (tj. vyšší, než q_{ONM} pro kružnice). Ostatní dva body, tj. $x_0 \in \{-\sqrt[8]{\frac{1}{75}}, \sqrt[8]{\frac{1}{75}}\}$, jsou vrcholy křivky c . Příslušné hyperoskulační kružnice jsou vykresleny fialově na obrázku 4.



Obrázek 4: Oskulační kružnice křivky $c : y = x^5$

Příklad 3 Necht' křivka c je zobecněná šroubovice daná předpisem:

$$c : \mathbf{p}(t) = (6 \cos(t), 4 \sin(t), 3t), \quad t \in I.$$

Určeme předpis osculační kružnice g křivky c v bodě $X_0 = \mathbf{p}(0) = (6, 0, 0)$.

Řešení: (Zpracováno v [osk_sroubovice.m](#))

Kružnici v prostoru popíšeme pomocí následujícího vztahu

$$\mathbf{g}(t) = r \cos(t) \mathbf{i} + r \sin(t) \mathbf{j} + S, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad (28)$$

kde r je poloměr, $S = (s_x, s_y)$ je střed kružnice a vektory \mathbf{i} a \mathbf{j} jsou jednotkové navzájem kolmé vektory určující rovinu, v níž kružnice leží. Dle věty 2 leží osculační kružnice v osculační rovině křivky c příslušné bodu dotyku X_0 . Z definic 3 a 4 vyplývá, že osculační rovina je určena tečnou a hlavní normálou křivky c v příslušném bodě. Označme \mathbf{t} jednotkový tečný vektor a \mathbf{n} jednotkový vektor hlavní normály křivky c v bodě X_0 . Potom volbou

$$\mathbf{i} = \mathbf{t}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{n}$$

zajistíme, že kružnice g bude ležet v příslušné osculační rovině. Dále z věty 2 víme, že poloměr r osculační kružnice je převrácenou hodnotou první křivosti křivky c v daném bodě a její střed S leží na hlavní normále ve vzdálenosti r od bodu dotyku X_0 . Spočtěme parametry $\mathbf{t}, \mathbf{n}, {}^1k$ křivky c v bodě X_0

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{p}'}{\|\mathbf{p}'\|} && \Rightarrow \quad \mathbf{t}(0) = (0, 0.8, 0.6) \\ {}^1k &= \left\| \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{t}_1}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{\mathbf{t}'_1}{\|\mathbf{p}'\|} \right\| && \Rightarrow \quad {}^1k(0) = 0.24 \\ \mathbf{n} &= \frac{\ddot{\mathbf{p}}(s)}{\|\ddot{\mathbf{p}}(s)\|} = \frac{1}{{}^1k} \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = \frac{1}{{}^1k} \frac{\mathbf{t}'_1}{\|\mathbf{p}'\|} && \Rightarrow \quad \mathbf{n}(0) = (-1, 0, 0) \end{aligned}$$

Odtud

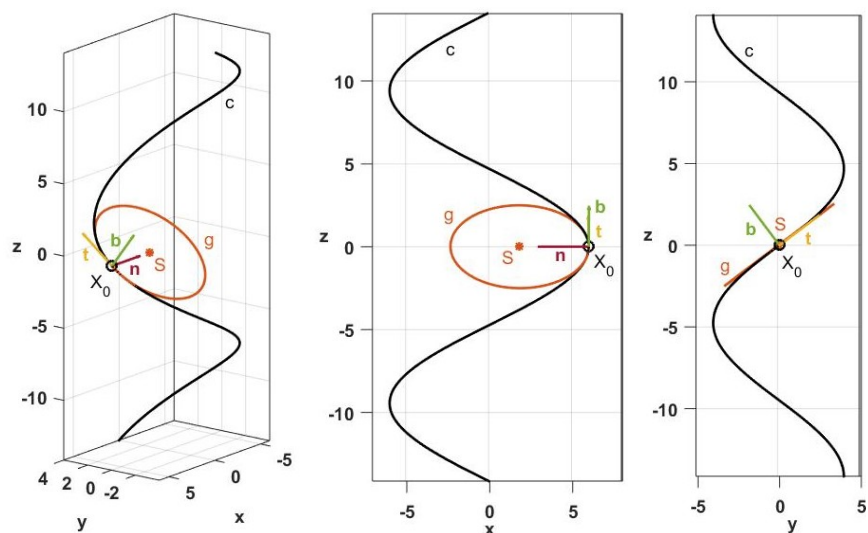
$$\mathbf{i} = (0, 0.8, 0.6)$$

$$\mathbf{j} = (-1, 0, 0)$$

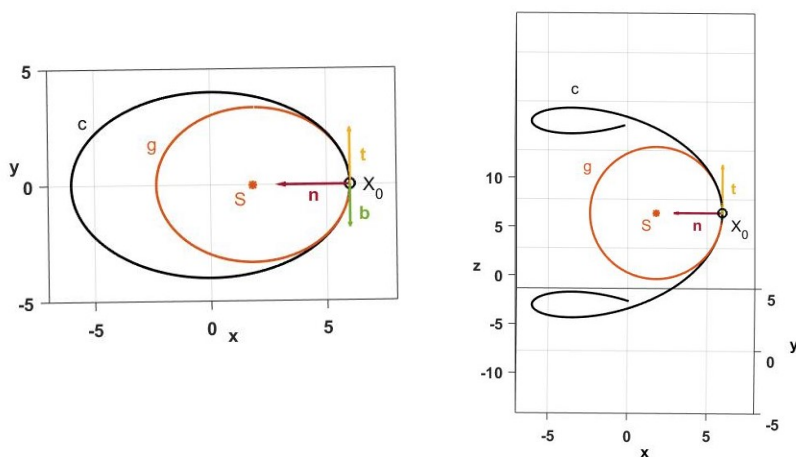
$$r = \frac{1}{0.24} = 4.1\bar{6}$$

$$S = X_0 + r\mathbf{n}_1 = (6, 0, 0) + 4.1\bar{6}(-1, 0, 0) = (1.8\bar{3}, 0, 0)$$

Kružnice g s výše vypočtenými parametry je osculační kružnicí křivky c v bodě $X_0 = [6, 0, 0]$ a je vykreslena na obrázcích 5 (v axonometrii a průmětech do rovin xz a yz) a 6 (v průmětech do roviny xy a osculační roviny).



Obrázek 5: Oskulační kružnice g křivky c (zobecněné šroubovice) v bodě $X_0 = [6, 0, 0]$ v axonometrii (vlevo) a její průměty do rovin xz (uprostřed) a yz (vpravo).



Obrázek 6: Průmět křivky c (zobecněné šroubovice) a její oskulační kružnice g v bodě $X_0 = [6, 0, 0]$ do roviny xy (vlevo) a průmět do oskulační roviny (vpravo).

3.3 Kuželosečky

Podkladem pro tuto kapitolu jsou články [2], [3] a [6].

Pro kuželosečky jsme již v první kapitole spočítali řád dotyku obecně nejvýše možného $q = 4$ (pětibodový).

Definice 14 *Kuželosečka g , která má s křivkou c ve společném bodě X_0 dotyk čtvrtého řádu (pětibodový), se nazývá **oskulační kuželosečka** křivky c v bodě X_0 .*

Věta 9 *Předpokládejme, že rovinná křivka c je na okolí svého bodu X_0 popsitelná explicitně pomocí funkce jedné reálné proměnné $y = f(x)$, $x \in I$ a že $f(x) \in C^4(I)$. Potom oskulační kuželosečka g křivky c v bodě $X_0[x_0, f(x_0)]$ s obecnou rovnicí*

$$g : ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad (29)$$

je jednoznačně určena parametry a, \dots, f , které jsou řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} g &: ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \\ g' &: 2ax + 2byy' + c(y + xy') + d + ey' = 0 \\ g'' &: 2a + 2b((y')^2 + yy'') + c((y')^2 + xy'') + ey'' = 0 \\ g''' &: 2b(3y'y'' + yy''') + c(2y'y'' + y'' + xy''') + ey''' = 0 \\ g^{(iv)} &: 2b(3(y'')^2 + 4y'y''') + c(2(y'')^2 + 2y'y''') + 2y''' + xy^{(iv)}) + ey^{(iv)} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

kde

$$\begin{aligned} x &= x_0 & y'' &= f''(x_0) \\ y &= f(x_0) & y''' &= f'''(x_0) \\ y' &= f'(x_0) & y^{(iv)} &= f^{(iv)}(x_0) \end{aligned} \quad (31)$$

za předpokladu, že $y'' \neq 0$ a zároveň $y''' \neq 0$.

Myšlenka důkazu: Jednotlivé rovnice ze soustavy 30 vznikly postupným derivováním obecné rovnice kuželosečky g podle proměnné x až do čtvrté derivace. Dosazením výrazů 31, tj. funkčních hodnot a derivací křivky c vyčíslených pro daný bod x_0 zajistíme splnění podmínek pro požadovaný dotyk nejméně čtvrtého řádu křivek g a c v bodě X_0 . Jelikož máme 5 lineárních rovnic pro 6 neznámých, má soustava 30 nekonečně mnoho řešení.

Za předpokladu, že $y'' \neq 0$ a zároveň $y''' \neq 0$, je hodnost matice M soustavy 30 $\text{hod}(M) = 5$. Parametry a, \dots, f vypočtené z této soustavy jsou pak závislé na jednom parametru k následujícím způsobem (pro volbu $e := k$)

$$\begin{aligned} a &= k\bar{a} & d &= k\bar{d} \\ b &= k\bar{b} & e &= k \\ c &= k\bar{c} & f &= k\bar{f} \end{aligned} \quad (32)$$

kde $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in R$. Kuželosečka g daná rovnicí

$$g : k\bar{a}x^2 + k\bar{b}y^2 + k\bar{c}xy + k\bar{d}x + ky + k\bar{f} = 0,$$

pro libovolné $k \in R \setminus \{0\}$ však popisuje stále stejnou křivku. Proto za předpokladu $k \neq 0$ je oskulační kuželosečka g s parametry a, \dots, f , které jsou řešením soustavy 30, určena jednoznačně.

Výpočet koeficientů a, \dots, f si lze usnadnit tím, že si předem zvolíme koeficient k různý od nuly, čímž dle vztahů 32 rovnou získáme hodnotu koeficientu e . Soustava 30 se touto volbou změní na nehomogenní soustavu pěti lineárních rovnic pro pět neznámých parametrů, která má (za předpokladu: $y'' \neq 0$ a zároveň $y''' \neq 0$) právě jedno řešení.

Poznámka: V případě, že $y'' = 0$ a zároveň $y''' = 0$, se sníží hodnost matice M soustavy 30 na $\text{hod}(M) = 4$. Tato situace nastane v bodě X_0 , který je inflexním bodem křivky c . Inflexní tečna v tomto bodě je pak příslušnou oskulační kuželosečkou g křivky c v bodě X_0 .

