Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

Plzeň, 2019

Patrik Drda

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne . . . .

Poděkování

Tímto chci poděkovat svému vedoucímu práce RNDr. Petru Tomiczkovi, CSc, že mi umožnil zpracovat dané téma práce, dále za vztřícnost a odborné rady při konzultacích a psaní práce.

Abstrakt

V práci se zabýváme úvodem do teorie řetězových zlomků. Je zde definovaný konečný a nekonečný řetězový zlomek, následuje definice částečných zlomků a jejich vlastností. Dále se zde zabýváme konvergencí řetězových zlomků. Vše je doplněno o vlastní i převzaté příklady pro lepší pochopení teorie. Následně hledáme rozvoj vybraných funkcí v řetězový zlomek. Pro vyšetření konvergence těchto rozvojů jsme využili kritéria konvergence řetězových zlomků spolu s vlastní metodou určení konevergence. Součástí práce je také určení přibližného řešení nelineární Riccatiho diferenciální rovnice na omezeném intervalu pomocí metody řetězových zlomků. Námi získané řešení se příliš neliší od přesného. Pro snadnější počítání a porovnání výsledku používáme numerický software Mathematica.

Klíčová slova: obecný řetězový zlomek, částečné zlomky, konvergence řetězových zlomků, hypergeometrická řada, Gaussův řetězový zlomek, nelineární diferenciální rovnice

Abstract

In the work we deal with the introduction to the theory of continued fractions. There is a finite and infinite continued fraction defined here, followed by the definition of convergents and their properties. Next, we deal with the continued fractions convergence. Everything is complemented by own and borrowed examples for better understanding of the theory. Subsequently we are looking for the development of selected functions in a continued fraction. To examine the convergence of these developments, we used the criteria of convergence of continued fractions together with own the method of determining the convergence. Part of the work is also determination of approximate solution of nonlinear Riccati differential equation on a limited interval using the method of continued fractions. Our solution is not very different from the exact one. For easier counting and comparison of results we use numerical software Mathematica.

Keywords: general continued fraction, convergents, convergence of continued fractions, hypergeometric series, Gauss's continued fraction, nonlinear differential equation

Obsah

Použité značení

$\mathbb{R}$	...	množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	...	množina komplexních čísel
$\mathbb{N}$	...	množina přirozených čísel
$\left[b_0; \frac{a_k}{b_k}\right]_1^\infty$	...	nekonečný řetězový zlomek
$\left[b_0; \frac{a_k}{b_k}\right]_1^n$	...	konečný řetězový zlomek
$\frac{P_k}{Q_k}$	...	částečný zlomek
Δ_k, D_k	...	determinant
$y^{(n)}$	...	n-tá derivace

Úvod

Při studiu se snad každý setkal se zlomky, ale o řetězových zlomcích už se jen málo studentů dozví. Je to také dáno tím, že není tolik českých knih nebo překladů, které by s teorií řetězových zlomků čtenáře seznámila. Můžeme zde zmínit dvě nejznámější, tj. překlad Chinchinovy knihy [16] a Danilova kniha o přehledu matematické analýzy [2], kde je věnovaná celá kapitola teorii řetězových zlomků. Nevýhodou obou monografií je, že v první se čtenář dozví o pravidelných řetězových zlomcích používané převážně v teorii čísel, analytická teorie řetězových zlomků zde není bohužel zmíněná. Ve druhé knize je zase problém s uvedenými příklady, u kterých by čtenář více ocenil detailnější postup řešení, např. při určení konvergence řetězového zlomku. Naším cílem je proto seznámit hlavně úvodem do analytické částí řetězových zlomků vyskytující se převážně v matematické analýze.

V první kapitole se podíváme do historie řetězových zlomků a jejich vývoj v čase. Dozvíme se, že řetězové zlomky mají dlouhou historii a také, že v 18 a 19. století nebyl matematik, který by se nevěnoval této teorii.

Ve druhé kapitole si představíme základní definici řetězového zlomku, vysvětlíme si rozdíl mezi konečným a nekonečným řetězovým zlomkem. Dále si ukážeme, jak převádět zlomek na řetězový zlomek a naopak. Nezbytnou částí této kapitoly jsou částečné zlomky u kterých si vysvětlíme, jak se počítají a jaké mají vlastnosti. Na závěr kapitoly si představíme ekvivalentní a přiřazené řetězové zlomky a ukážeme si, jak je sestrojit. Celá kapitola bude doplněna o příklady pro lepší pochopení teorie.

Dále se budeme věnovat konvergenci řetězových zlomků, tak jako u řad, mají i řetězové zlomky své kritéria konvergence. Budeme zkoumat konvergenci řetězových zlomků s kladnými prvky a poté konvergenci obecného řetězového zlomku.

Ve čtvrté kapitole se budeme zabývat Gaussovým řetězovým zlomkem, který je velice užitečný při rozvoji elementárních funkcí, ale i obtížnějších funkcí. Představíme si některé rozvoje elementárních funkcí v řetězový zlomek a pokusíme se vlastním způsobem vyšetřit jejich konvergenci v reálném oboru. Na závěr kapitoly představíme bez důkazu rozvoje důležitých speciálních funkcí, např. neúplnou gama funkci nebo chybovou funkci.

V poslední kapitole bude představena Eulerova diferenciální metoda, která poskytuje zajímavé identity mezi určitým integrálem a řetězovým zlomkem. Dále se zaměříme na použití řetězových zlomků při hledání řešení LDR 2. řádu, konkrétně Hermitovy nebo Legendreovy diferenciální rovnice. Ukážeme si použití řetězových zlomků při hledání řešení nelineární speciální Riccatiho rovnice. Na závěr se pokusíme najít přibližné řešení nelineární Riccatiho rovnice na omezeném intervalu, k tomu použijeme numerický software Mathematica. Poté zhodnotíme námi získané výsledky.

Kapitola 1

Historie řetězových zlomků

Algoritmy analogické řetězovým zlomkům užívali již staří řečtí matematikové (Euklidův algoritmus, archimédovské aproximace pro $\sqrt{3}$). Ze středověkých matematiků se řetězcům značně přiblížil Omar al-Chajjám (kolem 1040-1123), který se snažil zobecnit Euklidův algoritmus pro případ nesouměřitelných veličin. Poprvé se řetězce v dnešní podobě objevují v knize *"Algebra"* italského matematika Raffaela Bombelliho, která vyšla roku 1572. Bombelli přispěl do této oblasti tím, že vyjádřil $\sqrt{13}$ jako periodický řetězový zlomek. Kromě těchto příkladů však žádný matematik do této doby nezkoumal vlastnosti řetězových zlomků.

Řetězci se opět zabývala řada významných matematiků 17. století, například John Wallis, Christian Huygens nebo Lord Brouncker. Wallis ve své knize *Arithemetica Infinitorium* (1655) vyvinul a prezentoval identitu:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \dots}$$

Lord Brouncker (1620-1684) transformoval výše zmíněnou identitu do:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{\dots}}}}$$

Nakonec Wallis převzal iniciativu a začal první kroky k zobecnění teorie řetězových zlomků. Ve své knize *Opera Mathematica* (1695) Wallis popsal některé ze základních vlastností řetězových zlomků. Vysvětlil jak vypočítat k-tý částečný zlomek a objevil některé z nyní známých vlastností částečných zlomků (viz Kapitola 2). V této práci byl poprvé použit pojem řetězový zlomek. Holandský matematik a astronom Christian Huygens (1629-1695) byl první, který demonstroval praktickou aplikaci řetězových zlomků, když počítal počet zubů pro konstrukci planetaria (1682).

Zakladatelem teorie řetězových zlomků jako samostatného oddílu matematiky je až Leonhard Euler. Ve své práci *De Fractionlous Continious* (1737) dokázal, že číslo je racionální pouze tehdy, jestliže může být vyjádřeno jako jednoduchý konečný řetězový zlomek a zároveň dokázal, že řetězový zlomek iracionálního čísla je nekonečný. Poskytl také rozvoj čísla e v řetězový zlomek. Tento rozvoj poté využil, aby dokázal, že e je iracionální. Také ukázal, jak převádět obecnou nekonečnou řadu do řetězového zlomku a naopak. Většina velkých matematiků 18. století a první poloviny 19. století přispěla svým dílem k rozvoji této teorie. Například Johann Lambert podal první důkaz iracionality čísla π při použití řetězových zlomků pro $\tan(x)$. Joseph Louis Langrange použil řetězové zlomky k nalezení obecného řešení Pellovy rovnice $x^2 - ny^2 = 1$. Jeho metoda z roku 1776 pro získání řešení diferenciální rovnice pomocí řetězových zlomků byla hlavním mezníkem, který vedl k dalšímu vývoji této teorie v dalším století.

19. století může být považováno za zlatý věk řetězových zlomků. Bylo to období, kdy tento obor byl znám všem matematikům. V důsledku toho došlo k obrovskému rozvoji této oblasti. Mezi matematiky, kteří přispěli k tomuto rozvoji, byli např. Cauchy, Gauss, Jacobi, Hermit. Henri Padé ve své práci (1892) formalizoval koncept racionálních aproximací a zdůraznil spojení s teorií řetězových zlomků. V roce 1895 začal Stieltjes formulovat analytickou teorii řetězových zlomků. V jeho práci *Recherches sur les fractions continues*(1894) věnované konvergenci řetězových zlomků se poprvé vyskytl integrál, dnes nazývaný Stieltjesův integrál. Cennými výsledky také přispěli Markov, Pringsheim, Chebyshev a další.

V roce 1913 se objevila první moderní kniha týkající se teorií řetězových zlomků. Byla to Perronova *Die Lehre von den Kettenbruchen*, která byla naposledy editována v roce 1957. Tato kniha je jediná důležitá práce zahrnující jak aritmetickou, tak analytickou teorii řetězových zlomků. Jediná srovnatelná práce zabývající se analytickou teorií řetězových zlomků je Wallova publikace z roku 1948, která zahrnuje maticovou teorii řetězových zlomků, vyvíjenou v 20. letech 20. století. Mezi další významné matematiky 20.století zabývající se teorií řetězových zlomků patří Khinchin, Lévy, Vinogradov, Ramanujan, Thron, Waadeland a další.

Z českých matematiků se této teorii věnoval Karel Rychlík. Do češtiny přeložil druhé vydání Khinchinova spisu z roku 1949. Text doplnil předmluvou, rozsáhlými poznámkami uvedenými přehledně na konci knihy. Rychlík zde cituje například dvě své práce, učebnici *Úvod do elementární číselné theorie* a článek *Geometrické znázornění řetězců.* [2][5][9][10][11]

Kapitola 2

Základní definice

2.1 Definice řetězového zlomku

Obecným řetězovým zlomkem nazýváme výraz tvaru

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}} = \left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots \right] . \tag{2.1}$$

Řetězový zlomek (2.1) zapisujeme také zkráceně ve tvaru

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots \ . \tag{2.2}$$

Prvky řetězového zlomku $a_0, a_k, b_k (k = 1, 2, \dots)$ jsou obecně reálná nebo komplexní čísla nebo funkce jedné nebo více proměnných. Zlomky $b_0 = \frac{b_0}{1}, \frac{a_k}{b_k}, (k = 1, 2, \dots)$ nazýváme **články** řetězového zlomku (2.1) (nulovým, prvním atd.) a čísla a_k a b_k **prvky** k-tého článku (částečnými jmenovateli nebo čitateli). Budeme předpokládat, že $b_k \neq 0$. Při zkráceném zápisu (2.1) nemůžeme v článcích $\frac{a_k}{b_k}$ krátit.
Řětězový zlomek, který má konečný počet článků, např. n (bez nulového), se nazývá **konečný** řetězový zlomek a zapisuje se stručně takto:

$$\left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right] = \left[b_0; \frac{a_k}{b_k} \right]_1^n . \tag{2.3}$$

Každý konečný řetězový zlomek je výsledkem konečného počtu racionálních úkonů nad jeho prvky. Jsou-li speciálně všechny prvky konečného řetězového zlomku racionální čísla, je i sám řetězový zlomek racionálním číslem. Řetězový zlomek (2.1), který má nekonečně mnoho článků, se nazývá **nekonečný** řetězový zlomek a zapisuje se stručně ve tvaru

$$\left[b_0; \frac{a_k}{b_k} \right]_1^\infty . \tag{2.4}$$

Řetězový zlomek

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}} = \left[b_0; \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \dots\right], \tag{2.5}$$

jehož všechny čitatele jsou rovny jedné, se nazývá **prostý řetězový zlomek** a čísla $b_1, b_2, \dots$ **prosté jmenovatele**. Prostý řetězový zlomek, jehož jmenovatele jsou přirozená čísla, se nazývá **pravidelný**. V teorii čísel se obyčejně vyšetřují pouze pravidelné řetězové zlomky. [1]

2.2 Převedení řetězového zlomku na zlomek a naopak

Každý konečný řetězový zlomek můžeme zapsat jako zlomek, provedeme-li početní úkony, naznačené v zápisu řetězového zlomku.

Příklad 2.1. Převedeme řetězový zlomek

$$\left[3; \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{5}\right] = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}$$

na zlomek.

Řešení. Provedeme-li postupně všechny naznačené početní úkony, dostaneme:

$$1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5};\ \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6};\ 3 + \frac{5}{6} = \frac{23}{6};$$

$$\frac{1}{\frac{23}{6}} = \frac{6}{23};\ 3 + \frac{6}{23} = \frac{75}{23};$$

je tedy

$$\left[3; \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{5}\right] = \frac{75}{23}.$$

Naopak můžeme každý kladný zlomek, jehož čitatel a jmenovatel jsou přirozená čísla, převést na řetězový zlomek, jehož prvky jsou přirozená čísla. Mějme například zlomek $\frac{p}{q}$. Tento zlomek můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{p}{q} = b_0 + \frac{r_0}{q},$$

kde b_0 je jeho celá část a r_0 je zbytek (je-li zlomek $\frac{p}{q} < 1$, je $b_0 = 0$ a $r_0 = p$). Dělíme-li nyní čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{r_0}{q}$ číslem r_0, dostaneme

$$\frac{r_0}{q} = \frac{1}{\frac{q}{r_0}} = \frac{1}{b_1 + \frac{r_1}{r_0}},$$

kde b_1 je celočíselný podíl a r_1 je zbytek při dělení čísla q číslem r_0. Dělíme-li čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{r_1}{r_0}$ číslem r_1, dostaneme

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}} = \frac{1}{b_2 + \frac{r_2}{r_1}},$$

kde b_2 je celočíselný podíl a r_2 je zbytek při dělení čísla r_0 číslem r_1. Dále pokračujeme analogicky.
Protože $q > r_0 > r_1 > r_2 > \dots$ a $r_i (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$ jsou přirozená čísla, dostaneme nakonec zbytek $r_k = 0$, tj.

$$\frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} = \frac{1}{a_k + 0}.$$

Užijeme-li uvedeného vyjádření zlomků $\frac{r_i}{r_{i-1}}$, dostaneme

$$\frac{p}{q} = b_0 + \frac{r_0}{q} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{r_1}{r_0}} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_k}}}}.$$

Příklad 2.2. Převedeme zlomek $\frac{75}{23}$ na řetězový zlomek.

