Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

$L(i, j, k)$-ohodnocení grafů

Autor: Martin Kopřiva
Vedoucí práce: doc. RNDr. Přemysl Holub, Ph.D.

Plzeň, 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury, jež je uvedena v seznamu literatury na konci této práce.

V Plzni dne ....   Podpis ....

Poděkování

Touto cestou bych rád poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Přemyslu Holubovi, Ph.D., za jeho cenné rady, které mi v průběhu vypracování poskytoval, trpělivost, ochotu a spoustu času, jež mi věnoval.

Abstrakt

Tato práce se věnuje $L(i, j, k)$-ohodnocení grafů, se speciálním zaměřením na $L(3, 2, 1)$-ohodnocení, a hledá minimální rozpětí $\lambda_{(i,j,k)}$, případně horní či dolní odhady tohoto rozpětí, kterým lze daný graf ohodnotit. Pro $i, j, k \in \mathbb{N}, L(i, j, k)$-ohodnocením grafu G rozumíme přiřazení celých nezáporných čísel vrcholům grafu G tak, že sousední vrcholy musejí být ohodnoceny hodnotami s rozdílem aspoň i, vrcholy ve vzdálenosti 2 musejí být ohodnoceny hodnotami s rozdílem aspoň j a vrcholy ve vzdálenosti 3 musejí být ohodnoceny hodnotami s rozdílem aspoň k. V první části práce jsou shrnuty již známé výsledky z oblasti základních tříd grafů. Vlastní výzkum, o němž pojednává kapitola 4, se zaměřuje na $L(i, j, k)$-ohodnocení zobecněných Petersenových grafů.

Klíčová slova

graf, $L(i, j, k)$-ohodnocení, rozpětí, zobecněný Petersenův graf

Abstract

This bachelor thesis deals with $L(i, j, k)$-labelling of graphs with special focus on $L(3, 2, 1)$-labelling, and searches for minimal spread of $\lambda_{(i,j,k)}$ or upper and lower bounds on this spread by which the graph can be evaluated. For $i, j, k \in \mathbb{N}$, $L(i, j, k)$-labelling of a graph G is a mapping of non-negative integers to vertices of G such that the difference between the values of neighbouring vertices has to be at least i, the difference between the values of vertices at distance 2 has to be at least j, and the difference between the values of vertices at distance 3 has to be at least k. Already known results for basic families of graphs are summarized in the first part of the thesis. Our own research, which concentrates on $L(i, j, k)$-labelling of generalized Petersen graphs, is described in Chapter 4.

Keywords

graph, $L(i, j, k)$-labelling, spread, generalized Petersen graph

Obsah

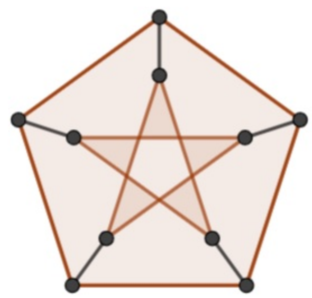
1 Úvod

V této práci se pracuje především s pojmem $L(i,j,k)$-ohodnocení grafů. Jde o přiřazování nezáporných celých hodnot vrcholům příslušného grafu tak, že sousedním vrcholům jsou přiřazeny hodnoty s rozdílem aspoň i, hodnoty vrcholů ve vzdálenosti 2 se pak musí lišit aspoň o j a hodnoty vrcholů ve vzdálenosti 3 se musí lišit aspoň o k. Maximální hodnotu, která je použita pro příslušné ohodnocení daného grafu G, budeme nazývat „rozpětí“. Snahou je toto rozpětí minimalizovat, toto minimální rozpětí pak budeme značit $\lambda_{(i,j,k)}(G)$.

Přiřazování hodnot grafu vychází z praktického problému, který se objevil na počátku 20. století – přiřazování frekvencí. Vzhledem k tomu, že stále více stanic vyžadovalo frekvence, na nichž by mohly vysílat, bylo obtížné najít volné frekvence, aniž by nové stanice nerušily vysílání ostatních stanic v okolí. Poprvé byl problém formulován v roce 1980 jako problém barvení grafu W. K. Halem (viz článek [7]). O jedenáct let později F. S. Roberts přišel s variantou zohledňující vzdálenost vysílačů, totiž že „blízké“ vysílače musí vysílat na rozdílných kmitočtech a „velmi blízké“ vysílače musí vysílat na kmitočtech lišících se aspoň o dva. V teorii grafů se jedná o vrcholy ve vzdálenosti 2, resp. sousední vrcholy, a minimální rozsah kmitočtů odpovídá číslu $\lambda_{(2,1)}$. S příslušnou definicí $L(2,1)$-ohodnocení grafů přišli Griggs a Yeh (viz článek [8]). Historii této problematiky pak shrnuje článek [1].

Prakticky můžeme tento problém rozšířit o další úroveň – a rozlišovat vysílače jak „velmi blízké“ a „blízké“, tak i vysílače „relativně blízké“; opět aplikováno na teorii grafů se jedná o vrcholy sousední, vrcholy ve vzdálenosti 2 a vrcholy ve vzdálenosti 3. O tom, o kolik se budou muset lišit hodnoty daných vrcholů, pak rozhodují parametry i, j a k. Obvykle pracujeme s $i > j > k$, kde i, j, k jsou přirozená čísla. Největší důraz bude kladen na hodnoty $i = 3$, $j = 2$ a $k = 1$. S tímto zobecněním přišli Liu a Shao [11].

V této práci se zaměříme především na hledání rozpětí $\lambda_{(3,2,1)}$ (tedy hodnoty sousedních vrcholů se musí lišit aspoň o 3, hodnoty vrcholů ve vzdálenosti 2 se musí lišit aspoň o 2 a hodnoty vrcholů ve vzdálenosti 3 se musí lišit aspoň o 1) pro zobecněné Petersenovy grafy. Ty vycházejí z Petersenova grafu, který je zachycen na obrázku 1.



Obrázek 1: Petersenův graf

2 Definice základních pojmů

V tomto textu budeme pracovat s následujícími pojmy (většina pojmů a definic byla převzata z [5]). Grafem G rozumíme neorientovaný graf bez smyček a násobných hran. Symboly $V(G)$ a $E(G)$ budeme značit množinu vrcholů, resp. hran příslušnou k danému grafu G. Hranu mezi vrcholy x a y budeme zapisovat xy. Ze základních tříd grafů budeme pracovat s úplnými grafy, úplnými bipartitními grafy, cestami, kružnicemi, (r-árními) stromy, (uniformními) housenkami, dále pak s kartézským produktem grafů či s mocninami grafů. Stupeň vrcholu x budeme značit $\deg(x)$, maximální stupeň grafu G pak budeme značit $\Delta(G)$. Vzdáleností dvou vrcholů x, y budeme rozumět délku nejkratší cesty mezi vrcholy x a y, značíme $\mathrm{dist}_G(x, y)$. Graf H je podgrafem grafu G, jestliže $V(H) \subset V(G)$ a $E(H) \subset E(G)$.

Značení 2.1. Dále budeme používat toto značení:

- $f(u) \ldots$ hodnota příslušná vrcholu u
- $f_s \ldots$ s-tá hodnota
- $f_{max} \ldots$ maximální hodnota

Zápis $|f(u) - f(v)|$ určuje absolutní rozdíl hodnot přiřazených k vrcholům u a v.

Nechť n je přirozené číslo a označme $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

Definice 2.2 [5]. *Úplný graf K_n je graf s $V(K_n) = [n]$ a $E(K_n) = \binom{[n]}{2}$. Cesta P_n na n vrcholech je graf s $V(P_n) = [n]$ a $E(P_n) = \{l(l+1) : 1 \leq l < n\}$. Kružnice C_n, kde $n \geq 3$, je graf s $V(C_n) = [n]$ a $E(C_n) = E(P_n) \cup \{1n\}$.*

Definice 2.3 [3]. *Graf, který má vrcholovou množinu rozdělenu na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny M a N, přičemž $|M| = m, |N| = n$, a který obsahuje všech $m \cdot n$ hran xy takových, že $x \in M$ a $y \in N$, nazýváme úplný bipartitní graf (kompletní bipartitní graf) a značíme jej $K_{m,n}$. Každý podgraf úplného bipartitního grafu je bipartitní graf.*

Speciálním případem úplného bipartitního grafu je hvězda, kde je $|M| = 1$. Značíme $S_n = K_{1,n}$.