Příklad 4 *Vykresleme několik oskulačních kuželoseček g kubické křivky c dané obecnou rovnicí*

$$c : ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + ex^2 + fy^2 + gxy + hx + iy + j = 0 \quad (33)$$

Řešení: (Zpracováno v [osk_kuželosečky_pro_kubiku.ggb](#))

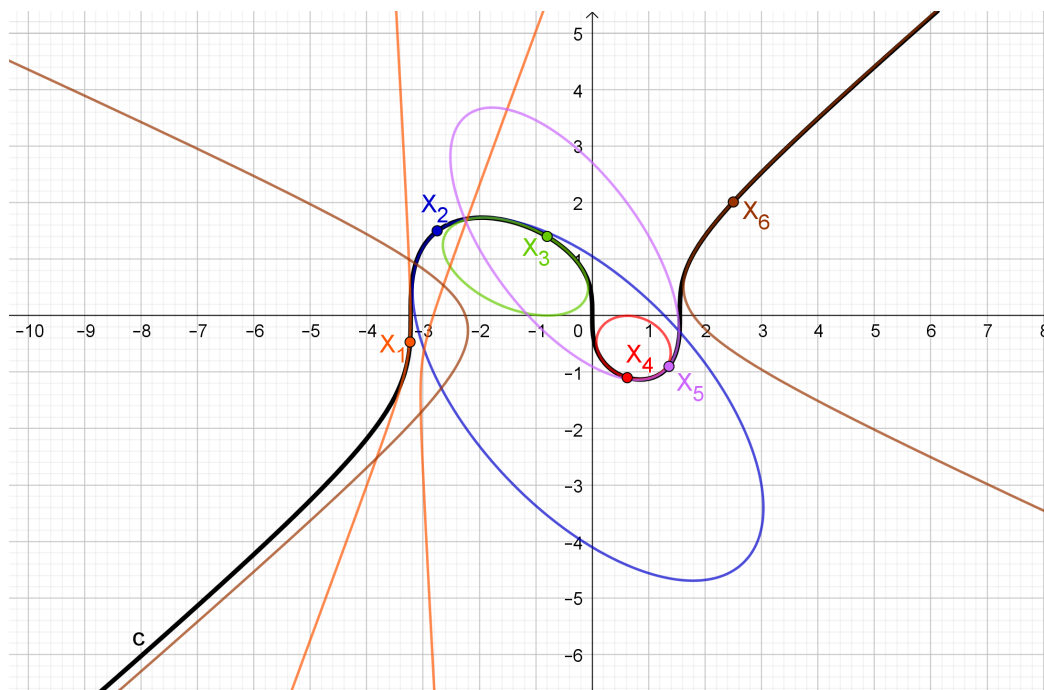
Pro implicitně zadanou křivku c vyjádříme její derivace y', \dots, y^{iv} pomocí pravidel pro derivování implicitních funkcí (tj. proměnnou y v předpisu křivky budeme chápat jako funkci proměnné x , celý výraz zderivujeme podle proměnné x a nakonec vyjádříme příslušnou derivaci y^k). V přiloženém programu jsou předpisy derivací kubické křivky c zadány jako funkce dvou proměnných a dosazují se do nich souřadnice bodu X_0 . Dále pokračujeme ve

výpočtu parametrů oskulační kuželosečky v bodě X_0 dle postupu popsaného v myšlence důkazu věty 9.

Pro kubickou křivku c danou předpisem

$$c : 0.6x^3 - y^3 + x^2 - 3x = 0 \quad (34)$$

je několik jejích oskujacích kuželoseček vykresleno na obrázku 7.



Obrázek 7: Oskulační kuželosečky podél kubické křivky c .

3.4 Polynomy

Podkladem pro tuto kapitolu jsou články [3] a [6].

Definice 15 Funkci $g(x), x \in I$ ve tvaru

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n, \dots, a_0 \in R, n \in N \quad (35)$$

nazveme **polynom stupně n** .

Určeme řád dotyku obecně nejvýše možného pro polynom stupně n . Počet parametrů r , jimiž je polynom stupně n určen, odpovídá počtu koeficientů a_n, \dots, a_0 , tj. $r = n + 1$. Řád dotyku ONM q pro polynom stupně n je tedy roven přímo stupni daného polynomu.

Definice 16 *Nechť křivka c je grafem hladké funkce jedné reálné proměnné $y = f(x)$, $x \in I$, $f \in C^n(I)$ a křivka g je grafem polynomu $y = g(x)$ stupně n . Potom polynom g , pro který platí*

$$g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \dots, n \quad (36)$$

nazveme **oskulačním polynomem** křivky c v bodě $X_0[x_0, f(x_0)]$.

Definice 17 *Mějme funkci $y = f(x)$, $x, x_0 \in I$, $f \in C^n(I)$. Pak definujeme **Taylorův polynom** stupně n se středem v x_0 jako polynom*

$$T_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (37)$$

kde $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

Věta 10 *Oskulační polynom g stupně n křivky c v bodě X_0 je Taylorův polynom stupně n se středem v x_0 .*

Myšlenka důkazu: Budeme hledat koeficienty a_n, \dots, a_0 takové, aby polynom g byl oskulačním polynomem křivky c v x_0 , tj. aby platila podmínka 36. Z této podmínky získáme lineární soustavu $n + 1$ rovnic pro $n + 1$ neznámých koeficientů a_n, \dots, a_0

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0^2 & x_0 & 1 & f(x_0) \\ nx_0^{n-1} & (n-1)x_0^{n-2} & \cdots & 2x_0 & 1 & 0 & f'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n!x_0 & (n-1)! & 0 & 0 & 0 & 0 & f^{(n-1)}(x_0) \\ n! & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f^{(n)}(x_0) \end{array} \right) \quad (38)$$

Tato soustava má právě jedno řešení. Po dosazení koeficientů a_n, \dots, a_0 , získaných řešením této soustavy, do předpisu 35 pro polynom $g(x)$ a následných úpravách dostaneme předpis Taylorova polynomu stupně n se

středem v x_0 .

Pro úplnost dodejme, že Taylorův polynom $T_{x_0}(x)$ stupně n hyperoskuluje křivku c v bodě x_0 pokud platí

$$g^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+1)}(x_0). \quad (39)$$

Jelikož $n + 1$ derivace polynomu stupně n je identicky rovna nule, dojde k hyperoskulaci v bodech x_0 funkce f , pro které platí $f^{(n+1)}(x_0) = 0$.

Příklad 5 *Nechť $f(x) = e^x, x \in (-2, 2), x_0 = 0$. Spočtěme a vykresleme Taylorovy polynomy stupně $n = 0, \dots, 5$ funkce f v daném bodě x_0 na daném intervalu.*

Řešení: (Zpracováno v [zadavani.m](#))

Nejprve vyčíslíme derivace dané funkce f

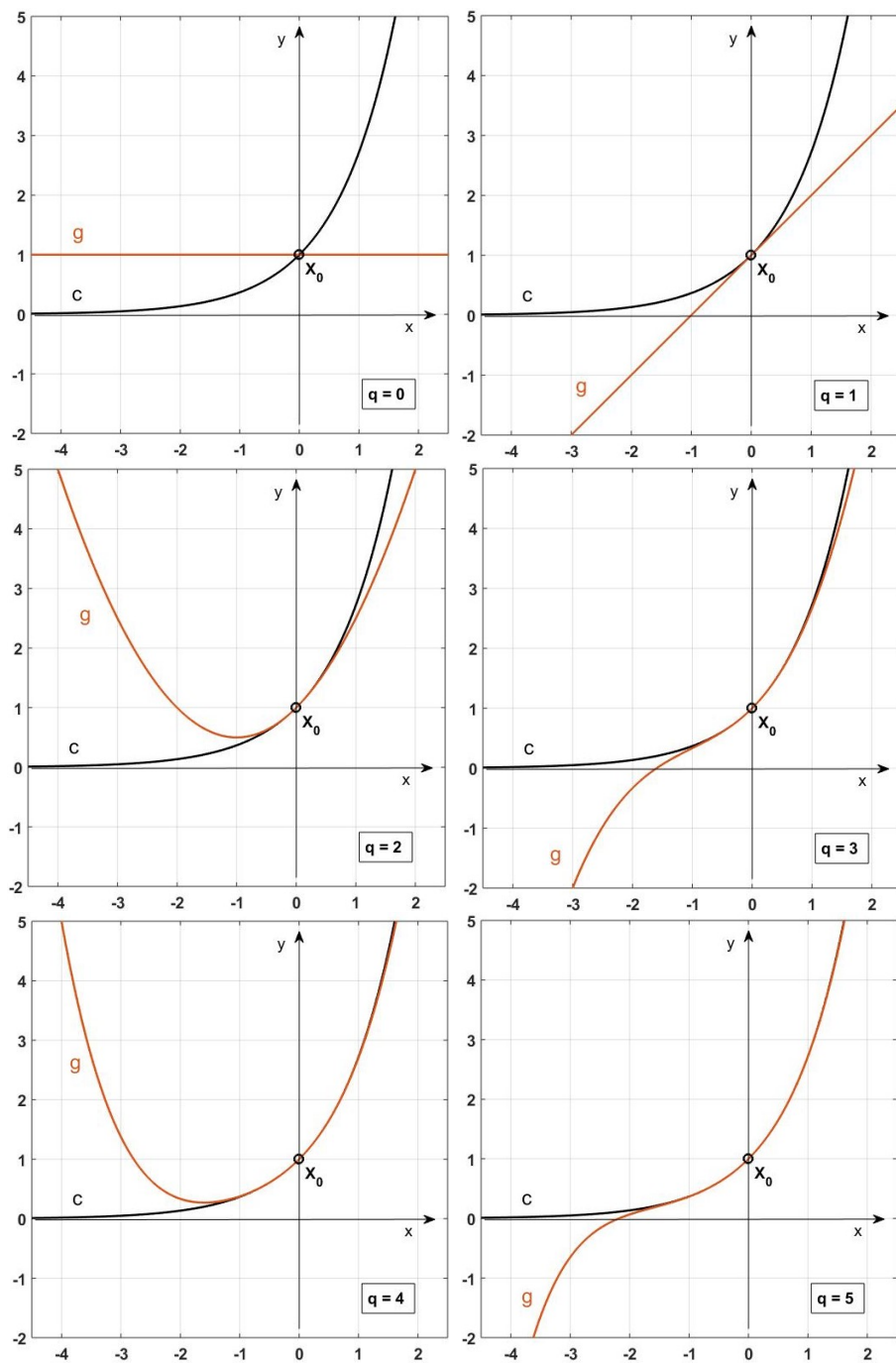
$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= e^x \Rightarrow f'(0) = 1 \\ &\vdots \\ f^{(v)}(x) &= e^x \Rightarrow f^{(v)}(0) = 1. \end{aligned}$$

Dosaďme do předpisu 37 Taylorova polynomu stupně n . Pro

$$\begin{aligned} n = 0 : & \quad g(x) = 1 \\ n = 1 : & \quad g(x) = 1 + x \\ n = 2 : & \quad g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\ n = 3 : & \quad g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\ n = 4 : & \quad g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \\ n = 5 : & \quad g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \end{aligned}$$

Grafy funkce e^x a jejích Taylorových polynomů stupně $n = 0, 1, \dots, 5$ jsou vykresleny na obrázku 8.

