

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky
Obor: Matematika a její aplikace



Odhady prvního vlastního čísla okrajových úloh

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Ing. Petr Ernest
Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jiří Benedikt, Ph.D.
Rok: 2018

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2017/2018

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Ing. Petr ERNEST**
Osobní číslo: **A15B0007K**
Studijní program: **B1101 Matematika**
Studijní obor: **Matematika a její aplikace**
Název tématu: **Odhady prvního vlastního čísla okrajových úloh**
Zadávací katedra: **Katedra matematiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Seznámit se s pojmem prvního vlastního čísla základních okrajových úloh pro diferenciální rovnice 2. řádu.
2. Ukázat, jak lze pomocí variační charakteristiky prvního vlastního čísla odvodit jeho horní odhady volbou různých testovacích funkcí, zejména polynomiálních či po částech polynomiálních funkcí.
3. Ukázat, jak lze pomocí tzv. Piconeho identity odvodit dolní odhady prvního vlastního čísla, opět volbou různých testovacích funkcí.
4. Diskuze výsledků.

Rozsah grafických prací: dle potřeby

Rozsah kvalifikační práce: cca 20 stran

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná

Seznam odborné literatury:

- W. Allegretto, Y.X. Huang: A Picone's identity for the p -Laplacian and applications. *Nonlinear Anal.* 32 (1998), pp. 819-830.
- J. Benedikt, P. Drábek: Estimates of the principal eigenvalue of the p -Laplacian, *J. Math. Anal. Appl.* 393 (2012), pp. 311-315.
- P. Drábek, S. Míka: *Matematická analýza 2. Skripta ZČU Plzeň.*
- P. Drábek, J. Milota: *Methods of Nonlinear Analysis, Applications to Differential Equations, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin (2007).*

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Benedikt, Ph.D.

Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: 2. října 2017

Termín odevzdání bakalářské práce: 24. května 2018



Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
děkanka



Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 2. října 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu uvedenou v příloženém seznamu.

V Plzni dne

.....
Ing. Petr Ernest

Poděkování

Děkuji Doc. RNDr. Jiřímu Benediktovi, Ph.D. za trpělivost, za vzorné vedení mé bakalářské práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily.

Ing. Petr Ernest

Název práce:

Odhady prvního vlastního čísla okrajových úloh

Autor: Ing. Petr Ernest

Obor: Matematika a její aplikace

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jiří Benedikt, Ph.D.

Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni

Konzultant: —

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá dolními a horními odhady prvního vlastního čísla okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu. Detailně jsou popsány odhady prvního vlastního čísla okrajové úlohy pro obyčejné lineární diferenciální rovnice druhého řádu.

Klíčová slova: Odhady prvního vlastního čísla, okrajové úlohy

Title:

Estimates of the Principal Eigenvalue of Boundary Value Problems

Author: Ing. Petr Ernest

Abstract: This bachelor thesis deals with Estimates of Principal Eigenvalue of the Boundary Value Problems for second order Ordinary Differential Equations. In detail, the Estimates of Principal Eigenvalue of the Boundary Value Problems for second order Linear Ordinary Differential Equations are described.

Key words: Estimates of Principal Eigenvalue, Boundary Value Problems

Obsah

Úvod	9
Základní pojmy a značení	10
1 Okrajové úlohy pro rovnice 2. řádu	12
1.1 Úvod	12
1.2 Dirichletova okrajová úloha	12
1.3 Neumannova okrajová úloha	14
1.4 Obecná okrajová úloha	16
1.5 Shrnutí	17
2 Vlastní čísla a vlastní funkce okrajových úloh	18
2.1 Úvod	18
2.2 Okrajová úloha s parametrem	18
2.3 Vlastní čísla a vlastní funkce okrajových úloh	18
2.4 Shrnutí	20
3 Horní odhad prvního vlastního čísla okrajových úloh	21
3.1 Úvod	21
3.2 Rayleighův podíl	21
3.3 Horní odhad prvního vlastního čísla úlohy	22
3.4 Výpočty horních odhadů prvního vlastního čísla okrajových úloh	23
3.5 Shrnutí	40
4 Dolní odhady prvního vlastního čísla okrajových úloh	41
4.1 Úvod	41
4.2 Piconeho identita	41

4.3	Dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy	42
4.4	Výpočty dolních odhadů prvního vlastního čísla okrajových úloh	48
4.5	Shrnutí	59
5	Odhady prvního vlastního čísla obecné jednodimenzionální okrajové úlohy s p-laplaciánem	61
5.1	Obecná jednodimenzionální okrajová úloha s p -laplaciánem . . .	61
5.2	První vlastní číslo obecné jednodimenzionální okrajové úlohy . .	61
5.3	Horní odhad prvního vlastního čísla obecné úlohy	62
5.4	Dolní odhad prvního vlastního čísla obecné úlohy	63
5.5	Shrnutí	65
	Závěr	67
	Seznam použitých zdrojů	69

Úvod

Tato práce pojednává o okrajových úlohách pro obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu. V případě zájmu o diferenciální rovnice jsou dva hlavní směry, kterými se lze vydat, studium počátečních a okrajových úloh. Studium počátečních úloh se týká studia fyzikálních a dynamických systémů a jejich vlastností, jako je například stabilita, řešitelnost atd. Zejména studium nelineárních obyčejných diferenciálních a nelineárních parciálních diferenciálních rovnic skýtá zajímavá témata, jako například bifurkace, popřípadě citlivost na počáteční podmínky, končící až chaotickým chováním systémů, které tyto rovnice popisují. Druhý směr, kterým se lze při studiu diferenciálních rovnic vydat, je studium okrajových úloh pro diferenciální rovnice. Tato část má velmi mnoho praktických aplikací (nosník s pevným uložením, zatopený nosník (viz [2]), průběh elektrického pole s danými potenciály atd). Tímto směrem, tedy studia okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, se zabývá tato práce, kde jsou definovány samotné okrajové úlohy jako Dirichletova okrajová úloha, Neumannova úloha a obecná okrajová úloha. Dále práce pokračuje definicí vlastních čísel a vlastních funkcí okrajových úloh včetně odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy. Právě odhady prvního vlastního čísla okrajových úloh tvoří hlavní náplň této práce.

Dokument je členěn do kapitol, první kapitola je věnována definicím základních typů okrajových úloh a je také členěna do podkapitol, kde je probrána Dirichletova okrajová úloha, Neumannova úloha a obecná okrajová úloha pro diferenciální rovnice druhého řádu. Ve druhé kapitole se práce zabývá definicí vlastních čísel a vlastních funkcí okrajových úloh. Třetí kapitola pojednává o horním odhadu prvního vlastního čísla pro okrajové úlohy pro lineární diferenciální rovnice 2. řádu a čtvrtá kapitola se zabývá dolními odhady prvního vlastního čísla těchto okrajových úloh. Pátá, poslední kapitola, je věnována odhadům prvního vlastního čísla pro obecně nelineární obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s jednodimenzionálním p -laplaciánem.

Základní pojmy a značení

V této úvodní části textu uvedeme základní pojmy a značení, jež budou dále v textu používány. Bylo čerpáno zejména z pramenů [4, 5, 6, 7].

Prostor $C(0, 1)$

Prostor $C(0, 1)$ je množina všech funkcí $f = f(t), t \in (0, 1)$, které jsou definovány na tomto intervalu a jsou na tomto intervalu **spojité a omezené**.

Prostor $C(0, 1)$

- je normovaný (lineární vektorový) prostor s normou $\|f\|_\infty = \sup_{t \in (0, 1)} |f(t)|$,
- je Banachův prostor.

Prostor $C^k(0, 1)$

Prostor $C^k(0, 1)$, kde $k \in \mathbb{N}$, je množina všech funkcí $f = f(t), t \in (0, 1)$, pro které platí

1. f je definována na intervalu $(0, 1)$,
2. f má spojité a omezené derivace na intervalu $(0, 1)$ do řádu k včetně.

Prostor $C^k(0, 1)$

- je normovaný lineární vektorový prostor s normou $\|f\|_{C^k} = \sum_{i=0}^k \sup_{t \in (0, 1)} |f^{(i)}(t)|$,
- je Banachův prostor.

Prostor $C^\infty(0, 1)$

Prostor $C^\infty(0, 1) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(0, 1)$, kde $C^0(0, 1) = C(0, 1)$.

Prostor $C_0^\infty(0, 1)$

Prostor $C_0^\infty(0, 1)$ je množina $C_0^\infty(0, 1) = \{f \in C^\infty(0, 1) : \overline{\{t \in (0, 1) : f(t) \neq 0\}} \subset (0, 1), f(0) = 0, f(1) = 0\}$.

Prostor $L^p(0, 1)$

Prostor $L^p(0, 1)$, $p \in [1, \infty)$ je vektorový prostor všech reálných funkcí $f = f(t)$, $t \in (0, 1)$, pro které platí, že Lebesgueův integrál z jejich absolutní hodnoty umocněné číslem p je konečný, tj.

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty.$$

Prostor $L^p(0, 1)$

- je normovaný prostor s normou $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ (tzv. L_p norma),
- je Banachův prostor.

Prostor $W^{1,p}(0, 1)$

Prostor $W^{1,p}(0, 1)$, $p \in [1, \infty)$ je množina všech funkcí $f = f(t)$, $f \in L^p(0, 1)$, jejichž distributivní derivace patří opět do prostoru $L^p(0, 1)$.

Prostor $W^{1,p}(0, 1)$

- je normovaný prostor s normou $\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p$,
- je Banachův prostor.

Prostor $W_0^{1,p}(0, 1)$

Prostor $W_0^{1,p}(0, 1)$ je množina $W_0^{1,p}(0, 1) = \{f \in W^{1,p}(0, 1) : f(0) = 0, f(1) = 0\}$.

Skalární součin

Prostor $L^2(0, 1)$ je unitární prostor, definujeme-li skalární součin předpisem

$$(u, v) = \int_0^1 u(t)v(t)dt. \quad (1)$$

Pro normu (norma indukovaná skalárním součinem) platí

$$\|u\|_2 = \sqrt{(u, u)}. \quad (2)$$

Po částech hladká funkce

Funkce $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervalu $[0, 1]$ *po částech hladká*, jestliže existuje konečná množina bodů $A \subset [0, 1]$ taková, že má funkce f na množině $[0, 1] \setminus A$ spojitou první derivaci a v každém bodu $a \in A$ mají funkce f a její derivace f' jednostranné limity.

Kapitola 1

Okrajové úlohy pro rovnice 2. řádu

1.1 Úvod

Významnou roli při řešení úloh s diferenciálními rovnicemi hrají nejen počáteční, ale i okrajové úlohy. V této kapitole budeme uvažovat základní **okrajové úlohy** pro diferenciální rovnice 2. řádu. Typickou diferenciální rovnicí 2. řádu rozumíme rovnici [1]

$$-(p(t)u')' + q(t)u = f(t), \quad (1.1)$$

kde $p = p(t)$, $q = q(t)$, $f = f(t)$ jsou dané funkce na intervalu $[a, b]$ a $u = u(t)$ je hledaná funkce.

Rovnice (1.1) má využití v řadě fyzikálních aplikací a funkci u označujeme obvykle jako *stavovou funkci* a funkci $w = -p(t)u'$ jako *tokovou funkci*. Podle typu okrajových podmínek, které k rovnici (1.1) přísluší, rozlišujeme různé typy okrajových úloh.

1.2 Dirichletova okrajová úloha

Dirichletova okrajová úloha je formulována tak, že hledáme spojitou funkci $u = u(t)$, $t \in [a, b]$, tak, aby platilo (viz [1])

$$\begin{aligned} -(p(t)u')' + q(t)u &= f(t), & t \in (a, b), \\ u(a) &= g_1, & u(b) = g_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

kde $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$ jsou daná čísla.

Pro lepší pochopení Dirichletovy okrajové úlohy uvedeme ilustrační příklady s diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty.

Příklad 1.1

Nalezněte řešení Dirichletovy okrajové úlohy

$$\begin{aligned}u'' + 9u &= 16 \cos t, & t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\u(0) &= 0, u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Pro obecné řešení naší rovnice platí

$$u(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + 2 \cos t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po aplikaci okrajových podmínek v zadání úlohy dostaneme soustavu rovnic

$$C_1 + 2 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Úloha je jednoznačně řešitelná a pro řešení naší okrajové úlohy platí

$$u(t) = -2 \cos 3t + 2 \cos t.$$

Příklad 1.2

Nalezněte řešení Dirichletovy okrajové úlohy

$$\begin{aligned}u'' + 9u &= 16 \cos t, & t \in (0, \pi), \\u(0) &= 0, u(\pi) = 0.\end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice je stejné jako v předchozím příkladu a po aplikaci okrajových podmínek v zadání úlohy dostaneme soustavu dvou ekvivalentních rovnic

$$C_1 + 2 = 0, \quad -C_1 - 2 = 0.$$

Úloha již není jednoznačně řešitelná, konstantu $C_2 = C$ můžeme v tomto případě volit libovolně, tedy pro řešení naší okrajové úlohy platí

$$u(t) = C \sin 3t - 2 \cos 3t + 2 \cos t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 1.3

Nalezněte řešení Dirichletovy okrajové úlohy

$$\begin{aligned}u'' + 9u &= 16 \cos t, & t \in (0, \pi), \\u(0) &= 0, u(\pi) = 1.\end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice je stejné opět jako v předchozím příkladu a po aplikaci okrajových podmínek v zadání úlohy dostaneme soustavu dvou rovnic, která nemá řešení, tj.

$$C_1 + 2 = 0, \quad -C_1 - 2 = 1.$$

Okrajová úloha tedy již v tomto případě nemá řešení vůbec.

1.3 Neumannova okrajová úloha

Neumannova okrajová úloha oproti Dirichletově úloze využívá v okrajových podmínkách derivaci hledané funkce a je formulována tak, že hledáme funkci $u = u(t), t \in [a, b]$ tak, aby platilo (viz [1])

$$\begin{aligned} -(p(t)u')' + q(t)u &= f(t), & t \in (a, b), \\ -p(a)u'(a) &= g_1, & p(b)u'(b) = g_2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

kde $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$ jsou daná čísla.

Opět pro lepší pochopení Neumannovy okrajové úlohy uvedeme ilustrační příklady s diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty.

Příklad 1.4

Nalezněte řešení Neumannovy okrajové úlohy

$$\begin{aligned} u'' + 4u &= 0, & t \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \\ u' \left(-\frac{\pi}{3}\right) &= a, & u' \left(\frac{\pi}{3}\right) = b, & a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pro obecné řešení rovnice platí

$$u(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pro derivaci řešení můžeme napsat

$$u'(t) = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t.$$

Po aplikaci okrajových podmínek v zadání úlohy dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\sqrt{3}C_1 - C_2 = a, \quad -\sqrt{3}C_1 - C_2 = b,$$

řešení rovnic je jednoznačné

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\sqrt{3}}{6}(a - b), \\ C_2 &= -\frac{1}{2}(a + b). \end{aligned}$$

Úloha je jednoznačně řešitelná pro libovolná reálná čísla a, b a pro řešení naší okrajové úlohy platí

$$u(t) = \frac{\sqrt{3}}{6}(a - b) \cos 2t - \frac{1}{2}(a + b) \sin 2t.$$

Příklad 1.5

Nalezněte řešení Neumannovy okrajové úlohy

$$\begin{aligned}u'' + 4u &= 0, \quad t \in (0, t_0), \quad t_0 > 0, \\u'(0) &= -2, \quad u'(t_0) = 2.\end{aligned}$$

Pro obecné řešení naší rovnice platí

$$u(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pro derivaci řešení můžeme opět jako v předchozím příkladu napsat

$$u'(t) = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t.$$

Po aplikaci okrajových podmínek v zadání úlohy dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned}2C_2 &= -2, \\-2C_1 \sin 2t_0 + 2C_2 \cos 2t_0 &= 2,\end{aligned}$$

tedy $C_2 = -1$ a řešíme následující rovnici

$$C_1 \sin 2t_0 + \cos 2t_0 = -1. \tag{1.4}$$

Uvažujme dva případy: a) $\sin 2t_0 = 0$, b) $\sin 2t_0 \neq 0$.

a) Předpokládejme, že platí $\sin 2t_0 = 0$, tedy musí platit

$$\begin{aligned}2t_0 &= n\pi, \\t_0 &= \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Po dosazení předchozího vztahu do (1.4) a předpokladu $\sin 2t_0 = 0$ dostaneme

$$\cos n\pi = -1.$$

Je zřejmé, že předchozí rovnice má řešení pouze pro n lichá, tedy musí platit

$$t_0 = \frac{\pi}{2}(2k - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pro řešení okrajové úlohy v tomto případě platí

$$u(t) = C \cos 2t - \sin 2t, \quad t \in (0, t_0), \quad t_0 = \frac{\pi}{2}(2k - 1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Předpokládejme, že platí $\sin 2t_0 \neq 0$, z (1.4) máme

$$C = C_1 = -\frac{1 + \cos 2t_0}{\sin 2t_0}.$$

Pro řešení okrajové úlohy v tomto případě platí

$$\begin{aligned}u(t) &= C \cos 2t - \sin 2t, \quad t \in (0, t_0), \\C &= -\frac{1 + \cos 2t_0}{\sin 2t_0}, \quad t_0 \in (0, \infty) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{N} \right\}.\end{aligned}$$

1.4 Obecná okrajová úloha

Obecná okrajová úloha kombinuje v okrajových podmínkách oba druhy podmínek jako v případě Dirichletovy a Neumannovy úlohy a je formulována tak, že hledáme spojitou funkci $u = u(t)$, $t \in [a, b]$, tak, aby platilo (viz [1])

$$\begin{aligned} -(p(t)u')' + q(t)u &= f(t), & t \in (a, b), \\ \sigma_1 u(a) - p(a)u'(a) &= g_1, \\ \sigma_2 u(b) + p(b)u'(b) &= g_2, \end{aligned} \tag{1.5}$$

kde $g_1, g_2, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ jsou zadaná čísla.

