

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
VÍCEBODOVÉ OKRAJOVÉ ÚLOHY

Plzeň, 2018

Hana Levá

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2017/2018

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Hana LEVÁ**

Osobní číslo: **A15B0224P**

Studijní program: **B1101 Matematika**

Studijní obor: **Matematika a její aplikace**

Název tématu: **Vícebodové okrajové úlohy**

Zadávací katedra: **Katedra matematiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Nastudovat standardní dvoubodové okrajové úlohy na vlastní čísla a vybrané vícebodové úlohy z doporučené literatury.
2. U vícebodových úloh popsat adjungované úlohy a nalézt příslušná vlastní čísla a vlastní funkce.
3. Zaměřit se na závislosti na parametrech úlohy, případně na řešitelnost nehomogenních úloh.
4. Získané teoretické výsledky graficky ilustrovat.

Rozsah grafických prací: dle potřeby

Rozsah kvalifikační práce: cca 20 stran

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná

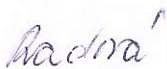
Seznam odborné literatury:

- A. Kufner: Obyčejné diferenciální rovnice. Západočeská univerzita, Plzeň. 1993.
- G. Holubová, P. Nečesal: Nontrivial Fučík spectrum of one non-selfadjoint operator. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 69 (9), 2008, 2930-2941.
- C. P. Gupta: A Dirichlet type multi-point boundary value problem for second order ordinary differential equations, *Nonlinear Analysis* 26, 1996, 925931.
- V. A. Il'in, E. I. Moiseev: Nonlocal boundary value problem of the second kind for a SturmLiouville operator, *Differ. Equ.* 23 (8), 1987, 979987.
- R. Ma: Existence of solutions of nonlinear m-point boundary-value problems, *J. Math. Anal. Appl.* 256 , 2001, 556567.
- J. Locker: Self-adjointness for multi-point differential operators, *Pacific J. Math.* 45, 1973, 561-570.


Vedoucí bakalářské práce: Doc. Ing. Gabriela Holubová, Ph.D.
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: 2. října 2017

Termín odevzdání bakalářské práce: 24. května 2018


Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
děkanka




Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 2. října 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 12. května 2018.

Hana Levá

Poděkování

Chtěla bych velmi poděkovat své vedoucí doc. Ing. Gabriele Holubové, Ph.D. za návrh tématu práce, cenné rady, připomínky, skvělou komunikaci a předně za vstřícnost a trpělivost při konzultacích.

Abstrakt

Tato bakalářská práce je zaměřena na studium vícebodových okrajových úloh. Nejprve ukážeme, jak obecně vypadá vícebodová okrajová úloha. Zaměříme se na konkrétní čtyřbodovou okrajovou úlohu, pro níž najdeme vlastní čísla a příslušné vlastní funkce. Dále se zabýváme hledáním adjungované úlohy k této čtyřbodové okrajové úloze. Na závěr zkoumáme řešitelnost této úlohy s nenulovou pravou stranou.

Klíčová slova: vícebodová okrajová úloha, vlastní čísla, vlastní funkce, adjungovaná úloha, řešitelnost nehomogenní úlohy

Abstract

This bachelor thesis is focused on studying of multipoint boundary value problems. At first, we show how the multipoint boundary value problem looks like in general. We focus on a particular four point boundary value problem for which we find eigenvalues and corresponding eigenfunctions. Next, we deal with looking for an adjoint to this four point boundary value problem. In the end, we study the solvability of this problem with a nonzero right hand side.

Key words: multipoint boundary value problem, eigenvalues, eigenfunctions, adjoint, solvability of nonhomogeneous problem

Obsah

Prohlášení	iii
Poděkování	iv
Abstrakt	v
1 Úvod	1
2 Výpočet vlastních čísel a vlastních funkcí	3
2.1 Obecné řešení diferenciální rovnice (2.1)	3
2.2 Řešení okrajové úlohy	4
2.3 Systém vlastních čísel a vlastních funkcí	6
2.4 Parametry η a ξ	9
3 Adjungovaná úloha	14
3.1 Obecné vyjádření úlohy a jejího adjungovaného tvaru	14
3.1.1 Vícebodový diferenciální operátor	14
3.1.2 Adjungovaný vícebodový diferenciální operátor	15
3.2 Vyjádření adjungované úlohy k úloze (2.1) – (2.3)	16
3.3 Vlastní čísla a vlastní funkce adjungované úlohy	18
4 Řešitelnost nehomogenní rovnice	25
4.1 Příklady	25
4.2 Podmínky řešitelnosti	29
4.2.1 Podmínky řešitelnosti Sturm-Liouvilleovy úlohy	29
4.2.2 Fourierova metoda	30
4.2.3 Formulace podmínek řešitelnosti pro úlohu (4.1), (2.2) a (2.3)	31
5 Závěr	34
Literatura	35

Kapitola 1

Úvod

Studium vícebodových okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu bylo zahájeno autory Il'inem a Moiseevem [1]. Od té doby se touto problematikou zabývalo mnoho dalších autorů, např. Gupta [2], Ma a Castaneda [3] nebo Feng a Webb [4].

Vícebodové okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice mají široké využití v aplikované matematice, fyzice a mechanice. Mnoho problémů z oblasti elastické stability [5] lze takto modelovat. Například problém, kdy máme nosník vetknutý na krajích a podepřený v určitém místě pilířem, můžeme popsat pomocí tříbodové okrajové úlohy pro diferenciální rovnici čtvrtého řádu [6, str. 13].

Typickým příkladem vícebodové okrajové úlohy pro diferenciální rovnici druhého řádu, jimiž se v tomto textu budeme zabývat, je úloha [2]:

$$u''(x) + g(x, u(x), u'(x)) = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.1)$$

$$u'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u'(\xi_i), \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), \quad (1.2)$$

kde $\xi_i \in (0, 1)$ tak, že $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < 1$, koeficienty $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $g = g(x, s, t)$ je obecně nelineární funkce a $f = f(x)$ je funkce pravé strany. Nejjednodušším případem vícebodové okrajové úlohy je úloha tříbodová, jejíž řešitelnost zkoumali například autoři Feng a Webb [4].

V této práci se budeme zabývat konkrétní čtyřbodovou okrajovou úlohou pro diferenciální rovnici druhého řádu ve tvaru:

$$u''(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1.3)$$

s okrajovými podmínkami

$$u'(0) = u'(\xi), \quad (1.4)$$

$$u(1) = u(\eta), \quad (1.5)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in (0, 1)$ a $\eta \in (0, 1)$. Vidíme tedy, že podle (1.2) jsou pouze koeficienty a_2, b_1 nenulové, konkrétně rovny jedné, a $m = 4$. V našem případě funkce $g(x, u(x), u'(x)) = \lambda u(x)$ a je tedy lineární. V rovnici budeme nejprve uvažovat funkci pravé strany $f(x) \equiv 0$, dále pak prozkoumáme i případ, kdy $f(x) \not\equiv 0$. Takovou situaci ukážeme na několika příkladech.

Text této práce je členěn do tří částí. Nejprve se zaměříme na hledání vlastních čísel a vlastních funkcí homogenní úlohy, tj. pro funkci $f(x) \equiv 0$. Dále se budeme zabývat tím, co se děje při limitních přechodech parametrů pro námi zkoumanou úlohu, a toto porovnáme se situací, kdy provedeme limitní přechod parametrů pro vlastní čísla a vlastní funkce úlohy. Ukážeme,

že při limitních přechodech parametrů ξ a η získáme Dirichletovu, Neumannovu i periodickou úlohu. Dostaneme tedy standardní dvoubodové okrajové úlohy.

V další části se zabýváme hledáním adjungované úlohy k úloze (1.3) – (1.5) a jejích vlastních čísel a vlastních funkcí. V poslední části rozebereme řešitelnost nehomogenních rovnic pro různá nastavení koeficientů λ a f . Ukážeme analogii mezi námi zkoumanou úlohou a úlohou Sturm-Liouvilleova typu a dále také, jaký vliv na řešitelnost má vztah vlastních funkcí a vlastních funkcí adjungované úlohy s pravou stranou f .

Kapitola 2

Výpočet vlastních čísel a vlastních funkcí

V této kapitole se budeme zabývat následující úlohou na vlastní čísla:

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (2.1)$$

s okrajovými podmínkami

$$u'(0) = u'(\xi), \quad (2.2)$$

$$u(1) = u(\eta), \quad (2.3)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in (0, 1)$ a $\eta \in (0, 1)$. Vlastním číslem rozumíme takové λ , pro které existuje netriviální řešení zadané úlohy. Takové řešení nazýváme vlastní funkce.

2.1 Obecné řešení diferenciální rovnice (2.1)

Nejprve vyjádříme charakteristickou rovnici příslušnou k rovnici (2.1). Dostáváme tedy

$$p^2 + \lambda = 0.$$

Řešení rozdělíme do tří kroků, kdy postupně zvažujeme $\lambda = 0$, $\lambda < 0$, $\lambda > 0$.

1. Uvažujme $\lambda = 0$. Kořeny charakteristické rovnice v tomto případě jsou

$$p_{1,2} = 0$$

a fundamentální systém diferenciální rovnice (2.1) vypadá takto:

$$F_1 = \{1, x\}.$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (2.1) lze zapsat jako libovolná lineární kombinace funkcí z fundamentálního systému, má tedy tvar

$$u_1(x) = A + Bx, \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

2. Dále uvažujme $\lambda < 0$. Kořeny charakteristické rovnice získáme v tomto případě ve tvaru

$$p_1 = \sqrt{-\lambda}, \quad p_2 = -\sqrt{-\lambda}$$

a fundamentální systém zapíšeme jako

$$F_2 = \left\{ e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x} \right\}.$$

Použitím vzorců pro hyperbolické funkce na F_2 dostaneme jiný fundamentální systém, který můžeme psát takto:

$$\bar{F}_2 = \left\{ \cosh(\sqrt{-\lambda}x), \sinh(\sqrt{-\lambda}x) \right\}.$$

V našem případě je pro další výpočty vhodnější zvolit \bar{F}_2 . Obecné řešení diferenciální rovnice (2.1) má potom tvar

$$u_2(x) = A \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B \sinh(\sqrt{-\lambda}x), \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

3. Následně uvažujeme $\lambda > 0$. Opět nejprve vyjádříme kořeny charakteristické rovnice. V tomto případě jsou

$$p_1 = i\sqrt{\lambda}, \quad p_2 = -i\sqrt{\lambda},$$

kde i je imaginární jednotka a $i^2 = -1$. Jelikož pro naše výpočty potřebujeme vyjádřit reálný fundamentální systém a kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní čísla, využijeme Eulerovu identitu. Námi uvažovaný fundamentální systém pak vypadá následovně:

$$F_3 = \left\{ \cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x) \right\}.$$

Tedy obecné řešení diferenciální rovnice (2.1) zapíšeme ve tvaru

$$u_3(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

2.2 Řešení okrajové úlohy

Uvažujme okrajové podmínky pro diferenciální rovnici (2.1), tedy (2.2) a (2.3). Výpočet budeme znovu provádět ve třech krocích.

1. Nejprve mějme opět $\lambda = 0$. Pracujeme s obecným řešením (2.4), tj. s $u_1(x)$. Pro okrajové podmínky (2.2) a (2.3) dostáváme následující soustavu rovnic:

$$B = B,$$

$$A + B = A + B\eta.$$

Vyřešíme tuto soustavu a dostáváme $B = 0$, $A \in \mathbb{R}$. Tedy netriviální řešení okrajové úlohy má tvar

$$u_0(x) = A, \quad A \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

a $\lambda_0 = 0$ patří do systému vlastních čísel.

2. Dále uvažujme $\lambda < 0$. Pro okrajové podmínky (2.2) a (2.3) dostáváme následující soustavu rovnic:

$$A\sqrt{-\lambda} \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) + B\sqrt{-\lambda} (\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) - 1) = 0, \quad (2.7)$$

$$A (\cosh(\sqrt{-\lambda}\eta) - \cosh(\sqrt{-\lambda})) + B (\sinh(\sqrt{-\lambda}\eta) - \sinh(\sqrt{-\lambda})) = 0. \quad (2.8)$$

Vyjádříme si matici \mathbf{X}_2 soustavy (2.7) – (2.8):

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) & \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) - 1 \\ \cosh(\sqrt{-\lambda}\eta) - \cosh(\sqrt{-\lambda}) & \sinh(\sqrt{-\lambda}\eta) - \sinh(\sqrt{-\lambda}) \end{bmatrix}.$$

Hledáme netriviální řešení této soustavy, tedy $A^2 + B^2 \neq 0$. Proto musí být determinant matice \mathbf{X}_2 roven 0.

$$\det \mathbf{X}_2 = \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \left(\sinh(\sqrt{-\lambda}\eta) - \sinh(\sqrt{-\lambda}) \right) - \left(\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) - 1 \right) \left(\cosh(\sqrt{-\lambda}\eta) - \cosh(\sqrt{-\lambda}) \right) = 0.$$

Pomocí vzorců pro hyperbolické funkce upravíme tento výraz do následujícího tvaru:

$$\det \mathbf{X}_2 = \sinh\left(\frac{\sqrt{-\lambda}\eta - \sqrt{-\lambda}}{2}\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{-\lambda}\xi}{2}\right) \cosh\left(\frac{\sqrt{-\lambda}\eta + \sqrt{-\lambda}}{2} - \frac{\sqrt{-\lambda}\xi}{2}\right) = 0.$$

Tento výraz nikdy nulový není, tedy jediné řešení soustavy (2.7) a (2.8) je $A = 0$ a $B = 0$. Řešení okrajové úlohy je triviální, tj. $u(x) \equiv 0$, a tedy $\lambda < 0$ není vlastním číslem.