Pomocí Taylorova polynomu jsme danou funkci nahradili lineární kombinací mocnin funkce x . Podívejme se na případ, kdy je daná funkce $f(x)$ periodická. K aproximaci takové funkce můžeme použít Taylorův polynom,



Obrázek 8: Taylorovy polynomy stupně $n = 0, \dots, 5$ funkce e^x v bodě $x_0 = 0$

který nám poskytne dobrou aproximaci funkce na okolí bodu. Pokud však požadujeme, aby oskulační funkce $g(x)$ zachovala periodicitu dané funkce $f(x)$, musí být $g(x)$ lineární kombinací periodických funkcí. Nyní si definujeme polynom, jehož bázové funkce jsou goniometrické funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$.

Definice 18 Funkci $g(x), x \in I$ ve tvaru

$$g(x) = c + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad c, a_k, b_k \in \mathbb{R}, a_n \cdot b_n \neq 0, x \in I \quad (40)$$

nazveme **trigonometrický polynom stupně n** .

Trigonometrický polynom stupně n má vždy $2n + 1$ koeficientů a tedy řád dotyku ONM $q = 2n$.

Definice 19 Necht' $f(x)$ je hladká 2π periodická funkce a I je interval délky 2π . Trigonometrický polynom g_{x_0} stupně n je **oskulační trigonometrický polynom** funkce $f(x)$ v bodě x_0 , jestliže se jeho funkční hodnoty a hodnoty jeho prvních $2n$ derivací v bodě x_0 shodují s příslušnými hodnotami funkce $f(x)$.

Poznámka: Oskulační trigonometrický polynom g_{x_0} nazveme hyperoskulační, pokud platí:

$$f^{(2n+1)}(x_0) = g^{(2n+1)}(x_0)$$

Koeficienty oskulačního trigonometrického polynomu funkce $f(x)$ v bodě x_0 spočítáme opět na základě podmínek 36, kde $k = 0, \dots, 2n$. Budeme tedy řešit nehomogenní soustavu $2n + 1$ lineárních rovnic pro $2n + 1$ neznámých parametrů c, a_m, b_m , kde $m = 0, \dots, n$, tj:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (41)$$

kde \mathbf{A} je matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(x_0) & \sin(x_0) & \cdots & \cos(nx_0) & \sin(nx_0) \\ 0 & -\sin(x_0) & \cos(x_0) & \cdots & -n \sin(nx_0) & n \cos(nx_0) \\ 0 & -\cos(x_0) & -\sin(x_0) & \cdots & -n^2 \cos(nx_0) & -n^2 \sin(nx_0) \\ 0 & \sin(x_0) & -\cos(x_0) & \cdots & n^3 \sin(nx_0) & -n^3 \cos(nx_0) \\ 0 & \cos(x_0) & \sin(x_0) & \cdots & n^4 \cos(nx_0) & n^4 \sin(nx_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^n \cos(x_0) & (-1)^n \sin(x_0) & \cdots & (-1)^n n^{2n} \cos(nx_0) & (-1)^n n^{2n} \sin(nx_0) \end{pmatrix},$$

\mathbf{x} je vektor hledaných koeficientů:

$$(c, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)^T$$

a \mathbf{b} je vektor derivací funkce f :

$$(f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(2m-1)}(x_0), f^{(2m)}(x_0))^T.$$

Příklad 6 Vypočtěme osculační trigonometrický polynom $g(x)$ stupně $n = 1$ křivky c , která je grafem funkce $f(x) = \sin(4x) + \cos(3x)$, $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$, v bodě $x_0 = 0$ a porovnejme jeho graf s grafem Taylorova polynomu $T_0(x)$ křivky c , který má shodný řád dotyku (tj. $q = 2$).

Řešení: (Zpracováno v [zadavani.m](#))

Vypočtěme derivace funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(4x) + \cos(3x) &\Rightarrow f(0) &= 1 \\ f'(x) &= 4 \cos(4x) - 3 \sin(3x) &\Rightarrow f'(0) &= 4 \\ f''(x) &= -16 \sin(4x) - 9 \cos(3x) &\Rightarrow f''(0) &= -9 \end{aligned}$$

Dosaďme do soustavy 41

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -9 \end{array} \right)$$

Odtud

$$\begin{aligned} b_1 &= 4 \\ a_1 &= 9 \\ c &= 1 - 9 = -8 \end{aligned}$$

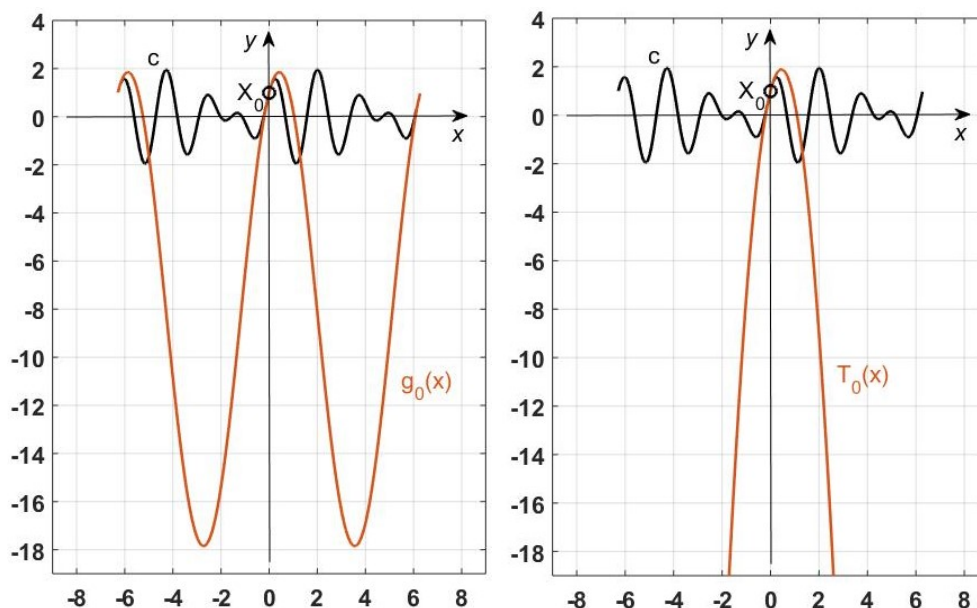
Výsledný osculační trigonometrický polynom má předpis

$$g_0(x) = -8 + 9 \cos(x) + 4 \sin(x) \quad (42)$$

Příslušný Taylorův polynom je dán předpisem

$$T_0(x) = 1 + 4x - \frac{9x^2}{2} \quad (43)$$

Graf funkce f a grafy osculačních polynomů 42 a 43 jsou vykresleny na obrázku 9.



Obrázek 9: Oskulační trigonometrický polynom 1. stupně (vlevo) a Taylorův polynom 2. stupně (vpravo) křivky $c : f(x) = \sin(4x) + \cos(3x)$ v bodě $x_0 = 0$.

3.5 Lineární lomená funkce

Podkladem pro tuto kapitolu jsou články [3], [6] a [5].

Definice 20 Funkce $y = g(x)$ taková, že

$$g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0 \quad (44)$$

se nazývá **lineární lomená funkce** (nebo též *Möbiova transformace*).

Křivka g , která je grafem lineární lomené funkce, je hyperbola s vertikální a horizontální asymptotou. Lze ji tedy zapsat pomocí obecné rovnice kuželoseček, což provedeme, abychom určili její ONM řád dotyku.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{ax + b}{cx + d} \\
y(cx + d) &= (ax + b) \\
cxy + dy - ax - b &= 0
\end{aligned} \tag{45}$$

Výpočet řádu dotyku ONM provedeme dosazením do vzorce 13. Hyperboly jsou křivky 2. stupně (tj. $d = 2$). Koeficienty před kvadratickými členy x^2 a y^2 jsou ve výrazu 45 rovny nule (tj. $\nu = 2$). Dosadíme

$$r = n(d) - \nu = \frac{2(2 + 3)}{2} - 2 = 5 - 2 = 3.$$

Řád dotyku ONM pro hyperboly s vertikální a horizontální asymptotou je $q_{ONM} = r - 1 = 2$ (tříbodový dotyk).

Definice 21 *Mějme křivku c , která je grafem hladké funkce $y = f(x)$, $x \in I$, jejíž alespoň první dvě derivace nejsou identicky nulové. Křivka g , která je grafem lineární lomené funkce $y = g(x)$, se nazývá **oskulační hyperbola** (nebo též oskulační Möbiova transformace) křivky c v bodě x_0 , pokud mají obě křivky v daném bodě dotyk nejméně druhého řádu, tj. pokud platí*

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, 2 \tag{46}$$

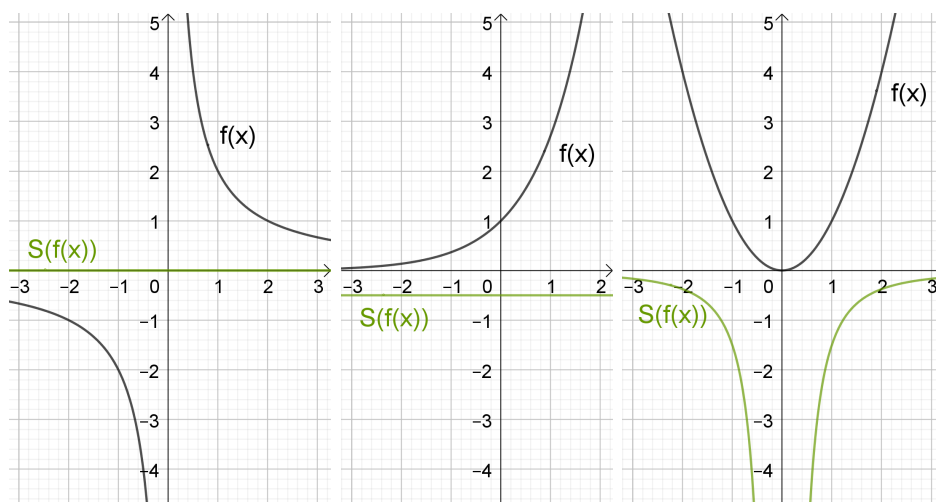
Pojmem Möbiova transformace se označuje lineární lomená funkce v oblasti komplexní analýzy, kde se jedná o poměrně důležitou funkci. Je zde ovšem funkcí komplexní proměnné z a je definována pro všechny body Gausovy roviny včetně $z \in \{\frac{-d}{c}, \infty\}$, což pro lineární lomenou funkci reálné proměnné x obecně neplatí. Z oboru komplexní analýzy si nyní definujeme další pojem, se kterým Möbiova transformace úzce souvisí, a lze ho aplikovat též na reálné funkce.