Příklad 1.6

Nalezněte řešení obecné okrajové úlohy

$$\begin{aligned} u'' + 9u &= 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) + u'(0) &= g_1, & u(\pi) + 2u'(\pi) = g_2, & g_1, g_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pro obecné řešení rovnice platí

$$u(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pro derivaci řešení můžeme napsat

$$u'(t) = -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t.$$

Po aplikaci okrajových podmínek v zadání úlohy dostaneme soustavu dvou rovnic

$$C_1 + 3C_2 = g_1, \quad -C_1 - 6C_2 = g_2,$$

řešením soustavy dostaneme

$$\begin{aligned} C_1 &= 2g_1 + g_2, \\ C_2 &= -\frac{1}{3}(g_1 + g_2). \end{aligned}$$

Úloha je jednoznačně řešitelná pro libovolná reálná čísla g_1, g_2 a pro řešení okrajové úlohy tedy platí

$$u(t) = (2g_1 + g_2) \cos 3t - \frac{1}{3}(g_1 + g_2) \sin 3t.$$

Příklad 1.7

Nalezněte řešení obecné okrajové úlohy

$$\begin{aligned}u'' + 9u &= 0, & t \in (0, \pi), \\u(0) + u'(0) &= g_1, \quad u(\pi) + u'(\pi) = g_2, & g_1, g_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Je zřemé, že zadání je téměř shodné jako v případě předchozí úlohy, ale liší se pouze v druhé okrajové podmínce. Pro obecné řešení naší rovnice opět platí

$$u(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

Pro derivaci řešení můžeme opět napsat

$$u'(t) = -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t.$$

Po aplikaci okrajových podmínek v zadání úlohy dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned}C_1 + 3C_2 &= g_1, \\-C_1 - 3C_2 &= g_2,\end{aligned}$$

pravá strana jedné rovnice je násobkem druhé rovnice, tedy s využitím Frobeniovy věty máme dva možné případy:

- (i) pro $g_1 + g_2 \neq 0$ úloha nemá řešení,
- (ii) pro $g_1 + g_2 = 0$ a tedy $g_1 = -g_2$,

$$\begin{aligned}C_2 &= C, \quad C \in \mathbb{R} \\C_1 &= -(3C + g_2).\end{aligned}$$

Pro řešení okrajové úlohy podle podmínky (ii) potom platí

$$u(t) = -(3C - g_1) \cos 3t + C \sin 3t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.5 Shrnutí

V této kapitole byly probrány základní okrajové úlohy pro rovnice 2. řádu, jako Dirichletova okrajová úloha, Neumannova úloha a obecná okrajová úloha. Je zřejmé, že situace s řešitelností okrajových úloh pro lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty není ve srovnání s počátečními úlohami rovnic 2. řádu, kde řešení je jednoznačné a existuje vždy (viz [2]), tak jednoduchá a řešení zde existovat někdy nemusí vůbec a někdy je jich nekonečně mnoho (viz předchozí úlohy).

Kapitola 2

Vlastní čísla a vlastní funkce okrajových úloh

2.1 Úvod

V této kapitole se budeme zabývat tzv. **okrajovou úlohou s parametrem**, jinak nazývanou jako *Sturmova–Liouvilleova úloha*. Okrajové podmínky jsou zde obdobné jako u obecné okrajové úlohy. Budeme definovat tzv. **vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy**.

2.2 Okrajová úloha s parametrem

Okrajová úloha s parametrem je formulována tak, že hledáme parametr $\lambda \in \mathbb{R}$ a nenulovou spojitou funkci $u = u(t)$, $t \in [a, b]$, tak, aby platilo (viz [1])

$$\begin{aligned} -(p(t)u')' + q(t)u &= \lambda u, & t \in (a, b), \\ u(a) &= 0, u(b) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde p, q jsou dané funkce.

2.3 Vlastní čísla a vlastní funkce okrajových úloh

Parametr λ , pro který existuje nenulová funkce $u = u(t)$ splňující (2.1), nazýváme **vlastní číslo okrajové úlohy** a funkci $u = u(t)$ nazýváme **vlastní funkcí okrajové úlohy** odpovídající vlastnímu číslu λ .

V dalším textu nás bude zajímat následující okrajová úloha s parametrem

$$-u'' = \lambda u, \quad t \in (0, 1), \quad u(0) = 0, u(1) = 0. \tag{2.2}$$

Úlohu nejprve vyřešíme a rozebereme možné případy pro záporné, nulové a kladné hodnoty parametru λ .

a) Pro $\lambda < 0$ platí pro obecné řešení rovnice

$$u(t) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po aplikaci okrajových podmínek v zadání úlohy dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} &= 0, \end{aligned}$$

dosazením $C_1 = -C_2$ do druhé rovnice předchozí soustavy rovnic dostaneme

$$C_2(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0,$$

a protože platí $e^{\sqrt{-\lambda}} > 1$ a $e^{-\sqrt{-\lambda}} < 1$, potom je zřejmé, že $e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}} \neq 0$ a řešení soustavy rovnic je nutně triviální. Tedy $C_1 = C_2 = 0$ a pro funkci $u = u(t)$ platí

$$u(t) = 0,$$

a potom okrajová úloha (2.2) nemá žádná záporná vlastní čísla.

b) Pro $\lambda = 0$ platí pro obecné řešení rovnice

$$u(t) = C_1 t + C_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení okrajových podmínek v zadání úlohy dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} C_2 &= 0, \\ C_1 + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení soustavy rovnic je opět triviální, platí $C_1 = C_2 = 0$ a pro funkci $u = u(t)$ platí

$$u(t) = 0,$$

a $\lambda = 0$ není vlastní číslo okrajové úlohy (2.2).

c) Pro $\lambda > 0$ platí pro obecné řešení rovnice

$$u(t) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}t + C_2 \sin \sqrt{\lambda}t, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po aplikaci okrajových podmínek v zadání úlohy dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení $C_1 = 0$ do druhé rovnice dostaneme

$$C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0,$$

tedy musí platit pro $C_2 \neq 0$ (v opačném případě by bylo řešení okrajové úlohy opět triviální)

$$\sqrt{\lambda} = k\pi, k \in \mathbb{N}.$$

Po úpravě dostaneme vyjádření pro vlastní čísla úlohy

$$\lambda_k = \pi^2 k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pro řešení okrajové úlohy v tomto případě platí

$$u_k(t) = C \sin k\pi t, \quad t \in [0, 1], k \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R},$$

a dostaneme jednoduše posloupnost vlastních funkcí okrajové úlohy

$$(\sin \pi t, \sin 2\pi t, \sin 3\pi t, \dots).$$

Pro případ $k = 1$ dostaneme tedy hodnotu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2)

$$\lambda_1 = \pi^2.$$

2.4 Shrnutí

V této kapitole jsme definovali okrajovou úlohu s parametrem, dále jsme definovali vlastní čísla a vlastní funkce této okrajové úlohy. Dále bylo probráno řešení okrajové úlohy s parametrem (2.2), kterou se budeme zabývat v dalších kapitolách této práce, kde bude řešen horní a dolní odhad prvního vlastního čísla této okrajové úlohy.

Kapitola 3

Horní odhad prvního vlastního čísla okrajových úloh

3.1 Úvod

V této kapitole se budeme zabývat horním odhadem okrajové úlohy s parametrem (2.2), která byla řešena v kapitole 2. Odhady prvního vlastního čísla okrajové úlohy hrají podstatnou roli v určení dalších vlastností řešení okrajové úlohy s parametrem.

3.2 Rayleighův podíl

Předpokládejme, že λ je vlastní číslo úlohy (2.2) a $u = u(t)$ je příslušná vlastní funkce. Potom zřejmě platí

$$(-u'', u) = (\lambda u, u) = \lambda \int_0^1 u^2 dt = \lambda \|u\|_2^2. \quad (3.1)$$

Aplikací okrajových podmínek a užitím integrování per partes $\int xy' dt = xy - \int x'y dt$ ($x = u, x' = u', y' = u'', y = u'$) dostaneme

$$(-u'', u) = - \int_0^1 u''u dt = -[uu']_0^1 + \int_0^1 (u')^2 dt = \int_0^1 (u')^2 dt = \|u'\|_2^2. \quad (3.2)$$

Porovnáme-li vztahy (3.1) a (3.2), dostaneme vyjádření pro vlastní číslo λ , které je nazýváno jako **Rayleighův podíl**, nebo také jako **Rayleighův kvocient** (viz [13])

$$\lambda = \frac{\int_0^1 (u')^2 dt}{\int_0^1 u^2 dt} = \frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2}. \quad (3.3)$$

Z předchozího vztahu plyne, je-li λ vlastní číslo homogenní okrajové úlohy (2.2), potom platí $\lambda > 0$. Je zřejmé, že Rayleighův podíl (3.3) bude invariantní vůči násobení nenulovou reálnou konstantou dané funkce. To je obsahem následujícího lemmatu.

Lemma 3.1

Nechť $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$. Potom Rayleighův podíl (3.3) funkce u je invariantní vůči násobení nenulovou reálnou konstantou této funkce.

Důkaz:

Položme

$$w = ku,$$

kde k je nenulové reálné číslo. Potom pro podíl (3.3) funkce w platí

$$\frac{\int_0^1 (w')^2 dt}{\int_0^1 w^2 dt} = \frac{k^2 \int_0^1 (u')^2 dt}{k^2 \int_0^1 u^2 dt} = \frac{\int_0^1 (u')^2 dt}{\int_0^1 u^2 dt}.$$

Tedy podle předchozího vztahu plyne nezávislost podílu (3.3) na multiplikační konstantě k dané funkci u .

□

3.3 Horní odhad prvního vlastního čísla úlohy

Podobný vztah jako je (3.3), který je nazýván **variační charakteristikou prvního vlastního čísla** okrajové úlohy (2.2) (viz [10, 13]), je používán k **hornímu odhadu velikosti prvního vlastního čísla okrajové úlohy** a má tvar (viz [13])

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,2}(0,1), u \neq 0} \frac{\int_0^1 (u')^2 dt}{\int_0^1 u^2 dt}. \quad (3.4)$$

Ze vztahu (3.4) plyne, že pro libovolnou nenulovou funkci $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$ platí

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (u')^2 dt}{\int_0^1 u^2 dt}. \quad (3.5)$$

Tedy vztahu (3.5) se dá využít k výpočtům *horních odhadů prvního vlastního čísla* okrajové úlohy (2.2), což bude ilustrováno na následujících příkladech.

Příklad 3.1

Užitím (3.5) provedme horní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_1(t) = \sin \pi t, \quad t \in (0, 1).$$

Funkce $v_1(t)$ je tedy přímo vlastní funkce odpovídající prvnímu vlastnímu číslu, tedy $v_1(t) = u_1(t)$. Spočítáme integrál

$$\int_0^1 |v_1'|^2 dt = \pi^2 \int_0^1 \cos^2 \pi t dt = \frac{\pi^2}{2}.$$

Dále spočtěme integrál

$$\int_0^1 |v_1|^2 dt = \int_0^1 \sin^2 \pi t dt = \frac{1}{2}.$$

Spočítejme Rayleighův podíl

$$R_1 = \frac{\int_0^1 (v_1')^2 dt}{\int_0^1 v_1^2 dt} = \frac{\frac{\pi^2}{2}}{\frac{1}{2}} = \pi^2 \doteq 9,86960.$$

Výpočtem jsme dostali přesnou hodnotu prvního vlastního čísla λ_1 .

3.4 Výpočty horních odhadů prvního vlastního čísla okrajových úloh

V této části textu budeme provádět výpočty horních odhadů prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2) pro různé funkce $v(t)$, kde $v \in W_0^{1,2}(0, 1)$ a na uvažovaném intervalu budeme aplikovat na tyto funkce Rayleighův podíl. Výhodné se může zdát použití polynomů, které jsou spojitě a mají spojitou první derivaci, a jejich derivování a integrování není nijak obtížné. Samotné užití polynomů také plyne z vlastností aproximace funkcí pomocí Taylorova polynomu. Otázkou však je, jaký polynom pro výpočet Rayleighova podílu vytvořit. V motivačních úlohách, které pro tento výpočet použijeme, budeme mimo jiné také používat lineární lomené funkce (tedy lineární spline funkce)

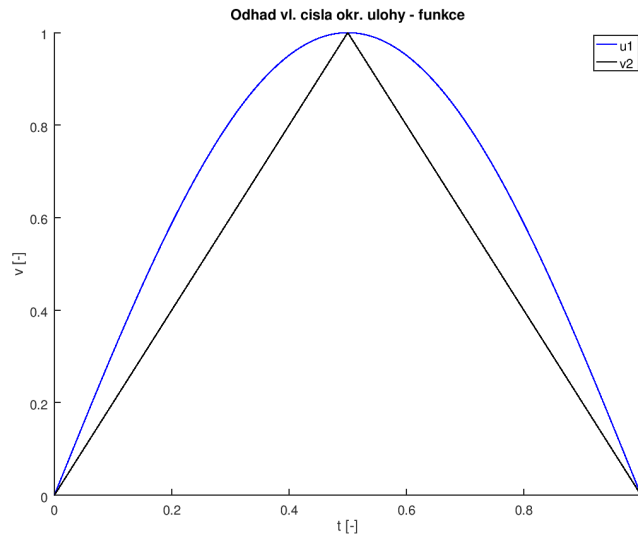
pro různé hodnoty interpolačních bodů, dále interpolaci pomocí interpolačních polynomů, které těmito (řídícími) body procházejí. Tyto funkce budou spojité a po částech hladké na intervalu $[0, 1]$ a nulové na koncích tohoto intervalu, takže budou patřit do prostoru $W_0^{1,2}(0, 1)$.

Další otázkou, která z předchozího textu plyne, je otázka, proč počítáme odhady prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2), které známe přesně ($\lambda_1 = \pi^2$). Jsou okrajové úlohy, kde hodnotu prvního vlastního čísla předem neznáme. Příkladem je okrajová úloha $-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u$ v $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u = 0$ na $\partial\Omega$, kde Δ_p je tzv. *p-laplacián* (viz poznámka 4.3) a kde se ve více dimenzích jedná již o parciální diferenciální rovnici s okrajovými podmínkami. V tomto textu se zabýváme hlavně jednodimenziální okrajovou úlohou pro $p = 2$, která je lineární a explicitně řešitelná. Pro jinou hodnotu parametru p je však zmíněná okrajová jednodimenziální úloha již nelineární, hodnota prvního vlastního čísla je zde sice známa, ale v případě vícedimenziální úlohy již tomu tak není.

Příklad 3.2

Užitím (3.5) provedme horní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_2(t) = \begin{cases} 2t, & t \in (0, \frac{1}{2}], \\ 2(1-t), & t \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$



Obrázek 3.1: Grafy funkcí $u_1(t)$ a $v_2(t)$.