3. Následně uvažujme $\lambda > 0$. Pro okrajové podmínky (2.2) a (2.3) po úpravě opět získáme soustavu dvou rovnic

$$-A \sin(\sqrt{\lambda}\xi) + B(\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - 1) = 0, \quad (2.9)$$

$$A(\cos(\sqrt{\lambda}) - \cos(\sqrt{\lambda}\eta)) + B(\sin(\sqrt{\lambda}) - \sin(\sqrt{\lambda}\eta)) = 0. \quad (2.10)$$

Vyjádříme si matici \mathbf{X}_3 soustavy (2.9) – (2.10):

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} -\sin(\sqrt{\lambda}\xi) & \cos(\sqrt{\lambda}\xi) - 1 \\ \cos(\sqrt{\lambda}) - \cos(\sqrt{\lambda}\eta) & \sin(\sqrt{\lambda}) - \sin(\sqrt{\lambda}\eta) \end{bmatrix}.$$

Hledáme netriviální řešení této soustavy, tedy $A^2 + B^2 \neq 0$. Proto musí být determinant matice \mathbf{X}_3 roven 0.

$$\det \mathbf{X}_3 = \sin(\sqrt{\lambda}\xi) \left(\sin(\sqrt{\lambda}\eta) - \sin(\sqrt{\lambda}) \right) - \left(\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - 1 \right) \left(\cos(\sqrt{\lambda}) - \cos(\sqrt{\lambda}\eta) \right) = 0.$$

Pomocí goniometrických vzorců tento výraz upravíme do následujícího tvaru:

$$\det \mathbf{X}_3 = \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\eta - \sqrt{\lambda}}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2} - \frac{\sqrt{\lambda}\eta + \sqrt{\lambda}}{2}\right) = 0.$$

Netriviální řešení získáme pro

$$\lambda_{a,k} = \frac{4k^2\pi^2}{(1-\eta)^2}, \quad \lambda_{b,k} = \frac{4k^2\pi^2}{\xi^2}, \quad \lambda_{c,k} = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{(1+\eta-\xi)^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

tedy $\lambda_{a,k}$, $\lambda_{b,k}$ a $\lambda_{c,k}$ jsou hledanými vlastními čísly.

Tím jsme odvodili následující tvrzení.

Věta 1. *Vlastní čísla úlohy (2.1) – (2.3) mají tvar*

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{a,k} = \frac{4k^2\pi^2}{(1-\eta)^2}, \quad \lambda_{b,k} = \frac{4k^2\pi^2}{\xi^2}, \quad \lambda_{c,k} = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{(1+\eta-\xi)^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

2.3 Systém vlastních čísel a vlastních funkcí

K vlastním číslům uvedeným ve větě 1 nyní vyjádříme příslušné vlastní funkce, které upravíme pomocí goniometrické identity

$$A \sin(x) + B \cos(x) = C \sin(x + \varphi), \quad (2.11)$$

kde $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Pro jednoduchost volíme amplitudu vlastních funkcí rovnu 1.

1. Nejprve zvolíme $\lambda = \lambda_0 = 0$. Volbou parametru $A = 1$ získáme vlastní funkci ve tvaru

$$u_0(x) = 1. \quad (2.12)$$

2. Zvolíme-li $\lambda = \lambda_{a,k}$, pak z (2.9) a (2.10) dostaneme

$$A \sin\left(\frac{2k\pi\xi}{1-\eta}\right) = B \left(\cos\left(\frac{2k\pi\xi}{1-\eta}\right) - 1\right).$$

Předpokládejme, že nenastane případ, kdy $\lambda_{a,k} = \lambda_{b,l}$ pro nějaké $k, l \in \mathbb{N}$. Tedy tato dvě vlastní čísla nesplynou v jedno s násobností dva a platí, že

$$\sin\left(\frac{k\pi\xi}{1-\eta}\right) \neq 0.$$

Úpravou pomocí goniometrických vzorců získáme

$$A \cos\left(\frac{k\pi\xi}{1-\eta}\right) = -B \sin\left(\frac{k\pi\xi}{1-\eta}\right).$$

Vhodným přenásobením upravíme vlastní funkci příslušnou vlastnímu číslu $\lambda_{a,k}$ do tvaru:

$$u_{a,k}(x) = A \left(\sin\left(\frac{k\pi\xi}{1-\eta}\right) \cos\left(\frac{2k\pi}{1-\eta}x\right) - \cos\left(\frac{k\pi\xi}{1-\eta}\right) \sin\left(\frac{2k\pi}{1-\eta}x\right) \right).$$

Na tento tvar použijeme výše zmíněnou goniometrickou identitu, vhodně zvolíme konstantu A tak, aby amplituda $u_{a,k}(x)$ byla rovna jedné, a dostáváme řešení úlohy (2.1) – (2.3) ve tvaru

$$u_{a,k}(x) = \sin\left(\frac{2k\pi}{1-\eta}\left(x - \frac{\xi}{2}\right)\right). \quad (2.13)$$

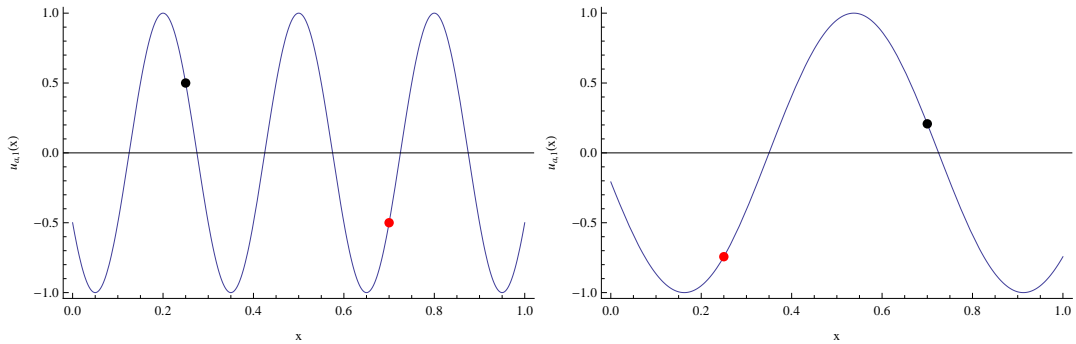
Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ jsou tyto funkce periodické s periodou $T = \frac{1-\eta}{k}$, tj. platí $u_{a,k}(\eta) = u_{a,k}(\eta+T) = u_{a,k}(1)$. Díky fázovému posunu platí $u_{a,k}\left(\frac{\xi}{2}\right) = 0$ a funkce $u_{a,k}$ jsou liše symetrické podle bodu $\frac{\xi}{2}$, tj. $u'_{a,k}(0) = u'_{a,k}(\xi)$. Máme tedy vlastní číslo a příslušnou vlastní funkci rovnice (2.1) s periodickými podmínkami na intervalu $(\eta, 1)$. Grafické zobrazení vidíme na obrázku 2.1.

3. Zvolíme-li $\lambda = \lambda_{b,k}$, pak z (2.9) a (2.10) dostaneme

$$A \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{\xi}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi\eta}{\xi}\right) \right) = -B \left(\sin\left(\frac{2k\pi}{\xi}\right) - \sin\left(\frac{2k\pi\eta}{\xi}\right) \right).$$

Opět předpokládáme, že žádná dvě vlastní čísla nesplynou. Úpravou pomocí goniometrických vzorců získáme

$$A \sin\left(\frac{k\pi(1+\eta)}{\xi}\right) = B \cos\left(\frac{k\pi(1+\eta)}{\xi}\right),$$



Obrázek 2.1: Vlastní funkce $u_{a,k}(x)$ pro $k = 1$ vlevo s parametry $\eta > \xi$, vpravo s parametry $\xi > \eta$. Hodnoty $u_{a,1}(\xi)$ a $u_{a,1}(\eta)$ jsou po řadě vyznačeny černě a červeně.

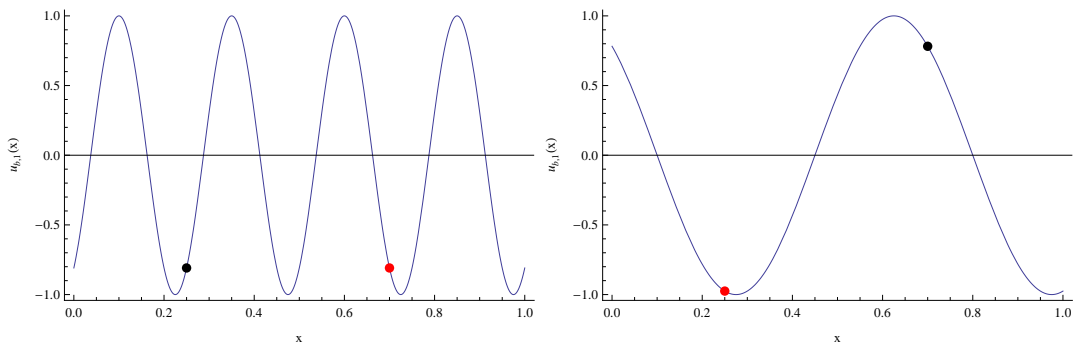
vhodně přenásobíme a upravíme vlastní funkci příslušnou vlastnímu číslu $\lambda_{b,k}$ do tvaru:

$$u_{b,k}(x) = A \left(\cos \left(\frac{k\pi(1+\eta)}{\xi} \right) \cos \left(\frac{2k\pi}{\xi} x \right) + \sin \left(\frac{k\pi(1+\eta)}{\xi} \right) \sin \left(\frac{2k\pi}{\xi} x \right) \right).$$

Dále na tento tvar použijeme výše zmíněnou goniometrickou identitu, vhodně zvolíme konstantu A a dostáváme řešení úlohy (2.1) – (2.3) ve tvaru

$$u_{b,k}(x) = \cos \left(\frac{2k\pi}{\xi} \left(x - \frac{1+\eta}{2} \right) \right). \quad (2.14)$$

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ jsou tyto funkce periodické s periodou $T = \frac{\xi}{k}$, tj. platí $u_{b,k}(0) = u_{b,k}(T) = u_{b,k}(\xi)$. Díky fázovému posunu platí $u'_{b,k} \left(\frac{1+\eta}{2} \right) = 0$ a funkce $u_{b,k}$ jsou sudě symetrické podle bodu $\frac{1+\eta}{2}$, tj. $u_{b,k}(\eta) = u_{b,k}(1)$. Máme tedy vlastní číslo a příslušnou vlastní funkci rovnice (2.1) s periodickými podmínkami na intervalu $(0, \xi)$. Grafické zobrazení vidíme na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Vlastní funkce $u_{b,k}(x)$ pro $k = 1$ vlevo s parametry $\eta > \xi$, vpravo s parametry $\xi > \eta$. Hodnoty $u_{b,1}(\xi)$ a $u_{b,1}(\eta)$ jsou po řadě vyznačeny černě a červeně.

4. Zvolíme-li $\lambda = \lambda_{c,k}$, pak z (2.9) a (2.10) dostaneme

$$A \sin \left(\frac{(2k-1)\pi\xi}{1+\eta-\xi} \right) = B \left(\cos \left(\frac{(2k-1)\pi\xi}{1+\eta-\xi} \right) - 1 \right).$$

Opět předpokládáme, že $\lambda_{c,k}$ nemá násobnost větší než jedna. Úpravou pomocí goniometrických vzorců získáme

$$A \cos\left(\frac{(2k-1)\pi\xi}{2(1+\eta-\xi)}\right) = -B \sin\left(\frac{(2k-1)\pi\xi}{2(1+\eta-\xi)}\right).$$

Vhodným přenásobením upravíme vlastní funkci příslušnou tomuto vlastnímu číslu do tvaru:

$$u_{c,k}(x) = A \left(\sin\left(\frac{(2k-1)\pi\xi}{2(1+\eta-\xi)}\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{1+\eta-\xi}x\right) - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi\xi}{2(1+\eta-\xi)}\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{1+\eta-\xi}x\right) \right).$$

Po další úpravě a vhodné volbě A dostáváme řešení úlohy (2.1) – (2.3) ve tvaru

$$u_{c,k}(x) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{1+\eta-\xi}\left(x - \frac{\xi}{2}\right)\right). \quad (2.15)$$

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ jsou tyto funkce periodické s periodou $T = \frac{2(1+\eta-\xi)}{2k-1}$, tj. platí $u_{c,k}(x) = u_{c,k}(x+T)$. Díky fázovému posunu platí $u_{c,k}\left(\frac{\xi}{2}\right) = 0$ a funkce $u_{c,k}$ jsou liše symetrické podle bodu $\frac{\xi}{2}$, tj. $u'_{c,k}(0) = u'_{c,k}(\xi)$. Dále platí $u'_{c,k}\left(\frac{1+\eta}{2}\right) = 0$ a funkce $u_{c,k}$ jsou sudě symetrické podle bodu $\frac{1+\eta}{2}$, tj. $u_{c,k}(\eta) = u_{c,k}(1)$. Máme tedy vlastní číslo a příslušnou vlastní funkci rovnice (2.1) s kombinací Dirichletových a Neumannových okrajových podmínek na intervalu $\left(\frac{\xi}{2}, \frac{1+\eta}{2}\right)$. Grafické zobrazení $u_{c,1}(x)$ pro různá rozložení parametrů η a ξ vidíme na obrázku 2.3 a 2.4.

Tímto postupem jsme odvodili následující tvrzení.

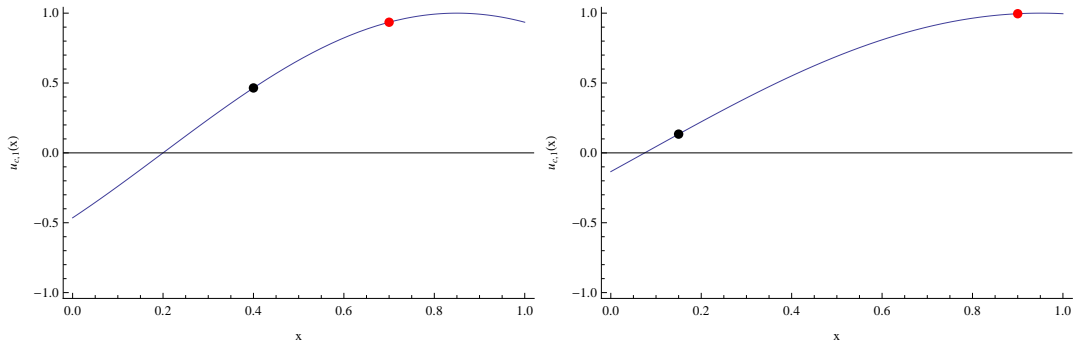
Věta 2. *Vlastní funkce okrajové úlohy (2.1) – (2.3) příslušné vlastním číslům λ_0 , $\lambda_{a,k}$, $\lambda_{b,k}$, a $\lambda_{c,k}$, kde $k \in \mathbb{N}$, mají tvar*

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_{a,k}(x) &= \sin\left(\frac{2k\pi}{1-\eta}\left(x - \frac{\xi}{2}\right)\right), \\ u_{b,k}(x) &= \cos\left(\frac{2k\pi}{\xi}\left(x - \frac{1+\eta}{2}\right)\right), \\ u_{c,k}(x) &= \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{1+\eta-\xi}\left(x - \frac{\xi}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

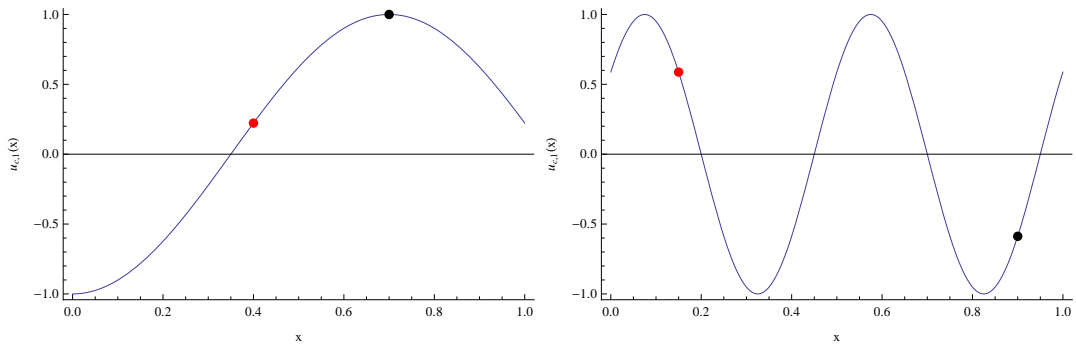
Poznámka 1. Ve výše uvedeném odvození jsme neuvažovali případ, kdy jedno z vlastních čísel má násobnost větší než jedna, tj. případ, kdy při určitém nastavení parametrů ξ a η dvě vlastní čísla splynou. Pro ilustraci uvažujme případ, kdy $\lambda = \lambda_{a,k} = \lambda_{b,l}$ pro nějaké $k, l \in \mathbb{N}$. Tedy toto vlastní číslo má násobnost 2 a příslušné vlastní funkce lze vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních funkcí příslušných k $\lambda_{a,k}$ a $\lambda_{b,l}$ ve tvaru

$$u(x) = Au_{a,k}(x) + Bu_{b,l}(x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Grafické zobrazení konkrétního případu vidíme na obrázku 2.5.



