Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Program: Matematika

Obor: Matematika a její aplikace

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Problémy Ramseyova typu na grafech

Autor: Ondřej Špaček
Vedoucí práce: Doc. Ing. Roman Čada, Ph.D.

Plzeň, 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury uvedené v seznamu, který je uveden na konci této práce.

V Plzni dne ....

podpis

Poděkování

Především bych chtěl poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce Doc. Ing. Romanu Čadovi, Ph.D. za spoustu času, který mi věnoval a cenné rady při řešení problémů spojených s vypracováním bakalářské práce.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá Ramseyovou teorií. Jsou zde shrnuty základní výsledky Ramseyovy teorie na grafech a online Ramseyovy teorie. V poslední kapitole se zabýváme horním odhadem online Ramseyova čísla pro sudé a liché kružnice.

Klíčová slova

Ramseyova teorie; online Ramseyova teorie; Ramseyovo číslo; online Ramseyovo číslo; odhady Ramseyových čísel; horní odhad online Ramseyových čísel kružnic.

Abstract

This bachelor thesis deals with Ramsey theory. There are summarized the basic results of Ramsey theory on graphs and online Ramsey theory. In the last chapter we are dealing with upper bound for online Ramsey numbers of even and odd cycles.

Keywords

Ramsey theory; online Ramsey theory; Ramsey number; online Ramsey number; bounds for Ramsey numbers; upper bound for Ramsey numbers of cycles.

Obsah

Úvod

Bertrand Russel a Alfred North Whitehead uvedli, ve svém společném díle *Principia Mathematica*, odvážnou myšlenku. Domnívali se, že celá matematika může být odvozena jen pomocí několika základních axiomů. Tuto myšlenku rozšířil německý matematik David Hilbert, který tvrdil, že existuje algoritmus pomocí, kterého lze rozhodnout o pravdivosti logických formulí. V článku „On a Problem of Formal Logic“, *Franc Plumpton Ramsey* ukázal, že pro speciální případ rozhodovací algoritmus existuje. Avšak o několik let později Kurt Gődel, Alan Turing, Alonzo Church a další ukázali, že v úplné obecnosti rozhodovací algoritmus neexistuje. Ramsey dokázal svou větu (Ramseyovu větu) jako první krok při snaze o dokázání speciálního případu. Jak se později ukázalo, Ramseyova věta byla v argumentaci nadbytečná a nemohl by ji použít při snaze o dokázání obecného případu. Stala se však základem Ramseyovy teorie. Tématu se dále nevěnovala moc pozornost, než v roce 1933 *Paul Erdős* a *George Szekeres* „znovuobjevili“ Ramseyovu teorii, která se později díky jejich popularizaci dostala do povědomí matematické komunity. Příkladem této popularizace jsou například problémy za několik dolarů, které Erdős vypisoval. Spousta z nich není do dneška vyřešena, viz [12]. Další historické informace jsou v článku od R. Grahama [14] a v natočené přednášce od J. Nešetřila [21], ze kterých bylo v této kapitole čerpáno.

Základní terminologie a značení

Graf je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je konečná množina vrcholů a E je množina hran taková, že $E \subseteq \binom{V}{2}$. Vrcholy budeme značit malými písmeny a hrany budeme značit dvojicí vrcholů, tj. hranu mezi vrcholy u a v označíme uv. Značením $V(G)$ resp. $E(G)$ se odkazujeme na množinu vrcholů resp. hran grafu G. *Řádem grafu* rozumíme počet jeho vrcholů a *velikostí grafu* počet jeho hran. Množinu vrcholů X v grafu G nazýváme *nezávislou množinou*, jestliže $X \subseteq V(G)$ a mezi žádnými dvěma vrcholy z X neexistuje v G hrana. Množinu vrcholů X v grafu G nazýváme *klikou*, jestliže $X \subseteq V(G)$ a mezi každými dvěma vrcholy z X existuje v G hrana. Graf H je *podgrafem* grafu G, pokud $V(H) \subset V(G)$ a $E(H) \subset E(G)$. Podgraf grafu G, který vznikne odstraněním jedné hrany $e \in E(G)$, budeme značit $G - e$. Řekneme, že H je *podgraf grafu G indukovaný množinou X*, jestliže G je graf, $V(H) = X \subseteq V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{X}{2}$. Stupeň vrcholu u je počet hran incidentních s tímto vrcholem, značíme $deg(u)$. *Maximální stupeň* v grafu G je $\Delta(G) = \max\{deg(u) \mid u \in V(G)\}$. Dva *grafy G a H jsou izomorfní*, jestliže existuje bijektivní zobrazení $\Phi : V(G) \to V(H)$ takové, že pro všechny vrcholy $u, v \in V(G)$ platí, že $uv \in E(G) \Leftrightarrow \Phi(u)\Phi(v) \in E(H)$. *Doplněk grafu G* je graf $\bar{G}$ takový, že $V(G) = V(\bar{G})$ a pro všechny vrcholy $u, v \in V(G)$ platí, že $uv \in E(G) \Leftrightarrow uv \notin E(\bar{G})$. *Přípustným obarvením vrcholů* grafu G nazveme zobrazení $c : V(G) \to \mathbb{N}$, jestliže pro všechny hrany $uv \in E(G)$ platí, že $c(u) \neq c(v)$. Graf G nazýváme *vrcholově k-obarvitelný*, jestliže pro něj existuje přípustné obarvení vrcholů k barvami. Libovolné zobrazení $c : E(G) \to \{1, \dots, k\}$ nazveme *k-obarvením hran* grafu G.

Nakreslení grafu je rovinné, jestliže se v něm žádně hrany nekříží. Graf nazveme *rovinný*, jestliže pro něj existuje rovinné nakreslení. Nechť G je rovinný graf s daným rovinným nakreslením. Uvažujeme-li množinu bodů roviny, které neleží v žádném oblouku nakreslení grafu G, potom se tato množina „rozpadne“ na několik souvislých oblastí. Těmto oblastem říkáme *stěny grafu G* daného rovinného nakreslení. Jediné neomezené oblasti říkáme *vnější stěna* a všem ostatním oblastem říkáme *vnitřní stěny*.

Úplný graf na n vrcholech je $K_n = (\{1, \dots, n\}, \binom{n}{2})$. *Úplný bipartitní* *graf* $K_{m,n}$ je graf, pro který existuje rozklad množiny vrcholů na dvě disjunktní množiny (jedna velikosti m a jedna velikosti n) tak, že každá dvojice vrcholů z různých množin je spojena hranou a žádná dvojice vrcholů ze stejné množiny není spojena hranou. *Cesta* na n vrcholech je graf $P_n = (\{1, \dots, n\}, E)$, kde $E = \{ii+1 \mid 1 \leq i < n\}$. *Kružnice* na $n \geq 3$ vrcholech je graf $C_n = (\{1, \dots, n\}, E)$, kde $E = \{ii+1 \mid 1 \leq i < n\} \cup 1n$. Pro sudé resp. liché n nazýváme C_n sudá resp. lichá kružnice. *Stromem* rozumíme souvislý graf bez kružnic a *lesem* nesouvislý graf, jehož komponenty jsou stromy.

Kapitola 1

Ramseyova teorie

1.1 Motivace

The Party Problem. *Každý graf* $G = (V, E)$*, kde* $|V| = 6$*, obsahuje buď* K_3*, nebo nezávislou množinu vrcholů s* 3 *prvky.*

Důkaz. Zvolme libovolně $v_0 \in V$, označme $V_0 = V \setminus \{v_0\}$ a definujme rozklad $V_0 = A \cup B$ takový, že $A = \{v \in V_0 \mid vv_0 \notin E\}$ a $B = \{v \in V_0 \mid vv_0 \in E\}$. Potom buď $|A| \geq 3$, nebo $|B| \geq 3$.

1. Je-li $|A| \geq 3$, potom rozlišíme dvě možnosti. Graf indukovaný množinou A buď obsahuje K_3, nebo v něm existují dva vrcholy x, y, které nejsou spojené hranou. Platí-li první možnost máme hotovo. Platí-li druhá možnost, potom z definice množiny A v původním grafu G tvoří vrcholy x, y, v_0 nezávislou množinu.