Spočítejme integrál

$$\int_0^1 (v_2')^2 dt = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} dt + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 dt = 4.$$

Dále spočtěme integrál

$$\int_0^1 v_2^2 dt = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Spočítejme Rayleighův podíl

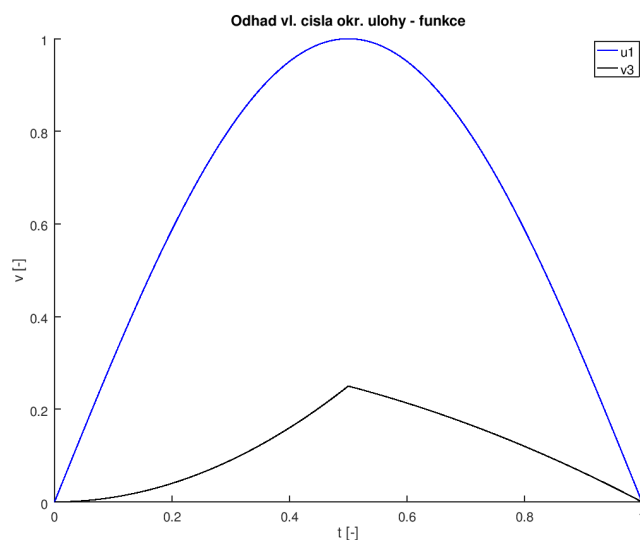
$$R_2 = \frac{\int_0^1 (v_2')^2 dt}{\int_0^1 v_2^2 dt} = \frac{4}{\frac{1}{3}} = 12.$$

Funkce $v_2(t)$ je lineární spline funkce první vlastní funkce u_1 v bodech $[0, 0]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1, 0]$.

Příklad 3.3

Užitím (3.5) provedme horní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_3(t) = \begin{cases} t^2, & t \in (0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{3}(1-t^2), & t \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$



Obrázek 3.2: Grafy funkcí $u_1(t)$ a $v_3(t)$.

Spočítáme integrál

$$\int_0^1 (v_3')^2 dt = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt + \frac{4}{9} \int_{\frac{1}{2}}^1 t^2 dt = \frac{8}{27}.$$

Dále spočtěme integrál

$$\int_0^1 v_3^2 dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (t^2)^2 dt + \frac{1}{9} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t^2)^2 dt = \frac{1}{54}.$$

Podle (3.4) spočítejme Rayleighův podíl

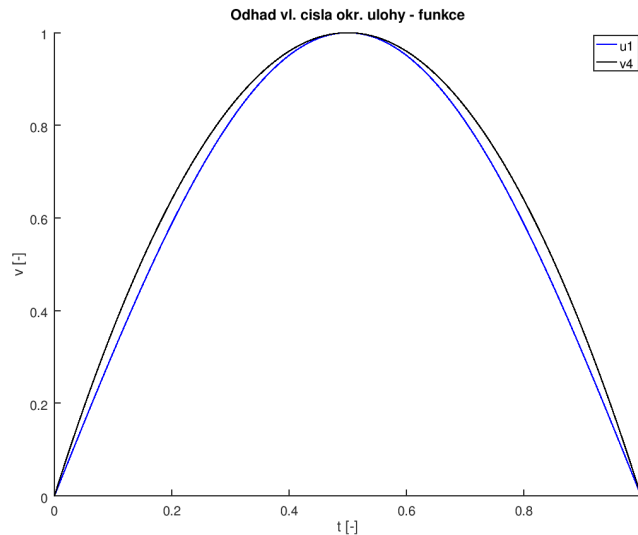
$$R_3 = \frac{\int_0^1 (v_3')^2 dt}{\int_0^1 v_3^2 dt} = \frac{\frac{8}{27}}{\frac{1}{54}} = 16.$$

Podle výsledku je zřejmé, že nesymetrická funkce vůči prostřednímu bodu uvažovaného intervalu lepší výsledek než symetrická funkce asi nepřinese (vzhledem k hornímu odhadu prvního vlastního čísla).

Příklad 3.4

Užitím (3.5) provedme horní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_4(t) = 4t(1-t), \quad t \in (0, 1).$$



Obrázek 3.3: Grafy funkcí $u_1(t)$ a $v_4(t)$.

Spočítáme integrál

$$\int_0^1 (v_4')^2 dt = 16 \int_0^1 (1-2t)^2 dt = \frac{16}{3}.$$

Dále spočtěme integrál

$$\int_0^1 v_4^2 dt = 16 \int_0^1 (t(1-t))^2 dt = \frac{16}{30}.$$

Spočítejme opět Rayleighův podíl

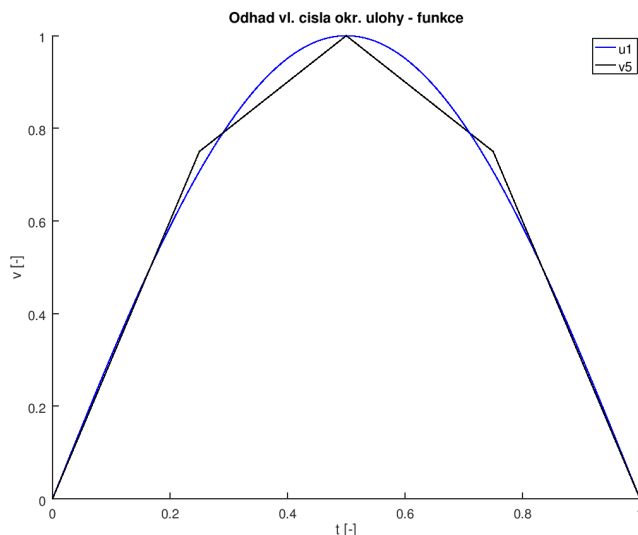
$$R_4 = \frac{\int_0^1 (v_4')^2 dt}{\int_0^1 v_4^2 dt} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{16}{30}} = 10.$$

Funkce $v_4(t)$ je shodná s aproximací interpolačním polynomem 2. řádu (viz obrázek) pro body $[0, 0]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1, 0]$. Zatím tedy dostáváme nejbližší horní odhad prvního vlastního čísla úlohy vzhledem ke správné, referenční hodnotě.

Příklad 3.5

Užitím (3.5) provedme horní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_5(t) = \begin{cases} 3t, & t \in (0, \frac{1}{4}], \\ t + \frac{1}{2}, & t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \frac{3}{2} - t, & t \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ 3 - 3t, & t \in (\frac{3}{4}, 1). \end{cases}$$



Obrázek 3.4: Grafy funkcí $u_1(t)$ a $v_5(t)$.

Spočítáme integrál

$$\int_0^1 (v_5')^2 dt = 9 \int_0^{\frac{1}{4}} dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} dt + 9 \int_{\frac{3}{4}}^1 dt = 5.$$

Dále spočtěme integrál

$$\int_0^1 v_5^2 dt = 9 \int_0^{\frac{1}{4}} t^2 dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{2} - t\right)^2 dt + 9 \int_{\frac{3}{4}}^1 (1-t)^2 dt = \frac{23}{48}.$$

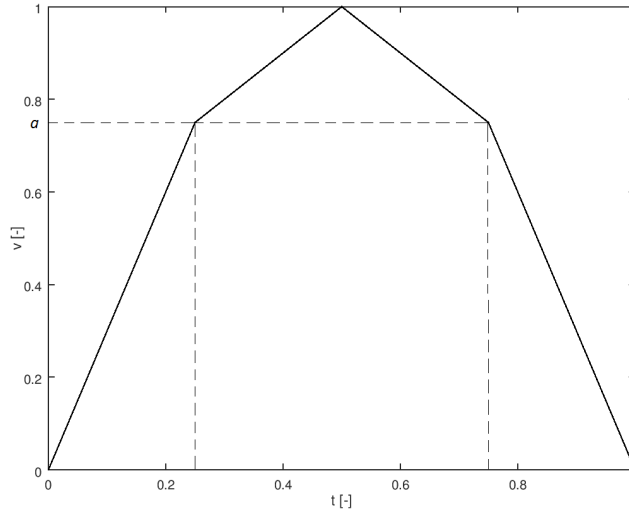
Spočítejme opět Rayleighův podíl

$$R_5 = \frac{\int_0^1 (v_5')^2 dt}{\int_0^1 v_5^2 dt} = \frac{240}{23} \doteq 10,43478.$$

Je vidět, že se nám nepodařilo lépe přiblížit k hodnotě prvního vlastního čísla, než jako u výsledku předchozího příkladu. Pokusme se tedy v následující úloze použít volitelnou funkční hodnotu $v(\frac{1}{4}) = v(\frac{3}{4}) = a$ (viz následující obrázek).

Příklad 3.6

Užitím (3.5) provedme horní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci $v_6(t)$, která je tvořena lineární spline funkcí, procházející body $[0, 0]$, $[\frac{1}{4}, a]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[\frac{3}{4}, a]$, $[1, 0]$.



Obrázek 3.5: Graf hledané funkce $v_6(t)$.

Pro funkci $v_6(t)$, kde $a \in (0, 1)$, platí

$$v_6(t) = \begin{cases} 4at, & t \in (0, \frac{1}{4}], \\ 4(1-a)t + 2a - 1, & t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ -4(1-a)t + 3 - 2a, & t \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ 4a(1-t), & t \in (\frac{3}{4}, 1). \end{cases}$$

Spočítáme integrál

$$\begin{aligned} \int_0^1 (v'_6)^2 dt &= \int_0^{\frac{1}{4}} (4a)^2 dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} [4(1-a)]^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} [-4(1-a)]^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4a)^2 dt = \\ &= 8(2a^2 - 2a + 1). \end{aligned}$$

Dále spočtěme integrál

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_6^2 dt &= \int_0^{\frac{1}{4}} (4at)^2 dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} [4(1-a)t + 2a - 1]^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} [-4(1-a)t + 3 - 2a]^2 dt \\ &\quad + \int_{\frac{3}{4}}^1 [4a(1-t)]^2 dt = \frac{1}{6}(2a^2 + a + 1). \end{aligned}$$

Určíme opět Rayleighův podíl

$$R_6(a) = \frac{\int_0^1 (v'_6)^2 dt}{\int_0^1 v_6^2 dt} = 48 \frac{2a^2 - 2a + 1}{2a^2 + a + 1}.$$

Oba polynomy v čitateli a jmenovateli předchozího podílu nemají reálné kořeny. Pokusíme se nyní určit pro které hodnoty parametru $a \in (0, 1)$ bude podíl minimální. Určíme tedy první derivaci podílu $R_6(a)$ a pro určení stacionárních bodů položíme rovno nule, tedy

$$R'_6(a) = 144 \frac{2a^2 - 1}{(2a^2 + a + 1)^2} = 0,$$

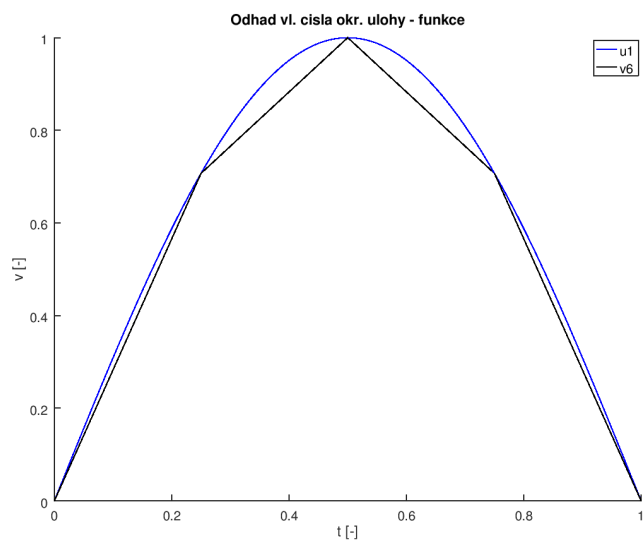
stacionární bod je jediný $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pro určení povahy extrému (zda se jedná o minimum, či maximum) určíme druhou derivaci podílu $R_6(a)$

$$R''_6(a) = 288 \frac{-4a^3 + 2a + 1}{(2a^2 + a + 1)^3}.$$

Po dosažení stacionárního bodu do druhé derivace je její hodnota kladná, jedná se tedy o minimum. Určíme ještě tedy Rayleighův podíl pro hodnotu $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$R_6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 48 \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \frac{96}{7}(5 - 3\sqrt{2}) \doteq 10,38664.$$

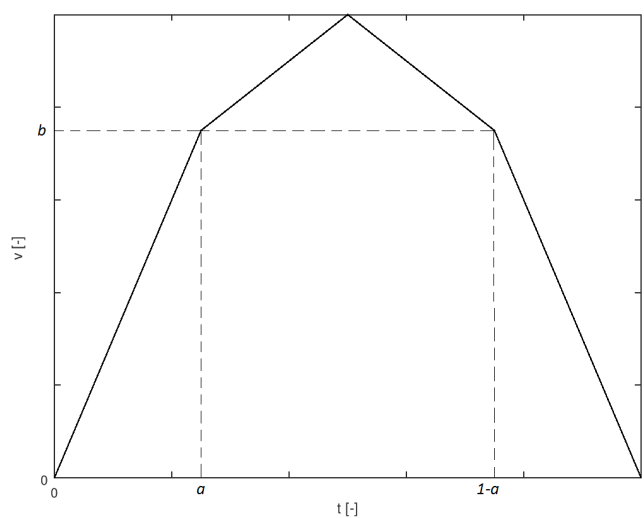
Z hlediska výsledku Rayleighova podílu jsme se nedostali pod číslo 10. Pokusme se v následujícím příkladu použít obdobnou funkci jako v tomto příkladu s tím, že místo pevné hodnoty $t = \frac{1}{4}$ bude volitelná hodnota v intervalu $(0, \frac{1}{2})$.



Obrázek 3.6: Grafy funkce $u_1(t)$ a funkce $v_6(t)$ pro parametr $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Příklad 3.7

Užitím (3.5) provedme horní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci $v_7(t)$, která je tvořena lineární spline funkcí, procházející body $[0, 0]$, $[a, b]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1 - a, b]$, $[1, 0]$, kde $a \in (0, \frac{1}{2})$, $b \in (0, 1)$ (viz. obrázek 3.7).



Obrázek 3.7: Graf hledané funkce $v_7(t)$.

Snadno z obrázku odvodíme, že pro funkci $u_7(t)$ platí

$$v_7(t) = \begin{cases} \frac{b}{a}t, & t \in (0, a], \\ \frac{2(1-b)}{1-2a}t + \frac{b-2a}{1-2a}, & t \in (a, \frac{1}{2}], \\ \frac{2(1-b)}{2a-1}t + \frac{2a+b-2}{2a-1}, & t \in (\frac{1}{2}, 1-a], \\ \frac{b}{a}(1-t), & t \in (1-a, 1). \end{cases}$$

Spočítáme integrál

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_7^2 dt &= \int_0^a \left(\frac{b}{a}\right)^2 dt + \int_a^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2(1-b)}{1-2a}\right]^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1-a} \left[\frac{2(1-b)}{2a-1}\right]^2 dt + \int_{1-a}^1 \left(-\frac{b}{a}\right)^2 dt = \\ &= \frac{2b^2}{a} + \frac{4(1-b)^2}{1-2a}. \end{aligned}$$

Dále spočteme integrál

$$\begin{aligned} \int_0^1 (v_7')^2 dt &= \int_0^a \left(\frac{b}{a}\right)^2 dt + \int_a^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2(1-b)}{1-2a}t + \frac{b-2a}{1-2a}\right]^2 dt + \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^{1-a} \left[\frac{2(1-b)}{2a-1}t + \frac{2a+b-2}{2a-1}\right]^2 dt + \int_{1-a}^1 \left(\frac{b}{a}(1-t)\right)^2 dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(2a-b)(b+1) \end{aligned}$$

Určíme opět Rayleighův podíl

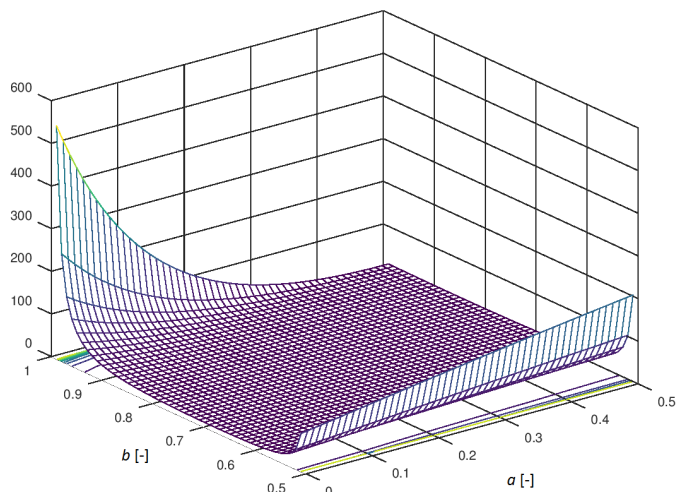
$$R_7(a, b) = \frac{\int_0^1 (v_7')^2 dt}{\int_0^1 v_7^2 dt} = \frac{6(2a - 4ab + b^2)}{a(1-2a)[1 - (2a-b)(b+1)]}.$$

Nyní se pokusíme nalézt, pro jaké hodnoty a, b nabývá funkce $R_7(a, b)$ minima. Pro určení bodů podezřelých z extrému musíme nejprve určit stacionární body, které určíme jako řešení soustavy dvou nelineárních rovnic, které vzniknou z parciálních derivací funkce R_7 , které položíme rovno nule. Pro parciální derivaci funkce $R_7(a, b)$ podle proměnné a platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_7}{\partial a}(a, b) &= 6 \frac{32a^3b^2 + 16a^3b - 16a^3 - 20a^2b^3}{a^2(1-2a)^2[1 - (2a-b)(b+1)]^2} + \\ &+ 6 \frac{-24a^2b^2 - 8a^2b + 8a^2 + 4ab^4 + 8ab^3 + 8ab^2 - b^4 - b^3 - b^2}{a^2(1-2a)^2[1 - (2a-b)(b+1)]^2}. \end{aligned}$$

Pro parciální derivaci funkce $\lambda(a, b)$ podle proměnné b platí

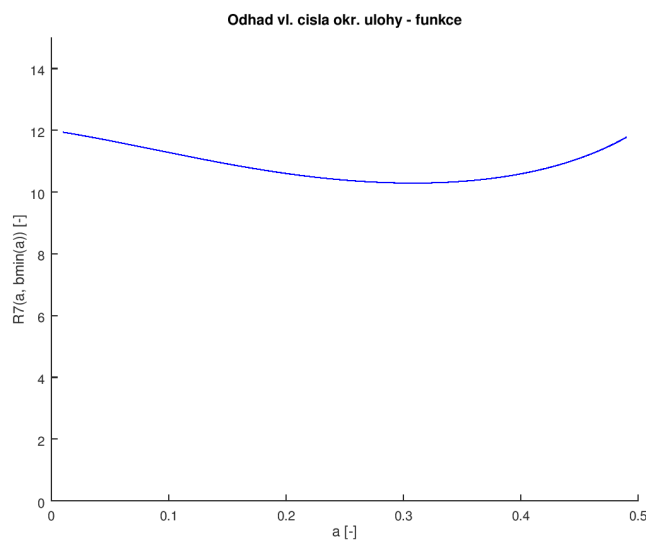
$$\frac{\partial R_7}{\partial b}(a, b) = 6 \frac{12a^2 + 2ab^2 - 8ab - 6a + b^2 + 2b}{a(1-2a)[1 - (2a-b)(b+1)]^2}.$$



Obrázek 3.8: Graf funkce $R_7(a, b)$.