Definice 2.4 [12]. *Konečný souvislý graf, který jako podgraf neobsahuje žádnou kružnici, se nazývá strom. Housenka je strom s alespoň třemi vrcholy takový, že odstraněním všech vrcholů stupně 1 a všech hran s nimi incidentních vznikne cesta, nebo graf s jediným vrcholem.*

Speciálním stromem je tzv. r-ární strom. To je zakořeněný strom T takový, že kořen má stupeň r a všechny vnitřní uzly mají stupeň $r + 1 = \Delta(T)$.

Definice 2.5 [12]. *Graf, který je možno v rovině znázornit tak, že vrcholy jsou body roviny a hrany jsou oblouky (lomené čáry) takové, že žádné dvě nemají společný vnitřní bod, se nazývá rovinný (planární).*

Definice 2.6 [12]. *Máme dán graf $G = [V(G), E(G)]$, dva různé vrcholy x, y a přirozené číslo n. Definujeme n-tou mocninu grafu G (značíme G^n) takto: $V(G^n) = V(G)$ a hrana xy existuje v G^n právě tehdy, platí-li vztah $1 \leq \mathrm{dist}_G(x, y) \leq n$.*

3 $L(i, j, k)$-ohodnocení grafů

Mějme dán graf G a $i, j, k \in \mathbb{N}$, kde $i > j > k$. Potom $L(i, j, k)$-ohodnocením grafu G rozumíme ohodnocení vrcholů grafu G se speciálním požadavkem na hodnoty přiřazené sousedním vrcholům a vrcholům ve vzdálenosti 2 a 3.

Následující definice byla převzata z [4] a upravena pro $L(i, j, k)$-ohodnocení.

Definice 3.1 [4]. *Nechť G je graf. Pak $L(i, j, k)$-ohodnocením grafu G rozumíme funkci $f : V(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ takovou, že pro každou dvojici $u, v \in V(G)$ platí:*

- *je-li $uv \in E(G)$, pak $|f(u) - f(v)| \geq i$,*
- *je-li $\mathrm{dist}_G(u, v) = 2$, pak $|f(u) - f(v)| \geq j$,*
- *je-li $\mathrm{dist}_G(u, v) = 3$, pak $|f(u) - f(v)| \geq k$.*

Zavedeme značení p-$L(i, j, k)$-ohodnocení, rozumíme tím $L(i, j, k)$-ohodnocení takové, že žádná z hodnot přiřazená vrcholům daného grafu není větší než p, kde p je nezáporné číslo. Ohodnocovacím číslem nazveme číslo $\lambda_{(i,j,k)}(G)$, které označuje nejmenší číslo p takové, že graf G lze ohodnotit pomocí p-$L(i, j, k)$-ohodnocení, v tom případě hovoříme o minimálním ohodnocení. Toto značení bylo převzato z [4] s $L(3, 2, 1)$-ohodnocením a upraveno pro $L(i, j, k)$-ohodnocení.

Poznámka 3.2. Ve článcích [1], [6], [9] je však na rozdíl od této práce (a článku [4]) použito ohodnocování grafů od čísla 1. Výsledným $\lambda_{(i,j,k)}$ příslušného grafu tak není rozsah hodnot, nýbrž počet hodnot. Proto jsou výsledky z těchto článků v této práci transformovány tak, aby odpovídaly našemu ohodnocování.

Tvrzení 3.3 [4]. *Nechť H je podgraf grafu G. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(H) \leq \lambda_{(3,2,1)}(G)$.*

Tvrzení 3.4 [4]. *Pokud funkce f je p-$L(3, 2, 1)$-ohodnocením grafu G, pak i funkce $f' : V(G) \to \{0, 1, \ldots, p\}$, definovaná jako $f'(v) = p - f(v)$, je také p-$L(3, 2, 1)$-ohodnocením grafu G.*

Je evidentní, že obě tyto tvrzení lze zobecnit i pro obecné $L(i, j, k)$-ohodnocení grafu pro přípustné parametry i, j, k.

Poznámka 3.5 [1]. Jestliže hodnotu 0 nepřiřadíme žádnému vrcholu v G při $L(3, 2, 1)$-ohodnocení grafu G, pak hodnoty přiřazené všem vrcholům můžeme zmenšit o 1. Navíc při minimálním $L(3, 2, 1)$-ohodnocení nutně musí být 0 použita při ohodnocení vrcholů.

I tuto poznámku lze zobecnit pro obecné $L(i, j, k)$-ohodnocení grafu pro přípustné parametry i, j, k.

V následujících dvou podkapitolách nás bude zajímat $L(i, 2, 1)$-ohodnocení základních tříd grafů, přičemž $i \geq 3$. Sem patří například úplné grafy, úplné bipartitní grafy, hvězdy, cesty, kružnice, housenky, r-ární stromy atp.

3.1 $L(3, 2, 1)$-ohodnocení základních tříd grafů

Nejprve se podíváme na zcela konkrétní a také nejvíce zkoumané $L(3, 2, 1)$-ohodnocení. Zde čerpáme především ze článků [1] a [4].

Liu a Shao [11] studovali $L(3, 2, 1)$-ohodnocení planárních grafů. Povedlo se jim ukázat, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 15(\Delta^2 - \Delta + 1)$, pokud G je planární graf s maximálním stupněm grafu Δ. Clipperton a kolektiv [1] pak ukázali, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq \Delta^3 + \Delta^2 + 3\Delta - 1$ pro libovolný graf G. Jak ukazuje následující věta, byl tento odhad již vylepšen.

Věta 3.6 [4]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm Δ. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq \Delta^3 + 2\Delta$.*

Nyní se podíváme na některé základní třídy grafů a jejich hodnotu $\lambda_{(3,2,1)}$. Začneme s úplnými a úplnými bipartitními grafy, o nichž mj. pojednává článek [1].

Věta 3.7 [1]. *Každý úplný graf K_n s n vrcholy má $\lambda_{(3,2,1)}(K_n) = 3(n - 1)$.*

Věta 3.8 [1]. *Každý úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ má $\lambda_{(3,2,1)}(K_{m,n}) = 2(m + n) - 1$.*

Z předcházející věty vyplývá, že hvězda, S_n, má $\lambda_{(3,2,1)}(S_n) = 2n + 1$. Navíc, pokud f je $(2n + 1)$-$L(3, 2, 1)$-ohodnocením S_n, pak $f(v) = 0$ nebo $f(v) = 2n + 1$, kde v je centrální vrchol hvězdy [4].

Důsledek 3.9 [4]. *Každý graf s maximálním stupněm $\Delta(G) = \Delta > 0$ má $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 2\Delta + 1$. Navíc, pokud $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2\Delta + 1$ a pokud f je $(2\Delta + 1)$-$L(3, 2, 1)$-ohodnocením grafu G, pak pro všechny vrcholy $v \in V(G)$ s $\deg(v) = \Delta$ je $f(v) \in \{0, 2\Delta + 1\}$.*

Důsledek 3.10 [4]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta(G) = \Delta$. Pokud existují vrcholy v_1, v_2, $v_3 \in V(G)$ takové, že $\deg(v_r) = \Delta$ a $\mathrm{dist}_G(v_r, v_s) \leq 3$ pro všechna $1 \leq r, s \leq 3$, pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 2\Delta + 2$.*

Nyní budeme zkoumat další důležité základní grafy: cesty a kružnice. $L(3, 2, 1)$-ohodnocení těchto základních tříd grafů bylo opět zkoumáno v článku [1].

Věta 3.11 [1]. *Pro každou cestu P_n na n vrcholech, platí:*

$$\lambda_{(3,2,1)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \textit{pokud } n = 1; \\ 3, & \textit{pokud } n = 2; \\ 5, & \textit{pokud } n = 3, 4; \\ 6, & \textit{pokud } n = 5, 6, 7; \\ 7, & \textit{pokud } n \geq 8. \end{cases} \tag{1}$$

Chia a spol. [4] pak zkoumali mocniny cesty, tj. grafy P_n^r.

Věta 3.12 [4]. *Nechť $n, r \geq 1$. Pak pro graf P_n^r, platí:*

$$\lambda_{(3,2,1)}(P_n^r) = \begin{cases} 3n-3, & \textit{pokud}\, n \leq r+1; \\ n+2r, & \textit{pokud}\, r+2 \leq n \leq 3r; \\ 5r, & \textit{pokud}\, n = 3r+1; \\ 5r+1, & \textit{pokud}\, 3r+2 \leq n \leq 5r+2; \\ 5r+2, & \textit{pokud}\, n \geq 5r+3. \end{cases} \tag{2}$$

Následující značení pro přiřazování hodnot vrcholům daného grafu G je převzato z [1], hovoří o přiřazování hodnot vrcholům grafu G při $L(3,2,1)$-ohodnocení. Značení je možné převést i pro obecné $L(i,j,k)$-ohodnocení. Nechť $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je množina všech vrcholů grafu G. Zobrazení f pak přiřadí vrcholu v_s hodnotu f_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Posloupnost prvků $F_G = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ pak nazveme posloupností hodnot přiřazených k daným vrcholům v grafu G, zkráceně posloupností hodnot. Zapisovat budeme jako $f\colon V_G \to F_G$ nebo $f(V_G) = F_G$.

