Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Distanční barvení grafů

Plzeň, 2018

Tereza Supíková

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma distanční barvení grafů vypracovala pod vedením vedoucího bakalářské práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury.

V Plzni dne ....

Tereza Supíková

Poděkování

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování panu doc. RNDr. Přemyslu Holubovi, Ph.D. nejen za cenné rady a odborný dohled nad mou prací, ale i za ochotu, vstřícnost a trpělivost při konzultacích.

Abstrakt

Vrcholové 2-distanční barvení grafu G je zobrazení $f : V(G) \to \mathbb{N}$, pro které platí, že $f(u) \neq f(v)$ pro každé $u, v \in V(G)$ s $\mathrm{dist}_G(u, v) \leq 2$. Hodnotu $f(u)$ nazýváme barvou vrcholu u. Nejmenší počet barev nutných k 2-distančnímu obarvení grafu G nazýváme 2-distanční chromatické číslo grafu a značíme $\chi^2(G)$.

Cílem této bakalářské práce je vytvořit ucelený přehled dosud známých výsledků ohledně 2-distančního barvení grafů, zejména rovinných. Do přehledu zahrneme i seznamové 2-distanční barvení. Pro seznamové 2-distanční chromatické číslo, značíme $\chi^2_\ell(G)$, totiž platí $\chi^2_\ell(G) \geq \chi^2(G)$. Tedy je-li dokázána nějaká horní mez pro seznamové 2-distanční chromatické číslo, potom tato mez jistě platí také pro 2-distanční chromatické číslo. Výsledky přehledně rozdělíme do kapitol na základě dvou kritérií. Jedním z kritérií je určení horní meze 2-distančního chromatického čísla a seznamového 2-distančního chromatického čísla. Druhým kritériem je rovnost 2-distančního chromatického čísla nebo seznamového 2-distančního chromatického čísla nejmenší možné hodnotě, tedy číslu $\Delta(G) + 1$.

V druhé části bakalářské práce se už věnujeme výhradně 2-distančnímu barvení zobecněných Petersenových grafů. Nejprve se zabýváme zobecněnými Petersenovy grafy s malým počtem vrcholů. Pro každý takový graf určíme hodnotu 2-distančního chromatického čísla, navrhneme vhodné 2-distanční obarvení grafu G a doplníme obrázkem. Na základě těchto poznatků zformulujeme a poté dokážeme tvrzení, která určují hodnotu 2-distančního chromatického čísla zobecněných Petersenových grafů s libovolně velkým počtem vrcholů, které splňují určitou podmínku.

Abstract

A vertex colouring $f : V(G) \to \mathbb{N}$ of a graph G is called a 2-distance vertex colouring if every pair of vertices at distance at most two have different colours. That means $f(u) \neq f(v)$ for all $u, v \in V(G)$ with $\mathrm{dist}_G(u, v) \leq 2$. The value $f(u)$ is called a colour of vertex u. The minimum number of colours in a 2-distance colouring of a graph G is called the 2-distance chromatic number, denoted by $\chi^2(G)$.

The main aim of this Bachelor thesis is to create comprehensive overview of known results regarding 2-distance colouring of graphs, especially planar graphs. It also includes a list 2-distance colouring, because for the list 2-distance chromatic number, denoted by $\chi^2_\ell(G)$, we have $\chi^2_\ell(G) \geq \chi^2(G)$. Hence if some upper bound is proven for the list 2-distance chromatic number, then it also holds for the 2-distance chromatic number. The results are clearly divided into several chapters based on two criteria. One of them is to determine upper bounds for the 2-distance chromatic number and the list 2-distance chromatic number. The second criterion is the equality between the 2-distance chromatic number, or the list 2-distance chromatic number, respectively, and the smallest possible value $\Delta(G) + 1$.

In the second part of this Bachelor thesis, we focus on 2-distance colourings of generalized Petersen graphs. First we deal with generalized Petersen graphs of small order. For each of these graphs we determine the value of the 2-distance chromatic number, suggest appropriate 2-distance colouring and attach a picture. Based on this knowledge we derive the 2-distance chromatic number of generalized Petersen graphs with arbitrarily large number of vertices, with some additional condition.

Obsah

1 Základní pojmy

V této kapitole jsou nadefinovány pojmy, které se v bakalářské práci objevují. Předpokládá se znalost základních pojmů z teorie grafů. Z toho důvodu zde nejsou uváděny elementární pojmy, které lze najít např. v [19].

Rovinným grafem nazveme graf, pro který existuje takové rovinné nakreslení, že se žádné dvě hrany nekříží. Graf, jehož všechny vrcholy mají stejný stupeň, nazýváme *regulární graf*. Pokud všechny vrcholy grafu mají stupeň k, pak graf nazýváme *k-regulárním*, pro 3-regulární graf používáme označení *kubický graf*. *Subkubickým grafem* se rozumí graf, pro nějž platí, že všechny jeho vrcholy mají stupeň nejvýše 3, pro takové grafy tedy platí, že $\Delta(G) \leq 3$, kde $\Delta(G)$ značí maximální stupeň grafu. *Průměrný stupeň* grafu, značíme $\overline{\delta}$, je roven podílu ze součtu stupňů všech vrcholů grafu a počtu vrcholů. Tedy $\overline{\delta} = \frac{\sum_{v \in V} d_G(v)}{|V|} = \frac{2|H|}{|V|}$, kde V je množina vrcholů a H je množina hran grafu G.

V této práci se budou často objevovat pojmy jako maximální průměrný stupeň grafu a obvod grafu, pomocí nichž budeme klást podmínku na řídkost grafu G. *Maximální průměrný stupeň* grafu, značíme $\mathrm{mad}(G)$, je maximum z průměrných stupňů všech podgrafů H grafu G. *Obvodem grafu G*, značíme $g(G)$, nazveme délku nejkratší kružnice v grafu. Někdy se místo pojmu obvod používá i anglický termín girth.

Vzdálenost dvou vrcholů x a y v souvislém grafu G, značíme $\mathrm{dist}_G(x, y)$, je délka nejkratší cesty z x do y.

2 Distanční barvení grafů

Vrcholové 2-distanční barvení grafu je speciálním případem tzv. vrcholového p-distančního barvení grafu $G = (V(G), H(G))$, kde $V(G)$ je množina vrcholů grafu a $H(G)$ je množina hran grafu G. V této práci budeme tedy uvažovat p-distanční vrcholové barvení pro $p = 2$. Kramerová a Kramer v [37, 38] zavedli vrcholové p-distanční barvení grafu, kde p je přirozené číslo, jako zobrazení $f : V(G) \to \mathbb{N}$, pro které platí, že $f(u) \neq f(v)$ pro každé $u, v \in V(G)$ s $\mathrm{dist}_G(u, v) \leq p$. Hodnotu $f(u)$ budeme nazývat barvou vrcholu u. Pro vrcholové 2-distanční barvení tedy platí, že sousední vrcholy a vrcholy ve vzdálenosti dva musí mít různé barvy. Kramerová a Kramer v roce 1969 zavedli rovněž pojem p-distanční chromatické číslo grafu $\chi^p(G)$ jako nejmenší počet barev nutných k p-distančnímu obarvení grafu G. Poznamenejme, že pro nesouvislé grafy lze obarvit každou komponentu zvlášť, přičemž tato barvení navzájem nekolidují. Lze tedy nadále uvažovat grafy jako souvislé.

Problém 2-distančního barvení odpovídá hledání vrcholového barvení v druhé mocnině grafu G (obecně p-distanční barvení odpovídá hledání obarvení v p-té mocnině grafu G). Druhou mocninou grafu G, značíme G^2, nazveme graf s množinou vrcholů $V(G)$, v němž $\{x, y\} \in H(G^2)$ jestliže $\mathrm{dist}_G(x, y) \leq 2$. Tedy jinými slovy, tvoříme-li druhou mocninu grafu G, musíme každé dva vrcholy, mezi nimiž existuje v G cesta délky dva, spojit hranou. Chceme-li pak obarvit takovýto graf G^2 klasickým přípustným barvením, řešíme stejný problém, jako kdybychom chtěli obarvit původní graf G pomocí 2-distančního barvení. Tedy platí $\chi^2(G) = \chi(G^2)$.

Každý graf G splňuje nerovnost:

$$\chi^2(G) \geq \Delta(G) + 1. \tag{1}$$

Vrchol s maximálním stupněm a jeho sousední vrcholy formují množinu $\Delta(G)+1$ vrcholů takových, že každé dva vrcholy jsou buď sousední, nebo mají společného souseda. Proto na jejich obarvení pomocí 2-distančního barvení potřebujeme nejméně $\Delta(G) + 1$ barev. Přirozenou otázkou je, pro jaké grafy bude 2-distanční chromatické číslo rovno této dolní mezi. Touto otázkou se zabýváme v kapitolách 5 a 6.

Hodnota 2-distančního chromatického čísla závisí mimo jiné na „řídkosti“ grafu G. Tu zajistíme například předepsaným obvodem grafu $g(G)$ nebo udáním průměrného stupně grafu $\mathrm{mad}(G)$. Mezi těmito veličinami existuje vztah, který udává následující lemma.

Lemma 1. *[12] Pro každý rovinný graf G je $\mathrm{mad}(G) < \frac{2 \cdot g(G)}{g(G)-2}$.*

Na základě lemmatu 1 lze transformovat každou větu určující horní hranici 2-distančního chromatického čísla pro grafy s daným maximálním průměrným stupněm $\mathrm{mad}(G)$ na větu, která určuje horní hranici 2-distančního chromatického čísla pro rovinné grafy s předepsaným obvodem $g(G)$ (a naopak). Tyto transformace jsou uvedeny v tabulce 1.

$g(G) \geq$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mathrm{mad}(G) <$	6	4	$\frac{10}{3}$	3	$\frac{14}{5}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{9}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{26}{11}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{30}{13}$	$\frac{16}{7}$

Tabulka 1: Vztah mezi $g(G)$ a $\mathrm{mad}(G)$

2.1 2-distanční chromatické číslo speciálních tříd grafů

Jistě platí, že graf $G(V, H)$, pro nějž je $|V| = 1$ a zároveň množina hran H je prázdná množina, je jediným souvislým grafem, na jehož obarvení stačí pouze jedna barva.

Položme si tedy otázku, jak budou vypadat grafy s 2-distančním chromatickým číslem rovným dvěma. Dosadíme-li $\chi^2(G) = 2$ do nerovnosti (1), dostaneme, že pro takové grafy musí nutně být $\Delta(G) = 0$, nebo $\Delta(G) = 1$. Ovšem na obarvení grafů s nulovým maximálním stupněm stačí pouze jedna barva. Tedy jistě graf K_2 je jediným souvislým grafem, pro nějž je $\chi^2(G) = 2$.

Věta 2 ukazuje, že grafy, které lze obarvit právě třemi barvami, lze rozdělit do tří skupin.

Věta 2. *[42] Pro graf $G(V, H)$ bude platit, že $\chi^2(G) = 3$ právě tehdy, když graf G splňuje jednu z následujících podmínek:*

1. *$|V| = 3$ a G je souvislý graf,*
2. *graf G je cesta na třech a více vrcholech,*
3. *graf G je kružnice délky 3 nebo délky, která je násobkem čísla 3.*

V článku [26] se Georges a Mauro zabývali tzv. $L(j, k)$-ohodnocením základních tříd grafů, jako například cest a kružnic, viz následující dvě tvrzení. Poznamenejme, že pro $j = 1 \wedge k = 1$ se jedná o 2-distanční barvení.

Tvrzení 3. *[26] Nechť P_n je cesta na n vrcholech. Potom:*

$$\chi^2(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 2 & \text{pro } n = 2, \\ 3 & \text{pro } n \geq 3. \end{cases} \tag{2}$$

Tvrzení 4. *[26] Nechť C_n je kružnice s n vrcholy. Potom:*

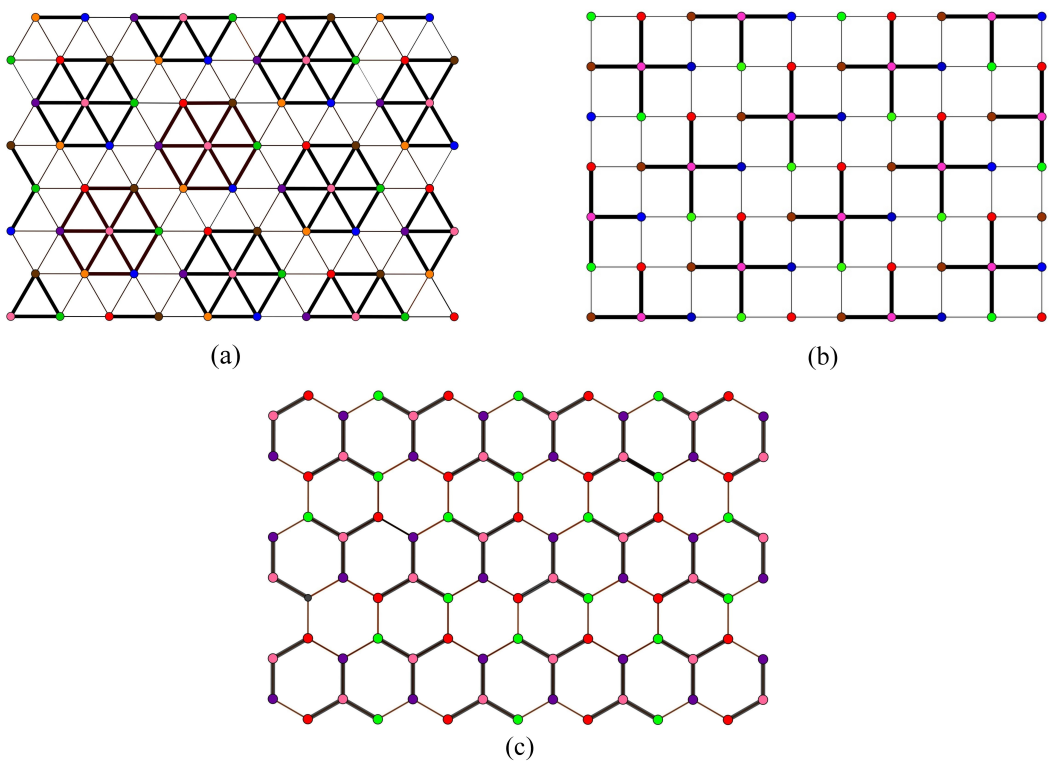
$$\chi^2(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{pro } n \equiv 0 \ (\text{mod } 3), \\ 5 & \text{pro } n = 5, \\ 4 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3}$$

Věty 5, 6 a 7 udávají hodnoty 2-distančního chromatického čísla trojúhelníkové, čtvercové a šestiúhelníkové mřížky. Možné obarvení těchto tří mřížek je vidět na obrázku 1.