Definice 22 *Nechť $y = f(x)$, $x \in I$ je hladká funkce a $f'(x) \neq 0$. Výraz*

$$S(f) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \frac{f''(x)}{f'(x)} \tag{47}$$

*nazveme **Schwarzova derivace** funkce f .*

Souvislost Schwarzovy derivace s lineární lomenou funkcí g je následující: Lineární lomená funkce g je jediná funkce, pro kterou je $S(g(x)) = 0$ pro všechna $x \in I$ (za předpokladu, že $ad - bc \neq 0$). V důsledku toho platí, že pokud $S(f) = S(g)$, potom f nutně musí být lineární lomená funkce. Tuto vlastnost využijeme při hledání extatických bodů funkce f . Předpokládejme, že f není lineární lomená funkce, tj. $S(f)$ není konstantně rovna nule. Ovšem může nastat situace, že pro některé body x_0 funkce f bude rovnost $S(f(x_0)) = 0$ splněna, a právě tyto body jsou hledané extatické body.



Obrázek 10: Schwarzova derivace funkcí $f(x)$.

Poznámka: Předpoklad $ad - bc \neq 0$ je pro lineární lomenou funkci $g(x)$ ekvivalentní s výrazem $g'(x) \neq 0$, neboť

$$g'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$

V případě, že $g'(x) = 0$, není $S(g(x))$ definována pro žádné $x \in I$. Na obrázku 10 je vykreslena Schwarzova derivace lineární lomené funkce $f(x) = \frac{2}{x}$ (vlevo), funkce $f(x) = e^x$ (uprostřed), funkce $f(x) = x^2$ (vpravo).

Nyní určíme vzorce pro parametry a, b, c, d oskulační hyperboly. Nejprve zderivujeme výraz 45 dvakrát podle proměnné x .

$$\begin{aligned} cxy + dy - ax - b &= 0 \\ c(y + xy') + dy' - a &= 0 \\ c(2y' + xy'') + dy'' &= 0 \end{aligned}$$

Máme homogenní soustavu tří lineárních rovnic pro čtyři neznámé parametry. Obdobně jako u oskulačních kuželoseček získáme řešení závislé na jednom parametru k , přičemž pro libovolnou volbu $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ určují získané parametry a, \dots, d oskulační hyperbolu jednoznačně (viz myšlenka důkazu věty 9). I zde můžeme rovnou zvolit jeden z parametrů a, \dots, d a dále řešit nehomogenní soustavu tří rovnic pro tři neznámé parametry, která má jediné řešení. Zvolme $d = 1$.

$$\begin{aligned} cxy - ax - b &= -y \\ c(y + xy') - a &= -y' \\ c(2y' + xy'') &= -y'' \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} c &= \frac{-y''}{2y' + xy''} \\ a &= \frac{y'(2y' - y'')}{2y' + xy''} \\ b &= y - xy' + \frac{x^2 y' y''}{2y' + xy''} \end{aligned}$$

Poznámka: Volbou $\bar{d} = k$ získáme koeficienty $\bar{a} = ka, \bar{b} = kb$ a $\bar{c} = kc$.

Příklad 7 *Nechť křivka c je grafem funkce*

$$f(x) = \sqrt[3]{0.6x^3 + x^2 - 3x}, \quad x \in (-5, 5).$$

Pro tuto křivku určíme všechny extatické body X_0 a vykresleme příslušné hyperoskulační hyperboly. Dále určíme body X_0 , ve kterých Schwarzova derivace funkce f není definována a prověříme, jak se změní oskulační hyperboly, když se limitně přiblížíme k těmto bodům.

Řešení: (zpracováno v [osk.LLF.ggb](#))

Pro zadanou křivku si vykresleme průběh Schwarzovy derivace a odvodíme body, pro které je $S(f) = 0$ nebo $S(f)$ není definována (viz obrázek 11).

Extatické body:

$$H_1 \doteq (-2.87, 1.39)$$

$$H_2 \doteq (-0.68, 1.32)$$

$$H_3 \doteq (0.28, -0.91)$$

$$H_4 \doteq (1.35, -0.91)$$

Body v nichž $S(f)$ není definována:

$$N_1 \doteq (-3.22, 0)$$

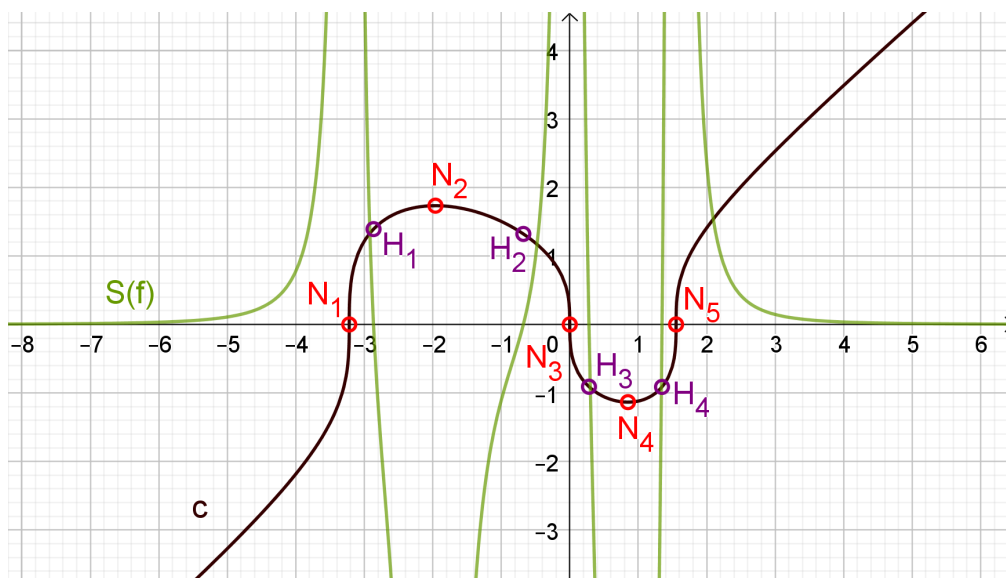
$$N_2 \doteq (-1.96, 1.73)$$

$$N_3 = (0, 0)$$

$$N_4 \doteq (0.85, -1.13)$$

$$N_5 \doteq (1.55, 0)$$

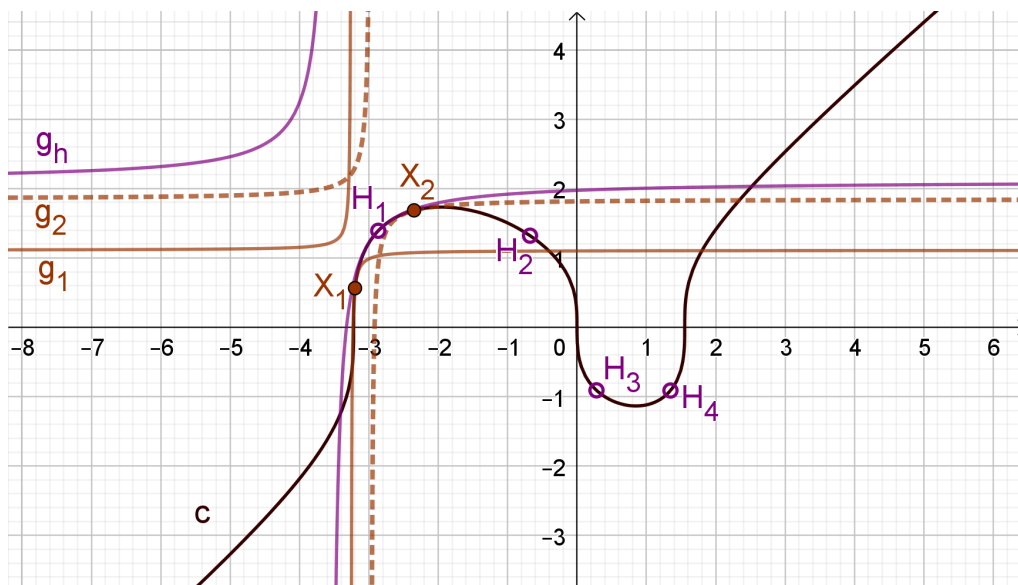
(Přesnost výpočtů a vykreslování v programu je nastavena na tři desetinná místa)



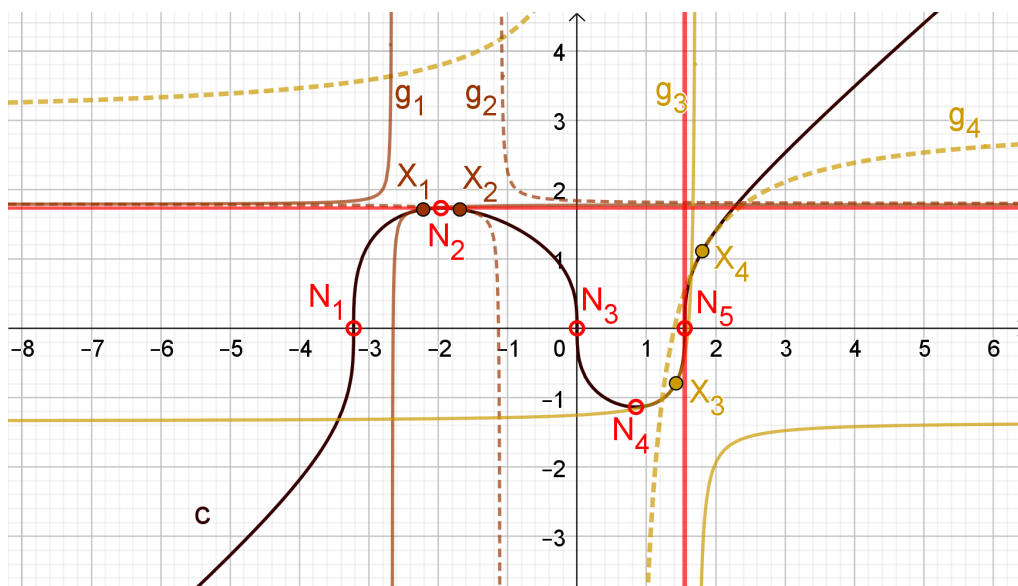
Obrázek 11: Schwarzova derivace $S(f)$ a body křivky c , pro které $S(f) = 0$ (body $H_{1..4}$) nebo $S(f)$ není definována (body $N_{1..5}$).