Obrázek 2.3: Vlastní funkce $u_{c,k}(x)$ pro $k = 1$ s parametry $\eta > \xi$. Vpravo jsou parametry zvoleny blíže ke krajním bodům intervalu. Hodnoty $u_{c,1}(\xi)$ a $u_{c,1}(\eta)$ jsou po řadě vyznačeny černě a červeně.



Obrázek 2.4: Vlastní funkce $u_{c,k}(x)$ pro $k = 1$ s parametry $\eta < \xi$. Vpravo jsou parametry zvoleny blíže ke krajním bodům intervalu. Hodnoty $u_{c,1}(\xi)$ a $u_{c,1}(\eta)$ jsou po řadě vyznačeny černě a červeně.

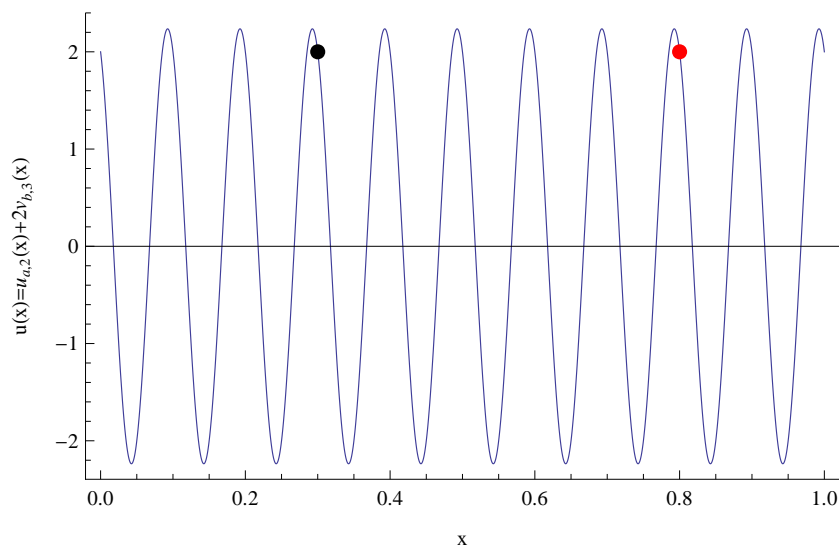
2.4 Parametry η a ξ

V této části budeme zkoumat, jak se úloha (2.1) – (2.3) mění spolu s limitními přechody parametrů. Využijeme Rolleovu větu. Tento případ porovnáme se situací, kdy dojde k limitnímu přechodu parametrů pro vlastní čísla $\lambda_{a,k}$, $\lambda_{b,k}$ a $\lambda_{c,k}$ a příslušné vlastní funkce této úlohy. Tuto situaci graficky znázorníme.

Věta 3 (Rolleova [7, str. 99]). *Nechť funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní nebo nevlastní derivaci a platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.*

Rolleovu větu použijeme pro funkci $u(x)$ i pro její první derivaci $u'(x)$. V obou případech jsou splněny předpoklady věty, jelikož funkce $u(x)$ má spojitou druhou derivaci, tj. $u(x) \in C^2([0, 1])$. Z (2.2) a Rolleovy věty vyplývá, že existuje hodnota $\xi_0 \in (0, \xi)$ taková, že $u''(\xi_0) = 0$. Dosazením do rovnice (2.1) dostáváme $u(\xi_0) = 0$. Stejně tak z (2.3) a Rolleovy věty plyne, že existuje hodnota $\eta_0 \in (\eta, 1)$ taková, že $u'(\eta_0) = 0$.

1. Nejprve uvažujme limitní přechody takto: $\eta \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow 0$, tj. rovněž $\eta_0 \rightarrow 1$, $\xi_0 \rightarrow 0$. Okrajové podmínky (2.3) a (2.2) přejdou na $u'(1) \rightarrow 0$ a $u(0) \rightarrow 0$. Limitním přechodem tedy získáme k původní rovnici (2.1) smíšené okrajové podmínky – kombinaci Dirichletových



Obrázek 2.5: Graf vlastní funkce $u = u_{a,k}(x) + 2u_{b,l}(x)$ pro volbu $k = 2$, $l = 3$ s parametry $3(1 - \eta) = 2\xi$. Hodnoty $u(\xi)$ a $u(\eta)$ jsou po řadě vyznačeny černě a červeně.

a Neumannových okrajových podmínek:

$$u(0) = 0, \quad (2.16)$$

$$u'(1) = 0. \quad (2.17)$$

Vlastní čísla a vlastní funkce takové úlohy mají tvar

$$\lambda_k = \left((2k-1) \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^2, \quad u_k(x) = \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} x \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nyní provedeme limitní přechod vlastních čísel úlohy (2.1) – (2.3), který vypadá následovně: $\lambda_{a,k} \rightarrow +\infty$, $\lambda_{b,k} \rightarrow +\infty$, $\lambda_{c,k} \rightarrow \left((2k-1) \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^2$. Příslušné vlastní funkce $u_{c,k}$ mají tedy tvar $u_{c,k}(x) = \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} x \right)$. Grafické zobrazení pro $k = 1$ vidíme na obrázku 2.6.

2. Dále uvažujme limitní přechody takto: $\eta \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 1$. Okrajové podmínky (2.2) a (2.3) přejdou na $u'(0) \rightarrow u'(1)$ a $u(0) \rightarrow u(1)$. Získáme tak periodické okrajové podmínky s periodou $T = 1$. Původní úloha tedy přejde na úlohu s rovnicí (2.1) a okrajovými podmínkami

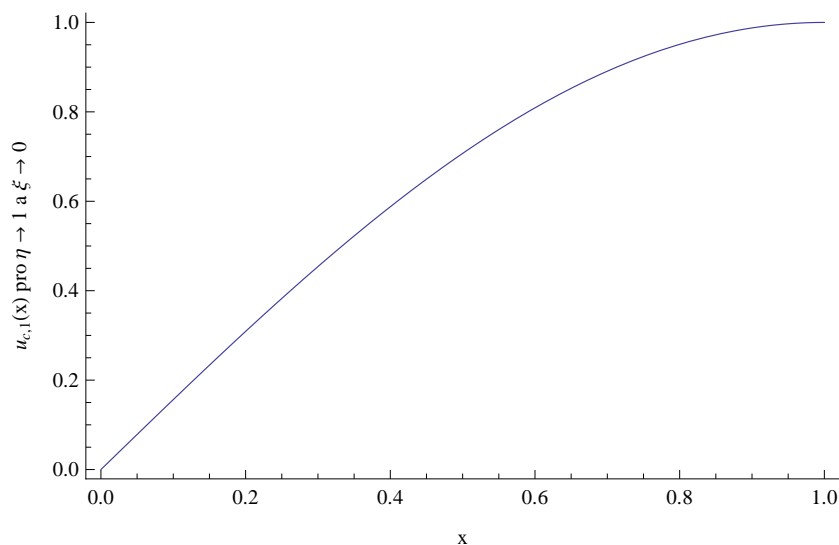
$$u(0) = u(1), \quad (2.18)$$

$$u'(0) = u'(1). \quad (2.19)$$

Vlastní čísla a vlastní funkce takové úlohy mají tvar

$$\lambda_k = (2k\pi)^2, \quad u_{k,1}(x) = \sin(2k\pi x), \quad u_{k,2}(x) = \cos(2k\pi x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Jelikož je vlastní číslo λ_k dvojnásobné, přísluší mu dvě různé vlastní funkce $u_{k,1}$ a $u_{k,2}$. Tedy i libovolná kombinace těchto vlastních funkcí je též vlastní funkcí této úlohy.



Obrázek 2.6: Vlastní funkce $u_{c,k}(x)$ pro $k = 1$ a limitní přechod parametrů $\eta \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow 0$.

Limitní přechod vlastních čísel úlohy (2.1) – (2.3) pak bude vypadat takto: $\lambda_{a,k} \rightarrow (2k\pi)^2$, $\lambda_{b,k} \rightarrow (2k\pi)^2$, $\lambda_{c,k} \rightarrow +\infty$. Příslušné vlastní funkce $u_{a,k}$ mají tvar $u_{a,k}(x) = \sin(2k\pi x - k\pi) = -\sin(2k\pi x)$ a vlastní funkce $u_{b,k}$ mají tvar $u_{b,k} = \cos(2k\pi x - k\pi) = -\cos(2k\pi x)$. Vynormováním získáme vlastní funkce ve tvaru $u_{a,k}(x) = \sin(2k\pi x)$ a $u_{b,k} = \cos(2k\pi x)$. Grafické zobrazení pro $k = 1$ vidíme na obrázku 2.7.

3. Následně uvažujme limitní přechody takto: $\eta \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow 1$, tj. rovněž $\eta_0 \rightarrow 1$. Okrajové podmínky (2.2) a (2.3) přejdou na $u'(0) \rightarrow u'(1)$ a $u'(1) \rightarrow 0$. Tedy i $u'(0) \rightarrow 0$. Získáme tak Neumannovy okrajové podmínky. Limitním přechodem tedy získáme úlohu s rovnicí (2.1) a okrajovými podmínkami

$$u'(0) = 0, \quad (2.20)$$

$$u'(1) = 0. \quad (2.21)$$

Vlastní čísla a vlastní funkce takové úlohy mají tvar

$$\lambda_k = (k\pi)^2, \quad u_k(x) = \cos(k\pi x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Limitní přechod vlastních čísel úlohy (2.1) – (2.3) pak bude vypadat takto: $\lambda_{a,k} \rightarrow +\infty$, $\lambda_{b,k} \rightarrow (2k\pi)^2$, $\lambda_{c,k} \rightarrow ((2k-1)\pi)^2$. Příslušné vlastní funkce $u_{b,k}$ a $u_{c,k}$ mají tvar $u_{b,k}(x) = \cos(2k\pi x - k\pi) = -\cos(2k\pi x)$ a $u_{c,k}(x) = (-1)^{k-1} \cos((2k-1)\pi x)$. Vynormováním získáme vlastní funkce ve tvaru $u_{b,k} = \cos(2k\pi x)$ a $u_{c,k} = \cos((2k-1)\pi x)$. Grafické zobrazení pro $k = 1$ vidíme na obrázku 2.8.

4. Na závěr uvažujme limitní přechody následovně: $\eta \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$, tj. rovněž $\xi_0 \rightarrow 0$. Okrajové podmínky (2.3) a (2.2) přejdou na $u(0) \rightarrow u(1)$ a z získáme $u(0) \rightarrow 0$, tudíž i $u(1) \rightarrow 0$. Máme tedy Dirichletovy okrajové podmínky. Původní úloha přejde na úlohu s rovnicí (2.1) a okrajovými podmínkami

$$u(0) = 0, \quad (2.22)$$

$$u(1) = 0. \quad (2.23)$$

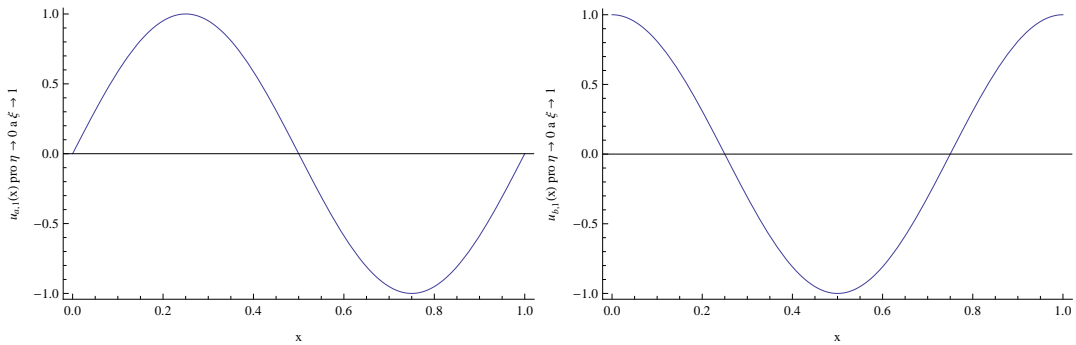
Vlastní čísla a vlastní funkce takové úlohy mají tvar

$$\lambda_k = (k\pi)^2, \quad u_k(x) = \sin(k\pi x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

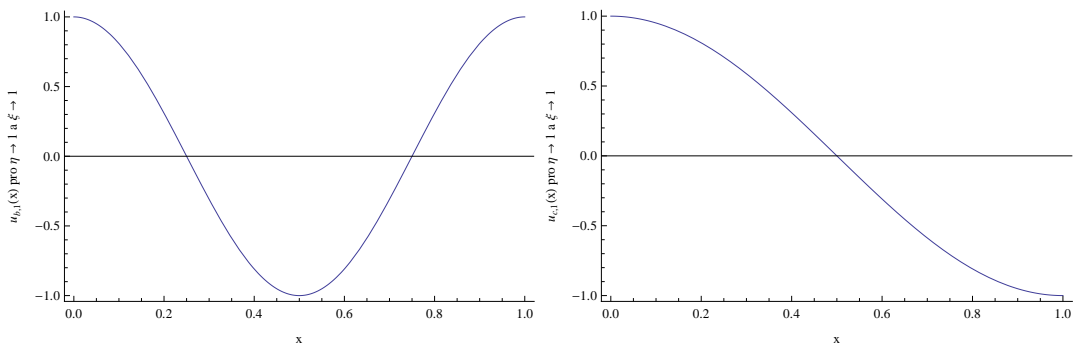
Limitní přechod vlastních čísel úlohy (2.1) – (2.3) pak bude vypadat takto: $\lambda_{a,k} \rightarrow (2k\pi)^2$, $\lambda_{b,k} \rightarrow +\infty$, $\lambda_{c,k} \rightarrow ((2k-1)\pi)^2$. Příslušné vlastní funkce $u_{a,k}$ a $u_{c,k}$ mají tvar $u_{a,k}(x) = \sin(2k\pi x)$ a $u_{c,k}(x) = -\sin((2k-1)\pi x)$. Vynormováním získáme vlastní funkce ve tvaru $u_{a,k}(x) = \sin(2k\pi x)$ a $u_{c,k}(x) = \sin((2k-1)\pi x)$. Grafické zobrazení pro $k=1$ vidíme na obrázku 2.9.