Řešení. Postupně dostáváme

$$\frac{75}{23} = 3 + \frac{6}{23} = 3 + \frac{1}{\frac{23}{6}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{5}{6}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{6}{5}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}.$$

Je tedy

$$\frac{75}{23} = \left[3; \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{5}\right].$$

Analogicky se upravují i obecné řetězové zlomky. [1]

2.3 Částečné zlomky

Mějme konečný nebo nekonečný řetězový zlomek

$$\left[b_0; \frac{a_k}{b_k}\right]_1^\infty. \tag{2.6}$$

Zlomek

$$\frac{P_k}{Q_k} \equiv \left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_k}{b_k}\right]$$

($k = 1, 2, \dots$) se nazývá k-tý *částečný zlomek* řetězového zlomku (2.6). Dále zavedeme částečné zlomky $\frac{P_0}{Q_0}$ a $\frac{P_{-1}}{Q_{-1}}$, položíme

$$P_0 = b_0,\ Q_0 = 1 \tag{2.7}$$

a

$$P_{-1} = 1,\ Q_{-1} = 0\,. \tag{2.8}$$

Věta 2.3 (O postupném výpočtu částečných zlomků)**.** *Čísla P_k, Q_k ($k = 1, 2, \dots$), jsou určená vztahy*

$$P_k = b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}\ , \tag{2.9}$$

$$Q_k = b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}\ , \tag{2.10}$$

jsou čitateli a jmenovateli částečných zlomků $\frac{P_k}{Q_k}$ řetězového zlomku (2.6).

Důkaz. viz [1] □

Příklad 2.4. Určeme všechny částečné zlomky řetězového zlomku

$$\left[2; \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}\right]\ .$$

Řešení. Částečné zlomky určíme podle následujícího schématu:

k	-1	0	1	2	3	4
a_k			1	3	5	7
b_k		2	3	5	7	9
P_k	1	2	7	41	322	637
Q_k	0	1	3	18	141	279

Je tedy

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{2}{1};\ \frac{P_1}{Q_1} = \frac{7}{3};\ \frac{P_2}{Q_2} = \frac{41}{18};\ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{322}{141};\ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{637}{279}\ .$$

Příklad 2.5. Určeme všechny částečné zlomky řetězového zlomku

$$\left[0; \frac{x}{1}, \frac{x}{3}, \frac{x}{5}, \frac{x}{7}, \frac{x}{9}\right]\ .$$

Řešení. Dostáváme následující částečné zlomky:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{x}{1}\ ;$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{3x}{x+3}\ ;$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{x^2+15x}{6x+15}\ ;$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{10x^2+105x}{x^2+45x+105}\ ;$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{x^3+105x^2+945x}{15x^2+420x+945}\ .$$

Poznámka 2.6. Poněvadž čitatele a jmenovatele částečných zlomků nejsou určeny jednoznačně, nevyhovují čitatele a jmenovatele částečných zlomků nekanonického tvaru v obecném případě rovnicím (2.9) a (2.10), například řetězový zlomek má hodnotu

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} = 2\,,$$

ale $\frac{P_2}{Q_2}$ není definovaný. V dalším kapitolách budeme vždy předpokládat, že všechny částečné zlomky jsou kanonické.

Důsledek 2.7. Čitatele a jmenovatele částečných zlomků prostého řetězového zlomku

$$\left[b_0; \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots\right]$$

budeme značit p_k, q_k a můžeme je určit ze vztahů

$$p_k = b_k p_{k-1} + p_{k-2}\ , \tag{2.11}$$

$$q_k = b_k q_{k-1} + q_{k-2}\ ,$$

kde $p_0 = b_0,\ p_{-1} = 1,\ q_0 = 1$ a $q_{-1} = 0$.

Věta 2.8. *Pro dva sousední částečné zlomky* $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ *a* $\frac{P_k}{Q_k}$ *řetězového zlomku (2.6) platí vzorec*

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = (-1)^{k-1}\ \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{Q_{k-1}Q_k}\ (k \geq 1). \tag{2.12}$$

Důkaz. Platí

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{\Delta_k}{Q_{k-1}Q_k}\ , \tag{2.13}$$

kde

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{vmatrix}\ .$$

Užitím vztahů (2.9) a (2.10) plyne ze známých vlatností determinantu

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2} & P_{k-1} \\ b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2} & Q_{k-1} \end{vmatrix} = a_k \begin{vmatrix} P_{k-2} & P_{k-1} \\ Q_{k-2} & Q_{k-1} \end{vmatrix} = -a_k \Delta_{k-1}\ .$$

Odtud postupně dostaneme

$$\Delta_k = (-a_k)(-a_{k-1}) \dots (-a_1)\Delta_0 = (-1)^k\ a_1 a_2 \dots a_k \Delta_0\ ,$$

kde

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\ .$$

Je tedy

$$\Delta = (-1)^{k-1}\ a_1 a_2 \dots a_k\ ,$$

a pomocí vzorce (2.13) dostaneme

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = (-1)^{k-1}\ \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{Q_{k-1}Q_k}\ .$$

□

Důsledek 2.9. Jsou-li $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ a $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k \geq 1)$ dva sousední částečné zlomky řetězového zlomku (2.6), pak

$$\Delta_k = P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}\ a_1 a_2 \dots a_k\ .$$

Důsledek 2.10. Pro dva sousední částečné zlomky $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$ $(k \geq 1)$ prostého řetězového zlomku platí vztah

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k}. \tag{2.14}$$

Věta 2.11. *Pro částečné zlomky* $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$ *a* $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k \geq 2)$ *řetězového zlomku (2.6) platí vzorec*

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = (-1)^k\ \frac{a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k}{Q_{k-2} Q_k}. \tag{2.15}$$

Důkaz. Je

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = \frac{D_k}{Q_{k-2} Q_k}, \tag{2.16}$$

kde

$$D_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-2} \\ Q_k & Q_{k-2} \end{vmatrix}\ .$$

Užitím věty 2.3 a elementárních vlastností determinantů odtud dostáváme

$$D_k = \begin{vmatrix} b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2} & P_{k-2} \\ b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2} & Q_{k-2} \end{vmatrix} = b_k\ \begin{vmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{vmatrix} = b_k \Delta_{k-1}\ ,$$

kde Δ_k je determinant, užívaný ve větě 2.8. Podle důsledku 2.9 je

$$\Delta_{k-1} = (-1)^k\ a_1 a_2 \dots a_{k-1}\ ,$$

odkud plyne

$$D_k = (-1)^k\ a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k\ .$$

Užitím vztahu (2.15) dostaneme vzorec (2.16). □

Důsledek 2.12. Jsou-li $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$ dva sousední částečné zlomky prostého řetězového zlomku

$$\left[b_0; \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{b_n} \right]\ ,$$

platí vzorec

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = (-1)^k\ \frac{b_k}{q_{k-2} q_k}. \tag{2.17}$$

Věta 2.13. *Jsou-li prvky konečného řetězového zlomku kladné, pak jeho částečné zlomky se sudým indexem tvoří rostoucí posloupnost a částečné zlomky s lichým indexem tvoří klesající posloupnost. Každý částečný zlomek sudého řádu je menší než libovolný částečný zlomek lichého řádu. Číslo* α*, udávající hodnotu daného řetězového zlomku, leží mezi dvěma sousedními částečnými zlomky.*

Důkaz. Mějme řetězový zlomek

$$\alpha = \left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_k}{b_k}\right] \tag{2.18}$$

s kladnými prvky a_k a b_k a nechť $\frac{P_k}{Q_k}$, $k = 0, 1, \dots, n$ jsou jeho kanonické částečné zlomky. Zřejmě je $P_k > 0$ a $Q_k > 0$.
Budeme rozlišovat dva případy.
1. Nechť $k = 2m$ je sudé číslo. Poněvadž je $a_i > 0$ a $b_k > 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, plyne ze vztahu (2.15) nerovnost

$$\frac{P_{2m}}{Q_{2m}} - \frac{P_{2m-2}}{Q_{2m-2}} > 0 \ .$$

Je tedy

$$\frac{P_{2m-2}}{Q_{2m-2}} < \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} \, , \, m = 1, 2, \dots$$

čili

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \dots \ .$$

2. Analogicky pro $k = 2m + 1$ dostaneme

$$\frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}} > \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} \, , \, m = 1, 2, \dots$$

čili

$$\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \frac{P_5}{Q_5} > \dots \ .$$

Dokázali jsme tedy, že částečné zlomky sudého řádu tvoří rostoucí posloupnost a částečné zlomky lichého řádu tvoří klesající posloupnost.

Položíme-li dále ve vzorci (2.12) $k = 2m$, dostaneme

$$\frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} \ ,$$

tj. každý částečný zlomek lichého řádu je větší než následující částečný zlomek sudého řádu. Z toho už plyne, že každý částečný zlomek lichého řádu je větší než libovolný částečný zlomek sudého řádu. Je-li totiž $\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}}$ libovolný částečný zlomek lichého řádu, platí pro $s \leq m$ nerovnosti

$$\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}} \geq \frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}}$$

a pro $s > m$ nerovnosti

$$\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}} > \frac{P_{2s}}{Q_{2s}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} \ .$$

Pro libovolné s a m tedy platí

$$\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} \, .$$

Přímo ze způsobu tvoření řetězového zlomku

$$\alpha = \left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \right]$$

konečně plyne

$$\alpha > \frac{P_0}{Q_0},\ \alpha < \frac{P_1}{Q_1},\ \alpha > \frac{P_2}{Q_2}$$

atd. Je tedy

$$\frac{P_k}{Q_k} < \alpha < \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}\,, \tag{2.19}$$

je-li k sudé, a

$$\frac{P_k}{Q_k} > \alpha > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}\,, \tag{2.20}$$

je-li k liché. Pro poslední částečný zlomek bude ve vztazích (2.19) a (2.20) místo ostré nerovnosti zřejmě platit vpravo rovnost. □

Důsledek 2.14. Jsou-li prvky řetězového zlomku (2.18) kladné a jsou-li $\frac{P_k}{Q_k}$ jeho částečné zlomky, platí odhad

$$\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| \leq \frac{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}}\,, \tag{2.21}$$

neboť z toho, co jsme již dokázali, plyne

$$\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| \leq \left| \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} \right| \ ;$$

odtud dostaneme odhad (2.21) pomocí vztahu (2.12).

Důsledek 2.15. Je-li konečný řetězový zlomek α s kladnými prvky prostý a jsou-li $\frac{p_k}{q_k}$ jeho částečné zlomky, platí

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}\ .$$

2.4 Ekvivalentní a přiřazené řetězové zlomky

Při transformaci řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots$$

v řetězový zlomek

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots}}}$$

mohou nastat dva případy:

1. částečné zlomky tohoto řetězového zlomku se rovnají částečným součtům dané řady,

2. částečné zlomky se nerovnají částečným součtům.

V prvním případě říkáme, že řetězový zlomek je dané řadě **ekvivalentní**, v druhém, že je k ní **přiřazen**. Rozvoj n-tého částečného zlomku ekvivalentního řetězového zlomku v řadu splývá s výchozí řadou až do členu c_k včetně. Je zřejmé, že ekvivalentní řetězový zlomek je jen jinou formou zápisu dané řady a nedává žádné nové přibližné vyjádření jejího součtu. Naproti tomu částečné zlomky přiřazeného řetězového zlomku jsou lomené racionální funkce té proměnné, jejíž mocniny se v dané řadě vyskytují. Řetězový zlomek přiřazený dané řadě dává proto nekonečně mnoho nových přibližných vyjádření jejího součtu. Co se týká konvergence, mohou si mocninná nebo číselná řada a řetězový zlomek, který je jí přiřazený, vést různě. Buď mohou oba konvergovat, nebo oba divergovat, nebo jeden konvergovat a jeden divergovat. Obor konvergence mocninné řady a jí přiřazeného řetězového zlomku mohou být proto různé. Existují například mocninné řady, které mají poloměr konvergence roven nule a při tom je možno je převést na přiřazené řetězové zlomky, které konvergují v libovolně velkém oboru. [2]

2.4.1 Sestrojení ekvivalentních řetězových zlomků

Definice 2.16. Řetězový zlomek nazveme ekvivalentní řadě $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, pokud

$$\frac{P_k}{Q_k} = s_k\,.$$

Věta 2.17 (Eulerova identita)**.** *Nechť* (c_k) *je posloupnost v* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
Potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \frac{c_0|}{|1} - \frac{c_1/c_0|}{|1+c_1/c_0} - \frac{c_2/c_1|}{|1+c_2/c_1} - \ldots - \frac{c_k/c_{k-1}|}{|1+c_k/c_{k-1}} - \ldots \tag{2.22}$$

Důkaz. viz [8] □

Když dosadíme $r_0 = c_0,\ c_n = r_0 r_1 \cdots r_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ potom (2.22) a se změní v následující formuli

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_0 r_1 \cdots r_k = \frac{r_0|}{|1} - \frac{r_1|}{|1+r_1} - \ldots - \frac{r_k|}{|1+r_k} - \ldots\ . \tag{2.23}$$

Příklad 2.18. Pro $c_k = \frac{(-1)^k}{k+1},\ k \geq 0$, dostaneme, že součet řady

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

a součet řetězového zlomku

$$\ln(2) = 1 + \frac{\frac{-1}{2}|}{|1} + \frac{\frac{2}{3}|}{|1-\frac{2}{3}} + \cdots + \frac{\frac{k}{k+1}|}{|1-\frac{k}{k+1}} + \ldots$$

jsou si rovny.

Příklad 2.19. $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots =$

$$= x + x \cdot \left(\frac{-x^2}{3}\right) + x \cdot \left(\frac{-x^2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-3x^2}{5}\right) + x \cdot \left(\frac{-x^2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-3x^2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-5x^2}{7}\right) + \dots =$$

$$= \frac{x|}{|1} + \frac{x^2|}{|3 - x^2} + \frac{9x^2|}{|5 - 3x^2} + \dots + \frac{(2k-1)^2 x^2|}{|2k+1-(2k-1)x^2} + \dots .$$

Rovnost jsme získali ze vztahu (2.23).