Věta 5. *[43] Pro 2-distanční chromatické číslo $\chi^2(T)$, kde T je nekonečná trojúhelníková mřížka, platí $\chi^2(T) = 7$.*

Věta 6. *[25] Pro 2-distanční chromatické číslo $\chi^2(S)$, kde S je nekonečná čtvercová mřížka, platí $\chi^2(S) = 5$.*

Věta 7. *[33] Pro 2-distanční chromatické číslo $\chi^2(H)$, kde H je nekonečná šestiúhelníková mřížka, platí $\chi^2(H) = 4$.*



Obrázek 1: 2-distanční obarvení trojúhelníkové (a), čtvercové (b) a šestiúhelníkové (c) mřížky

Podívejme se nyní na 2-distanční barvení obecně d-rozměrné čtvercové mřížky. Tento pojem je zaveden v následující definici.

Definice 8. *Mějme množinu bodů M v prostoru $\mathbb{R}^d$ s celočíselnými souřadnicemi, tedy $M = \{n = (n_1, n_2, \dots, n_d),\ kde\ n_i \in \mathbb{Z}\ \forall i = 1, 2, \dots, d\}$. Potom graf $G_d(n_1, \dots, n_d)$ je graf s množinou vrcholů $V(G_d) = M$ a množinu hran $H(G_d) = \{\{x, y\};\ x, y \in M, x$ a y se liší v právě jedné složce o $1\}$.*

Poznamenejme, že graf $G_2(n_1, n_2)$ je čtvercová síť, která je znázorněna na obrázku 1 (b). Pro $d = 3$ vznikne graf $G_3(n_1, n_2, n_3)$, tedy krychlová síť.

Věta 9. *[25] Nechť $d \in \mathbb{N}$ a $G = G_d(n_1, \dots, n_d)$. Pro 2-distanční chromatické číslo grafu G platí: $\chi^2(G) = 2d + 1$.*

2.2 Seznamové 2-distanční barvení grafů

Seznamové 2-distanční barvení grafu $G = (V(G), H(G))$ je speciálním případem vrcholového barvení, kde každému vrcholu $v \in V(G)$ je přiřazena množina přípustných barev, které se mohou použít pro jeho obarvení. Takovou množinu nazýváme seznam. Uvažujme množinu seznamů $(S_v)_{v \in V}$. Obarvení φ grafu G takové, že pro každé $v \in V(G)$ platí, že $\varphi(v) \in S_v$ nazýváme obarvení grafu ze seznamů S_v. Graf G nazveme 2-distančně seznamově k-obarvitelný, jestliže pro každý systém množin $(S_v)_{v \in V}$ takový, že pro každé $v \in V(G)$ platí: $|S_v| = k$, existuje přípustné 2-distanční k-obarvení grafu ze seznamů S_v. Tedy 2-distanční k-barvení je vlastně 2-distanční seznamové k-barvení, kde seznamy u všech vrcholů jsou stejné množiny $\{1, 2, \dots, k\}$.

Nechť G je graf. Potom $\chi^2_\ell(G)$ nazveme seznamové 2-distanční chromatické číslo, nebo také 2-distanční vybíravost, a jedná se o minimální k takové, že graf G je seznamově 2-distančně k-obarvitelný. Je zřejmé, že: $\chi^2_\ell(G) \geq \chi^2(G)$. Tedy bude-li dokázána nějaká horní mez pro seznamové 2-distanční chromatické číslo, potom tato mez bude automaticky platit také pro 2-distanční chromatické číslo. Kostochka a Woodall dokonce předpokládali, že platí rovnost.

Hypotéza 10. *[36] Pro každý graf G platí: $\chi^2_\ell(G) = \chi^2(G)$.*

Ovšem tato silná hypotéza byla vyvrácena. V článku [35] Kim a Park zkonstruovali grafy G, jejichž druhá mocnina G^2 je úplný multipartitní graf, a poté dokázali, že $\chi^2_\ell(G) \neq \chi^2(G)$. Pro každé prvočíslo $n \geq 3$ existuje graf G, jehož druhá mocnina $G^2 = K_{n*(2n-1)}$, kde $K_{n*(2n-1)}$ je úplný multipartitní graf s $(2n-1)$ partitními množinami o n vrcholech, a platí, že $\chi_\ell(K_{n*(2n-1)}) > \chi(K_{n*(2n-1)})$. Tedy existuje nekonečně mnoho grafů, pro něž hypotéza 10 neplatí. Navíc bylo dokázáno, že rozdíl mezi $\chi^2_\ell(G)$ a $\chi^2(G)$ může být libovolně velký a to díky vlastnosti, že

$\chi_\ell(K_{n*(2n-1)}) - \chi(K_{n*(2n-1)}) \geq n-1$ pro každé prvočíslo $n \geq 3$ (rovněž [35]).

Jistě tedy víme, že 2-distanční chromatické číslo grafu lze shora omezit seznamovým 2-distančním chromatickým číslem. Připomeňme (viz kapitola 2), že dolní mez 2-distančního chromatického čísla tvoří hodnota $\Delta(G)+1$. Tedy po spojení těchto dvou základních nerovností získáváme:

$$\chi_\ell^2(G) \geq \chi^2(G) \geq \Delta(G) + 1. \tag{4}$$

3 Horní omezení pro 2-distanční barvení

V této kapitole jsou shrnuty dosavadní poznatky ohledně horních omezení 2-distančního chromatického čísla. Toto omezení se nejčastěji zkoumá pro rovinné grafy. V mnoha následujících větách tedy uvažujeme G jako rovinný graf.

V roce 1977 Wegner vyslovil následující hypotézu.

Hypotéza 11. *[45] Nechť G je rovinný graf. Potom:*

1. *$\chi^2(G) \leq 7$ když $\Delta(G) = 3$,*
2. *$\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 5$ když $4 \leq \Delta(G) \leq 7$,*
3. *$\chi^2(G) \leq \frac{3\Delta(G)}{2} + 1$ když $\Delta(G) \geq 8$.*

Wegner v článku [45] dokázal, že pro rovinné grafy s malým maximálním stupněm platí následující věta.

Věta 12. *[45] Je-li G je rovinný graf s $\Delta(G) \leq 3$, potom platí: $\chi^2(G) \leq 8$.*

V roce 2017 Hartke, Jahanbekam a Thomas v [28] dokázali platnost Wegnerovy hypotézy pro subkubické grafy. Tedy platí, že pro grafy G s $\Delta(G) = 3$ je $\chi^2(G) \leq 7$.

V následujících čtyřech větách se zabýváme pouze rovinnými grafy. Věta 13 udává horní hranici chromatického čísla pro libovolný rovinný graf. Věta 14 snižuje tuto horní hranici pro grafy, které mají maximální stupeň větší nebo rovno 20.

Věta 13. *[46] Nechť G je rovinný graf s maximálním stupněm $\Delta(G)$. Potom platí $\chi^2(G) \leq 3\Delta(G) + 5$.*

Věta 14. *[29] Nechť G je rovinný graf s $\Delta(G) \geq 20$. Potom $\chi^2(G) \leq 2\Delta(G) + 25$.*

V článku [39] Molloy a Salavatipour vylepšili větu 13. Pro velké hodnoty $\Delta(G)$ bude následující věta 15 dávat lepší (nižší) hranici, než věta 13, protože $\Delta(G)$ násobíme pouze koeficientem $\frac{5}{3}$ a nikoliv 3.

Věta 15. *[39] Je-li G je rovinný graf, potom platí $\chi^2(G) \leq (\frac{5}{3}\Delta(G)) + 78$.*

Věta 16 snižuje horní hranici 2-distančního chromatického čísla, uvedenou ve větě 15, pro grafy, které splňují podmínku, že $\Delta(G) \geq 241$.

Věta 16. *[39] Nechť G je rovinný graf s $\Delta(G) \geq 241$. Potom $\chi^2(G) \leq (\frac{5}{3}\Delta(G)) + 25$.*

Jendrol' a Skupień v článku [34] uvedli horní hranici 2-distančního chromatického čísla pro rovinné grafy v závislosti na maximálním stupni grafu. Pro grafy s malým $\Delta(G)$ klademe $M = 8$.

Věta 17. *[34] Nechť G je rovinný graf a nechť dále $M = \max\{8, \Delta(G)\}$. Potom platí*

$$\chi^2(G) \leq 6 + \frac{3M+3}{M-2}((M-1)-1).$$

Dvořák, Král', Nejedlý a Škrekovski dokázali v článku [23] následující větu. Ovšem věta klade podmínku na velký maximální stupeň grafu.

Věta 18. *[23] Pro každý rovinný graf s $\Delta(G) \geq 8821$ a $g(G) \geq 6$ platí: $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Borodin a Ivanova vylepšili větu 18 a dokázali, že stejná hranice pro 2-distanční chromatické číslo bude platit i pro grafy s mnohem menším maximálním stupněm, viz následující věta.

Věta 19. *[5] Pro rovinný graf s $\Delta(G) \geq 18$ a $g(G) \geq 6$ platí: $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Bu [16] ukázal, že $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 6$ pro každý rovinný graf G s $\Delta(G) \geq 18$ a $g(G) \geq 5$. Tedy po rozšíření uvažované třídy grafů s $g(G) \geq 6$ na grafy, které mohou obsahovat kružnice délky 5, dostáváme horší (vyšší) horní odhad na $\chi^2(G)$. Následující věta se týká grafů, pro něž je $g(G) \geq 5$ a navíc neobsahují kružnice délky 7. Věta dále klade podmínku na maximální stupeň grafu.

Věta 20. *[13] Každý rovinný graf bez kružnic délky 3, 4 a 7, a s maximálním stupněm $\Delta(G) \geq 15$ má $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 4$.*

Pro grafy bez kružnic malých délek dokázali Wang and Lih následující větu, která udává horní hranici 2-distančního chromatického čísla bez omezení na maximální stupeň grafu.

Věta 21. *[44] Pro rovinný graf G platí:*

1. $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 5$ *když* $g(G) \geq 7$,
2. $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 10$ *když* $g(G) \geq 6$,
3. $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 16$ *když* $g(G) \geq 5$.

Bu a Zhu [17] ukázali, že pokud je G rovinný graf s $g(G) \geq 6$, potom $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 5$, což je vylepšením výše uvedené věty 21 (1), (2).

V článku [30] Charpentier, Montassier a Raspaud dokázali, že $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 10$, když $\text{mad}(G) \leq \frac{10}{3}$, což implikuje tvrzení (viz tabulka 1), že, je-li G rovinný graf s $g(G) = 5$, potom $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 10$.

Následující věta je vylepšením výše uvedené věty 21 podbodu (3). Pro stejnou podmínku na délku nejkratší kružnice dává nižší horní hranici 2-distančního chromatického čísla.

Věta 22. *[21] Nechť G je rovinný graf s $g(G) \geq 5$. Potom $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 8$.*

Následující dvě věty se zabývají grafy s obvodem rovným 5. Věta 23 zlepšuje horní mez věty 22 pokud $\Delta(G) \neq 7$ a $\Delta(G) \neq 8$.

Věta 23. *[22] Nechť G je rovinný graf s $g(G) = 5$. Pokud $\Delta(G) \notin \{7, 8\}$, potom $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 7$.*

Věta 24 uvažuje grafy s velkým maximálním stupněm.

Věta 24. *[22] Nechť G je rovinný graf s $g(G) = 5$ a $\Delta(G) \geq 150$. Potom $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 4$.*

Již víme (viz věta 19), že pro grafy s obvodem 6 lze 2-distanční chromatické číslo shora omezit hodnotou $\Delta(G) + 2$, pro maximální stupeň $\Delta(G) \geq 18$. Otázkou tedy zůstává, zda umíme stanovit takovou hodnotu $\Delta(G)$, aby stejná horní hranice 2-distančního čísla platila i pro grafy s obvodem 5.

Otevřený problém 25. *[23] Existuje $\Delta(G)$ takové, že každý rovinný graf s obvodem $g = 5$ a maximálním stupněm $\Delta(G)$ má $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 2$?*

Některé studie se věnují barvení tzv. subkubických grafů, tedy grafů, pro něž je $\Delta(G) = 3$. V článku [24] Dvořák, Škrekovski a Tancer dokázali, že pro tyto rovinné grafy G s $g(G) \geq 24$ je $\chi^2(G) = 4$, tedy vlastně $\chi^2(G) = \Delta(G) + 1$, což je rovno triviální dolní mezi (1) pro 2-distanční chromatické číslo grafu G. Dále dokázali, že $\chi^2(G) \leq 5$, pokud $g(G) \geq 14$. V článku [32] Ivanova a Solov'eva dokázali platnost této horní meze pro větší třídu grafů, viz následující věta.

Věta 26. *[32] Nechť G je rovinný graf s $g(G) \geq 13$ a $\Delta(G) = 3$. Potom platí $\chi^2(G) \leq 5$.*

4 Horní omezení pro seznamové 2-distanční barvení

Nyní se budeme zabývat seznamovou verzí 2-distančního barvení grafů. V kapitole 2 jsme zavedli tento pojem a uvedli, že platí nerovnost: $\chi^2_\ell(G) \geq \chi^2(G)$.