Z výše uvedeného vyplývá, že po limitním přechodu pro vlastní čísla a vlastní funkce úlohy (2.1) – (2.3) získáme vynormování a v případech 3 a 4 sloučením těchto funkcí stejné výsledky jako limitním přechodem celé úlohy. Limitní přechod pro úlohu (2.1) – (2.3) je tedy ekvivalentní limitnímu přechodu pro vlastní čísla a vlastní funkce této úlohy. Vlastní číslo $\lambda_0 = 0$ a k němu příslušná vlastní funkce $u_0(x) = 1$ existují jen v případech 2 a 3.

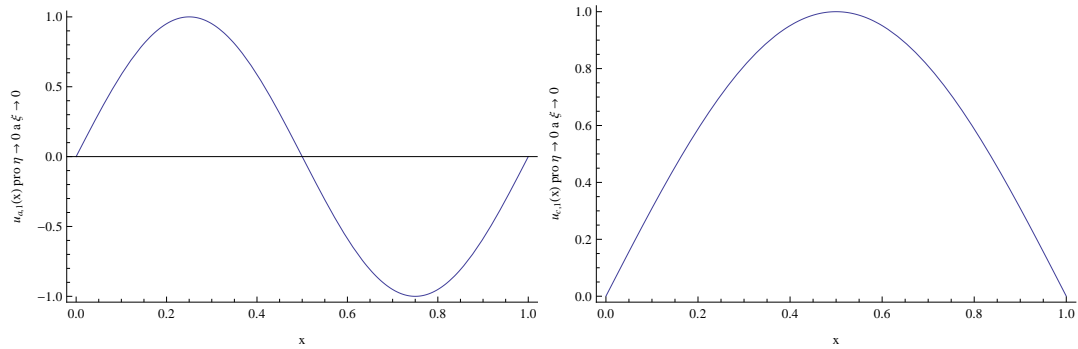
Závislost vlastních čísel na parametrech η a ξ můžeme vidět na obrázku 2.10.



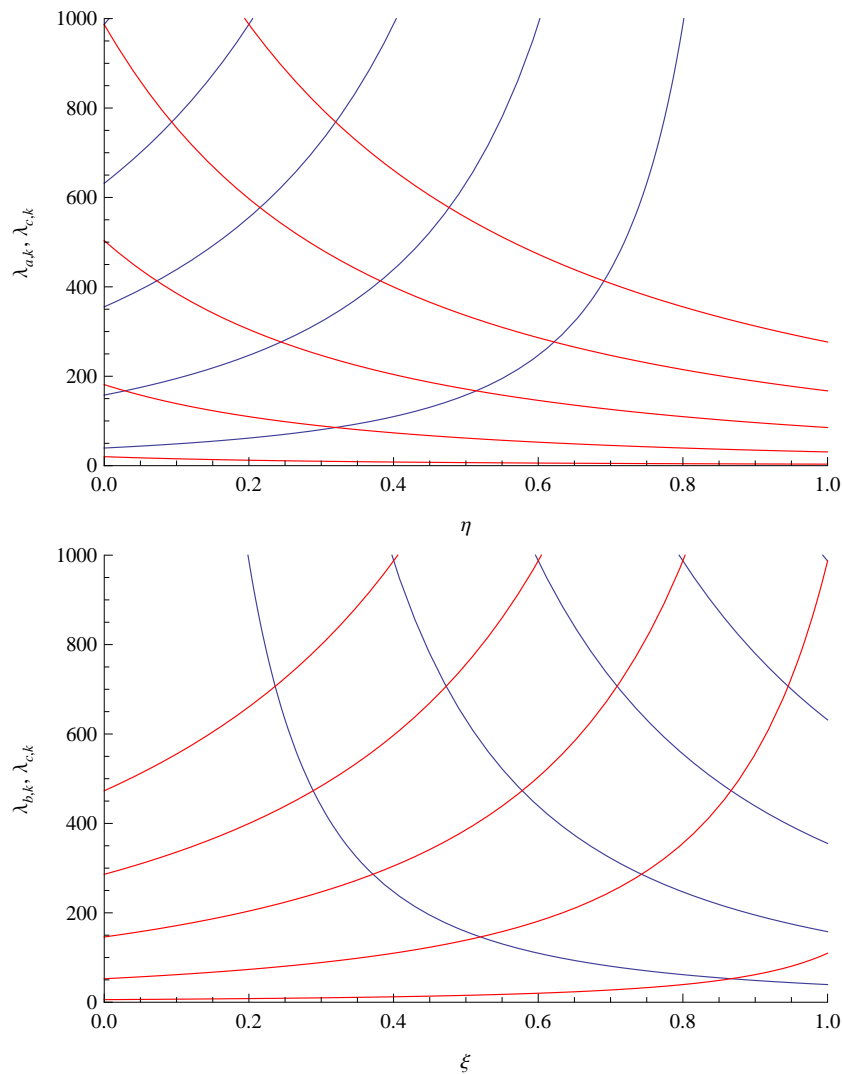
Obrázek 2.7: Vlastní funkce $u_{a,k}(x)$ a $u_{b,k}(x)$ pro $k=1$ a limitní přechod parametrů $\eta \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 1$.



Obrázek 2.8: Vlastní funkce $u_{b,k}(x)$ a $u_{c,k}(x)$ pro $k=1$ a limitní přechod parametrů $\eta \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow 1$.



Obrázek 2.9: Vlastní funkce $u_{a,k}(x)$ a $u_{c,k}(x)$ pro $k = 1$ a limitní přechod parametrů $\eta \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$.



Obrázek 2.10: V horním grafu vidíme závislost $\lambda_{a,k}$ a $\lambda_{c,k}$ pro $k = 1, 2, 3, 4, 5$ na parametru η . Modrou barvou jsou zobrazeny $\lambda_{a,k}$, červenou $\lambda_{c,k}$. Dole totéž pro závislost $\lambda_{b,k}$ a $\lambda_{c,k}$ na parametru ξ . Modře jsou zobrazeny $\lambda_{b,k}$, červeně $\lambda_{c,k}$.

Kapitola 3

Adjungovaná úloha

V této kapitole se budeme zabývat hledáním adjungované úlohy k úloze (2.1) – (2.3). Výpočet provedeme podle postupu uvedeného v článku od Johna Lockera [8], jenž se zabývá vícebodovými diferenciálními operátory a hledáním jejich adjungovaných tvarů s okrajovými podmínkami ve vnitřních bodech zadaného intervalu, na němž je daná úloha definována.

3.1 Obecné vyjádření úlohy a jejího adjungovaného tvaru

V této části shrneme výsledky z [8], tj. naformulování úlohy a vyjádření úlohy k ní adjungované, abychom je dále mohli použít pro naše výpočty v části 3.2.

3.1.1 Vícebodový diferenciální operátor

Mějme zadaný uzavřený interval $[a, b]$ a S Hilbertův prostor $L^2[a, b]$. Necht

$$\tau = \sum_{i=0}^n a_i(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^i \quad (3.1)$$

je formální diferenciální operátor n -tého řádu, koeficienty $a_i = a_i(x)$ jsou funkce reálné proměnné z $C^\infty([a, b])$ a $a_n \neq 0$. Necht $H^n[a, b]$ je lineární podprostor prostoru S obsahující všechny funkce $u = u(x)$ z $C^{n-1}([a, b])$ s $u^{(n-1)}$ absolutně spojitými na $[a, b]$ a $u^{(n)}$ z S .

Dále zavedeme $\pi = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$ dělení intervalu $[a, b]$. Symbolem $H^n(\pi)$ označme všechny funkce u z S , které splňují následující vlastnosti.

a) Na každém podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ pro $i = 1, \dots, m$ má funkce u limitu zleva i zprava, tedy můžeme definovat funkce $u_i = u_i(x)$ tak, že $u_i(x) = u(x)$ pro $x_{i-1} < x < x_i$, $u_i(x_{i-1}) = u(x_{i-1}^+)$ a $u_i(x_i) = u(x_i^-)$. Píšeme, že $u = u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))$, kde u_i nazýváme komponenty funkce u .

b) Komponenty u_i jsou z prostoru $H^n[x_{i-1}, x_i]$ pro $i = 1, \dots, m$.

$H^n(\pi)$ je lineární podprostor S obsahující $H^n[a, b]$, tedy můžeme aplikovat formální operátor τ na jakoukoliv funkci u , abychom získali novou funkci τu z S .

Podle [8] se dají okrajové podmínky v bodech dělení intervalu zapsat jako

$$B_i(u) = \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} \left(\alpha_{ijl} u_l^{(j)}(x_{l-1}) + \beta_{ijl} u_l^{(j)}(x_l) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.2)$$

kde koeficienty α_{ijl} , β_{ijl} a k jsou zadaná reálná čísla.

Nechť L je lineární operátor na S definovaný takto:

$$Lu = \tau u, \quad \mathcal{D}(L) = \{u \in H^n(\pi); B_i(u) = 0, i = 1, \dots, k\}. \quad (3.3)$$

3.1.2 Adjungovaný vícebodový diferenciální operátor

V této části nadefinujeme adjungovaný diferenciální operátor L^* k obecnému vícebodovému operátoru L z předchozí části. Získáme ho podle věty Theorem 1 [8, str. 564]. Adjungovaný operátor L^* je vícebodovým diferenciálním operátorem definovaným jako

$$L^*v = \tau^*v, \quad \mathcal{D}(L^*) = \{v \in H^n(\pi); B_i^*(v) = 0, i = 1, \dots, 2mn - k\}, \quad (3.4)$$

kde τ^* je formální adjungovaný diferenciální operátor a $B_i^*(u) = 0$ je $2mn - k$ lineárně nezávislých okrajových podmínek. Pro libovolné funkce $u = u(x)$ a $v = v(x)$ z prostoru $H^n(\pi)$ platí:

$$\begin{aligned} (\tau u, v) - (u, \tau^*v) &= \int_a^b \tau u(x)v(x)dx - \int_a^b u(x)\tau^*v(x)dx = \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{p,q=0}^{n-1} \left(F_{x_l}^{pq} u_l^{(p)}(x_l) v_l^{(q)}(x_l) - F_{x_{l-1}}^{pq} u_l^{(p)}(x_{l-1}) v_l^{(q)}(x_{l-1}) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde $\mathbf{F}_x = [F_x^{pq}]$ je matice typu $n \times n$ složená z koeficientů z výpočtu (3.5) pomocí integrace per-partes, $x \in [a, b]$. Uvažujme systém lineárně nezávislých rovnic

$$\sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_{ijl} x_{jl} + \beta_{ijl} y_{jl}) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.6)$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, $2mn - k$ volných parametrů. Lze chápat, že x_{jl} odpovídá $u_l^{(j)}(x_{l-1})$, tj. odpovídá j -té derivaci komponenty u_l v bodě x_{l-1} , y_{jl} odpovídá $u_l^{(j)}(x_l)$ a koeficienty α_{ijl} a β_{ijl} jsou reálná čísla z okrajových podmínek (3.2).

Nechť uspořádané dvojice $[x_{ijl}, y_{ijl}]$, $i = 1, \dots, 2mn - k$, jsou konkrétním řešením soustavy rovnic (3.6). Dále nechť koeficienty α_{ijl}^* a β_{ijl}^* jsou konstanty definované vztahy

$$\alpha_{ijl}^* = - \sum_{p=0}^{n-1} x_{ipl} F_{x_{l-1}}^{pj} \quad \text{a} \quad \beta_{ijl}^* = \sum_{p=0}^{n-1} y_{ipl} F_{x_l}^{pj} \quad (3.7)$$

pro $i = 1, \dots, 2mn - k$; $j = 0, \dots, n - 1$; $l = 1, \dots, m$. Pak $B_i^*(u)$ jsou adjungované vícebodové okrajové podmínky definované jako

$$B_i^*(v) = \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} \left(\alpha_{ijl}^* v_l^{(j)}(x_{l-1}) + \beta_{ijl}^* v_l^{(j)}(x_l) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, 2mn - k. \quad (3.8)$$

Pro výpočet je výhodnější maticový zápis. Využijeme matice \mathbf{P}_l , \mathbf{Q}_l , \mathbf{X}_l , \mathbf{Y}_l , \mathbf{X} , \mathbf{X}^* a \mathbf{F} definované takto:

$$\mathbf{P}_l = [\alpha_{ijl}^*] \quad \text{a} \quad \mathbf{Q}_l = [\beta_{ijl}^*], \quad (3.9)$$

$$\mathbf{X}_l = [x_{ijl}] \quad \text{a} \quad \mathbf{Y}_l = [y_{ijl}] \quad (3.10)$$

pro $l = 1, \dots, m$, kde uvedené matice jsou typu $(2mn - k) \times n$. Ze vztahů (3.7) plyne

$$\mathbf{P}_l = -\mathbf{X}_l \mathbf{F}_{x_{l-1}} \quad \text{a} \quad \mathbf{Q}_l = \mathbf{Y}_l \mathbf{F}_{x_l}. \quad (3.11)$$

Dále mějme matice typu $(2mn - k) \times 2mn$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 \dots \mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m] \quad \text{a} \quad \mathbf{X}^* = [\mathbf{P}_1 \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{P}_m \mathbf{Q}_m] \quad (3.12)$$

a matici typu $2mn \times 2mn$

$$\mathbf{F} = \text{diag}(-\mathbf{F}_{x_0}, \mathbf{F}_{x_1}, \dots, -\mathbf{F}_{x_{m-1}}, \mathbf{F}_{x_m}). \quad (3.13)$$

Můžeme tedy psát

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X}\mathbf{F}. \quad (3.14)$$

Řádky matice \mathbf{X}^* jsou lineárně nezávislé, jejich počet je $2mn - k$, a obsahují koeficienty α_{ijl}^* , β_{ijl}^* , tedy získáme $2mn - k$ lineárně nezávislých okrajových podmínek $B_i^*(v) = 0$.