2.4.2 Sestrojení přiřazených řetězových zlomků

Definice 2.20. Řetězový zlomek nazveme přiřazený řadě $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, pokud

$$\frac{P_k}{Q_k} \neq s_k .$$

Viskovatova metoda. Nechť (c_{0k}) a (c_{1k}) jsou posloupnosti v $\mathbb{C}$, uvažujme podíl

$$f := \frac{c_{10} + c_{11} + c_{12} + \dots}{c_{00} + c_{01} + c_{02} + \dots} ,$$

pak elementárními úpravami dostaneme

$$f := \frac{1}{\frac{c_{00}}{c_{10}} + \frac{c_{00}+c_{01}+c_{02}+\dots}{c_{10}+c_{11}+c_{12}+\dots} - \frac{c_{00}}{c_{10}}} = \frac{c_{10}}{c_{00} + f_1} ,$$

kde

$$f_1 := \frac{c_{20} + c_{21} + c_{22} + \dots}{c_{10} + c_{11} + c_{12} + \dots}$$

a

$$c_{2k} = c_{10} c_{0,(k+1)} - c_{00} c_{1,(k+1)} \, , k = 0, 1, 2, \dots .$$

Analogicky je

$$f_1 := \frac{c_{20}}{c_{10} + f_2} ,$$

kde

$$f_2 := \frac{c_{30} + c_{31} + c_{32} + \dots}{c_{20} + c_{21} + c_{22} + \dots}$$

a

$$c_{3k} = c_{20} c_{1,(k+1)} - c_{10} c_{2,(k+1)} \, , k = 0, 1, 2, \dots$$

atd.
Je tedy

$$f_n := \cfrac{c_{10}}{c_{00} + \cfrac{c_{20}}{c_{10} + \cfrac{c_{30}}{c_{20} + \cfrac{c_{40}}{\dots}}}} = \left[0; \frac{c_{10}}{c_{00}}, \frac{c_{20}}{c_{10}}, \dots, \frac{c_{n0}}{c_{(n-1),0}}\right] ;$$

Koeficienty c_{jk} je výhodné počítat podle vztahu

$$c_{jk} = -\begin{vmatrix} c_{j-2,0} & c_{j-2,k+1} \\ c_{j-1,0} & c_{j-1,k+1} \end{vmatrix}$$

pro $j \geq 2$, $k \geq 0$.
Uvažujme případ, kdy $c_{00} = 1$ a $c_{0k} = 0$ pro $k \geq 1$, potom dostaneme výraz

$$c_{10} + c_{11} + c_{12} + \cdots = c_{10} + \frac{c_{11}}{1 + \frac{-c_{12} - c_{13} - \ldots}{c_{11} + c_{12} + c_{13} + \ldots}} .$$

Aplikací metody pro výpočet c_{jk} na posloupnosti $(\tilde{c}_{0k})$ a $(\tilde{c}_{1k})$, které jsou dány hodnotami

$$\tilde{c}_{00} := 1,\ (\tilde{c}_{0k}) := 0,\ k > 0,$$

$$(\tilde{c}_{1k}) := c_{1,k+1},\ k \geq 0\,,$$

dostáváme řetězový zlomek ve tvaru

$$\left[c_{10}; \frac{\tilde{c}_{10}}{\tilde{c}_{00}}, \frac{\tilde{c}_{20}}{\tilde{c}_{10}}, \ldots, \frac{\tilde{c}_{k0}}{\tilde{c}_{k-1,0}} \right] .$$

Příklad 2.21. Uvažujme opět řadu z příkladu 2.18. Jestliže začneme Viskovatovou metodou s $c_{1k} = \frac{(-1)^k}{k+1}$ pro $k \geq 0,\ c_{00} = 1,\ c_{0k} = 0$ pro $k \geq 1$, dostaneme řetězový zlomek ve tvaru

$$f := \frac{1|}{|1} + \frac{\frac{1}{2}|}{|1} + \frac{\frac{1}{12}|}{|\frac{1}{2}} + \ldots\ .$$

Pomocí vzorce (2.9) a (2.10) určíme částečné zlomky z následujícího schématu:

k	-1	0	1	2	3
a_k			1	1/2	1/12
b_k		0	1	1	1/2
P_k	1	0	1	2	7
Q_k	0	1	1	3	10

Omezíme-li se na třetí částečný zlomek, dostaneme

$$\ln(2) \approx \frac{P_3}{Q_3} = 0,7\ ,$$

v předešlém příkladu získáme třetí částečný zlomek $\frac{P_3}{Q_3} \doteq 0,5833$. Tedy prvních několik částečných zlomků indikuje rychlejší konvergenci k $\ln(2)$ než částečné zlomky řetězového zlomku z příkladu 2.19.

Příklad 2.22. Rozložme funkci

$$f(x) = \frac{1-x}{1-5x+6x^2}$$

v řetězový zlomek.

Řešení. Koeficienty c_{jk} zapisujeme do následujícího schématu:

j/k	0	1	2
0	1	$-5x$	$6x^2$
1	1	$-x$	0
2	$-4x$	$6x^2$	0
3	$-2x^2$	0	0
4	$-12x^4$	0	0

Je tedy

$$\frac{1-x}{1-5x+6x^2} = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-4x}{1}, \frac{-2x^2}{-4x}, \frac{-12x^4}{-2x^2}\right] =$$

$$= \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-4x}{1}, \frac{-2x}{-4}, \frac{-12x}{-2x}\right] .$$

Příklad 2.23 (Aproximace funkce $\arctan x$ lomenou racionální funkcí). Sestrojme přiřazený řetězový zlomek funkce $\arctan x$ a určeme částečný zlomek $\frac{P_4}{Q_4}$.

Řešení. Funkci $\arctan x$ lze vyjádřit ve tvaru řady

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \; |x| \leq 1 \; .$$

Viskovatovou metodou můžeme určit pouze konečně mnoho článků řetězového zlomku. Určíme koeficienty $\tilde{c}_{1k}$ pro $(k = 1, 2, 3, 4)$:

$$\tilde{c}_{00} = 1,\; \tilde{c}_{10} = c_{11} = \frac{-x^3}{3},\; \tilde{c}_{11} = c_{12} = \frac{x^5}{5},$$

$$\tilde{c}_{12} = c_{13} = \frac{-x^7}{7},\; \tilde{c}_{13} = c_{14} = \frac{x^9}{9},\; \tilde{c}_{14} = c_{15} = \frac{-x^{11}}{11} \; .$$

Koeficienty $\tilde{c}_{jk}$ zapíšeme do následujícího schématu:

j/k	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	$\frac{-x^3}{3}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{-x^7}{7}$	$\frac{x^9}{9}$	$\frac{-x^{11}}{11}$
2	$\frac{-x^5}{5}$	$\frac{x^7}{7}$	$\frac{-x^9}{9}$	$\frac{x^{11}}{11}$	0
3	$\frac{4x^{10}}{525}$	$\frac{-8x^{12}}{945}$	$\frac{12x^{14}}{1485}$	0	0
4	$\frac{-10500x^{17}}{3675\cdot 4725}$	0	0	0	0

Je tedy

$$\arctan x \approx \left[x; \frac{\frac{-x^3}{3}}{1}, \frac{\frac{-x^5}{5}}{\frac{-x^3}{3}}, \frac{\frac{4x^{10}}{525}}{\frac{-x^5}{5}}, \frac{\frac{-10500x^{17}}{3675\cdot 4725}}{\frac{4x^{10}}{525}}, \ldots\right] =$$

$$= \left[x; \frac{-x^3}{3}, \frac{-3x^5}{\frac{-5x^3}{3}}, \frac{20x^{10}}{-105x^5}, \frac{\frac{-125x^7}{3}}{1}, \ldots\right] .$$

Z částečného zlomku $\frac{P_4}{Q_4}$ určíme přibližnou hodnotu funkce:

$$\arctan x \approx \frac{P_4}{Q_4} = \frac{64x^5 + 735x^3 + 945x}{225x^4 + 1050x^2 + 945}\,.$$

Zvolíme-li např. $x = 1$, dostáváme přibližnou hodnotu

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) \approx \frac{P_4}{Q_4} = \frac{436}{555} \quad \left(\left|\frac{\pi}{4} - \frac{436}{555}\right| \leq 1.9 \cdot 10^{-4}\right)\,.$$

Pro porovnání: použitím mocninné řady až do čtvrtého členu se dopouštíme absolutní chyby $\Delta \leq 5 \cdot 10^{-2}$.

Poznámka 2.24. Pokud bychom spočetli více koeficientů $\tilde{c}_{jk}$, dostaneme přesnější aproximace dané funkce.

Poznámka 2.25. Dostaneme-li při výpočtu koeficientů c_{jk}, že $c_{j0} = 0$, potom $(k{+}2)$-hý sloupec schématu dostaneme posunutím $(k{+}1)$-ho sloupce o jedno místo vlevo, $(k{+}3)$-tí sloupec vypočítáme podle obecného pravidla z $(k{+}2)$-ho a k-tého, $(k{+}4)$-tý pomocí $(k{+}3)$-ho a $(k{+}2)$-ho sloupce atd. [1][2][4][12]

Kapitola 3

Základní kritéria konvergence řetězových zlomků

3.1 Konvergence řetězových zlomků

Budiž

$$\left[b_0;\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \dots\right] = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots}} \tag{3.1}$$

nekonečný řetězový zlomek a uvažujme k-tý částečný zlomek

$$\left[b_0;\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \dots,\ \frac{a_k}{b_k}\right] = \frac{P_k}{Q_k}\ (n = 1, 2, 3, \dots)\ . \tag{3.2}$$

Poznámka 3.1. Je-li $m < n$ a je-li

$$\frac{P_{m+1,k}}{Q_{m+1,k}} = \left[\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}},\ \dots,\ \frac{a_k}{b_k}\right]\ ,$$

tak platí jednoduchý vztah

$$\left[\frac{a_1}{b_1}, \dots,\ \frac{a_k}{b_k}\right] = \left[\frac{a_1}{b_1}, \dots,\ \frac{a_m}{b_m + \frac{P_{m+1,k}}{Q_{m+1,k}}}\right] \tag{3.3}$$

za předpokladu, že všechny uvedené zlomky existují.

Definice 3.2. Nekonečný řetězový zlomek (3.1) **konverguje**, existuje-li konečná limita

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k}\ ; \tag{3.4}$$

číslo α nazýváme hodnotou tohoto řetězového zlomku. Jestliže limita (3.4) neexistuje, říkáme, že řetězový zlomek (3.1) je **podstatně divergentní**. Jestliže $\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k} = \infty$ nebo $\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k} = -\infty$, říkáme, že řetězový zlomek je **nepodstatně divergentní**. [1][2][6]

Příklad 3.3. Určeme hodnotu α řetězového zlomku

$$\left[0;\ \frac{2}{1},\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}},\ \frac{-1}{2},\ \frac{\frac{-5}{2}}{\frac{5}{2}},\ \dots,\ \frac{2-\frac{3(k-1)}{2}}{1+\frac{k-1}{2}}\right] .$$

Řešení. Dostáváme částečné zlomky

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{2}{1},\ \frac{P_2}{Q_2}=\frac{3}{2},\ \frac{P_3}{Q_3}=\frac{4}{3},\ \frac{P_4}{Q_4}=\frac{5}{4},\ \dots,\ \frac{P_k}{Q_k}=\frac{k+1}{k} .$$

Potom

$$\alpha=\lim_{k\to\infty}\frac{P_k}{Q_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}=1 .$$

Poznámka 3.4. Jelikož je celkem obtížné najít obecný vztah pro k-tý částečný zlomek, je přirozené se ptát na kritéria konvergence podobně jako u nekonečných řad.

3.1.1 Konvergence řetězových zlomků s kladnými prvky

Věta 3.5. *Jsou-li prvky $a_k,\ b_k$ $(k=0,1,\dots)$ řetězového zlomku (3.1) kladné a je-li*

$$b_k \ge d > 0 \quad a \quad a_k \le b_k \ (k=1,2,\dots)\ , \tag{3.5}$$

je řetězový zlomek (3.1) konvergentní.

Důkaz. viz [1] □

Důsledek 3.6 (Seidlovo kritérium)**.** Je-li $b_k>0$, potom řetězový zlomek

$$\left[\frac{1}{b_k}\right]_1^\infty \tag{3.6}$$

konverguje, právě tehdy, když řada $\sum_{k=1}^\infty b_k$ diverguje.

Důkaz. viz [4] □

Důsledek 3.7. Pravidelný řetězový zlomek je vždy konvergentní.

Příklad 3.8. Vyšetřeme konvergenci řetězového zlomku

$$\left[1;\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \dots\right]=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\dots}}}$$

Řešení. Podle Seidlova kritéria řetězový zlomek konverguje, protože řada $\sum_{k=1}^\infty 3$ diverguje.

Příklad 3.9. Vyšetřete konvergenci řetězového zlomku

$$\left[1;\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2},\ \dots,\ \frac{1}{x^k}\right],\ (k=1,2,\dots),\ x>0 .$$

Řešení. Všechny funkce $f_k(x) = x^k$ jsou definovány na intervalu $I = (0, +\infty)$. Podle limitního podílové kritéria řada $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konverguje pouze na intervalu $I^* = (0, 1)$. Tedy podle Seidlova kritéria řetězový zlomek konverguje na intervalu $[1, +\infty)$.

Dosadíme-li za $x = 1$, dostaneme následující řetězový zlomek

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}},$$

kde φ je číslo, které se nazývá **zlatý řez**.

Platí také následující věta:

Věta 3.10. *Každé kladné číslo α můžeme rozložit na řetězový zlomek, jehož prvky jsou přirozená čísla, a to jediným způsobem (tj. pro každé kladné číslo α existuje právě jeden řetězový zlomek, jehož prvky jsou přirozená čísla, a jehož hodnota je rovna α). Tento řetězový zlomek je konečný, je-li číslo α racionální, a nekonečný, je-li číslo α iracionální.*

Důkaz. viz [16] □

Příklad 3.11 (Iracionalita čísla e). Číslo e lze vyjádřit řetězovým zlomkem ve tvaru

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \dots}}}},$$

jelikož jsou všechny prvky kladné, přirozené a platí $a_k \leq b_k$, $b_k > d > 0$ dostáváme z věty 3.5 a věty 3.10, že číslo e je iracionální.

Poznámka 3.12. Tímto způsobem se dá dokázat iracionalita např. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...

Přejdeme-li od řetězového zlomku (3.6) k řetězovému zlomku (3.1) pomocí transformace z poznámky 3.16, dostaneme následující formulaci Seidlova kritéria.

Věta 3.13 (Nutná a postačující podmínka konvergence)**.** *Řetězový zlomek (3.1) s kladnými prvky konverguje právě tehdy, když*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_3 \dots a_{2k-1} b_{2k}}{a_2 a_4 \dots a_{2k}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k} b_{2k+1}}{a_1 a_3 \dots a_{2k+1}} = +\infty\,.$$

Důkaz. viz [4] □

Důsledek 3.14. Divergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{b_k b_{k+1}}{a_{k+1}}}$ je postačující ke konvergenci řetězového zlomku (3.1) s kladnými prvky článků.

Důkaz. Z elementární nerovnosti $2\sqrt{u_n v_n} \leq u_n + v_n$, divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}$ implikuje, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty$ a důsledek plyne z věty 3.13. $\square$

Příklad 3.15. Vyšetřeme konvergenci řetězového zlomku převzatého z [8]

$$\left[0;\ \frac{1^m}{b},\ \frac{2^m}{b},\ \frac{3^m}{b},\ \dots\right] \quad m = 1, 2, \dots,\ b > 0\,.$$

Řešení. Jelikož je $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{b_k b_{k+1}}{a_{k+1}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{\sqrt{(k+1)^m}}$, dostáváme, že pro $m \leq 2$ je řada divergentní a řetězový zlomek konvergentní.