Položíme výše uvedené parciální derivace rovno nule a budeme řešit jako soustavu dvou nelineárních rovnic (vzhledem ke složitosti použijeme příkaz *solve* výpočetního software *MATLAB*), kde hledáme řešení, která splňují omezení $a \in (0, \frac{1}{2})$, $b \in (0, 1)$. Řešení je celkem devět, omezení splňuje pouze jedno řešení, které tvoří následující stacionární bod

$$[a_0, b_0] = \left[\frac{\sqrt{217} + 5}{64}, \frac{\sqrt{217} + 5}{24} \right].$$

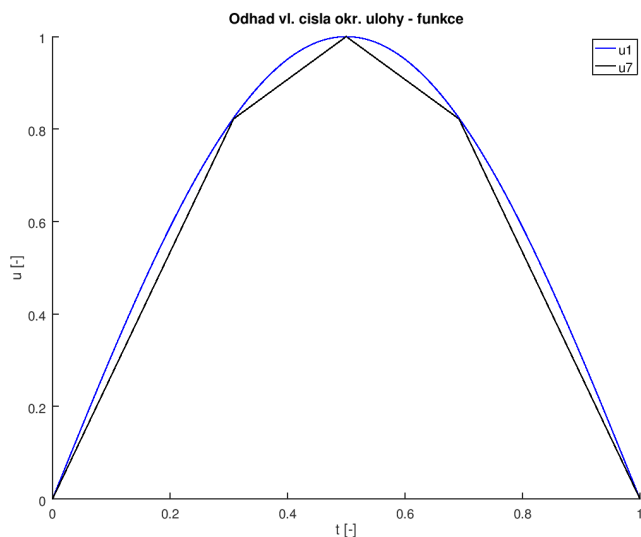


Obrázek 3.9: Graf funkce $R_7(a, b_{min}(a))$.

K ověření, že pro tento bod nastává minimum funkce $R_7(a, b)$, použijeme Hessovu matici a budeme určovat její definitnost. Druhé parciální derivace

spočítáme vzhledem ke složitosti užitím příkazu *diff* výpočetního software *MATLAB*. Hessova matice \mathbf{H} bude mít potom tvar

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 R_7}{\partial a^2}(a_0, b_0) & \frac{\partial^2 R_7}{\partial a \partial b}(a_0, b_0) \\ \frac{\partial^2 R_7}{\partial b \partial a}(a_0, b_0) & \frac{\partial^2 R_7}{\partial b^2}(a_0, b_0) \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 240,5843 & -102,7990 \\ -102,7990 & 58,8862 \end{bmatrix}.$$



Obrázek 3.10: Grafy funkcí $u_1(t)$ a $v_7(t)$.

Matice \mathbf{H} je pozitivně definitní, protože první hlavní minor je kladný a platí

$$\det \mathbf{H} \doteq \det \begin{bmatrix} 240,5843 & -102,7990 \\ -102,7990 & 58,8862 \end{bmatrix} \doteq 3599,46 > 0,$$

tedy v bodě $[a_0, b_0]$ nastává lokální minimum funkce $R_7(a, b)$ a určíme Rayleighův podíl v tomto bodě, tedy

$$R_7(a_0, b_0) = \frac{6(2a_0 - 4a_0b_0 + b_0^2)}{a_0(1 - 2a_0)[1 - (2a_0 - b_0)(b_0 + 1)]} = \frac{33821 - 217\sqrt{217}}{2976} \doteq 10,29045.$$

Je zřejmé, že jsme se výsledkem Rayleighova podílu opět nedostali, jako v předchozím příkladu, pod číslo 10. Můžeme říci, že lineární spline s 5 řídicími body nemůže dát lepší výsledek, než intepolační polynom 2. stupně.

Příklad 3.8

Užitím (3.5) provedme horní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme obecný polynom třetího stupně ve tvaru $v_8(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Díky okrajové podmínce úlohy $u(0) = 0$ musí platit

$$d = 0,$$

pro druhou okrajovou podmínku úlohy $v(1) = 0$ musí rovněž platit

$$a + b + c + d = 0,$$

tedy dostaneme polynom ve tvaru

$$v_8(t) = at^3 + bt^2 - (a + b)t.$$

Protože platí invariance vůči násobení konstantou, můžeme položit $a = 1$, potom nakonec dostaneme polynom ve tvaru

$$v_8(t) = t^3 + bt^2 - (b + 1)t.$$

Spočítáme integrál

$$\int_0^1 (v_8')^2 dt = \int_0^1 [3t^2 + 2bt - (b + 1)]^2 dt = \frac{1}{3}b^2 + b + \frac{4}{5}.$$

Dále spočtěme integrál

$$\int_0^1 v_8^2 dt = \int_0^1 [t^3 + bt^2 - (b + 1)t]^2 dt = \frac{1}{30}b^2 + \frac{1}{10}b + \frac{8}{105}.$$

Určíme Rayleighův podíl

$$R_8(b) = \frac{\int_0^1 (v_8')^2 dt}{\int_0^1 v_8^2 dt} = 14 \frac{5b^2 + 15b + 12}{7b^2 + 21b + 16}.$$

Nyní se pokusíme nalézt, pro jaké hodnoty proměnné b nabývá funkce $R_8(b)$ minima. Pro určení bodů podezřelých z extrému musíme opět určit stacionární body, které určíme jako řešení kvadratické rovnice, která vznikne z derivace funkce $R_8(b)$ a kterou položíme rovno nule. Pro derivaci funkce $R_8(b)$ podle proměnné b platí

$$R_8'(b) = -56 \frac{2b + 3}{(7b^2 + 21b + 16)^2}.$$

Položíme výše uvedenou derivaci rovno nule a dostaneme následující stacionární bod

$$b_0 = -\frac{3}{2}.$$

K ověření, že v tomto bodě nastává minimum funkce $R_8(b)$, použijeme druhou derivaci této funkce

$$R_8''(b) = 112 \frac{21b^2 + 63b + 47}{(7b^2 + 21b + 16)^3},$$

dosazením hodnoty b_0 do druhé derivace dostaneme

$$R_8''(b_0) = -1792,$$

tedy v tomto bodě nastává lokální maximum, které má hodnotu

$$R_8(b_0) = 42.$$

Z výsledků tohoto příkladu plyne, že ze všech interpolačních polynomů stupně nejvýše 3 určených k hornímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy, je nejlepší polynom v_4 . Pokusme se v následujícím příkladu použít stejné řídicí body jako v příkladu 3.6 s tím, že proložíme body interpolačním polynomem.

Příklad 3.9

Užitím (3.5) provedme horní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme funkci $v_9(t)$, která tvoří interpolační polynom, který aproximuje funkci danou tabulkou

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \\ \hline v(t_i) & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{array}$$

Funkci $v_9(t)$ budeme uvažovat ve tvaru $v_9(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$, tak aby polynom procházel řídicími body ze zadané tabulky, a podle [3] bude platit

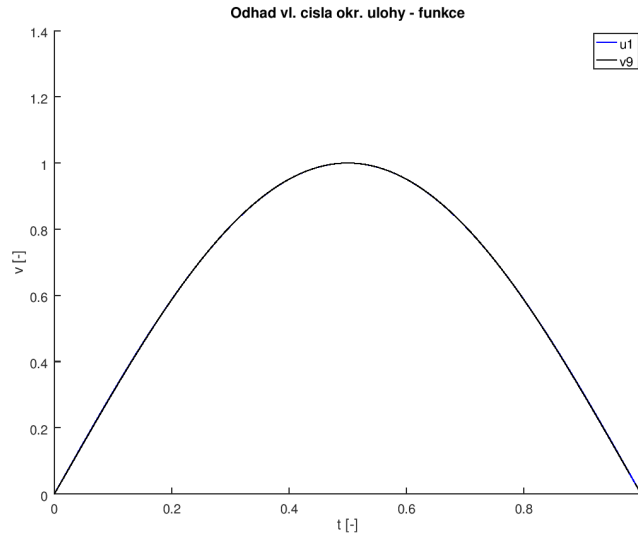
$$\begin{bmatrix} t_0^4 & t_0^3 & t_0^2 & t_0 & 1 \\ t_1^4 & t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^4 & t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^4 & t_3^3 & t_3^2 & t_3 & 1 \\ t_4^4 & t_4^3 & t_4^2 & t_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t_0) \\ v(t_1) \\ v(t_2) \\ v(t_3) \\ v(t_4) \end{bmatrix},$$

tedy po dosazení bodů z tabulky dostaneme soustavu

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4^4} & \frac{1}{4^3} & \frac{1}{4^2} & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3^4}{4^4} & \frac{3^3}{4^3} & \frac{3^2}{4^2} & \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soustava má řešení

$$\begin{aligned} a &= \frac{64}{3}(3 - 2\sqrt{2}), \\ b &= \frac{128}{3}(2\sqrt{2} - 3), \\ c &= \frac{4}{3}(57 - 40\sqrt{2}), \\ d &= \frac{4}{3}(8\sqrt{2} - 9), \\ e &= 0. \end{aligned}$$



Obrázek 3.11: Grafy funkcí $u_1(t)$ a $v_9(t)$.

Z řešení předchozí soustavy dostaneme aproximační polynom

$$v_9(t) = \frac{64}{3}(3 - 2\sqrt{2})t^4 + \frac{128}{3}(2\sqrt{2} - 3)t^3 + \frac{4}{3}(57 - 40\sqrt{2})t^2 + \frac{4}{3}(8\sqrt{2} - 9)t.$$

Spočítáme integrál

$$\begin{aligned} \int_0^1 (v_9')^2 dt &= \frac{2^{16}}{9}(17 - 12\sqrt{2}) \int_0^1 t^6 dt - \frac{196608}{9}(17 - 12\sqrt{2}) \int_0^1 t^5 dt + \\ &\frac{2^{12}}{9}(943 - 666\sqrt{2}) \int_0^1 t^4 dt + \frac{2^{11}}{9}(744\sqrt{2} - 1052) \int_0^1 t^3 dt + \frac{2^6}{9}(9281 - 6576\sqrt{2}) \int_0^1 t^2 dt + \\ &\frac{2^6}{9}(816\sqrt{2} - 1153) \int_0^1 t dt + \frac{2^4}{9}(209 - 144\sqrt{2}) \int_0^1 dt = \frac{16}{945}(2803 - 1776\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Dále spočteme integrál

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_9^2 dt &= \frac{2^{12}}{9}(17 - 12\sqrt{2}) \int_0^1 t^8 dt - \frac{2^{14}}{9}(17 - 12\sqrt{2}) \int_0^1 t^7 dt + \\ &\frac{2^9}{9}(875 - 618\sqrt{2}) \int_0^1 t^6 dt + \frac{2^9}{9}(510\sqrt{2} - 721) \int_0^1 t^5 dt + \frac{2^4}{9}(10225 - 7248\sqrt{2}) \int_0^1 t^4 dt + \\ &\frac{2^5}{9}(816\sqrt{2} - 1153) \int_0^1 t^3 dt + \frac{2^4}{9}(209 - 144\sqrt{2}) \int_0^1 t^2 dt = \frac{8}{2835}(245 - 48\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Určíme Rayleighův podíl

$$R_9 = \frac{\int_0^1 (v_9')^2 dt}{\int_0^1 v_9^2 dt} = \frac{6}{55417} (516239 - 300576\sqrt{2}) \doteq 9,86993.$$

Je zřejmé, že v tomto případě jsme se dostali nejbližší skutečné hodnotě prvního vlastního čísla, protože aproximace tabulkou vyhovuje bodům první vlastní funkce okrajové úlohy a je velmi blízká této funkci (tedy funkci $u_1(t)$). Pro relativní chybu odhadu (oproti známé referenční hodnotě) prvního vlastního čísla úlohy platí

$$\delta = 100 \frac{R_9 - \lambda_1}{\lambda_1} \doteq 0,003\%.$$

Další nejbližší výsledek prvnímu vlastnímu číslu byl pro funkci $v_4(t)$, která je podobnou aproximací aproximačním polynomem (polynom 2. stupně - 3 body) pro body $[0, 0]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1, 0]$.

