Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Bakalářská práce

Vlastní čísla Laplaceova operátoru

Jana Javorská

2017/2018

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Vlastní čísla Laplaceova operátoru“ vypracovala samostatně a s použitím uvedené literatury a pramenů.

V Plzni, dne 24.5. 2018

Jana Javorská

Poděkování

Děkuji panu RNDr. Petru Tomiczkovi CSc. za odborné vedení, pomoc a trpělivost při zpracování této práce. Ráda bych také poděkovala doc. RNDr. Petru Stehlíkovi, Ph.D. za celkovou podporu během mého studia.

Abstrakt

Tato práce se zabývá vlastními čísly Laplaceova operátoru a jejich vlastnostmi. Postupně jsme představili úlohu na vlastní čísla Laplaceova operátoru v jedné a následně i ve dvou dimenzích. Dále jsme ukázali významné vlastnosti těchto vlastních čísel a způsob jak zjistit jejich přibližnou hodnotu. V poslední části této práce jsme zkoumali závislost vlastních čísel na množině, kde Laplaceovu úlohu na vlastní čísla řešíme.

Abstract

This thesis deals with Eigenvalues of Laplace operator and with their properties. We have gradually introduced a Laplace eigenvalue problem in one, and then in two dimensions. We have also shown the significant properties of these eigenvalues and the way to determine their approximate value. In the last part of this thesis we investigated the dependence of eigenvalues on the set where Laplace eigenvalue problem is solved.

Obsah

Použité značení

$\mathbb{R}$	Množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	Množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}^2$	Množina uspořádaných dvojic reálných čísel
$\mathbb{C}$	Množina komplexních čísel
$\mathbb{N}$	Množina přirozených čísel
∇	Gradient
Δ	Laplaceův operátor
$\vec{n}$	Vnější normálový vektor
$S(\Omega)$	Obsah množiny Ω
$O(\Omega)$	Obvod množiny Ω
$\lambda_n(\Omega)$	n-té vlastní číslo Laplaceovy úlohy na množině Ω
$C(I)$	Lineární vektorový prostor spojitých funkcí na intervalu I
$C^2(I)$	Lineární vektorový prostor dvakrát spojitě diferencovatelných funkcí na intervalu I

1 Úvod

Laplaceův operátor neboli Laplacián byl poprvé použit Pierrem-Simonem Laplacem, významným francouzským matematikem, fyzikem, astronomem a politikem. Jedná se o diferenciální operátor definovaný jako divergence gradientu. Úloha na vlastní čísla Laplaceova operátoru na množině Ω není triviální problém a je potřeba si uvědomit, že ji umíme vyřešit jen na velmi omezeném množství množin. Nicméně vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru hrají významnou roli například v teorii kmitání a vlnění, stejně jako v problematice proudění. V této bakalářské práci si proto představíme významné vlastnosti vlastních čísel a způsob jak odhadnout první vlastní číslo. Později ukážeme, jak toto první vlastní číslo závisí na množině, kde tuto úlohu řešíme a která množina je nejvýhodnější. V druhé kapitole představíme úlohu na vlastní čísla Laplaceova operátoru v jedné dimenzi, tedy na intervalu I. Jednou ze situací, kdy je možné na tento problém narazit je kmitání struny, například na kytaře. Dále dokážeme důležité vlastnosti vlastních čísel a nakonec budeme zkoumat Rayleighův podíl, který slouží právě k odhadu prvního vlastní čísla. Ve třetí kapitole tuto problematiku převedeme do dvou dimenzí, kde se úloha na vlastní čísla Laplaceova operátoru řeší na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Popisuje například kmitání membrány uvnitř mikrofonu. Je logické, že hodnota vlastních čísel bude záviset na této množině Ω. Proto si ve čtvrté kapitole představíme Faber-Krahnovu nerovnost a její důkaz. Tato nerovnost ukazuje, že nejoptimálnější množina Ω je kruh. Nakonec v poslední kapitole ukážeme několik příkladů toho, jak hodnota prvního vlastního čísla závisí na množině Ω.

2 Sturm-Liouvilleova úloha v jedné dimenzi

V této kapitole čerpáme z [4] a [7].

Mějme následující okrajovou úlohu

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)\,, \quad x \in [\alpha, \beta], \tag{1}$$

kde její řešení $y(x)$ splňuje jednu z okrajových podmínek:

- *Dirichletovy*:
$$y(\alpha) = y_0 \quad a \quad y(\beta) = y_1,$$
- *Neumannovy*:
$$y'(\alpha) = y_0 \quad a \quad y'(\beta) = y_1,$$
- *Smíšené*:
$$\begin{aligned} & y'(\alpha) = y_0 \qquad a \qquad y(\beta) = y_1 \\ \textit{nebo} \quad & y(\alpha) = y_0 \qquad a \qquad y'(\beta) = y_1, \end{aligned}$$
- *Newtonovy*:
$$\begin{aligned} c_1 y(\alpha) + c_2 y'(\beta) = y_0 \quad a \quad & c_3 y(\alpha) + c_4 y'(\beta) = y_1, \\ & (|c_1| + |c_2|)(|c_3| + |c_4|) \neq 0, \end{aligned}$$

  kde $c_1\,, c_2\,, c_3\,, c_4\,, y_0\,, y_1 \in \mathbb{R}$.

Věta 2.1 : Jsou-li funkce $a_0, a_1, a_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojité na intervalu $I := [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ a $a_2(x) \neq 0$ pro každé $x \in [\alpha, \beta]$, můžeme definovat operátor

$$L : C^2(I) \ni y(x) \to L[y(x)] := a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x), \quad x \in I, \tag{2}$$

kde $C^2(I)$ je lineární vektorový prostor dvakrát spojitě diferencovatelných funkcí $y : I \to \mathbb{R}$. Potom platí:

- Pro každou funkci $f(x) : I \to \mathbb{R}$ splňuje funkce $y : I \to \mathbb{R}$ rovnici (1) právě tehdy, když $y(x)$ řeší operátorovou rovnici
$$L\,[y(x)] = f(x).$$
- Zobrazení L je lineární z $C^2(I)$ do $C(I)$.

Rovnici (1) můžeme tedy podle věty 2.1 přepsat jako operátorovou rovnici $L[y(x)] = f(x)$, zkráceně jako $Ly = f$.
Při řešení rovnice (1) hrají významnou roli vlastní čísla a vlastní funkce. Abychom mohli postoupit dále, je nutné zadefinovat, co je vlastní funkce a vlastní číslo operátoru L.

Definice 2.1 : (Vlastní funkce a vlastní čísla operátoru) Nechť $L : C^2[\alpha, \beta] \to C[\alpha, \beta]$ je daný diferenciální operátor 2. řádu. Číslo λ se nazývá *vlastním číslem* operátoru L, jestliže existuje nenulová funkce $\phi(x)$ taková, že

$$L[\phi(x)] = \lambda\phi(x).$$

Funkce $\phi(x)$ se nazývá *vlastní funkce* operátoru L.