2. Je-li $|B| \geq 3$, potom rozlišíme opět dvě možnosti. Graf indukovaný množinou B buď obsahuje nezávislou množinu se 3 prvky, nebo v něm existují dva vrcholy x, y, které jsou spojené hranou. Platí-li první možnost máme hotovo. Platí-li druhá možnost, potom z definice množiny B tvoří v původním grafu G vrcholy x, y, v_0 K_3.

$\square$

The Party Problem je speciálním případem *Ramseyovy věty pro grafy*, kterou si uvedeme dále.

1.2 Ramseyovy věty

Úplné grafy

Začneme s jednoduchým tvrzením, které použijeme při důkazu *Ramseyovy věty pro grafy.*

Tvrzení. (Dirichletův princip) *[19]*
Nechť $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *jsou přirozená čísla,* X *je množina s alespoň* $1+\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)$ *prvky a množiny* $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *tvoří rozklad množiny* X*. Potom existuje* i *takové, že* $|X_i| \geq n_i$*.*

Na Dirichletův princip můžeme narazit i pod jiným názvem, např. princip zásuvek nebo princip holubníků. Podívejme se na jeho jednoduché použití.

Příklad. [3] Mějme 10 bodů umístěných uvnitř jednotkového čtverce. Potom existují dva body, které jsou od sebe vzdáleny o méně než 0.48.
Řešení: Rozdělme jednotkový čtverec na 9 menších čtverců o délce stran $\frac{1}{3}$. Potom pro 10 bodů máme 9 malých čtverců a z Dirichletova principu plyne, že existuje čtverec, ve kterém jsou dva body. Nejdelší možná vzdálenost dvou bodů uvnitř malého čtverce je přes diagonálu, která má délku $\frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.4714 < 0.48$.

Následuje Ramseyova věta pro grafy pro $k \geq 2$ barev. Větu dobře charakterizuje výrok T. S. Motzkina o Ramseyově teorii „complete disorder is impossible“.

Věta 1. (Ramseyova věta pro grafy) *[4]*
Pro libovolná přirozená čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$*, kde* $k \geq 2$*, existuje přirozené číslo* n *takové, že pro libovolné* k*-obarvení hran úplného grafu* K_n *najdeme v tomto grafu úplný podgraf* K_{n_i} $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *takový, že každá hrana* K_{n_i} *je obarvena barvou* i*.*

Definice 1. (Ramseyovo číslo)
Nejmenší číslo n takové, že vyhovuje předchozí větě se nazývá *Ramseyovo číslo* a značí se $R(n_1, n_2, \ldots, n_k, k)$.

V dalším textu budeme nejčastěji uvažovat $k = 2$. Proto si zavedeme jednodušší značení Ramseových čísel a pro $k = 2$ si uvedeme dvě jiné formulace Ramseyovy věty pro grafy a také větu dokážeme.

Značení. $R(n_1, n_2, 2) := R(k, l)$

Věta 2. (Ramseyova věta pro grafy – jiná formulace) *[21]*
Pro libovolné $k, l \in \mathbb{N}$ existuje $R(k,l) \in \mathbb{N}$ tak, že $|X| \geq R(k,l) \ \wedge \ c : \binom{X}{2} \to \{0,1\}$ je libovolná funkce (obarvení), potom existuje $Y \subseteq X$ taková, že buď $|Y| \geq k$ a $c_{|\binom{Y}{2}} \equiv 0$, nebo $|Y| \geq l$ a $c_{|\binom{Y}{2}} \equiv 1$.

Věta 3. (Ramseyova věta pro grafy – jiná formulace) *[4]*
Pro libovolná přirozená čísla k, l existuje přirozené číslo $R(k,l)$ takové, že při libovolném obarvení hran úplného grafu $K_{R(k,l)}$ červenou a modrou barvou existuje v tomto grafu buď červené K_k jako podgraf, nebo modré K_l jako podgraf.

Důkaz je zpracován z [21].

Důkaz. Chceme ukázat existenci Ramseyova čísla $R(k,l)$. Postupujeme indukcí podle k, l. Pokud $k = 1$ nebo $l = 1$ je věta triviálně splněna, protože $R(1,l) = 1$, $R(k,1) = 1$. Pokud $k = 2$ nebo $l = 2$, potom (pro $k = 2$) věta říká, že při libovolném červeno-modrém obarvení hran úplného grafu na $R(2,l)$ vrcholech existuje jako podgraf buď červená hrana, nebo modré K_l, což je splněno pro $R(2,l) = l$. Ze symetrie snadno nahlédneme, že $R(k,2) = k$.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro $k, l-1$ a $k-1, l$. Ukážeme, že $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$. Označme $n = R(k-1,l) + R(k,l-1)$. Nechť $G = (V,E)$ je úplný graf na n vrcholech a má libovolně obarvené hrany červenou a modrou barvou. Zvolme libovolně vrchol $u \in V(G)$ a označme množiny R a B tak, že $R = \{v \in V(G) \mid uv \text{ je červená }\}$ a $B = \{v \in V(G) \mid uv \text{ je modrá }\}$. Potom $|R| + |B| = R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1 = n-1$, což můžeme napsat ve tvaru $n - 1 = 1 + (R(k-1,l) - 1) + (R(k,l-1) - 1)$. Podle Dirichletova principu je buď $|R| \geq R(k-1,l)$, nebo $|B| \geq R(k,l-1)$.

1. Pokud $|R| \geq R(k-1,l)$, použijeme indukční předpoklad na dvojici čísel $k-1, l$ a dostaneme, že graf indukovaný množinou $|R|$, označme ho G_R, obsahuje buď červené K_{k-1}, nebo modré K_l. V prvním případě v G_R existuje červené K_{k-1}, které společně s vrcholem u dává červené K_k v G. Ve druhém případě v G_R existuje modré K_l, což implikuje existenci modrého K_l v G.

2. Pokud $|B| \geq R(k,l-1)$, použijeme indukční předpoklad na dvojici čísel $k, l-1$ a dostaneme, že graf indukovaný množinou $|B|$, označme ho G_B, obsahuje buď červené K_k, nebo modré K_{l-1}. V prvním případě v G_B existuje červené K_k, což implikuje existenci červeného K_k v G. Ve druhém případě v G_B existuje modré K_{l-1}, které společně s vrcholem u dává modré K_l v G.

□

Úplné bipartitní grafy

Pro úplné bipartitní grafy existuje analogie ke klasické Ramseyově větě.

Věta 4. (Bipartitní Ramseyova věta) *[13]*
Pro všechna přirozená čísla k, r existuje přirozené číslo n takové, že při libovolném r-obarvení hran úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ v něm existuje jednobarevný úplný bipartitní graf $K_{k,k}$ jako podgraf.

Analogií pro Ramseyova čísla $R(k,k)$ jsou čísla $B(k,k)$, která jsou definována jako nejmenší n takové, že je splněna předchozí věta s $r = 2$. V roce 1978 Irwing [17] ukázal, že $B(k,k) \leq 2^{k-1}(k-1) - 1$ a Conlon později tento odhad vylepšil.

Věta 5. *[6]* $B(k,k) \leq (1 + o(1))2^{k+1} \log_2 k$

Věta 6. *[13] Pro všechna přirozená čísla k a pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo m takové, že pokud G je podgraf grafu $K_{m,m}$ s alespoň εm^2 hranami, potom G obsahuje $K_{k,k}$ jako podgraf.*

Poznamenejme, že $|E(K_{m,m})| = m^2$. Tedy pro $\varepsilon > 1$ tvrzení nemá smysl a pro $\varepsilon = 1$ říká, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že v $K_{m,m}$ existuje jako podgraf $K_{k,k}$. Stačí tedy vzít $m = k$.

1.3 Ramseova čísla

Odhady Ramseyových čísel

V důkazu Ramseyovy věty jsme ukázali nerovnost

$$R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1), \tag{1.1}$$

což je základní horní odhad. Dále tento odhad rozšíříme, uvedeme horní odhad pro $R(k,l)$, ve kterém vystupuje kombinační číslo a podíváme se na rychlost růstu čísel $R(k,k)$.