Příklad 3.10

Užitím (3.5) provedme horní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme obecný polynom čtvrtého stupně ve tvaru $v_{10}(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$, $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Pro okrajovou podmínku úlohy $v(0) = 0$ musí platit

$$e = 0,$$

pro druhou okrajovou podmínku úlohy $v(1) = 0$ musí rovněž platit

$$a + b + c + d + e = 0,$$

tedy dostaneme polynom ve tvaru

$$v_{10}(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 - (a + b + c)t.$$

Protože platí invariance vůči násobení konstantou, můžeme položit $a = 1$, potom nakonec dostaneme polynom ve tvaru

$$v_{10}(t) = t^4 + bt^3 + ct^2 - (b + c + 1)t.$$

Spočítáme integrál

$$\int_0^1 (v_{10}')^2 dt = \int_0^1 [4t^3 + 3bt^2 + 2ct - (b + c + 1)]^2 dt = \frac{4}{5}b^2 + \frac{1}{3}c^2 + 2b + bc + \frac{6}{5}c + \frac{9}{7}.$$

Dále spočtěme integrál

$$\begin{aligned}\int_0^1 v_{10}^2 dt &= \int_0^1 [t^4 + bt^3 + ct^2 - (b+c+1)t]^2 dt = \\ &= \frac{8}{105}b^2 + \frac{1}{30}c^2 + \frac{11}{60}b + \frac{1}{10}bc + \frac{5}{42}c + \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Určíme Rayleighův podíl

$$R_{10}(b, c) = \frac{\int_0^1 (v'_{10})^2 dt}{\int_0^1 v_{10}^2 dt} = 12 \frac{84b^2 + 35c^2 + 210b + 105bc + 126c + 135}{96b^2 + 42c^2 + 231b + 126bc + 150c + 140}.$$

Opět se pokusíme nalézt, pro jaké hodnoty b, c nabývá funkce $R_{10}(b, c)$ minima. Pro určení bodů podezřelých z extrému musíme nejprve určit stacionární body, které určíme z parciálních derivací $R_{10}(b, c)$ jako řešení soustavy dvou nelineárních rovnic, které vzniknou z parciálních derivací funkce $R_{10}(b, c)$ a které položíme rovno nule. Pro parciální derivaci funkce $R_{10}(b, c)$ podle proměnné b platí

$$\frac{\partial R_{10}}{\partial b}(b, c) = 36 \frac{-252b^2 + 203c^2 + 168b^2c + 112bc^2 + 336bc - 800b + 28c - 595}{(96b^2 + 42c^2 + 231b + 126bc + 150c + 140)^2}.$$

Pro parciální derivaci funkce $R_{10}(b, c)$ podle proměnné c platí

$$\frac{\partial R_{10}}{\partial c}(b, c) = -12 \frac{504b^3 + 2709b^2 + 42c^2 + 336b^2c + 1470bc + 4704b + 1540c + 2610}{(96b^2 + 42c^2 + 231b + 126bc + 150c + 140)^2}.$$

Položíme výše uvedené parciální derivace rovno nule a budeme řešit jako soustavu dvou nelineárních rovnic (vzhledem ke složitosti použijeme příkaz *solve* výpočetního software *MATLAB*), které splňují následující stacionární body (vypsána jsou pouze reálná řešení)

$$[b_0, c_0] = \left[-2, \frac{14 + \sqrt{133}}{21} \right],$$

$$[b_1, c_1] = \left[-2, \frac{14 - \sqrt{133}}{21} \right].$$

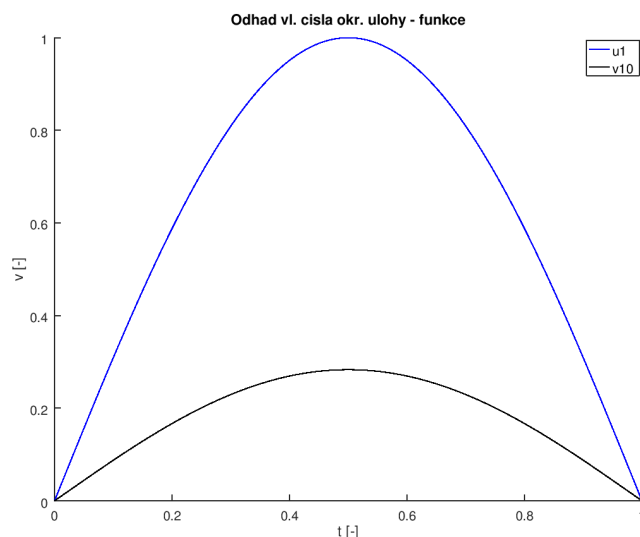
Vzhledem ke složitosti výpočtů druhých parciálních derivací a výpočtů Hessianých matic v příslušných stacionárních bodech využijeme faktu, že za předpokladu spojitosti a diferencovatelnosti Rayleighova podílu $R_{10}(b, c)$ musí jeho minimum, pokud existuje, ležet ve zmíněných stacionárních bodech.

a) Pro stacionární bod $[b_0, c_0]$ platí

$$R_{10}(b_0, c_0) \doteq 102,13025.$$

b) Dále pro stacionární bod $[b_1, c_1]$ platí

$$R_{10}(b_1, c_1) = 56 - 4\sqrt{133} \doteq 9,86975.$$



Obrázek 3.12: Grafy funkcí $u_1(t)$ a $v_{10}(t)$.

Minimum zřejmě nastává pro stacionární bod $[b_1, c_1]$ a polynom s minimálním Rayleighovým podílem bude mít následující tvar

$$v_{10}(t) = t^4 - 2t^3 + \frac{14 - \sqrt{133}}{21}t^2 + \frac{7 + \sqrt{133}}{21}t.$$

V tomto případě jsme se dostali ještě blíže skutečné hodnotě prvního vlastního čísla, protože aproximace je velmi blízká vlastní funkci okrajové úlohy odpovídající prvnímu vlastnímu číslu této úlohy (tedy funkci $u_1(t)$). Pro relativní chybu odhadu (oproti známé referenční hodnotě) prvního vlastního čísla úlohy platí

$$\delta = 100 \frac{R_{10}(b_1, c_1) - \lambda_1}{\lambda_1} \doteq 0,0015\%.$$

Další nejbližší výsledek prvnímu vlastnímu číslu byl pro funkci $v_9(t)$ z příkladu 3.9.

Pro srovnání jsou horní odhady prvního vlastního čísla okrajové úlohy uvedeny v následující tabulce.

Funkce	Odhad	Popis funkce
v_1	9,86960	první vlastní funkce - $v_1(t) = \sin \pi t$
v_2	12	lineární spline v bodech $[0, 0], [\frac{1}{2}, 1], [1, 0]$
v_3	16	nesymetrická funkce
v_4	10	kvadratická funkce - $v_4(t) = 4t(1 - t)$
v_5	10,43478	lin. spline v $[0, 0], [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], [\frac{1}{2}, 1], [\frac{3}{4}, \frac{3}{4}], [1, 0]$
v_6	10,38664	lin. spline v $[0, 0], [\frac{1}{4}, a], [\frac{1}{2}, 1], [\frac{3}{4}, a], [1, 0]$
v_7	10,29045	lin. spline v $[0, 0], [a, b], [\frac{1}{2}, 1], [1 - a, b], [1, 0]$
v_8	—	polynom 3. stupně - $v_8(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$
v_9	9,86993	interpol. polynom v $[0, 0], [\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}], [\frac{1}{2}, 1], [\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}], [1, 0]$
v_{10}	9,86975	polynom 4. stupně - $v_8(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$

Tabulka 3.1: Výsledky horních odhadů prvního vlastního čísla okrajové úlohy.

3.5 Shrnutí

V této kapitole jsme se zabývali okrajovou úlohou s parametrem, s ohledem na horní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy. U horního odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2) bylo uvedeno několik příkladů. Experimentálně bylo zkoušeno několik funkcí s ohledem na výsledek Rayleighova podílu. Experimentálně byl ověřen fakt, že se jedná o horní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy. Testovány byly lineární spline funkce definované několika body (až pět body) v příkladech 3.2, 3.5, 3.6 a 3.7. Výsledky jsme se u žádného odhadu nedostali pod hodnotu čísla 10. Otázkou je, o kolik lepších výsledků bychom dosáhli při užití více bodů (například místo 5 bodů použít po částech lineární spline funkci se 7, 9, 11, ... body) tak, aby chyba odhadu prvního vlastního čísla byla menší, než námi zvolená chyba. Za zvážení by bylo užití například kvadratické, popřípadě kubické spline v těchto pevně zvolených bodech. Dále byly zkoušeny (aproximační) polynomy v příkladech 3.4 a 3.9. V případě příkladu 3.4, kde byl použit polynom stupně 2, jsme dosáhli odhadu prvního vlastního čísla o hodnotě 10 (také viz pramen [14]), v případě použití polynomu stupně nejvýše 4 u příkladu 3.10 jsme se dostali již k velmi přesnému odhadu s relativní chybou zhruba 0,0015%. Užití polynomů k výpočtu Rayleighova podílu se zde jeví velmi příznivé, neboť jak již bylo zmíněno, derivování a integrování polynomu je snadná úloha. Další otázkou je také, jaké body zvolit při aproximaci polynomem daného stupně tak, aby se opět chyba odhadu prvního vlastního čísla dostala pod námi stanovenou mez. V příkladech 3.8 a 3.10 byl použit polynom obecný polynom třetího a čtvrtého stupně. V případě polynomu čtvrtého stupně jsme se dostali ještě k přesnějšimu výsledku než v případě příkladu 3.9, zde byla relativní chyba odhadu menší než 0,002%. Kdybychom použili obecný polynom třetího stupně, dostali bychom potom výsledek a polynom z příkladu 3.4. Otázka v tomto směru odhadu je, zda se použitím polynomů vyššího (zřejmě sudého) stupně zvýší přesnost odhadu k libovolné, předem určené chybě odhadu.

Kapitola 4

Dolní odhady prvního vlastního čísla okrajových úloh

4.1 Úvod

Předchozí kapitola byla věnována horním odhadům prvního vlastního čísla okrajové úlohy s parametrem (2.2). V dalším textu této práce se dále budeme zabývat dolním odhadem prvního vlastního čísla této úlohy a tím uzavřeme odhady prvního vlastního čísla zmíněné okrajové úlohy s parametrem.

4.2 Piconeho identita

V případě dolního dohadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy s parametrem (2.2) budeme využívat tzv. **Piconeho identitu** [8, 11], která bude uvedena v následující větě.

Věta 4.1 (Piconeho identita)

Nechť $u \geq 0$ a $v > 0$ jsou diferencovatelné funkce, potom platí tzv. Piconeho identita

$$(u')^2 + \frac{u^2}{v^2}(v')^2 - 2\frac{u}{v}u'v' = (u')^2 - \left(\frac{u^2}{v}\right)' v' \geq 0. \quad (4.1)$$

Důkaz:

Předpokládáme, že $u \geq 0$ a $v > 0$ jsou diferencovatelné funkce, potom platí

$$(u')^2 - \left(\frac{u^2}{v}\right)' v' = (u')^2 - \frac{2uvu' - u^2v'}{v^2}v' = (u')^2 + \frac{u^2}{v^2}(v')^2 - 2\frac{u}{v}u'v'.$$

Tedy z předchozího vztahu plyne rovnost v (4.1).

Dále platí

$$(u')^2 + \frac{u^2}{v^2}(v')^2 - 2\frac{u}{v}u'v' = \left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 \geq 0.$$

□

Poznámka 4.1

Piconeho identita bývá často v literatuře [8, 11] uváděná v obecnějším zápisu pro funkce více proměnných:

$$|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{v^2}|\nabla v|^2 - 2\frac{u}{v}\nabla u\nabla v = |\nabla u|^2 - \nabla\left(\frac{u^2}{v}\right)\nabla v \geq 0. \quad (4.2)$$

Poznámka 4.2

Označme pro další práci levou a pravou stranu Piconeho identity z Věty 4.1 následovně

$$L(u, v) = (u')^2 + \frac{u^2}{v^2}(v')^2 - 2\frac{u}{v}u'v', \quad (4.3)$$

$$R(u, v) = (u')^2 - \left(\frac{u^2}{v}\right)'v', \quad (4.4)$$

kde platí

$$L(u, v) = R(u, v) \geq 0.$$

4.3 Dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy

Uvažujme pro další práci okrajovou úlohu (2.2), kde $u = u(t)$ (netriviální). První vlastní číslo této okrajové úlohy značíme jako λ_1 a první vlastní funkci této úlohy jako u_1 .

V následujícím textu uvedeme větu, pomocí které je možné provést dolní odhady prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2).

Věta 4.2

Nechť funkce $v(t) > 0$ na intervalu $I = (0, 1)$, nechť $v \in C^2(I)$ a nechť pro nějaké $\lambda > 0$ platí

$$-v'' \geq \lambda v, \quad t \in I. \quad (4.5)$$

Potom pro každou nezápornou funkci $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$ platí na I

$$\int_0^1 (u')^2 dt \geq \lambda \int_0^1 u^2 dt. \quad (4.6)$$

Důkaz:

Nechť funkce $\varphi \in C_0^\infty(I)$ je nezáporná na intervalu I . Mějme kompaktní interval (uzavřený interval) $I_0 \subset I$, kde $I_0 = [a, b]$, $0 < a < b < 1$. Dále necht' $v(t) > 0$ na intervalu I a necht' $v \in C^2(I)$. Dále necht' pro všechna $t \in I \setminus I_0$ platí $\varphi(t) = 0$. Potom podle poznámky 4.2 můžeme psát (užitím Piconeho identity)

$$0 \leq \int_{I_0} L(\varphi, v) dt = \int_{I_0} R(\varphi, v) dt = \int_{I_0} (\varphi')^2 dt - \int_{I_0} \left(\frac{\varphi^2}{v} \right)' v' dt.$$

Užitím integrování per partes $\int xy' dt = xy - \int x'y dt$, kde

$$\begin{aligned} x &= v', & y' &= \left(\frac{\varphi^2}{v} \right)' \\ x' &= v'', & y &= \frac{\varphi^2}{v}, \end{aligned}$$

dostaneme

$$\int_{I_0} (\varphi')^2 dt - \int_{I_0} \left(\frac{\varphi^2}{v} \right)' v' dt = \int_{I_0} (\varphi')^2 dt - \left[\varphi^2 \frac{v'}{v} \right]_a^b + \int_{I_0} \varphi^2 \frac{v''}{v} dt.$$

Protože podle nerovnosti (4.5) platí $-v'' \geq \lambda v$, $t \in I_0$, a pro okrajové podmínky platí $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, potom musí tedy platit

$$\begin{aligned} \frac{v''}{v} &\leq -\lambda, \\ \left[\varphi^2 \frac{v'}{v} \right]_a^b &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením předchozí nerovnosti a aplikací okrajových podmínek tedy máme

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{I_0} (\varphi')^2 dt - \left[\varphi^2 \frac{v'}{v} \right]_a^b + \int_{I_0} \varphi^2 \frac{v''}{v} dt \leq \int_{I_0} (\varphi')^2 dt - \lambda \int_{I_0} \varphi^2 dt = \\ &= \int_I (\varphi')^2 dt - \lambda \int_I \varphi^2 dt. \end{aligned}$$

Tedy z předchozího odvození zřejmě na I plyne

$$0 \leq \int_I (\varphi')^2 dt - \lambda \int_I \varphi^2 dt.$$

Při splnění předpokladů věty potom pro každou funkci $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$ existuje posloupnost $(\varphi_k)_{k=0}^\infty$, $\varphi_k \in C_0^\infty(I)$ taková, že $\varphi_k \xrightarrow{W_0^{1,2}(0,1)} u$. Potom lze předchozí nerovnost napsat ve tvaru (4.6)

$$\int_I (u')^2 dt \geq \lambda \int_I u^2 dt.$$

□

Poznámka 4.3

Předchozí věta je zjednodušeným případem věty [8, Theorem 2.1] a věty [11, Theorem 3.1], kde $p = 2$ a $f(v) = v$. Speciálním případem věty [8, Theorem 2.1] je lemma [9, Lemma 1], které definuje dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{p-2} u \quad \text{pro } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{pro } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde Δ_p je tzv. **p-laplacián**. V našem textu je používán laplacián pro případ $p = 2$, viz okrajová úloha (2.2).

V dalším textu bude uvedeno lemma, které je pro $p = 2$ speciálním případem [9, Lemma 1] a vyplývá také z věty 4.2.

Lemma 4.1

Nechť funkce $v(t) > 0$ na intervalu $(0, 1)$, nechť $v \in C^2(0, 1)$. Existuje-li $\lambda > 0$ takové, že platí nerovnost

$$-v'' \geq \lambda v, \quad t \in (0, 1), \quad (4.7)$$

potom

$$\lambda \leq \lambda_1. \quad (4.8)$$

Důkaz:

Důkaz plyne z (3.5) a (4.6).

Důsledek 4.1

Nechť funkce $v(t) > 0$ pro všechna $t \in (0, 1)$, nechť $v \in C^2(0, 1)$. Je-li λ_1 první vlastní číslo okrajové úlohy (2.2), potom platí

$$\lambda_1 \geq \inf_{t \in (0, 1)} \left(-\frac{v''}{v} \right). \quad (4.9)$$

Rovnost nastává pro $v = u_1$, kde u_1 je první vlastní funkce okrajové úlohy.

Lemma 4.2

Nechť $v \in C^2(0, 1)$, $v > 0$. Potom výraz $\inf_{t \in (0,1)} -\frac{v''}{v}$ je invariantní vůči násobení nenulovou reálnou konstantou této funkce.

Důkaz:

Položme

$$w = kv,$$

kde k je nenulové reálné číslo. Potom pro podíl $-\frac{w''}{w}$ funkce w platí

$$-\frac{w''}{w} = -\frac{(kv)''}{kv} = -\frac{kv''}{kv} = -\frac{v''}{v}.$$

Tedy podle předchozího vztahu plyne nezávislost tohoto podílu na multiplikační konstantě k dané funkci v .

□

Poznámka 4.4

Vlastní množina Ω pro dolní odhad, v našem případě interval $(0, 1)$, je podle [9] uvažována jako otevřená koule o poloměru R , tedy $\Omega = B(\mathbf{x}_0, R) \in \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. V naší další práci uvažujeme okrajové úlohy na intervalu $(0, 1)$ a tedy jedná se o množinu $I = B(x_0, R) \in \mathbb{R}$, kde $x_0 = \frac{1}{2}$ a $R = \frac{1}{2}$, bude pro funkci $v(t)$ uvažován interval $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Příklad 4.1

Proveďme dolní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_1(t) = \cos \pi t, \quad t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Funkce $v_1(t)$ reprezentuje v tomto případě přímo **první vlastní funkci**:

$$v_1(t) = u_1\left(t + \frac{1}{2}\right) = \sin \pi \left(t + \frac{1}{2}\right) = \sin \pi t \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi t \sin \frac{\pi}{2} = \cos \pi t.$$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2) použijeme vztahu (4.9). Funkce $v(t)$ je spojitá a kladná na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a její první a druhá derivace jsou spojitě na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Spočtěme první dvě derivace funkce $v(t)$

$$v_1'(t) = -\pi \sin \pi t, \quad v_1''(t) = -\pi^2 \cos \pi t.$$

Definujme funkci $F_1(t)$ jako následující podíl

$$F_1(t) = -\frac{v_1''}{v_1} = \pi^2.$$

Protože funkce $F_1(t)$ je konstantní, její infimum (tedy minimum) je právě její hodnota, dostáváme tedy dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy, který je roven přímo hodnotě prvního vlastního čísla okrajové úlohy, tj. π^2 .