Pokud navíc $f_{max} = \lambda_{(3,2,1)}(G)$, pak $f(V_G)$ nazveme optimální posloupností hodnot přiřazených k daným vrcholům v grafu G při $L(3,2,1)$-ohodnocení, zkráceně optimální posloupností hodnot při $L(3,2,1)$-ohodnocení. Zapisovat budeme jako $f_O\colon V_G \to F_G$ nebo $f_O(V_G) = F_G$.

Následující věta hovoří o optimálních posloupnostech hodnot při $L(3,2,1)$-ohodnocení pro kružnice s konkrétním počtem vrcholů.

Věta 3.13 [1]. *Nechť $G = C_4$. Pak $f_O(V_G) = (0, 5, 2, 7)$ při $L(3,2,1)$-ohodnocení.*
Nechť $G = C_5$. Pak $f_O(V_G) = (4, 0, 6, 2, 8)$ při $L(3,2,1)$-ohodnocení.
Nechť $G = C_6$. Pak $f_O(V_G) = (0, 3, 6, 1, 4, 7)$ při $L(3,2,1)$-ohodnocení.
Nechť $G = C_{11}$. Pak $f_O(V_G) = (0, 5, 2, 7, 4, 0, 8, 5, 1, 7, 3)$ při $L(3,2,1)$-ohodnocení.

Další věta hovoří o optimální posloupnosti hodnot pro libovolnou kružnici s určitým počtem vrcholů.

Věta 3.14 [1]. *Každý graf, který je kružnicí o sudém počtu vrcholů n $(n \geq 4)$, lze ohodnotit pomocí složení $f_O(V_{C_4})$ a $f_O(V_{C_6})$. Vrcholy kružnice budeme ohodnocovat kopírováním vzoru pro $f_O(V_{C_4})$ a v případě, že $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$, přidáme jedenkrát vzor $f_O(V_{C_6})$. Každý graf, který je kružnicí o lichém počtu vrcholů n, kde $n \geq 9$ a $n \neq 11$, lze ohodnotit pomocí složení $f_O(V_{C_4})$ a $f_O(V_{C_5})$.*

Věta 3.15 [1]. *Pro každou kružnici C_n, kde $n \geq 3$, platí:*

$$\lambda_{(3,2,1)}(C_n) = \begin{cases} 6, & \textit{pokud}\, n = 3; \\ 7, & \textit{pokud}\, n \textit{ je sudé}; \\ 8, & \textit{pokud}\, n \textit{ je liché a pokud}\, n \neq 3, 7; \\ 9, & \textit{pokud}\, n = 7. \end{cases} \tag{3}$$

Nyní přejdeme ke stromům. A začneme r-árním stromem.

Věta 3.16 [1]. *Nechť T je r-ární strom. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(T) = 2r + 5$.*

Věta 3.17 [4]. *Nechť T je strom s maximálním stupněm $\Delta(T) = \Delta$. Pak $2\Delta + 1 \leq \lambda_{(3,2,1)}(T) \leq 2\Delta + 3$.*

Dalším typem stromů jsou housenky. Uniformní housenka $G = Cat_n$ je housenka, kde vrcholy mají stupeň buď 1, nebo $\Delta(Cat_n)$, kde $\Delta(Cat_n)$ je maximální stupeň uniformní housenky a n značí počet vrcholů na páteři této housenky, tj. to jsou vrcholy s maximálním stupněm.

Věta 3.18 [1]. *Nechť $G = Cat_n$ je uniformní housenka na n vrcholech, kde $n > 2$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 2\Delta + 1$. Pokud navíc $\Delta > 2$, $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2\Delta + 2$.*

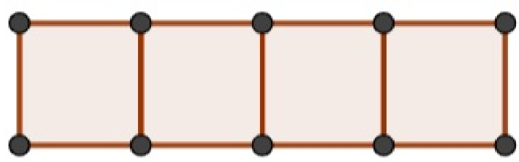
Následující věty hovoří o $L(3, 2, 1)$-ohodnocování kartézského produktu (součinu) grafů, hlavně cest a kružnic. Máme dáno t grafů $G_1, G_2, \ldots, G_t$, potom Kartézským produktem těchto grafů (značíme $G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_t$), rozumíme graf [4]:

$$\begin{gathered} V(G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_t) = V(G_1) \times V(G_2) \times \cdots \times V(G_t), \\ E(G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_t) = \{(u_1, u_2, \ldots, u_t)(v_1, v_2, \ldots, v_t) | u_l, v_l \in V(G_l) \\ \text{pro všechna } l, 1 \leq l \leq t, u_r v_r \in E(G_r) \text{ pro nějaké } r \text{ a } u_s = v_s \text{ pro všechna } s \neq r\}. \end{gathered}$$

Věta 3.19 [4]. *Pro všechna $n \geq 2$ platí:*

$$\lambda_{(3,2,1)}(P_2 \square P_n) = \begin{cases} 7, & \text{pokud } n = 2; \\ 8, & \text{pokud } n = 3, 4; \\ 9, & \text{pokud } n \geq 5. \end{cases} \tag{4}$$

Neohodnocený graf $G = P_2 \square P_5$ zachycuje obrázek 2.



Obrázek 2: Graf $G = P_2 \square P_5$

Věta 3.20 [4]. *Pro všechna m, n taková, že $n \geq m \geq 2$, platí:*

$$\lambda_{(3,2,1)}(P_m \square P_n) = \begin{cases} 7, & \text{pokud } (m, n) = (2, 2); \\ 8, & \text{pokud } (m, n) = (2, 3), (2, 4); \\ 9, & \text{pokud } (m, n) = (3, 3) \text{ nebo } m = 2, n \geq 5; \\ 10, & \text{pokud } (m, n) = (3, 4), (3, 5); \\ 11, & \text{pokud } m = 3, n \geq 6, \text{ nebo } n \geq m \geq 4. \end{cases} \tag{5}$$

Věta 3.21 [4]. *Pro $P_m \square C_n$ platí $\lambda_{(3,2,1)}(P_m \square C_n) = 11$, pokud $n \equiv 0 \pmod 4$ a $m \geq 3$.*

Věta 3.22 [4]. *Pro $C_m \square C_n$ platí $\lambda_{(3,2,1)}(C_m \square C_n) = 11$, pokud $m \equiv 0 \pmod 4$ a $n \equiv 0 \pmod{12}$.*

Další tři věty hovoří o kartézském produktu cesty P_2 a kružnice C_n, kde n nabývá postupně různých hodnot.

Věta 3.23 [4]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a nechť $P_2 \square C_n$ je kartézský produkt cesty a kružnice. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(P_2 \square C_n) = 9$ tehdy a jen tehdy, je-li $n \equiv 0 \pmod{10}$.*

Věta 3.24 [4]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a nechť $P_2 \square C_n$ je kartézský produkt cesty a kružnice. Pokud n je sudé, $n \not\equiv 0 \pmod{10}$ a $n \neq 6$, pak $\lambda_{(3,2,1)}(P_2 \square C_n) = 10$.*

Věta 3.25 [4]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a nechť $P_2 \square C_n$ je kartézský produkt cesty a kružnice. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(P_2 \square C_n) \leq 11$, pokud $n \equiv 1 \pmod 4$ a $n \geq 21$, nebo $n \equiv 3 \pmod 4$ a $n \geq 11$.*

Mějme dánu n-rozměrnou krychli Q_n definovanou jako $Q_n = \underbrace{P_2 \square P_2 \square \cdots \square P_2}_{n}$, kde n je přirozené číslo. O $L(3,2,1)$-ohodnocení n-rozměrné krychle hovoří následující věta.

Věta 3.26 [4]. *Nechť $n \geq 3$. Pak $2n + 3 \leq \lambda_{(3,2,1)}(Q_n) \leq 4n + 3$.*

3.2 $L(i, 2, 1)$-ohodnocení základních tříd grafů

Článek [6] zkoumá stejné třídy grafů jako článek [1], ale zabývá se $L(i, 2, 1)$-ohodnocením, přičemž $i \geq 3$, tj. sousední vrcholy mají přiřazeny hodnoty s rozdílem aspoň i.