V extatických bodech vykresleme hyperoskulační hyperboly a porovnejme je s oskulačními hyperbolami v neextatických bodech (viz obrázek 12). Na okolí extatického bodu má právě hyperoskulační hyperbola mezi všemi ostatními oskulačními hyperbolami nejdelší hlavní poloosu.

Pokusme se vykreslit oskulační hyperboly v bodech v nichž není definována Schwarzova derivace (viz obrázek 13). V bodech N_2 a N_4 je



Obrázek 12: Hyperoskulační hyperbola v bodě H_1 a oskulační hyperboly v bodech X_1 a X_2 .



Obrázek 13: Tečny v bodech N_2 a N_5 a oskulační hyperboly v bodech $X_{1...4}$.

$f'(x_0) = 0$ a oskulační hyperboly zdegenerují na dvojici přímk rovnběžných s osami x a y , přičemž přímka rovnoběžná s osou x je tečna křivky c v daném bodě. Při přechodu přes tyto body N_i změní větve oskulačních hyperbol kvadranty (viz oskulační hyperboly v bodech X_1 a X_2 na obrázku 13).

V bodech N_1, N_3 a N_5 je $f'(x_0) \approx \infty$ a z pohledu funkcí zde žádná oskulační hyperbola není definována. Ovšem z chování oskulačních hyperbol jakožto křivek, když $X \rightarrow N_i$, lze usoudit, že v těchto bodech hyperboly opět zdegenerují na dvojici přímk rovnběžných s osami x a y , přičemž tentokrát bude tečnou křivky c přímka rovnoběžná s osou y . Při přechodu přes tyto body N_i se dotykový bod přemístí na druhou větev oskulační hyperboly (viz oskulační hyperboly v bodech X_3 a X_4 na obrázku 13).

3.6 Šroubovice

Podkladem pro tuto kapitolu je článek [4].

Nechť c_p je prostorová (nerovinná) křivka.

Dosud jsme volili pouze rovinné oskulační křivky, které však mají vzhledem ke své konstantně nulové druhé křivosti omezenou možnost aproximace křivky c_p . Toto omezení vychází z důsledku 1 věty 1, kde je jednou z podmínek dotyku třetího řádu rovnost druhých křivostí obou křivek. Je-li jedna z křivek rovinná (její druhá křivost je rovna nule), potom je pro splnění podmínky dotyku třetího řádu nutné, aby také druhá křivka byla (alespoň na okolí bodu X_0) rovinná. Z toho vyplývá, že rovinná oskulační křivka g může aproximovat křivku c_p nejvýše do druhého řádu. V důsledku toho například oskulační kružnice nemůže v žádném bodě křivky c_p hyperoskulovat.

Nechť oskulační křivka g je cylindrická šroubovice, jejíž průmět do roviny kolmé k ose šroubovice je kružnice, popsaná vektorovou funkcí

$$\mathbf{g}(t) = a \cos(t)\mathbf{i} + a \sin(t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \quad t \in R \quad (48)$$

kde $a > 0$, $b \in R$ a vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou navzájem kolmé jednotkové, přičemž vektor \mathbf{k} je směrový vektor osy šroubovice.

Takto zadaná šroubovice má konstantní druhou křivost (obecně různou od nuly pro prostorovou křivku), díky čemuž se dokáže lépe než kružnice přimknout k zadané křivce c_p . Ovšem ONM řád dotyku má tato šroubovice stejný jako kružnice, tj. $q = 2$, neboť má (stejně jako kružnice) konstantní

první křivost a tedy nulovou derivaci první křivosti. Právě rovnost derivace první křivosti dvou křivek je další nutnou podmínkou pro dotyk třetího řádu (viz důsledku 1 věty 1). Šroubovice může mít s křivkou c_p v bodě X_0 dotyk třetího řádu jen v případě, že je derivace první křivosti křivky c_p v bodě X_0 rovna nule. Možnost dotyku třetího řádu tedy závisí už pouze na vlastnostech křivky c_p v daném bodě, proto při dotyku třetího řádu šroubovice hyperoskuluje křivku c_p v bodě X_0 . V případě, že je daná křivka c rovinná, zdegeneruje oskulační šroubovice na oskulační kružnici.

Nemáme k dispozici žádnou obdobu věty 2, která by poskytla návod na určení parametrů oskulační šroubovice. Vycházejme tedy z podmínek dotyku druhého řádu (rovnost jednotkových tečných vektorů, jednotkových vektorů hlavních normál a prvních křivosti) a požadavku rovností druhých křivostí obou křivek v daném bodě. Určeme tyto čtyři parametry pro šroubovici.

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{g}'}{\|\mathbf{g}'\|} = \frac{-a \sin(t)\mathbf{i} + a \cos(t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t) + b^2}} = \frac{-a \sin(t)\mathbf{i} + a \cos(t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \|\mathbf{g}'\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \frac{d\mathbf{t}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{-a \cos(t)\mathbf{i} - a \sin(t)\mathbf{j}}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$${}^1k = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| = \sqrt{\frac{a^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (50)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{{}^1k} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{a^2 + b^2}{a} \frac{-a \cos(t)\mathbf{i} - a \sin(t)\mathbf{j}}{a^2 + b^2} = -\cos(t)\mathbf{i} - \sin(t)\mathbf{j} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left[\frac{-a \sin(t)\mathbf{i} + a \cos(t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \times [-\cos(t)\mathbf{i} - \sin(t)\mathbf{j}] \\ &= \frac{b \sin(t)\mathbf{i} - b \cos(t)\mathbf{j} + a\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \frac{d\mathbf{n}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\sin(t)\mathbf{i} - \cos(t)\mathbf{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ {}^2k &= \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{b} = \frac{[\sin(t)\mathbf{i} - \cos(t)\mathbf{j}] \cdot [b \sin(t)\mathbf{i} - b \cos(t)\mathbf{j} + a\mathbf{k}]}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{b \sin^2(t) + b \cos^2(t)}{a^2 + b^2} = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (52) \end{aligned}$$

Umocněním a sečtením výrazů pro 1k a 2k získáme jednu rovnici provazující vztahy obou těchto parametrů s poloměrem a a výškou závitů b oskulační šroubovice

$$\begin{aligned}({}^1k)^2 + ({}^2k)^2 &= \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \\ \frac{1}{({}^1k)^2 + ({}^2k)^2} &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

vzorec pro výpočet parametru a (popř. b) získáme z této rovnice vynásobíme-li ji parametrem 1k (popř. 2k)

$$\begin{aligned}\frac{{}^1k}{({}^1k)^2 + ({}^2k)^2} &= (a^2 + b^2) \frac{a}{a^2 + b^2} = a \\ \frac{{}^2k}{({}^1k)^2 + ({}^2k)^2} &= (a^2 + b^2) \frac{b}{a^2 + b^2} = b\end{aligned}\tag{53}$$

Dále určíme vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Zvolme $t = 0$ a dosadíme do vztahů pro \mathbf{t}, \mathbf{n} a \mathbf{b}

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \frac{a\mathbf{j} + b\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \mathbf{n} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{b} &= \frac{-b\mathbf{j} + a\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}\tag{54}$$

odtud máme

$$\mathbf{i} = -\mathbf{n}\tag{55}$$

označme $\mathbf{v} := \mathbf{j}$ jednotkový vektor, kterým skalárně vynásobíme vztahy 54, čímž získáme soustavu tří rovnic pro tři neznámé souřadnice vektoru \mathbf{v}

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{{}^1k}{\sqrt{({}^1k)^2 + ({}^2k)^2}} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} &= \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-{}^2k}{\sqrt{({}^1k)^2 + ({}^2k)^2}}\end{aligned}\tag{56}$$

Jelikož jsou vektory \mathbf{t} , \mathbf{n} a \mathbf{b} lineárně nezávislé, je vektor \mathbf{v} určen jednoznačně. Nakonec určíme vektor \mathbf{k} pomocí vektorového součinu vektorů \mathbf{i} a \mathbf{j}

$$\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{n} \times \mathbf{v} \quad (57)$$

Vektorovou rovnici oskulační šroubovice máme nyní ve tvaru

$$\mathbf{g}(t) = a \cos(t)(-\mathbf{n}) + a \sin(t)\mathbf{v} + bt(-\mathbf{n} \times \mathbf{v}), \quad t \in R \quad (58)$$

Zbývá jen oskulační šroubovici správně umístit do prostoru tak, aby procházela bodem X_0 , tj:

$$\mathbf{g}(t) = X_0 + a \cos(t)(-\mathbf{n}) + a \sin(t)\mathbf{v} + bt(-\mathbf{n} \times \mathbf{v}), \quad t \in R \quad (59)$$

Příklad 8 *Nechť je křivka c zobecněnou šroubovicí, jejíž osa je totožná s osou z soustavy souřadnic a jejíž průmět do roviny xy je elipsa*

$$c : \mathbf{p}(t) = (6 \cos(t), 4 \sin(t), 3t), \quad t \in I \quad (60)$$

V bodě $X_0 = \mathbf{p}(0) = [6, 0, 0]$ určíme parametry oskulační šroubovice křivky c a vykresleme ji.

Řešení: (Zpracováno v [osk_sroubovice.m](#))

Nejprve spočteme jednotkový vektor tečny a hlavní normály, a první a druhou křivost křivky c

$$\mathbf{t}_c(0) = \frac{\mathbf{p}'(0)}{\|\mathbf{p}'(0)\|} = (0, 0.8, 0.6)$$

$${}^1k_c(0) = \left\| \frac{d\mathbf{t}_c}{ds}(0) \right\| = 0.24$$

$$\mathbf{n}_c(0) = \frac{1}{{}^1k_c} \frac{d\mathbf{t}_c}{ds}(0) = (-1, 0, 0)$$

$$\mathbf{b}_c(0) = \mathbf{t}_c \times \mathbf{n}_c = (0, -0.6, 0.8)$$

$${}^2k_c(0) = \frac{d\mathbf{n}_c}{ds}(0) \cdot \mathbf{b}_c(0) = 0.08$$

Nyní spočtěme poloměr a výšku závitů oskulační šroubovice dosazením do vzorců 53

$$a = \frac{{}^1k}{({}^1k)^2 + ({}^2k)^2} = \frac{0.24}{(0.24)^2 + (0.08)^2} = 3.75$$

$$b = \frac{{}^2k}{({}^1k)^2 + ({}^2k)^2} = \frac{0.08}{(0.24)^2 + (0.08)^2} = 1.25$$