Věta 7. *[4] Pro každé $k, l \in \mathbb{N}$ a sudá $R(k-1,l)$ i $R(k,l-1)$ platí*

$$R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1. \tag{1.2}$$

Důkaz. Důkaz provedeme podobně jako v případě Ramseyovy věty pro grafy, indukcí podle k, l. Tvrzení platí pro $k = 1$ nebo $l = 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k-1, l$ a $k, l-1$. Označme $n = R(k-1,l) + R(k,l-1)$ a $G = K_{n-1}$. Uvažujme libovolné červeno-modré obarvení hran grafu G.

Ukážeme, že G obsahuje buď červené K_k, nebo modré K_l jako podgraf G. Protože $R(k-1,l)$ a $R(k,l-1)$ jsou sudá čísla víme, že řád grafu G je lichý. Tedy existuje vrchol, který má sudý počet červených a modrých hran, označme tento vrchol u. Označme R množinu takovou, že $R = \{v \in V(G) \mid uv$ je červená$\}$ a B množinu takovou, že $B = \{v \in V(G) \mid uv$ je modrá$\}$. Rozlišíme dva případy.

1. Pokud $|R| \geq R(k-1,l)$, postupujeme stejně jako u důkazu věty 3. Tedy použijeme indukční předpoklad na dvojici $k-1$ a l. Dostáváme, že graf indukovaný množinou R, označme ho G_R, buď obsahuje červené K_{k-1}, nebo modré K_l. V prvním případě v G_R existuje červené K_{k-1}, které společně s vrcholem u dává červené K_k v G. Ve druhém případě v G_R existuje modré K_l, což implikuje existenci K_l v G.

2. Pokud $|R| < R(k-1,l)$, potom $|R| \leq R(k-1,l) - 2$ ze sudosti $|R|$ a $R(k-1,l)$. Potom $n - 2 = R(k-1,l) + R(k,l-1) - 2 = |R| + |B| \leq R(k-1,l) - 2 + |B|$. Po úpravě dostaneme $|B| \geq R(k,l-1)$ a opět postupujeme stejně jako u důkazu věty 3 použitím indukčního předpokladu na dvojici k a $l-1$.

□

V důkazu následující věty využijeme vzorec pro součet kombinačních čísel, tj.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}. \tag{1.3}$$

Věta 8. *[4] Pro všechna $k, l \in \mathbb{N}$ platí*

$$R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}. \tag{1.4}$$

Důkaz. Podobně jako u důkazu Ramseyovy věty pro grafy, postupujme indukcí podle k, l. Pokud $k = 1$ nebo $l = 1$, potom $R(1,l) = \binom{l-1}{0} = 1 = \binom{k-1}{k-1} = R(k,1)$. Nyní předpokládejme, že $k, l \geq 2$ a tvrzení platí pro $k-1, l$ a $k, l-1$. Rovnou využijeme indukčního předpokladu, vztahu 1.1 a vzorce 1.3.

$$R(k,l) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$$

□

Nyní se podívejme na růst $R(k,k)$. Pro horní odhad dosaďme do vztahu 1.4 a rozepišme kombinační číslo podle definice, tj.

$$R(k,k) \leq \binom{k+k-2}{k-1} = \binom{2k-2}{k-1} = \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!}.$$

Použitím horního odhadu faktoriálu ($n! \leq \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{1}{12}n}$) dostáváme

$$\frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} \leq \frac{\sqrt{2\pi(2k-2)}\left(\frac{2k-2}{e}\right)^{2k-2} e^{\frac{1}{12}(2k-2)}}{2\pi(k-1)\left(\frac{k-1}{e}\right)^{2k-2} e^{\frac{1}{12}(k-1)} e^{\frac{1}{12}(k-1)}} =$$

$$\frac{\sqrt{2\pi(2k-2)}}{2\pi(k-1)}\left(\frac{2k-2}{k-1}\right)^{2k-2} = \frac{\sqrt{\pi(k-1)}}{\pi(k-1)}\left(\frac{2(k-1)}{k-1}\right)^{2k-2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(k-1)}}2^{2k-2} = \frac{4^k}{4\sqrt{\pi(k-1)}} \leq 4^k.$$

Tedy dostáváme

$$R(k,k) \leq 4^k. \tag{1.5}$$

$R(k,k)$ je tedy shora omezeno exponenciální funkcí. Zatím nejlepší horní odhad pro $R(k,k)$ uvedl Conlon v roce 2009.

Věta 9. *[7] Existuje konstanta $C > 0$ taková, že*

$$R(k,k) \leq (k-1)^{-C\frac{\log_2(k-1)}{\log_2\log_2(k-1)}}\binom{2k-2}{k-1}.$$

Nyní se podívejme na dolní odhad $R(k,k)$. Uvažujme náhodně obarvený úplný graf K_n, červenou a modrou barvou, s množinou vrcholů V. Každá hrana je obarvena buď červenou barvou s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, nebo modrou barvou s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Nechť K je libovolná $k-$prvková podmonožina množiny V. Označme R_k jev takový, že vrcholy K indukují červené K_k jako podgraf G a označme B_k jev takový, že vrcholy K indukují modré K_k jako podgraf G. Pravděpodobnost, že nastane jev R_k je $P(R_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$. Pravděpodobnost, že nastane je B_k je stejná jako pravděpodobnost jevu R_k, tj. $P(B_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$. Nyní označme C_k jev takový, že K indukuje buď červené K_k, nebo modré K_k, tj. $P(C_k) = 2^{-\binom{k}{2}} + 2^{-\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$. Konečně označme p pravděpodobnost, že v náhodně obarveném K_n existuje

$k-$prvková podmnožina vrcholů K pro níž nastane jev C_k. Tuto pravděpodobnost odhadneme shora součtem pravděpodobností jevů C_k, tj.

$$p \leq \sum_{K \subseteq V, |K|=k} P(C_k) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Pokud $p < 1$, potom existuje obarvení úplného grafu K_n takové, že neobsahuje červené K_k jako podgraf ani modré K_k jako podgraf, tj. zajímá nás pro jaká k, n je $p < 1$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \leq \frac{n^k}{k!}$$

Dále pro $k \geq 3$ platí

$$\frac{n^k}{k!} < \frac{n^k}{2^{\frac{k}{2}+1}}.$$

Po dosazení

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{n^k}{2^{\frac{k}{2}+1}} \cdot 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{n^k}{2^{\frac{k}{2}}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} = \left(\frac{n}{2^{\frac{k}{2}}}\right)^k.$$

Dostáváme tedy

$$p < \left(\frac{n}{2^{\frac{k}{2}}}\right)^k. \tag{1.6}$$

Dosadíme-li do 1.6 za $n = 2^{\frac{k}{2}}$, potom je $p < 1$. Závěr shrňme do následující věty.

Věta 10. *[19] Pro každé $k \geq 3$ platí*

$$R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}. \tag{1.7}$$

Získali jsme horní 1.5 i dolní 1.6 odhad pro čísla $R(k,k)$, tj. pro $k \geq 3$ platí

$$2^{\frac{k}{2}} < R(k,k) \leq 4^k.$$

Tedy $R(k,k)$ je zdola i shora omezeno exponenciální funkcí. Při odvození před větou 10 bylo čerpáno z [19].

k	3	3	3	3	3	3	4	4
l	4	5	6	7	8	9	4	5
$R(k,l)$	9	14	18	23	28	36	18	25

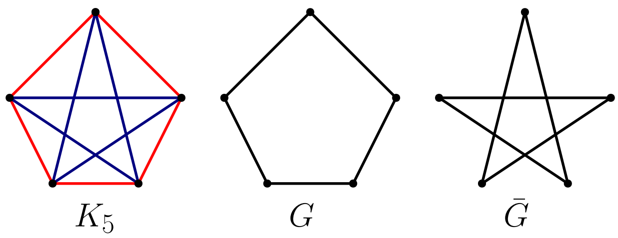
Tabulka 1.1: $R(k,l)$

Známé hodnoty

Celkově není známo moc přesných hodnot Ramseyových čísel. V důkazu Ramseyovy věty pro grafy jsme u prvního kroku indukce ukázali, že $R(1,l) = R(k,1) = 1$ a $R(2,l) = l$, $R(k,2) = k$. Další hodnota, se kterou jsme se setkali při motivačním příkladu je $R(3,3) = 6$. Další přesné hodnoty jsou shrnuty v tabulce 1.1.