Příklad 2.1 : Určete vlastní čísla a vlastní funkce operátoru $L : C^2[0, 1] \to C[0, 1]$ definovaného jako $L[y] = -y''$, mají-li být splněny Dirichletovy okrajové podmínky.
Z definice 2.1 víme, že vlastní číslo a k němu příslušná vlastní funkce splňuje rovnost $L[\phi(x)] = \lambda\phi(x)$.
Můžeme tedy psát, že

$$\begin{aligned} -y'' &= \lambda y \\ y'' + \lambda y &= 0. \end{aligned}$$

Tuto rovnici můžeme řešit pomocí charakteristické rovnice, tedy

$$k^2 + \lambda = 0.$$

Při řešení této kvadratické rovnice uvažujeme následující tři případy:

1. $\lambda > 0$, potom $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i$ a řešení je ve tvaru

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Nyní $[\alpha, \beta] = [0, 1]$ a protože řešení musí splňovat okrajové podmínky, dostaneme následující soustavu pro C_1 a C_2.

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \cos(\sqrt{\lambda} \cdot 0) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \cdot 0) \\ 0 &= C_1 \cos(\sqrt{\lambda} \cdot 1) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \cdot 1). \end{aligned}$$

Tedy

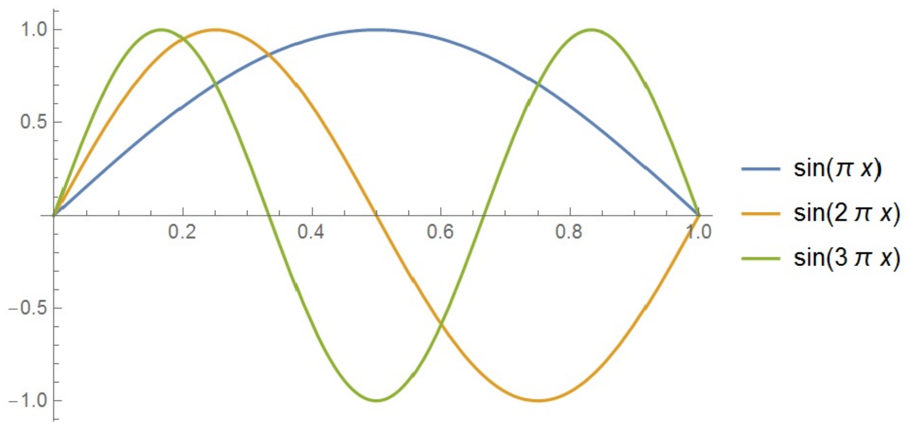
$$\begin{aligned} C_1 = 0 \quad a \quad C_2 \sin(\sqrt{\lambda}) &= 0 \\ \sin(\sqrt{\lambda}) &= 0 \\ \sqrt{\lambda} &= k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \\ \lambda_k &= (k\pi)^2. \end{aligned}$$

Množina vlastních čísel je

$$\{\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, ...\},$$

a k nim náležející vlastní funkce jsou

$$\{\sin(\pi x), \sin(2\pi x), \sin(3\pi x), ...\}.$$



Obrázek 1: První 3 vlastní funkce

2. $\lambda = 0$, potom $k_{1,2} = 0$ a řešení je ve tvaru

$$y(x) = C_1 + C_2 x.$$

Po dosazení okrajových podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \cdot 0 \\ 0 &= C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že se $C_1 = 0$ a $C_2 = 0$. To ale znamená, že by vlastní funkce byla na celém intervalu $[0, 1]$ nulová, což nelze a úloha na vlastní čísla proto nemá řešení.

3. $\lambda < 0$, potom $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ a řešení je ve tvaru

$$y(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Po dosazení okrajových podmínek dostáváme

$$\begin{aligned}
0 &= C_1 + C_2 \\
0 &= C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 1} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 1} \\
0 &= -C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 1} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 1} \\
C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 1} &= C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 1} \\
-\sqrt{-\lambda}\cdot 1 &= \sqrt{-\lambda}\cdot 1,
\end{aligned}$$

což se ale rovná pouze tehdy, když $\lambda = 0$. Ale podle předpokladu je $\lambda < 0$ a úloha na vlastní čísla tedy nemá řešení.

Definice 2.2 : (Skalární součin) Pro dvě funkce $u, v \in C[\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ definujeme *skalární součin* následovně:

$$(u, v) := \int_\alpha^\beta u(x)\overline{v(x)}\, dx.$$

Řekneme, že funkce u, v jsou na sebe kolmé, jestliže

$$(u, v) = 0.$$

Příklad 2.2 : Například ukážeme, že funkce $u = \sin(\pi x)$ a $v = \sin(2\pi x)$ jsou na sebe kolmé na intervalu $(0, 1)$.
Skutečně

$$(u, v) = \int_0^1 \sin(\pi x) \cdot \sin(2\pi x)\, dx = \left[\frac{\sin(\pi x)}{2\pi} - \frac{\sin(3\pi x)}{6\pi}\right]_0^1 = 0.$$

Definice 2.3 : (Sturm-Liouvilleův operátor) Předpokládáme, že na intervalu (α, β) jsou funkce $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ spojité a $p(x) > 0$. Pokud je operátor L ve tvaru

$$L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x),$$

pak se nazývá *Sturm-Liouvilleův operátor* a Sturm-Liouvilleova úloha na vlastní čísla operátoru L má tvar

$$L\phi = -\lambda\phi \tag{3}$$

neboli

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi}{dx}\right) + q(x)\phi + \lambda\phi = 0. \tag{4}$$

Věta 2.2 : (Lagrangeova a Greenova identita) Mějme funkce $u, v \in C^2[\alpha, \beta]$. Potom pro Sturm-Liouvilleův operátor platí Lagrangerova identita, tedy

$$uLv - vLu = [p(uv' - vu')]' \tag{5}$$

a Greenova identita

$$\int_{\alpha}^{\beta} (uLv - vLu)\, dx = [p(uv' - vu')]_{\alpha}^{\beta}. \tag{6}$$

Důkaz : Lagrangeova identita

$$\begin{aligned} uLv - vLu &= u\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + qv\right] - v\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu\right] \\ &= u\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) - v\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) \\ &= u\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - v\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) - p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}\left[pu\frac{dv}{dx} - pv\frac{du}{dx}\right]. \end{aligned}$$

Greenovu identitu lze snadno dokázat integrací Lagrangeovy identity.

Věta 2.3 : (Vlastnosti vlastních funkcí a vlastních čísel Sturm-Liouvilleeova operátoru) Nechť $L : M \to C[\alpha, \beta]$ je Sturmův-Liouvilleův operátor a

$$M := \{y(\cdot) \in C^2[\alpha, \beta] : y(\alpha) = 0 \quad a \quad y(\beta) = 0\}.$$

Potom platí:

(1) Všechna vlastní čísla operátoru L jsou reálná.

(2) Libovolné dvě vlastní funkce patřící ke stejnému vlastnímu číslu jsou lineárně závislé.