Následující věta je zesílením věty 18, kde, nejen že došlo k rozšíření třídy grafů na grafy s mnohonásobně menším maximálním stupněm, ale především je věta dokázána dokonce pro seznamové 2-distanční barvení. Věta 28 rozšiřuje platnost věty 27 i na grafy s $\Delta(G) \geq 24$, tedy udává lepší výsledek.

Věta 27. *[7] Každý rovinný graf s $\Delta(G) \geq 36$ a $g(G) \geq 6$ má $\chi^2_\ell(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Věta 28. *[6] Každý rovinný graf s $\Delta(G) \geq 24$ a $g(G) \geq 6$ má $\chi^2_\ell(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

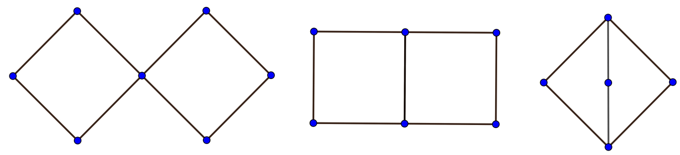
Výsledek věty 19 byl vylepšen v článku [3], kde Bonamy, Lévêque a Pinlou dokázali, že graf G s $\Delta(G) \geq 17$ a $\mathrm{mad}(G) < 3$ je seznamově 2-distančně $(\Delta(G)+2)$-obarvitelný. Na základě tabulky 1, lze výše uvedené tvrzení přetransformovat z podmínky na průměrný maximální stupeň $\mathrm{mad}(G)$ na tvrzení s podmínkou na obvod $g(G)$, viz následující věta.

Věta 29. *[1] Nechť G je rovinný graf s $g(G) \geq 6$ a $\Delta(G) \geq 17$. Potom $\chi^2_\ell(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Bu a Yan dokázali v článku [15] následující dvě věty pro třídy grafů bez krátkých kružnic. Věta 30 klade podmínku, že graf G nesmí obsahovat protínající se kružnice délky čtyři. To znamená, že všechny kružnice takové délky musí být vrcholově i hranově disjunktní. Na obrázku 2 jsou uvedeny tři případy protínajících se kružnic délky čtyři.

Věta 30. *[15] Rovinný graf G s $\Delta(G) \geq 12$, který neobsahuje kružnice délky 3 a 5 a dále neobsahuje protínající se kružnice délky 4, má $\chi^2_\ell(G) \leq \Delta(G) + 6$.*

Věta 31. *[15] Nechť G je rovinný graf s $\Delta(G) \leq 5$ a $g(G) \geq 5$. Pak platí $\chi^2_\ell(G) \leq 13$.*



Obrázek 2: Příklady protínajících se kružnic délky čtyři

Povšimněme si, že věta 31 udává poprvé podmínku na horní omezení (nikoliv dolní) maximálního stupně $\Delta(G)$ grafu G.

Cranston, Erman a Škrekovski [18] uvedli v následující větě horní omezení seznamového 2-distančního chromatického čísla pro grafy s maximálním stupněm $\Delta(G) = 4$. Věta klade podmínku buď na maximální průměrný stupeň, nebo na délku nejkratší kružnice. Podbod (5) vylepšuje výše uvedenou větu 31.

Věta 32. *[18] Je-li (G) graf s maximálním stupněm $\Delta(G) = 4$, potom:*

1. *$\chi_\ell^2(G) \leq 5$, když $mad(G) < \frac{16}{7}$, nebo, pokud G je rovinný graf s $g(G) \geq 16$,*
2. *$\chi_\ell^2(G) \leq 6$, když $mad(G) < \frac{22}{9}$, nebo, pokud G je rovinný graf s $g(G) \geq 11$,*
3. *$\chi_\ell^2(G) \leq 7$, když $mad(G) < \frac{18}{7}$, nebo, pokud G je rovinný graf s $g(G) \geq 9$,*
4. *$\chi_\ell^2(G) \leq 8$, když $mad(G) < \frac{14}{5}$, nebo, pokud G je rovinný graf s $g(G) \geq 7$,*
5. *$\chi_\ell^2(G) \leq 12$, když $mad(G) < \frac{10}{3}$, nebo, pokud G je rovinný graf s $g(G) \geq 5$,*
6. *$\chi_\ell^2(G) \leq 14$, když G je rovinný graf.*

V následující větě se Bu, Lv a Yan zabývali grafy, pro něž je $\Delta(G) = 5$. Věta je v článku [14] uvedena pouze s podmínkou na mad(G), podle tabulky 1 byla doplněna i o podmínku na $g(G)$.

Věta 33. *[14] Je-li G prostý graf s maximálním stupněm $\Delta(G) = 5$, potom:*

1. *$\chi_\ell^2(G) \leq 7$, když $mad(G) < \frac{18}{7}$, nebo, pokud G je rovinný graf s $g(G) \geq 9$,*
2. *$\chi_\ell^2(G) \leq 8$, když $mad(G) < \frac{8}{3}$, nebo, pokud G je rovinný graf s $g(G) \geq 8$,*
3. *$\chi_\ell^2(G) \leq 9$, když $mad(G) < \frac{14}{5}$, nebo, pokud G je rovinný graf s $g(G) \geq 7$,*
4. *$\chi_\ell^2(G) \leq 11$, když $mad(G) < 3$, nebo, pokud G je rovinný graf s $g(G) \geq 6$.*

5 Grafy s 2-distančním chromatickým číslem rovným $\Delta(G) + 1$

Z kapitoly 2.1 již víme, že 2-distanční chromatické číslo nabývá vždy hodnoty větší nebo rovno $\Delta(G) + 1$. V této kapitole se budeme zabývat grafy, pro něž je 2-distanční chromatické číslo rovno této dolní hranici, tedy $\chi^2(G) = \Delta(G) + 1$. Podmínka bude kladena na obvod $g(G)$ nebo na maximální průměrný stupeň $\mathrm{mad}(G)$. K vzájemné transformaci těchto podmínek budeme využívat tabulku 1. Velmi často budeme opět pracovat s rovinnými grafy.

Wang a Lih se domnívali, že pro každý graf G s obvodem větším nebo rovno pěti existuje dostatečně velký maximální stupeň takový, že $\chi^2(G)$ nabývá nejmenší možné hodnoty, viz následující hypotéza.

Hypotéza 34. *[44] Pro každé celé číslo $k \geq 5$ existuje celé číslo $M(k)$ takové, že pro každý rovinný graf G s $g(G) \geq k$ a $\Delta(G) \geq M(k)$ platí, že $\chi^2(G) = \Delta(G) + 1$.*

Ovšem bylo dokázáno, že tato hypotéza je pravdivá pouze pro $k \geq 7$, pro $k \in \{5, 6\}$ je neplatná.

Borodin, Ivanova a Neustroeva ale v článku [9] dokázali, že i pro rovinné grafy s obvodem $g(G) = 6$ existuje $\Delta(G)$ takové, že $\chi^2(G) = \Delta(G) + 1$, za předpokladu, že bude splněna jistá podmínka, viz následující věta.

Věta 35. *[9] Nechť G je rovinný graf s $g(G) = 6$, $\Delta(G) \geq 31$ a nechť navíc platí, že každá hrana je incidentní s vrcholem stupně dva. Potom $\chi^2(G) = \Delta(G) + 1$.*

Jacko a Jendrol' v [33] uvedli 2-distanční chromatické číslo šestiúhelníkové sítě H. Věta 7 v kapitole 2.1 říká, že H lze obarvit pouze čtyřmi barvami. Poznamenejme, že pro H je $g(H) = 6$ a $\Delta(G) = 3$. Tedy výsledek této věty je optimální, protože $\chi^2(H) = \Delta(G) + 1$. Stejně tak i pro čtyřúhelníkovou síť S a trojúhelníkovou síť T je výsledek vět 5 a 6 optimální protože $\chi^2(S) = \Delta(G) + 1$ a $\chi^2(T) = \Delta(G) + 1$.

Dolama a Sopena v článku [20] dokázali následující větu.

Věta 36. *[20] Nechť G je rovinný graf s $\Delta(G) \geq 4$ a $mad(G) < \frac{16}{7}$. Pak platí $\chi^2(G) = \Delta(G) + 1$.*

Na základě tabulky 1 lze výše uvedenou větu převést tak, aby byla kladena podmínka na délku nejkratší kružnice, viz důsledek 37.

Důsledek 37. *Nechť G je rovinný graf s $\Delta(G) \geq 4$ a $g(G) \geq 16$. Pak platí $\chi^2(G) = \Delta(G) + 1$.*

Následující věta 38 je mimo jiné vylepšením výše uvedené věty (respektive důsledku 37). Konkrétně bod (2) rozšiřuje platnost věty i pro grafy s délkou nejkratší kružnice 15, což důsledek 37 nedovoloval.

Věta 38. *[8] Je-li G rovinný graf, potom $\chi^2(G) = \Delta(G) + 1$ v každém následujícím případě:*

1. $\Delta(G) = 3$ *a* $g(G) \geq 24$,
2. $\Delta(G) = 4$ *a* $g(G) \geq 15$,
3. $\Delta(G) = 5$ *a* $g(G) \geq 13$,
4. $\Delta(G) = 6$ *a* $g(G) \geq 12$,
5. $\Delta(G) \geq 7$ *a* $g(G) \geq 11$,
6. $\Delta(G) \geq 9$ *a* $g(G) = 10$,
7. $\Delta(G) \geq 15$ *a* $g(G) \geq 8$,
8. $\Delta(G) \geq 30$ *a* $g(G) = 7$.

V článku [11] byla vylepšena věta 38 (1). Bylo dokázáno, že $\chi^2(G) = \Delta(G) + 1$ pro $\Delta(G) = 3$ a $g(G) \geq 22$.

Věta 39. *[2] Každý rovinný graf G s $\Delta(G) \geq 4$ a $mad(G) < \frac{7}{3}$ splňuje: $\chi^2(G) = \Delta(G) + 1$.*

Tento výsledek je optimální. Montassier [40] ukázal, že existuje graf G s $\mathrm{mad}(G) = \frac{7}{3}$, $\Delta(G) = 4$ a $\chi^2(G) = 6 > \Delta(G) + 1$.

Věta 39 udává podmínku na maximální průměrný stupeň grafu. Pokud na základě tabulky 1 přetransformujeme tuto větu na větu s podmínkou na obvod grafu, pak získáme následující důsledek. Ten vylepšuje podbod (2) věty 38, protože rozšiřuje platnost věty i na grafy s délkou nejkratší kružnice 14.

Důsledek 40. *Každý rovinný graf G s $\Delta(G) \geq 4$ a $g(G) \geq 14$ splňuje následující rovnost: $\chi^2(G) = \Delta(G) + 1$.*

6 Grafy se seznamovým 2-distančním chromatickým číslem rovným $\Delta(G)+1$

V této kapitole se zabýváme stejnou problematikou jako v předchozí kapitole, ovšem pro seznamovou verzi 2-distančního barvení. Zjišťujeme, pro jaké grafy G je $\chi^2_\ell(G) = \Delta(G)+1$, tedy nejmenší možné hodnotě. Povšimněme si, že následující věta udává seznamové 2-distanční chromatické číslo pro stejné grafy jako udávala věta 38 pro 2-distanční chromatické číslo. Tedy můžeme říci, že věta 38 je přímým důsledkem věty 41, na základě nerovnosti $\chi^2_\ell(G) \geq \chi^2(G) \geq \Delta(G)+1$, popsané v kapitole 2.

Věta 41. *[10] Je-li G rovinný graf, potom $\chi^2_\ell(G) = \Delta(G)+1$ ve všech následujících případech:*

1. $\Delta(G) = 3$ *a* $g(G) \geq 24$,
2. $\Delta(G) = 4$ *a* $g(G) \geq 15$,
3. $\Delta(G) = 5$ *a* $g(G) \geq 13$,
4. $\Delta(G) = 6$ *a* $g(G) \geq 12$,
5. $\Delta(G) \geq 7$ *a* $g(G) \geq 11$,
6. $\Delta(G) \geq 9$ *a* $g(G) = 10$,
7. $\Delta(G) \geq 15$ *a* $g(G) \geq 8$,
8. $\Delta(G) \geq 30$ *a* $g(G) = 7$.

   Existuje rovinný graf s $g(G) \leq 6$ pro nějž je $\chi^2_\ell(G) = \Delta(G)+2$ pro libovolně velké $\Delta(G)$.

Následující věta značně vylepšuje výsledky věty 41, což je lépe viditelné až v důsledku 43, ve kterém je kladena podmínka na délku nejkratší kružnice, a ne na maximální průměrný stupeň (viz tabulka 1).

Věta 42. *[4] Pro každý graf (G) je $\chi^2_\ell(G) = \Delta(G)+1$ v následujících případech:*

1. $\Delta(G) \geq 5$ *a* $mad(G) < \frac{12}{5}$,
2. $\Delta(G) \geq 6$ *a* $mad(G) < \frac{5}{2}$,
3. $\Delta(G) \geq 8$ *a* $mad(G) < \frac{18}{7}$.

Důsledek 43. *Nechť G je rovinný graf. Potom $\chi^2_\ell(G) = \Delta(G)+1$ ve všech následujících případech:*

1. $\Delta(G) \geq 5$ *a* $g(G) \geq 12$,
2. $\Delta(G) \geq 6$ *a* $g(G) \geq 10$,
3. $\Delta(G) \geq 8$ *a* $g(G) \geq 9$.

Následující věta vylepšuje v podbodech (1) a (2) větu 41 (6), (7). Vylepšení je dáno snížením hodnoty $g(G)$, tedy zkrácením možné délky nejkratší kružnice, která v grafu může existovat.