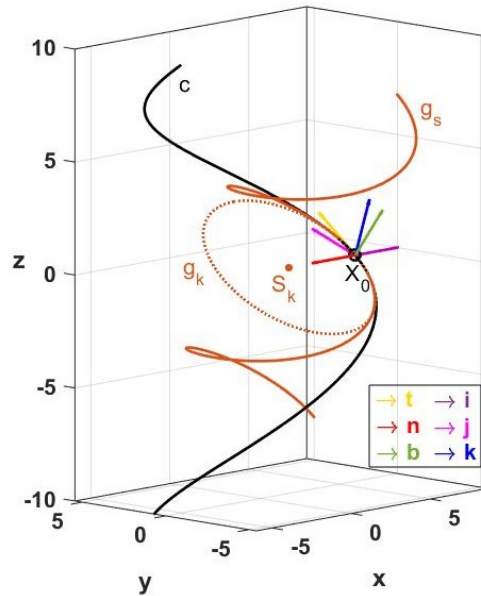
a vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ dosazením do vzorců 55, 57 a vyřešením soustavy 56

$$\mathbf{i} = -\mathbf{n} = (1, 0, 0)$$

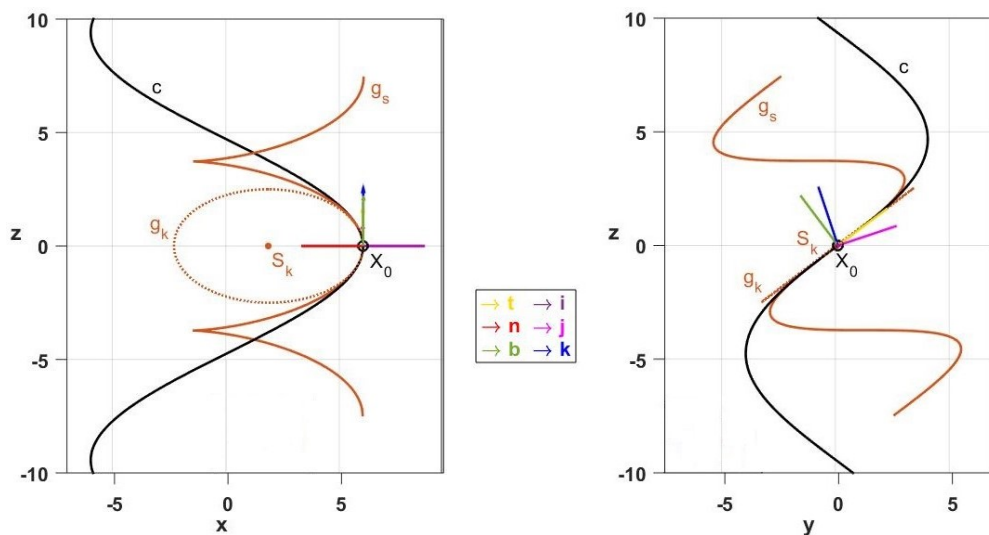
$$\begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.6 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{0.24}{\sqrt{(0.24)^2 + (0.08)^2}} \\ 0 \\ \frac{-0.08}{\sqrt{(0.24)^2 + (0.08)^2}} \end{pmatrix} \quad (61)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{v} \doteq (0.95, 0, -0.32)$$

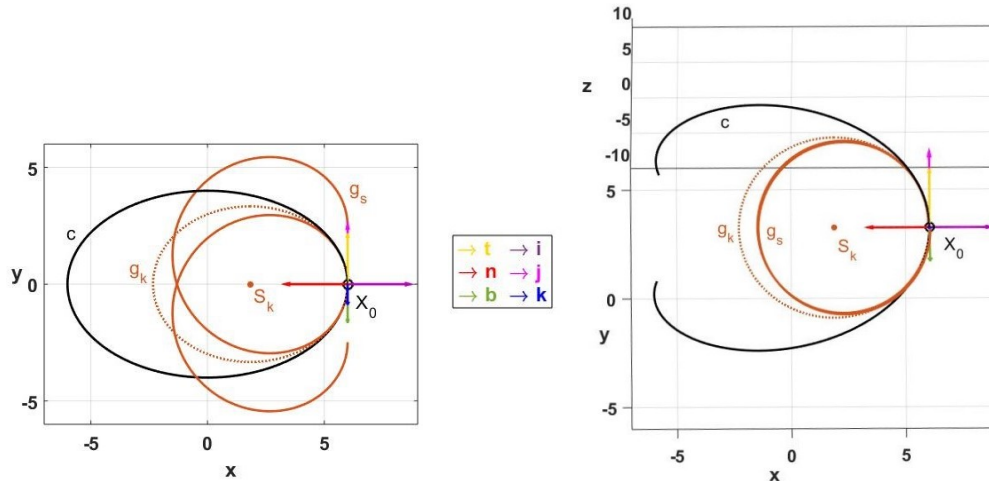
$$\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} \doteq (0, -0.32, 0.95)$$



Obrázek 14: Oskulační šroubovice g_s a oskulační kružnice g_k křivky c (zobecněné šroubovice) v bodě $X_0 = [6, 0, 0]$ v axonometrii.



Obrázek 15: Průměty oskulační šroubovice g_s a oskulační kružnice g_k křivky c (zobecněné šroubovice) v bodě $X_0 = [6, 0, 0]$ do rovin xz (vlevo) a yz (vpravo).



Obrázek 16: Průměty oskulační šroubovice g_s a oskulační kružnice g_k křivky c (zobecněné šroubovice) v bodě $X_0 = [6, 0, 0]$ do roviny xy (vlevo) a do roviny určené vektory i a j (vpravo).

Oskulační šroubovice g křivky c v bodě X_0 s výše vypočtenými parametry je vykreslena na obrázcích 14 (v axonometrii a průmětu do rovin xz a yz) a 15 (v průmětu do roviny xy a roviny určené vektory \mathbf{i} a \mathbf{j}).

Nakonec této kapitoly uvádím přehledný seznam všech oskulačních křivek zmíněných v této práci s informací o jejich ONM řádu dotyku a využitelnosti pro oskulaci rovinných či prostorových křivek c .

Oskulační křivka	q_{ONM}	Pro křivku c	
		rovinnou	prostorovou
Tečna	1	✓	✓
Kružnice	2	✓	✓
Šroubovice	2	✓	✓
Lineární lomená funkce	2	✓	×
Taylorův polynom st. n	n	✓	×
Trigonometrický polynom st. n	$2n$	✓	×
Kuželosečka	4	✓	×
Kubika	8	✓	×

4 Vlastnosti systémů oskulačních křivek

Podkladem pro tuto kapitolu jsou články [3] a [6].

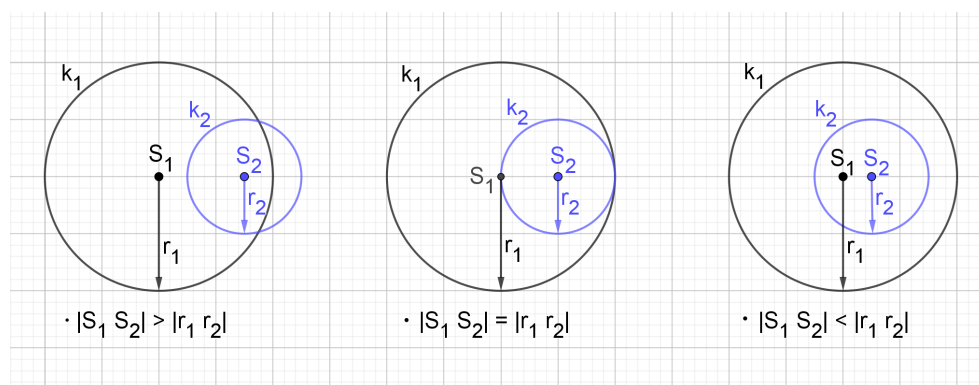
V této kapitole se zaměříme na vzájemné vztahy oskulačních křivek g dané rovinné křivky c . Vezmeme oskulační křivky g stejného typu, tj. máme jednoparametrický systém oskulačních křivek parametrizovaný bodem X_0 křivky c .

4.1 Tait-Kneserova věta

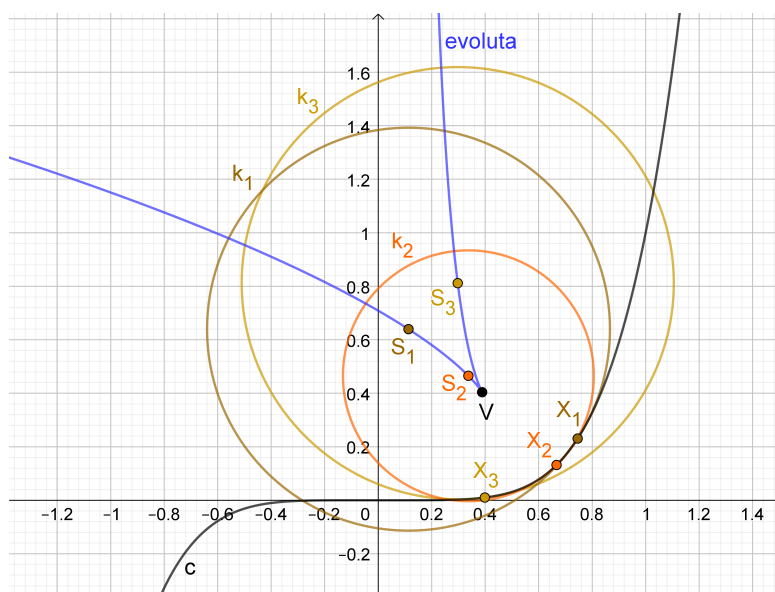
Následující věta (a její varianty pro různé typy oskulačních křivek) se nazývá Tait-Kneserova věta (zkráceně T-K věta). V základní podobě je vyslovena pro systém oskulačních kružnic.

Věta 11 (T-K věta pro kružnice) *Nechť první křivost rovinné křivky c monotónně roste nebo klesá, tj. žádný bod X_0 křivky c není vrchol. Potom se žádné dvě její oskulační kružnice g neprotínají a vždy jedna leží uvnitř druhé.*

Myšlenka důkazu: Zvolme libovolné dva body S_1 a S_2 na evolutě křivky c (tyto body jsou středy dvou oskulačních kružnic křivky c). Pokud křivka c nemá žádné vrcholy, potom vždy platí, že vzdálenost $|S_1S_2|$ je kratší než oblouk evoluty $\widehat{S_1S_2}$, neboli vzdálenost středů obou oskulačních kružnic je menší než rozdíl jejich poloměrů. V takovém případě leží kružnice s menším poloměrem uvnitř kružnice s větším poloměrem (viz obrázek 17).