Chceme-li ukázat dolní omezení $R(k,l)$ číslem $c \in \mathbb{N}$, tj. $c \leq R(k,l)$, potom musíme najít červeno-modré obarvení grafu K_{c-1} takové, že neobsahuje červené K_k jako podgraf ani modré K_l jako podgraf. Chceme-li ukázat horní omezení $R(k,l)$ číslem $C \in \mathbb{N}$, tj. $R(k,l) \leq C$, potom je nutné vyzkoušet všechny neizomorfní červeno-modrá obarvení grafu K_C a v každém z těchto obarvení nalézt buď červené K_k jako podgraf, nebo modré K_l jako podgraf.

Poznamenejme, že červeno-modré obarvení hran K_n lze interpretovat grafem G a jeho doplňkem $\bar{G}$, kde $|V(G)| = |V(\bar{G})| = n$, $E(G)$ je množina červených hran v K_n a $E(\bar{G})$ je množina modrých hran v K_n. Příklad je uveden na obrázku 1.1. Odhady $R(k,l)$ lze tedy řešit hledáním kliky velikosti k v G a kliky velikosti l v $\bar{G}$.



Obrázek 1.1: Převod obarveného K_5 na graf G a jeho doplněk $\bar{G}$.

Zajímavostí je, že už pro číslo $R(5,5)$ není známá přesná hodnota, což naznačuje obtížnost této úlohy. Snahu o vylepšení odhadů $R(5,5)$ vyvíjeli B. McKay [20], [1], S. Radziszowski [20], G. Exoo [11], V. Angeltveit [1] a další. V roce 2017 B. McKay a V. Angeltveit vylepšili jeho horní odhad [1] a v současné době víme, že

$$43 \leq R(5,5) \leq 48.$$

1.4 Zobecněná Ramseyova čísla

Ramseyovo číslo je definováno jako nejmenší přirozené číslo $R(k, l)$ takové, že pro libolné červeno-modré obarvení hran úplného grafu na $R(k, l)$ vrcholech obsahuje buď červené K_k nebo modré K_l jako podgraf. Budeme-li uvažovat místo existence červeného K_k a modrého K_l dva grafy F a H, dostaneme následující definici.

Definice 2. (Zobecněné Ramseyovo číslo)
Pro dva grafy F a H je *zobecněné Ramseyovo číslo* $R(F, H)$ nejmenší přirozené číslo takové, že pro libovolné červeno-modré obarvení hran úplného grafu na $R(F, H)$ vrcholech obsahuje buď červený podgraf, který je izomorfní s F, nebo modrý podgraf, který je izomorfní s H.

Následující dvě věty udávají přesné hodnoty pro zobecněná Ramseyova čísla.

Věta 11. *[9] Nechť $k, l \geq 2$, potom*

$$R(K_{1,k}, K_{1,l}) = \begin{cases} k + l - 1 & \dots \textit{ pokud } k \textit{ a } l \textit{ jsou sudá čísla,} \\ k + l & \dots \textit{ jinak.} \end{cases}$$

Chvátal v roce 1977 přišel s přesnou hodnotou Ramseyových čísel pro stromy daného řádu vs. úplné grafy.

Věta 12. *[9] Nechť k, l jsou přirozená čísla a T je libovolný strom řádu k. Potom*

$$R(T, K_l) = (k - 1)(l - 1) + 1.$$

Věta z roku 1982 od V. Chvátala, V. Rődla, E. Szemerediho a V. T. Trottera, omezuje Ramseyovo číslo všech grafů s n vrcholy stejnou konstantou.

Věta 13. *[5] Pro všechna přirozená čísla d existuje $c > 0$ tak, že pro všechny grafy F na n vrcholech s $\Delta(F) \leq d$, platí*

$$R(F, F) \leq cn.$$

Kapitola 2

Online Ramseyova teorie

Nechť $\mathcal{G}$ označuje třídu grafů a H je graf z $\mathcal{G}$. Uvažujeme následující kombinatorickou hru. V jednom kole Builder postaví novou hranu a Painter ji obarví červeně nebo modře. Builder se snaží přinutit Paintera k vytvoření jednobarevné kopie grafu H a Painter se mu v tom snaží zabránit. Omezením pro Buildera je, že červeno-modrý graf v každém kole musí patřit do $\mathcal{G}$, jinak Builder prohrává. Říkáme, že H je pro Paintera *nevyhnutelný* na třídě grafů $\mathcal{G}$, jestliže Builder dokáže přinutit Paintera k vytvoření jednobarevné kopie H na grafu patřícím do $\mathcal{G}$. Jinak říkáme, že H je pro Paintera *vyhnutelný* na $\mathcal{G}$.

2.1 Vyhnutelnost a nevyhnutelnost

Začneme dvěma výsledky, kde libovolný graf z dané třídy $\mathcal{G}$ je pro Paintera nevyhnutelný na $\mathcal{G}$.

Věta 14. *[15] Nechť H je libovolný (vrcholově) k-obarvitelný graf a $\mathcal{G}$ je třída (vrcholově) k-obarvitelných grafů. Potom H je pro Paintera nevyhnutelný na $\mathcal{G}$.*

Věta 15. *[15] Nechť H je libovolný les a $\mathcal{G}$ je třída lesů. Potom H je pro Paintera nevyhnutelný na $\mathcal{G}$.*

Nyní se podíváme na zatím jedinou známou vítěznou strategii pro Paintera. Nejprve však definujme vnějškově rovinný graf.

Definice 3. Graf G je *vnějškově rovinný*, jestliže pro něj existuje rovinné nakreslení a všechny vrcholy G leží ve vnější stěně.

Věta 16. *[15] Nechť $H = K_3$ a $\mathcal{G}$ je třída vnějškově rovinných grafů. Potom H je pro Paintera vyhnutelný na $\mathcal{G}$.*

Důkaz. Ukážeme, že Painter může kontrolovat počet červených a modrých hran tak, aby na žádné vnitřní stěně nebyl jejich rozdíl dělitelný 3. Postupujeme indukcí podle počtu kol. Označme G_i graf vytvořený v i-tém kole. Předpokládejme tedy, že na vnějškově rovinném grafu G_n není rozdíl červených a modrých hran na jakékoli vnitřní stějně dělitelný 3. Nechť e je hrana vytvořená Builderem v $n+1$ kole. Potom v G_{n+1} vzniknou 0, 1 nebo 2 nové stěny. První dvě možnosti jsou triviální. Diskutujme tedy poslední možnost. Potom z vnějškové rovinnosti, e dělí vnitřní stěnu F v G na dvě nové stěny F_1 a F_2 v G_{n+1}. Označme C_{F_i} hraniční kružnici stěny F_i pro $i = 1, 2$. Dále označme cestu $P_i = C_{F_i} - e$ pro $i = 1, 2$. Ať r_i, resp. b_i značí počet červených, resp. modrých hran na cestě P_i pro $i = 1, 2$. Potom Painter může hranu e obarvit tak, aby na obou stěnách F_1 a F_2 nebyl rozdíl červených a modrých hran na stěnách F_1 a F_2 dělitelný 3, pokud není $r_i - b_i \equiv (-1)^i$ $(mod\ 3)$ nebo $r_i - b_i \equiv (-1)^{i-1}$ $(mod\ 3)$. Pro spor ať je $r_i - b_i \equiv (-1)^i$ $(mod\ 3)$, potom $r_1 - b_1 \equiv (-1)^1$ $(mod\ 3) \Rightarrow r_1 - b_1 \equiv 2$ $(mod\ 3)$ a $r_2 - b_2 \equiv (-1)^2 (mod\ 3) \Rightarrow r_2 - b_2 \equiv 1$ $(mod\ 3)$. Potom pro stěnu F platí, že $(r_1 + r_2) - (b_1 + b_2) \equiv 0$ $(mod\ 3)$, což je spor s indukčním předpokladem. Druhá možnost se ukáže analogicky. □

Uvažujeme-li místo třídy vnějškově rovinných grafů, třídu rovinných grafů, pak se situace změní a vítězná strategie existuje naopak pro Buildera.

Věta 17. *[15] Nechť $H = K_3$ a $\mathcal{G}$ je třída rovinných grafů. Potom H je pro Paintera nevyhnutelný na $\mathcal{G}$.*

Dalším grafem, pro který má Builder vítěznou strategii je $K_4 - e$.