3.2 Vyjádření adjungované úlohy k úloze (2.1) – (2.3)

V této části se budeme zabývat vyjádřením adjungované úlohy k úloze (2.1) – (2.3) pomocí výše uvedeného postupu. Formální diferenciální operátor τ máme ve tvaru

$$\tau = -\frac{d^2}{dx^2}. \quad (3.15)$$

Vidíme tedy, že v našem případě se zabýváme diferenciálním operátorem druhého řádu, tj. $n = 2$. Koeficient $a_n = a_2 = -1$, ostatní koeficienty $a_i(t)$ jsou identicky nulové, tj. $a_0 = a_1 = 0$. Pro naši úlohu vypadá dělení intervalu $[0, 1]$ následovně, uvažujeme-li případ, kdy $\xi < \eta$: $\pi = \{0 < \xi < \eta < 1\}$, tedy $m = 3$. Tudíž $u = u(x)$ se skládá ze tří komponent, tj. $u = u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$. V případě, kdy $\xi > \eta$, bychom postupovali analogicky.

Pro řešení původní úlohy platí, že $u \in C^1([0, 1])$, dokonce z rovnice (2.1) vyplývá, že $u \in C^2(0, 1)$. Ale řešení adjungované úlohy už tyto vlastnosti nemá. Přepíšeme tedy původní okrajové podmínky (2.2) a (2.3) podle vztahu (3.2). Vidíme, že k nim přibudou další čtyři podmínky na spojitost funkce u a její první derivace u' v bodech ξ a η . Okrajové podmínky přepsané do nového tvaru vypadají takto:

$$B_1(u) = u'_1(0) - u'_1(\xi) = 0, \quad (3.16)$$

$$B_2(u) = u_3(1) - u_3(\eta) = 0, \quad (3.17)$$

$$B_3(u) = u_1(\xi) - u_2(\xi) = 0, \quad (3.18)$$

$$B_4(u) = u'_1(\xi) - u'_2(\xi) = 0, \quad (3.19)$$

$$B_5(u) = u_2(\eta) - u_3(\eta) = 0, \quad (3.20)$$

$$B_6(u) = u'_2(\eta) - u'_3(\eta) = 0, \quad (3.21)$$

tj. $k = 6$, $\alpha_{111} = \beta_{203} = \beta_{301} = \beta_{411} = \beta_{502} = \beta_{612} = 1$ a $\beta_{111} = \alpha_{203} = \alpha_{302} = \alpha_{412} = \alpha_{503} = \alpha_{613} = -1$, ostatní koeficienty α_{ijl} , β_{ijl} jsou nulové. Vícebodový diferenciální operátor L v našem případě vypadá takto:

$$Lu(x) = -u''(x), \quad \mathcal{D}(L) = \{u(x) \in H^2(\pi); B_i(u) = 0, i = 1, \dots, 6\}. \quad (3.22)$$

Původní úlohu (2.1) – (2.3) můžeme pomocí diferenciálního operátoru L zapsat jako

$$Lu(x) = \lambda u(x). \quad (3.23)$$

Pro formální diferenciální operátor τ^* platí

$$\tau^*v = -v''. \quad (3.24)$$

její řádky jsou lineárně nezávislé. Matice \mathbf{F} je podle definice třídiagonální a vypadá následovně:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

tedy \mathbf{X}^* , která se skládá z matic \mathbf{P}_1 , \mathbf{Q}_1 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{Q}_2 , \mathbf{P}_3 a \mathbf{Q}_3 typu 6×2 má tvar

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z matice \mathbf{X}^* získáme koeficienty α_{ijl}^* a β_{ijl}^* , našli jsme tedy $2mn - k = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 6 = 6$ okrajových podmínek adjungované úlohy ve tvaru

$$B_1^*(v) = -v_1'(0) = 0, \quad (3.26)$$

$$B_2^*(v) = v_1(0) - v_1(\xi) + v_2(\xi) = 0, \quad (3.27)$$

$$B_3^*(v) = v_1'(\xi) - v_2'(\xi) = 0, \quad (3.28)$$

$$B_4^*(v) = v_2'(\eta) - v_3'(\eta) + v_3'(1) = 0, \quad (3.29)$$

$$B_5^*(v) = -v_2(\eta) + v_3(\eta) = 0, \quad (3.30)$$

$$B_6^*(v) = -v_3(1) = 0. \quad (3.31)$$

K vícebodovému diferenciálnímu operátoru L tedy získáme adjungovaný diferenciální operátor L^* jako

$$L^*v(x) = -v''(x), \quad \mathcal{D}(L^*) = \{v(x) \in H^2(\pi); B_i^*(v) = 0, i = 1, \dots, 6\}. \quad (3.32)$$

3.3 Vlastní čísla a vlastní funkce adjungované úlohy

V této části se budeme zabývat výpočtem vlastních čísel a vlastních funkcí adjungované úlohy, kterou jsme získali ve tvaru:

$$L^*v(x) = \lambda v(x). \quad (3.33)$$

Jinak zapsáno, mějme úlohu

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3.34)$$

s okrajovými podmínkami $B_i^*(v) = 0$, $i = 1, \dots, 6$, tj.

$$v'(0) = 0, \quad (3.35)$$

$$v(0) = v(\xi-) - v(\xi+), \quad (3.36)$$

$$v'(\xi-) = v'(\xi+), \quad (3.37)$$

$$v'(1) = v'(\eta+) - v'(\eta-), \quad (3.38)$$

$$v(\eta-) = v(\eta+), \quad (3.39)$$

$$v(1) = 0, \quad (3.40)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in (0, 1)$, $\eta \in (0, 1)$ a pro jednoduchost uvažujeme případ $0 < \xi < \eta < 1$. Řešení úlohy získáme ve tvaru:

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ v_2(x) & \text{pro } x \in (\xi, \eta), \\ v_3(x) & \text{pro } x \in (\eta, 1). \end{cases} \quad (3.41)$$

Vidíme, že $v_i \in C^2$ na příslušném podintervalu pro $i = 1, 2, 3$, avšak funkce $v \notin C([0, 1])$. Výpočet opět rozdělíme do tří částí pro $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ a $\lambda < 0$.

1. Nejprve volíme $\lambda = 0$. Obecné řešení diferenciální rovnice (3.34) má tvar

$$v(x) = \begin{cases} A_1 + B_1 x & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ A_2 + B_2 x & \text{pro } x \in (\xi, \eta), \\ A_3 + B_3 x & \text{pro } x \in (\eta, 1). \end{cases} \quad (3.42)$$

Vyřešíme okrajovou úlohu. Z okrajových podmínek (3.35) – (3.40) dostáváme následující soustavu rovnic

$$B_1 = 0, \quad (3.43)$$

$$A_2 + B_2 \xi = 0, \quad (3.44)$$

$$B_1 = B_2, \quad (3.45)$$

$$B_2 = 0, \quad (3.46)$$

$$A_3 + B_3 \eta = 0, \quad (3.47)$$

$$A_3 + B_3 = 0. \quad (3.48)$$

Vidíme tedy, že $A_1 \in \mathbb{R}$ a $A_2 = A_3 = B_1 = B_2 = B_3 = 0$. Řešení úlohy (3.34) – (3.40)

$$v_0^*(x) = \begin{cases} A_1 & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ 0 & \text{pro } x \in (\xi, \eta) \cup (\eta, 1) \end{cases} \quad (3.49)$$

není triviální pro $A_1 \neq 0$, tudíž je $\lambda_0 = 0$ vlastním číslem. Po vynormování vyjádříme vlastní funkci příslušnou k vlastnímu číslu λ_0 jako

$$v_0^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ 0 & \text{pro } x \in (\xi, \eta) \cup (\eta, 1). \end{cases} \quad (3.50)$$

Grafické znázornění vidíme na obrázku 3.1.

2. Dále volíme $\lambda > 0$. Obecné řešení diferenciální rovnice (3.34) má tvar

$$v(x) = \begin{cases} A_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + B_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ A_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) + B_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) & \text{pro } x \in (\xi, \eta), \\ A_3 \cos(\sqrt{\lambda}x) + B_3 \sin(\sqrt{\lambda}x) & \text{pro } x \in (\eta, 1). \end{cases} \quad (3.51)$$

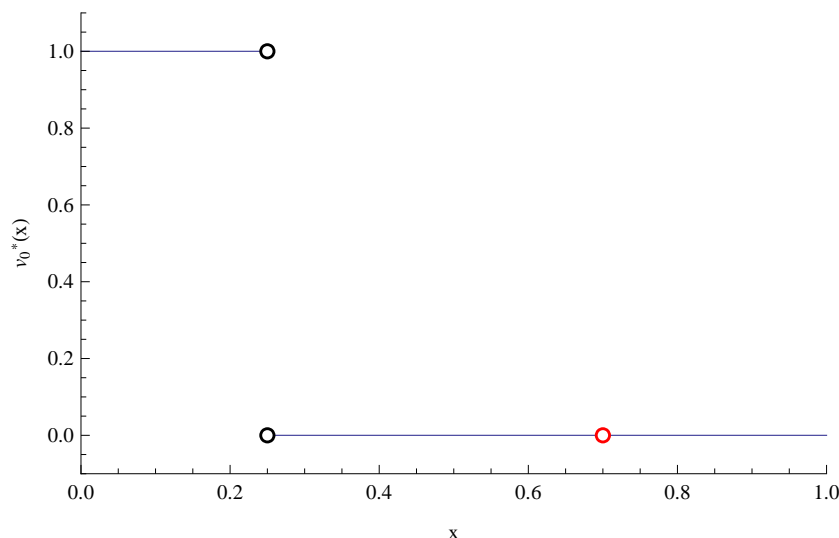
Vyřešíme okrajovou úlohu. Z okrajových podmínek (3.35) – (3.40) dostáváme následující soustavu rovnic

$$B_1 = 0, \quad (3.52)$$

$$A_1 (1 - \cos(\sqrt{\lambda}\xi)) - B_1 \sin(\sqrt{\lambda}\xi) + A_2 \cos(\sqrt{\lambda}\xi) + B_2 \sin(\sqrt{\lambda}\xi) = 0, \quad (3.53)$$

$$-A_1 \sin(\sqrt{\lambda}\xi) + B_1 \cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_2 \sin(\sqrt{\lambda}\xi) - B_2 \cos(\sqrt{\lambda}\xi) = 0, \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} -A_2 \sin(\sqrt{\lambda}\eta) + B_2 \cos(\sqrt{\lambda}\eta) + A_3 (\sin(\sqrt{\lambda}\eta) - \sin(\sqrt{\lambda})) + \\ B_3 (\cos(\sqrt{\lambda}) - \cos(\sqrt{\lambda}\eta)) = 0, \end{aligned} \quad (3.55)$$



Obrázek 3.1: Vlastní funkce $v_0^*(x)$ s parametry $\eta > \xi$. Hodnoty $v_0^*(\xi)$ a $v_0^*(\eta)$ jsou po řadě vyznačeny černě a červeně.

$$-A_2 \cos(\sqrt{\lambda}\eta) - B_2 \sin(\sqrt{\lambda}\eta) + A_3 \cos(\sqrt{\lambda}\eta) + B_3 \sin(\sqrt{\lambda}\eta) = 0, \quad (3.56)$$

$$A_3 \cos(\sqrt{\lambda}) + B_3 \cos(\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (3.57)$$

Vyjádříme si matici soustavy (3.52) – (3.57):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \cos(\sqrt{\lambda}\xi) & -\sin(\sqrt{\lambda}\xi) & \cos(\sqrt{\lambda}\xi) & \sin(\sqrt{\lambda}\xi) & 0 & 0 \\ -\sin(\sqrt{\lambda}\xi) & \cos(\sqrt{\lambda}\xi) & \sin(\sqrt{\lambda}\xi) & \cos(\sqrt{\lambda}\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\sqrt{\lambda}\eta) & \cos(\sqrt{\lambda}\eta) & \sin(\sqrt{\lambda}\eta) - \sin(\sqrt{\lambda}) & \cos(\sqrt{\lambda}) - \cos(\sqrt{\lambda}\eta) \\ 0 & 0 & -\cos(\sqrt{\lambda}\eta) & -\sin(\sqrt{\lambda}\eta) & \cos(\sqrt{\lambda}\eta) & \sin(\sqrt{\lambda}\eta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\sqrt{\lambda}) & \cos(\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix}.$$

Hledáme netriviální řešení této soustavy, tedy $[A_1, B_2, A_2, B_2, A_3, B_3]^T \neq \mathbf{0}$. Proto musí být determinant matice \mathbf{X} soustavy (3.52) – (3.57) roven 0. Vyjádříme si výraz pro determinant, upravíme jej pomocí goniometrických vzorců a získáme rovnici

$$\det \mathbf{X} = \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}(1-\eta)}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}(1+\eta-\xi)}{2}\right) = 0. \quad (3.58)$$

Odtud vidíme, že netriviální řešení získáme pro

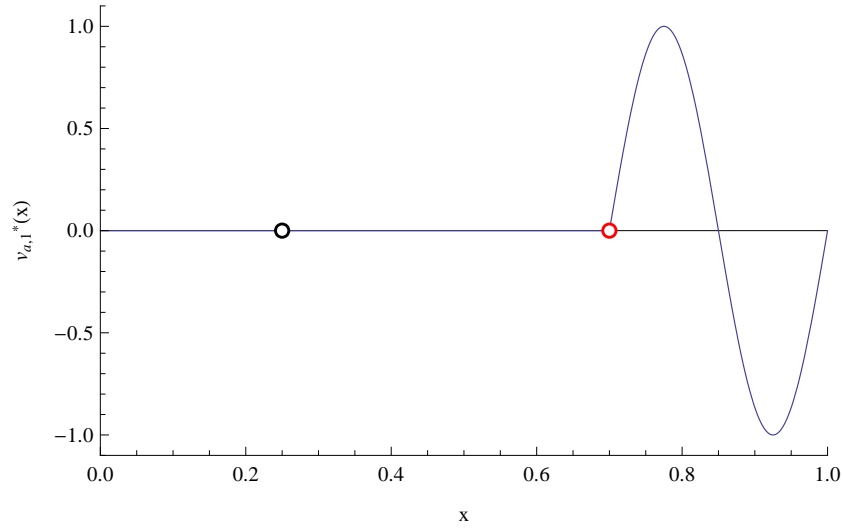
$$\lambda_{a,k} = \frac{4k^2\pi^2}{(1-\eta)^2}, \quad \lambda_{b,k} = \frac{4k^2\pi^2}{\xi^2}, \quad \lambda_{c,k} = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{(1+\eta-\xi)^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

tedy $\lambda_{a,k}$, $\lambda_{b,k}$ a $\lambda_{c,k}$ jsou hledanými vlastními čísly. Tato vlastní čísla jsou stejná jako pro úlohu (2.1) – (2.3). Nyní si vyjádříme příslušné vlastní funkce.