Poznámka 3.16. Užitím základní identické transformace

$$\left[b_0;\ \frac{a_k}{b_k}\right]_1^{\infty} = \left[b_0;\ \frac{p_1 a_1}{p_1 b_1},\ \frac{p_1 p_2 a_2}{p_2 b_2},\ \dots,\ \frac{p_{k-1} p_k a_k}{p_k b_k},\ \dots\right]\,,$$

kde $p_1,\ p_2,\ \dots$ jsou libovolná čísla, konečná a různá od nuly, můžeme řetězový zlomek (3.1) převést na tvar

$$\left[c_0;\ \frac{1}{c_k}\right]_{k=1}^{\infty}\,,$$

kde

$$c_0 = b_0,\ c_{2k-1} = \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k-2} b_{2k-1}}{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}},\ c_{2k} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2k-1} b_{2k}}{a_2 a_4 \dots a_{2k}}\,.$$

Poznámka 3.17. Uvědomme si, že je-li

$$\alpha = \left[b_0;\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \dots,\ \frac{a_k}{b_k},\ \dots\right]\,,$$

potom

$$-\alpha = \left[-b_0;\ \frac{a_1}{-b_1},\ \frac{a_2}{-b_2},\ \dots,\ \frac{a_k}{-b_k},\ \dots\right]\,.$$

Proto můžeme snadno všechna kritéria konvergence řetězových zlomků s kladnými prvky rozšířit na takové řetězové zlomky, jejichž čitatele jsou kladná čísla a jmenovatele čísla záporná. [1][2][4]

3.1.2 Konvergence obecného řetězového zlomku

Podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky je pro konvergenci posloupnosti $\left(\frac{P_k}{Q_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ nutné a stačí, aby ke každému $\varepsilon > 0$ existovalo číslo $N \in \mathbb{N} : N = N(\varepsilon)$ tak, že pro $k \in \mathbb{N} : k > N$ a pro každé $m \in \mathbb{N}$ je

$$\left|\frac{P_{k+m}}{Q_{k+m}} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \varepsilon\ .$$

Je-li $Q_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, pak zřejmě platí

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)\,. \tag{3.7}$$

Odtud plyne

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right) = \tag{3.8}$$

$$= \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n} \ ,$$

tj. konvergence řetězového zlomku (3.1) je ekvivalentní konvergenci řady (3.8). Je-li řetězový zlomek (3.1) konvergentní, tj. existuje-li

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k} = \alpha \ ,$$

dostáváme ze vzorců (3.7) a (3.8) odhad

$$\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| \le \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n} \right| .$$

Příklad 3.18. Vyšetřeme konvergenci řetězového zlomku

$$\left[0;\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{\frac{1}{2}},\ \frac{3}{\frac{-2}{3}},\ \frac{4}{\frac{-7}{4}},\ \frac{5}{\frac{-14}{5}},\ \frac{6}{\frac{-23}{6}},\ \dots \right] .$$

Řešení. Již víme, že konvergence řetězového zlomku (3.1) je ekvivalentní s konvergencí řady (3.8). Dále jsme zjistili, že

$$Q_1 = 2,\ Q_2 = 3,\ Q_3 = 4,\ \dots,\ Q_n = n+1,\ a_1 a_2 \dots a_n = n! \ .$$

Dostáváme řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n \cdot (n+1)} \ ,$$

tato řada je divergentní, proto řetězový zlomek není konvergentní.

Věta 3.19 (Pringsheimova)**.** *Platí-li pro prvky nekonečného řetězového zlomku*

$$\left[0;\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \dots,\ \frac{a_k}{b_k},\ \dots \right] \tag{3.9}$$

nerovnosti

$$|a_k| + 1 \le |b_k| \quad k = 1, 2, \dots \ , \tag{3.10}$$

je tento zlomek konvergentní a pro hodnotu α tohoto zlomku platí nerovnost

$$|\alpha| \le 1 \, .$$

Důkaz. Nechť $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ jsou částečné zlomky řetězového zlomku (3.9). Protože

$$Q_k = b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2} \ (k = 1, 2, \dots) \ ,$$

platí

$$|Q_k| \geq |b_k| \ |Q_{k-1}| - |a_k| \ |Q_{k-2}| \ .$$

Odtud pomocí nerovnosti (3.10) dostaneme

$$|Q_k| \geq (|a_k| + 1) \ |Q_{k-1}| - |a_k| \ |Q_{k-2}|$$

čili

$$|Q_k| - |Q_{k-1}| \geq |a_k| \ (|Q_{k-1}| - |Q_{k-2}|) \ . \tag{3.11}$$

Poněvadž je $Q_0 = 1$ a $Q_{-1} = 0$, dostaneme opakovaným použitím nerovnosti (3.11) vztah

$$|Q_k| - |Q_{k-1}| \geq |a_k| \ |a_{k-1}| \ \dots \ |a_1| \ . \tag{3.12}$$

Z poslední nerovnosti plyne, že posloupnost $(|Q_k|)$ je neklesající a $|Q_k| \geq |Q_0| = 1$.
Konvergence řetězového zlomku (3.9) je ekvivalentní konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a_1 a_2 \dots a_k}{Q_{k-1} Q_k} \ . \tag{3.13}$$

Uvažujme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_1| \ |a_2| \ \dots \ |a_k|}{|Q_{k-1}| \ |Q_k|} \ , \tag{3.14}$$

pomocí nerovnosti (3.12) dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_1| \ |a_2| \ \dots \ |a_k|}{|Q_{k-1}| \ |Q_k|} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|Q_k| - |Q_{k-1}|}{|Q_{k-1}| \ |Q_k|} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{|Q_{k-1}|} - \frac{1}{|Q_k|} \right) = \frac{1}{|Q_0|} - \frac{1}{|Q_n|} < \frac{1}{Q_0} = 1 \ (n = 1, 2, \dots) \ .$$

Částečné součty řady (3.14) jsou tedy omezené, řada konverguje a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_1| \ |a_2| \ \dots \ |a_k|}{|Q_{k-1}| \ |Q_k|} \leq 1 \ . \tag{3.15}$$

Podle srovnávacího kritéria konverguje řada (3.13) absolutně, tj. existuje

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) = \alpha \ .$$

V důsledku nerovnosti (3.15) je tedy

$$|\alpha| \leq 1 \ .$$

□

Poznámka 3.20. Jestliže, pro každé $k \geq 1$ a přirozené n jsou definované zlomky

$$\frac{P_{k,k+n}}{Q_{k,k+n}} = \left[\frac{a_k}{b_k}, \dots, \frac{a_{k+n}}{b_{k+n}}\right]$$

a platí $\left|\frac{P_{k,k+n}}{Q_{k,k+n}}\right| < 1$, potom

$$|a_k| \leq |b_k| - 1 < |b_k| + \frac{P_{k,k+n+1}}{Q_{k,k+n+1}}$$

a tedy vzhledem (3.3) platí

$$-1 < \frac{a_k}{b_k + \frac{P_{k+1,k+n+1}}{Q_{k+1,k+n+1}}} = \frac{P_{k,k+n+1}}{Q_{k,k+n+1}} < 1 \ .$$

Příklad 3.21. Vyšetřeme konvergenci řetězového zlomku (příklad převzatý z [6])

$$\left[0;\ \frac{x}{1},\ \frac{x}{3},\ \dots,\ \frac{x}{2k-1}\right]_{k=1}^{\infty},\ x \geq -1 \ .$$

Řešení. Je-li $x > 0$, tak řetězový zlomek konverguje pro dostatečně velké k, potom podle (3.3) konverguje i pro $k \geq 1$.
Je-li $-1 \leq x \leq 0$, tak řetězový zlomek konverguje pro $k \geq 2$ a podle věty 3.19 platí $\left|\frac{P_{3,3+k}}{Q_{3,3+k}}\right| \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots)$. Odtud

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{3 + \frac{P_{3,3+k}}{Q_{3,3+k}}} \leq 0$$

a teda

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{P_{2,2+k}}{Q_{2,2+k}} = 1 + \frac{x}{3 + \frac{P_{3,3+k}}{Q_{3,3+k}}} \leq 1 \ .$$

Protože $\frac{P_{1,1+k}}{Q_{1,1+k}} = \frac{x}{1+\frac{P_{2,2+k}}{Q_{2,2+k}}}$, řetězový zlomek konverguje i v tomto případě. [1][6]

Kapitola 4

Rozvoj elementárních funkcí

Pomocí řetězových zlomků je možné přibližně vypočítat hodnoty mnoha funkcí, jejichž rozvoj v mocninnou řadu konverguje příliš pomalu nebo dokonce diverguje. Při sepsání této kapitoly jsme čerpali z [2], [3], [15].

4.1 Gaussův řetězový zlomek

Je to druh řetězových zlomků odvozený z hypergeometrických řad. Byl to jeden z prvních analytických řetězových zlomků. Může být užitečný při rozvoji některých důležitých elementárních funkcí a stejně tak i více komplikovaných transcendentních funkcí.

Definice 4.1. Hypergeometrickou řadou se nazývá mocninná řada tvaru

$$1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}z^3+\dots\ ,$$

kde $a, b \in \mathbb{C}$ a $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. Pokud je a nebo b nekladné celé číslo, hypergeometrická řada se pak redukuje na polynom. S výjimkou tohoto případu se poloměr konvergence hypergeometrické řady rovná jedné, o čemž se lehko přesvědčíme pomocí d'Alembertova konvergenčního kritéria. V kruhu $|z| < 1$ je součet řady

$$\begin{aligned} F(a,b,c;z) = 1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2+ \\ +\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}z^3+\dots \end{aligned} \tag{4.1}$$

holomorfní funkce komplexní proměnné z.

Speciální případy:

$$\begin{aligned}
F(1,1,2;-z) &= \frac{1}{z}\ln(1+z), \\
F(-k,1,1;-z) &= (1+z)^k, \\
zF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};z^2\right) &= \arcsin z, \\
zF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};-z^2\right) &= \arctan z.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Nahrazením z výrazem $\frac{z}{a}$ a $a \to \infty$ se z hypergeometrické řady stane:

$$\Phi(b,c;z) = 1 + \frac{b}{c}z + \frac{b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \dots\ . \tag{4.3}$$

Podobně, nahrazením z výrazem $\frac{z}{b}$ a $b \to \infty$ ve (4.3) dostaneme:

$$\Psi(c;z) = 1 + \frac{1}{c}z + \frac{1}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{1}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \dots\ , \tag{4.4}$$

a pokud nahradíme z výrazem cz v (4.1) a $c \to \infty$, získáme:

$$\begin{aligned}
\Omega(a,b;z) = 1 + abz + a(a+1)b(b+1)\frac{z^2}{2!} + \\
+ a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)\frac{z^3}{3!} + \dots\ .
\end{aligned} \tag{4.5}$$

S výjimkou, kdy a nebo b je nekladné celé číslo, má poslední řada nulový poloměr konvergence.
K získání Gaussova řetězového zlomku potřebujeme vztah

$$\begin{aligned}
F(a,b,c;z) = F(a,b+1,c+1;z) - \\
-\frac{a(c-b)}{c(c+1)}zF(a+1,b+1,c+2;z)\ .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Pravdivost vztahu snadno ověříme porovnáním koeficientů dvou členů u odpovídajících mocnin. Vztah (4.6) může být přepsán do tvaru

$$\frac{F(a,b+1,c+1;z)}{F(a,b,c;z)} = \frac{1}{1 - \frac{a(c-b)}{c(c+1)}z\frac{F(a+1,b+1,c+2;z)}{F(a,b+1,c+1;z)}}\ . \tag{4.7}$$

Teď zaměníme a a b ve (4.7), potom nahradíme b výrazem $b+1$ a c výrazem $c+1$. To nám dává

$$\frac{F(a+1,b+1,c+2;z)}{F(a,b+1,c+1;z)} = \frac{1}{1 - \frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)}z\frac{F(a+1,b+2,c+3;z)}{F(a,b+1,c+2;z)}}\ . \tag{4.8}$$

Kvocient na levé straně vztahu (4.8) je stejný jako kvocient hypergeometrické řady objevující se ve jmenovateli na pravé straně vztahu (4.7). Takže, pokud a, b, c nahradíme výrazy

$a+1, b+1, c+2$ v tomto pořadí ve (4.7), potom kvocient na levé straně se stane rovným s kvocientem hypergeometrické řady objevující se ve jmenovateli na pravé straně vztahu (4.8). Uplatněním první identity a poté druhé, získáme následnou substitucí Gaussův řetězový zlomek:

$$\frac{F(a,b+1,c+1;z)}{F(a,b,c;z)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a(c-b)}{c(c+1)}z}{1-\cfrac{\frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)}z}{1-\cfrac{\frac{(a+1)(c-b+1)}{(c+2)(c+3)}z}{1-\dots}}}}\,. \tag{4.9}$$

Pokud dosadíme za $b=0$ a nahradíme c výrazem $c-1$, potom Gaussův řetězový zlomek redukujeme do tvaru

$$F(a,1,c;z) = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a}{c}z}{1-\cfrac{\frac{(c-a)}{c(c+1)}z}{1-\cfrac{\frac{c(a+1)}{(c+1)(c+2)}z}{1-\dots}}}}\,. \tag{4.10}$$

Nahrazením z výrazem $\frac{z}{a}$ v (4.9) a limitním přechodem $a \to \infty$, získáme následující rozvoj pro kvocienty podílu řady z (4.3):

$$\frac{\Phi(b+1,c+1;z)}{\Phi(b,c;z)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{(c-b)}{c(c+1)}z}{1+\cfrac{\frac{(b+1)}{(c+1)(c+2)}z}{1-\cfrac{\frac{(c-b+1)}{(c+2)(c+3)}z}{1+\dots}}}}\,. \tag{4.11}$$

Dosazením $b = 0$, dostáváme

$$\Phi(1, c; z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{c + \cfrac{1z}{c + 1 - \cfrac{cz}{c + 2 + \cfrac{2z}{c + 3 - \cfrac{(c+1)z}{\dots}}}}}}. \tag{4.12}$$

Pro kvocienty podílu řady (4.4) máme:

$$\frac{\Psi(c+1; z)}{\Psi(c; z)} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{z}{c(c+1)}}{1 + \cfrac{\frac{z}{(c+1)(c+2)}}{1 + \cfrac{\frac{z}{(c+2)(c+3)}}{1 + \dots}}}}, \tag{4.13}$$

tento vztah získáme nahrazením z výrazem $\frac{z}{b}$ ve (4.11) a $b \to \infty$.

Poznámka 4.2. Pro jednodušší počítání následujích příkladů nahradíme proměnnou $z \in \mathbb{C}$ za $x \in \mathbb{R}$.

Nyní si představíme tři rozvoje základních funkcí a jejich obor konvergence. Jelikož jsme nenašli v žádné literatuře, jak takový obor konvergence v reálném oboru najít, pokusíme se o to vlastním způsobem.

Příklad 4.3 (rozvoj funkce $\ln(1+x)$). Najděme rozvoj funkce $\ln(1+x)$ v řetězový zlomek a určeme obor konvergence.

Řešení. Rozvoj získáme ze vztahů (4.2) a (4.10):

$$\ln(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2x}{2 + \cfrac{1^2x}{3 + \cfrac{2^2x}{4 + \cfrac{2^2x}{5 + \cfrac{3^2x}{6 + \dots}}}}}}. \tag{4.14}$$

Nyní najdeme obor konvergence řetězového zlomku. Funkce je definovaná pro $x \in (-1, \infty)$. Nyní rozdělíme interval na tři podmnožiny: $x \in (-1, 0)$, $x \in \{0\}$, $x \in (0, \infty)$ a na nich budeme zkoumat, pro která x řetězový zlomek konverguje.