(3) Libovolné dvě vlastní funkce patřící k různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Důkaz :

(1) Předpokládejme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo operátoru L a $\phi(x) \in M$ je k němu náležící vlastní funkce. Tedy platí, že $L\phi = \lambda\phi$. Potom $\overline{\lambda}$ je také vlastní číslo operátoru L a $\overline{\phi(x)}$ je k němu příslušná vlastní funkce, protože

$$L\overline{\phi} = \overline{L\phi} = \overline{\lambda\phi} = \overline{\lambda}\,\overline{\phi}.$$

Z Greenovy identity (6) pro každé dvě funkcu $u, v \in M$ vyplývá, že

$$\int_\alpha^\beta u \cdot Lv\,dx - \int_\alpha^\beta v \cdot Lu\,dx = [p(uv' - vu')]_\alpha^\beta,$$

kde

$$\begin{aligned}[p(uv' - vu')]_\alpha^\beta = \; & p(\beta)(u(\beta)v'(\beta) - v(\beta)u'(\beta)) \\ & -p(\alpha)(u(\alpha)v'(\alpha) - v(\alpha)u'(\alpha)) = 0\end{aligned}$$

díky okrajovým podmínkám.

Neboli

$$\int_\alpha^\beta Lu \cdot v\,dx = \int_\alpha^\beta u \cdot Lv\,dx.$$

Do této rovnice dosadíme ϕ za u, $\overline{\phi}$ za v a dostáváme

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta L\phi \cdot \overline{\phi}\,dx &= \int_\alpha^\beta \phi \cdot L\overline{\phi}\,dx \\ \lambda \int_\alpha^\beta \phi \cdot \overline{\phi}\,dx &= \overline{\lambda} \int_\alpha^\beta \phi \cdot \overline{\phi}\,dx.\end{aligned}$$

Tedy

$$0 = (\lambda - \overline{\lambda}) \cdot \int_\alpha^\beta \phi \cdot \overline{\phi}\,dx = (\lambda - \overline{\lambda}) \cdot \int_\alpha^\beta |\phi|^2\,dx.$$

Z toho vidíme, že $(\lambda - \overline{\lambda}) = 0$, protože $\phi(x)$ je nenulová funkce a tedy $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) U druhého bodu provedeme důkaz sporem. Nechť $\phi_1(x), \phi_2(x) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ jsou dvě různé vlastní funkce příslušející jednomu vlastnímu číslu λ operátoru L a $W : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je Wronského determinant definovaný jako

$$W(x) := \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Z Lagrangeovy identity (5) dostáváme, že

$$0 = (\lambda\phi_1)\phi_2 - \phi_1(\lambda\phi_2) = L\phi_1 \cdot \phi_2 - \phi_1 \cdot L\phi_2 = -[p(\phi_1'\phi_2 - \phi_2'\phi_1)]' = [pW]'.$$

To tedy znamená, že pW je konstantní na intervalu $[\alpha, \beta]$ a protože jsou splněny okrajové podmínky, tak $W(\alpha) = 0$ a tím pádem je $p(x)W(x) = 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$, neboli $W(x) = 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$, protože $p(x) > 0$. Dokázali jsme, že $\phi_1(x)$ a $\phi_2(x)$ jsou lineárně závislé.

(3) Nechť jsou $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dvě různá vlastní čísla operátoru L a $\phi_1(x), \phi_2(x)$ jsou k nim příslušné vlastní funkce. Potom z Greenovy věty (6) plyne

$$\lambda_1(\phi_1, \phi_2) = (L\phi_1, \phi_2) = (\phi_1, L\phi_2) = \lambda_2(\phi_1, \phi_2).$$

Tudíž $(\lambda_1 - \lambda_2)(\phi_1, \phi_2) = 0$ a protože $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak $(\phi_1, \phi_2) = 0$ a to znamená, že vlastní funkce ϕ_1 je kolmá na vlastní funkci ϕ_2.

Věta 2.4 : Jakýkoliv lineární diferenciální operátor druhého řádu ve tvaru (2), pro který platí $a_2(x) \neq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$, lze převést na Sturm-Liouvilleův operátor.

Důkaz : Větu dokážeme přímým důkazem. Našim cílem je ukázat, že vždy můžeme převést rovnici (1) do tvaru

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = g(x).$$

Nejprve rovnici (1) vydělíme $a_2(x)$,

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = \frac{f(x)}{a_2(x)}.$$

Vynásobíme obě dvě strany rovnice nenulovou funkcí $\mu(x)$,

$$\mu(x)y'' + \mu(x)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \mu(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = \mu(x)\frac{f(x)}{a_2(x)}.$$

Zvolíme

$$\mu'(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\mu(x).$$

Po vyřešení této diferenciální rovnice nám vyjde, že

$$\mu(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\,dx}.$$

Nyní můžeme přepsat okrajovou úlohu jako

$$(\mu(x)y')' + \mu(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = \mu(x)\frac{f(x)}{a_2(x)},$$

z čehož vidíme, že

$$p(x) = \mu(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\,dx}, \quad q(x) = p(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)} \quad a \quad g(x) = p(x)\frac{f(x)}{a_2(x)}.$$

Rayleighův podíl

Rayleighův podíl je velice užitečný hlavně pro odhad vlastní čísel. Začneme Sturm-Liouvilleovou úlohou na vlastní čísla (3) pro n-té vlastní číslo λ_n a k němu náležící vlastní funkci ϕ_n:

$$L\phi_n = -\lambda_n\phi_n.$$

Po vynásobení obou dvou stran funkcí ϕ_n a zintegrování dostáváme:

$$\int_\alpha^\beta \left[\phi_n\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi_n}{dx}\right) + q\phi_n^2\right]\,dx = -\lambda_n\int_\alpha^\beta \phi_n^2\,dx.$$

A tedy pro λ_n vyplývá, že

$$\lambda_n = -\frac{\int_\alpha^\beta \left[\phi_n\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi_n}{dx}\right) + q\phi_n^2\right]\,dx}{\int_\alpha^\beta \phi_n^2\,dx}$$

Integrací per-partes dostaneme rovnost

$$\int_\alpha^\beta \phi_n\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi_n}{dx}\right)\,dx = \left[p\phi_n\frac{d\phi_n}{dx}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta p\left(\frac{d\phi_n}{dx}\right)^2\,dx$$

a po dosazení tohoto výrazu do vztahu pro λ_n získáme Rayleighův podíl

$$\lambda_n = \frac{-\left[p\phi_n\frac{d\phi_n}{dx}\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \left[p\left(\frac{d\phi_n}{dx}\right)^2 - q\phi_n^2\right]\,dx}{\int_\alpha^\beta \phi_n^2\,dx}. \tag{7}$$