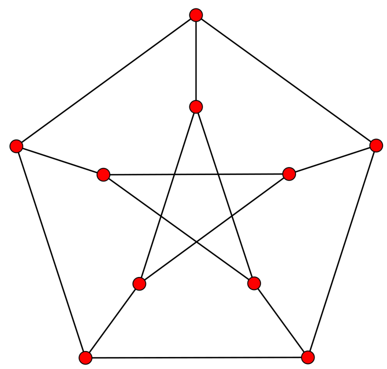
Věta 44. *[31] Nechť G je rovinný graf. Potom $\chi^2_\ell(G) = \Delta + 1$ v každém z následujících případů:*

1. $\Delta(G) \geq 16$ *a* $g(G) = 7$,
2. $\Delta(G) \geq 10$ *a* $8 \leq g(G) \leq 9$,
3. $\Delta(G) \geq 6$ *a* $10 \leq g(G) \leq 11$,
4. $\Delta(G) = 5$ *a* $g(G) \geq 12$.

7 2-distanční barvení zobecněných Petersenových grafů

V této kapitole se budeme zabývat hlavním tématem bakalářské práce, tedy 2-distančním barvením zobecněných Petersenových grafů. Petersenův graf jako takový můžeme vidět na obrázku 3. Jedná se o 3-regulární (kubický) graf s deseti vrcholy a obvodem $g(G) = 5$. Petersenův graf není rovinný, tedy všechna výše uvedená tvrzení o 2-distančním chromatickém čísle nelze využít. Tento graf lze pomocí vrcholového barvení obarvit pouze třemi barvami, ovšem na 2-distanční barvení je nutné použít deset barev. Dále už se budeme zabývat pouze tzv. zobecněnými Petersenovými grafy, jejichž definice je uvedena níže. Naším cílem je prozkoumat takové grafy a určit jejich 2-distanční chromatické číslo. Definice je převzata a upravena z wikipedia.org.

Definice 45. *Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ taková, že $1 \leq k < \frac{n}{2}$. Zobecněný Petersenův graf, značíme $GPG(n,k)$, je graf s množinou vrcholů $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \bigcup \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a množinou hran $H = H_1 \bigcup H_2 \bigcup H_3$, kde $H_1 = \{\{u_i, u_{i+1}\} \bigcup \{u_n, u_1\}; i = 1, \ldots, n-1\}$, $H_2 = \{\{u_i, v_i\}; i = 1, \ldots, n\}$, $H_3 = \{\{v_i, v_{i+k}\} (\mathrm{mod}\ n); i = 1, \ldots, n\}$.*



Obrázek 3: Petersenův graf

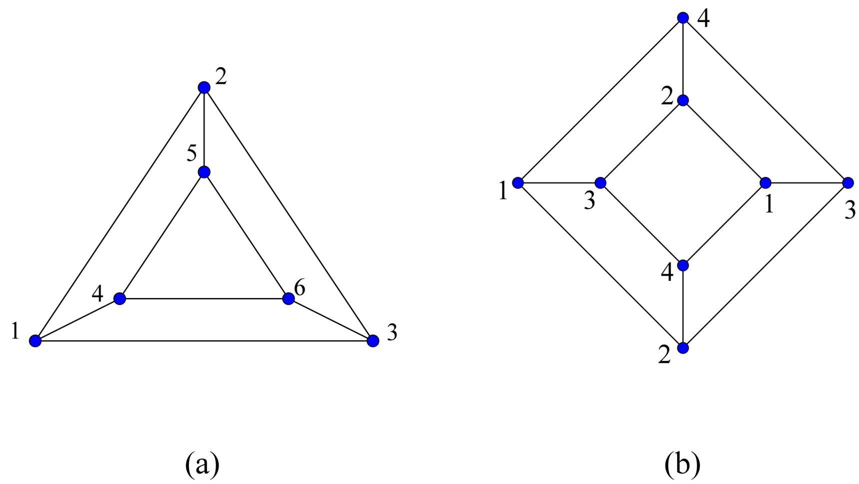
Zobecněný Petersenův graf $GPG(n,k)$ je tedy kubický graf na $2n$ vrcholech. Číslu k budeme říkat krok. Vrcholy $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ spolu s hranami H_1 tvoří vnější kružnici délky n. Pokud jsou čísla n a k nesoudělná, pak vrcholy $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ s hranami H_3 tvoří kružnici, kterou nazýváme vnitřní. V případě soudělnosti těchto dvou čísel pak na vrcholech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vzniká $D(n,k)$ kružnic délky $\frac{n}{D(n,k)}$, kde $D(n,k)$ značí největší společný dělitel čísel n a k. Podmínkou uvedenou v definici je, že krok k musí být menší než $\frac{n}{2}$. Pro krok k větší než $\frac{n}{2}$ vznikají grafy $GPG(n,k)$ izomorfní s grafy $GPG(n,n-k)$. Např. zobecněný Petersenův graf pro $n = 3$ existuje pouze jeden a to GPG(3,1), pro $k = 2$ by vznikl graf GPG (3,2) izomorfní s grafem GPG(3,1). Poznamenejme, že kdybychom uvažovali $k = \frac{n}{2}$, dostali bychom graf, který není kubický - vrcholy v_i by měly stupeň 2.

7.1 Příklady zobecněných Petersenových grafů pro $n \leq 10$

V této kapitole jsou rozpracovány všechny zobecněné Petersenovy grafy pro $n \leq 10$. U každého takového grafu se zabýváme otázkou jaký je minimální počet barev nutných k obarvení všech vrcholů a poté zda existuje 2-distanční obarvení takovýmto minimálním počtem barev.

GPG(3,1): V tomto grafu platí, že každé dva vrcholy jsou ve vzdálenosti nejvýše dva, z toho vyplývá, že každé dva vrcholy musí být obarveny jinou barvou. Tedy na obarvení 6 vrcholů musíme použít nejméně 6 barev, viz obrázek 4 (a). Zřejmě tedy $\chi^2(GPG(3,1)) = 6$.

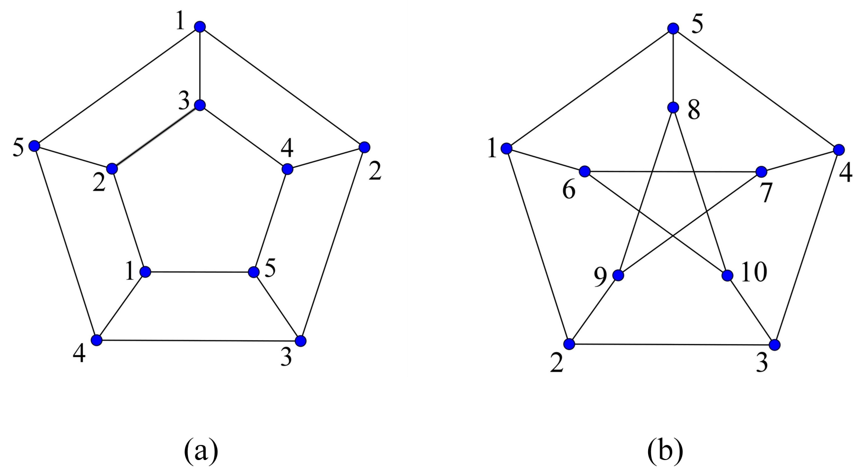
GPG(4,1): Graf GPG(4,1) vidíme na obrázku 4 (b). Jednu barvu lze v tomto grafu použít na nejvýše dva různé vrcholy - jednou na vnější a jednou na vnitřní kružnici. Graf má osm vrcholů, z toho vyplývá, že musíme použít nejméně čtyři barvy. Našli jsme takové 2-distanční obarvení, které využívá právě čtyři barvy. Tedy $\chi^2(GPG(4,1)) = 4$.



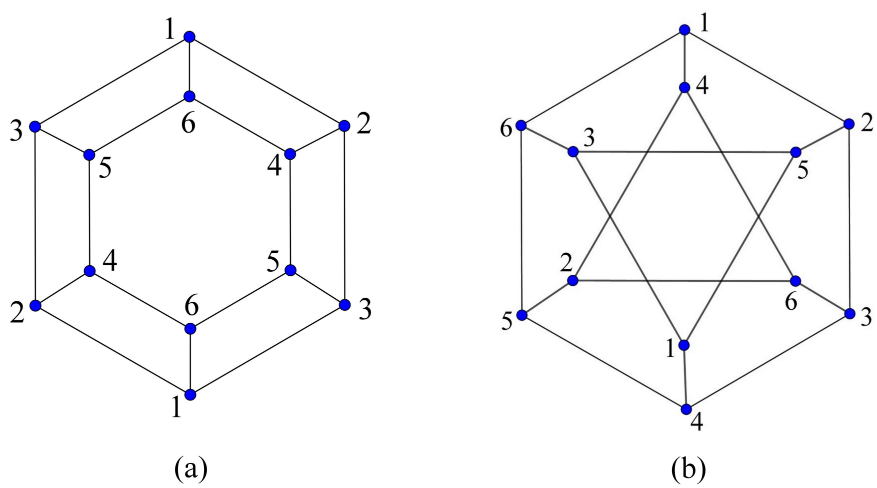
Obrázek 4: Grafy GPG(3,1) (a) a GPG(4,1) (b)

GPG(5,1): Na obrázku 5 (a) je nakreslen graf GPG(5,1). Na obarvení vrcholů vnější kružnice musíme použít 5 barev, protože každé dva vrcholy jsou buď sousední, nebo jsou ve vzdálenosti dva. Z toho vyplývá, že nesmí být obarveny stejnou barvou. Na obarvení celého grafu tedy bude potřeba nejméně 5 barev. Obarvíme vrcholy vnější kružnice po řadě - 1, 2, 3, 4, 5 a příslušné (sousední) vrcholy na vnitřní kružnici barvami 3, 4, 5, 1, 2. Získáme tak vhodné 2-distanční obarvení tohoto grafu pomocí 5 barev, tedy $\chi^2(GPG(5,1)) = 5$.

GPG(5,2): Graf GPG(5,2) je vidět na obrázku 5 (b). Jedná se o Petersenův graf. Pro tento graf platí, že každé dva vrcholy jsou ve vzdálenosti nejvýše dva, tedy musí mít navzájem různé barvy. Z toho vyplývá, že na obarvení Petersenova grafu potřebujeme 10 barev. Zřejmě $\chi^2(GPG(5,2)) = 10$.



Obrázek 5: Grafy GPG(5,1) (a) a GPG(5,2) (b)



Obrázek 6: Grafy GPG(6,1) (a) a GPG(6,2) (b)

GPG(6,1): V grafu GPG(6,1) lze jednu barvu použít na nejvýše dva různé vrcholy, tedy musíme na obarvení použít nejméně 6 barev (máme 12 vrcholů). Na obrázku 6 (a) je vidět jedno možné obarvení pomocí 6 barev. Tedy $\chi^2(GPG(6,1)) = 6$.

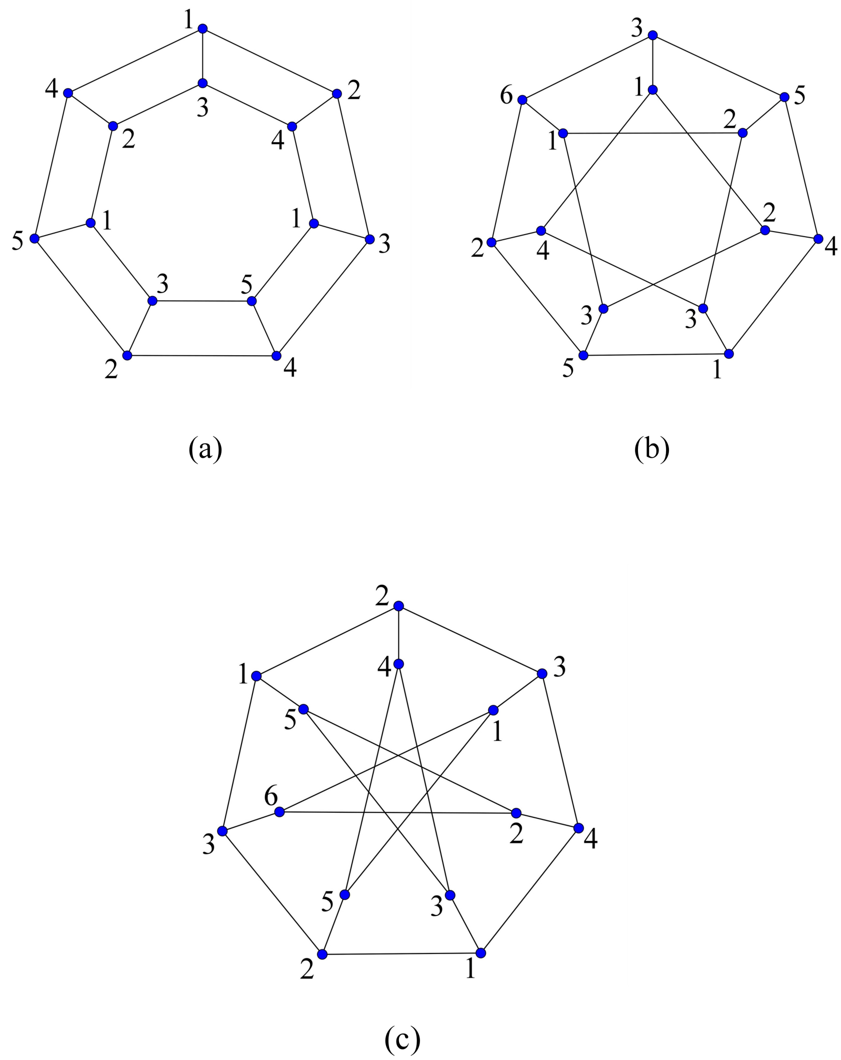
GPG(6,2): Jednu barvu lze v grafu GPG(6,2) použít na nejvýše dva různé vrcholy, tedy na obarvení 12 vrcholů grafu je potřeba minimálně 6 barev. S odkazem na definici zobecněného Petersenova grafu 45 každou barvu použijeme právě jednou na vrchol u_i a právě jednou na vrchol v_j tak, že $j \equiv i + 3 \pmod 6$. Pomocí šesti barev umíme graf obarvit, viz obrázek 6 (b), tedy $\chi^2(GPG(6,2)) = 6$. Poznamenejme ještě, že na vrcholech $v_1, v_2, \ldots, v_6$ vznikají dvě kružnice délky tři - tedy dva trojúhelníky.