- a) Nejprve zvolíme $\lambda = \lambda_{a,k}$. Vhodnou volbou volných parametrů a úpravou pomocí goniometrických vzorců dostáváme vlastní funkci příslušnou tomuto vlastnímu číslu ve tvaru

$$v_{a,k}^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ 0 & \text{pro } x \in (\xi, \eta), \\ \sin\left(\frac{2k\pi(x-1)}{1-\eta}\right) & \text{pro } x \in (\eta, 1). \end{cases} \quad (3.59)$$

Grafické znázornění vidíme na obrázku 3.2.

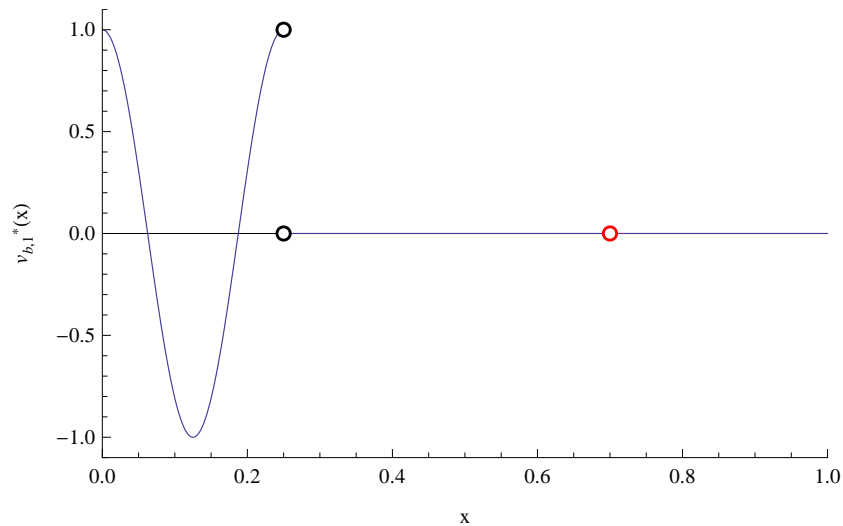


Obrázek 3.2: Graf vlastní funkce $v_{a,k}^*(x)$ pro volbu $k = 1$ s parametry $\eta > \xi$. Hodnoty $v_{a,1}^*(\xi)$ a $v_{a,1}^*(\eta)$ jsou po řadě vyznačeny černě a červeně.

b) Vlastní funkci příslušnou vlastnímu číslu $\lambda_{b,k}$ po vynormování získáme ve tvaru

$$v_{b,k}^*(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2k\pi x}{\xi}\right) & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ 0 & \text{pro } x \in (\xi, \eta), \\ 0 & \text{pro } x \in (\eta, 1). \end{cases} \quad (3.60)$$

Grafické znázornění vidíme na obrázku 3.3.



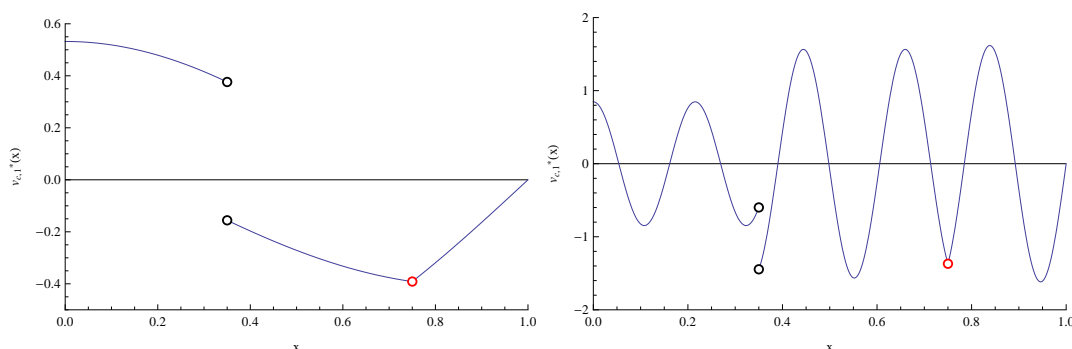
Obrázek 3.3: Graf vlastní funkce $v_{b,k}^*(x)$ pro volbu $k = 1$ s parametry $\eta > \xi$. Hodnoty $v_{b,1}^*(\xi)$ a $v_{b,1}^*(\eta)$ jsou po řadě vyznačeny černě a červeně.

c) Dále vyjádříme vlastní funkci příslušnou vlastnímu číslu $\lambda_{c,k}$. Opět vhodně zvolíme volné parametry a upravíme pomocí goniometrických vzorců. Pro jednoduchost ne-

rozepisujeme $\lambda_{c,k}$ a značíme pouze λ . Dostáváme

$$v_{c,k}^*(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda}(1-\eta)) \cos(\sqrt{\lambda}x) & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ -2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\xi}{2}\right) \sin(\sqrt{\lambda}(1-\eta)) \sin\left(\sqrt{\lambda}\left(x - \frac{\xi}{2}\right)\right) & \text{pro } x \in (\xi, \eta), \\ 2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\lambda}\left(\eta - \frac{\xi}{2}\right)\right) \sin(\sqrt{\lambda}(x-1)) & \text{pro } x \in (\eta, 1). \end{cases}$$

Grafické znázornění vidíme na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Graf vlastní funkce $v_{c,k}^*(x)$ pro volbu $k = 1$ a $k = 7$ s parametry $\eta > \xi$. Hodnoty $v_{c,1}^*(\xi)$ a $v_{c,1}^*(\eta)$ jsou po řadě vyznačeny černě a červeně.

Poznámka 2. Pro vhodnou volbu parametrů ξ a η může nastat situace, kdy některá vlastní čísla splynou, například pro symetrii $k\xi = l(1-\eta)$ pro konkrétní $k, l \in \mathbb{N}$. Pro ilustraci tedy uvažujme případ, že $\lambda = \lambda_{a,k} = \lambda_{b,l}$ pro nějaké $k, l \in \mathbb{N}$. Násobnost vlastního čísla je rovna dvěma a podle toho vypadají i příslušné vlastní funkce. Můžeme je zapsat jako lineární kombinaci vlastních funkcí příslušných k vlastním číslům $\lambda_{a,k}, \lambda_{b,l}$ ve tvaru

$$v^* = Av_{a,k}^* + Bv_{b,l}^*, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Totéž platí i pro původní úlohu.

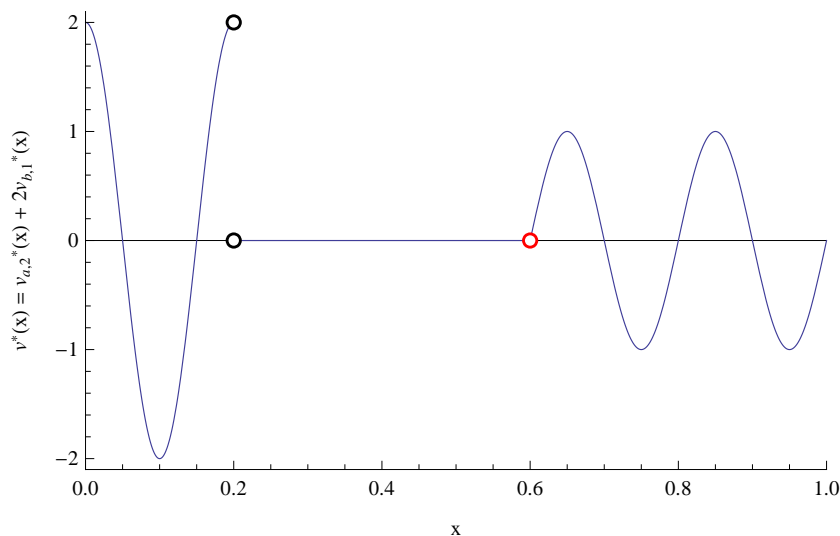
Grafické znázornění vidíme na obrázku 3.5.

- Následně uvažujeme $\lambda < 0$. Postupujeme analogicky jako pro $\lambda > 0$. Získáme pouze triviální řešení, proto $\lambda < 0$ není vlastním číslem.

Výše uvedeným postupem jsme odvodili následující tvrzení.

Věta 4. *Vlastní čísla adjungované úlohy (2.1) a (3.35) – (3.40) mají tvar*

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{a,k} = \frac{4k^2\pi^2}{(1-\eta)^2}, \quad \lambda_{b,k} = \frac{4k^2\pi^2}{\xi^2}, \quad \lambda_{c,k} = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{(1+\eta-\xi)^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$



Obrázek 3.5: Graf vlastní funkce $v^* = v_{a,k}^*(x) + 2v_{b,l}^*(x)$ pro volbu $k = 2$, $l = 1$ s parametry $2\xi = 1 - \eta$. Hodnoty $v^*(\xi)$ a $v^*(\eta)$ jsou po řadě vyznačeny černě a červeně.

Pro $\xi < \eta$ příslušné vlastní funkce této úlohy jsou

$$v_0^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ 0 & \text{pro } x \in (\xi, \eta) \cup (\eta, 1), \end{cases}$$

$$v_{a,k}^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ 0 & \text{pro } x \in (\xi, \eta), \\ \sin\left(\frac{2k\pi(x-1)}{1-\eta}\right) & \text{pro } x \in (\eta, 1), \end{cases}$$

$$v_{b,k}^*(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2k\pi x}{\xi}\right) & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ 0 & \text{pro } x \in (\xi, \eta), \\ 0 & \text{pro } x \in (\eta, 1), \end{cases}$$

$$v_{c,k}^*(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda}(1-\eta)) \cos(\sqrt{\lambda}x) & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ -2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\xi}{2}\right) \sin(\sqrt{\lambda}(1-\eta)) \sin\left(\sqrt{\lambda}\left(x - \frac{\xi}{2}\right)\right) & \text{pro } x \in (\xi, \eta), \\ 2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\lambda}\left(\eta - \frac{\xi}{2}\right)\right) \sin(\sqrt{\lambda}(x-1)) & \text{pro } x \in (\eta, 1). \end{cases}$$

Poznámka 3. Jelikož operátor L není samoadjungovaný, nemají adjungované vlastní funkce v^* stejné vlastnosti, které jsme mohli pozorovat v kapitole 2 u vlastních funkcí u původní úlohy (2.1) – (2.3), avšak jistou analogii zde najít můžeme. Díky nulovosti částí vlastních funkcí $v_{a,k}^*$ a $v_{b,k}^*$ jsou zachovány vlastnosti periodicity, tj. tyto funkce splňují na intervalech $(\eta, 1)$ pro $v_{a,k}^*$ a $(0, \xi)$ pro $v_{b,k}^*$ periodické podmínky. Platí tedy, že $v_{a,k}^*(\eta) = v_{a,k}^*(\eta + T) = v_{a,k}^*(1)$, kde T je perioda, a je navíc splněno $v_{a,k}^*\left(\frac{\xi}{2}\right) = 0$. Stejně tak platí $v_{b,k}^*(0) = v_{b,k}^*(\bar{T}) = v_{b,k}^*(\xi)$, kde \bar{T} je perioda, a je navíc splněno $v_{b,k}^*\left(\frac{1+\eta}{2}\right) = 0$.

Oproti tomu se adjungovaná vlastní funkce $v_{c,k}^*$ odlišuje. Pokud bychom rozšířili její část v_2 na interval $(0, 1)$, získáme funkci splňující kombinaci Dirichletových a Neumannových

podmínek na intervalu $\left(\frac{\xi}{2}, \frac{1+\eta}{2}\right)$, tj. $v_2\left(\frac{\xi}{2}\right) = 0$ a $v_2'\left(\frac{1+\eta}{2}\right) = 0$.

Poznámka 4. Obdobně můžeme zkoumat případ, kdy $\eta < \xi$. Vlastní čísla takové úlohy pak zůstanou stejná jako v situaci, kdy $\xi < \eta$. Odlišují se až vlastní funkce úlohy.

Kapitola 4

Řešitelnost nehomogenní rovnice

V následující kapitole se budeme zabývat řešitelností nehomogenní rovnice, tj. řešitelností diferenciální rovnice (2.1) pro konkrétní číslo λ , ke které přidáme pravou stranu f . Získáme tedy rovnici

$$u''(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (4.1)$$

s původními okrajovými podmínkami (2.2) a (2.3). Dále ukážeme, že formulace podmínek existence a jednoznačnosti řešení pro tuto úlohu je analogická k úloze Sturm-Liouvilleova typu a úzce souvisí s adjungovanou úlohou z kapitoly 3.

4.1 Příklady

Pro ilustraci uvádíme následující čtyři konkrétní situace.