Jednou z významných vlastností vlastních čísel Sturm-Liouvillova operátoru je, že je lze seřadit a platí: $\lambda_n < \lambda_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Zároveň existuje nejmenší vlastní číslo λ_1 a pro toto číslo platí

$$\lambda_1 = \min_{z(x)\in M} \frac{-\left[pz\frac{dz}{dx}\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \left[p\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - qz^2\right]\,dx}{\int_\alpha^\beta z^2\,dx},$$

kde
$$M := \{y(\cdot) \in C^2[\alpha, \beta] : y(\alpha) = 0 \quad a \quad y(\beta) = 0\}.$$
Protože pro funkci $z(x) \in M$ platí $z(\alpha) = z(\beta) = 0$, dostaneme
$$\lambda_1 = \min_{z(x) \in M} \frac{\int_\alpha^\beta \left[p \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 - qz^2 \right] dx}{\int_\alpha^\beta z^2 \, dx}.$$
Tohoto minima dosáhneme, pokud za $z(x)$ dosadíme vlastní funkci náležící k prvnímu, nejmenšímu vlastnímu číslu $\phi_1(x)$. Viz [4].
Můžeme navíc shora odhadnout nejmenší vlastní číslo využitím testovacích spojitých funkcí $z(x) \in M$, které splňují okrajové podmínky, i když nejsou nutně řešením zadané okrajové úlohy (1).

3 Úloha na vlastní čísla ve dvou dimenzích

Následující kapitola vychází z [1], [2] a [6].
Mějme následující úlohu na vlastní čísla Laplaceova operátoru:
$$-\Delta v(x) = \lambda v(x) \,, \quad x = [x_1, x_2] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{8}$$
kde funkce v splňuje okrajové podmínky $\forall x \in \partial\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Okrajové podmínky mají nejčastěji jeden z následujících tvarů:

- *Dirichletovy:* $v(x) = 0$,
- *Neumannovy:* $\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x) = \nabla v(x) \cdot \vec{n} = 0$.

V následujícím textu budeme všude předpokládat Dirichletovy okrajové podmínky.
Definice 3.1 : (Skalární součin ve dvou dimenzích) Pro dvě funkce $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ definujeme *skalární součin* následovně:
$$(u, v) := \int_\Omega u(x)v(x) \, dx.$$

Věta 3.1 : (Věta o divergenci) Nechť je Ω souvislá, otevřená množina s kladně orientovanou, po částech hladkou, jednoduchou a uzavřenou hranicí $\partial\Omega$, a nechť mají složky vektorové funkce $\vec{F}(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$ spojité parciální derivace. Potom platí
$$\int_\Omega \nabla \cdot \vec{F} \, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds \tag{9}$$

Větu i s jejím důkazem je možné najít v [5].

Věta 3.2 : Mějme úlohu na vlastní čísla (8). Pro jakékoliv okrajové podmínky uvedené výše platí:

(1) Všechna vlastní čísla jsou reálná.

(2) Všechny vlastní funkce lze zvolit jako reálné.

(3) Vlastní funkce příslušné k různým vlastní číslům jsou navzájem ortogonální.

(4) Všechny vlastní funkce mohou být zvoleny jako ortogonální využitím Gram-Schmidtova procesu.

Důkaz : Důkazy bodů 1 a 3 jsou obdobné jako důkaz věty 2.3 v první kapitole. Důkazy bodů 2 a 4 lze dohledat v [6].

Věta 3.3 : Pro úlohu na vlastní čísla (8) platí, že všechna vlastní čísla jsou kladná, jsou-li splněny Dirichletovy okrajové podmínky.

Důkaz : Nechť v je vlastní funkce náležící vlastnímu číslu λ. Potom

$$\begin{aligned}\lambda \int_\Omega v^2\,dx &= -\int_\Omega (\Delta v) v\,dx = -\int_\Omega (\nabla \cdot \nabla v) v\,dx \\ &= \int_\Omega |\nabla v|^2 - [(\nabla \cdot \nabla v) v + |\nabla v|^2]\,dx = \int_\Omega |\nabla v|^2 - [\nabla \cdot (v \nabla v)]\,dx\end{aligned}$$

Aplikujeme větu o divergenci 3.1, okrajovou podmínku $v = 0$ na $\partial\Omega$ a dostáváme

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v|^2 - [\nabla \cdot (v\nabla v)]\,dx &= \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_{\partial\Omega} v \nabla v \cdot \vec{n}\,ds \\ &= \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\,ds \\ &= \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx.\end{aligned}$$

To tedy znamená, že

$$\lambda \int_\Omega v^2\,dx = \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \geq 0.$$

Dále chceme ukázat, že platí

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx > 0.$$

Předpokládejme tedy, že $\int_\Omega |\nabla v|^2 dx = 0$. Potom $|\nabla v| = 0$. To tedy znamená, že v je konstantní na Ω. Díky Dirichletovým okrajovým podmínkám víme, že $v = 0$ na $\partial\Omega$, to znamená, že $v \equiv 0$, což je spor, protože vlastní funkce nemůže být identicky nulová. Tedy

$$\lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx}{\int_\Omega v^2 \, dx} > 0.$$

Rayleighův podíl

Mějme zadanou úlohu (8) a homogenní Dirichletovy okrajové podmínky. Nechť $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ jsou vlastní čísla této úlohy. Pro danou funkci w definovanou na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definujeme Rayleighův podíl funkce w na Ω jako

$$\frac{\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|w\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx}{\int_\Omega w^2 \, dx}. \tag{10}$$

Věta 3.4 : Nechť

$$Y \equiv \{w : w \in C^2(\Omega), w \not\equiv 0, w = 0 \text{ pro } x \in \partial\Omega\}$$

je množina testovacích funkcí pro úlohu (8). Předpokládejme, že v této množině existuje testovací funkce u taková, že minimalizuje Rayleigheův podíl, tedy

$$m \equiv \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} = \inf_{w \in Y} \left\{ \frac{\|\nabla w\|^2}{\|w\|^2} \right\}.$$

Potom $m = \lambda_1$ a u je k němu příslušná vlastní funkce.

Důkaz : Nechť u je funkce, která minimalizuje Rayleigheův podíl a

$$m \equiv \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \, dx}.$$

Mějme funkci $v \in Y$ a položíme

$$f(\varepsilon) \equiv \frac{\int_\Omega |\nabla(u + \varepsilon v)|^2 \, dx}{\int_\Omega (u + \varepsilon v)^2 \, dx}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Protože u minimalizuje Rayleigheův podíl, pak pro f musí platit, že $f'(0) = 0$. Zderivováním funkce f dostáváme

$$\begin{aligned} f'(\epsilon) \;\; &= \frac{\left(\int_\Omega (u + \epsilon v)^2 \, dx\right) \left(2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \epsilon |\nabla v|^2 \, dx\right)}{\left(\int_\Omega (u + \epsilon v)^2 \, dx\right)^2} \\ &\quad - \frac{\left(\int_\Omega 2(u + \epsilon v) v \, dx\right) \left(\int_\Omega |\nabla(u + \epsilon v)|^2 \, dx\right)}{\left(\int_\Omega (u + \epsilon v)^2 \, dx\right)^2} \end{aligned}$$

a z toho

$$f'(0) = \frac{\left(\int_\Omega u^2\,dx\right)\left(2\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx\right) - \left(2\int_\Omega uv\,dx\right)\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)}{\left(\int_\Omega u^2\,dx\right)^2}.$$