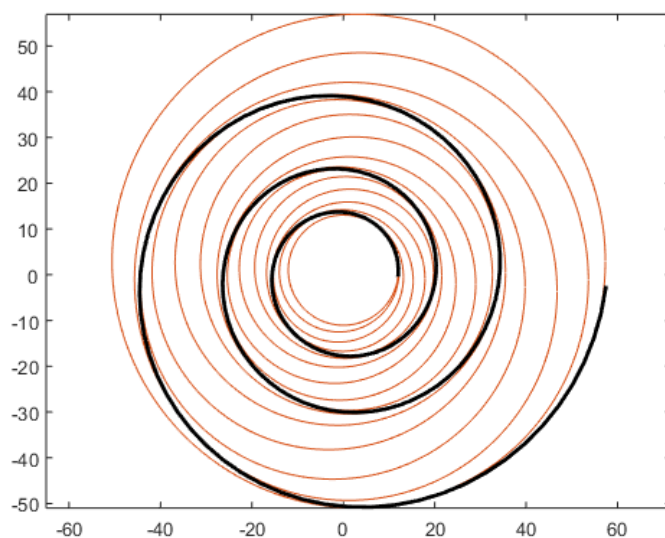
Obrázek 17: Závislost vzájemné polohy kružnic na vzdálenosti jejich středů



Obrázek 18: Vztahy oskulačních kružnic křivky c dle věty 11.

Podívejme se ještě na situaci, kdy má křivka c vrchol, tedy bod lokálního extrému první křivosti. Vrcholu křivky c odpovídá bod vratu V na evolutě. Zvolme nyní body S_1 a S_3 na evolutě tak aby ležely na opačných stranách od bodu vratu V . V takovém případě může nastat situace, kdy vzdálenost $|S_1S_3|$ bude delší než rozdíl oblouků $\widehat{S_1V}$ a $\widehat{S_3V}$ (rozdíl poloměrů obou kružnic) a osculační kružnice se vzájemně protnou (viz obrázek 18).

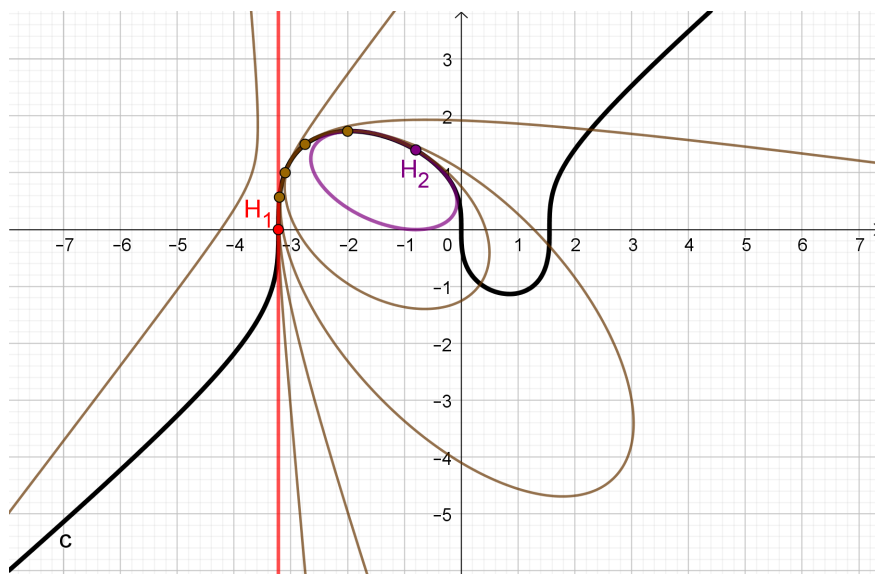
Nechť je křivka c spirála. Na obrázku 19 je vykreslen systém osculačních kružnic podél této křivky c , která splňuje podmínku věty 11 (nemá žádný vrchol).



Obrázek 19: Systém osculačních kružnic spirály c .

Nechť je osculační křivka g kuželosečka. Aby poslední část následující věty dávala smysl, uvažme prostor v němž leží křivka c i všechny její osculační kuželosečky g jako reálnou projektivní rovinu (tj. Eukleidovskou rovinu E^2 rozšířenou o nevlastní body), neboť v tomto prostoru jsou všechny regulární kuželosečky uzavřené křivky.

Věta 12 (T-K věta pro kuželosečky) *Předpokládejme, že žádný bod na křivce c není extatický bod. Potom se žádné dvě osculační kuželosečky g křivky c neprotínají a vždy jedna leží uvnitř druhé.*



Obrázek 20: systém oskulačních kuželoseček křivky c na úseku mezi extatickými body.

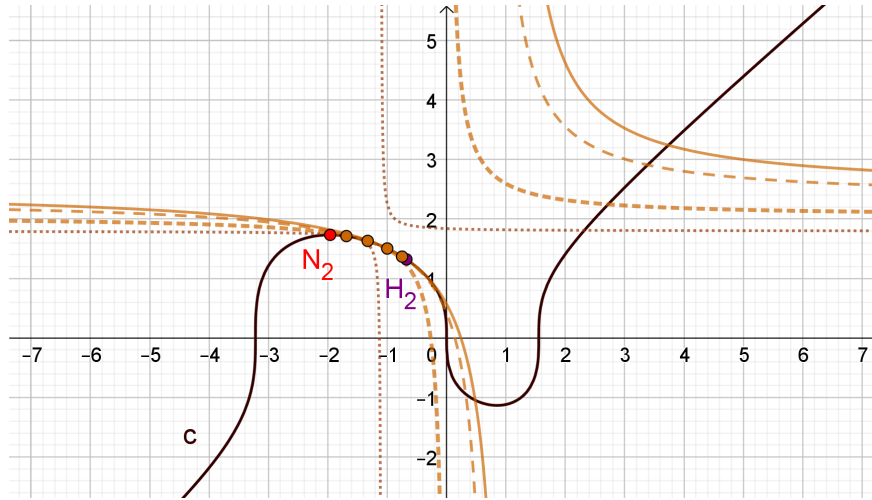
Myšlenka důkazu: Ukážeme, že se dvě nekonečně blízké oskulační kuželosečky g_{x_0} a $g_{x_0+\epsilon}$ neprotínají. Podle Bezoutovy věty je počet průsečíků dvou algebraických křivek roven součinu jejich stupňů. Dvě kuželosečky se tedy obecně protínají ve čtyřech bodech. Oskulační kuželosečky g_{x_0} a $g_{x_0+\epsilon}$ mají jeden čtyřnásobný průsečík (bod dotyku 3. řádu), neboť každá z nich je určena pěti splývajícími body křivky c , a vzhledem k nekonečně malému ϵ spolu čtyři z těchto bodů spolu sdílejí. Jelikož více než čtyři společné body mít nemohou a jejich čtyřbodový dotyk je dotyk lichého řádu, musí nutně jedna ležet uvnitř druhé.

Pomocí této myšlenky důkazu lze dokázat též předchozí T-K větu pro kružnice a následující variantu T-K věty pro lineární lomené funkce, jejichž grafy jsou hyperboly, tedy opět křivky druhého stupně.

Na obrázku 20 je vykresleno několik oskulačních kuželoseček kubiky c na úseku mezi dvěma extatickými body, které jsme určily v příkladu 4.

Věta 13 *Nechť křivka c je grafem funkce $f(x)$, $f \in C^2(I)$, $x \in I$, a Schwarzova derivace funkce f je různá od nuly na I . Potom se žádné dvě oskulační hyperboly křivky c , které jsou grafy oskulačních lineárních lomených funkcí funkce f , vzájemně neprotínají.*

Na obrázku 21 je vykreslen systém oskulačních hyperbol křivky c z příkladu 7 na intervalu I takovém, že pro každé $x \in I$ je $S(f(x)) \neq 0$, tj. křivka c splňuje na intervalu I podmínky věty 13



Obrázek 21: Systém oskulačních hyperbol křivky c na úseku mezi extatickými body.

Podívejme se nyní, zda lze myšlenku důkazu T-K věty pro kuželosečky zobecnit pro algebraické oskulační křivky vyšších řádů. Prostor algebraických křivek stupně d má dimenzi $n(d) = \frac{d(d+3)}{2}$. Oskulační algebraická křivka stupně d prochází $n(d)$ nekonečně blízkými body křivky c . Dvě nekonečně blízké oskulační křivky stupně d v bodě X_0 mají $n(d) - 1$ společných bodů, přičemž obecně dvě algebraické křivky stupně d se mohou protínat nanejvýš v d^2 bodech. Pro platnost myšlenky důkazu musí platit

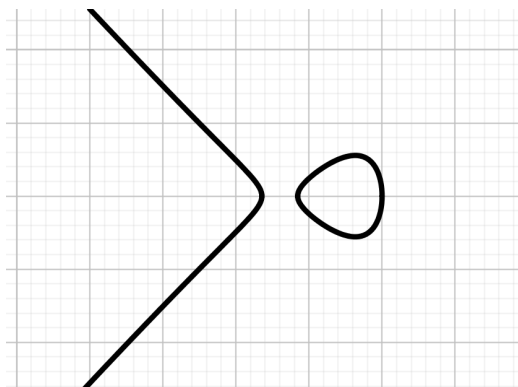
$$d^2 = n(d) - 1$$

Tato podmínka je splněna pro $d \leq 2$, avšak pro vyšší stupně je

$$d^2 > n(d) - 1$$

Pro oskulační algebraické křivky stupně $d \geq 3$ nemůžeme vyloučit možnost, že se protnou ještě v dalších bodech mimo bod dotyku X_0 . Jedinou výjimkou je kubická křivka složená ze dvou komponent (viz obrázek 22). Uzavřenou komponentu nazveme ovál a druhou komponentu jdoucí do nekonečna

nazveme větev kubické křivky. Pro kubické křivky je počet průsečíků $d^2 = 9$. Předpokládejme, že bod dotyku X_0 leží na oválu kubické křivky. Je známo, že dvě uzavřené křivky se protínají v sudém počtu bodů, proto v případě oválů oskulačních kubik můžeme předpokládat, že počet průsečíků bude maximálně 8 (zbývající jeden průsečík bude ležet na větvi kubiky). Jelikož dimenze kubické křivky je $n(d) = 8$, můžeme vyslovit následující větu.



Obrázek 22: Kubická křivka složená ze dvou komponent.

Věta 14 (T-K věta pro kubické křivky) *Nechť c je rovinná křivka a její oskulační křivky g jsou kubiky složené ze dvou komponent. Předpokládejme, že bod dotyku X_0 leží na oválu a že žádný bod křivky c není extatický bod. Potom se žádné dva ovály oskulačních kubických křivek g křivky c vzájemně neprotínají a vždy jeden leží uvnitř druhého.*

Další varianty T-K věty vyslovíme pro Taylorovy polynomy $T_{x_0}(x)$ stupně n .