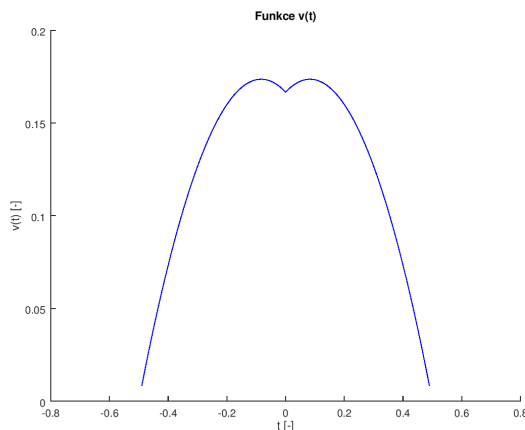
Poznámka 4.5

Předpoklad pro funkci $v \in C^2(I)$ je velmi důležitý, neboť při jeho nesplnění můžeme dostat „dolní odhad“ prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2), který bude větší než samotné první vlastní číslo (v případě naší okrajové úlohy, kde známe číselnou hodnotu prvního vlastního čísla, tento problém snadno rozpoznáme, ale v obecném případě nelineární okrajové úlohy pro $p \neq 2$, kde první vlastní číslo známo není, může mít tento omyl fatální důsledky v dolním odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy). Fakt nesplnění předpokladu spojitosti první a druhé derivace ilustruje následující příklad.

Příklad 4.2

Proveďme dolní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_2(t) = \begin{cases} -(t + \frac{1}{2})(t - \frac{1}{3}), & t \in (-\frac{1}{2}, 0] \\ -(t - \frac{1}{2})(t + \frac{1}{3}), & t \in (0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$



Obrázek 4.1: Graf funkce $v_2(t)$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2) použijeme vztahu (4.9). Funkce $v_2(t)$ je spojitá a kladná na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Výpočet rozdělíme do dvou částí podle předpisu funkce $v(t)$ s ohledem na interval, kde je funkce definována (viz obrázek 4.1).

a) Pro $t \in (-\frac{1}{2}, 0]$ má funkce $v_2(t)$ předpis

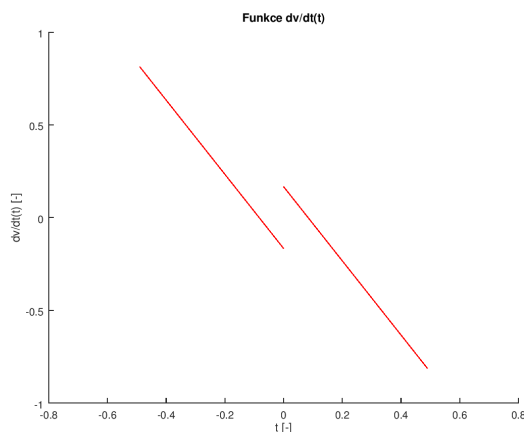
$$v_{2a}(t) = -\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}t - t^2.$$

Dále spočtěme první dvě derivace funkce $v_1(t)$

$$v'_{2a}(t) = -\frac{1}{6} - 2t, \quad v''_{2a}(t) = -2.$$

Definujme funkci $F_2(t)$ jako následující podíl

$$F_2(t) = -\frac{v''_{2a}}{v_{2a}} = \frac{2}{\frac{1}{6} - \frac{1}{6}t - t^2}.$$



Obrázek 4.2: Graf funkce $v'_2(t)$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy použijeme vztahu (4.9), určíme tedy extrémy funkce $F_2(t)$ a v případě, že se bude jednat o minimum této funkce, dostaneme potom dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2). Spočítejme první derivaci a položíme rovnu nule, tedy

$$F'_2(t) = \frac{4t + \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}t - t^2\right)^2} = 0.$$

Řešením předchozí rovnice dostáváme stacionární bod

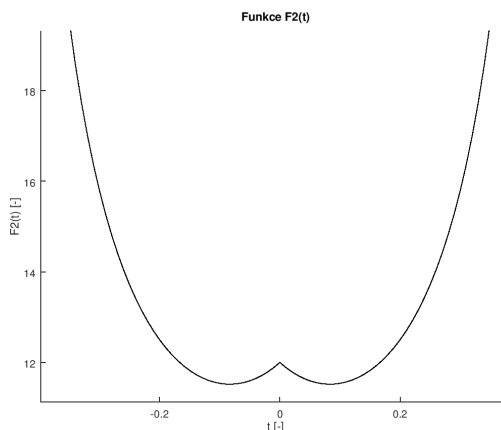
$$t_0 = -\frac{1}{12}.$$

Protože derivace funkce $F'_2(t)$ mění znaménko v okolí stacionárního bodu od záporných hodnot až po kladné hodnoty, jedná se tedy ve stacionárním bodu o ostré lokální minimum této funkce. Dosazením stacionárního bodu do funkce $F_2(t)$ dostáváme dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy

$$F_2(t_0) = \frac{288}{25} = 11,52.$$

b) Pro $t \in (0, \frac{1}{2})$ má funkce $v_2(t)$ předpis

$$v_{2b}(t) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}t - t^2.$$



Obrázek 4.3: Graf funkce $F_2(t)$

Výsledky jsou vzhledem k symetrii funkce $v_2(t)$ shodné.

V obou případech jsme bohužel dostali stejný **dolní odhad prvního vlastního čísla** okrajové úlohy (2.2), který je číselně **vyšší než první vlastní číslo** této okrajové úlohy. Důvodem je nespojitost první derivace funkce $v_2(t)$, která je zobrazena na obrázku 4.2, a tedy nesplnění předpokladů pro úspěšný odhad.

4.4 Výpočty dolních odhadů prvního vlastního čísla okrajových úloh

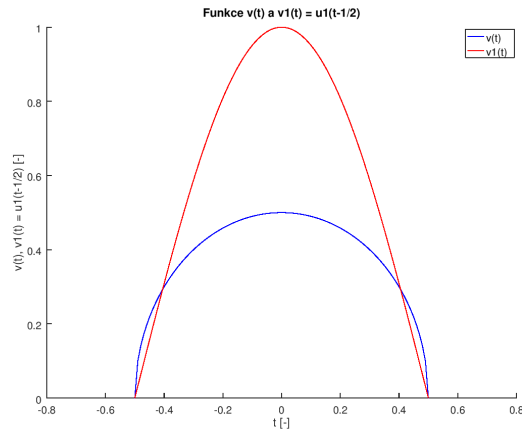
V této části textu budeme provádět výpočty dolních odhadů prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2) pro různé funkce $v(t)$, které splňují předpoklady pro nezápornost a spojitost první a druhé derivace na uvažovaném intervalu. Protože odhad z příkladu 4.1, který se číselně rovnal přímo prvnímu vlastnímu číslu okrajové úlohy a který vycházel z první vlastní funkce $v(t) = u_1 \left(t - \frac{1}{2} \right) = \cos \pi t$ je **sudá funkce**, budeme v dalším textu uvažovat sudé funkce.

Příklad 4.3

Proveďme dolní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_3(t) = \sqrt{\frac{1}{4} - t^2}, \quad t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2) opět použijeme vztahu (4.9). Funkce $v(t)$ a její první a druhá derivace je spojitá na intervalu $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ a funkce je také na tomto intervalu kladná.



Obrázek 4.4: Graf funkce $v_3(t)$

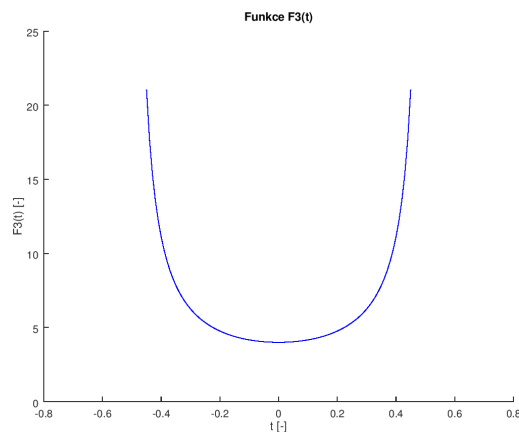
Spočtěme první dvě derivace funkce $v(t)$

$$v_3'(t) = \frac{-2t}{\sqrt{1-4t^2}},$$

$$v_3''(t) = \frac{-2}{\sqrt{1-4t^2}(1-4t^2)}.$$

Definujme funkci $F_3(t)$ jako následující podíl

$$F_3(t) = -\frac{v_3''}{v_3} = \frac{4}{(1-4t^2)^2}.$$



Obrázek 4.5: Graf funkce $F_3(t)$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy použijeme vztahu (4.9), určíme tedy extrémy funkce $F_3(t)$ a v případě, že se bude jednat o minimum této funkce, dostaneme potom dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2). Spočítejme první derivaci a položíme rovnu nule, tedy

$$F_3'(t) = \frac{64t}{(1-4t^2)^3} = 0.$$

Řešením předchozí rovnice dostáváme stacionární bod

$$t_0 = 0.$$

Protože derivace funkce $F_3'(t)$ mění znaménko v okolí stacionárního bodu od záporných hodnot až po kladné hodnoty, jedná se tedy ve stacionárním bodu o ostré lokální minimum této funkce. Dosazením stacionárního bodu do funkce $F_3(t)$ dostáváme dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy

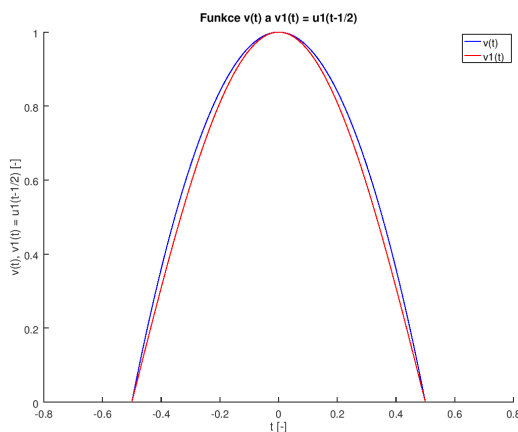
$$F_3(t_0) = 4.$$

Výhodné se pro volbu funkce $v(t)$ pro dolní odhad prvního vlastního čísla může zdát použití polynomů, které jsou spojitě a mají spojitou první derivaci, a jejich derivování není obtížné. Samotné užití polynomů také plyne z vlastností aproximace funkcí pomocí Taylorova polynomu.

Příklad 4.4

Proveďme dolní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_4(t) = 1 - 4t^2, \quad t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

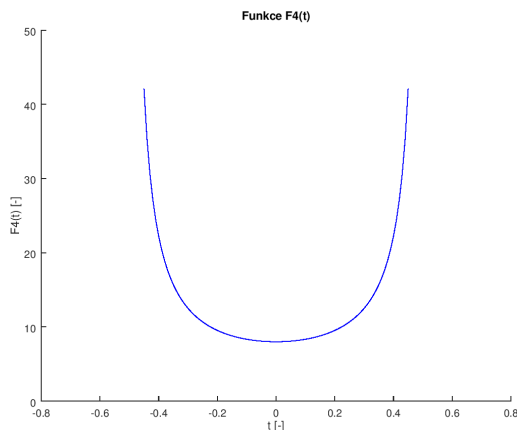


Obrázek 4.6: Graf funkce $v_4(t)$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2) použijeme vztahu (4.9). Funkce $v_4(t)$ a její první a druhá derivace je spojitá na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a funkce je také na tomto intervalu kladná.

Spočtěme první dvě derivace funkce $v_4(t)$

$$v_4'(t) = -8t, \quad v_4''(t) = -8.$$



Obrázek 4.7: Graf funkce $F_4(t)$

Definujme funkci $F_4(t)$ jako následující podíl

$$F_4(t) = -\frac{v_4''}{v_4} = \frac{8}{1 - 4t^2}.$$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy použijeme vztahu (4.9), určíme tedy extrémy funkce $F_4(t)$ a v případě, že se bude jednat o minimum této funkce, dostaneme potom dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2). Spočítejme první derivaci a položíme rovnu nule, tedy

$$F_4'(t) = \frac{64t}{(1 - 4t^2)^2} = 0.$$

Řešením předchozí rovnice dostáváme stacionární bod

$$t_0 = 0.$$

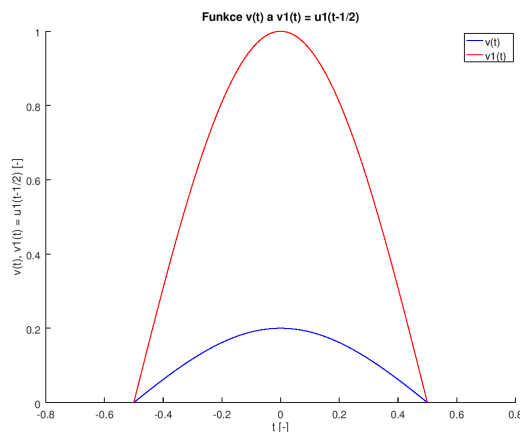
Protože derivace funkce $F_4'(t)$ mění znaménko v okolí stacionárního bodu od záporných hodnot až po kladné hodnoty, jedná se tedy ve stacionárním bodu o ostré lokální minimum této funkce. Dosazením stacionárního bodu do funkce $F_4(t)$ dostáváme dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy

$$F_4(t_0) = 8.$$

Příklad 4.5

Proveďme dolní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_5(t) = \frac{1}{1 + t^2} - \frac{4}{5}, \quad t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



Obrázek 4.8: Graf funkce $v_5(t)$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2) použijeme vztahu (4.9). Funkce $v_3(t)$ a její první a druhá derivace je spojitá na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a funkce je také na tomto intervalu kladná.

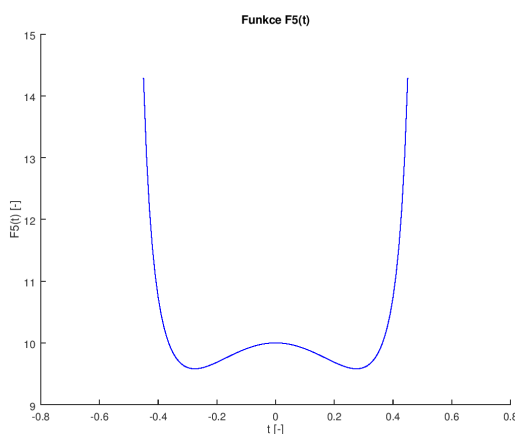
Spočtíme první dvě derivace funkce $v(t)$

$$v'_5(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2},$$

$$v''_5(t) = -2 \frac{1-2t^2-3t^4}{(1+t^2)^4} = 2 \frac{3t^2-1}{(1+t^2)^3}.$$

Definujme funkci $F_5(t)$ jako následující podíl

$$F_5(t) = -\frac{v''_5}{v_5} = \frac{10(1-3t^2)}{(1+t^2)^2(1-4t^2)}.$$



Obrázek 4.9: Graf funkce $F_5(t)$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy použijeme opět vztahu (4.9), určíme tedy extrémy funkce $F_5(t)$ a v případě, že se bude jednat

o minimum této funkce, dostaneme potom dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2). Spočítejme první derivaci a položíme rovnu nule, tedy

$$F_5'(t) = -20t \frac{24t^4 - 15t^2 + 1}{(1+t^2)^3(1-4t^2)^2} = 0.$$

Řešením předchozí rovnice, tedy

$$t(24t^4 - 15t^2 + 1) = 0,$$

dostáváme stacionární body

$$t_0 = 0, t_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{\frac{129}{9}}}, t_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{5 - \sqrt{\frac{129}{9}}},$$

$$t_3 = \frac{1}{4}\sqrt{5 - \sqrt{\frac{129}{9}}}, t_4 = \frac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{\frac{129}{9}}}.$$

Z průběhu derivace funkce $F_5(t)$ je zřejmé, že funkce má na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dvě ostrá lokální minima (viz obrázek 4.9), pro která platí

$$F_5(t_2) = F_5(t_3) = \frac{3}{400}(789 + 43\sqrt{129}) \doteq 9,5804.$$

Poznámka 4.6

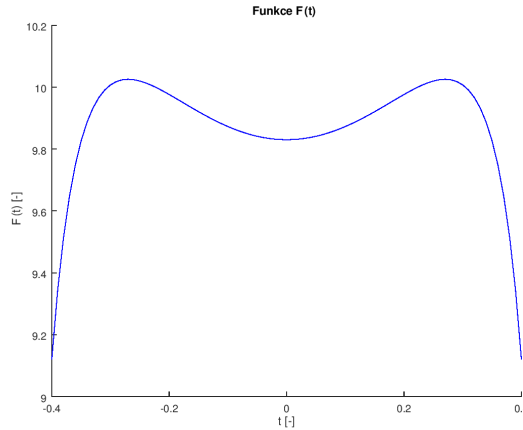
Pro Taylorův rozvoj funkce $\cos t$ v bodě $t_0 = 0$ platí

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Z Taylorova rozvoje funkce $u_1(t + \frac{1}{2}) = \cos \pi t$ tedy plyne, že aproximační polynomy pro funkci $v(t)$, používané pro dolní odhady prvního vlastního čísla, má smysl uvažovat jen v **sudých mocninách** v proměně t (to ilustrují i následující dva příklady).