Protože tento výraz se rovná nule, můžeme psát

$$\left(\int_\Omega u^2\,dx\right)\left(\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx\right) = \left(\int_\Omega uv\,dx\right)\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right).$$

Z čehož plyne

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx &= \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx}\int_\Omega uv\,dx\\ &= m\int_\Omega uv\,dx\end{aligned}$$

Po aplikaci věty o divergenci 3.1 dostáváme

$$-\int_\Omega (\Delta u)v\,dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}v\,ds = m\int_\Omega uv\,dx.$$

Protože $v = 0$ na $\partial\Omega$, je integrál po hranici množiny Ω nulový. Získáme tedy

$$-\int_\Omega (\Delta u)v\,dx = m\int_\Omega uv\,dx.$$

Protože tato rovnost platí pro každou funkci $v \in Y$, můžeme tvrdit, že

$$-\Delta u = mu,$$

což znamená, že funkce u je vlastní funkce úlohy (8) s příslušným vlastním číslem m. Poslední co zbývá, je ukázat, že m je nejmenší vlastní číslo. Uvažujme tedy jinou vlastní funkci v úlohy (8) s příslušným vlastním číslem λ_v. Potřebujeme ukázat, že $\lambda_v \geq m$. Využijeme toho, že u minimalizuje Rayleigeův podíl a platí věta o divergenci 3.1

$$m = \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} \leq \frac{\|\nabla v\|^2}{\|v\|^2} = \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx}{\int_\Omega v^2\,dx} = \frac{-\int_\Omega (\Delta v)v\,dx}{\int_\Omega v^2\,dx} = \frac{\lambda_v\int_\Omega v^2\,dx}{\int_\Omega v^2\,dx} = \lambda_v.$$

Další větu uvedeme bez důkazu, který je zpracovaný v [4].

Věta 3.5 : Nechť v_i, $i = 1,\ldots,n-1$ je prvních $n-1$ vlastních funkcí úlohy (8). Bez ztráty na obecnosti mohou být tyto funkce zvoleny jako ortogonální. Mějme

$$Y_n \equiv \{w : w \in C^2(\Omega), w \not\equiv 0, w = 0\,\forall x \in \partial\Omega,\ \langle w, v_i\rangle = 0 \text{ pro } i = 0,\ldots,n-1\}.$$

Předpokládejme, že existuje funkce $u_n \in Y_n$, která minimalizuje Rayleighův podíl přes funkce $w \in Y_n$. To znamená

$$m_n \equiv \frac{\|\nabla u_n\|^2}{\|u_n\|^2} = \min_{w \in Y_n} \left\{ \frac{\|\nabla w\|^2}{\|w\|^2} \right\}.$$

Potom m_n je n-té vlastní číslo úlohy (8), tedy $\lambda_n = m_n$ a u_n je k němu příslušná vlastní funkce.

Jak jsme již zmínili v předchozí kapitole, i ve dvou dimenzích je možné shora odhadnout hodnotu prvního vlastního čísla a přesnost tohoto odhadu závisí pouze na volbě pokusné funkce $w \in Y$.

Příklad 3.1 : Mějme danou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jako čtverec o rozměrech [0,1]x[0,1]. Použijeme testovací funkci $w(x_1, x_2) = x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)$, abychom odhadli první vlastní číslo úlohy (8) na tomto čtverci.

$$\begin{aligned}
\frac{\|\nabla w\|^2}{\|w\|^2} &= \frac{\int_\Omega |\nabla w(x_1, x_2)|^2\, dx}{\int_\Omega w^2(x_1, x_2)\, dx} \\
&= \frac{\int_0^1 \int_0^1 x_2^2(1-x_2)^2(1-2x_1)^2 + x_1^2(1-x_1)^2(1-2x_2)^2\, dx_1 dx_2}{\int_0^1 \int_0^1 x_1^2(1-x_1)^2 x_2^2(1-x_2)^2\, dx_1 dx_2} \\
&= \frac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{900}} = 20.
\end{aligned}$$

Víme, že první vlastní funkce úlohy (8) na množině Ω je $\phi_1(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \cdot \sin(\pi x_2)$ [9]. Po dosazení této funkce do Rayleighova podílu nám vyjde hodnota prvního vlastního čísla $\lambda_1 = 19,7392$.

4 Faber-Krahnova nerovnost

V následující kapitole si představíme a dokážeme Faber-Krahnovu nerovnost, která ukazuje, že nejmenší první vlastní číslo úlohy (8) s Dirichletovými okrajovými podmínkami na množinách $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ stejné míry dostaneme, pokud je Ω kruh. Nejprve ale musíme zadefinovat některé pojmy a zformulovat věty, které se objevují v jejím důkazu. Jako zdroj jsme použili [8].

Definice 4.1 : (Radiální funkce) Funkce $f(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je *radiální*, jestliže její funkční hodnota v daném bodě závisí pouze na vzdálenosti tohoto bodu od počátku, tedy

$$f(x_1, x_2) = \varphi(r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

kde φ je funkce o proměnné r a $r \geq 0$.

Věta 4.1 : (Co-area formula) Nechť je funkce $u(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Lipschitzovská a pro $r \in \mathbb{R}$ je hladina $u(x) = r$ skoro všude hladká křivka v $\mathbb{R}$. Předpokládejme dále, že funkce $f(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá a integrovatelná. Potom platí

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) |\nabla u(x)| \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{u(x)=r} f(x) \, ds \right) dr$$

Viz [10].

Věta 4.2 : (Courant nodal domain theorem) Nechť je $\Omega \in \mathbb{R}^2$ souvislá množina, u je vlastní funkce úlohy (8) na množině Ω a λ_u je k ní příslušné vlastní číslo. Potom platí,

$$\mu(u) \leq n(\lambda_u, \Omega),$$

kde $n(\lambda_u, \Omega)$ je počet vlastní čísel menších nebo rovno λ_u a $\mu(u)$ je počet nodálních množin funkce u. Viz [11].

Věta 4.3 : (Izometrická nerovnost) Mějme množinu $\Omega \in \mathbb{R}^2$, její obsah $S(\Omega)$ a její obvod $O(\Omega)$. Dále mějme kruh B_1 o poloměru $r = 1$ a jeho obsah $S(B_1)$. Potom platí

$$O(\Omega) \geq 2\sqrt{S(\Omega) S(B_1)}.$$

Viz [3].

Věta 4.4 : (Faber-Krahnova nerovnost) Mějme omezenou množinu $D \subset \mathbb{R}^2$ a kruh $B \subset \mathbb{R}^2$ se stejným obsahem jako D a se středem v počátku. Nechť $\lambda_1(D)$ je první vlastní číslo Laplaceovy úlohy (8) s Dirichletovými okrajovými podmínkami na množině D a $\lambda_1(B)$ je první vlastní číslo té samé úlohy na kruhu B. Potom platí, že

$$\lambda_1(B) \leq \lambda_1(D)$$

a rovnost nastává pouze, pokud se $B = D$.