GPG(7,1): Jednu barvu lze použít na nejvýše tři vrcholy, čili potřebujeme nejméně 5 barev (graf má 14 vrcholů). Existují právě dvě možné konfigurace jedné barvy. Pro barvu 1 a 3 jsme použili první konfiguraci - dvě barvy na vnitřní kružnici a jedna barva na vnější kružnici. Pro barvu 2 a 4 jsme naopak použili druhou možnou konfiguraci - dvě barvy na vnější kružnici a jedna na vnitřní kružnici. To znamená, že máme v této chvíli obarveno 12 vrcholů, tedy dva vrcholy zbudou neobarvené. Otázkou je, zda existuje taková konfigurace neobarvených vrcholů, aby tyto vrcholy byly od sebe ve vzdálenosti větší než dva, pak by mohly být obarvené stejnou barvou. Tato konfigurace existuje a je zakreslena na obrázku 7 (a). To znamená, že k obarvení tohoto grafu je potřeba právě 5 barev, tedy $\chi^2(GPG(7,1)) = 5$.

GPG(7,2): Jednu barvu lze v tomto grafu použít na nejvýše tři vrcholy. Existuje jen jedno možné obarvení tří vrcholů jednou barvou, a to tak, že jeden vrchol s danou barvou je na vnější kružnici a dva vrcholy s danou barvou leží na kružnici vnitřní. Za použití této techniky obarvíme 9 vrcholů pomocí tří barev. Tedy zůstává 5 vrcholů neobarvených - čtyři na vnější kružnici a jeden na vnitřní. Pokud bychom zbývající vrchol na vnitřní kružnici a vhodný vrchol na vnější kružnici obarvili čtvrtou barvou, zůstaly by neobarvené tři vrcholy na vnější kružnici, a protože není možné obarvit na vnější kružnici tři vrcholy jednou barvou, musíme na obarvení zbylých vrcholů použít dvě barvy - tedy na obarvení celého grafu je potřeba alespoň 6 barev.

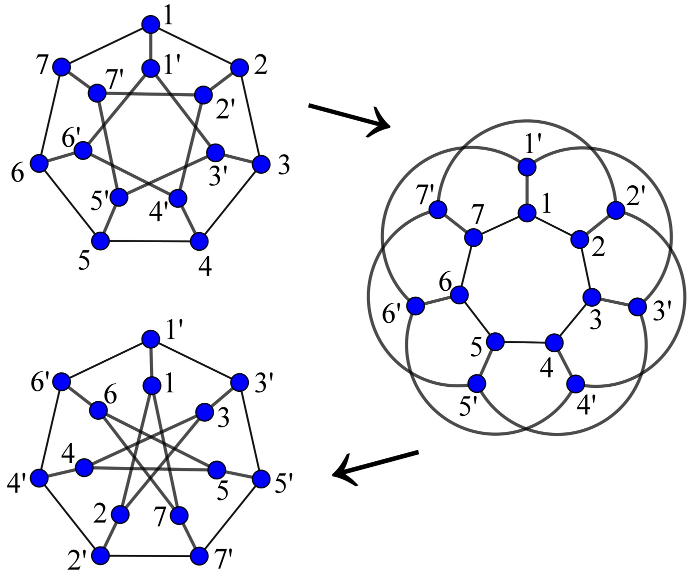
Druhou možností, jak postupovat při barvení pěti zbývajících vrcholů by bylo obarvit čtvrtou barvou dva vrcholy na vnější kružnici. Pak by zbyly dva vrcholy na vnější a jeden na vnitřní kružnici. Ovšem, jak bylo uvedeno na začátku předchozího odstavce, existuje jen jedno možné obarvení tří vrcholů v grafu jednou barvou - dva vrcholy na vnitřní a jeden na vnější kružnici. Z toho plyne, že na obarvení zbylých tří vrcholů musíme použít dvě barvy, tedy na celý graf je třeba alespoň 6 barev. Pomocí šesti barev už umíme graf obarvit, viz obrázek 7 (b), tedy $\chi^2(GPG(7,2)) = 6$.

GPG(7,3): Jednu barvu můžeme v grafu použít na nejvýše tři vrcholy, a to jediným možným nerovnoměrným uspořádáním - dva vrcholy na kružnici vnější a jeden na kružnici vnitřní. Takto pomocí tří barev obarvíme 9 vrcholů. Čtvrtou



Obrázek 7: Grafy GPG(7,1) (a), GPG(7,2) (b) a GPG(7,3) (c)

barvou už jsme schopni obarvit pouze dva vrcholy - buď jeden na vnitřní a jeden na vnější kružnici, nebo oba vrcholy na vnitřní kružnici. Zbývají tedy stále tři vrcholy neobarvené. Ty se buď všechny nachází na vnitřní kružnici nebo dva z nich leží na vnitřní a jeden na vnější kružnici. Ať už zvolíme první nebo druhou variantu, nejsme schopni obarvit poslední tři vrcholy stejnou barvou (nelze obarvit tři vrcholy na vnitřní kružnici jednou barvou, a stejně tak nelze obarvit dva vrcholy uvnitř a jeden vně stejnou barvou). Je třeba dalších dvou barev. Pro graf GPG(7,3) je tedy třeba alespoň 6 barev, a šest barev na obarvení stačí - viz obrázek 7 (c), proto $\chi^2(GPG(7,3)) = 6$.

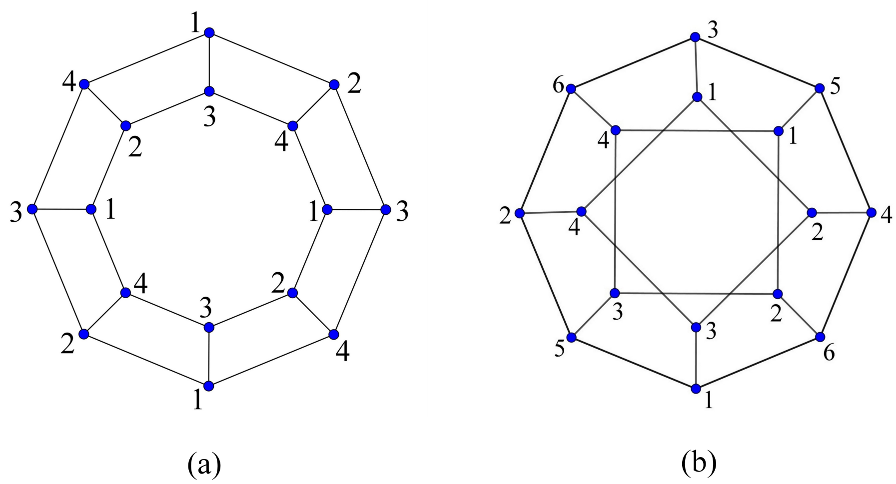


Obrázek 8: Znázornění izomorfismu mezi grafy GPG(7,2) a GPG(7,3)

Porovnáme-li barvení grafu $GPG(7,2)$ a $GPG(7,3)$ zjistíme, že u obou grafů lze jednu barvu použít nejvýše třikrát. Zatímco u grafu $GPG(7,2)$ použijeme jednu barvu jednou na vnější kružnici a dvakrát na vnitřní kružnici, u grafu $GPG(7,3)$ je to přesně naopak - jednou barvou lze obarvit dva vrcholy na vnější kružnici a jeden na vnitřní. To nás přivádí na myšlenku, zda by pouhým prohození vnitřní a vnější kružnice u grafu $GPG(7,2)$ nevznikl graf $GPG(7,3)$. Označme vrcholy vnější kružnice grafu $GPG(7,2)$ po řadě čísly 1 až 7 a příslušné (sousední) vrcholy na vnitřní kružnici čísly 1' až 7' jak je znázorněno na obrázku 8 (upozorněme, že v tomto případě čísla nepředstavují barvy, jedná se jen o označení vrcholů grafu pro přehlednost). Pokud překreslíme graf tak, aby původní vnější kružnice byla vnitřní a poté přeskládáme vrcholy vnější kružnice tak, aby vrcholy, které jsou spojené hranou byly umístěné vedle sebe, zjistíme, že dostaneme graf $GPG(7,3)$. Tedy grafy $GPG(7,2)$ a $GPG(7,3)$ jsou izomorfní. [1]

[1]Pro n lichá jsou grafy $GPG(n,k)$ a $GPG(n,\frac{(n-2k+3)}{2})$ izomorfní - viz Mathworld.wolfram.com.

GPG(8,1): V grafu GPG(8,1) umíme jednu barvu použít na nejvýše čtyři vrcholy - tedy musíme použít minimálně čtyři barvy na obarvení celého grafu. Umístění vrcholů se stejnou barvou je rovnoměrné - dva na vnější a dva na vnitřní kružnici. Máme 16 vrcholů, jednu barvu použijeme čtyřikrát za použití čtyř barev, viz obrázek 9 (a). Tedy $\chi^2(GPG(8,1)) = 4$.

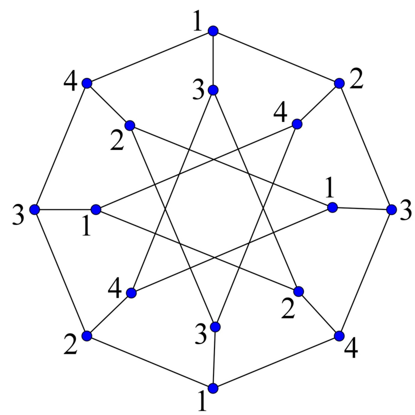


Obrázek 9: Grafy GPG(8,1) (a), GPG(8,2) (b)

GPG(8,2): Graf GPG(8,2) má 16 vrcholů. Pokud obarvíme libovolný vrchol na vnější kružnici barvou 1 a vyznačíme všechny vrcholy, které nemohou být obarveny stejnou barvou (leží ve vzdálenosti menší nebo rovno dva od tohoto vrcholu), pak v grafu zbude pouhých šest vrcholů, z nichž nejvýše dva můžeme obarvit také barvou 1. Tedy jednu barvu lze v grafu použít na nejvýše tři vrcholy. Pomocí pěti barev bychom obarvili jen 15 vrcholů, tedy minimální počet barev nutných k 2-distančnímu obarvení je šest. Takové barvení je vidět na obrázku 9 (b). Zřejmě tedy $\chi^2(GPG(8,2)) = 6$.

V úvodu předchozího odstavce bylo řečeno, že obarvíme libovolný vrchol u_i (vrchol na vnější kružnici). Poznamenejme ještě, že pokud bychom na začátku obarvili libovolný vrchol v_i barvou 1, po vyznačení všech vrcholů ve vzdálenosti menší nebo rovno dva by sice v grafu zbylo 7 vrcholů, z nichž ale opět nejvýše dva by mohly být obarveny barvou 1.

GPG(8,3): V tomto grafu umíme jednu barvu použít na nejvýše čtyři vrcholy, tedy musíme použít minimálně čtyři barvy. Existuje právě jedno umístění jedné barvy tak, aby byla v grafu použita čtyřikrát. Pouhou rotací tohoto umístění získáme umístění dalších tří barev. Tedy na obarvení tohoto grafu, jsou potřeba jen 4 barvy - viz obrázek 10. Tedy $\chi^2(GPG(8,3)) = 4$.

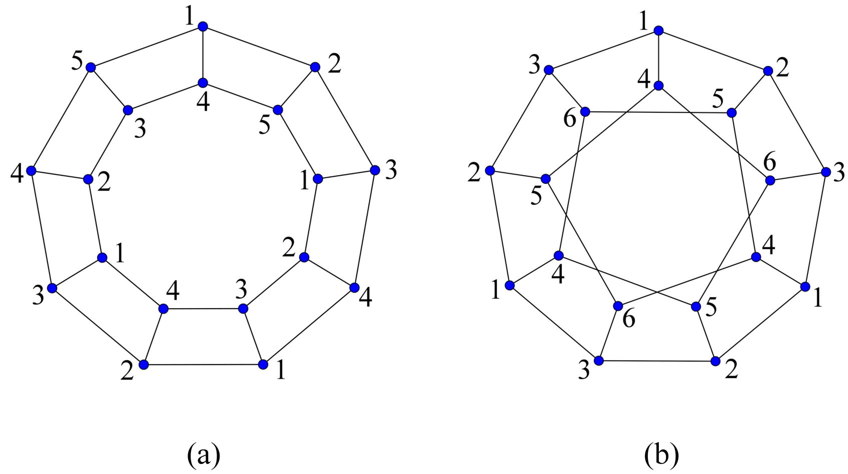


Obrázek 10: Graf GPG(8,3)

GPG(9,1): Graf GPG(9,1) má 18 vrcholů. Jednu barvu lze použít na nejvýše čtyři vrcholy. Pomocí čtyř barev obarvíme jen 16 vrcholů, tedy potřebujeme alespoň 5 barev. Barvení provádíme opět pomocí rotace umístění první barvy. Zbudou dva neobarvené vrcholy, které jsou ale ve vzdálenosti tři, tedy mohou být obarveny stejnou barvou. To znamená, že na tento graf umíme obarvit pomocí 5 barev, jak je znázorněno na obrázku 11 (a). Proto $\chi^2(GPG(9,1)) = 5$.