- $x \in \{0\}$: jistě konverguje.
- $x \in (-1,0)$: řetězový zlomek přepíšeme do tvaru:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+w} \ ,$$

kde

$$w = \cfrac{1^2x}{2+\cfrac{1^2x}{3+\cfrac{2^2x}{4+\cfrac{2^2x}{5+\ldots}}}} \ .$$

Pro w platí: $b_k = k+1$, $a_1 = 1^2x$, $a_2 = 1^2x$, $\ldots$, $a_{2k-1} = k^2x$, $a_{2k} = k^2x$. Pro b_k a a_k platí: $|b_k| \geq |a_k| + 1$ pro $k = 1, 2$. Potom ze vztahů (2.9), (2.10) pro výpočet P_k, Q_k, kde $Q_0 = 1$, $Q_{-1} = 0$, $P_0 = 0$, $P_{-1} = 1$, dostáváme následující nerovnosti:

$$\begin{gathered} P_1 = b_1P_0 + a_1P_{-1} < b_1Q_0 + a_1Q_{-1} = Q_1 \ , \\ P_2 = b_2P_1 + a_2P_0 < b_2Q_1 + a_2Q_0 = Q_2 \ , \\ \vdots \\ P_k < Q_k \ . \end{gathered}$$

Z důsledku 2.9 platí pro sousední částečné zlomky $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ a $\frac{P_k}{Q_k}$, $k \geq 1$ vztah

$$P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k = (-1)^{k-1}a_1a_2\ldots a_k \, .$$

Pro náš konkrétní případ vyplývá, že pravá strana výše uvedené rovnice je vždy menší než 0. Potom ale platí, že

$$P_kQ_{k-1} < P_{k-1}Q_k$$

a tedy

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} > \frac{P_k}{Q_k} \, .$$

Tím jsme dokázali, že posloupnost částečných zlomků $\frac{P_k}{Q_k}$ je klesající. Zároveň platí, že $P_k < Q_k$. To ale znamená, že

$$0 = \frac{P_0}{Q_0} > \frac{P_1}{Q_1} > \cdots > \frac{P_k}{Q_k} > -1 \, . \tag{4.15}$$

Ze (4.15) dostáváme, že řetězový zlomek w je konvergentní pro $x \in (-1,0)$. Potom tedy i řetězový zlomek

$$\frac{x}{1+w}$$

je jistě konvergentní pro $x \in (-1,0)$.

- $x \in (0,\infty)$: K vyšetření konvergence využijeme ekvivalentní transformace z poznámky 3.16. Spočteme několik členů nového řetězového zlomku:

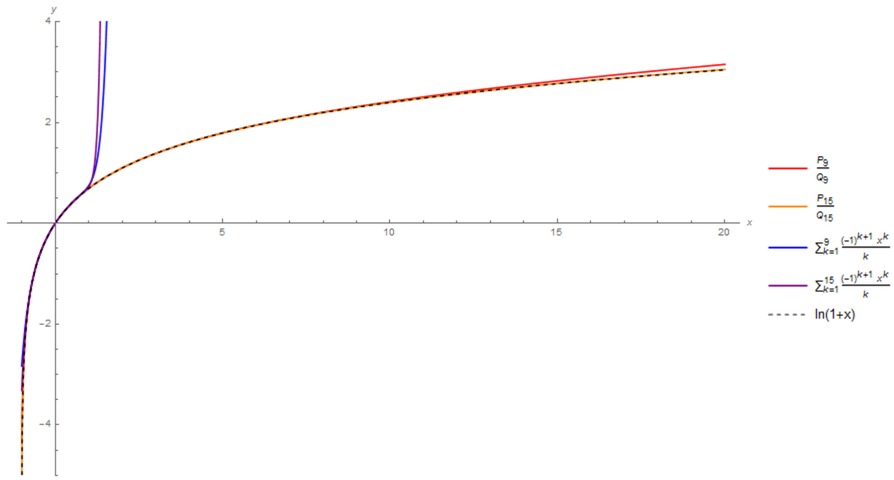
$$\begin{aligned}
c_0 &= 0\,,\\
c_1 &= \frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{x}\,,\\
c_2 &= \frac{a_1 b_2}{a_2} = 2\,,\\
c_3 &= \frac{a_2 b_3}{a_1 a_3} = \frac{4x\cdot 3}{x\cdot 4x^2} = \frac{3}{x}\,,\\
c_4 &= \frac{a_1 a_3 b_4}{a_2 a_4} = \frac{x^2\cdot 4}{x\cdot 4x} = 1\,,\\
c_5 &= \frac{a_2 a_4 b_5}{a_1 a_3 a_5} = \frac{x\cdot 4x\cdot 5}{x\cdot x\cdot 4x} = \frac{5}{x}\,,\\
c_6 &= \frac{a_1 a_3 a_5 b_6}{a_2 a_4 a_6} = \frac{x\cdot x\cdot 4x\cdot 6}{x\cdot 4x\cdot 9} = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

  Řetězový zlomek má potom tvar:

$$\ln(1+x) = \cfrac{1}{\frac{1}{x} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{3}{x} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{5}{x} + \cfrac{1}{\frac{2}{3} + \cfrac{1}{\dots}}}}}}}\,.$$

  Jelikož jsou všechny prvky řetězového zlomku kladné, lze použít Seidlovo kritérium z kapitoly 3.
  Řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ je divergentní pro $x \in (0,\infty)$, z toho plyne, že řetězový zlomek $\left[\frac{1}{c_k}\right]_1^{\infty}$ je konvergentní na intervalu $(0,\infty)$.

Závěr: Řetězový zlomek (4.14) je konvergentní na intervalu $(-1,\infty)$. To znamená, že tento rozvoj konverguje ve větším oboru než mocninná řada (ta konverguje pro $1 < x \leq 1$). Níže dokládáme obrázek, kde porovnáváme 9-tý a 15-tý částečným zlomek s mocninou řadou pro funkci $\ln(1+x)$.



Obrázek 4.1: Porovnání částečných zlomků s mocninou řadou pro funkci arctan(x).

Příklad 4.4 (rozvoj funkce $\arctan x$). Najděme rozvoj funkce $\arctan x$ a určeme obor konvergence.

Řešení. Rozvoj získáme ze vztahu (4.2) a (4.10):

$$\arctan x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1x^2}{3 + \cfrac{2^2x^2}{5 + \cfrac{3^2x^2}{7 + \cfrac{4^2x^2}{9 + \dots}}}}} . \tag{4.16}$$

Řetězový zlomek (4.16) přepíšeme do tvaru:

$$\arctan x = \frac{x}{1+w} \;, \tag{4.17}$$

kde

$$w = \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{2^2x^2}{5 + \cfrac{3^2x^2}{7 + \dots}}} .$$

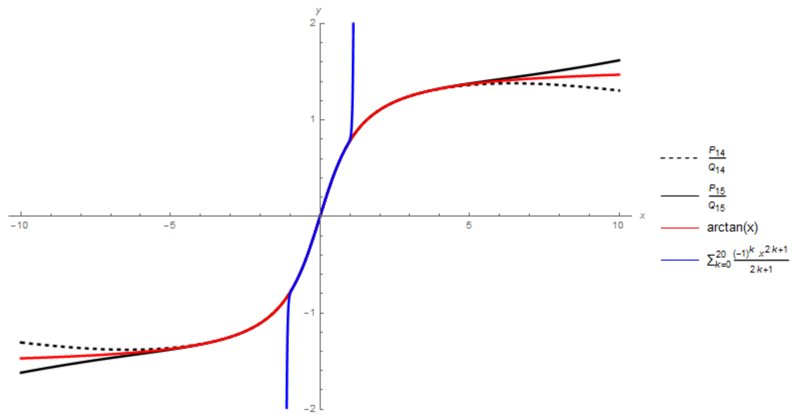
Jelikož jsou všechny členy řetězového zlomku w kladné, lze použít Seidlovo kritérium z důsledku 3.14.

Budeme tedy zkoumat řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{b_{k-1}b_k}{a_k}} \;,$$

kde $b_k = 2k+1,\ a_k = k^2x^2$.

Tato řada je jistě divergentní pro všechna $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, proto řetězový zlomek w konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a tedy i řetězový zlomek (4.17). To znamená, že tento rozvoj konverguje ve značně větším oboru než mocninná řada, vzniklá rozvojem funkce $\arctan x$ (konverguje pro $|x| \leq 1$).



Obrázek 4.2: Porovnání částečných zlomků s mocninou řadou pro funkci $\arctan(x)$.

Příklad 4.5. Najděme rozvoj funkce $\ln\frac{1+x}{1-x}$ a určeme obor konvergence řetězového zlomku.

Řešení. Protože

$$2zF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; x^2\right) = \ln\frac{1+x}{1-x} \ ,$$

dostaneme ze (4.10) následující rozvoj

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \cfrac{2x}{1 - \cfrac{1x^2}{3 - \cfrac{4x^2}{5 - \cfrac{9x^2}{7 - \cfrac{16x^2}{9 - \dots}}}}} \ . \tag{4.18}$$

Konvergenci řetězového zlomku (4.18) budeme zkoumat pro taková x, ve kterých je funkce definovaná, tedy pro $x \in (-1, 1)$.
Řetězový zlomek (4.18) přepíšeme do tvaru:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1+w} \ ,$$

kde

$$w = \cfrac{-\,x^2}{3 - \cfrac{4x^2}{5 - \cfrac{9x^2}{7 - \dots}}} \ . \tag{4.19}$$

Pro řetězový zlomek (4.20) platí: $b_k = 2k+1$, $a_k = -n^2x^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Pro b_k, a_k platí: $|b_k| \geq |a_k|+1$ pro $k = 1, 2$. Ze vztahů (2.9) a (2.10) pro výpočet částečných zlomků P_k, Q_k dostáváme nerovnosti:

$$\begin{aligned} P_1 = b_1P_0 + a_1P_{-1} &< b_1Q_0 + a_1Q_{-1} = Q_1 \ , \\ P_2 = b_2P_1 + a_2P_0 &< b_2Q_1 + a_2Q_0 = Q_2 \ , \\ &\vdots \\ P_k &< Q_k \ . \end{aligned}$$

Dále platí,

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} > \frac{P_k}{Q_k} \qquad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Posloupnost částečných zlomků řetězového zlomku (4.19) je klesající a hodnota řetězového zlomku je omezená na $(-1, 0)$ pro všechna $x \in (-1, 1)$. Z toho plyne, že řetězový zlomek w i řetězový zlomek (4.18) jsou konvergentní pro všechna $x \in (-1, 1)$. Nahrazením x výrazem $\frac{1}{x}$ ve (4.18) a použitím ekvivalentní transformace, získáme

$$\ln \frac{x+1}{x-1} = \cfrac{2}{x - \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}x - \cfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}x - \cfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}x - \ldots}}}} \ . \tag{4.20}$$

Řetězový zlomek (4.20) konverguje pro všechna $x \in (-1, 1)$ a je zajímavý tím, že jmenovatele jeho částečných zlomků jsou **Legendrovy polynomy**.
Platí totiž,

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{2}{x} \ , \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{3x}{\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}} \ , \\ \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{5x^2 - \frac{2}{3}}{\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x} \ , \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tato podoba není náhodná, neboť ortogonální polynomy vyhovují rekurentnímu vztahu, tzv. *Christoffelově-Darbouxově formuli*:

$$p_n(x) = (A_nx + B_n) \cdot p_{n-1}(x) - C_n \cdot p_{n-2}(x) \ , n = 2, 3, \ldots \ , \tag{4.21}$$

kde

$$p_{-1}(x) = 0 \ ,$$
$$A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}} \ ,$$
$$B_n = \frac{\langle x \cdot p_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle} \ ,$$
$$C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{k_n k_{n-2}}{k_{n-1}^2} \ ,$$

kde k_n značí nejvyšší koeficient polynomu $p_n(x)$ pro $n = 2, 3, \dots$.
Vztah (4.21) se formálně shoduje se vztahem (2.10) pro výpočet jmenovatele Q_k částečného zlomku. Stačí, pokud definujeme řetězový zlomek ve tvaru:

$$\cfrac{C_1}{A_1 x + B_1 - \cfrac{C_2}{A_2 x + B_2 - \cfrac{C_3}{A_3 x + B_3 - \cfrac{C_4}{\dots}}}} \ . \tag{4.22}$$

Více o spojení mezi řetězovými zlomky a ortogonálními polynomy nalezneme zde [2] a zde [4].
Na závěr této kapitoly ukážeme několik zajímavých rozvojů.
Pro funkci $\tan x$ platí,

$$\tan x = \left[0; \ \frac{x}{1}, \ \frac{-x^2}{3}, \ \frac{-x^2}{5}, \dots, \ \frac{-x^2}{(2k+1)}, \ \dots \right] \ . \tag{4.23}$$

Tento rozvoj konverguje pro všechna x, kde je funkce $\tan(x)$ definovaná.
Besselovu funkci $J_n(x)$ lze zapsat ve tvaru:

$$J_n(x) = \frac{\frac{1}{2}x}{\Gamma(n+1)} \Psi \left(n+1; \frac{-x^2}{4} \right),$$

potom z (4.13) získáme následující rozvoj

$$\frac{J_n(x)}{J_{n-1}(x)} = \left[0; \frac{x}{2n}, \ \frac{-x^2}{2(n+1)}, \ \frac{-x^2}{2(n+2)}, \ \dots, \ \frac{-x^2}{2(n+k)}, \ \dots \right]. \tag{4.24}$$

Tento rozvoj konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Pro **horní gama funkci** platí,

$$\Gamma(a,x) = \int_x^\infty e^{-u} u^{a-1} du = \left[0; \frac{e^{-x} x^a}{x}, \ \frac{1-a}{1}, \ \frac{1}{x}, \ \frac{2-a}{1}, \ \frac{2}{x}, \ \frac{3-a}{1}, \ \dots \right], \tag{4.25}$$

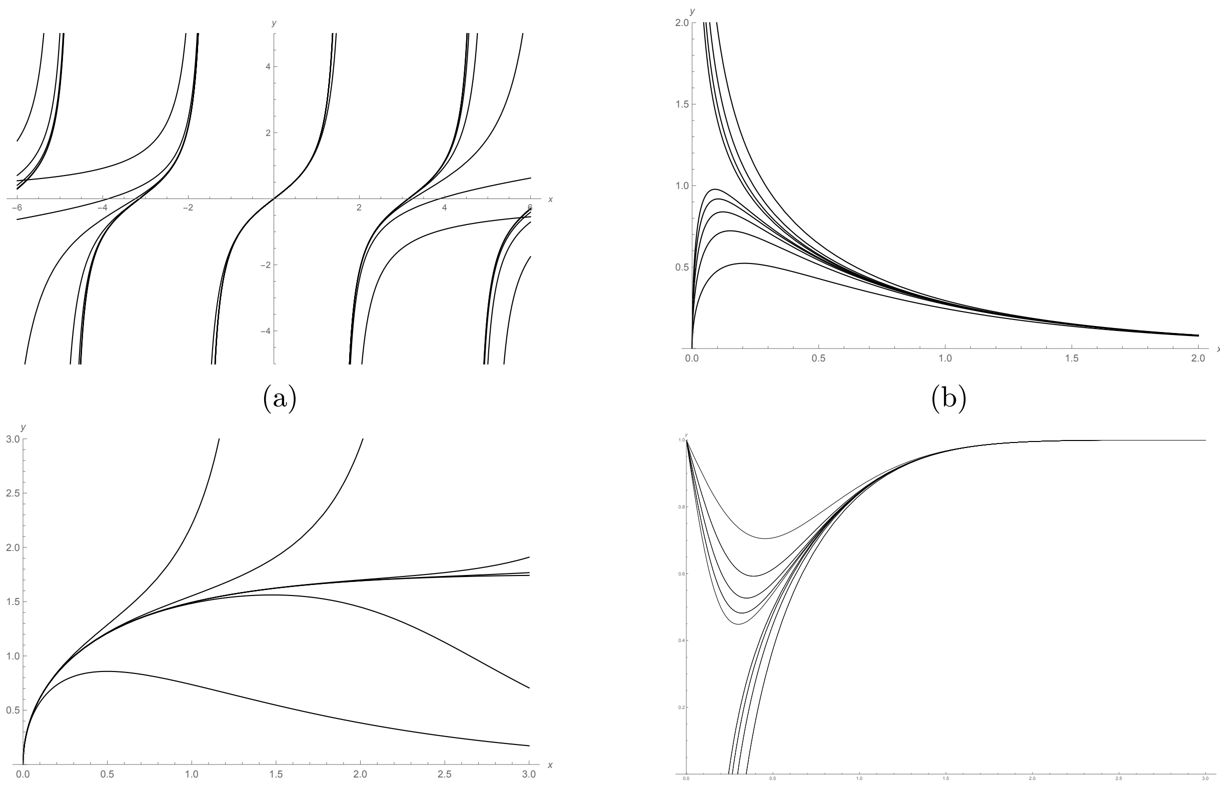
rozvoj konverguje pro všechna a, je-li $x > 0$.
Pro **dolní gama funkci** platí,

$$\gamma(a,x) = \int_0^x e^{-u} u^{a-1} du = \left[0; \frac{x^a e^{-x}}{a}, \frac{-ax}{1+a}, \frac{x}{2+a}, \frac{-(1+a)x}{3+a}, \frac{2x}{4+a}, \dots \right], \tag{4.26}$$

rozvoj konverguje pro $x > 0$, pokud a není záporné celé číslo.
Pro **chybovou funkci erf(x)** platí

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \frac{-\frac{1}{2}e^{-x^2}}{x}, \ \frac{1}{2x}, \ \frac{2}{x}, \ \frac{3}{2x}, \ \frac{4}{x}, \ \dots \right]. \tag{4.27}$$

Rozvoj konverguje pro $x > 0$.