Důkaz: Podle věty 3.4 platí, že

$$\lambda_1(D) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} \right\} = \inf \left\{ \frac{\int_D |\nabla u|^2 \, dx}{\int_D u^2 \, dx} \right\}, \tag{11}$$

kde $u \in C_0^2(D)$ jsou testovací funkce. Podle věty 4.2 si můžeme zvolit testovací funkci u nezápornou. Pro funkci u je D nodální množina, na které nabývá svého maxima. Dále mějme pro $0 \leq t \leq \widehat{u} = \max\{u\}$ množinu $D_t = \{[x_1, x_2] \in D : u(x_1, x_2) > t\}$ a kruh B_t, který je umístěný do počátku, a platí že $S(B_t) = S(D_t)$. Nyní zadefinujeme radiální porovnávací funkci $u_* : B \to [0, \infty]$ tak, aby platilo, že $B_t = \{[x_1, x_2] \in B : u_*(x_1, x_2) > t\}$. Tedy také $\max\{u_*\} = \widehat{u}$.

Podle věty 4.1 zároveň platí

$$\int_t^{\widehat{u}} \int_{\partial D_\tau} \frac{ds}{|\nabla u|} d\tau = \iint\limits_{D_t} 1 \, dx = S(D_t) = S(B_t) = \iint\limits_{B_t} 1 \, dx = \int_t^{\widehat{u}} \int_{\partial B_\tau} \frac{ds}{|\nabla u_*|} d\tau.$$

Po derivaci vzhledem k t dostáváme

$$\int_{\partial D_t} \frac{ds}{|\nabla u|} = \int_{\partial B_t} \frac{ds}{|\nabla u_*|} \tag{12}$$

pro všechna t. A tedy z věty 4.1 plyne

$$\int_D u^2 dx = \int_0^{\widehat{u}} \int_{\partial D_t} \frac{u^2 ds}{|\nabla u|} dt = \int_0^{\widehat{u}} t^2 \int_{\partial D_t} \frac{ds}{|\nabla u|} dt = \int_0^{\widehat{u}} t^2 \int_{\partial B_t} \frac{ds}{|\nabla u_*|} dt = \int_B u_*^2 dx. \tag{13}$$

Nyní si pro $0 \leq t \leq \widehat{u}$ zadefinujeme funkce

$$\psi(t) = \int_{D_t} |\nabla u|^2 \, dx, \quad \psi_*(t) = \int_{B_t} |\nabla u_*|^2 \, dx,$$

a podle věty 4.1 zároveň platí, že

$$\psi(t) = \int_t^{\widehat{u}} \left(\int_{u(x)=t} |\nabla u| \, ds \right) dt, \quad \psi_*(t) = \int_t^{\widehat{u}} \left(\int_{u_*(x)=t} |\nabla u_*| \, ds \right) dt,$$

tedy

$$\psi'(t) = -\int_{\partial D_t} |\nabla u| \, ds \quad \text{a} \quad \psi_*'(t) = -\int_{\partial B_t} |\nabla u_*| \, ds.$$

Použijeme Cauchy-Schwarzovu nerovnost

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g),$$

kde za funkci f dosadíme $\sqrt{|\nabla u|}$, za funkci g $\sqrt{\frac{1}{|\nabla u|}}$ a dostáváme

$$\left(\int_{\partial D_t} |\nabla u|\, ds\right)\left(\int_{\partial D_t} \frac{ds}{|\nabla u|}\right) \geq \left(\int_{\partial D_t} 1\, ds\right)^2 = (S(\partial D_t))^2.$$

Stejný postup použijeme i u B_t a navíc využijeme fakt, že normálová derivace u_* je na ∂B_t konstantní. To znamená, že funkce $f = \sqrt{|\nabla u_*|}$ a $g = \sqrt{\frac{1}{|\nabla u_*|}}$ jsou lineárně závislé a v Cauchy-Schwarzově nerovnosti nastane rovnost. Dostáváme

$$(S(\partial B_t))^2 = \left(\int_{\partial B_t} 1\, ds\right)^2 = \left(\int_{\partial B_t} |\nabla u_*|\, ds\right)\left(\int_{\partial B_t} \frac{ds}{|\nabla u_*|}\right).$$

Po aplikaci věty o izometrické nerovnosti 4.3 vidíme

$$\begin{aligned} (S(\partial D_t))^2 &\geq (S(\partial B_t))^2, \\ \left(\int_{\partial D_t} |\nabla u|\, ds\right)\left(\int_{\partial D_t} \frac{ds}{|\nabla u|}\right) &\geq \left(\int_{\partial B_t} |\nabla u_*|\, ds\right)\left(\int_{\partial B_t} \frac{ds}{|\nabla u_*|}\right). \end{aligned}$$

Využijeme vztah (12) a dostaneme

$$-\psi' = \int_{\partial D_t} |\nabla u|\, ds \geq \int_{\partial B_t} |\nabla u_*|\, ds = -\psi'_*.$$

Protože se $\psi(\widehat{u}) = 0 = \psi'(\widehat{u})$, tak nám po zintegrování této nerovnosti vyjde

$$\begin{aligned} -[\psi(\widehat{u}) - \psi(0)] &\geq -[\psi_*(\widehat{u}) - \psi_*(0)] \\ \int_D |\nabla u|^2\, dx = \psi(0) &\geq \psi_*(0) = \int_B |\nabla u_*|^2\, dx \end{aligned}.$$

Pokud zkombinujeme tento vztah s (13), dostaneme

$$\frac{\int_D |\nabla u|^2\, dx}{\int_D u^2\, dx} \geq \frac{\int_B |\nabla u_*|^2\, dx}{\int_B u_*^2\, dx}$$

neboli podle (11)

$$\lambda_1(D) \geq \lambda_1(B).$$

Navíc k rovnosti vlastní čísel dojde pouze tehdy. pokud budou D_t kruhy umístěné do středu a $|\nabla u|$ bude konstantní na ∂D_t. Jinými slovy musí být u také radiální a to tedy znamená, že $u = u_*$.

5 Závislost prvního vlastního čísla na oblasti

Nyní budeme porovnávat první vlastní číslo úlohy (8) s Dirichletovými okrajovými podmínkami na různých oblastech Ω. K výpočtu použijeme program Wolfram Mathematica a předpis pro první vlastní funkce $\phi(x_1, x_2)$ jsem získali v [9]. Množiny Ω z následujících 4 příkladů mají stejný obsah $S(\Omega) = \pi$.