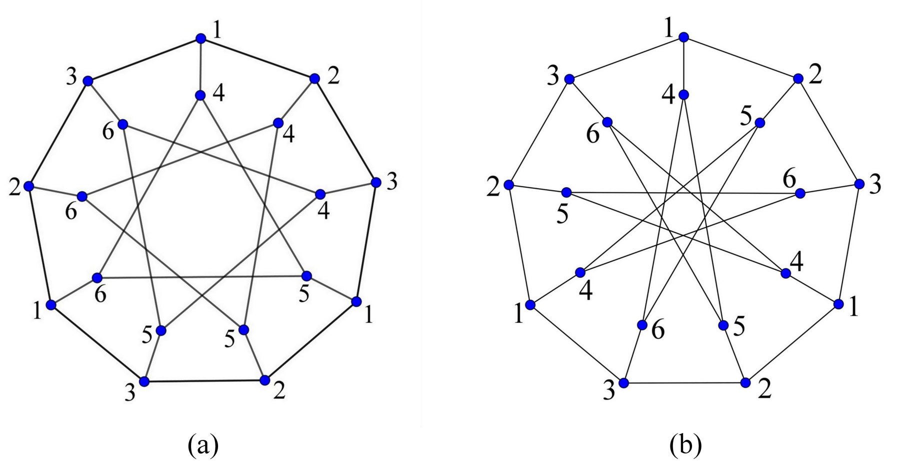
GPG(9,2): V tomto grafu lze jednu barvu použít na nejvýše tři vrcholy, tedy na obarvení celého grafu musíme použít nejméně 6 barev, a protože jsme našli takové obarvení, viz obrázek 11 (b), znamená to, že $\chi^2(GPG(9,2)) = 6$. Vrcholy lze obarvit například tak, že všechny tři vrcholy se stejnou barvou umístíme na vnější kružnici, nebo naopak všechny umístíme na kružnici vnitřní. Na obarvení vnější kružnice použijeme tedy tři barvy stejně tak jako na obarvení vnitřní kružnice.

GPG(9,3): Jednu barvu lze v grafu použít na nejvýše tři vrcholy. Graf GPG(9,3) má 18 vrcholů, tedy minimální počet barev nutných na obarvení grafu je šest. Umístění



Obrázek 11: Grafy GPG(9,1) (a), GPG(9,2) (b)

jedné barvy je buď na třech vrcholech u nebo na třech vrcholech v. Na vrcholech $v_1, v_2, \ldots, v_9$ vznikají díky soudělnosti čísel n a k tři trojúhelníky. Na obarvení těchto trojúhelníků stačí tři barvy a na obarvení vnější kružnice (kružnice na vrcholech u_i) také stačí tři barvy, viz tvrzení 4. Na obarvení celého grafu stačí šest barev, viz obrázek 12 (a). Jistě tedy platí $\chi^2(GPG(9,3)) = 6$.



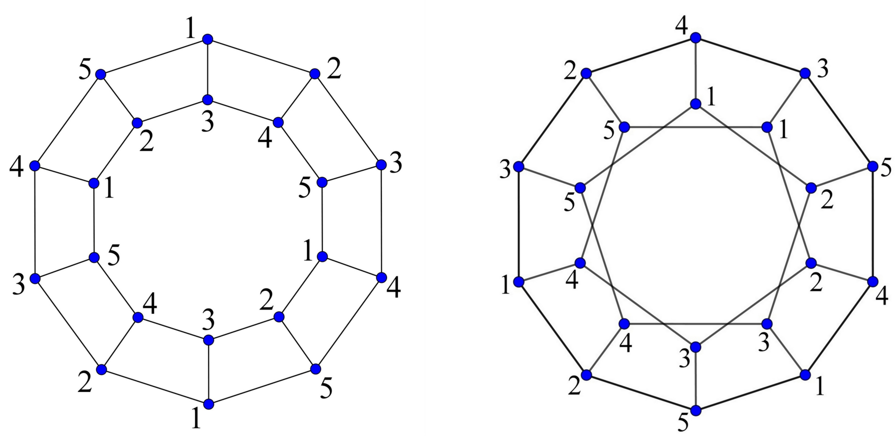
Obrázek 12: Grafy GPG(9,3) (a), GPG(9,4) (b)

GPG(9,4): Graf GPG(9,4) budeme barvit stejným postupem jako předchozí graf GPG(9,2). I zde můžeme jednu barvu použít nejvýše třikrát, z toho plyne, že 5 barev na obarvení nestačí, musíme tedy použít minimálně 6 barev. Na obrázku 12 (b) je vidět možné obarvení pomocí 6-ti barev, z toho plyne, že $\chi^2(GPG(9,4)) = 6$. Obarvení lze provést například tak, že vnější kružnici obarvíme po řade barvami 1, 2 a 3 a vnitřní kružnici také po řadě barvami 4, 5 a 6.

Již víme, že grafy $GPG(7,2)$ a $GPG(7,3)$ jsou izomorfní. Poznamenejme, že stejně je tomu i u grafů $GPG(9,2)$ a $GPG(9,4)$. Pouhým prohozením vnitřní a vnější kružnice u grafu $GPG(9,2)$ vznikne graf $GPG(9,4)$, viz poznámka pod čarou 1.

GPG(10,1): V grafu GPG(10,1) poskládáme pětici barev (1, 2, 3, 4, 5) dvakrát za sebou na obarvení vnější kružnice a taktéž i vnitřní kružnice - pouze zde dojde k rotaci, aby například barva 1 na vnější kružnici nebyla ve vzdálenosti menší nebo rovno než dva od barvy 1 na vnitřní kružnici, viz obrázek 13 (a).

Pojďme se ještě podívat na minimální počet barev, nutných k obarvení tohoto grafu. Tedy jinými slovy zajímá nás, zda by k obarvení nestačily pouze čtyři barvy. Odpověď zní ne, protože jednu barvu lze použít na maximálně čtyři vrcholy (tak, aby mezi nimi byla vzdálenost vetší než dva). Z toho plyne že pomocí čtyř barev bychom obarvili pouze 16 vrcholů, ale graf GPG(10,1) jich má 20. Tedy 5 barev je minimum, $\chi^2(GPG(10,1)) = 5$.



(a) (b)

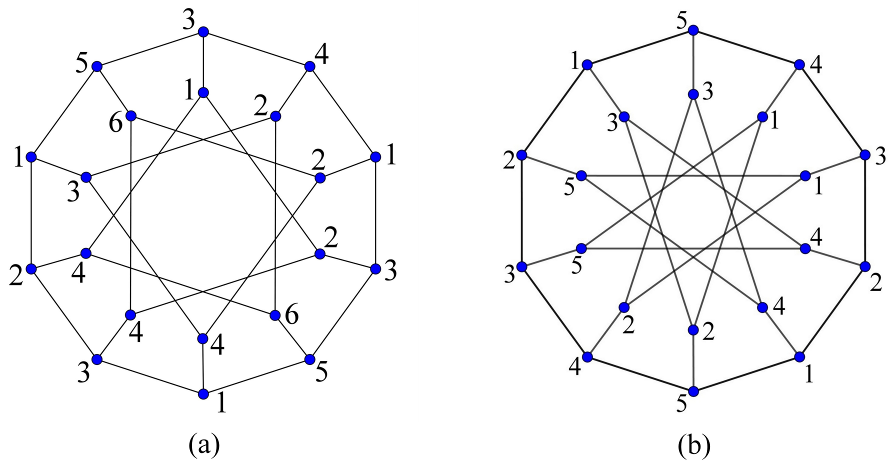
Obrázek 13: Grafy GPG(10,1) (a) a GPG(10,2) (b)

GPG(10,2): Graf GPG(10,2) obsahuje pětiúhelník. Na vrcholech $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ vznikají díky soudělnosti čísel n a k dvě kružnice délky pět. Tedy na základě tvrzení 4 můžeme říci, že minimální počet barev nutných k obarvení celého grafu 2-distančním barvením je pět. Pomocí pěti barev již umíme graf obarvit. Jedno možné obarvení je vidět na obrázku 13 (b), tedy zřejmě $\chi^2(GPG(10,2)) = 5$.

GPG(10,3): Jednu barvu umíme v tomto grafu použít nejvýše čtyřikrát. Existují právě dvě varianty, jak jednu barvu umístit - buď budeme mít tři vrcholy s danou barvou na vnější kružnici a jeden na vnitřní, nebo naopak budou tři vrcholy ležet na vnitřní a jen jeden vrchol na vnější kružnici. Jiné umístění dané barvy tak, aby byla použita čtyřikrát, není možné, protože by vrcholy se stejnou barvou byly ve vzdálenosti menší nebo rovno dvě. Dalo by se tedy říci, že by nám na obarvení dvaceti vrcholů tohoto grafu stačilo pět barev. Otázkou zůstává, zda je možné najít vhodnou kombinaci těchto dvou umístění tak, abychom obarvili všechny vrcholy. Odpověď zní ne. Pro barvy 1 a 3 jsme zvolili první variantu umístění, pro barvy 2 a 4 druhou variantu umístění. Obarvili jsme tedy šestnáct vrcholů. Zbývá stále obarvit čtyři vrcholy, které jsou rozmístěny rovnoměrně - tedy dva na vnější a dva na vnitřní kružnici. Tedy není možné tyto čtyři vrcholy obarvit jednou barvou, proto nelze celý graf obarvit pěti barvami. Z toho vyplývá, že na obarvení je třeba nejméně šest barev. Na obrázku 14 (a) je zobrazeno obarvení tohoto grafu pomocí šesti barev, tedy $\chi^2(GPG(10,3)) = 6$.

Na začátku předchozího odstavce jsme uvedli, že jednu barvu lze použít nejvýše čtyřikrát. Poznamenejme ještě, že pokud bychom barvy používali nejvýše třikrát, potřebovali bychom alespoň 7 barev (na 20 vrcholů).

GPG(10,4): Díky soudělnosti čísel n a k na vrcholech $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ vznikají dvě kružnice délky pět, označme je C_1 a C_2. Na základě tvrzení 4 je na obarvení kružnice C_1 resp. C_2 potřeba pět barev, tedy 5 barev je minimum nutné k obarvení celého grafu GPG(10,4). Pokud kružnici C_1 obarvíme pomocí barev $1, 2, 3, 4$ a 5, pak kružnice C_2 může být obarvena pomocí stejných barev. Je to způsobeno tím, že z libovolného vrcholu kružnice C_1 se lze dostat do libovolného vrcholu kružnice C_2 jenom při průchodu vrcholy u, tedy jistě cestou délky nejméně tři. Celý graf $GPG(10,4)$ lze obarvit pěti barvami - viz obrázek 14 (b). Tedy jistě $\chi^2(GPG(10,4)) = 5$.



Obrázek 14: Grafy GPG(10,3) (a) a GPG(10,4) (b)

7.2 Zobecněné Petresenovy grafy pro obecná n

Na základě poznatků získaných v kapitole 7.1 můžeme nyní zformulovat několik tvrzení pro zobecněné Petersenovy grafy, které splňují určitou podmínku. V této kapitole se budeme zabývat zobecňováním poznatků z předchozí kapitoly, tedy shrneme možné metody barvení pro určité skupiny grafů a určíme tak jejich 2-distanční chromatické číslo.

Tvrzení 46. *Nechť l je přirozené číslo a $G = GPG(4l, 1)$. Potom $\chi^2(G) = 4$.*

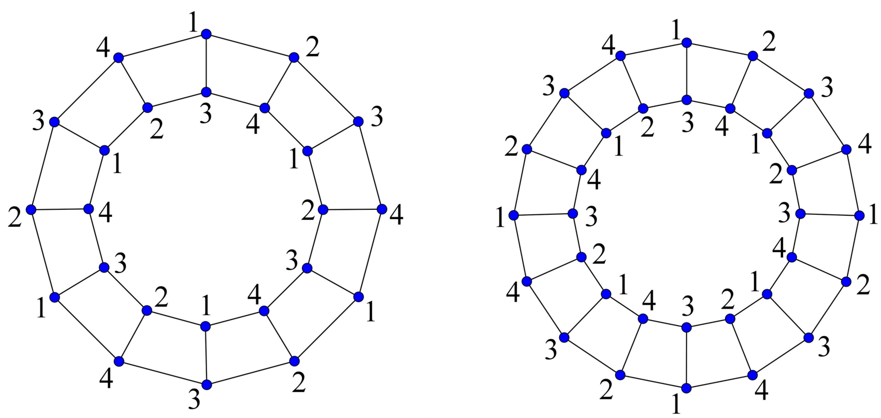
Důkaz. Nechť $G = GPG(n, 1)$, kde $n = 4l$, $l \in \mathbb{N}$. Označme (analogicky jako v definici 45) vrcholy vnější kružnice $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a vrcholy vnitřní kružnice $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že platí $\{u_i, v_i\} \in H(G)$. Každému vrcholu přiřadíme barvu $c(u_i)$, $c(v_i)$ podle rovnic (5) a (6). Jednu barvu vždy použijeme $\frac{n}{2}$ krát a pokud použijeme čtyři barvy, obarvíme všechny vrcholy grafu.

$$c(u_i) = \begin{cases} 4 & \text{pro } i \equiv 0 \pmod 4, \\ 1 & \text{pro } i \equiv 1 \pmod 4, \\ 2 & \text{pro } i \equiv 2 \pmod 4, \\ 3 & \text{pro } i \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{5}$$

$$c(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{pro } i \equiv 0 \pmod 4, \\ 3 & \text{pro } i \equiv 1 \pmod 4, \\ 4 & \text{pro } i \equiv 2 \pmod 4, \\ 1 & \text{pro } i \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{6}$$

Uvažujme dva vrcholy x a y se stejnou barvou. Jednou z možností je, že oba vrcholy leží na stejné kružnici (vnější nebo vnitřní), pak se jejich indexy liší o násobek čísla 4 a tedy $\mathrm{dist}_G(x, y) \geq 4$. Druhou možností je, že jeden vrchol leží na vnější a druhý na vnitřní kružnici. Pak se podle rovností (5) a (6) jejich indexy liší alespoň o 2, tedy $\mathrm{dist}_G(x, y) \geq 3$. Obarvení grafu G pomocí výše uvedených rovnic je proto 2-distančním obarvením a tedy $\chi^2(G) \leq 4$. Naproti tomu $\Delta(G) = 3$ a proto na základě nerovnosti (1) lze psát, že $\chi^2(G) \geq 4$. Zřejmě tedy platí, $\chi^2(G) = 4$.