(a) (b) (c) (d)

Obrázek 4.3: (a) Částečné zlomky řetězového zlomku (4.23), (b) částečné zlomky řetězového zlomku (4.25), (c) částečné zlomky řetězového zlomku (4.26), (d) částečné zlomky řetězového zlomku (4.27).

Další rozvoje lze nalézt v [3] nebo [4].

Kapitola 5

Řetězové zlomky a diferenciální rovnice

Řetězové zlomky lze použít při řešení určitých diferenciálních rovnic, např. k řešení Riccatiho rovnice nebo homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu. Při sepsání této kapitoly jsme čerpali z [4], [7], [8], [13] a [14].

5.1 Eulerova diferenciální metoda

Eulerova diferenciální metoda je založena na následujícím lemmatu.

Lemma 5.1 (Euler 1750)**.** *Nechť R a P jsou kladné funkce na (0,1) takové, že pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ a nějaké kladné α, β, γ a reálné a, b, c platí*

$$(a+n\alpha)\int_0^1 PR^n\ dx = (b+n\beta)\int_0^1 PR^{n+1}\ dx + (c+n\gamma)\int_0^1 PR^{n+2}\ dx\ , \tag{5.1}$$

potom

$$\frac{\int_0^1 PR\ dx}{\int_0^1 P\ dx} = \frac{a|}{|b} + \frac{(a+\alpha)c|}{|b+\beta} + \frac{(a+2\alpha)(c+\gamma)|}{|b+2\beta} + \frac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)|}{|b+3\beta} + \ \cdots\ .$$

Důkaz. viz [4] □

Dalším skvělým Eulerovým nápadem bylo najít P a R jako funkce splňující následující identitu s neurčitými integrály:

$$(a+n\alpha)\int PR^n\ dx + R^{n+1}S = (b+n\beta)\int PR^{n+1}\ dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}\ dx\,, \tag{5.2}$$

kde S je nějaká funkce.
Eulerova formule v diferenciální podobě pro (5.2) vypadá následovně:

$$(a+n\alpha)Pdx + RdS + (n+1)SdR = (b+n\beta)PRdx + (c+n\gamma)PR^2dx\ .$$

Odtud

$$\begin{aligned} aPdx + RdS + SdR &= bPRdx + cPR^2dx \\ \alpha Pdx + SdR &= \beta PRdx + \gamma PR^2dx \ . \end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic pro Pdx, nalezneme

$$Pdx = \frac{RdS + SdR}{bR + cR^2 - a} = \frac{SdR}{\beta R + \gamma R^2 - \alpha} \ . \tag{5.3}$$

Z druhé rovnice v (5.3) dostaneme,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} &= \frac{(b-\beta)RdR + (c-\gamma)R^2dR - (a-\alpha)dR}{\beta R^2 + \gamma R^3 - \alpha R} \\ &= \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{(\alpha b - \beta a)dR + (\alpha c - \gamma a)RdR}{\alpha(\beta R + \gamma R^2 - \alpha)} \ . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Příklad 5.2. Dokažme níže uvedenou Stieltjesovu formuli (příklad převzatý z [4]):

$$\frac{1}{\left[s; \frac{n(n+1)}{s}\right]_{n=1}^{\infty}} = \int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{\cosh^2 x} dx = s\int_0^\infty e^{-sx} \tanh x \ dx \ . \tag{5.5}$$

Důkaz. Eulerova diferenciální metoda poskytuje jednoduchý důkaz Stieltjesovy formule. V lemmatu 5.1 a (5.4) dosadíme

$$\begin{aligned} a = 1 \ , \quad b = s \ , \quad c = 1 \ , \quad &\alpha b - \beta a = s \ , \\ \alpha = 1 \ , \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1 \ , \quad &\alpha c - \gamma a = 0 \ , \end{aligned}$$

$$\frac{dS}{S} = s\frac{dR}{R^2-1} \Rightarrow S = C\left|\frac{1-R}{1+R}\right|^{\frac{s}{2}}, \ C \in \mathbb{R} \, .$$

Je-li $R(x) = x$, potom je výraz $R^{n+1}S$ nulový pro $x = 0$ a $x = 1$ pro $n \geq 0$. Pokud $C = -1$, potom ze vztahu (5.3) je $P > 0$ pro $x \in (0,1)$, neboť

$$\begin{aligned} P\,dx &= \frac{-\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{\frac{s}{2}} dx}{x^2-1} \\ P &= \frac{-\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{\frac{s}{2}}}{x^2-1} \, . \end{aligned}$$

Dále platí

$$\int_0^1 Pdx = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1} dt = \frac{1}{s} \ ,$$

použijeme-li substituci $x = \frac{1-t}{1+t}$ a substitucí $t = e^{-x}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^1 RPdx &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{1-t}{1+t}\right) dt = \int_0^\infty e^{-sx} \tanh x \ dx \\ &= -\frac{1}{s}\int_0^\infty \tanh x \ de^{-sx} = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{\cosh^2 x} dx \, . \end{aligned}$$

Druhý integrál jsme získali z prvního integrálu použitím integrace per partes. Potom máme

$$\frac{\frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{\cosh^2 x}dx}{\frac{1}{s}} = \frac{1|}{|s} + \frac{2\cdot 1|}{|s} + \frac{3\cdot 2|}{|s} + \cdots + \frac{n(n+1)|}{|s} + \cdots \,.$$

□

Příklad 5.3. Pro každé $s > 0$ platí,

$$e^{\frac{s^2}{2}} \int_s^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \frac{1|}{|s} + \frac{1|}{|s} + \frac{2|}{|s} + \frac{3|}{|s} + \frac{4|}{|s} + \cdots + \frac{n|}{|s} + \cdots \,. \tag{5.6}$$

Důkaz. K důkazu (5.6) dosadíme $a = 1$, $b = s$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ v lemmatu 5.1 a použijeme limitu k $+\infty$ místo $x = 1$,

$$\frac{\int_0^{+\infty} PR\,dx}{\int_0^{+\infty} P\,dx} = \frac{1|}{|s} + \frac{2|}{|s} + \frac{3|}{|s} + \frac{4|}{|s} + \cdots + \frac{n|}{|s} + \cdots \,. \tag{5.7}$$

Diferenciální rovnice (5.4) pro S má tvar $\frac{dS}{S} = -sdR - RdR$. Je-li $R(x) = x$, potom výraz $xS(x) = xe^{-sx-\frac{x^2}{2}}$ je nulový pro $x = 0$ a $x = +\infty$. Ze vztahu (5.3) dostáváme $P = e^{-sx-\frac{-x^2}{2}}$ a $PR = xe^{-sx-\frac{-x^2}{2}}$. Platí

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} P\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx-\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{s^2}{2}} \int_s^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \,.$$

Vztah ověříme jednoduchou úpravou integrálu

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(s+x)^2+\frac{s^2}{2}} dx = e^{\frac{s^2}{2}} \int_s^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \,,$$

použijeme-li substituci $u = (s + x)$ a přepočítáme meze.
Potom $\varphi(s)$ splňuje

$$\varphi'(s) = s\varphi(s) - 1 = -\int_0^{+\infty} xe^{-sx-\frac{-x^2}{2}} dx \,.$$

K ověření výše uvedeného vztahu využijeme větu **o derivaci integrálu podle parametru** [17], platí

$$\varphi'(s) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s}\, e^{-sx-\frac{x^2}{2}} dx = -\int_0^{+\infty} xe^{-sx-\frac{x^2}{2}} dx \,.$$

Dále ověříme, že platí

$$s\varphi(s) + \int_0^{+\infty} xe^{-sx-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \,. \tag{5.8}$$

Vztah (5.8) přepíšeme do tvaru

$$\int se^{-sx-\frac{x^2}{2}} dx + \int xe^{-sx-\frac{x^2}{2}} dx \,,$$

potom

$$\int (s+x)e^{-\frac{1}{2}(s+x)^2+\frac{s^2}{2}}dx = e^{\frac{s^2}{2}}\int ue^{-\frac{u^2}{2}}\ du = -e^{\frac{s^2}{2}}\int e^t\ dt = \\ = -e^{\frac{s^2}{2}}e^{-\frac{(s+x)^2}{2}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Z toho dostáváme

$$-\,e^{\frac{s^2}{2}}\left[e^{-\frac{(s+x)^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = -e^{\frac{s^2}{2}}\left(0-e^{-\frac{s^2}{2}}\right) = 1\,.$$

Pro vztah (5.7) nakonec platí

$$\frac{\int_0^{+\infty} PR\,dx}{\int_0^{+\infty} P\,dx} = \frac{1-s\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{1}{\varphi(s)} - s\,.$$

Jednoduchou elementární úpravou, pak dostáváme námi požadovaný vztah (5.6)

$$\frac{1}{s+\frac{1}{\varphi(s)}-s} = \varphi(s)\,.$$

□

Další příklady nalezneme v [4].

5.2 Řetězové zlomky a homogenní LDR 2. řádu

Způsob řešení homogenních diferenciálních rovnic 2. řádu, které nyní budeme probírat, má výhodu oproti řešení nekonečnými řadami, že je přímý. Na druhou stranu tato metoda trpí tím, že je použitelná pouze na lineární rovnice 2. řádu a nepřipouští žádné zjevné rozšíření na rovnice vyšších řádů.

Rovnici, kterou budeme uvažovat, budeme předpokládat bez ztráty na obecnosti ve tvaru

$$y(x) = Q_0(x)y'(x) + P_1(x)y''(x)\ , \tag{5.9}$$

kde Q_0 a P_1 jsou funkce proměnné x. Je-li rovnice (5.9) diferencovatelná vzhledem k x, potom získáme

$$y' = Q_1y'' + P_2y'''\,, \tag{5.10}$$

kde

$$Q_1 = \frac{Q_0+P_1'}{1-Q_0'},\quad P_2 = \frac{P_1}{1-Q_0'}\ .$$

Je-li rovnice (5.10) diferencovatelná vzhledem k x, potom získáme $y'' = Q_2y''' + P_3y''''$, kde $Q_2 = \frac{Q_1+P_2'}{1-Q_1'}$, $P_3 = \frac{P_2}{1-Q_1'}$. Tento proces lze opakovat neomezeně. Získáváme obecný vztah

$$y^{(n)} = Q_ny^{(n+1)} + P_{n+1}y^{(n+2)}\,, \tag{5.11}$$

kde $n = 1, 2, \dots$, a

$$Q_n = \frac{Q_{n-1} + P'_n}{1 - Q'_{n-1}}, \quad P_{n+1} = \frac{P_n}{1 - Q'_{n-1}} . \tag{5.12}$$

Vydělíme (5.9) derivací y', dostaneme

$$\frac{y}{y'} = Q_0 + \frac{P_1}{\frac{y'}{y''}}$$

Vydělíme-li (5.10) druhou derivací y'', dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{y}{y'} &= Q_0 + \frac{P_1}{\frac{y'}{y''}} \\ &= Q_0 + \frac{P_1}{Q_1 + \frac{P_2}{\frac{y''}{y'''}}} \end{aligned}$$

Pokud budeme postup opakovat, dostaneme nakonec následující řetězový zlomek

$$\frac{y}{y'} = Q_0 + \frac{P_1|}{|Q_1} + \frac{P_2|}{|Q_2} + \frac{P_3|}{|Q_3} + \cdots + \frac{P_n|}{|Q_n} + \cdots \ . \tag{5.13}$$

Je-li řetězový zlomek (5.13) konečný, pak snadno nalezneme řešení diferenciální rovnice (5.9). Pokud naopak je řetězový zlomek nekonečný, nastává problém s jeho konvergencí. To bychom řešili pomocí kritérií z kopitoly 3.

Poznámka 5.4. Pro jednoduchost budeme nadále uvažovat pouze příklady vedoucí na konečný řetězový zlomek.

Příklad 5.5. Najděme řešení rovnice (příklad převzatý z [13])

$$y = \frac{x}{n} y' + \frac{1}{n} y'' \ ,$$

kde n je kladné celé číslo.

Řešení. Nejdříve zjistíme prvky Q_n, P_n podle (5.12) řetězového zlomku (5.13):

$$\begin{aligned} Q_0 &= \tfrac{x}{n}, & P_1 &= \tfrac{1}{n}, \\ Q_1 &= \tfrac{x}{n-1}, & P_2 &= \tfrac{1}{n-1}, \\ Q_2 &= \tfrac{x}{n-2}, & P_3 &= \tfrac{1}{n-2}, \\ &\vdots & &\vdots \\ Q_k &= \tfrac{x}{n-k}, & P_{k+1} &= \tfrac{1}{n-k}, \end{aligned}$$

potom řetězový zlomek (5.13) má tvar

$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{n} + \frac{\frac{1}{n}|}{|\frac{x}{n-1}} + \frac{\frac{1}{n-1}|}{|\frac{x}{n-2}} + \cdots + \frac{\frac{1}{2}|}{|\frac{x}{1}} ,$$

což lze zapsat do tvaru

$$\frac{y'}{y} = \frac{n|}{|x} + \frac{n-1|}{|x} + \frac{n-2|}{|x} + \cdots + \frac{1|}{|x}\ ,\ y \neq 0,\ x \neq 0. \tag{5.14}$$

Ověření platnosti vztahu (5.14) pouze pro zkrácený tvar řetězového zlomku:

$$\frac{y'}{y} = \cfrac{1}{\cfrac{x}{n} + \cfrac{\frac{1}{n}}{\cfrac{x}{n-1}}} = \frac{1}{\frac{x}{n} + \frac{n-1}{nx}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(x + \frac{n-1}{x}\right)} = \frac{n}{x + \frac{n-1}{x}} = \frac{n|}{|x} + \frac{n-1|}{|x}\,.$$

Protože je řetězový zlomek (5.14) konečný, lze stanovit jeho částečné zlomky ve tvaru

$$\frac{y'}{y} = \frac{nx^{n-1} + (n-2)a_1x^{n-3} + \cdots + (n-2k)a_rx^{n-(2k+1)}}{x^n + a_1x^{n-2} + \cdots + a_rx^{n-2k}}\ , \tag{5.15}$$

kde

$$a_r = \frac{n!}{2^r r!(n-2r)!}\ ,\ r = 1, 2, \ldots\ .$$

Diferenciální rovnici (5.15) vyřešíme separací proměnných a dostáváme řešení ve tvaru

$$y_1 = C(x^n + a_1x^{n-2} + a_2x^{n-4} + \ldots)\ ,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Poznámka 5.6. Známe-li jedno řešení diferenciální rovnice, které není identicky nula, můžeme druhé řešení určit následovně:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1(x)^2}\ e^{-\int Q_0(x)dx}\,.$$

Příklad 5.7 (Legendreova diferenciální rovnice).