Pokud budeme provádět dolní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) pomocí například sudého polynomu čtvrtého stupně ve tvaru $v(t) = at^4 + bt^2 + 1$ a budeme uvažovat podmínku $v(\frac{1}{2}) = v(-\frac{1}{2}) = 0$, dostaneme podmíněnou optimalizační úlohu, kterou je možno řešit pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Úloha ovšem nedává s ohledem na dolní odhad prvního vlastního čísla řešení. Neuspokojivý výsledek také dostaneme v případě, že budeme uvažovat interpolační polynom čtvrtého stupně ($v(t) = a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$) pro první vlastní funkci, jako jsme uvažovali v předchozí kapitole v příkladu 3.9. Uvažujme interpolační polynom $v(t)$ daný tabulkou:

t_i	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$v(t_i)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



Obrázek 4.10: Graf funkce $F(t)$

Výsledkem interpolačního procesu je polynom

$$v(t) = at^4 + bt^2 + c = \frac{64}{3}(3 - 2\sqrt{2})t^4 + \frac{4}{3}(8\sqrt{2} - 15)t^2 + 1,$$

který aproximuje první vlastní funkci dostatečně přesně, a po dosazení do funkce $F(t)$ dostaneme podíl

$$F(t) = -\frac{v''}{v} = -2\frac{6at^2 + b}{at^4 + bt^2 + c}.$$

Funkce má sice lokální minimum (viz obrázek 4.10), ale v případě dolního odhadu prvního vlastního čísla podle (4.9) musíme uvažovat infimum této funkce, které je $-\infty$.

Inspirováni příkladem 4.4 budeme v následujících úlohách uvažovat polynomy stupně $2(k+1)$ ve tvaru součinu kvadratických členů

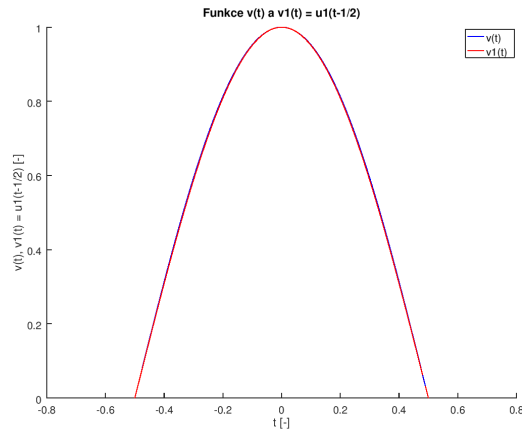
$$v(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k a_i} (1 - 4t^2)(a_1 - t^2) \cdots (a_k - t^2), \quad a_i \geq \frac{1}{4} \vee a_i < 0, \quad (4.10)$$

které splňují podmínku $v\left(\frac{1}{2}\right) = v\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Budeme se snažit volit koeficienty a_i tak, abychom pro podíl (4.9) dostali v čitateli právě jeden polynom $(1 - 4t^2)$ (respektive, aby rozklad polynomu v čitateli tento polynom obsahoval) a došlo k jeho vykrácení se stejným polynomem ve jmenovateli tohoto podílu.

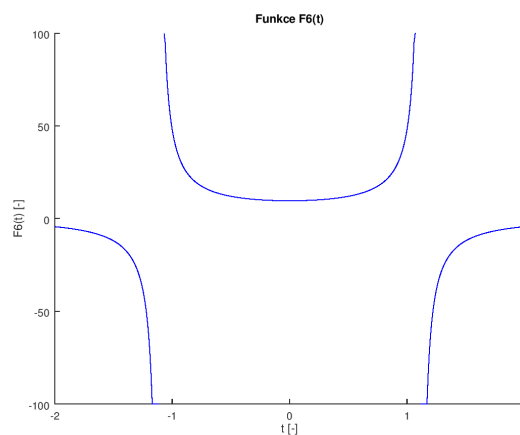
Příklad 4.6

Proveďme dolní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_6(t) = \frac{1}{a}(1 - 4t^2)(a - t^2), \quad t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



Obrázek 4.11: Graf funkce $v_6(t)$



Obrázek 4.12: Graf funkce $F_6(t)$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2) použijeme vztahu (4.9). Funkce $v_6(t)$ a její první a druhá derivace je spojitá na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a funkce je také na tomto intervalu kladná ($a \geq \frac{1}{4}$).

Spočtěme první dvě derivace funkce $v_6(t)$

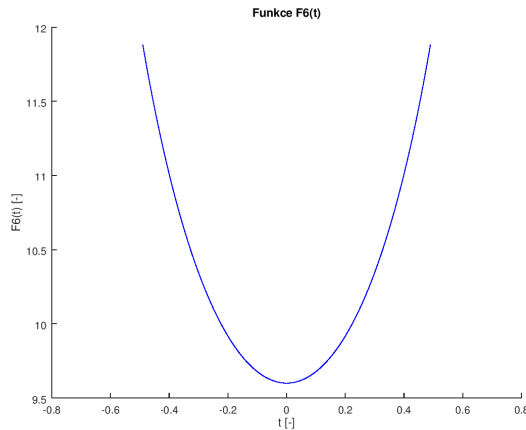
$$v_6'(t) = \frac{1}{a}[16t^3 - 2(1 + 4a)t], \quad v_6''(t) = \frac{1}{a}[48t^2 - 2(1 + 4a)].$$

Definujme funkci $F_6(t)$ jako následující podíl

$$F_6(t) = -\frac{v_6''}{v_6} = -2 \frac{24t^2 - (1 + 4a)}{(1 - 4t^2)(a - t^2)}.$$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy použijeme vztahu (4.9), ale nejprve určíme hodnotu parametru a tak, aby polynom v čitateli měl kořeny $\pm\frac{1}{2}$, tedy aby platilo $v_6''(\frac{1}{2}) = v_6''(-\frac{1}{2}) = 0$. Potom řešíme rovnici

$$24 \left(\pm \frac{1}{2} \right)^2 - 2(1 + 4a) = 0.$$



Obrázek 4.13: Graf funkce $F_6(t)$

Řešení je

$$a = \frac{5}{4},$$

a snadno se přesvědčíme (viz obrázek 4.12), že funkce $F_6(t)$ je na intervalu $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ spojitá a má minimum. Dosaďme parametr do vztahu pro $F_6(t)$ a dostaneme

$$F_6(t) = -2 \frac{24t^2 - 6}{(1 - 4t^2)(\frac{5}{4} - t^2)} = \frac{-48}{4t^2 - 5}.$$

Určíme extrémy funkce $F_6(t)$ a v případě, že se bude jednat o minimum této funkce, dostaneme potom dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2). Spočítejme první derivaci a položíme rovnu nule, tedy

$$F_6'(t) = \frac{384t}{(4t^2 - 5)^2} = 0.$$

Řešením předchozí rovnice dostaneme stacionární bod

$$t_0 = 0.$$

Protože derivace funkce $F_6'(t)$ mění znaménko v okolí stacionárního bodu od záporných hodnot až po kladné hodnoty, jedná se tedy o ostré lokální minimum této funkce. Dosažením stacionárního bodu do funkce $F_6(t)$ dostáváme dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy

$$F_6(t_0) = \frac{48}{5} = 9,6.$$

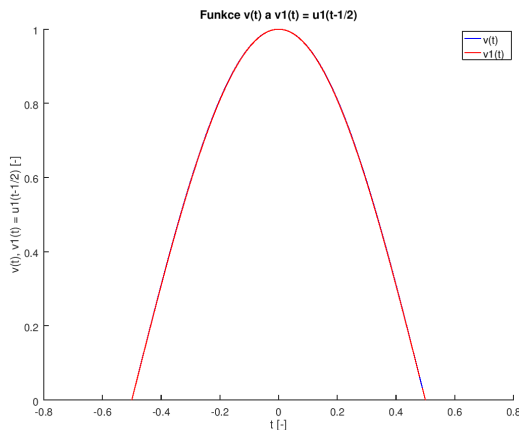
Pro relativní chybu odhadu (oproti známé hodnotě λ_1) prvního vlastního čísla úlohy platí

$$\delta = 100 \frac{F_6(t_0) - \lambda_1}{\lambda_1} \doteq 2,73\%.$$

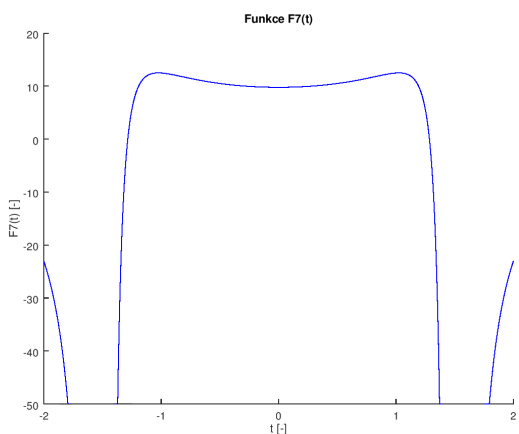
Příklad 4.7

Proveďme dolní odhad prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (2.2) a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_7(t) = \frac{1}{ab}(1 - 4t^2)(a - t^2)(b - t^2), \quad t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



Obrázek 4.14: Graf funkce $v_7(t)$



Obrázek 4.15: Graf funkce $F_7(t)$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2) použijeme opět vztahu (4.9). Funkce $v_7(t)$ a její první a druhá derivace je spojitá na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a je také na tomto intervalu kladná (pro $a, b > \frac{1}{4}$).

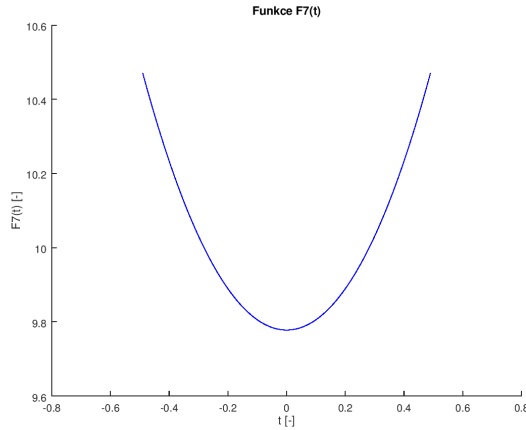
Spočtěme první dvě derivace funkce $v_7(t)$

$$v_7'(t) = \frac{1}{ab}[-24t^5 + 4(1 + 4a + 4b)t^3 - 2(a + b + 4ab)t],$$

$$v_7''(t) = \frac{1}{ab}[-120t^4 + 12(1 + 4a + 4b)t^2 - 2(a + b + 4ab)].$$

Definujme funkci $F_7(t)$ jako následující podíl

$$F_7(t, a, b) = -\frac{v_7''}{v_7} = 2 \frac{60t^4 - 6(1 + 4a + 4b)t^2 + (a + b + 4ab)}{(1 - 4t^2)(a - t^2)(b - t^2)}.$$



Obrázek 4.16: Graf funkce $F_7(t)$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy použijeme vztahu (4.9), ale nejprve určíme hodnotu parametrů a, b tak, aby polynom v čitateli měl kořeny $\pm\frac{1}{2}$, tedy aby platilo $v_7''(\frac{1}{2}) = v_7''(-\frac{1}{2}) = 0$. Potom řešíme rovnici

$$60 \left(\pm\frac{1}{2}\right)^4 - 6 \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 (1 + 4a + 4b) + a + b + 4ab = 0.$$

Řešení je

$$b = \frac{9 - 20a}{4(5 - 4a)},$$

dosazením do funkce $F_7(t, a, b)$ a rozkladem polynomu v čitateli vykrátíme polynom $(1 - 4t^2)$ ve jmenovateli. Dalšími úpravami dostaneme podíl

$$F_7(t, a) = -6 \frac{20(5 - 4a)t^2 + 32a^2 - 12a - 3}{(a - t^2)[(9 - 20a) - 4(5 - 4a)t^2]}.$$

Pokusíme se určit extrémy funkce $F_7(t, a)$ a v případě, že se bude jednat o minimum této funkce, dostaneme potom dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2). Spočítáme parciální derivace a položíme rovny nule

$$\frac{\partial F_7}{\partial t}(t, a) = -12t \left(\frac{80(5 - 4a)^2 t^4 - 8(120a^3 - 208a^2 + 48a + 15)t^2}{(a - t^2)^2 [(9 - 20a) - 4(5 - 4a)t^2]^2} + \frac{512a^4 - 1792a^3 + 2384a^2 - 792a + 27}{(a - t^2)^2 [(9 - 20a) - 4(5 - 4a)t^2]^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F_7}{\partial a}(t, a) = -6 \frac{(16a^2 - 40a + 9)(48t^4 - 88t^2 + 3)}{(a - t^2)^2 [(9 - 20a) - 4(5 - 4a)t^2]^2} = 0.$$

Řešením předchozích rovnic dostaneme dva stacionární body $[0, \frac{1}{4}]$, $[0, \frac{9}{4}]$ splňující podmínky $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $a \in \mathbb{R}$. Stacionární body nalezneme řešením druhé rovnice, tj. řešíme rovnice $16a^2 - 40a + 9 = 0$ a $48t^4 - 88t^2 + 3 = 0$. Dosazením těchto řešení do první rovnice určíme všechny možné stacionární body.

Řešením pro minimum funkce $F_7(t, a)$ je stacionární bod

$$[t_0, a_0] = \left[0, \frac{9}{4} \right].$$

Hodnota funkce v tomto bodě a tím i hodnota dolního odhadu prvního vlastního čísla je

$$F_7\left(0, \frac{9}{4}\right) = \frac{88}{9} \doteq 9,77778.$$

Pro relativní chybu odhadu (oproti známé referenční hodnotě) prvního vlastního čísla úlohy platí

$$\delta = 100 \frac{F_7(t_0, a_0) - \lambda_1}{\lambda_1} \doteq 0,93\%.$$

Pro hodnotu parametru $a = \frac{9}{4}$ má $F_7(t, a)$ funkce tvar

$$F_7(t) = 24 \frac{33 - 20t^2}{(4t^2 - 9)^2}.$$

Poznámka 4.7

Ke stejným výsledkům jako v předchozím příkladu dojdeme, pokud budeme uvažovat polynom ve tvaru $v(t) = \frac{1}{ab}(1 - 4t^2)(a - t^2)(b + t^2)$.

Pro srovnání jsou dolní odhady prvního vlastního čísla okrajové úlohy uvedeny v následující tabulce.

Funkce	Odhad	Popis funkce
v_1	9,86960	první vlastní funkce - $v_1(t) = \cos \pi t$
v_2	—	kvadratická funkce s nespojitými derivacemi
v_3	4	půlkružnice
v_4	8	kvadratická funkce - $v_4(t) = 1 - 4t^2$
v_5	9,5804	racionální lomená funkce - $v_5(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{4}{5}$
v_6	9,6	polynom 4. stupně - $v_6(t) = \frac{1}{a}(1 - 4t^2)(a - t^2)$
v_7	9,77778	polynom 6. stupně - $v_7(t) = \frac{1}{ab}(1 - 4t^2)(a - t^2)(b - t^2)$

Tabulka 4.1: Výsledky dolních odhadů prvního vlastního čísla okrajové úlohy.