Příklad 1. Nejprve budeme uvažovat $\lambda = 1$ a $f(x) = 1$. Řešíme tedy rovnici

$$u''(x) + u(x) = 1, \quad x \in (0, 1), \quad (4.2)$$

s okrajovými podmínkami (2.2) a (2.3). Obecné řešení lze zapsat jako součet obecného řešení homogenní rovnice $u_h(x)$ a partikulárního řešení nehomogenní rovnice $u_p(x)$, tedy

$$u_a(x) = u_h(x) + u_p(x), \quad (4.3)$$

kde obecné řešení homogenní rovnice má tvar

$$u_h(x) = A \cos(x) + B \sin(x), \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

a partikulární řešení hledáme pomocí metody odhadu. Předpokládáme, že má tvar

$$u_p(x) = K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Toto řešení musí splňovat rovnici (4.2). Po dosazení zjišťujeme, že $K = 1$. Obecné řešení má tedy tvar

$$u_a(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + 1, \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Následně vyřešíme okrajovou úlohu. Z okrajových podmínek (2.2) a (2.3) dostáváme soustavu rovnic

$$A \sin(\xi) + B(1 - \cos(\xi)) = 0, \quad (4.7)$$

$$A(\cos(\eta) - \cos(1)) + B(\sin(\eta) - \sin(1)) = 0. \quad (4.8)$$

Vyjádříme si matici soustavy \mathbf{X}_a :

$$\mathbf{X}_a = \begin{bmatrix} \sin(\xi) & (1 - \cos(\xi)) \\ (\cos(\eta) - \cos(1)) & (\sin(\eta) - \sin(1)) \end{bmatrix}$$

a její determinant

$$\det \mathbf{X}_a = \sin(\xi)(\sin(\eta) - \sin(1)) - (1 - \cos(\xi))(\cos(\eta) - \cos(1)).$$

Použitím goniometrických vzorců upravíme výraz do podoby

$$\det \mathbf{X}_a = \sin\left(\frac{1-\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{1+\eta-\xi}{2}\right).$$

Jelikož platí, že $\xi \in (0, 1)$ a $\eta \in (0, 1)$, výraz výše se nikdy nule nerovná. Z toho vyplývá, že soustava (4.7) a (4.8) má jediné řešení $A = 0$ a $B = 0$. Tedy

$$u_a(x) = 1, \quad (4.9)$$

tzn. existuje právě jedno řešení nehomogenní rovnice (4.2) s okrajovými podmínkami (2.2) a (2.3). \triangleleft

Příklad 2. Dále uvažujme $\lambda = 0$ a $f(x) = 1$. Budeme tedy řešit rovnici

$$u''(x) = 1, \quad x \in (0, 1), \quad (4.10)$$

s okrajovými podmínkami (2.2) a (2.3). Opět nejdříve nalezneme řešení homogenní rovnice, které má tvar

$$u_h(x) = A + Bx, \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Dále hledáme partikulární řešení pomocí metody odhadu. Jelikož je v tomto případě úloha v rezonanci, partikulární řešení musí mít tvar

$$u_p(x) = Kx^2, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

Po dosazení do rovnice (4.10) zjišťujeme, že $K = \frac{1}{2}$. Obecné řešení lze zapsat jako součet $u_h(x)$ a $u_p(x)$, tedy

$$u_b(x) = A + Bx + \frac{x^2}{2}, \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

Následně vyřešíme okrajovou úlohu. Z okrajových podmínek (2.2) a (2.3) dostáváme soustavu rovnic

$$B = B + \eta, \quad (4.14)$$

$$A + B + \frac{1}{2} = A + B\eta + \frac{\eta^2}{2}. \quad (4.15)$$

Z rovnice (4.14) plyne, že $\xi = 0$, což vzhledem k tomu, že $\xi \in (0, 1)$, nikdy nenastane. Z toho vyplývá, že úloha (4.10), (2.2) a (2.3) nemá řešení. \triangleleft

Příklad 3. Dále uvažujme $\lambda = 0$ a $f(x)$ zadanou po částech

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ 1 & \text{pro } x \in (\xi, 1). \end{cases}$$

Budeme tedy řešit rovnici

$$u''(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (0, \xi), \\ 1 & \text{pro } x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad (4.16)$$

s původními okrajovými podmínkami (2.2) a (2.3), ke kterým přidáme podmínky na spojitost $u(x)$ a $u'(x)$ v bodě ξ :

$$u'(\xi-) = u'(\xi+), \quad (4.17)$$

$$u(\xi-) = u(\xi+). \quad (4.18)$$

Požadujeme tedy, aby funkce $u(x) = u_1$ pro $x \in (0, \xi)$ a $u(x) = u_2$ pro $x \in (\xi, 1)$ byla třídy C^1 ($[0, 1]$). Řešení rovnice (4.16) získáme ve tvaru:

$$u_1(x) = A_1 + B_1x, \quad A_1, B_1 \in \mathbb{R}, \quad (4.19)$$

$$u_2(x) = A_2 + B_2x + \frac{x^2}{2}, \quad A_2, B_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

- a) Nejprve řešíme pro $0 < \xi \leq \eta < 1$. Vyřešíme okrajovou úlohu. Z okrajových podmínek (2.2), (2.3), (4.17) a (4.18) dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} B_1 &= B_2, \\ A_2 + B_2\eta + \frac{\eta^2}{2} &= A_2 + B_2 + \frac{1}{2}, \\ B_1 &= B_2 + \xi, \\ A_1 + B_1\xi &= A_2 + B_2\xi + \frac{\xi^2}{2}, \end{aligned}$$

z níž získáme řešení úlohy ve tvaru

$$u_c(x) = \begin{cases} u_1(x) = A_2 - \frac{\xi^2}{2} + \xi x - \frac{1}{2}(\eta + 1)x, \\ u_2(x) = A_2 - \frac{1}{2}(\eta + 1)x + \frac{x^2}{2}, \end{cases} \quad A_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

Vidíme tedy, že řešení v tomto případě existuje a je závislé na parametru A_2 , tj. existuje nekonečně mnoho řešení.

- b) Pro případ, kdy $0 < \eta \leq \xi < 1$, postupujeme analogicky, výslednou funkci $u(x)$ však získáme v odlišném tvaru, a to

$$u_c(x) = \begin{cases} u_1(x) = A_2 - \frac{\xi^2}{2} + \frac{(\xi - 1)^2}{2(\eta - 1)}x, \\ u_2(x) = A_2 + \frac{1 + \xi^2 - 2\xi\eta}{2(\eta - 1)}x + \frac{x^2}{2}, \end{cases} \quad A_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.22)$$

Řešení tedy opět není určeno jednoznačně. \triangleleft

Příklad 4. Ve čtvrtém případě zvolíme $\lambda = \lambda_{b,k} = \frac{4k^2\pi^2}{\xi^2}$ a $f(x) = 1$. Budeme tedy řešit rovnici

$$u''(x) + \frac{4k^2\pi^2}{\xi^2}u(x) = 1 \quad (4.23)$$

s okrajovými podmínkami (2.2) a (2.3). Obecné řešení opět zapíšeme jako součet obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice, tedy

$$u_d(x) = A \cos\left(\frac{2k\pi}{\xi}x\right) + B \sin\left(\frac{2k\pi}{\xi}x\right) + \frac{\xi^2}{4k^2\pi^2}, \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (4.24)$$

Dále vyřešíme okrajovou úlohu. Z okrajových podmínek (2.2) a (2.3) dostáváme soustavu rovnic

$$B(\cos(2k\pi) - 1) = 0, \quad (4.25)$$

$$A\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{\xi}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi\eta}{\xi}\right)\right) = B\left(\sin\left(\frac{2k\pi\eta}{\xi}\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{\xi}\right)\right). \quad (4.26)$$

Z první rovnice vyplývá, že $B \in \mathbb{R}$. Druhou rovnici upravíme do následujícího tvaru, k úpravě využíváme goniometrické vzorce:

$$A \sin\left(\frac{1+\eta}{\xi}k\pi\right) \sin\left(\frac{1-\eta}{\xi}k\pi\right) = B \cos\left(\frac{1+\eta}{\xi}k\pi\right) \sin\left(\frac{1-\eta}{\xi}k\pi\right). \quad (4.27)$$

Vidíme, že může nastat případ, kdy řešení závisí na obou parametrech A a B , tj. úloha má dvojnásobné vlastní číslo. To odpovídá situaci, kdy

$$\sin\left(\frac{1-\eta}{\xi}k\pi\right) = 0,$$

což nastane, když $\frac{1-\eta}{\xi}k\pi = l\pi$ pro nějaké $k, l \in \mathbb{N}$, tj. $\lambda_{b,k} = \lambda_{a,l}$. Získáme tedy řešení úlohy ve tvaru (4.24). Pokud tato situace nenastane, řešení vyjádříme jako

$$u_d(x) = C \cos\left(\frac{2k\pi}{\xi}x\right) \cos\left(k\pi\frac{\eta+1}{\xi}\right) + C \sin\left(\frac{2k\pi}{\xi}x\right) \sin\left(k\pi\frac{\eta+1}{\xi}\right) + \frac{\xi^2}{4k^2\pi^2}, \quad (4.28)$$

kde $C \in \mathbb{R}$, tj. výsledné řešení existuje, bude záviset na parametru C a není tedy určeno jednoznačně. \triangleleft

V příkladu 1 vidíme, že úloha má právě jedno řešení a současně zvolené číslo λ není vlastním číslem úlohy (2.1) – (2.3).

V příkladu 2 máme $\lambda = 0$, k němu příslušnou vlastní funkci $u_0(x) = 1$, vlastní funkce příslušné adjungované úlohy $v_0^*(x) = 1$ pro $x \in (0, \xi)$, $v_0^*(x) = 0$ pro $x \in (\xi, 1)$ a funkci pravé strany ve tvaru $f(x) = 1$. Můžeme sledovat následující vlastnosti:

$$\int_0^1 f(x)u_0(x)dx = \int_0^1 1dx = 1 \neq 0,$$

$$\int_0^1 f(x)v_0^*(x)dx = \int_0^\xi 1dx + \int_\xi^1 0dx = \xi \neq 0$$

a zároveň neexistuje řešení. Vidíme, že pravá strana f není kolmá na vlastní funkci, ani na vlastní funkci adjungované úlohy.

V příkladu 3 je opět $\lambda = 0$, k němu příslušná vlastní funkce $u_0(x) = 1$, vlastní funkce příslušné adjungované úlohy $v_0^*(x) = 1$ pro $x \in (0, \xi)$, $v_0^*(x) = 0$ pro $x \in (\xi, 1)$ a funkci pravé strany máme tentokrát ve tvaru $f(x) = 0$ pro $x \in (0, \xi)$, $f(x) = 1$ pro $x \in (\xi, 1)$. Opět sledujeme tyto vlastnosti:

$$\int_0^1 f(x)u_0(x)dx = \int_0^1 1dx = 1 \neq 0,$$

$$\int_0^1 f(x)v_0^*(x)dx = \int_0^\xi 0dx + \int_\xi^1 0dx = 0,$$

tj. adjungovaná vlastní funkce v_0^* je kolmá na funkci pravé strany f dané po částech. Současně vidíme, že řešení úlohy existuje, avšak není určeno jednoznačně.

V příkladu 4 uvažujeme $\lambda = \lambda_{b,k} = \frac{4k^2\pi^2}{\xi^2}$, příslušné vlastní funkce $u_{b,k}$, vlastní funkce adjungované úlohy $v_{b,k}^*$ a pravou stranu $f(x) = 1$. Pozorujeme, že jsou opět splněny vztahy

$$\int_0^1 f(x)u_{b,k}(x)dx \neq 0, \quad (4.29)$$

$$\int_0^1 f(x)v_{b,k}^*(x)dx = 0, \quad (4.30)$$

tj. funkce pravé strany je kolmá na vlastní funkci adjungované úlohy. Řešení úlohy existuje, není však určeno jednoznačně. Nyní se zaměříme na případ, kdy oba parametry A , B ve vztahu (4.24) můžeme volit libovolně, tedy na případ dvojnásobného vlastního čísla $\lambda = \lambda_{a,l} = \lambda_{b,k}$ pro konkrétní $k, l \in \mathbb{N}$. Vidíme, že tomuto vlastnímu číslu nyní odpovídají dvě vlastní funkce $u_{a,l}$ a $u_{b,k}$ a vlastní funkce adjungované úlohy $v_{a,l}^*$ a $v_{b,k}^*$. Kromě (4.29) a (4.30) navíc platí

$$\int_0^1 f(x)u_{a,l}(x)dx \neq 0,$$

$$\int_0^1 f(x)v_{a,l}^*(x)dx = 0,$$

tedy funkce pravé strany je kolmá na obě vlastní funkce adjungované úlohy a zároveň řešení není určeno jednoznačně.

Vzhledem k výše uvedeným integrálním rovnostem se dá předpokládat, že na řešitelnost úlohy bude mít vliv pouze vlastní funkce adjungované úlohy v^* , nikoliv vlastní funkce u , konkrétně kolmost této funkce na funkci pravé strany f .

4.2 Podmínky řešitelnosti

V této části se budeme zabývat tím, jak je to s existencí a jednoznačností řešení okrajové úlohy Sturm-Liouvilleova typu, a naformulujeme analogická tvrzení pro úlohu (4.1), (2.2) a (2.3).

4.2.1 Podmínky řešitelnosti Sturm-Liouvilleovy úlohy

Nejprve shrneme vztahy a postupy z [9]. Uvažujeme okrajovou úlohu ve tvaru

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (4.31)$$

kde $l \in \mathbb{R}^+$ a $f = f(x)$ je funkce pravé strany, s okrajovými podmínkami

$$\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \quad (4.32)$$

$$\gamma y(l) + \delta y'(l) = 0, \quad |\gamma| + |\delta| \neq 0. \quad (4.33)$$

Předpokládejme, že

$$p \in C^1([0, l]), \quad q \in C^0([0, l]), \quad f \in C^0([0, l]), \quad p(x) > 0. \quad (4.34)$$

Takto formulovaná úloha se nazývá Sturm-Liouvilleova úloha. Nyní tuto úlohu přepíšeme do operátorového tvaru

$$Ly(x) = f(x), \quad (4.35)$$

kde

$$Ly(x) = -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \quad (4.36)$$

a

$$\mathcal{D}(L) = \{y(x) \in C^2(0, l) \cap C^1([0, l]); \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \gamma y(l) + \delta y'(l) = 0\}. \quad (4.37)$$

Věta 5 ([9, str. 67]). *Nechť číslo 0 není vlastním číslem operátoru L na množině $\mathcal{D}(L)$. Pak existuje právě jedno klasické řešení $y = y(x)$ okrajové úlohy (4.31) – (4.33) a lze jej psát ve tvaru*

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi)f(\xi)d\xi, \quad (4.38)$$

kde $G(x, \xi)$ je Greenova funkce uvažované okrajové úlohy.

Věta 6 ([9, str. 68]). *Nechť číslo 0 je s-násobným vlastním číslem operátoru L na množině $\mathcal{D}(L)$ a nechť mu odpovídají lineárně nezávislé vlastní funkce $v_{01}, v_{02}, \dots, v_{0s}$. Pak existuje klasické řešení $w = w(x)$ okrajové úlohy (4.31) – (4.33) právě tehdy, splňuje-li funkce f podmínky*

$$(f, v_{0j}) = \int_0^l f(x)v_{0j}(x)dx = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.39)$$

Toto řešení není určeno jednoznačně. Jednoznačnost zaručíme dodatečnými podmínkami

$$(w, v_{0j}) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.40)$$

Obecně jakákoli funkce $y = y(x)$ ve tvaru

$$y(x) = w(x) + \sum_{j=1}^s c_j v_{0j}(x), \quad (4.41)$$

kde c_1, c_2, \dots, c_s jsou libovolné konstanty, je rovněž řešením úlohy (4.31) – (4.33).