Věta 18. *[15] Nechť $H = K_4 - e$ a $\mathcal{G}$ je třída rovinných grafů. Potom H je pro Paintera nevyhnutelný na $\mathcal{G}$.*

Pro K_4 není známá žádná vítězná strategie. V roce 2014 Š. Petříčková [22] formulovala následující hypotézu.

Hypotéza. *Nechť $H = K_4$ a $\mathcal{G}$ je třída rovinných grafů. Potom H je pro Paintera vyhnutelný na $\mathcal{G}$.*

2.2 Online Ramseyova čísla

V první kapitole jsme definovali Ramseyovo číslo $R(k, l)$ udávající minimální počet vrcholů úplného grafu, který při libovolném červeno-modrém obarvení hran obsahuje buď červené K_k jako podgraf nebo modré K_l jako podgraf. V následujích dvou definicích zavedeme size Ramseyovo číslo a jeho online variantu, která nesouvisí s řádem grafu, ale s jeho velikostí.

Definice 4. (SIZE RAMSEYOVO ČÍSLO)
Size Ramseyovým číslem $\hat{R}(G)$ rozumíme nejmenší m, pro které existuje graf H s m hranami takový, že při libovolném červeno-modrém obarvení hran obsahuje jednobarevné G jako podgraf.

Size Ramseyova čísla byla poprvé studována v roce 1978 P. Erdősem a dalšími v [10]. Výsledek, který je připisován V. Chvátalovi říká, že pro úplné grafy je size Ramseyovo číslo $\hat{R}(K_k)$ rovno počtu hran v úplném grafu s $R(k,k)$ vrcholy, tedy

$$\hat{R}(K_k) = \binom{R(k,k)}{2}.$$

Definice 5. (ONLINE RAMSEYOVO ČÍSLO)
Online Ramseyovo číslo $\tilde{R}(G)$ je minimální počet hran, které musí Builder vytvořit, aby přinutil Paintera k vytvoření jednobarevného grafu G, bez ohledu na jeho strategii.

Hypotéza, formulována A. Kurekem a A. Rucinskim v roce 2005 [18], kterou v roce 2009 dokázal D. Conlon [8] říká, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tilde{R}(K_k)}{\hat{R}(K_k)} = 0.$$

D. Conlon ukázal, že existuje konstanta $c > 1$ taková, že

$$\tilde{R}(K_k) \le c^{-k}\binom{R(k,k)}{2}.$$

Online Ramseyova čísla cest

V této části se zaměříme na online Ramseyova čísla cest, která byla studována v [16], [23]. Začneme tabulkou několika přesných hodnot, které byly spočteny pomocí počítače.

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{R}(P_n)$	1	3	5	7	10	12	15	17

Tabulka 2.1: $\tilde{R}(P_n)$

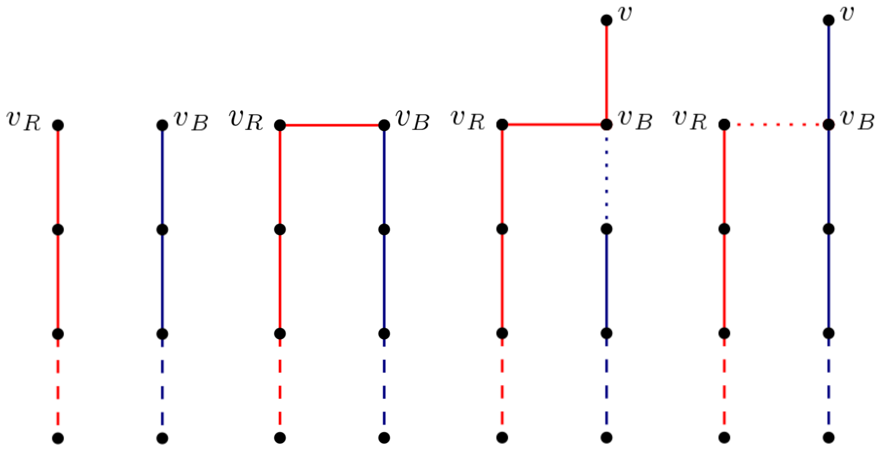
Poznamenejme, že určit přesnou hodnotu online Ramseyova čísla pro hru omezenou jen na n kol, znamená projít všechny možné neizomorfní grafy s n hranami a dále projít všechna možná neizomorfních obarvení těchto grafů.

Konkrétně pro $n = 9$ P. Prałat v [23] použitím backtrackingu testoval 176778 různě obarvených grafů s 9 hranami. Jedná se tedy o obtížnou úlohu a přesná hodnota není zatím spočtena ani pro $\tilde{R}(P_{10})$. Podívejme se tedy na horní odhad, který platí obecně.

Věta 19. *[16] Nechť $k \geq 1$. Builder umí v $2k - 1$ kolech přinutit Paintera k vytvoření dvou jednobarevných a vrcholově disjunktních cest (jedné červené a jedné modré) takových, že součet jejich délek je roven k. Navíc, pro všechna $n \geq 2$ platí, že*

$$\tilde{R}(P_n) \leq 4n - 7.$$

Důkaz je konstrukční a provádí se indukcí podle počtu kol. Na obrázku 2.1 je zobrazen jeden krok indukce.



Obrázek 2.1: Jeden krok indukce.

Při snaze o vylepšení horního odhadu online Ramseyových čísel cest jsme vypozorovali, že v indukci lze hrany vybírat i jiným způsobem. Rozdílem je, že obě jednobarevné cesty nebudou vrcholově disjunktní, ale budou mít jeden společný koncový vrchol. Označme $R = (r_1, r_2, \ldots, r_{l_R})$ červenou cestu, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_{l_B})$ modrou cestu a u jejich společný koncový vrchol, kde $u = r_{l_R} = b_1$. Builder vytvoří hranu uv, kde v je vrchol, který neleží na R ani na B. Ať ji Painter obarví červeně (druhá možnost je symetrická), potom Builder vytvoří hranu vb_2. Painter ji buď obarví červeně, potom $R = (r_1, r_1, \ldots, r_{l_R}, v, b_2)$ a $B = (b_2, b_3, \ldots, b_{l_B})$, nebo ji obarví modře, potom $R = (r_1, r_1, \ldots, r_{l_R}, v)$ a $B = (v, b_2, b_3, \ldots, b_{l_B})$. V obou případech je součet délek těchto cest po dvou kolech o 1 větší, stejně jako v jednom kroku indukce na obrázku 2.1.

Kapitola 3

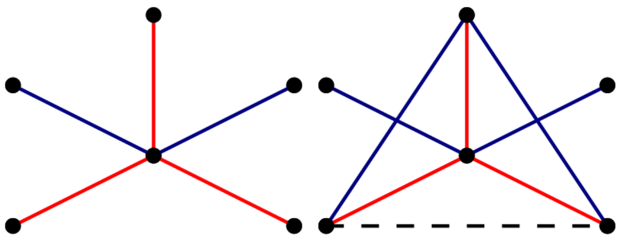
Online Ramseyova čísla kružnic

Tato kapitola je motivována diplomovou prací V. Blažeje [2], který se zabýval horním odhadem pro online Ramseyova čísla kružnic. Je zde opraven horní odhad pro sudé kružnice a vylepšen horní odhad pro liché kružnice.

3.1 C_3, C_4

Horní odhad pro $\tilde{R}(C_3)$

V [16] je zmíněno, že $\tilde{R}(C_3) = 8$. Horní odhad lze získat z konstrukce, která je zřejmá z obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Konstrukce C_3.