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0\ ,$$

kde n je kladné celé číslo.

Řešení. Rovnici přepíšeme do tvaru

$$y = \frac{2x}{n(n+1)}y' - \frac{(1-x^2)}{n(n+1)}y''\ .$$

Nyní budeme postupovat jako v předešlém příkladě.

$$\begin{aligned}
Q_0 &= \tfrac{2x}{n(n+1)}, & P_1 &= -\tfrac{(1-x^2)}{n(n+1)}\,, \\
Q_1 &= \tfrac{4x}{n(n+1)-2}, & P_2 &= -\tfrac{(1-x^2)}{n(n+1)-2}\,, \\
Q_2 &= \tfrac{6x}{n(n+1)-6}, & P_3 &= -\tfrac{(1-x^2)}{n(n+1)-6}\,, \\
&\ \,\vdots & &\ \,\vdots \\
Q_k &= \tfrac{(2k)x}{n(n+1)-(k^2+k)}, & P_{k+1} &= -\tfrac{(1-x^2)}{n(n+1)-(k^2+k)}.
\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{y'}{y} = \frac{n(n+1)|}{|2x} - \frac{(1-x^2)(n(n+1)-2)|}{|4x} -$$
$$-\frac{(1-x^2)(n(n+1)-6)|}{|6x} - \ldots - \frac{(1-x^2)(2n)|}{|(2n)x} \;, y \neq 0,\; x \neq 0\,.$$

Pokud budeme uvažovat n kladné celé číslo a zvolíme například postupně $n = 1, 2, 3, 4$ dostaneme následující částečné zlomky:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\,,\; \frac{y'}{y} = \frac{6x}{3x^2-1}\,,\; \frac{y'}{y} = \frac{15x^2-3}{5x^3-3x}\,,\; \frac{y'}{y} = \frac{140x^2-60x}{35x^4-30x^2+3}\,.$$

Řešení rovnice pro jednotlivé částečné zlomky dostáváme ve tvaru Legendreových polynomů.

$$\begin{aligned}
&y = Cx\;,\; n = 1\,,\\
&y = C(3x^2-1)\;,\; n = 2\,,\\
&y = C(5x^3-3x)\;,\; n = 3\,,\\
&y = C(35x^4-30x^2+3)\;,\; C \in \mathbb{R}\,,\; n = 4\,.
\end{aligned}$$

Příklad 5.8 (Hermitova diferenciální rovnice).

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0\,,$$

kde n je kladné celé číslo.

Řešení. Rovnici přepíšeme do tvaru

$$y = \frac{2x}{2n}y' - \frac{1}{2n}y''\,.$$

Nyní postupujeme jako v předešlých příkladech,

$$\begin{array}{ll}
Q_0 = \frac{2x}{2n}, & P_1 = -\frac{1}{2n}\;, \\[1em]
Q_1 = \frac{2x}{2(n-1)}, & P_2 = -\frac{1}{2(n-1)}\;, \\[1em]
Q_2 = \frac{2x}{2(n-2)}, & P_3 = -\frac{1}{2(n-2)}\;, \\
\vdots & \vdots \\
Q_k = \frac{2x}{2(n-k)}, & P_{k+1} = -\frac{1}{2(n-k)}\;,
\end{array}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2n|}{|2x} - \frac{2(n-1)|}{|2x} - \frac{2(n-2)|}{|2x} - \ldots - \frac{2|}{|2x}\;, y \neq 0\;, x \neq 0\;.$$

Pro $n = 1, 2, 3$ dostáváme tyto částečné zlomky:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x}\;,\; \frac{y'}{y} = \frac{8x}{4x^2-2}\;,\; \frac{y'}{y} = \frac{24x^2-12}{8x^3-12x}\;.$$

Řešení diferenciální rovnice pro jednotlivé částečné zlomky dostáváme ve tvaru Hermitových polynomů.

$$\begin{aligned} y &= C(2x)\ ,\ n = 1\,, \\ y &= C(4x^2 - 2)\ ,\ n = 2\,, \\ y &= C(8x^3 - 12x)\ ,\ C \in \mathbb{R}\,,\ n = 3\,. \end{aligned}$$

Více o tomto tématu se lze dočíst v Perronově knize [].

5.3 Riccatiho diferenciální rovnice a řetězové zlomky

Definice 5.9. Nechť funkce $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ jsou spojité na intervalu $I = (a, b)$. Pak rovnice ve tvaru

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 \tag{5.16}$$

se nazývá Riccatiho diferenciální rovnice 1. řádu.

K tomu abychom nalezli řešení rovnice (5.16) se nám bude hodit následující věta (tato věta bude vícekrát užitečná při řešení námi zadaných příkladů).

Věta 5.10 (Řešení Riccatiho rovnice při znalosti jednoho řešení)**.** *Nechť $y_1(x)$ je jedno řešení rovnice (5.16) na intervalu $I = (a, b)$. Nechť $u(x)$ je libovolné řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu*

$$u'(x) + [2a_2(x)y_1(x) + a_1(x)]u(x) = -a_2(x)\,,\ x \in I\,, \tag{5.17}$$

potom každá funkce

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)} \tag{5.18}$$

je řešením diferenciální rovnice (5.16) a naopak, ke každému řešení y diferenciální rovnice (5.16), $y \neq y_1$, existuje řešení $u(x)$ z diferenciální rovnice (5.17), pro které platí (5.18).

Důkaz. viz [18] □

Následující věta nám umožní převést rovnici (5.16) na LDR 2. řádu, kterou umíme řešit řetězovými zlomky.

Věta 5.11 (Převod na LDR 2. řádu)**.** *Nechť $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ a $a_2'(x)$ jsou spojité na I a $a_2(x) \neq 0$.*

1. *Nechť $y(x)$ řeší (5.16). Pak funkce*

$$u(x) = e^{-\int a_2(x)y(x)dx}$$

řeší rovnici

$$a_2(x)u'' - [a_2'(x) + a_1(x)a_2(x)]u' + a_0(x)a_2^2(x)u = 0 \tag{5.19}$$

na intervalu $I_1 \subset I$.

2. Nechť naopak $u(x)$ řeší (5.19) na $I_2 \subset I$, $u(x) \neq 0\ \forall x \in I_2$. Pak funkce

$$y(x) = -\frac{u'(x)}{a_2(x)u(x)}$$

řeší původní rovnici (5.16) na intervalu I_2.

Důkaz. viz [18] □

Poznámka 5.12. Vzhledem k tomu, že lze diferenciální rovnici (5.16) převést na lineární difereniální rovnici 2. řádu, kterou již umíme řešit pomocí řetězových zlomků, ukážeme si pouze metodu pro výpočet jednoho řešení speciální Riccatiho diferenciální rovnice.

Definice 5.13. Diferenciální rovnice

$$y' + ay^2 = bx^n \ , \tag{5.20}$$

kde $a, b \neq 0,\ n \in \mathbb{R}$, nazýváme speciální Riccatiho diferenciální rovnicí.

Poznámka 5.14. Rovnice se dá řešit analyticky pro $n = -2$ nebo $n = \frac{-4k}{2k-1}$, kde k je celé číslo.

Nyní si představíme techniku, jak najít jedno řešení diferenciální rovnice (5.20) pomocí řetězových zlomků:
Zavedeme substituci

$$y = \frac{u}{x} \ ,$$

kterou dosadíme do původní rovnice (5.20), tím získáme rovnici ve tvaru

$$xu' - u + au^2 = bx^p \ , \tag{5.21}$$

kde $p = n + 2$.
Zavedeme další substituci ve tvaru

$$u = \frac{1}{a} + \frac{x^p}{u_1} \ ,$$

rovnice (5.21) je pak ve tvaru

$$xu_1' - (1+p)u_1 + bu_1^2 = ax^p \ . \tag{5.22}$$

Zavedeme třetí substituci

$$u_1 = \frac{1+p}{b} + \frac{x^p}{u_2} \ ,$$

získáme tak diferenciální rovnici ve tvaru

$$xu_2' - (1+2p)u_2 + au_2^2 = bx^p \ . \tag{5.23}$$

Pokračováním tohoto procesu přes m substitucí, nakonec máme diferenciální rovnici ve tvaru

$$xu_m' - (1+mp)u_m + A_m u_m^2 = B_m x^p \ , \tag{5.24}$$

kde $A_m = a$ a $B_m = b$, pokud je m sudé a $A_m = b$, $B_m = a$, pokud je m liché. Kombinací těchto substitucí můžeme vidět, že řešení diferenciální rovnice (5.21) a tím i diferenciální rovnice (5.20) je řetězový zlomek:

$$u = xy = \frac{1}{a} + \frac{x^p|}{|\frac{1+p}{b}} + \frac{x^p|}{|\frac{1+2p}{a}} + \frac{x^p|}{|\frac{1+3p}{b}} + \dots \,. \tag{5.25}$$

Příklad 5.15. Nalezněte obecné řešení rovnice:

$$y' = \frac{1}{x^2} - y^2\,,\; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,. \tag{5.26}$$

Řešení. Máme $n = -2,\ a = 1,\ b = 1,\ p = 0$. Dostáváme tak řetězový zlomek:

$$u = xy = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}\,, \tag{5.27}$$

z kapitoly o konvergenci řetězových zlomků již víme, že řetězový zlomek (5.27) konverguje a má hodnotu

$$u = xy = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Potom

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2x}\,,\; x \neq 0\,. \tag{5.28}$$

Snadno se lze přesvědčit, že (5.28) řeší rovnici (5.26). Z věty 5.10 nalezneme řešení LDR 1. řádu ve tvaru

$$u' - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2x}\right)u = 1\,. \tag{5.29}$$

Obecné řešení rovnice (5.29) je

$$u(x) = \frac{-x + C\sqrt{5}\,x^{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}\,,\; C \in \mathbb{R}\,,$$

potom z věty 5.10 každá funkce

$$y(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2x} + \frac{\sqrt{5}}{-x + C\sqrt{5}\,x^{1+\sqrt{5}}}\,,\;\; C \in \mathbb{R}$$

je řešením diferenciální rovnice (5.26).

5.4 Přibližné řešení nelineární diferenciální rovnice

Budeme hledat přibližné řešení nelineární Riccatiho rovnice

$$y'(x) = x^3 + y^2(x) \tag{5.30}$$

na omezeném intervalu $I := [1, 1.5]$.
Partikulární řešení rovnice (5.30) budeme hledat metodou, kterou jsme aplikovali na rovnici (5.20). Partikulární řešení rovnice (5.30) vyjádřené řetězovým zlomkem vypadá následovně

$$y = \frac{-1 + \frac{x^5|}{|6} + \frac{x^5|}{|-11} + \frac{x^5|}{|16} + \frac{x^5|}{|-21} + \dots}{x}\,, \; x \neq 0. \tag{5.31}$$

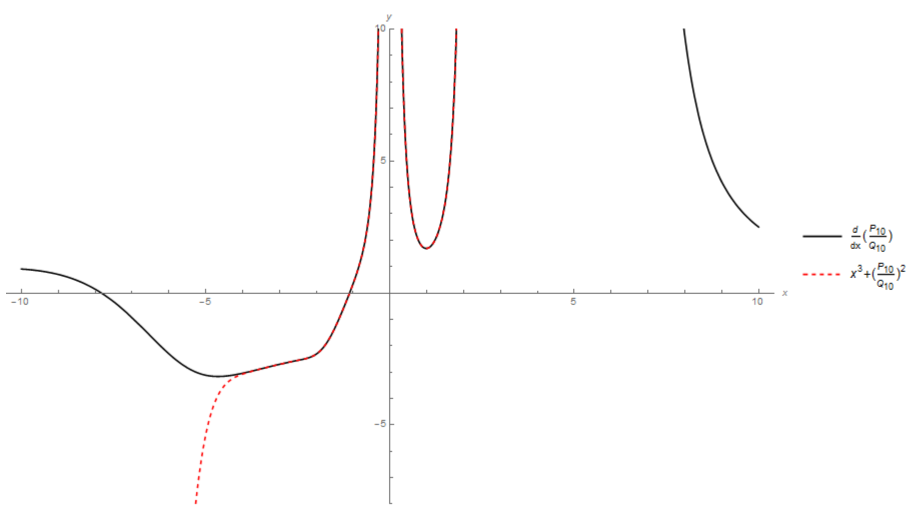
Řetězový zlomek (5.31) je nekonečný, proto se omezíme pouze na přibližné řešení, v našem případě se omezíme na 10-tý částečný zlomek $\frac{P_{10}}{Q_{10}}$ řetězového zlomku (5.31). Dostáváme tak přibližné partikulární řešení rovnice (5.30) na nějakém omezeném intervalu, ve tvaru

$$y \approx \frac{P_{10}}{Q_{10}} = -\frac{a_0 + a_1 x^5 + a_2 x^{10} + a_3 x^{15} + a_4 x^{20} + a_5 x^{25}}{b_6 x + b_5 x^6 + b_4 x^{11} + b_3 x^{16} + b_2 x^{21} + b_1 x^{26}}\,, \tag{5.32}$$

kde

$$\begin{array}{rcrcrcr}
a_0 &=& 78 \cdot (-793\,483\,713\,792)\,, & b_1 &=& (-61\,891\,729\,675\,776)\,,\\
a_1 &=& 78 \cdot 155\,585\,041\,920\,, & b_2 &=& 1\,820\,344\,990\,464\,,\\
a_2 &=& 78 \cdot (-2\,029\,370\,112)\,, & b_3 &=& (-11\,192\,283\,648)\,,\\
a_3 &=& 78 \cdot 6\,999\,552\,, & b_4 &=& 21\,326\,760\,,\\
a_4 &=& 78 \cdot (-7\,595)\,, & b_5 &=& (-12\,090)\,,\\
a_5 &=& 78 \cdot 2\,, & b_6 &=& 1\,.
\end{array}$$

Graficky se přesvědčíme, že (5.32) je přibližné řešení diferenciální rovnice (5.30) na intervalu



Obrázek 5.1: Grafické ověření partikulárního řešení diferenciální rovnice.