4.2.2 Fourierova metoda

Fourierova metoda je jednou z metod zabývajících se konstrukcí řešení okrajové úlohy (4.31) – (4.33). Nejprve sestrojíme odpovídající úlohu na vlastní čísla, najdeme posloupnost $\{\lambda_k\}$ vlastních čísel operátoru L a k nim odpovídající úplný ortogonální systém vlastních funkcí $\{v_k\}$. Vlastnost ortogonalitly vlastních funkcí operátoru L plyne ze samoadjungovanosti operátoru L. Dále stanovíme rozvoj funkce pravé strany f do Fourierovy řady podle ortogonální soustavy $\{v_k\}$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k v_k(x), \quad d_k = \frac{(f, v_k)}{\|v_k\|^2}. \quad (4.42)$$

V dalším kroku metody pak předpokládáme řešení $y = y(x)$ ve tvaru Fourierovy řady

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x), \quad (4.43)$$

kde c_k jsou v tuto chvíli neznámé konstanty. Formálními úpravami diferenciální rovnice (4.31) dostaneme vztah pro výpočet koeficientů c_k . Protože systém $\{v_k\}$ je úplný, musí platit

$$c_k \lambda_k = d_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.44)$$

Nemá-li řešená úloha nulové vlastní číslo, hledané řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\lambda_k} v_k(x). \quad (4.45)$$

Toto vyjádření lze dále pomocí formálních úprav napsat ve tvaru

$$y(x) = \int_0^l f(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(\xi)v_k(x)}{\lambda_k \|v_k\|^2} d\xi. \quad (4.46)$$

Funkci

$$G(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(\xi)v_k(x)}{\lambda_k \|v_k\|^2}, \quad x, \xi \in [0, l], \quad (4.47)$$

nazýváme Greenovou funkcí okrajové úlohy (4.31) – (4.33) a řešení potom můžeme psát ve tvaru (4.48). Vidíme tedy, že v případě, kdy existuje index k_0 takový, že číslo $\lambda_{k_0} = 0$ je vlastním číslem operátoru, musí být koeficient d_{k_0} nulový. Pokud by toto nebylo splněno, nelze řešení

konstruovat pomocí Fourierovy metody. Pokud koeficient d_{k_0} je nulový, výše uvedený postup použít lze, ale neurčíme koeficient c_{k_0} , který může nabývat libovolné reálné hodnoty. Pokud $d_{k_0} = 0$, plyne z (4.42), že platí $(f, v_{k_0}) = 0$. Je tedy splněna nutná podmínka existence řešení. V případě násobného vlastního čísla musí být všechny vlastní funkce příslušné k $\lambda_{k_0} = 0$ kolmé na funkci pravé strany f .

Poznámka 5. Formálními úpravami zmíněnými v textu se rozumí záměna sumy a integrálu ve vztahu (4.46), což lze provést za předpokladu stejnoměrné konvergence Fourierovy řady na intervalu $(0, l)$.

4.2.3 Formulace podmínek řešitelnosti pro úlohu (4.1), (2.2) a (2.3)

Nyní se budeme zabývat existencí a jednoznačností řešení úlohy (4.1), (2.2) a (2.3). Tato úloha není Sturm-Liouvilleova. Po přepsání této úlohy do tvaru (3.32) dostaneme sice diferenciální operátor, který rovnicí odpovídá operátoru Sturm-Liouvilleova typu, kdy v našem případě $p(x) \equiv -1$ a $q(x) \equiv -\lambda$, avšak odlišuje se v okrajových podmínkách (2.2) a (2.3). Nelze tedy použít výše uvedené výsledky a konstrukce řešení. Navíc námi uvažovaný operátor L (3.32) není samoadjungovaný, tím pádem je porušena vlastnost ortogonality vlastních funkcí a nemůžeme tedy použít ani Fourierovu metodu ke konstrukci řešení. Očekáváme, že ve formulaci podmínek řešitelnosti nehrají důležitou roli jeho vlastní funkce, nýbrž vlastní funkce adjungovaného operátoru L^* . Tudíž ani výše uvedené tvrzení o nutné a postačující podmínce na existenci a jednoznačnost řešení nelze použít, avšak vyslovíme analogické tvrzení pro námi zkoumanou úlohu.

Hypotéza 1. *Nechť číslo λ není vlastním číslem operátoru L na množině $\mathcal{D}(L)$. Pak existuje právě jedno klasické řešení $y = y(x)$ okrajové úlohy (4.1), (2.2) a (2.3) a lze jej psát ve tvaru*

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (4.48)$$

kde $G(x, \xi)$ je Greenova funkce uvažované okrajové úlohy.

Hypotéza 2. *Nechť číslo λ je s -násobným vlastním číslem operátoru L na množině $\mathcal{D}(L)$ a nechť mu odpovídají lineárně nezávislé vlastní funkce u_1, u_2, \dots, u_s a lineárně nezávislé vlastní funkce příslušné adjungované úlohy $v_1^*, v_2^*, \dots, v_s^*$. Pak existuje řešení $w = w(x)$ nehomogenní okrajové úlohy (4.1), (2.2) a (2.3) právě tehdy, když jsou v_j^* kolmé na funkci pravé strany f , tj. splňuje-li funkce f podmínky*

$$(f, v_j^*) = \int_0^l f(x) v_j^*(x) dx = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.49)$$

Toto řešení není určeno jednoznačně. Jednoznačnost zaručíme dodatečnými podmínkami

$$(w, u_j) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.50)$$

Obecně jakákoliv funkce $y = y(x)$ ve tvaru

$$y(x) = w(x) + \sum_{j=1}^s c_j u_j(x), \quad (4.51)$$

kde c_1, c_2, \dots, c_s jsou libovolné konstanty, je rovněž řešením úlohy (4.1), (2.2) a (2.3).

Naformulovali jsme obdobná tvrzení pro úlohu (4.1), (2.2) a (2.3), jaká byla vyslovena v předchozí části pro Sturm-Liouvilleovu úlohu. Jsou ve tvaru hypotéz, jelikož nejsme schopni pomocí základních prostředků matematické analýzy dokázat postačující podmínku. Umíme ale vyřešit otázku týkající se nutné podmínky řešitelnosti a tvaru řešení, proto tato tvrzení nyní naformulujeme jako věty, které následně dokážeme.

Věta 7 (Nutná podmínka řešitelnosti). *Nechť λ je s -násobným vlastním číslem nehomogenní úlohy (4.1), (2.2) a (2.3) s příslušnými lineárně nezávislými vlastními funkcemi adjungované úlohy v_j^* , $j = 1, \dots, s$, a necht' existuje řešení této úlohy. Potom platí*

$$(f, v_j^*) = \int_0^l f(x)v_j^*(x)dx = 0 \quad \forall j = 1, \dots, s. \quad (4.52)$$

Důkaz. Důkaz provedeme analogicky ke klasickému důkazu pro Sturm-Liouvilleovu úlohu, jehož nástin lze nalézt např. v [9, str. 68, 69]. Za předpokladu, že existuje řešení $u = u(x)$ úlohy (4.1), (2.2) a (2.3) a $0 < \xi \leq \eta < 1$, provedeme následující úpravy. Nejprve skalárně vynásobíme rovnici (4.1) libovolnou vlastní funkcí adjungované úlohy v_j^* příslušnou vlastnímu číslu λ , tedy

$$u''(x) + \lambda u(x) = f(x) \quad / \cdot v_j^*(x). \quad (4.53)$$

Nyní pomocí metody per-partes rozepíšeme levou stranu rovnosti (4.53). Jelikož je funkce v_j^* po částech hladká, počítáme integrál na levé straně též po částech.

$$\begin{aligned} \int_0^1 u''(x)v_j^*(x)dx + \int_0^1 \lambda u(x)v_j^*(x)dx &= \int_0^\xi u''(x)v_j^*(x)dx + \int_\xi^\eta u''(x)v_j^*(x)dx + \\ &\int_\eta^1 u''(x)v_j^*(x)dx + \int_0^1 \lambda u(x)v_j^*(x)dx = [v^*(x)u'(x)]_0^{\xi-} - [u(x)(v^*(x))']_0^{\xi-} + \\ \int_0^\xi u(x)(v_j^*(x))'' dx + [v^*(x)u'(x)]_{\xi+}^{\eta-} - [u(x)(v^*(x))']_{\xi+}^{\eta-} &+ \int_\xi^\eta u(x)(v_j^*(x))'' dx + \\ [v^*(x)u'(x)]_{\eta+}^1 - [u(x)(v^*(x))']_{\eta+}^1 + \int_\eta^1 u(x)(v_j^*(x))'' dx &+ \int_0^1 \lambda u(x)v_j^*(x)dx. \end{aligned}$$

Z okrajových podmínek (2.2), (2.3) a (3.35) – (3.40) víme, že se hraniční členy odečtou. Dále využijeme rovnosti $Lv_j^* = -(v_j^*)'' = \lambda v_j^*$ a tím pádem dostáváme

$$\begin{aligned} \int_0^\xi u(x)(v_j^*(x))'' dx + \int_\xi^\eta u(x)(v_j^*(x))'' dx + \int_\eta^1 u(x)(v_j^*(x))'' dx + \int_0^1 \lambda u(x)v_j^*(x)dx &= \\ \int_0^1 u(x)(v_j^*(x))'' dx + \int_0^1 \lambda u(x)v_j^*(x)dx &= - \int_0^1 \lambda u(x)v_j^*(x)dx + \int_0^1 \lambda u(x)v_j^*(x)dx = 0, \end{aligned}$$

tedy

$$0 = \int_0^1 f(x)v_j^*(x)dx \quad \forall j = 1, \dots, s$$

a důkaz je hotov. Pro případ $0 < \eta \leq \xi < 1$ dokážeme analogicky. \square

Věta 8 (O tvaru řešení). *Nechť λ je s -násobným vlastním číslem nehomogenní úlohy (4.1), (2.2) a (2.3) s příslušnými lineárně nezávislými vlastními funkcemi u_j , $j = 1, \dots, s$, a necht' funkce $w = w(x)$ je řešením této úlohy. Potom platí, že obecně jakákoli funkce $y = y(x)$ ve tvaru*

$$y(x) = w(x) + \sum_{j=1}^s c_j u_j(x), \quad (4.54)$$

kde c_1, c_2, \dots, c_s jsou libovolné konstanty, je rovněž řešením úlohy (4.1), (2.2) a (2.3).

Důkaz. Důkaz provedeme dosazením funkce y do rovnice (4.1). Získáme

$$w''(x) + \lambda w(x) + \sum_{j=1}^s c_j u_j''(x) + \lambda \sum_{j=1}^s c_j u_j(x) = f(x). \quad (4.55)$$

Za předpokladu, že w je řešením nehomogenní úlohy (4.1), (2.2) a (2.3) dostaneme vztah

$$\sum_{j=1}^s c_j u_j''(x) + \lambda \sum_{j=1}^s c_j u_j(x) = 0. \quad (4.56)$$

Vlastní funkce u_j příslušné vlastnímu číslu λ jsou řešením nehomogenní úlohy (2.1) – (2.3). Vztah (4.56) tím pádem platí. Funkce w i u_j splňují okrajové podmínky, které jsou homogenní, tedy i funkce y vzniklá součtem těchto funkcí je splňuje a důkaz je hotov. \square

Poznámka 6. Prostředky funkcionální analýzy nám umožňují zkoumat řešitelnost obecnějších úloh, než jsou úlohy Sturm-Liouvilleova typu, pomocí tzv. Fredholmovy alternativy, kterou můžeme najít např. jako Theorem 6.6 a Remark 4 v [10, str. 160]. Avšak tyto úlohy musí být ve tvaru

$$u - Tu = f, \quad (4.57)$$

kde T je kompaktní operátor. Fredholmova alternativa se pak dá formulovat jako:

1. Buď má homogenní rovnice (4.57) jen triviální řešení a pak (4.57) je jednoznačně řešitelná pro libovolnou pravou stranu f ,
2. nebo má homogenní rovnice (4.57) s lineárně nezávislých řešení a pak má (4.57) s libovolnou pravou stranou f řešení právě tehdy, když je splněno s podmínek ortogonality takových, že

$$(f, v_j^*) = 0 \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, s,$$

kde $v^* - T^*v^* = 0$ a T^* je adjungovaný operátor k operátoru T .

Citované tvrzení odpovídá vysloveným hypotézám 1 a 2. Pokud bychom námi zkoumanou úlohu přepsali do operátorové podoby (4.57), lze tento obecný nástroj použít k jejich důkazu.

Kapitola 5

Závěr

V této bakalářské práci jsme se zabývali konkrétní čtyřbodovou okrajovou úlohou, pro níž jsme našli vlastní čísla a příslušné vlastní funkce. Zjistili jsme, že pro určitá nastavení parametrů tato úloha přejde na jednu ze standardních dvoubodových okrajových úloh. Dále jsme k této úloze sestrojili adjungovanou úlohu pomocí obecného postupu z [8] a našli její vlastní čísla a vlastní funkce. V poslední kapitole jsme se zabývali řešitelností této úlohy pro nenulovou pravou stranu, vyřešili několik konkrétních případů pro pevné λ a pevné f a zjistili, že pro řešitelnost takových úloh je důležitá kolmost vlastních funkcí adjungované úlohy na pravou stranu f . Na základě podmínek řešitelnosti pro úlohy Sturm-Liouvilleova typu [9] jsme vyslovili nová tvrzení pro námi zkoumanou úlohu a tvrzení týkající se nutné podmínky řešitelnosti a tvaru řešení jsme následně dokázali.

V případě, že bychom se dále zabývali tímto tématem, můžeme zkoumat řešitelnost uvažované úlohy z pohledu funkcionální analýzy, kompaktních a Fredholmových operátorů a také hledat příslušnou Greenovu funkci úlohy, což ale přesahuje rámec této práce.

Literatura

- [1] Il'in, V. A. a Moiseev, E. I. Nonlocal boundary value problem of the second kind for a SturmLiouville operator. *Differ. Equ.* 1987, **23**(8), 979-987.
- [2] Gupta, C. P. A Dirichlet type multi-point boundary value problem for second order ordinary differential equations. *Nonlinear Analysis*. 1996, **26**, 925-931.
- [3] Ma, R. a Castaneda, N. Existence of solutions of nonlinear m-point boundary-value problems. *J. Math. Anal. Appl.* 2001, **256**, 556-567.
- [4] Feng, W. a Webb, J.R.L. Solvability of three point boundary value problems at resonance. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*. 1997, **30**(6), 3227-3238.
- [5] Timoshenko, S. P. *Theory of Elastic Stability*. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [6] Franců, J. *Obyčejné diferenciální rovnice* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2012 [cit. 2018-04-10]. Dostupné online z: <http://www.mat.fme.vutbr.cz/Home/downloads>
- [7] Došlá, Z. a Kuben, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. První vydání. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2004. ISBN 80-210-3121-2.
- [8] Locker, J. Self-adjointness for multi-point differential operators. *Pacific J. Math.* 1973, **45**, 561-570.
- [9] Míka, S. a Kufner, A. *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1981.
- [10] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2011. ISBN 978-0-387-70913-0.