Věta 15 (T-K věta pro Taylorovy polynomy sudého stupně) *Nechť c je grafem funkce $y = f(x), x \in I, f \in C^{n+1}(I)$. Předpokládejme, že n je sudé a $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ na intervalu I . Potom pro každé $a, b \in I, a < b$ se grafy Taylorových polynomů $T_a(x)$ a $T_b(x)$ neprotínají na celém R .*

Důkaz: Zderivujme Taylorův polynom $T_{x_0}(x)$ podle x_0 .

$$\frac{\partial T}{\partial x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x-x_0)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (57)$$

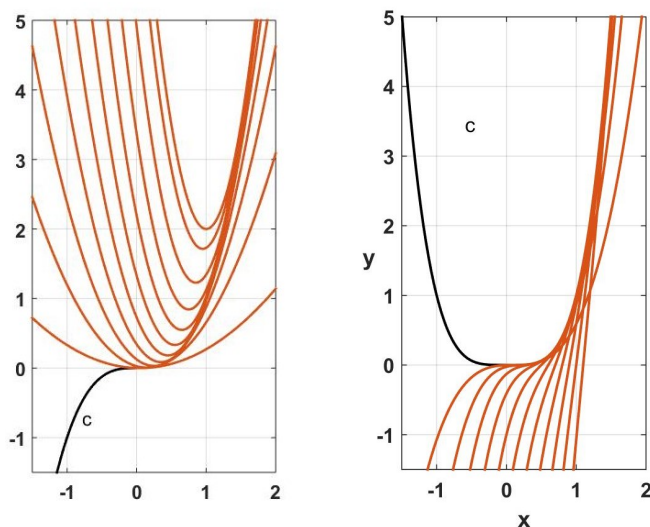
Vzhledem k předpokladům věty je $\frac{\partial T}{\partial x_0}(x) > 0$ (s výjimkou $x = x_0$). $T_{x_0}(x)$ je tedy rostoucí funkce vzhledem k x_0 a proto je $T_a(x) < T_b(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$

Systém Taylorových polynomů stupně $n = 2$ funkce x^3 , která splňuje podmínky věty 15, je vykreslen na obrázku 23 vlevo.

Věta 16 (T-K věta pro Taylorovy polynomy lichého stupně) *Nechť c je grafem funkce $y = f(x), x \in I, f \in C^{n+1}(I)$. Předpokládejme, že n je liché a $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ na intervalu I . Potom pro každé $a, b \in I, a < b$ se grafy Taylorových polynomů $T_a(x)$ a $T_b(x)$ neprotínají na intervalu $\langle b, \infty \rangle$.*

Důkaz provedeme obdobně jako u věty předchozí. Pro liché n ovšem platí $\frac{\partial T}{\partial x_0}(x) > 0$ pouze pro $x > x_0$, tedy nerovnost $T_a(x) < T_b(x)$ platí pro $x \geq b$.

Systém Taylorových polynomů stupně $n = 3$ funkce x^4 , která splňuje podmínky věty 16, je vykreslen na obrázku 23 vpravo.

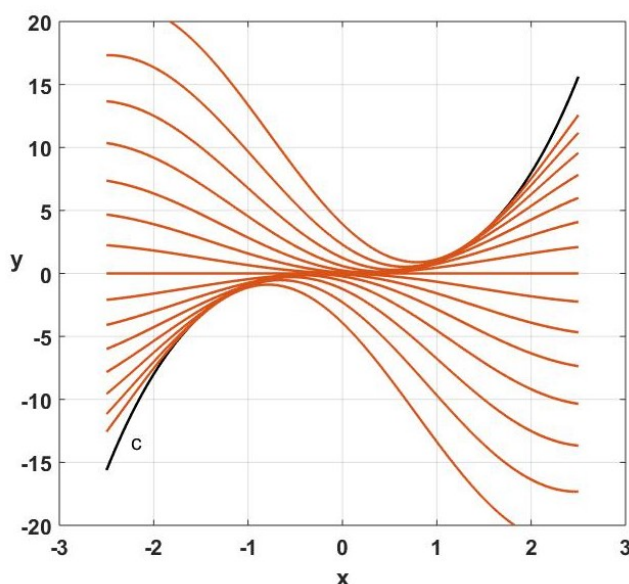


Obrázek 23: Oskulační Taylorovy polynomy: kvadratické pro fci $f(x) = x^3$ (vlevo) a kubické pro fci $f(x) = x^4$ (vpravo).

Dále za oskulační křivky g zvolme grafy oskulačních trigonometrických polynomů stupně n .

Věta 17 (T-K věta pro trigonometrické polynomy) Předpokládejme, že oskulační trigonometrické polynomy $g_{x_0}(x)$ stupně n funkce $f(x)$ nehyperoskulují pro $x_0 \in I$. Potom pro každé $a, b \in I, a \neq b$ se grafy oskulačních trigonometrických polynomů $g_a(x)$ a $g_b(x)$ neprotínají na celém R .

Důkaz lze provést obdobně jako u věty 15. Systém oskulačních trigonometrických polynomů stupně $n = 1$ funkce x^3 na intervalu $x \in (-1.5, 1.5)$ je vykreslen na obrázku 24.



Obrázek 24: Oskulační trigonometrické polynomy 1. stupně funkce $f(x) = x^3$

Pro křivky g , pro které byla výše vyslovena varianta T-K věty, vyslovme nyní důsledek příslušných T-K vět.

Důsledek 2 Nechtě body X_1 a X_2 jsou body křivky c . Pokud se dvě oskulační křivky g (stejného typu) regulární křivky c s body dotyku X_1 a X_2 vzájemně protínají, potom se na intervalu $I = \langle X_1, X_2 \rangle$ nachází extatický bod (příslušný typu oskulační křivky g).

Poznámka: V případě, že se dvě oskulační křivky g křivky c neprotínají, nedokážeme říci, zda se mezi jejich body dotyku nachází extatický bod.

Seznam příložených programů

GeoGebra:

Pokud není u příslušného programu napsáno jinak, potom:

Funkci $f(x)$ je možno změnit jejím přepsáním v algebraickém okně.

Bod dotyku X_0 se volí pomocí posuvníku x_0 .

Interval pro x je možno dle potřeby změnit v nastavení vlastností posuvníku x_0 .

1. [osk_kruznice.ggb](#)

Program vykresluje oskulační kružnice zadané funkce $f(x)$ v bodě X_0 .

Je možno zapnout/vypnout funkci křivosti (funkce $k(x)$) a evolutu (parametrická křivka e)

2. [osk_kuzelosecky.ggb](#)

Program vykresluje oskulační kuželosečky zadané funkce $f(x)$ v bodě X_0 .

3. [osk_kuzelosecky_pro_kubiku.ggb](#) (Příklad 4)

Program vykresluje oskulační kuželosečky kubické křivky c v bodě X_0 . Koeficienty kubické křivky lze měnit pomocí příslušných posuvníků. Bod X_0 je připoutaný ke křivce c a lze ho změnit přímo v nákrešně jeho tažením podél křivky c .

4. [osk_LLF.ggb](#) (Příklad 7)

Program vykresluje oskulační hyperboly (grafy lineárních lomených funkcí) zadané funkce $f(x)$ v bodě X_0 .

Je možno zapnout/vypnout Schwarzovu derivaci (funkce $Sf(x)$).

MATLAB:

1. [zadavani.m](#)

Hlavní skript jehož prostřednictvím se spouští všechny skripty uvedené dále, s výjimkou skriptu [osk_sroubovice.m](#). Způsob úpravy zadání (funkce $f(x)$, interval pro vykreslení, body dotyku X_0 , typ osk. kuželosečky, ...) je přehledně popsán v komentářích přímo v tomto skriptu.

Doprovodné skripty ke skriptu [zadavani.m](#):

(a) [osk_kruznice.m](#)

Vypíše rovnice oskulačních kružnic v zadaných bodech X_0 a vykreslí celou situaci.

(b) [osk_kuzelosecka.m](#)

Vypíše rovnice oskulačních kuželoseček s informací, o jakou kuželosečku se jedná, v zadaných bodech X_0 a vykreslí celou situaci.

- (c) [osk_lomena_fce.m](#)
Vypíše rovnice oskulačních lomených funkcí v zadaných bodech X_0 a vykreslí celou situaci.
- (d) [osk_Taylor.m](#)
Vypíše rovnice Taylorových polynomů zadaného stupně v zadaných bodech X_0 a vykreslí celou situaci.
- (e) [osk_trigon.m](#)
Vypíše rovnice trigonometrických polynomů zadaného stupně v zadaných bodech X_0 a vykreslí celou situaci.
- (f) [evoluta_pro_vse.m](#)
Vykresluje evolutu zadané funkce f .

2. [osk_sroubovice.m](#)

Vykreslí oskulační šroubovice a oskulační kružnice vektorové funkce ve 3D. Je nutné tento skript otevřít a upravit zadání samostatně.

Závěr

V této práci jsem se zabývala oskulačními křivkami. Nejprve jsem uvedla klíčové pojmy a pomocí nich definovala nejdůležitější pojem této práce, tj. oskulační křivku. Následně jsem se věnovala jednotlivým typům oskulačních křivek. Ke každé oskulační křivce jsem uvedla teorii spojenou ze všech zdrojů, které o dané křivce pojednávají, a pro ilustraci vypočetla pro každou z těchto křivek (vyjma tečny) alespoň jeden příklad doplněný obrázky. Také veškerou teorii zpracovanou z článků jsem, pro snazší seznámení čtenáře s novými pojmy, rozšířila o vhodné obrázky. Na konci třetí kapitoly jsem uvedla stručný přehled všech typů oskulačních křivek zmíněných v této práci spolu s jejich dotykem řádu obecně nejvýše možným a možnostmi jejich využití k oskulaci rovinných nebo prostorových křivek. V poslední kapitole jsem se věnovala systémům oskulačních křivek. Pomocí Tait-Kneserovy věty jsem popsala a na obrázcích ilustrovala vzájemné vztahy oskulačních křivek stejného typu podél zadané křivky.

Možným rozšířením této práce je zpracování tématu oskulačních ploch, které mají souvislost s parciální derivací obdobně, jako oskulační křivky souvisejí s obyčejnou derivací.

Součástí této práce jsou soubory zpracované v softwaru MATLAB a GeoGebra.

Reference

- [1] BUDINSKÝ, B.; KEPR, B.: *Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi*. SNTL, 1970.
- [2] FRANKLIN, P.: Osculating Curves and Surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, ročník 28, č. 3, červenec 1926: s. 400 – 416, ISSN 00029947.
- [3] GHYS, É.; TABACHNIKOV, S.; TIMORIN, V.: Osculating curves: around the Tait-Kneser theorem. *The Mathematical Intelligencer*, ročník 35, č. 1, 2013: s. 61–66.
- [4] McHUGH, J.: The Osculating Spiral. *Mathematics Magazine*, ročník 61, č. 2, 1988: s. 106–113, ISSN 0025570X, 19300980.
- [5] OVSIENKO, V.; TABACHNIKOV, S.: What is the Schwarzian derivative. *Notices of the AMS*, ročník 56, č. 1, 2009: s. 34–36.
- [6] TABACHNIKOV, S.; TIMORIN, V.: Variations on the Tait-Kneser theorem. *arXiv preprint math/0602317*, 2006.