Věta 3.27 [6]. *Každý úplný graf K_n má $\lambda_{(i,2,1)}(K_n) = i(n-1)$.*

Věta 3.28 [6]. *Každý úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ má $\lambda_{(i,2,1)}(K_{m,n}) = 2(m+n-2)+i$.*

Z předcházející věty vyplývá, že hvězda, S_n, má $\lambda_{(i,2,1)}(S_n) = i + 2n - 2$. Navíc, obě tyto věty jdou zobecnit pro $L(i, j, k)$-ohodnocení, viz podkapitola 3.3.

Věta 3.29 [6]. *Pro každou cestu P_n na n vrcholech, kde $i \geq 4$, platí:*

$$\lambda_{(i,2,1)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } n = 1; \\ i, & \text{pokud } n = 2; \\ i+2, & \text{pokud } n = 3, 4; \\ i+4, & \text{pokud } n \geq 5. \end{cases} \tag{6}$$

U kružnic je výsledek složitější – musíme vydělit dva případy v závislosti na parametru i. O tom hovoří následující dvě věty.

Věta 3.30 [6]. *Pro každou kružnici C_n, kde $n > 3$, platí:*

$$\lambda_{(4,2,1)}(C_n) = \begin{cases} 8, & \textit{pokud}\, n \neq 6, 7, 11; \\ 9, & \textit{pokud}\, n = 6, 11; \\ 10, & \textit{pokud}\, n = 7. \end{cases} \tag{7}$$

Věta 3.31 [6]. *Pro každou kružnici C_n, kde $n > 3$ a kde $i \geq 5$, platí:*

$$\lambda_{(i,2,1)}(C_n) = \begin{cases} i+4, & \textit{pokud}\, n = 4l, l \in \mathbb{N}; \\ i+6, & \textit{pokud}\, n = 2l, l \in \mathbb{N}, l > 2, \ \textit{ale} \ \ n \neq 4p, \textit{pro} \ \ p \in \mathbb{N}; \\ 2i+1, & \textit{pokud}\, n = 7 \ \textit{a} \ \ i = 5; \\ 2i, & \textit{pokud}\, n = 2l+1, l \in \mathbb{N}, l > 1, \ \textit{kromě}\ n = 7 \ \textit{a}\ i = 5. \end{cases} \tag{8}$$

3.3 $L(i, j, k)$-ohodnocení grafů

Tato podkapitola se zabývá obecným případem, totiž $L(i, j, k)$-ohodnocením grafů. Článek [9] se věnuje $L(i, j, k)$-ohodnocení a zkoumá minimální a surjektivní ohodnocení základních tříd grafů.

I v tomto případě se ve článku používá ohodnocování vrcholů příslušných grafů přirozenými čísly (ne nulou); proto i zde jsou výsledky „přepočítány“ a uvádíme je zde s ohodnocováním od 0.

3.3.1 $L(i, j, k)$-ohodnocení základních tříd grafů

Nejprve se opět podíváme na $L(i, j, k)$-ohodnocení úplných a úplných bipartitních grafů.

Věta 3.32 [9]. *Nechť $i, j, k \in \mathbb{N}$ a $i > j > k$. Každý úplný graf K_n s n vrcholy má $\lambda_{(i,j,k)}(K_n) = i(n-1)$.*

Věta 3.33 [9]. *Nechť $i, j, k \in \mathbb{N}$ a $i > j > k$. Každý úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ má $\lambda_{(i,j,k)}(K_{m,n}) = j(m+n-2) + i$.*

Všimněme si, že výsledné $\lambda_{(i,j,k)}$ u těchto grafů vůbec nereflektuje parametr k (a v případě úplného grafu dokonce i parametr j). Důvodem je pochopitelně to, že vzdálenost dvou různých vrcholů x a y je v úplném bipartitním grafu maximálně 2 a v úplném grafu je právě 1. Oba výsledky jsou též v souladu s konkrétním $L(3, 2, 1)$-ohodnocením těchto grafů.

V poslední části nás budou zajímat cesty a kružnice a jejich $L(i, j, k)$-ohodnocení. Nebude se však jednat o úplně obecné případy, nýbrž jen některé speciální. Začneme s nastavením $i = mj$ pro nějaký přípustný parametr m.

Věta 3.34 [9]. *Pro každou cestu P_n na n vrcholech, kde $j \geq 2$, $m \geq 2$ a kde m a j jsou přirozená čísla, platí:*

$$\lambda_{(mj,j,1)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \textit{pokud}\, n = 1; \\ mj, & \textit{pokud}\, n = 2; \\ mj + j, & \textit{pokud}\, n = 3, 4; \\ mj + 2j, & \textit{pokud}\, n \geq 5. \end{cases} \tag{9}$$

Věta 3.35 [9]. *Pro každou kružnici C_n, kde $n \geq 3$ a kde $j \geq 2$, platí:*

$$\lambda_{(2j,j,1)}(C_n) = \begin{cases} 4j, & \textit{pokud}\, n \neq 6, 7, 11; \\ 4j + 1, & \textit{pokud}\, n = 6, 11; \\ 4j + 2, & \textit{pokud}\, n = 7. \end{cases} \tag{10}$$

Věta 3.36 [9]. *Pro každou kružnici C_n, kde $n \geq 3$ a kde $j \geq 2$ a $m \geq 3$, platí:*

$$\lambda_{(mj,j,1)}(C_n) = \begin{cases} mj + 2j, & \textit{pokud}\, n = 4l, \;\textit{pro}\; l \in \mathbb{N}; \\ mj + 3j, & \textit{pokud}\, n = 2l, \;\textit{pro}\; l \in \mathbb{N}, l > 2, n \neq 4p, p \in \mathbb{N}; \\ 2mj, & \textit{pokud}\, n \textit{ je liché}. \end{cases} \tag{11}$$

Tentokrát se podíváme na výsledky získané opět v článku [9] pro $L(j + m, j, 1)$-ohodnocení cest, kde m je opět nějaký přípustný parametr.

Věta 3.37 [9]. *Pro každou cestu P_n na n vrcholech, kde $j > m > 0$ platí:*

$$\lambda_{(j+m,j,1)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \textit{pokud}\, n = 1; \\ j + m, & \textit{pokud}\, n = 2; \\ 2j + m, & \textit{pokud}\, n = 3, 4; \\ 2j + 2m, & \textit{pokud}\, n = 5, 6, 7; \\ 2j + 2m + 1, & \textit{pokud}\, n \geq 8. \end{cases} \tag{12}$$

Věta 3.38 [9]. *Pro každou cestu P_n na n vrcholech, kde $m \geq j \geq 2$, platí:*

$$\lambda_{(j+m,j,1)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \textit{pokud}\, n = 1; \\ j + m, & \textit{pokud}\, n = 2; \\ 2j + m, & \textit{pokud}\, n = 3, 4; \\ 3j + m, & \textit{pokud}\, n \geq 5. \end{cases} \tag{13}$$

Zmíníme zde ještě výsledky dosažené pro cesty libovolné délky a kružnice délky nejvýše 9 s parametry $i = (m+1)k$ a $j = mk$, kde $m \geq 2$.

Věta 3.39 [9]. *Pro každou cestu P_n na n vrcholech, kde $k \geq 1$ a $m \geq 2$, platí:*

$$\lambda_{((m+1)k,mk,k)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \textit{pokud } n = 1; \\ mk + k, & \textit{pokud } n = 2; \\ 2mk + k, & \textit{pokud } n = 3, 4; \\ 2mk + 2k, & \textit{pokud } n = 5, 6, 7; \\ 2mk + 3k, & \textit{pokud } n \geq 8. \end{cases} \tag{14}$$

Věta 3.40 [9]. *Pro každou kružnici C_n, kde $n \geq 3$ a kde $k \geq 1$ a $m \geq 2$, platí:*

$$\lambda_{((m+1)k,mk,k)}(C_n) = \begin{cases} 2mk + 2k, & \textit{pokud } n = 3; \\ 3mk + k, & \textit{pokud } n = 4; \\ 4mk, & \textit{pokud } n = 5; \\ 2mk + 3k, & \textit{pokud } n = 6; \\ 3mk + 3k, & \textit{pokud } n = 7; \\ 2mk + 4k, & \textit{pokud } n = 9. \end{cases} \tag{15}$$

Na závěr zmíníme větu, ve které se počítá s postupně jdoucími parametry; totiž $i = k + 2$ a $j = k + 1$.