Z obrázku 5.1 je zřejmé, že (5.32) můžeme uvažovat jako partikulární řešení diferenciální rovnice (5.30) na intervalu $I = [1, 1.5]$. Z věty 5.10 poté stačí najít přibližné řešení LDR 1. řádu ve tvaru

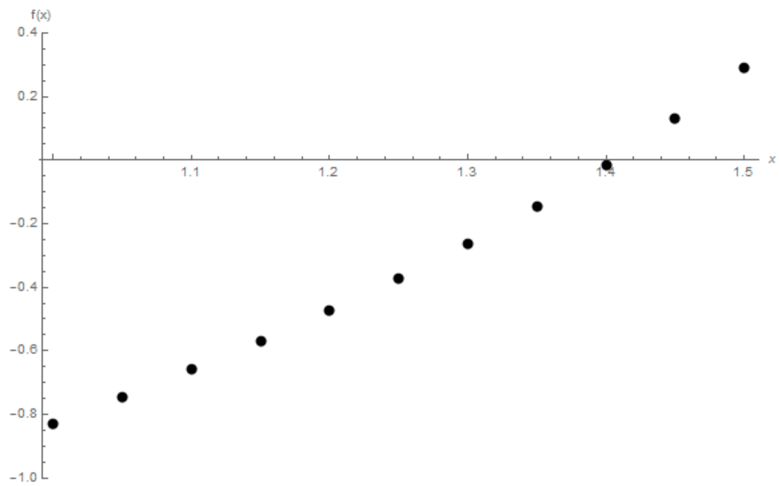
$$u'(x) + [2y(x)]u(x) = -1\,,\; x \in I\,, \tag{5.33}$$

kde $y(x) = \frac{P_{10}}{Q_{10}}$ je přibližné partikulární řešení rovnice (5.30) na daném intervalu. Vzhledem k tomu, že je obtížné nalézt řešení rovnice (5.33), nahradíme funkci (5.32) nějakou

jednodušší funkcí (např. polynom) na intervalu I.
Nejdříve funkci (5.32) převedeme na funkci zadanou tabulkou

x_i	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5
$f(x_i)$	-0,83	-0,75	-0,66	-0,57	-0,47	-0,37	-0,26	-0,15	-0,02	0,13	0,29

Tabulka 5.1: Funkce (5.32) zadaná tabulkou na intervalu I s kroky $h = 0.05$

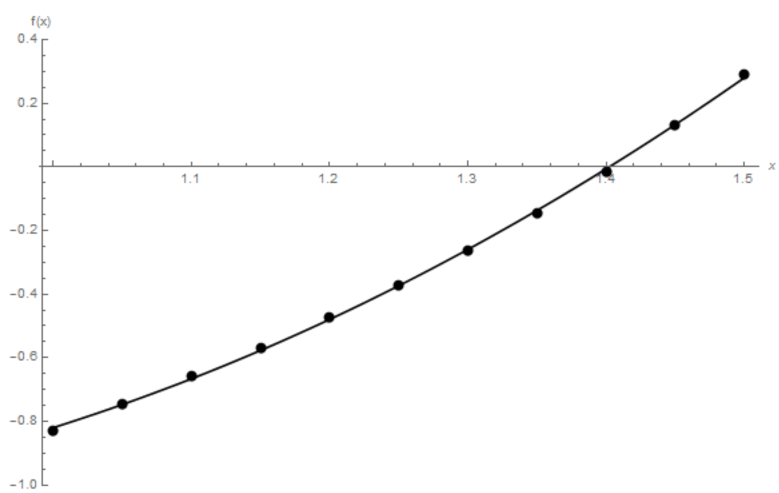


Obrázek 5.2: Graf funkce (5.32) pro dané hodnoty

Funkci budeme aproximovat kvadratickou funkcí metodou nejmenších čtverců.

Výsledná kvadratická funkce má předpis

$$f(x) = -0,53 - 1,95x + 1,66x^2\,. \tag{5.34}$$



Obrázek 5.3: Aproximace funkce kvadratickou funkcí (5.34)

Funkci (5.34) dosadíme do rovnice (5.33). Rovnice má potom tvar

$$u'(x) + [2(-0,53 - 1,95x + 1,66x^2)]u(x) = -1\,,\; x \in I\,. \tag{5.35}$$

Obecné řešení rovnice (5.35) je ve tvaru

$$u(x) = e^{1,06x+1,95x^2-1,11x^3}C + e^{1,06x+1,95x^2-1,11x^3}\int_1^x -e^{-1,06s-1,95s^2+1,11s^3}\,ds\,,\; C \in \mathbb{R}. \tag{5.36}$$

Z věty 5.10 je přibližné obecné řešení rovnice (5.30) na intervalu $I = [1, 1.5]$ ve tvaru

$$\begin{aligned} y(x) &= -0,53 - 1,95x + 1,66x^2 + \\ &+ \frac{1}{e^{1,06x+1,95x^2-1,11x^3}C + e^{1,06x+1,95x^2-1,11x^3}\int_1^x -e^{-1,06s-1,95s^2+1,11s^3}ds}\,,\; x \in I\,. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Pokud bychom funkci zadanou tabulkou aproximovali například kubickou funkcí

$$f(x) = -5.29 + 9.70x - 7.75x^2 + 2.51x^3,$$

obecné řešení rovnice (5.30) je ve tvaru

$$\begin{aligned} y(x) &= -5.29 + 9.70x - 7.75x^2 + 2.51x^3 + \\ &\frac{1}{e^{10.58x+9.70x^2-5.17x^3+1,26x^4}C + e^{10.58x+9.70x^2-5.17x^3+1,26x^4}\int_1^x -e^{10.58s+9.70s^2-5.17s^3+1,26s^4}ds}, \end{aligned}$$

$x \in I$, $C \in \mathbb{R}$.
Námi získaná řešení ověříme na počáteční úloze

$$\begin{aligned} y &= x^3 + y^2\,,\; x \in I \\ y(1) &= 1\,. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Z počáteční podmínky dopočítáme konstantu C a dostaneme přibližné řešení počáteční úlohy (5.38) ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -0,53 - 1,95x + 1,66x^2 + \\ &+ \frac{1}{e^{1,06x+1,95x^2-1,11x^3}0,08 + e^{1,06x+1,95x^2-1,11x^3}\int_1^x -e^{-1,06s-1,95s^2+1,11s^3}ds}\,,\; x \in I\,. \end{aligned}$$

Pokud zvolíme aproximační funkcí polynom 3. stupně, přiblížné řešení počáteční úlohy má tvar

$$\begin{aligned} y_2(x) &= -5.29 + 9.70x - 7.75x^2 + 2.51x^3 + \\ &\frac{1}{e^{10.58x+9.70x^2-5.17x^3+1,26x^4}0,005 + e^{10.58x+9.70x^2-5.17x^3+1,26x^4}\int_1^x -e^{10.58s+9.70s^2-5.17s^3+1,26s^4}ds}. \end{aligned}$$

V níže uvedéné tabulce můžeme vidět srovnání přesného a našeho získaného řešení na intervalu I s kroky $h = 0,05$.

	přesné řešení	přibližné řešení polynom 2.st	přibližné řešení polynom 3.st		
x_i	$y(x_i)$	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	$y(x_i) - y_1(x_i)$	$y(x_i) - y_2(x_i)$
1	1	1	1	0	0
1,05	1,109	1,097	1,111	0,013	-0,001
1,10	1,240	1,219	1,242	0,021	-0,002
1,15	1,398	1,373	1,400	0,025	-0,001
1,20	1,591	1,564	1,592	0,027	-0,001
1,25	1,829	1,802	1,829	0,027	-0,001
1,30	2,127	2,101	2,128	0,027	-0,001
1,35	2,511	2,482	2,513	0,029	-0,002
1,40	3,021	2,984	3,024	0,037	-0,004
1,45	3,730	3,672	3,736	0,058	-0,005
1,50	4,786	4,679	4,792	0,107	-0,006

Tabulka 5.2: Porovnání přesného a přibližného řešení počáteční úlohy (5.38)

Z tabulky je patrné, že při použití polynomu 3. stupně dostáváme mnohem přesnější řešení diferenciální rovnice na intervalu $I = [1, 1.5]$.

Závěr

Cílem práce bylo seznámit s úvodem do teorie řetězových zlomků. Postupně byly představeny oblasti, kde se s řetězovými zlomky můžeme setkat.

V první kapitole jsme se věnovali historii řetězových zlomků. Představili jsme si jednotlivá období historie řetězových zlomků. Dozvěděli jsme se, že řetězové zlomky mají dlouhou historii a také, že na této teorii pracovalo mnoho významných matematiků.

Ve druhé kapitole jsme si definovali pojem obecný řetězový zlomek. Byly definovány konečné a nekonečné řetězové zlomky, dále byl definován prostý řetězový zlomek. Byla představena metoda na převedení řetězového zlomku na zlomek a naopak. Nezbytnou částí práce bylo definovat částečný zlomek. Ukázali jsme si, jak se počítají a jaké jsou vlastnosti pro sousední částečné zlomky. Velice důležitá byla věta, která říká, že hodnota řetězového zlomku leží mezi dvěma sousedními částečnými zlomky. Na závěr této kapitoly jsme si vysvětlili rozdíl mezi ekvivalentním a přiřazeným řetězovým zlomkem dané řadě. Největší význam má přiřazený řetězový zlomek, který může konvergovat na větším oboru než daná řada a tím poskytuje lepší výpočet hodnot dané funkce.

Nezbytnou kapitolou byla konvergence řetězových zlomků. Nejdříve jsme se zabývali konvergencí řetězových zlomků s kladnými prvky a sepsali několik kritérií konvergence řetězových zlomků. Nejdůležitější zjištění v této části bylo, že o konvergenci prostého řetězového zlomku rozhoduje divergence dané řady tvořená jmenovateli řetězového zlomku. Pro konvergenci obecného řetězového zlomku jsme si pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro konvergenci řady ukázali, že o konvergenci řetězového zlomku rozhoduje konvergence dané řady. To samé platí pro divergenci.

Ve čtvrté kapitole byl představen Gaussův řetězový zlomek. K tomu bylo nutné si definovat hypergeometrickou řadu s které jsme vytvořili daný řetězový zlomek. Poté jsme zkoumali tři elementární funkce, konkrétně $\arctan(x)$, $\ln(1+x)$ a $\ln(\frac{1+x}{1-x})$. Našli jsme jejich rozvoj v řetězový zlomek a zkoumali jejich konvergenci v reálném oboru. Vzhledem k tomu, že jsme nikde nedohledali postup, jak takovou konvergenci vyšetřit, ale pouze jenom výsledek, pokusili jsme se vlastním způsobem dojít k výsledku. Důležitým zjištěním bylo, že Gaussův řetězový zlomek konverguje na větší oblasti než mocninná řada, např. obor konvergence mocninné řady pro $\arctan(x)$ je $[-1,1]$, ale řetězový zlomek konverguje na celém $\mathbb{R}$. Z rozvoje funkce $\ln(\frac{x+1}{x-1})$ v řetězový zlomek jsme po ekvivalentní úpravě dostali řetězový zlomek, jehož jmenovatele částečných zlomků jsou shodné s Legendreovy polynomy. Což není náhoda, neboť Christoffelova-Darbouxova formule se formálně shoduje s tvarem pro výpočet jmenovatele Q_k částečného zlomku.

Poslední kapitola poukazuje na možné využití řetězových zlomků při řešení LDR 2. řádu a nelineární Riccatiho diferenciální rovnice. Nejdříve jsme se zabývali Eulerovo metodou, díky níž můžeme snadno dokázat jisté identity mezi řetězovými zlomky a určitým integrálem. V další části byla představena metoda na hledání řešení LDR 2. řádu. Metodu jsme poté úspěšně aplikovali na tři diferenciální rovnice. Na závěr kapitoly jsme si ukázali metodu na hledání partikulárního řešení speciální Riccatiho diferenciální rovnice. Nejdříve jsme aplikovali metodu na jednoduchém příkladě. Poté jsme se pokusili danou metodu použít na komplikovanější rovnici. Pro zjednodušení jsme rovnici uvažovali na malém intervalu. K nalezení řešení byl použit software Mathematica. Námi získané výsledky byly přívětivé, neboť přibližné řešení se příliš nelišilo od přesného řešení.

Vhodným rozšířením práce by bylo zaměřit se na danou oblast řetězových zlomků a probrat jí více do hloubky. Například více nastudovat spojení mezi řetězovými zlomky a ortogonálními polynomy nebo prostudovat spojení mezi Stieltjesovým integrálem a konvergencí řetězových zlomků nebo důkladně nastudovat maticovou teorii řetězových zlomků vyvinutou poměrně nedávno. Zajímavé by bylo také nastudovat Perronovu knihu o řetězových zlomcích spolu se ztracenými deníky S. Ramanujana, neboť obě práce nabízejí mnohem více informací o řetězových zlomcích, než které jsou zde zmíněny.

Literatura

[1] B.P. DĚMIDOVIČ a I.A. MARON. *Základy numerické matematiky.* Praha: SNTL, 1966.

[2] V.L. DANILOV A KOL. *Přehled matematické analýzy I.* Praha: SNTL, 1968. ISBN 04-013-68.

[3] WALL, H. S. *Analytic theory of continued fractions.* Dover edition. Mineola, New York: Dover Publications, 2018. ISBN 04-868-2369-5.

[4] KHRUSHCHEV, S. V. *Orthogonal polynomials and continued fractions: from Euler's point of view.* Cambridge: Cambridge University Press, 2008. Encyclopedia of mathematics and its applications, 122. ISBN 9780521854191.

[5] ŠOLCOVÁ, Alena. *Po stopách Eukleidova algoritmu HMI* [online]. Praha, 2014 [cit. 2019-05-12]. Dostupné z: http://alenasolcova.cz/wp-content/uploads/2014/05/040EA-HMIOPPA.pdf. FIT ČVUT v Praze.

[6] Kosmák L. *Základy matematickej analýzy*, Bratislava: Alfa, 1985.

[7] HAROLD T. DAVIS. *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations.* Dover Publications. ISBN 978-0486609713, s. 70

[8] O. PERRON. *Die Lehre von den Kettenbruchen.* Teubner, Leipzig, 1913

[9] *APPLICATIONS OF CONTINUED FRACTIONS IN ONE AND MORE VARIABLES* [online]. Brunel university, 1974 [cit. 2019-01-12]. Dostupné z: https://core.ac.uk/download/pdf/338162.pdf. Dizertační práce. Brunel university.

[10] History.*Archives.math.utk.edu* [online]. [cit. 2019-01-12]. Dostupné z: http://archives.math.utk.edu/articles/atuyl/confrac/history.html

[11] Učebnice, popularizační články, překlady (Czech) [Textbooks, popularization articles, translations]. Hykšová, Magdalena: Karel Rychlík (1885–1968).(Czech).Praha: Prometheus, 2003. 80-7196-259-7, pp. 145-164 ,dostupné online: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401159/DejinyMat$_2$2 $-$ 2003 $-$ 1_7.pdf

[12] ANNIE A.M. CUYT, VIGDIS PETERSEN, BRIGITTE VERDONK, HAAKON WAADELAND, WILLIAM B. JONES, F. BACKELJAUW a C. BONAN-HAMADA.

Handbook of Continued Fractions for Special Functions. Springer, 2008. ISBN 978-1402069482, s. 19-21

[13] EDWARD L. INCE. *Ordinary Differential Equations.* Dover Publications, 1956. ISBN 978-0486603490, s. 178-182

[14] *Continued Fraction Solutions to Hermite's, Legendre's and Laguerre's Differential Equation* [online]. University of Connecticut, 2009 [cit. 2019-05-11]. Dostupné z: https://pdfs.semanticscholar.org/53ae/20074617a71f2972901ce054a00c2807e408.pdf

[15] WIDŽ, Jiří. *Výpočtové problémy elementární teorie čísel* [online]. Praha, 2013 [cit. 2019-05-12]. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/58778. Rigorozní práce. Univerzita Karlova v Praze.

[16] A. J. Chinčin, *Řetězové zlomky*, Přírodovědecké vydavatelství Praha, 1952

[17] DRÁBEK, Pavel a Stanislav MÍKA. *Matematická analýza II.* 4. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2003. ISBN 80-708-2977-X, s. 223

[18] ŠTĚPÁNÍK, Zbyšek. *01DIFR Diferenciální rovnice*[online]. Praha, 2019 [cit. 2019-05-12]. Dostupné z: https://wikiskripta.fjfi.cvut.cz/, s. 27