■



(a) (b)

Obrázek 15: Grafy GPG(12,1) (a) a GPG(16,1) (b)

Na obrázku 15 - (a), (b) jsou znázorněny grafy (pro $l = 3, 4$), které lze obarvit touto metodou za použití pouze čtyř barev.

Tvrzení 47. *Nechť $l \geq 2$ je přirozené číslo a $G = GPG(4l, 3)$. Potom $\chi^2(G) = 4$.*

Důkaz. Nechť $G = GPG(n, 3)$, kde $n = 4l$, $l \in \mathbb{N}$. Nechť na základě definice 45 je $V = V_1 \bigcup V_2$ množina vrcholů zobecněného Petersenova grafu, kde $V_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ a $V_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tak, že platí $\{u_i, v_i\} \in H(G)$. Vrcholům grafu jsou přiděleny barvy na základě rovností (7) a (8).

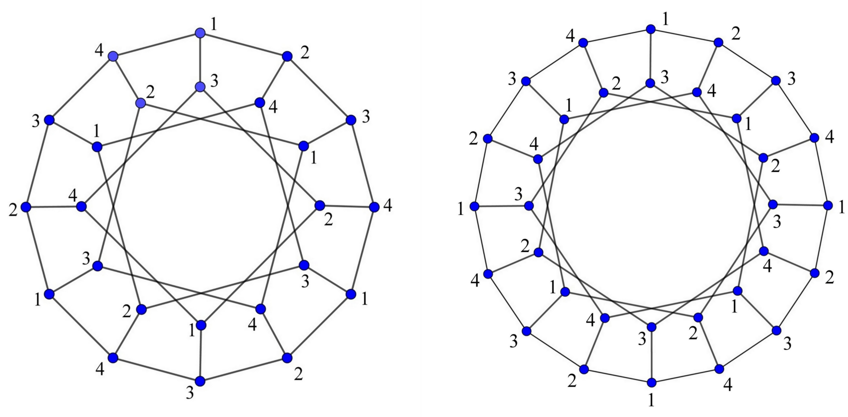
$$c(u_i) = \begin{cases} 4 & \text{pro } i \equiv 0 \pmod 4, \\ 1 & \text{pro } i \equiv 1 \pmod 4, \\ 2 & \text{pro } i \equiv 2 \pmod 4, \\ 3 & \text{pro } i \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{7}$$

$$c(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{pro } i \equiv 0 \pmod 4, \\ 3 & \text{pro } i \equiv 1 \pmod 4, \\ 4 & \text{pro } i \equiv 2 \pmod 4, \\ 1 & \text{pro } i \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{8}$$

Uvažujme dva vrcholy x a y se stejnou barvou. Pokud $(x \in V_1) \wedge (y \in V_1)$, pak se podle rovnosti (7) liší jejich indexy o násobek čísla 4 a tedy $\mathrm{dist}_G(x,y) \geq 4$. Nechť tedy $(x \in V_2) \wedge (y \in V_2)$. Označme $V_i^{1,2}$ množinu všech vrcholů z V_2, které leží v G ve vzdálenosti nejvýše dva od vrcholu v_i. Tedy $V_i^{1,2} = \{v_{i-6}, v_{i-3}, v_{i+3}, v_{i+6}\} \pmod n$. Z rovnosti (8) plyne, že všechny tyto vrcholy mají jiné barvy, než vrchol v_i. Tedy pokud jsou x a y obarveny stejnou barvou, musí platit, že $\mathrm{dist}_G(x,y) \geq 3$.

Další možností je, že $(x \in V_1) \wedge (y \in V_2)$ nebo $(x \in V_2) \wedge (y \in V_1)$. Potom na základě rovností (7) a (8) se indexy vrcholů se stejnou barvou liší alespoň o dva, tedy $\mathrm{dist}_G(x,y) \geq 3$. Z toho plyne, že obarvení grafu G pomocí rovnic (7) a (8) je 2-distančním barvením, tedy $\chi^2(G) \leq 4$. Dále chceme ukázat, že $\chi^2(G) \geq 4$, tedy, že čtyři barvy jsou minimem nutným k obarvení grafu G. To plyne z triviální nerovnosti (1) a faktu, že $\Delta(G) = 3$. Tedy jistě $\chi^2(G) = 4$.

■



(a) (b)

Obrázek 16: Graf GPG(12,3) (a) a graf GPG(16,3) (b)

Příklady takových grafů jsou znázorněny na obrázku 16 (a) (pro soudělná n a k) a (b) (pro nesoudělná n a k).

Již víme z kapitoly 7.1 že graf $GPG(9,2)$ umíme obarvit pouze pomocí šesti barev a to tak, že na obarvení vnější kružnice použijeme právě tři barvy a na obarvení vnitřní kružnice také tři barvy (tedy vrcholy se stejnou barvou leží vždy na jedné kružnici - vnější nebo vnitřní). Na vnější resp. vnitřní kružnici jsou vrcholy obarveny po řadě barvami 1, 2, 3, resp. 4, 5, 6. Stejnou metodu použijeme v důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 48. *Nechť je $l \in \mathbb{N}$, takové, že $l \geq 3$, a nechť $G = GPG(3l, 2)$. Potom $\chi^2(G) = 6$.*

Důkaz. Každý graf $G = GPG(3l, 2)$, kde $l \geq 3$ je přirozené číslo, lze obarvit na základě rovností (9) a (10). Vrcholy vnější kružnice obarvíme po řadě barvami $1, 2, 3$ a vrcholy vnitřní kružnice barvami $4, 5, 6$. Z rovností jasně plyne, že vrcholy se stejnou barvou leží vždy na stejné kružnici (vnitřní nebo vnější) a to ve vzdálenosti alespoň tři, jedná se tedy o přípustné 2-distanční barvení.

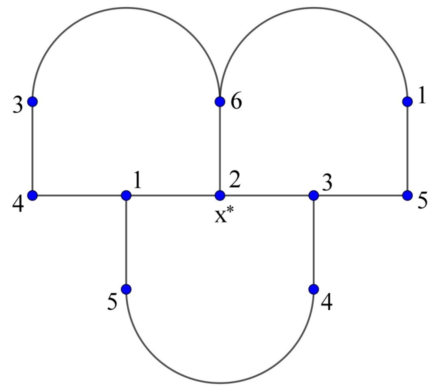
$$c(u_i) = \begin{cases} 3 & \text{pro } i \equiv 0 \pmod 3, \\ 1 & \text{pro } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 2 & \text{pro } i \equiv 2 \pmod 3. \end{cases} \tag{9}$$

$$c(v_i) = \begin{cases} 6 & \text{pro } i \equiv 0 \pmod 3, \\ 4 & \text{pro } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 5 & \text{pro } i \equiv 2 \pmod 3. \end{cases} \tag{10}$$

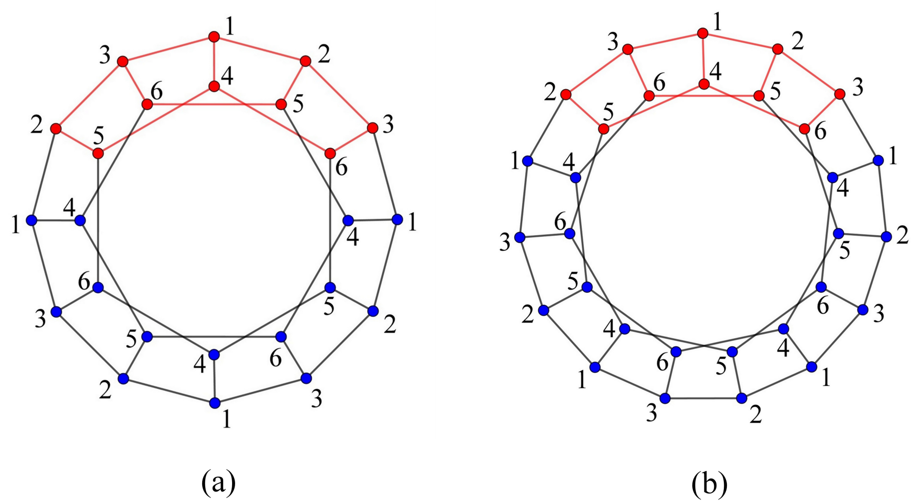
Nyní chceme ukázat, že $\chi^2(G) \geq 6$. Důkaz je založen na existenci indukovaného podgrafu na deseti vrcholech, jenž je obsažen v grafu G. Označme graf G' jako podgraf grafu G indukovaný vrcholy $u_i, u_{i+1}, u_{i+2} \pmod n$ a $v_i, v_{i+1}, v_{i+2} \pmod n$ - viz obrázek 17.

Na jeho 2-distanční obarvení je potřeba minimálně šest barev. V grafu G' existuje totiž právě jeden vrchol, označme jej x^*, pro nějž platí, že leží ve vzdálenosti menší nebo rovno dva od všech ostatních vrcholů grafu G'. Tedy barva $c(x^*)$ smí být v grafu G' použita pouze jednou. Každá další barva může být v grafu použita nejvýše dvakrát. Z toho tedy vyplývá, že pěti barvami takto obarvíme nejvýše 9 vrcholů grafu G'. Poslední neobarvený vrchol je ve vzdálenosti menší nebo rovno dva od všech již obarvených vrcholů, tedy musí být obarven další barvou. Tedy jistě $\chi^2(G') \geq 6$. Každý graf G obsahuje graf G' jako indukovaný podgraf, viz obrázek 18 (v obrázku je indukovaný podgraf G' vyznačen červeně). Tedy jistě $\chi^2(G) \geq 6$. Pomocí šesti barev umíme graf G obarvit, například pomocí rovnic (9) a (10), tedy $\chi^2(G) = 6$.

■



Obrázek 17: Indukovaný graf G' grafů GPG(12,2) a GPG(15,2)



Obrázek 18: Grafy GPG(12,2) (a) a GPG(15,2) (b)

Již víme, že graf $GPG(5,1)$ umíme obarvit pomocí 5 barev - na vnější kružnici použijeme každou barvu právě jednou a na vnitřní kružnici taktéž. Zjistíme, že analogicky můžeme postupovat i u grafů GPG(10,1), GPG(15,1) atd. (viz obrázek 19 (a), (b)), tedy obecně grafů, které budou mít $n = 5l$, kde $l \in \mathbb{N}$, jak udává následující tvrzení.

Tvrzení 49. *Nechť l je přirozené číslo a $G = GPG(n,1)$, kde $n = 5l$. Potom*

$$\chi^2(G) = \begin{cases} 4 & \textit{pro } l \equiv 0 \ (\textit{mod } 4), \\ 5 & \textit{jinak.} \end{cases} \tag{11}$$

Důkaz. Nechť $G = GPG(n, 1)$ kde $n = 5l, l \in \mathbb{N}$. Je-li $l \equiv 0 \pmod 4$, pak podle tvrzení 46 je $\chi^2(G) = 4$.

Nechť tedy $l \not\equiv 0 \pmod 4$. Chceme ukázat, že na obarvení takových grafů je potřeba alespoň pět barev. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že na obarvení grafu G stačí čtyři barvy. (Poznamenejme ještě, že méně než čtyřmi barvami obarvení není možné na základě triviální nerovnosti (1)). Označme (analogicky jako v definici 45) vrcholy vnější kružnice $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a vrcholy vnitřní kružnice $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že platí $\{u_i, v_i\} \in H(G)$. Vezmeme si libovolný vrchol na vnější kružnici, například u_1. Tento vrchol spolu s vrcholy u_2, v_1 a v_2 tvoří kružnici na čtyřech vrcholech, tedy podle tvrzení 4 jsou na obarvení potřeba čtyři barvy. Vrcholům tedy přiřadíme barvy např. takto: $c(u_1) = 1$, $c(v_1) = 2, c(u_2) = 3$ a $c(v_2) = 4$.

Celý důkaz je založený na tzv. nuceném přidělování barev. Pro každý další vrchol u_j, v_j, kde j je pro konkrétní grafy dáno rovností (12), platí, že existuje právě jedna (z již použitých barev $1, 2, 3$ a 4), kterou lze vrchol obarvit.

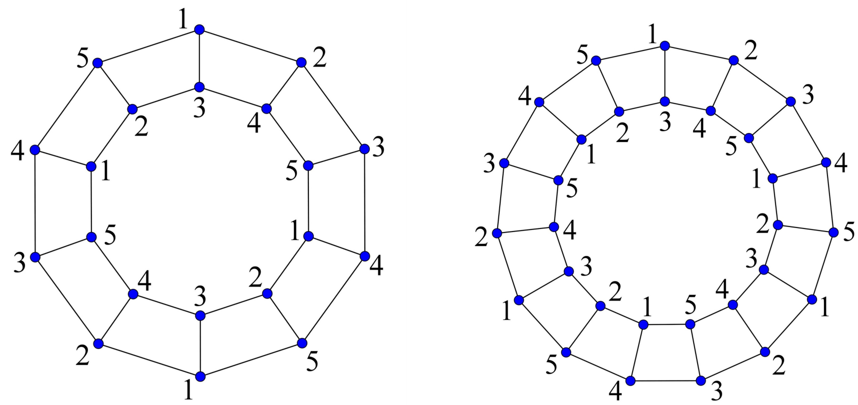
$$j = \begin{cases} 3, 4, \ldots, (n-1) & \text{pro } GPG(5l, 1), \text{kde } l \equiv 1 \pmod 4, \\ 3, 4, \ldots, (n-2) & \text{pro } GPG(5l, 1), \text{kde } l \equiv 2 \pmod 4, \\ 3, 4, \ldots, (n-1) & \text{pro } GPG(5l, 1), \text{kde } l \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{12}$$

Tedy získáme $c(u_3) = 2, c(v_3) = 1, c(u_4) = 4, c(v_4) = 3$ atd. Barvení grafu pomocí čtyř barev je pak dáno rovnostmi (13) a (14), kde ovšem horní hranici indexu j udává výše uvedená rovnost (12).

$$c(u_j) = \begin{cases} 4 & \text{pro } j \equiv 0 \pmod 4, \\ 1 & \text{pro } j \equiv 1 \pmod 4, \\ 3 & \text{pro } j \equiv 2 \pmod 4, \\ 2 & \text{pro } j \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{13}$$

$$c(v_j) = \begin{cases} 3 & \text{pro } j \equiv 0 \pmod 4, \\ 2 & \text{pro } j \equiv 1 \pmod 4, \\ 4 & \text{pro } j \equiv 2 \pmod 4, \\ 1 & \text{pro } j \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{14}$$

Z toho vyplývá, že pro grafy $GPG(5l, 1)$, kde $l \equiv 1 \pmod 4$ nebo $l \equiv 3 \pmod 4$ zbudou dva neobarvené vrcholy (u_n, v_n) a pro grafy, kde $l \equiv 2 \pmod 4$ zbudou čtyři neobarvené vrcholy $(u_{n-1}, u_n, v_{n-1}, v_n)$. Pro všechny tyto vrcholy platí, že jsou ve vzdálenosti nejvýše dva od vrcholů s barvami $1, 2, 3$ a 4. Tedy na jejich obarvení musí být použita další barva. Což je spor s předpokladem, že čtyři barvy na 2-distanční obarvení grafu G stačí.