Věta 3.41 [9]. *Pro každou cestu P_n na n vrcholech, kde $k \geq 2$, platí:*

$$\lambda_{(k+2,k+1,k)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \textit{pokud } n = 1; \\ k + 2, & \textit{pokud } n = 2; \\ 2k + 3, & \textit{pokud } n = 3; \\ 3k + 2, & \textit{pokud } n = 4; \\ 3k + 4, & \textit{pokud } n \geq 5. \end{cases} \tag{16}$$

3.3.2 Surjektivní $L(i, j, k)$-ohodnocení základních tříd grafů

Nyní nebudeme zjišťovat minimální rozpětí $\lambda_{(i,j,k)}$, ale budeme hledat takové grafy, že jejich vrcholy při $L(i, j, k)$-ohodnocení půjde ohodnotit hodnotami $0, \dots, n-1$ s tím, že každá hodnota bude použita právě jednou; n značí počet vrcholů příslušného grafu.

Definice 3.42 [9]. *Nechť graf G má n vrcholů. Surjektivním ohodnocením grafu G rozumíme takové ohodnocení vrcholů tohoto grafu, že každá z hodnot $0, 1, 2, \dots, n-1$ je použita právě jednou.*

V našem případě budeme hovořit o surjektivním $L(3, 2, 1)$-ohodnocení, resp. surjektivním $L(i, j, k)$-ohodnocení.

Věta 3.43 [10]. *Nejkratší netriviální cesta, kterou můžeme ohodnotit surjektivním $L(3, 2, 1)$-ohodnocením, je cesta na 7 vrcholech, P_7.*

Z předchozí věty vyplývá, že uniformní housenka Cat_n s maximálním stupněm $\Delta = 2$ může být ohodnocena surjektivním $L(3, 2, 1)$-ohodnocením, pouze pokud $n \geq 5$ [9] (připomínáme, že n v tomto případě značí počet vrcholů s maximálním stupněm).

Věta 3.44 [9]. *Každou cestu délky aspoň 7 lze ohodnotit surjektivním $L(3, 2, 1)$-ohodnocením.*

Víme tedy, že žádnou cestu P_n, kde $n \leq 6$, nelze ohodnotit surjektivním $L(3, 2, 1)$-ohodnocením. Naopak každou cestu P_n, kde $n \geq 7$ lze ohodnotit surjektivním $L(3, 2, 1)$-ohodnocením. Nyní se podíváme, jakých výsledků dosáhneme u kružnic.

Věta 3.45 [10]. *Nejkratší kružnice, kterou lze ohodnotit surjektivním $L(3, 2, 1)$-ohodnocením, je kružnice na 8 vrcholech, C_8.*

Věta 3.46 [10]. *Každou kružnici C_n, kde $n \geq 8$, lze ohodnotit surjektivním $L(3, 2, 1)$-ohodnocením.*

Následující dvě věty shrnují, které uniformní housenky lze a které nelze ohodnotit surjektivním $L(3, 2, 1)$-ohodnocením.

Věta 3.47 [9]. *Uniformní housenku Cat_n s $n \leq 3$ nelze ohodnotit surjektivním $L(3, 2, 1)$-ohodnocením.*

Věta 3.48 [9]. *Každou uniformní housenku Cat_n s $n \geq 4$ a s $\Delta \geq 3$ lze ohodnotit surjektivním $L(3, 2, 1)$-ohodnocením.*

Na závěr této podkapitoly se podíváme na obecnější případy pro cesty P_n, totiž surjektivní $L(i, j, k)$-ohodnocení cest.

Věta 3.49 [9]. *Pokud existuje surjektivní $L(i, 2, 1)$-ohodnocení cesty P_n, pak pro cestu P'_n, kde $n' > n$, také existuje surjektivní $L(i, 2, 1)$-ohodnocení.*

O zobecnění této věty hovoří věta následující.

Věta 3.50 [9]. *Pokud existuje surjektivní $L(i, j, k)$-ohodnocení cesty P_n, pak pro cestu P'_n, kde $n' > n$, také existuje surjektivní $L(i, j, k)$-ohodnocení.*

Na úplný závěr pak zde ještě zmíníme tři hypotézy týkající se surjektivního $L(i, 2, 1)$-ohodnocení, surjektivního $L(mj, j, 1)$-ohodnocení a surjektivního $L(j+m, j, 1)$-ohodnocení u cest s přípustnými parametry.

Hypotéza 3.51 [9]. *Nejkratší cesta P_n, kterou lze ohodnotit surjektivním $L(i, 2, 1)$-ohodnocením, kde $i \geq 3$, je cesta P_{2i+2}, pokud n je sudé, a P_{2i+1}, pokud n je liché.*

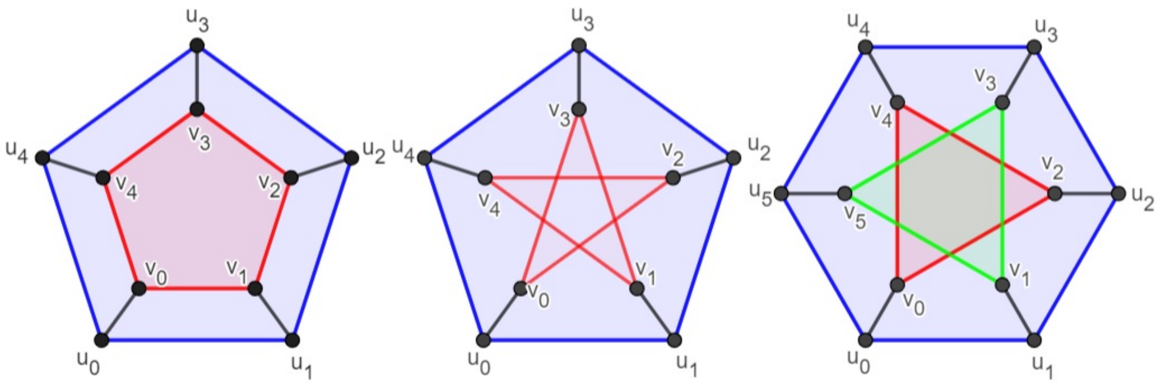
Hypotéza 3.52 [9]. *Nechť $j \geq 2$ a $m \in \mathbb{N}$. Pak nejkratší cesta, kterou lze ohodnotit surjektivním $L(mj, j, 1)$-ohodnocením, je cesta P_{2mj+j}.*

Hypotéza 3.53 [9]. *Nechť $j \geq 2$, $m \geq 2$ a $j = m$. Pak nejkratší cesta, kterou lze ohodnotit surjektivním $L(j + m, j, 1)$-ohodnocením, je cesta P_{5m}.*

4 $L(3,2,1)$-ohodnocení zobecněných Petersenových grafů

Definice 4.1 [2]. *Zobecněný Petersenův graf $G = GPG(p_1, p_2)$ je graf s $V(G) = \{u_0, \ldots, u_{p_1-1}, v_0, \ldots, v_{p_1-1}\}$ a s $E(G) = E_1(G) \cup E_2(G) \cup E_3(G)$, kde $E_1(G) = \{u_t u_{t+1}, t = 0, \ldots, p_1 - 1\}$, $E_2(G) = \{v_t v_{t+p_2}, t = 0, \ldots, p_1 - 1\}$ a $E_3(G) = \{u_t v_t, t = 0, \ldots, p_1 - 1\}$ a kde při přesahu indexů jsou indexy čteny jako modulo p_1. Zároveň platí $p_2 < p_1/2$.*

V dalším textu budeme dodržovat následující terminologii a značení vrcholů. Vnější kružnicí budeme nazývat podgraf H_1 grafu $G = GPG(p_1, p_2)$ s $V(H_1) = \{u_0, \ldots, u_{p_1-1}\}$ a $E(H_1) = E_1(G)$. Jestliže p_1 a p_2 jsou nesoudělná čísla, vnitřní kružnicí budeme nazývat podgraf H_2 s $V(H_2) = \{v_0, \ldots, v_{p_1-1}\}$ a $E(H_2) = E_2(G)$. Jestliže p_1 a p_2 jsou soudělná čísla, vznikne více vnitřních kružnic. Na obrázku 3 jsou znázorněny grafy $GPG(5,1)$, $GPG(5,2)$ a $GPG(6,2)$ s označenými vrcholy u_r a v_t. Modře je u každého grafu znázorněna vnější kružnice a červeně naopak vnitřní. V případě grafu $GPG(6,2)$ vzniknou dvě vnitřní kružnice – zvýrazněny červeně a zeleně.



Obrázek 3: Grafy $GPG(5,1)$, $GPG(5,2)$ a $GPG(6,2)$

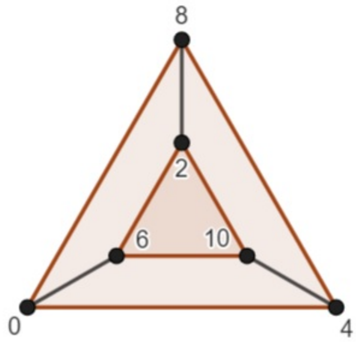
Nejprve se podíváme na zobecněné Petersenovy grafy s parametrem $p_2 = 1$. Jedná se vlastně o kartézský produkt cesty P_2 a kružnice C_{p_1}, tedy: $GPG(p_1, 1) = (P_2 \square C_{p_1})$.