Kruh

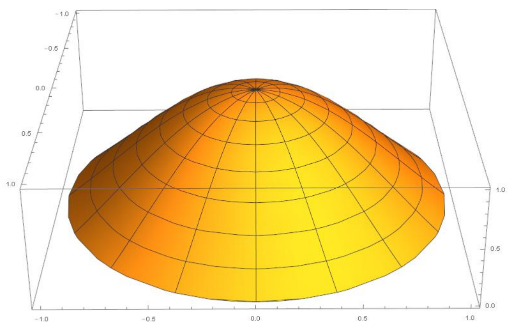
```
R = 1;
kruh1[r_, phi_] := BesselJ[0, 2.4048 r] * Cos[0 * phi]
vckruh1 =
 Simplify[Integrate[(D[kruh1[r, phi], r])^2 + (D[kruh1[r, phi], phi])^2,
    {r, 0, R}, {phi, 0, 2 Pi}] /
   Integrate[(kruh1[r, phi])^2, {r, 0, R}, {phi, 0, 2 Pi}]]
kruh1obr = RevolutionPlot3D[kruh1[r, phi], {r, -R, R}, {phi, 0, 2 Pi}]
```

Obrázek 2: Ukázka kódu z programu Wolfram Mathematica

Příklad 5.1 : Mějme množinu Ω danou jako kruh o poloměru $R = 1$ se středem v počátku. První vlastní funkce úlohy (8) na této množině je

$$\phi_1(r, \varphi) = J_0(2,4048 \cdot r) \cos(0 \cdot \varphi),$$

kde J_0 je Besselova funkce prvního řádu.

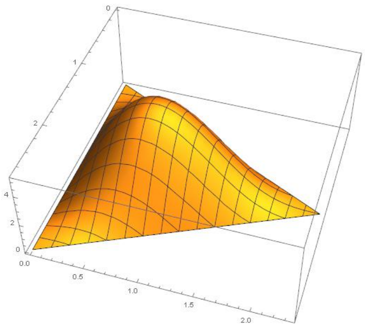


Obrázek 3: Graf $\phi_1(r, \varphi)$ na kruhu se středem v počátku a poloměrem $R = 1$

Po dosazení do (11) nám vyjde první vlastní číslo $\lambda_1 \doteq 2,49113$ a podle věty o Faber-Krahnovi nerovnosti 4.4 je toto hodnota menší než na čtverci nebo obdélníku o stejné ploše.

Příklad 5.2 : Ω je rovnoramenný trojúhelník o straně $a = \frac{2\sqrt{Pi}}{\sqrt[4]{3}}$. První vlastní funkce úlohy (8) na této množině je

$$\phi_1(x_1, x_2) = 4 \sin\left(\frac{\sqrt{\pi} x_2}{\sqrt[4]{3}}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\sqrt{\pi} x_2}{\sqrt[4]{3}}\right) - \cos\left(\sqrt[4]{3}\sqrt{\pi} x_2\right)\right).$$

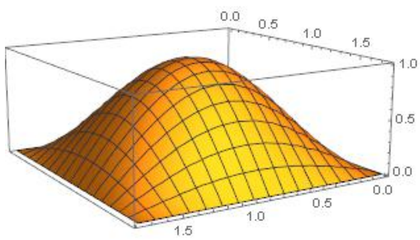


Obrázek 4: Graf $\phi_1(x_1, x_2)$ na množině Ω

Po dosazení do (11) nám vyjde první vlastní číslo $\lambda_1 = \frac{4\pi}{3} \doteq 7,2552$.

Příklad 5.3 : Mějme množinu $\Omega = [0, \sqrt{\pi}] \times [0, \sqrt{\pi}]$. První vlastní funkce úlohy (8) na této množině je

$$\phi_1(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{\sqrt{\pi}}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x_2}{\sqrt{\pi}}\right).$$

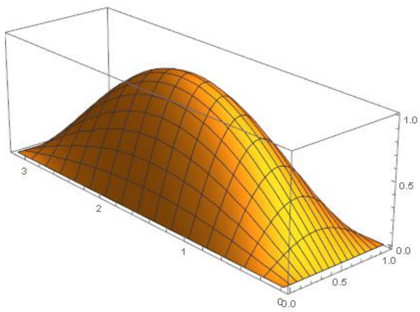


Obrázek 5: Graf $\phi_1(x_1, x_2)$ na množině $\Omega = [0, \sqrt{\pi}] \times [0, \sqrt{\pi}]$

Po dosazení do (11) nám na čtverci o obsahu $S(\Omega) = \pi$ vyjde první vlastní číslo $\lambda_1 = 2\pi \doteq 6,28319$.

Příklad 5.4 : Nyní mějme množinu $\Omega = [0,1] \times [0,\pi]$, tedy obdélník. První vlastní funkce úlohy (8) na této množině je

$$\phi_1(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \cdot \sin(x_2).$$



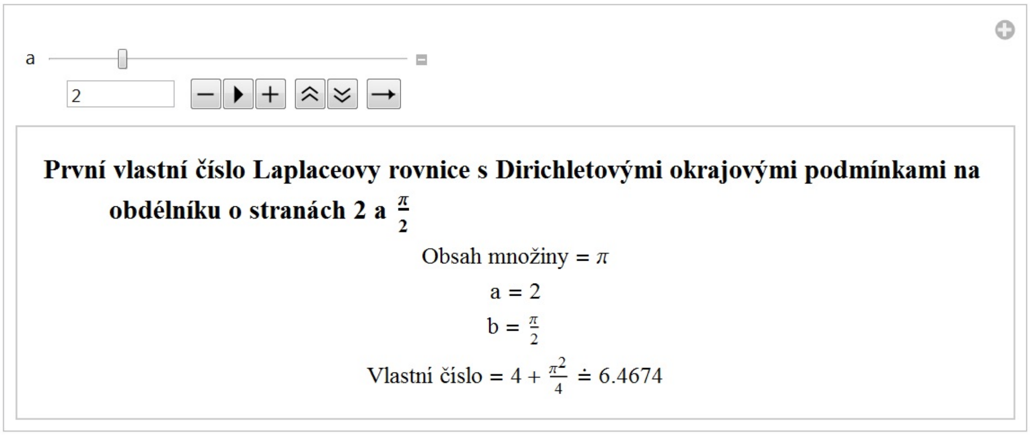
Obrázek 6: Graf $\phi_1(x_1, x_2)$ na množině $\Omega = [0,1] \times [0,\pi]$

Po dosazení do (11) nám vyjde na obdélníku první vlastní číslo $\lambda_1 = 1 + \pi^2 \doteq 10{,}8696$.

Jak je vidět na předchozích příkladech, na obdélníku nám vyšlo první vlastní číslo λ_1 úlohy (8) největší. S pomocí programu Wolfram Mathematica a funkce Manipulate můžeme sledovat, jak se mění první vlastní číslo λ_1 na obdélníku o různých stranách ale o stále stejném obsahu $S(\Omega) = \pi$.