(a) (b)

Obrázek 19: Graf GPG(10,1) (a) a graf GPG(15,1) (b)

Jistě tedy $\chi^2(G) \geq 5$. Pomocí pěti barev již umíme graf obarvit, viz obrázek 19, a to tak, že vrcholy u_i vnější kružnice obarvíme podle rovnice (15) a vrcholy v_i vnitřní kružnice podle rovnosti (16), kde $i = 1, 2 \ldots, n$.

$$c(u_i) = \begin{cases} 5 & \text{pro } i \equiv 0 \pmod 5, \\ 1 & \text{pro } i \equiv 1 \pmod 5, \\ 2 & \text{pro } i \equiv 2 \pmod 5, \\ 3 & \text{pro } i \equiv 3 \pmod 5, \\ 4 & \text{pro } i \equiv 4 \pmod 5. \end{cases} \tag{15}$$

$$c(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{pro } i \equiv 0 \pmod 5, \\ 3 & \text{pro } i \equiv 1 \pmod 5, \\ 4 & \text{pro } i \equiv 2 \pmod 5, \\ 5 & \text{pro } i \equiv 3 \pmod 5, \\ 1 & \text{pro } i \equiv 4 \pmod 5. \end{cases} \tag{16}$$

Nyní chceme ještě ukázat, že se jedná o 2-distanční barvení. Uvažujeme tedy dva vrcholy x a y se stejnou barvou. Jednou z možností je, že oba vrcholy leží na stejné kružnici (vnější nebo vnitřní), pak se jejich indexy liší o násobek čísla 5 a tedy $\mathrm{dist}_G(x, y) \geq 5$. Druhou možností je, že jeden vrchol leží na vnější a druhý na vnitřní kružnici. Pak se podle rovností (15) a (16) jejich indexy liší alespoň o 2, tedy $\mathrm{dist}_G(x, y) \geq 3$. Z toho plyne, že obarvení grafu G pomocí rovnic (15) a (16) je 2-distančním barvením, tedy $\chi^2(G) = 5$.

$\blacksquare$

8 Závěr

V úvodu bakalářské práce jsme nadefinovali pojmy 2-distanční barvení grafu a 2-distanční chromatické číslo grafu, a ukázali jsme hodnotu 2-distančního chromatického čísla pro základní třídy grafů, jako jsou cesty a kružnice. Dále jsme definovali pojem seznamového 2-distančního barvení grafu a uvedli jsme, že 2-distanční barvení je vlastně speciálním případem seznamového 2-distančního barvení grafu. Díky tomu platí nerovnost: $\chi^2_\ell(G) \geq \chi^2(G)$.

V bakalářské práci jsme si stanovili dva hlavní cíle. Prvním cílem bylo vytvořit přehled známých výsledků týkajících se 2-distančního barvení především rovinných grafů a přehledně je utřídit do několika kapitol. Kromě 2-distančního barvení jsme se také zabývali výsledky seznamového 2-distančního barvení, které s 2-distančním barvením úzce souvisí. Tento cíl byl naplněn v kapitolách 3 až 6.

Kapitola 3, resp. 4 shrnuje horní omezení 2-distančního, resp. seznamového 2-distančního chromatického čísla. V kapitole 5 resp. 6 se naopak zabýváme otázkou, pro jaké grafy bude hodnota 2-distančního, resp. seznamového 2-distančního chromatického čísla rovna nejmenší možné hodnotě $\Delta(G) + 1$.

Druhým cílem bakalářské práce bylo zkoumat 2-distanční barvení zobecněných Petersenových grafů. Touto problematikou jsme se zabývali v kapitole 7. Nejprve jsme se věnovali zobecněným Petersenovým grafům s malým počtem vrcholů. Našli jsme jejich přípustné 2-distanční barvení pomocí k barev, které jsme doložili obrázkem. Dokázali jsme, že k je minimální počet barev nutných k 2-distančnímu obarvení, tedy našli jsme hodnotu 2-distančního chromatického čísla. Na závěr jsme, na základě získaných poznatků z barvení jednoduchých zobecněných Petersenových grafů, zformulovali a dokázali čtyři tvrzení, která udávají hodnotu 2-distančního chromatického čísla pro libovolně velké zobecněné Petersenovy grafy, které splňují určitou podmínku.

V průběhu vytváření bakalářské práce jsme zjistili, že byl vydán článek [41] s obdobnou tématikou - tedy 2-distanční barvení některých zobecněných Petersenových grafů. V té době jsme měli vytvořenou podstatnou část této bakalářské práce, tedy jsme její téma již neměnili.

Tato práce by se dala rozšířit, například zkoumáním seznamového 2-distančního barvení zobecněných Petersenových grafů a následným porovnáním výsledků s výsledky 2-distančního barvení.

Reference

[1] M. Bonamy, Graphs with maximum degree $\Delta \geq 17$ and maximum average degree less than 3 are list 2-distance (Δ+2)-colorable. *Discrete Math.* **313** (2013), 427–449.

[2] M. Bonamy, B. Lévêque, A. Pinlou, 2-distance coloring of sparse graphs. *Electron. Notes Discrete Math.* **38** (2011), 155–160.

[3] M. Bonamy, B. Lévêque, A. Pinlou, Graphs with maximum degree $\Delta \geq 17$ and maximum average degree less than 3 are list 2-distance ($\Delta + 2$)-colorable. *Discrete Math.* **317** (2014), 19-32.

[4] M. Bonamy, B. Lévêque, A. Pinlou, 2-distance coloring of sparse graphs. *Journal of Graph Theory* **77/3** (2014), 190-218.

[5] O.V. Borodin a, A.O. Ivanova, 2-distance ($\Delta + 2$)-coloring of planar graphs with girth six and $\Delta \geq 18$. *Discrete Math.* **309** (2009), 6496-6502.

[6] O.V. Borodin, A.O. Ivanova, List 2-distance ($\Delta+2$)-coloring of planar graphs with girth 6 and $\Delta \geq 24$. *Siberian Mathematical Journal* **50/6** (2009), 958–964.

[7] O.V. Borodin, A.O. Ivanova, List 2-distance ($\Delta+2$)-coloring of planar graphs with girth six. *European Journal of Combinatorics* **30** (2009), 1257-1262.

[8] O.V. Borodin, A.O. Ivanova, T.K. Neustroeva, 2-distance coloring of sparse plane graphs. *Sib. Élektron. Mat. Izv.* **1** (2004), 76-90 (in Russian).

[9] O.V. Borodin, A.O. Ivanova, T.K. Neustroeva, Sufficient conditions for 2-distance ($\Delta+1$)-colorability of planar graphs of girth 6. *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1* **12/3** (2005), 32-47 (in Russian).

[10] O.V. Borodin, A.O. Ivanova, T.K. Neustroeva, List 2-distance ($\Delta + 1$)-coloring of planar graphs with given girth. *Diskret. Anal. Issled. Oper.* **14/3** (2007), 13–30.

[11] O.V. Borodin, A.N. Glebov, A.O. Ivanova, T.K. Neustroeva, V. A. Tashkinov, Sufficient conditions for the 2-distance ($\Delta + 1$)-colorability of plane graphs. *Siberian Electron. Math. Rep.* **1** (2004), 129–141 (in Russian).

[12] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, J. Nešetřil, A. Raspaud, E. Sopena, On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph. *Discrete Math.* **206** (1999), 77-89.

[13] Y. Bu, X. Lv, 2-Distance coloring of a planar graph without 3, 4, 7-cycles. *J. Comb. Optim.* **32** (2016), 244–259.

[14] Y. Bu, X. Lv, X. Yan, The list 2-distance coloring of a graph with $\Delta(G) = 5$. *Discrete Math., Algorithms and Applications* **7/2** (2015), 1550017 (11 pages).

[15] Y. Bu, X. Yan, List 2-distance coloring of planar graphs. *J. Comb. Optim.* **30** (2015), 1180–1195.

[16] Y. Bu, X. Zhu, 2-Distance coloring of planar graphs without short cycles. *Sci. Sin.Math.* **42/6** (2012), 635–664.

[17] Y. Bu, X. Zhu, An optimal square coloring of planar graphs. *J Comb. Optim.* **24** (2012), 580–592.

[18] D.W. Cranston, R. Erman, R. Škrekovski, Choosability of the square of a planar graph with maximum degree four. *Australas. Journal of Combin.* **59** (2014), 86-97.

[19] R. Čada, T. Kaiser, Z. Ryjáček, Diskrétní matematika, skripta, Západočeská univerzita, Plzeň, (2004).

[20] M.H. Dolama, É. Sopena, On the maximum average degree and the incidence chromatic number of a graph. *Discrete. Math. Theor. Comput. Sci.* **7** (2005), 203–216.

[21] W. Dong, W. Lin, An improved bound on 2-distance coloring plane graphs with girth 5. *J. Comb. Optim.* **32** (2016), 645–655.

[22] W. Dong, W. Lin, On 2-distance coloring of plane graphs with girth 5. *Discrete Applied Math.* **217** (2017), 495–505.

[23] Z. Dvořák, D. Kral', P. Nejedlý, R. Škrekovski, Coloring squares of planar graphs with girth six. *European J. Combin.* **29/4** (2008), 838–849.

[24] Z. Dvořák, R. Škrekovski, M. Tancer, List-Coloring Squares of Sparse Subcubic Graphs. *SIAM J. Discrete. Math.* **22** (2008), 139–159.

[25] G. Fertin, E. Godard, A. Raspaud, Acyclic and k-distance coloring of the grid. *Inform. Process. Lett.* **87** (2003), 51-58.

[26] G.P. Georges, D.W. Mauro, Generalized vertex labelings with a condition at distance two. *Congressus Numerantium* **109** (1995), 141-159.

[27] M. Gionfriddo, A short survey on some generalized colourings of graphs. *Ars Combin.* **24B** (1987), 155-163.

[28] S.G. Hartke, S. Jahanbekam, B. Thomas, The chromatic number of the square of subcubic planar graphs. Preprint, arXiv: 1604.06504v1 (2016).

[29] J. van den Heuvel, S. McGuinnes, Colouring the square of a planar graph. *J. Graph Theory* **42** (2003), 110-124.

[30] C. Charpentier, M. Montassier, A. Raspaud, L(p, q)-labeling of sparse graphs. *J. Comb. Optim.* **25** (2013), 646–660.

[31] A.O. Ivanova, List 2-distance $(\Delta + 1)$-coloring of sparse planar graphs with girth at least 7. *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1* **17/5** (2010), 22–36. Translated in: J. Appl. Ind. Math. **5** (2011), 221–230 (in Russian).

[32] A.O. Ivanova, A. S. Solov'eva, 2-Distance $(\Delta-2)$-Coloring of Sparse Planar Graphs with $\Delta = 3$. *Math. Notes of Yakutsk Univ.* **16/2** (2009), 32–41.

[33] P. Jacko, S. Jendrol', Distance coloring of the hexagonal lattice. *Discuss. Math. Graph Theory* **25** (2005), 151-166.

[34] S. Jendrol', Z. Skupień, Local structures in plane maps and distance colourings. *Discrete Math.* **236** (2001), 167-177.

[35] S.J. Kim, B. Park, Counterexamples to the List Square Coloring Conjecture. *J. Graph Theory* **78/4** (2015), 239-247.

[36] A.V. Kostochka, D. R. Woodall, Choosability conjectures and multicircuits. *Discrete Math.* **240** (2001), 123–143.

[37] F. Kramer, H. Kramer, Un probleme de coloration des sommets d'un graphe. *C.R. Acad. Sci. Paris A* **268** (1969), 46-48.

[38] F. Kramer, H. Kramer, Ein Färbungsproblem der Knotenpunkte eines Graphen bezüglich der Distanz *p*. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **14/2** (1969) 1031-1038.

[39] M. Molloy, M.R. Salavatipour, A bound on the chromatic number of the square of a planar graph. *J. Combin. Theory Ser. B* **94** (2005), 189-213.

[40] M. Montassier, Personal Communication.

[41] R. Shaheen, Z Kanaya, S.Jakhlab, d-Distance Coloring of Generalized Petersen Graphs P(n, k). *Open Journal of Discrete Math.* **7** (2017), 185-199.

[42] F. Speranza, Colorazioni di specie superiore d'un grafo. *Boll. Un. Mat. Ital.* **12/4** (1975), 53-62.

[43] A. Ševčíková, Distant chromatic number of the planar graphs. Manuscript, P.J. Šafárik University Košice, 2001.

[44] F.W. Wang, K.W. Lih, Labeling planar graphs with conditions on girth and distance two. *SIAM J. Discrete Math.* **17** (2003), 264–275.

[45] G. Wegner, Graphs with Given Diameter and a Coloring Problem. *Technical Report*, 1977.

[46] S.A. Wong, Colouring graphs with respect to distance. M.Sc. Thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1996.