Horní odhad pro $\tilde{R}(C_4)$

Vytvoříme 7-krát $K_{1,3}$, z nich vybereme 4 cesty délky 2, které mají stejnou barvu a označíme je $p^1 = (p^1_1, p^1_2, p^1_3)$, $p^2 = (p^2_1, p^2_2, p^2_3)$, $p^3 = (p^3_1, p^3_2, p^3_3)$ a $p^4 = (p^4_1, p^4_2, p^4_3)$. Nechť jsou cesty p^1, p^2, p^3, p^4 obarveny červenou barvou. Builder vytvoří 6 hran xp^i_1, xp^i_3 pro $i = 1, 2, 3$, kde x je vrchol, který neleží na žádné z cest p^1, p^2, p^3, p^4. Potom Painter vždy alespoň jednu z hran xp_1^i, xp_3^i pro $i = 1, 2, 3$ obarví modře, protože jinak máme červené C_4. Označme tyto modré hrany na cestě p^i jako xp_i. Builder vytvoří hrany $p_ip_1^4$ a $p_ip_3^4$ pro $i = 1, 2, 3$. Painter alespoň jednu z hran $p_1p_1^4$ a $p_1p_3^4$ obarví modře, označme ji p_1a a druhou hranu p_1b. Potom hrana p_2a je obarvena červeně a p_2b je obarvena modře. Hrana p_3b je obarvena červeně a konečně je buď hrana p_3a obarvena červeně, potom máme červené $C_4 = (p_1^4, p_2^4, p_3^4, p_3)$, nebo je hrana p_3a obarvena modře, potom máme modré $C_4 = (x, p_1, a, p_3)$. Horní odhad online Ramseyova čísla získáme součtem všech kol, tedy

$$\tilde{R}(C_4) \leq 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 = 33.$$

3.2 Sudé kružnice

Věta 20. *Nechť $n = 2k + 4, k \in \mathbb{N}$, potom*

$$\tilde{R}(C_n) \leq 37n - 75.$$

Strategie

1. Vytvoříme jednobarevnou cestu p (strategie viz dále) o délce $\frac{17}{2}n - 17$. Vrcholy cesty p budeme značit $p_0, p_1, \ldots, p_{\frac{17}{2}n-17}$.

2. Označme

   (a) $\alpha = n - 2 + \frac{n-2}{4} - 1 = \frac{5n-14}{4}$ pro $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, tj. $n = 6, 10, 14, 18, \ldots$

   Nyní rozdělíme cestu p na 7 kratších cest $p^1, p^2, \ldots, p^7$.

   - $p^1 = (p_0, p_1, \ldots, p_\alpha)$,
   - $p^2 = (p_{\alpha+1}, p_{\alpha+2}, \ldots, p_{2\alpha+1})$,
   - $p^3 = (p_{2\alpha+2}, p_{\alpha+3}, \ldots, p_{3\alpha+2})$,
   - $p^4 = (p_{3\alpha+3}, p_{3\alpha+4}, \ldots, p_{4\alpha+3})$,
   - $p^5 = (p_{4\alpha+4}, p_{4\alpha+5}, \ldots, p_{5\alpha+4})$,
   - $p^6 = (p_{5+\alpha+5}, p_{5\alpha+6}, \ldots, p_{6\alpha+5})$,
   - $p^7 = (p_{6\alpha+6}, p_{6\alpha+7}, \ldots, p_{6\alpha+6+n-2}) = (p_{6\alpha+6}, p_{6\alpha+7}, \ldots, p_{\frac{17}{2}n-17})$.

   Máme tedy 6 jednobarevných cest $p^1, p^2, \ldots, p^6$ o délce $\frac{5n-14}{4}$ a cestu p^7 o délce $n - 2$.

   (b) $\alpha = n - 2 + \frac{n}{4} - 1 = \frac{5n-12}{4}$ a $\beta = n - 2 + \frac{n-4}{4} - 1 = \frac{5n-16}{4}$ pro $n = 4k + 4, k \in \mathbb{N}$, tj. $n = 8, 12, 16, 20, \ldots$

   Opět rozdělíme cestu p na 7 kratších cest $p^1, p^2, \ldots, p^7$ tak, že

- $p^1 = (p_0, p_1, \dots, p_\alpha)$,
- $p^2 = (p_{\alpha+1}, p_{\alpha+2}, \dots, p_{\alpha+\beta+1})$,
- $p^3 = (p_{\alpha+\beta+2}, p_{\alpha+\beta+3}, \dots, p_{2\alpha+\beta+2})$,
- $p^4 = (p_{2\alpha+\beta+3}, p_{2\alpha+\beta+4}, \dots, p_{2\alpha+2\beta+3})$,
- $p^5 = (p_{2\alpha+2\beta+4}, p_{2\alpha+2\beta+5}, \dots, p_{3\alpha+2\beta+4})$,
- $p^6 = (p_{3\alpha+2\beta+5}, p_{3\alpha+2\beta+6}, \dots, p_{3\alpha+3\beta+5})$,
- $p^7 = (p_{3\alpha+3\beta+6}, p_{3\alpha+3\beta+7}, \dots, p_{3\alpha+3\beta+6+n-2})$.

Máme tedy 3 cesty p^1, p^3, p^5 o délce $\frac{5n-12}{4}$, 3 cesty p^2, p^4, p^6 o délce $\frac{5n-16}{4}$ a cestu p^7 o délce $n-2$.

3. Nechť je p obarvená červenou barvou, potom vynutíme 3 modré cesty o délce $\frac{n}{2}-1$ vycházející z vrcholu x, který neleží na cestě p.

   Nejprve Builder vytvoří hrany xp_0^1 a xp_{n-2}^1. Painter musí alespoň jednu z těchto hran obarvit modrou barvou, označme tuto hranu xy_1.

   (a) Pokud $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}$, pak z y_1 vynutíme modrou cestu délky $\frac{n}{2}-2$, což se nám povede v $\frac{n-6}{4}+1$ iteracích. Situace je zobrazena na obrázku 3.2.

   Pro $i = 1, 2, \dots, \frac{n-6}{4}$:

   - Builder vytvoří hrany $y_{2i-1}p_{i-1}^2$ a $y_{2i-1}p_{n+i-3}^2$, potom alespoň jedna z těchto hran je obarvena modrou barvou, označme tuto hranu $y_{2i-1}y_{2i}$.
   - Builder vytvoří hrany $y_{2i}p_i^1$ a $y_{2i}p_{n+i-2}^1$, potom alespoň jedna z těchto hran je obarvena modrou barvou, označme tuto hranu $y_{2i}y_{2i+1}$.

   Konečně Builder vytvoří hrany $y_{2\frac{n-6}{4}+1}p^2_{n+\frac{n-6}{4}-2}$ a $y_{2\frac{n-6}{4}+1}p^2_{n+\frac{n-6}{4}}$, potom alespoň jedna z těchto hran je obarvena modrou barvou, označme tuto hranu $y_{2\frac{n-6}{4}+1}y_{2\frac{n-6}{4}+2} = y_{\frac{n}{2}-2}y_{\frac{n}{2}-1}$. Získáváme modrou cestu $(x, y_1, y_2, \dots, y_{\frac{n}{2}-1})$ o délce $\frac{n}{2}-1$. Stejně postupujeme s cestami p^3, p^4 a p^5, p^6.

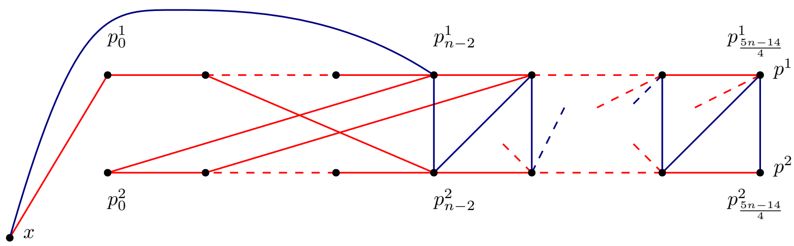
   (b) Pokud $n = 4k+4, k \in \mathbb{N}$, pak z y_1 vynutíme modrou cestu délky $\frac{n}{2}-2$, což se nám povede v $\frac{n-4}{4}$ iteracích. Situace je zobrazena na obrázku 3.3.

   Pro $i = 1, 2, \dots, \frac{n-4}{4}$:

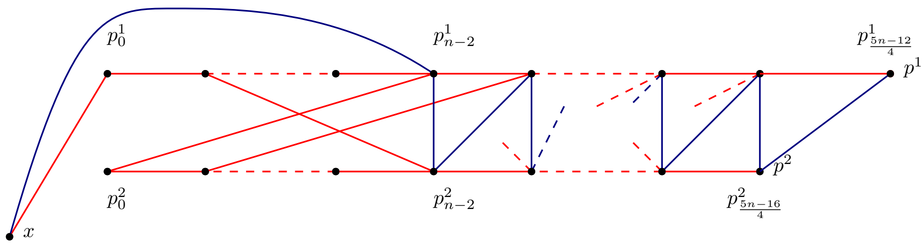
   - Builder vytvoří hrany $y_{2i-1}p_{i-1}^2$ a $y_{2i-1}p_{n+i-3}^2$, potom alespoň jedna z těchto hran je obarvena modrou barvou, označme tuto hranu $y_{2i-1}y_{2i}$.