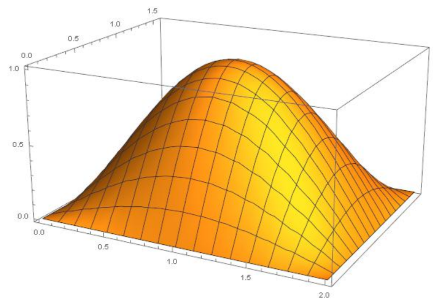
```
Manipulate[b = Pi / a;
 u[x1_, x2_] := Sin[π x1/a] * Sin[π x2/b];
 vc = Simplify[Integrate[(D[u[x1, x2], x1])^2 + (D[u[x1, x2], x2])^2, {x1, 0, a}, {x2, 0, b}] /
    Integrate[(u[x1, x2])^2, {x1, 0, a}, {x2, 0, b}]];

 Column[
  {Text[
    Style[
     Row[
      {"První vlastní číslo Laplaceovy rovnice s Dirichletovými okrajovými podmínkami na
         obdélníku o stranách ", a, " a " , b}], Bold, 15]],
   Text[Row[{"Obsah množiny = ", Pi}]],
   Text[Row[{"a = ", a}]],
   Text[Row[{"b = ", b}]],
   Text[Row[{"Vlastní číslo = ", vc, " ≐ ", N[vc]}]],
   (*Graphics[{Gray,Rectangle[{0,0},{a,b}]},Axes→True,AxesLabel→{"a","b"}],*)
   Plot3D[u[x1, x2], {x1, 0, a}, {x2, 0, b}, BoxRatios → Automatic, PlotRange → Full]}, Center], {{a, 1}, 0, 10}]
```

Obrázek 7: Ukázka kódu z programu Wolfram Mathematica s funkcí Manipulate



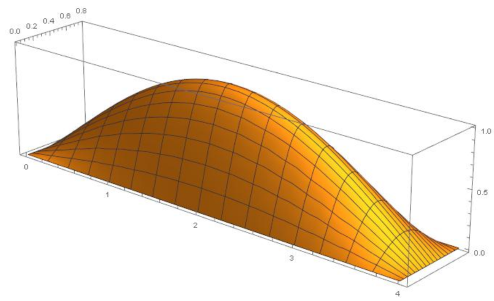
Obrázek 8: Ukázka výstupu z programu Wolfram Mathematica s funkcí Manipulate

Příklad 5.5 : Ω je obdélník o stranách $a = 2$ a $b = \frac{\pi}{2}$ a vlastní číslo po dosazení do (11) vyjde $\lambda_1 = 6,4674$.



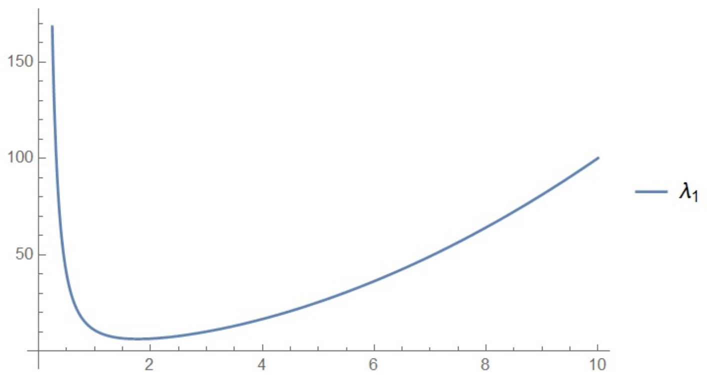
Obrázek 9: Graf $\phi_1(x_1, x_2)$ na množině $\Omega = [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

Příklad 5.6 : Ω je obdélník o stranách $a = 4$ a $b = \frac{\pi}{4}$ a vlastní číslo po dosazení do (11) vyjde $\lambda_1 = 16,61694$. Nejmenší vlastní číslo na



Obrázek 10: Graf $\phi_1(x_1, x_2)$ na množině $\Omega = [0,4] \times [0, \frac{\pi}{4}]$

Příklad 5.7 : Uvažujme $\Omega(k)$ jako obdélník o stranách $a = k$ a $b = \frac{\pi}{k}$, kde $k \in \mathbb{R}^+$. Potom po dosazení do (11) dostaneme funkci $\lambda_1(\Omega(k)) = k^2 + \left(\frac{\pi}{k}\right)^2$, která popisuje velikost prvního vlastního čísla $\lambda_1(\Omega(k))$ úlohy (8) na množině $\Omega(k)$, kde $S(\Omega(k)) = \pi$. Tato funkce nabývá svého minima, když $k = \sqrt{\pi}$ a vidíme tedy, že nejmenšího čísla λ_1 dosáhneme, pokud $a = b = \sqrt{\pi}$ a $\Omega(k)$ je čtverec.



Obrázek 11: Graf velikosti prvního vlastního čísla λ_1 na obdélníku Ω o stranách k a $\frac{\pi}{k}$

6 Závěr

Zjistili jsme, že při hledání prvního vlastního čísla Laplaceova operátoru je velice důležitá dimenze. Zatímco v jedné dimenzi se jedná téměř o triviální příklad, vyřešitelný snadno v ruce, ve dvou dimenzích se tento problém značně zkomplikoval. Díky Rayleighovo podílu jsem ale schopní první vlastní čísla celkem dobře odhadnout. Určitě by bylo zajímavé zpracovat, jak by tato problematika vypadala například ve třech dimenzích. Faber-Krahnova nerovnost nám potvrdila intuitivní představu, že nejefektivnější množina pro řešení úlohy na vlastní čísla Laplaceova operátoru je kruh a co víc, ukázalo se, že k čím větší deformaci kruhu dochází, tím větší je i samotné vlastní číslo. Jedna z možností, jak lze tuto práci v budoucnu rozšířit je zpracovat postup hledání dalších vlastních funkcí a čísel.

Reference

[1] Benguria, Rafael D. (2001) [1994], "Dirichlet eigenvalues", in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics, Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers, ISBN 978-1-55608-010-4.

[2] Benguria, Rafael D. "Rayleigh-Faber-Krahn inequality". Encyclopaedia of Mathematics. SpringerLink. Retrieved 6 November 2011.

[3] Burago (2001) [1994], "Isoperimetric inequality", in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics, Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer

[4] Drábek, P; Milota, J ,"Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations", Springer Science & Business Media, 2007, ISBN 3764381477

[5] Fleming, WH; Rishel, R (1960), "An integral formula for the total gradient variation"(PDF), Archiv der Mathematik, 11 (1): 218–222, doi:10.1007/BF01236935

[6] Strauss, Walter A. "Partial Differential Equations: An Introduction", 2 vyd, Wiley, 2007, 0470054565"

[7] Hazewinkel, Michiel, ed. (2001) [1994], "SturmLiouville theory", Encyclopedia of Mathematics, Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers, ISBN 978-1-55608-010-4

[8] http://www.math.uct.ac.za/sites/default/files/image_tool/images/32/Staff/Permanent_Academic/Dr_Jesse_Ratzkin/Miscellaneous_-Notes/faber-krahn.pdf

[9] https://arxiv.org/pdf/1206.1278.pdf

[10] https://www.uni-muenster.de/AMM/num/Vorlesungen/PDEI_SS14/material/PDEnotes.pdf

[11] https://www.math.uni-bielefeld.de/documenta/vol-09/16.pdf