4.1 $L(3,2,1)$-ohodnocení na $GPG(p_1, 1)$

Na úvod připomeňme již zmíněné výsledky Chia a spol. [4]. Pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a pro $G = P_2 \square C_n$ platí: $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 9$ právě tehdy, když $n \equiv 0 \pmod{10}$; je-li n sudé, $n \not\equiv 0 \pmod{10}$ a $n \neq 6$, je $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 10$; je-li $n \equiv 1 \pmod 4$ a $n \geq 21$, nebo $n \equiv 3 \pmod 4$ a $n \geq 11$, je $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 11$.

V této části jsou pro grafy $G = GPG(p_1, 1)$ prezentovány dosažené výsledky ohodnocovacího čísla $\lambda_{(3,2,1)}(G)$, kde $p_1 \leq 10$. Jsou zde zařazeny i grafy $GPG(4,1), GPG(8,1)$ a $GPG(10,1)$, o nichž hovoří i Chia a spol. [4]. Pro každý graf G je tvrzení o přesné hodnotě $\lambda_{(3,2,1)}(G)$ náležitě dokázáno a je připojen obrázek grafu s příslušným ohodnocením.

Tvrzení 4.2. *Nechť $G = GPG(3,1)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 10$.*



Obrázek 4: Graf $GPG(3,1)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 10$

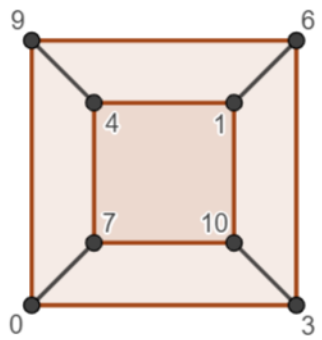
Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(3,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(3,1)$. Na obrázku 4 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 10$.

Nyní ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 9$. Zřejmě platí: pro všechny dvojice $x, y \in V(G)$ je $\text{dist}_G(x,y) \leq 2$, tedy pro každé dva různé vrcholy $x, y \in V(G)$ musí platit, že $|f(x) - f(y)| \geq 2$. Graf G má 6 vrcholů. Sporem budeme předpokládat, že existuje $L(3,2,1)$-ohodnocení tohoto grafu hodnotami v rozsahu $0 \div 9$. Proto musíme ohodnotit dva různé vrcholy $x, y \in V(G)$ hodnotami, pro něž platí: $|f(x) - f(y)| \leq 1$. Což je ale spor. Tedy graf G nelze ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div 9$. □

Nyní se podíváme na graf $G = GPG(4,1)$.

Tvrzení 4.3 [4]**.** *Nechť $G = GPG(4,1)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 10$.*

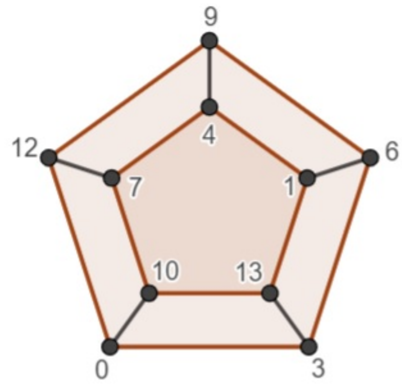
Důkaz tohoto tvrzení je popsán v [4]. Pro úplnost a větší názornost aspoň přikládáme obrázek 5 zobrazující $G = GPG(4,1)$ s ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 10$.



Obrázek 5: Graf $GPG(4,1)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 10$

Nyní přejdeme ke grafu $G = GPG(5,1)$.

Tvrzení 4.4. *Nechť* $G = GPG(5,1)$. *Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 13$.



Obrázek 6: Graf $GPG(5,1)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 13$

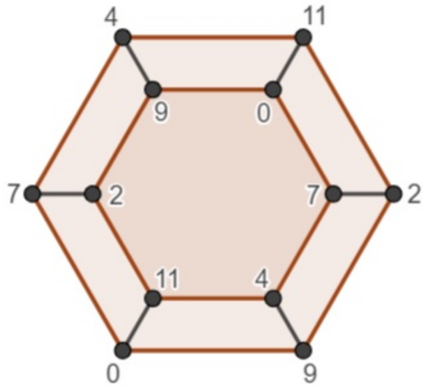
Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(3,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(5,1)$. Na obrázku 6 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 13$.

Nyní ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 12$. Důkaz provedeme sporem. Je patrné, že pro každou dvojici $x, y \in V(G)$ je $\text{dist}_G(x,y) \leq 3$. Tedy pro každé dva různé vrcholy $x, y \in V(G)$ platí, že $|f(x) - f(y)| \geq 1$, proto nemůžeme dvěma různým vrcholům $x, y \in V(G)$ přiřadit stejnou hodnotu. Graf G má 10 vrcholů. Nyní předpokládejme, že graf G lze ohodnotit hodnotami $0 \div 12$. Za tohoto předpokladu musí v G existovat tři různé vrcholy s ohodnocením f_s, f_{s+1} a f_{s+2} pro nějaké $s = 0, 1, \ldots, 10$. Pro daný vrchol $x \in V(G)$ existují právě dva různé vrcholy $y, z \in V(G)$ takové, že $\text{dist}_G(x,y) = 3$ a $\text{dist}_G(x,z) = 3$, přičemž vrcholy y a z jsou nutně sousední. Jedná se například o vrcholy u_0, v_2 a v_3 (díky symetrii lze další trojici vrcholů vybrat analogicky jen s konstantním posunem indexu u každého z vrcholů), případně v_0, u_2 a u_3 (pro nalezení další trojice vrcholů lze opět použít konstantní posun indexu u každého z vrcholů). Jelikož jsou dva z takto tří nalezených vrcholů sousední, nelze dané vrcholy ohodnotit hodnotami f_s, f_{s+1} a f_{s+2}. Dostáváme spor. Tedy není možné graf G ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div 12$. □

Tvrzení 4.5. *Nechť* $G = GPG(6,1)$. *Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 11$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(3,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(6,1)$. Na obrázku 7 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 11$.

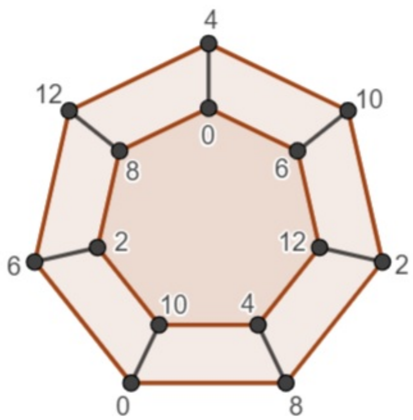
Nyní ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 10$. Počet vrcholů grafu G je roven 12. Tedy abychom graf ohodnotili hodnotami $0 \div 10$, musíme aspoň dvěma různým vrcholům přiřadit stejnou hodnotu f_s. Pokud ohodnotíme vrchol u_0 hodnotou f_s, pak stejnou hodnotu f_s můžeme přiřadit pouze vrcholu v_3. Potom každý vrchol grafu G je od u_0 nebo v_3 ve vzdálenosti menší nebo rovna 2, tedy žádný další vrchol nebudeme moci ohodnotit hodnotou f_{s-1}, f_s ani f_{s+1}. Evidentně tedy $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 10$.



Obrázek 7: Graf $GPG(6,1)$ ohodnocený hodnotami v rozsahu $0 \div 11$

Ukázali jsme tedy, že abychom graf ohodnotili hodnotami s rozsahem $0 \div 10$, musíme aspoň dva různé vrcholy ohodnotit stejnou hodnotou f_s. Ohodnotíme-li dva vrcholy hodnotou 0, hodnotu 1 nebudeme moci použít. Zbylých 10 vrcholů tak musíme ohodnotit 9 hodnotami. Dále, použijeme-li hodnotu 2 na další dva vrcholy, opět nebudeme moci hodnotu 3 použít a na zbylých 8 vrcholů nám bude zbývat 7 hodnot atd., až nám na poslední dva vrcholy bude zbývat jediná hodnota. Jedinou možností, jak ohodnotit graf G s rozsahem hodnot $0 \div 10$, je tedy použití každé z hodnot $0, 2, 4, 6, 8$ a 10 právě dvakrát. Nyní ukážeme, že takto graf ohodnotit nepůjde. Přiřadíme dvěma různým vrcholům v grafu G hodnotu 0 (BÚNO jako na obr. 7). Pak vrcholy, jimž přiřadíme hodnoty $2, 2, 4$ a 4, leží jako na obr. 7 (nebo vrcholy můžeme symetricky proházet). Pak ale každý další vrchol, který ještě není ohodnocen žádnou hodnotou, je sousední s vrcholem, jemuž už jsme přiřadili hodnotu 4. A tak každému takovému vrcholu nemůžeme přiřadit hodnotu 6. Proto nelze graf ohodnotit hodnotami $0, 2, 4, 6, 8$ a 10 s tím, že každou z nich použijeme právě dvakrát. Tedy není možné graf G ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div 10$. □

Tvrzení 4.6. *Nechť* $G = GPG(7,1)$. *Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 12$.