- Builder vytvoří hrany $y_{2i}p_i^1$ a $y_{2i}p_{n+i-2}^1$, potom alespoň jedna z těchto hran je obarvena modrou barvou, označme tuto hranu $y_{2i}y_{2i+1}$.

Získáváme modrou cestu $(x, y_1, y_2, \ldots, y_{\frac{n}{2}-1})$ o délce $\frac{n}{2}-1$. Stejně postupujeme s cestami p_3, p_4 a p_5, p_6.



Obrázek 3.2: Vynucení modré cesty délky $\frac{n}{2}-1$ pro $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$.



Obrázek 3.3: Vynucení modré cesty délky $\frac{n}{2}-1$ pro $n = 4k+4$, $k \in \mathbb{N}$.

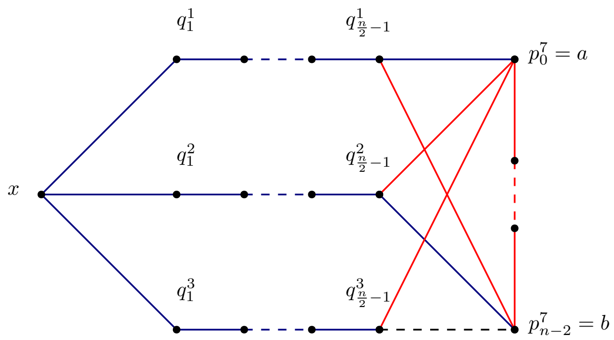
4. Označme si modrou cestu vytvořenou z vrcholu x

   - pomocí cest p^1, p^2 jako $q^1 = (x, q_1^1, q_2^1, \ldots, q^1_{\frac{n}{2}-1})$,
   - pomocí cest p^3, p^4 jako $q^2 = (x, q_1^2, q_2^2, \ldots, q^2_{\frac{n}{2}-1})$,
   - pomocí cest p^5, p^6 jako $q^3 = (x, q_1^3, q_2^3, \ldots, q^3_{\frac{n}{2}-1})$.

   (a) Builder vytvoří hrany $q^1_{\frac{n}{2}-1}p_0^7$ a $q^1_{\frac{n}{2}-1}p^7_{n-2}$, potom alespoň jedna z těchto hran je obarvena modrou barvou, označme tuto hranu $q^1_{\frac{n}{2}-1}a$ a druhou hranu označme $q^1_{\frac{n}{2}-1}b$.

   (b) Builder vytvoří hrany $q_{\frac{n}{2}-1^2a}$ a $q^2_{\frac{n}{2}-1}b$, potom hrana $q^2_{\frac{n}{2}-1}a$ musí být červená a hrana $q^2_{\frac{n}{2}-1}b$ musí být modrá. Pokud ale $q^1_{\frac{n}{2}-1}b$ je modrá, potom máme modrou $C_n = (q^1_{\frac{n}{2}-1}, q_1^1, x, q_1^2, \ldots, q^2_{\frac{n}{2}-1}, b)$, tedy $q^1_{\frac{n}{2}-1}b$ je obarvena červenou barvou.

(c) Builder vytvoří hrany $q^3_{\frac{n}{2}-1}a$ a $q_{\frac{n}{2}3-1}b$, potom hrana $q^3_{\frac{n}{2}-1}a$ musí být obarvena červenou barvou. A konečně buď $q^3_{\frac{n}{2}-1}b$ je modrá, potom máme modrou $C_n = (q^2_{\frac{n}{2}-1}, \ldots, q^2_1, x, q^3_1, \ldots, q^3_{\frac{n}{2}-1}b)$ nebo $q^3_{\frac{n}{2}-1}b$ je červená, potom máme červenou $C_n = (q^3_{\frac{n}{2}-1}, p^7_0, \ldots, p^7_{n-2})$. Postup je ilustrován na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Vynucení sudé kružnice.

Horní odhad $\tilde{R}(C_n)$ pro sudé kružnice

Pro vytvoření červené cesty o délce $\frac{17}{2}n - 17$, podle věty 19 potřebujeme $4\left(\frac{17}{2}n - 17\right) - 7 = 34n - 75$ kol. Dále pro vytvoření modré cesty o délce $\frac{n}{2} - 1$ z vrcholu x, potřebujeme

- $2 + \frac{n-6}{4} \cdot 4 + 2 = n - 2$ kol, pro $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$.
- $2 + \frac{n-4}{4} \cdot 4 = n - 2$ kol, pro $n = 4k + 4, k \in \mathbb{N}$.

Tedy pro vytvoření 3 modrých cest o délce $\frac{n}{2} - 1$ z vrcholu x potřebujeme $3(n-2) = 3n-6$ kol. Nakonec vytvoříme 6 hran z koncových vrcholů modrých cest do koncových vrcholů p^7. Horní odhad $\tilde{R}(C_n)$ pro $n = 2k + 4$, $k \in \mathbb{N}$ dostáváme součtem, tedy

$$\tilde{R}(C_n) \leq 34n - 75 + 3n - 6 + 6 = 37n - 75.$$

3.3 Liché kružnice

Věta 21. *Nechť* $n = 2k + 3, k \in \mathbb{N}$, *potom*

$$\tilde{R}(C_n) \leq 47n - 75.$$

Strategie

1. Vytvoříme jednobarevnou cestu p (strategie viz dále) o délce $10n-17$. Vrcholy cesty p budeme značit $p_0, p_1, \dots, p_{10n-17}$.

2. Vytvoříme sudou kružnici o délce $2n$.

   (a) Protože $n = 2k+3, k \in \mathbb{N}$, pak $2n = 4k+6, k \in \mathbb{N}$. Modifikujeme tedy postup vytvoření sudé kružnice pro $n = 4k+2$. Označme $\alpha = n - 2 + \frac{2n-2}{4} - 1 = \frac{3n-7}{2}$. Nyní rozdělíme cestu p na 7 kratších cest $p^1, p^2, \dots, p^7$.

   - $p^1 = (p_0, p_1, \dots, p_\alpha)$,
   - $p^2 = (p_{\alpha+1}, p_{\alpha+2}, \dots, p_{2\alpha+1})$,
   - $p^3 = (p_{2\alpha+2}, p_{\alpha+3}, \dots, p_{3\alpha+2})$,
   - $p^4 = (p_{3\alpha+3}, p_{3\alpha+4}, \dots, p_{4\alpha+3})$,
   - $p^5 = (p_{4\alpha+4}, p_{4\alpha+5}, \dots, p_{5\alpha+4})$,
   - $p^6 = (p_{5+\alpha+5}, p_{5\alpha+6}, \dots, p_{6\alpha+5})$,
   - $p^7 = (p_{6\alpha+6}, p_{6\alpha+7}, \dots, p_{6\alpha+6+n-2}) = (p_{6\alpha+6}, p_{6\alpha+7}, \dots, p_{10n-17})$.

   Máme tedy 6 jednobarevných cest $p^1, p^2, \dots, p^6$ o délce $\frac{3n-7}{2}$ a cestu p^7 o délce $n-2$.

   (b) Nechť je p obarvená červenou barvou, potom vynutíme 3 modré cesty o délce $n-1$ vycházející z vrcholu x, který neleží na cestě p. Nejprve Builder vytvoří hrany xp_0^1 a xp_{n-2}^1. Potom alespoň jedna z těchto hran musí být obarvena modrou barvou, označme tuto hranu xy_1. Z y_1 vynutíme modrou cestu délky $n-2$, což se nám povede v $\frac{n-3}{2}$ iteracích.
   Pro $i = 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}$:

   - Builder vytvoří hrany $y_{2i-1}p_{i-1}^2$ a $y_{2i-1}p_{n+i-3}^2$, potom alespoň jedna z těchto hran je obarvena modrou barvou, označme tuto hranu $y_{2i-1}y_{2i}$.
   - Builder vytvoří hrany $y_{2i}p_i^1$ a $y_{2i}p_{n+i-2}^1$, potom alespoň jedna z těchto hran je obarvena modrou barvou, označme tuto hranu $y_{2i}y_{2i+1}$.