4.5 Shrnutí

V této kapitole jsme se zabývali okrajovou úlohou s parametrem, s ohledem na dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy. U dolního odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2) bylo uvedeno několik příkladů. Experimentálně bylo zkoušeno několik funkcí s ohledem na výsledek odhadu. Experimentálně byl ověřen fakt, že se jedná o dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové

úlohy. V případě příkladu 4.4, kde byl použit polynom stupně 2, jsme dosáhli odhadu prvního vlastního čísla o hodnotě 8, v případě použití polynomu stupně 4 u příkladu 4.6 jsme se dostali již k hodnotě odhadu 9,6 s relativní chybou zhruba 2,73%. S ohledem na stejný charakter použité funkce (tedy obecného polynomu 4. řádu) u horního odhadu je zřejmé, že dolní odhad prvního vlastního čísla je náročnější, protože chyba v případě dolního odhadu je o čtyři řády vyšší. Nejpřesnějšího dolního odhadu prvního vlastního čísla bylo dosaženo za použití polynomu stupně 6 v příkladu 4.7, kde jsme se dostali již k hodnotě odhadu 9,77778 s relativní chybou zhruba 0,93%. Použití obecných polynomů definovaných předpisem (4.10), které byly použity v příkladech 4.6 a 4.7, se jeví jako vhodná cesta k nalezení přesného dolního odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2).

Kapitola 5

Odhady prvního vlastního čísla obecné jednodimenzionální okrajové úlohy s p -laplaciánem

V této kapitole probereme velmi stručně obecnou okrajovou jednodimenzionální úlohu s p -laplaciánem, uvedenou v poznámce 4.3 v kapitole 4.

5.1 Obecná jednodimenzionální okrajová úloha s p -laplaciánem

Obecná okrajová jednodimenzionální úloha s p -laplaciánem je formulována předpisem (viz [15])

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda|u|^{p-2}u, \quad t \in (0, 1), \quad p \in (1, \infty), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (5.1)$$

Zde se oproti okrajové úloze (2.2) pro $p = 2$, která je lineární a byla řešena v předchozích kapitolách, jedná v případě pro $p \neq 2$ již o nelineární problém.

5.2 První vlastní číslo obecné jednodimenzionální okrajové úlohy

Pro výpočet prvního vlastního čísla obecné jednodimenzionální okrajové úlohy s p -laplaciánem (5.1) platí následující vztah (viz [10, 16])

$$\lambda_1((0, 1), p) = (p - 1) \left(\frac{2\pi}{p \sin \frac{\pi}{p}} \right)^p. \quad (5.2)$$

Výpočet je jednoduchý a budeme jej ilustrovat několika příklady.

Příklad 5.1

Proveďme výpočet prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (5.1) pro $p = 2$.

Výpočet provedeme pomocí vztahu (5.2)

$$\lambda_1((0, 1), 2) = (2 - 1) \left(\frac{2\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2}} \right)^2 = \pi^2.$$

Příklad 5.2

Proveďme výpočet prvního vlastního čísla pro okrajovou úlohu (5.1) pro $p = 4$.

Výpočet opět provedeme pomocí vztahu (5.2)

$$\lambda_1((0, 1), 4) = (4 - 1) \left(\frac{2\pi}{4 \sin \frac{\pi}{4}} \right)^4 = \frac{3}{4} \pi^4 \doteq 73,05682.$$

5.3 Horní odhad prvního vlastního čísla obecné úlohy

Pro horní odhad prvního vlastního čísla obecné jednodimenzionální okrajové úlohy s p -laplaciánem (5.1) platí variační charakteristika prvního vlastního čísla (viz [9])

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(0,1), u \neq 0} \frac{\int_0^1 |u'|^p dt}{\int_0^1 |u|^p dt}. \quad (5.3)$$

Příklad 5.3

Užitím variační charakteristiky prvního vlastního čísla (3.5) provedme jeho horní odhad pro okrajovou úlohu (2.2) pro případ $p = 4$ a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_1(t) = 4t(1 - t), \quad t \in (0, 1).$$

Spočítáme integrál

$$\int_0^1 (v_1')^4 dt = 4^4 \int_0^1 (1 - 2t)^4 dt = \frac{1}{5}.$$

Dále spočtěme integrál

$$\int_0^1 v_1^4 dt = 4^4 \int_0^1 [t(1-t)]^4 dt = \frac{1}{630}.$$

Spočítejme Rayleighův podíl

$$R = \frac{\int_0^1 (v_1')^4 dt}{\int_0^1 v_1^4 dt} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{630}} = 126.$$

Porovnáme-li výsledek s odhadem pro případ $p = 2$ a $p = 4$, kdy jsme použili k odhadu stejnou funkci, v případě pro $p = 2$ dostáváme relativní chybu odhadu

$$\delta_{p=2} = 100 \frac{10 - \pi^2}{\pi^2} \doteq 1,31\%,$$

pro případ $p = 4$ dostáváme potom relativní chybu odhadu

$$\delta_{p=4} = 100 \frac{126 - \frac{3}{4}\pi^4}{\frac{3}{4}\pi^4} \doteq 72,47\%.$$

Je tedy zřejmé, že k hornímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy pro případ $p = 4$ je třeba použít vhodnější funkci, která lépe „odpovídá“ první vlastní funkci této úlohy.

5.4 Dolní odhad prvního vlastního čísla obecné úlohy

Pro dolní odhad prvního vlastního čísla obecné jednodimenzionální úlohy s p -laplaciánem (5.1) budeme postupovat v duchu předchozí kapitoly 4.

Věta 5.1

Nechť funkce $v(t) > 0$ na intervalu $I = (0, 1)$, nechť $v \in C^2(I)$, nechť $p \in (1, \infty)$ a nechť pro $\lambda > 0$ platí

$$-((v')^{p-1})' \geq \lambda v^{p-1}, \quad t \in I. \quad (5.4)$$

Potom pro každou nezápornou funkci $u \in W_0^{1,p}(0, 1)$ platí na I

$$\int_0^1 |u'|^p dt \geq \lambda \int_0^1 |u|^p dt. \quad (5.5)$$

Důkaz:

Důkaz je obdobný důkazu ve větě 4.1 a lze jej pro obecný případ nalézt v pramenu [8].

Lemma 5.1

Nechť funkce $v(t) > 0$ na intervalu $(0,1)$, nechť $v(t) \in C^2(0,1)$ a nechť $p \in (1, \infty)$. Existuje-li $\lambda > 0$ takové, že platí nerovnost

$$-((v')^{p-1})' \geq \lambda v^{p-1}, \quad t \in (0,1), \quad (5.6)$$

potom

$$\lambda \leq \lambda_1. \quad (5.7)$$

Důkaz:

Důkaz plyne z (5.3) a (5.5).

Důsledek 5.1

Nechť funkce $v(t) > 0$ pro všechna $t \in (0,1)$, nechť $v(t) \in C^2(0,1)$ a nechť $p \in (1, \infty)$. Je-li λ_1 první vlastní číslo okrajové úlohy (5.1), potom platí

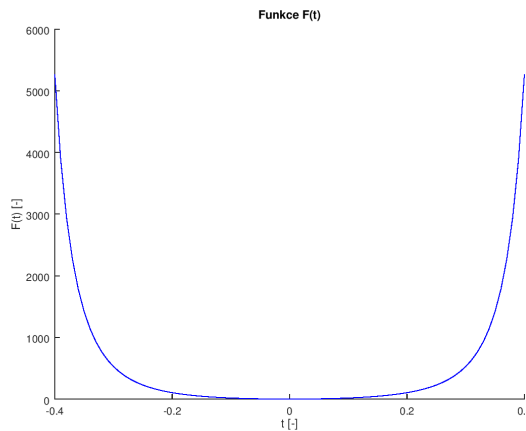
$$\lambda_1 \geq \inf_{t \in (0,1)} -\frac{((v')^{p-1})'}{v^{p-1}}. \quad (5.8)$$

Rovnost nastává pro $v = u_1$, kde u_1 je první vlastní funkce okrajové úlohy.

Příklad 5.4

Proveďme dolní odhad prvního vlastního čísla pro obecnou okrajovou úlohu (3.5) pro případ $p = 4$ a k výpočtu odhadu použijme následující funkci:

$$v_2(t) = 1 - 4t^2, \quad t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



Obrázek 5.1: Graf funkce $F(t)$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla obecné okrajové úlohy (3.5) pro případ $p = 4$ použijeme vztahu (5.8). Funkce $v_2(t)$ a její první a druhá derivace je spojitá na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a funkce je také na tomto intervalu kladná.

Spočtěme první derivaci funkce $v_2(t)$

$$v_2'(t) = -8t.$$

Dále spočtěme

$$([v_2'(t)]^3)' = (-2^9 t^3)' = -3 \cdot 2^9 t^2.$$

Definujme funkci $F(t)$ jako následující podíl

$$F(t) = -\frac{((v_2')^3)'}{v_2^3} = 3 \cdot 2^9 \frac{t^2}{(1 - 4t^2)^3}.$$

K dolnímu odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy použijeme vztahu (5.8), určíme tedy extrémy funkce $F(t)$ a v případě, že se bude jednat o minimum této funkce, dostaneme potom dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2). Spočítejme první derivaci a položíme rovnu nule, tedy

$$F'(t) = 3 \cdot 2^{10} \frac{t(1 + 8t^2)}{(1 - 4t^2)^4} = 0.$$

Řešením předchozí rovnice dostáváme stacionární bod

$$t_0 = 0.$$

Protože derivace funkce $F'(t)$ mění znaménko v okolí stacionárního bodu od záporných hodnot až po kladné hodnoty, jedná se tedy o ostré lokální minimum této funkce. Dosazením stacionárního bodu do funkce $F(t)$ dostáváme dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy

$$F(t_0) = 0.$$

Zde obdobně jako u předchozího příkladu je zřejmé, že k dolnímu odhadu prvního vlastního čísla obecné okrajové úlohy pro případ $p = 4$ je třeba použít vhodnější funkci „aproximující“ lépe první vlastní funkci této úlohy.

5.5 Shrnutí

V této kapitole byla velmi stručně probrána obecná jednodimenzionální okrajová úloha s p -laplaciánem pro případ $p \neq 2$. Nejprve byla definována obecná jednodimenzionální okrajová úloha s p -laplaciánem (5.1), poté byl uveden vztah pro výpočet prvního vlastního čísla této úlohy s ilustračními příklady pro případ $p = 2$ a $p = 4$. Dále jsou rozebrány případy horního a dolního

odhadu prvního vlastního čísla obecné jednodimenzionální okrajové úlohy s p -laplaciánem pro případ $p = 4$. K odhadům jsou použity stejné funkce, jako v případě pro $p = 2$. Výsledky, které nejsou nijak dobré, nasvědčují faktu, že k odhadům je třeba použít vhodnější funkce, které se více „přibližují“ první vlastní funkci obecné úlohy pro případ $p = 4$.

Závěr

V předchozím textu byla stručně probrána témata okrajových úloh.

V první kapitole byly definovány základní okrajové úlohy pro různé typy okrajových podmínek (Dirichletovy, Neumannovy a okrajové podmínky obecné okrajové úlohy). Pro lepší ilustraci problému jsou uvedeny úlohy.

Ve druhé kapitole jsou definovány pojmy vlastního čísla a vlastní funkce pro okrajové úlohy. Zde je řešena okrajová úloha s parametrem užívaná k odhadům prvního vlastního čísla v kapitolách 3 a 4.

Ve třetí kapitole jsou probrány horní odhady prvního vlastního čísla pro okrajové úlohy. Experimentálně bylo testováno několik funkcí s ohledem na výsledek Rayleighova podílu. Experimenty s funkcemi byl ověřen fakt, že se jedná o horní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy. Testovány byly lineární spline funkce definované několika body (až pěti body) v příkladech 3.2, 3.5, 3.6 a 3.7. Výsledky jsme se u žádného odhadu nedostali pod hodnotu čísla 10. Dále byly zkoušeny polynomy v příkladech 3.4 a 3.9. V případě příkladu 3.4, kde byl použit polynom stupně 2, jsme dosáhli odhadu prvního vlastního čísla o hodnotě 10 (také viz pramen [14]), v případě použití libovolného polynomu stupně nejvýše 4 u příkladu 3.9 jsme se dostali již k velmi přesnému odhadu s relativní chybou zhruba 0,003%. Užití polynomů k výpočtu horních odhadů se jeví velmi příznivé, neboť derivování a integrování polynomu je snadná úloha. Další otázkou je, jaký stupeň polynomu zvolit, aby se chyba odhadu prvního vlastního čísla dostala pod námi stanovenou mez.

Ve čtvrté kapitole byly probrány dolní odhady prvního vlastního čísla pro okrajové úlohy s parametrem (2.2). Zde se opět jako v předchozí kapitole jedná o lineární případ ($p = 2$) obecné úlohy pro $p \in (1, \infty)$, která již lineární není. Experimentálně bylo zkoušeno několik funkcí s ohledem na výsledek odhadu. Opět byl ověřen fakt, že se jedná o dolní odhad prvního vlastního čísla okrajové úlohy. V případě příkladu 4.4, kde byl použit polynom stupně 2, jsme dosáhli odhadu prvního vlastního čísla o hodnotě 8, v případě použití polynomu stupně 4 u příkladu 4.6 jsme se dostali již k hodnotě odhadu 9,6 s relativní chybou zhruba 2,73%. S ohledem na stejný charakter použité funkce (tedy obecného polynomu 4. řádu) u horního odhadu je zřejmé, že dolní odhad prvního vlastního čísla je náročnější, protože chyba v případě dolního odhadu je o čtyři řády vyšší. Nejpresnějšího dolního odhadu prvního vlastního čísla bylo dosaženo za použití obecného polynomu stupně 6 v příkladu 4.7, kde jsme se dostali již k hodnotě odhadu 9,77778 s relativní chybou zhruba 0,93%. Použití obecných

polynomů definovaných předpisem (4.10), které byly použity v příkladech 4.6 a 4.7, se jeví jako vhodná cesta k nalezení přesného dolního odhadu prvního vlastního čísla okrajové úlohy (2.2).

V poslední, páté kapitole, byla řešena obecná úloha pro $p \neq 2$ s horními a dolními odhady prvního vlastního čísla. Testovány byly některé funkce, použité v kapitolách 3 a 4. Výsledky nasvědčují faktu, že k odhadům je třeba použít vhodnější funkce, které se více „přibližují“ první vlastní funkci obecné úlohy pro případ $p = 4$. Tento směr se jeví jako zajímavý pro další práci, stejně jako řešení odhadů vícedimenzionálního problému pro parciální diferenciální rovnice.

Seznam použitých zdrojů

- [1] Drábek P., Míka S. *Matematická analýza II*. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta aplikovaných věd. Skriptum. Plzeň 2011.
- [2] Zindulka O. *Matematika 3*. Vydavatelství ČVUT v Praze. Fakulta stavební. Skriptum. Praha 2007.
- [3] Daněk J. *Numerické metody - přednášky*. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta aplikovaných věd. Dostupné na: <http://home.zcu.cz/~danek/DATA/WWW_STRANKY/soubory/prednasky/>.
- [4] Drábek P., Kufner A. *Úvod do funkcionální analýzy*. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta aplikovaných věd. Skriptum. Plzeň 1994.
- [5] Nečesal P. *Cvičení z předmětu Úvod do funkcionální analýzy*. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta aplikovaných věd. Dostupné na: <<http://home.zcu.cz/~pnecosal/UFA/PDF/UFA-prostory.pdf>>.
- [6] Kopáček J. *Matematická analýza nejen pro fyziky III*. Matfyzpress. Praha 2007.
- [7] Kreyszig E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley India Pvt. Limited, 2007.
- [8] W. Allegretto, Y.X. Huang. *A Picone's identity for the p -Laplacian and applications*. *Nonlinear Anal.* 32, pp. 819-830. 1998.
- [9] Benedikt J., Drábek P. *Estimates of the principal eigenvalue of the p -Laplacian*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2012.
- [10] Benedikt J., Drábek P. *Asymptotics the principal eigenvalue of the p -Laplacian on the ball as p approaches 1*. *Nonlinear Analysis*. 2013.
- [11] Bal K. *Generalized Picone's identity and its applications*. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2013 (2013), No. 243, pp. 1-6, ISSN: 1072-6691. Dostupné na: <<http://ejde.math.txstate.edu>>.
- [12] Drábek P., Milota J. *Methods of Nonlinear Analysis, Applications to Differential Equations*. Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin. 2007.

- [13] P. L. De Napoli, J. P. Pinasco. *Eigenvalues of the p -Laplacian and disconjugacy criteria*. Journal of Inequalities and Applications. 2006. Dostupné na: <<https://citeseerx.ist.psu.edu>>.
- [14] Levandosky J. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics - Eigenvalues of the Laplacian*. Stanford University. 2003. Dostupné na: <<https://web.stanford.edu/class/math220b/handouts/eigenvalues.pdf>>.
- [15] Binding P, Drábek P, Huang X. *The Range of the p -Laplacian*. Appl. Math. Letters. 1997.
- [16] Biezuner R.J., Brown J., Ercole G., Martins E.M.. *Computing the first eigenpair of the p -Laplacian via inverse iteration of sublinear supersolutions*. Journal of Functional Analysis. 2009.