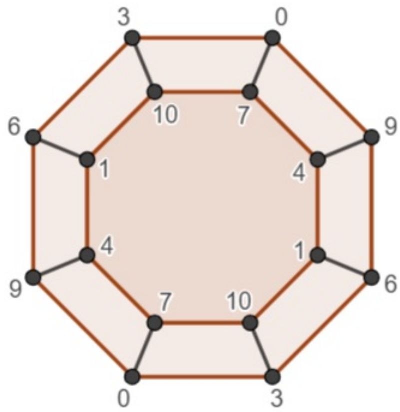
Obrázek 8: Graf $GPG(7,1)$ ohodnocený hodnotami v rozsahu $0 \div 12$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(3,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(7,1)$. Na obrázku 8 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 12$.

Nyní ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 11$. Počet vrcholů grafu G je roven 14. Tedy abychom graf ohodnotili hodnotami $0 \div 11$, musíme aspoň dva různé vrcholy $x, y \in V(G)$ ohodnotit stejnou hodnotou f_s, přičemž v grafu G bude muset existovat i vrchol z s hodnotou f_{s-1}, f_s nebo f_{s+1}, jinak bychom nedostali ohodnocení grafu s rozsahem hodnot 11. Pro libovolný vrchol $x \in V(G)$ existují právě dva různé vrcholy $y_1, y_2 \in V(G)$ takové, že $\mathrm{dist}_G(x, y_t) = 4$ $(t = 1, 2)$. Jedná se například o vrcholy u_0 a v_3 (resp. v_4), které ohodnotíme hodnotou f_s (na obrázku 8 se jedná například o oba vrcholy ohodnocené hodnotou 0). Pak ale neexistuje vrchol $z \in V(G)$ takový, že $\mathrm{dist}_G(x, z) \geq 3$ a zároveň $\mathrm{dist}_G(y, z) \geq 3$. Proto vrchol z nelze ohodnotit hodnotou f_{s-1}, f_s, ani f_{s+1}. Tedy graf G nelze ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div 11$. $\square$

Tvrzení 4.7 [4]. *Nechť* $G = GPG(8,1)$. *Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G)$ *je* 10.

Důkaz tohoto tvrzení je popsán v [4]. Pro úplnost a větší názornost aspoň přikládáme obrázek 9 zobrazující $G = GPG(8,1)$ s ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 10$.

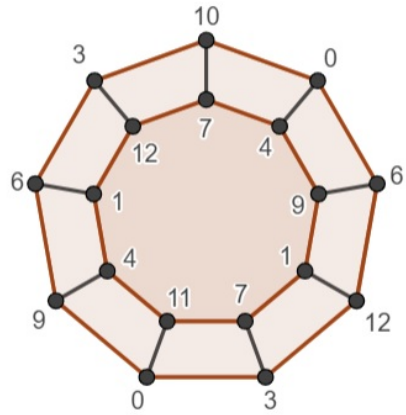


Obrázek 9: Graf $G = GPG(8,1)$ ohodnocený hodnotami v rozsahu $0 \div 10$

Tvrzení 4.8. *Nechť* $G = GPG(9,1)$. *Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G)$ *je* 12.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(3,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(9,1)$. Na obrázku 10 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 12$.

Nyní ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 11$. Graf G má 18 vrcholů, tedy abychom ohodnotili graf G s rozsahem 11, musíme aspoň 6 hodnot použít na ohodnocení grafu G dvakrát. Je totiž evidentní, že v G neexistuje trojice vrcholů x, y, z taková, že $\mathrm{dist}_G(x, y) \geq 4$, $\mathrm{dist}_G(x, z) \geq 4$ a $\mathrm{dist}_G(y, z) \geq 4$, tj. v G nelze použít hodnotu f_s na ohodnocení 3 různých vrcholů. Ohodnotíme-li vrchol u_0 hodnotou f_s, pak stejnou hodnotou f_s můžeme ohodnotit pouze jeden z vrcholů u_4, u_5, v_3, v_4, v_5 a v_6, neboť vzdálenost vrcholu u_0 od libovolného z těchto vrcholů je aspoň 4. Ohodnotíme-li vrchol v_0 hodnotou f_t, pak stejnou hodnotou f_t můžeme ohodnotit pouze jeden z vrcholů v_4, v_5, u_3, u_4, u_5 a u_6, neboť vzdálenost vrcholu v_0 od libovolného z těchto vrcholů je aspoň 4.



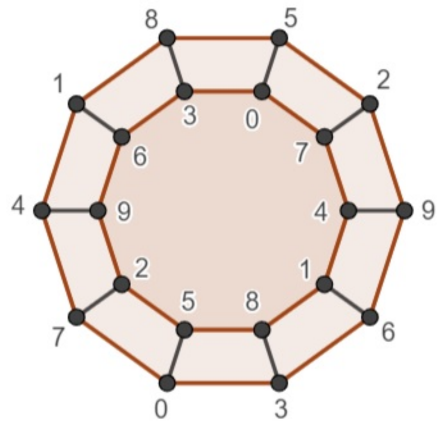
Obrázek 10: Graf $G = GPG(9,1)$ ohodnocený hodnotami v rozsahu $0 \div 12$

Abychom graf G ohodnotili v rozsahu $0 \div 11$, musí v G existovat aspoň 6 vrcholů, které ohodnotíme hodnotami $0, 1, 2, 3$ s tím, že z této čtveřice hodnot použijeme minimálně dvě hodnoty dvakrát. Začneme tím, že právě dvě hodnoty použijeme dvakrát. Nejprve se pokusme dvakrát použít hodnoty 0 a 1. Ohodnotíme-li vrchol u_0 (resp. v_0) hodnotou 0 a dále hodnotu 0 přiřadíme nějakému vrcholu v_r (resp. u_t), pak v G nenajdeme takovou dvojici vrcholů, kterou bychom mohli ohodnotit hodnotou 1. Ohodnotíme-li hodnotou 0 vrcholy u_0 a u_4 (nebo u_5), pak hodnotu 1 můžeme přiřadit vrcholům v_2 (nebo v_3) a v_7 (v_6). V ani jednom případě však v G nenajdeme takový vrchol, který bychom mohli ohodnotit hodnotou 2. Stejný problém nastane, ohodnotíme-li hodnotou 0 nejprve vrcholy v_2 a v_7 a následně hodnotou 1 např. vrcholy u_0 a u_4.

Přejděme k variantě, že dva vrcholy ohodnotíme hodnotou 0 a dva vrcholy hodnotou 2 s tím, že další dva vrcholy v G ohodnotíme hodnotami 1 a 3. Ohodnotíme-li ale dva vrcholy hodnotou 0 a další dva vrcholy hodnotou 2, nenalezneme v grafu G žádný vrchol, který by byl ve vzdálenosti aspoň 3 od všech již ohodnocených vrcholů, a tedy hodnotu 1 nebudeme moci použít. Podívejme se nyní na variantu, že bychom dvakrát použili hodnoty 0 a 3. Takové ohodnocení je již možné, např.: $f(u_0) = 0, f(u_4) = 0, f(v_2) = 1, f(v_7) = 2, f(u_5) = 3$ a $f(u_1) = 3$. V G tedy musí existovat dalších aspoň 6 vrcholů ohodnocených hodnotami $4, 5, 6, 7$. Za tohoto ohodnocení ale hodnotu 4 nebudeme moci použít dvakrát (ze stejného důvodu jako je nemožné použít hodnoty $0, 0, 1, 1, 2$ nelze použít ani hodnoty $2, 3, 3, 4, 4$), ale maximálně jednou, a tedy z hodnot $4, 5, 6, 7$ budeme muset dvakrát použít právě dvě hodnoty z hodnot $5, 6$ a 7. Ani jednu z těchto možností však nelze využít z důvodů analogických pro hodnoty $0, 1, 2, 3$.