   Konečně Builder vytvoří hrany $y_{2\frac{n-3}{2}+1}p^2_{n-2+\frac{n-3}{2}}$ a $y_{2\frac{n-3}{2}+1}p^2_{\frac{n-3}{2}}$, potom alespoň jedna z těchto hran je obarvena modrou barvou, označme tuto hranu $y_{2\frac{n-3}{2}+1}y_{2\frac{n-3}{2}+2} = y_{n-2}y_{n-1}$.

   Získáváme modrou cestu $(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ o délce $n-1$. Stejně postupujeme s cestami p^3, p^4 a p^5, p^6.

(c) Označme si modrou cestu vyrvořenou z vrcholu x

- pomocí cest p^1 a p^2 jako $q^1 = (x, q_1^1, q_2^1, \dots, q_{n-1}^1)$,
- pomocí cest p^1 a p^2 jako $q^1 = (x, q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n-1}^2)$,
- pomocí cest p^1 a p^2 jako $q^1 = (x, q_1^3, q_2^3, \dots, q_{n-1}^3)$.

Builder vytvoří hrany $q_{n-1}^1 p_0^7$ a $q_{n-1}^1 p_{n-2}^7$, potom alespoň jedna z těchto hran je obarvena modrou barvou, označme tuto hranu $q_{n-1}^1 a$ a druhou hranu $q_{n-1}^1 b$.

Builder vytvoří hrany $q_{n-1}^2 a$ a $q_{n-1}^2 b$, potom hrana $q_{n-1}^2 a$ musí být červená a hrana $q_{n-1}^2 b$ musí být modrá. Je-li $q_{n-1}^1 b$ modrá, potom máme modrou C_{2n}, tedy $q_{n-1}^1 b$ je obarvena červenou barvou.

Builder vytvoří hrany $q_{n-1}^3 a$ a $q_{n-1}^3 b$, potom hrana $q_{n-1}^3 a$ musí být obarvena červenou barvou a hrana $q_{n-1}^3 b$ je modrá, potom získáváme modrou $C_{2n} = (q_{n-1}^2, \dots, q_1^2, x, q_1^3, \dots, q_{n-1}^3, b)$.

3. Vytvoříme lichou kružnici C_n uvnitř sudé kružnice $C_{2n} = (c_0, \dots, c_{2n-1})$ z přechozího bodu, což se nám povede po n kolech.

   Pro $i = 0, 1, \dots, n-2$:

   - Builder vytvoří hranu $c_{i(n-1)}(mod\ 2n)c_{(i+1)(n-1)}(mod\ 2n)$, potom je tato hrana obarvena červenou barvou.

   V poslední iteraci Builder vytvoří hranu $c_1 c_n$. Hrana je buď obarvena červenou barvou, potom získáváme červenou C_n, nebo modrou barvou, potom získáváme modrou C_n.

Horní odhad $\tilde{R}(C_n)$ pro liché kružnice

Pro vytvoření červené cesty o délce $10n - 17$, podle věty 19 potřebujeme $4(10n - 17) - 7 = 40n - 75$ kol. Dále pro vytvoření modré cesty o délce $n - 1$ z vrcholu x, potřebujeme $2 + \frac{n-3}{2} \cdot 4 + 2 = 2n - 2$ kol. Tedy pro vytvoření 3 modrých cest délky $n - 1$ z vrcholu x potřebujeme $3(2n - 2) = 6n - 6$ kol. Pro dokončení sudé kružnice o délce $2n$ potřebujeme 6 kol. Nakonec uvnitř jednobarevné C_{2n} potřebujeme n kol. Horní odhad $\tilde{R}(C_n)$ pro $n = 2k + 3$, $k \in \mathbb{N}$ dostáváme součtem, tedy

$$\tilde{R}(C_n) \leq 40n - 75 + 6n - 6 + 6 + n = 47n - 75.$$

Závěr

V první kapitole je vyložena část Ramseyovy teorie. Ramseyova teorie je velmi obsáhlá a zpracování celé tématiky by vydalo na několik knih. Byla vybrána základní témata, která jsou ilustrována na grafech, což napovídá i název práce.

Kapitola druhá se zabývá opět jen malou částí online Ramseyovy teorie. Témata v této kapitole byla volena podle toho, čím jsme se během celého roku zabývali. Je zde shrnuta vyhnutelnost a nevyhnutelnost na některých třídách grafů a nastíněna obtížnost určení přesných hodnot online Ramseyových čísel už pro strukturálně jednoduchý graf jako je cesta. V budoucnu by si zasloužila pozornost hypotéza od Š. Petříčkové z druhé kapitoly. Cestou může být nalézt nějakou strategii pro Paintera, podobnou té v důkazu věty 16. Kapitola je zakončena drobným pozorováním, které dovoluje konstruovat jednobarevné cesty i jiným způsobem než je uveden v původním článku.

Třetí kapitola se zabývá horním odhadem online Ramseyových čísel kružnic. Kapitola je členěna na tři části. V první části je uvedena přesná hodnota pro C_3 a horní odhad pro C_4. Druhá část se zabývá kružnicemi sudé délky a v třetí části je horní odhad pro liché kružnice. Dále může být věnována pozornost dolním odhadům pro online Ramseyova čísla kružnic.

Literatura

[1] V. Angeltveit and B. D. McKay. $r(5,5) \leq 48$. *Journal of Graph Theory*, 2018.

[2] V. Blažej. Online ramsey theory. Master's thesis, ČVUT Praha, 2017.

[3] M. Bóna. *A Walk Through in Combinatorics, An Introduction to Enumeration and Graph Theory.* World Scientific, 2016.

[4] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang. *Graphs and Digraphs.* CRC Press, 2015.

[5] V. Chvátal, V. Rődl, E. Szemerédi, and V. T. Trotter. The ramsey number of a graph with bounded maximum degree. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 34, 1983.

[6] D. Conlon. A new upper bound for bipartite ramsey problem. *Journal of Graph Theory*, 58, 2008.

[7] D. Conlon. A new upper bound for diagonal ramsey numbers. *Annals of Mathematics*, 170, 2009.

[8] D. Conlon. On-line ramsey numbers. *SIAM J. Discrete Math.*, 23, 2009.

[9] R. Diestel. *Graph Theory.* Springer, 2017.

[10] P. Erdős, J. Faudree, C. C. Rousseau, and R. H. Schelp. The size ramsey numbers. *Periodica Mathematica Hungarica*, 9, 1978.

[11] G. Exoo. A lower bound for $r(5,5)$. *Journal of Graph Theory*, 13, 1989.

[12] R. Graham. Some of my favorite problems in ramsey theory. *INTEGERS*, 2, 2007.

[13] R. L. Graham, B. L. Rothschild, and J. H. Spencer. *Ramsey Theory.* Wiley, 1990.

[14] R. L. Graham and J. H. Spencer. Ramsey theory. `http://www.math.ucsd.edu/~ronspubs/90_06_ramsey_theory.pdf`.

[15] J. Grytczuk, M. Haluszczak, and H. A. Kierstead. On-line ramsey theory. *Electronic Journal Combinatorics*, 11, 2004.

[16] J. Grytczuk, H. A. Kierstead, and P. Prałat. Online ramsey numbers for paths and stars. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 10, 2008.

[17] R. I. Irwing. A bipartite ramsey problem and zarankiewicz numbers. *Glasgow Mathematical Journal*, 19, 1978.

[18] A. Kurek and A. Rucinski. Two variants of the size ramsey number. *Discussiones Mathematicae - Graph Theory*, 25, 2005.

[19] J. Matoušek and J. Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Karolinum, 2010.

[20] B. D. McKay and S. Radziszowski. A new upper bound for the ramsey number r(5,5). *Australasian J. Combinatorics*, 5, 1991.

[21] J. Nešetřil. Diskrétní matematika. `https://iuuk.mff.cuni.cz/~nesetril/cz/dm/?video=13-prednaska-2015-01-08`. video.

[22] Š. Petříčková. Online ramsey theory for planar graphs. *Electronic Journal Combinatorics*, 21, 2014.

[23] P. Prałat. A note on small on-line ramsey numbers for paths and their generalization. *Australasian Journal of Combinatorics*, 40, 2008.