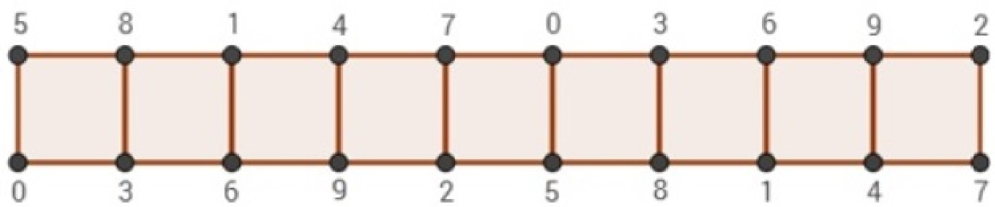
Nastává tedy poslední možnost, a to ohodnocení první šestice vrcholů hodnotami $0, 1, 2, 3$ s tím, že právě tři hodnoty zopakujeme dvakrát. Jelikož nelze použít dvakrát tři po sobě jdoucí hodnoty, šestici vrcholů ohodnotíme pomocí hodnot $0, 0, 1, 1, 3, 3$. Pokud nyní hodnotu 4 použijeme na ohodnocení pouze jednou, nastane stejný problém jako v předchozím případě. Proto nutně na další šestici vrcholů musíme použít hodnoty $4, 4, 6, 6, 7, 7$. Nyní ale nemůžeme použít hodnotu 8, a tedy poslední šestici vrcholů nemůžeme ohodnotit pouze hodnotami $8, 9, 10$ a 11. Tedy graf G nelze ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div 11$. □

Tvrzení 4.9 [4]. *Nechť $G = GPG(10, 1)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G)$ je 9.*



Obrázek 11: Graf $G = GPG(10, 1)$ ohodnocený hodnotami v rozsahu $0 \div 9$

Důkaz tohoto tvrzení je popsán v [4]. Pro úplnost a větší názornost aspoň přikládáme obrázek 11 zobrazující $G = GPG(10, 1)$ s ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 9$. Platí dokonce silnější tvrzení [4], totiž: $\lambda_{(3,2,1)}(H) = 9$, kde $H = GPG(p_1, 1)$, přičemž $p_1 = 10p$ pro nějaké $p \in \mathbb{N}$. Důkaz tohoto tvrzení využívá ohodnocení grafu $G' = P_{10} \square P_2$, který je zachycen na obrázku 12. Opakováním tohoto vzoru dostaneme přípustné ohodnocení grafu H.



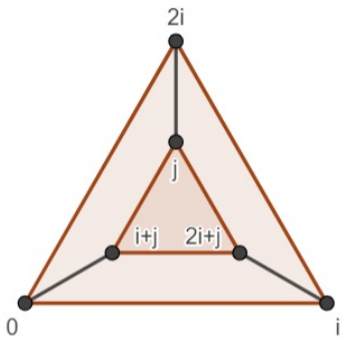
Obrázek 12: Graf $G' = P_{10} \square P_2$

4.2 $L(i, j, k)$-ohodnocení na $GPG(p_1, 1)$

Tvrzení 4.10. *Nechť $G = GPG(3, 1)$ a $i \geq 2j$. Pak $\lambda_{(i,j,k)}(G) = 2i + j$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(i, j, k)$-ohodnocení grafu $G = GPG(3, 1)$. Na obrázku 13 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div (2i + j)$. Z podmínek plynoucích z $L(i, j, k)$-ohodnocení je vidět, že musí platit nerovnost $i \geq 2j$ (dostaneme ji z hodnot vrcholů, které jsme ohodnotili hodnotami i a j, resp. $2i$ a $i + j$).

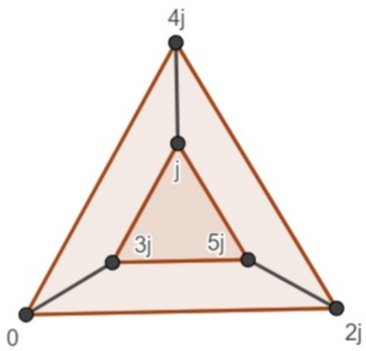
Nyní ukážeme, že $\lambda_{(i,j,k)}(G) > (2i + j - 1)$. Pozorování: každé dva různé vrcholy grafu G jsou ve vzdálenosti maximálně 2, tudíž na parametru k vůbec nezáleží. Dále víme, že pro přípustné parametry i, j, k je $\lambda_{(i,j,k)}(C_3) = 2i$. Tedy hodnoty přiřazené vrcholům



Obrázek 13: Graf $GPG(3,1)$ ohodnocený hodnotami $0 \div (2i+j)$ pro $i \geq 2j$

na vnitřní (resp. i vnější) kružnici grafu G jsou v rozsahu aspoň $2i$. BÚNO nulou ohodnoťme vrchol u_0, tak jako na obrázku 13. Nejmenší hodnotu, kterou pak můžeme použít na ohodnocení dalšího vrcholu, je hodnota j. Tou lze ohodnotit pouze vrchol v_1 nebo v_2. Pak hodnoty přiřazené vrcholům ležící na vnitřní kružnici o třech vrcholech mají minimální hodnoty $j, i+j$ a $2i+j$. Tedy graf G nelze ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div (2i+j-1)$. □

Tvrzení 4.11. *Nechť $G = GPG(3,1)$ a $i \leq 2j$. Pak $\lambda_{(i,j,k)}(G) = 5j$.*



Obrázek 14: Graf $GPG(3,1)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 5j$ pro $i \leq 2j$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(i,j,k)$-ohodnocení grafu $G = GPG(3,1)$. Na obrázku 14 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 5j$. Z podmínek plynoucích z $L(i,j,k)$-ohodnocení je vidět, že musí platit nerovnost $2j \geq i$.

Nyní ukážeme, že $\lambda_{(i,j,k)}(G) > (5j-1)$. Ohodnoťme např. vrchol u_0 hodnotou 0. Jelikož platí $2j \geq i > j$, nejmenší hodnotu, kterou můžeme použít na ohodnocení dalšího vrcholu, je hodnota j. Takto ohodnoceným vrcholem bude vrchol např. v_2. Každý další dosud neohodnocený vrchol je pak již nutně sousední s alespoň jedním z již ohodnocených vrcholů. Nejmenší hodnota f_{u_1}, kterou nyní můžeme použít, musí splňovat tyto podmínky: $|f_{u_1} - 0| \geq i$ a $|f_{u_1} - j| \geq j$. S využitím $2j \geq i > j$ dostáváme, že tato nejmenší hodnota, kterou můžeme použít, je rovna $2j$. Touto hodnotou může být ohodnocen pouze vrchol u_1. Analogickým postupem s využíváním nerovnosti $2j \geq i > j$ dostaneme, že nejmenší možná maximální použitá hodnota je $5j$, tj. že neexistuje $L(i,j,k)$-ohodnocení grafu G s rozsahem méně než $5j$. $\square$

Obě tato tvrzení lze shrnout následující větou. Všimněme si, že tvrzení 4.2 je v souladu se zobecněným výsledkem.

Věta 4.12. *Nechť $G = GPG(3,1)$ a $i > j > k$ jsou přirozená čísla. Pak platí:*

$$\lambda_{(i,j,k)}(G) = \begin{cases} 2i + j, & \text{pokud } i \geq 2j; \\ 5j, & \text{pokud } i \leq 2j. \end{cases} \tag{17}$$

Důkaz. Ihned vyplývá z tvrzení 4.10 a z tvrzení 4.11. $\square$

Než odpovíme na otázku, jaké je $\lambda_{(i,2,1)}(G)$, kde $G = GPG(4,1)$, v závislosti na parametru i, vyslovíme a dokážeme následující pomocná tvrzení.

Tvrzení 4.13. *Nechť máme graf $G = GPG(4,1)$ a množinu $\mathbb{N}_0$. Pak při $L(i,2,1)$-ohodnocení, kde $i \geq 4$, lze na ohodnocení vrcholů grafu G použít maximálně 2 hodnoty z každých 4 po sobě jdoucích čísel množiny $\mathbb{N}_0$.*

Důkaz. Ukážeme, že z hodnot $s, s+1, s+2$ a $s+3$ nelze při $L(i,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(4,1)$, kde $i \geq 4$, použít tři (nebo dokonce čtyři) hodnoty. Použitím hodnot s a $s+1$ ohodnotíme vrcholy u_0 a v_2. Pak jakýkoliv další vrchol je již sousední s vrcholem u_0 nebo v_2, a tedy nelze jej ohodnotit hodnotou $s+2$ nebo $s+3$. Použijeme-li hodnoty s a $s+2$ (na ohodnocení vrcholů u_0 a v_2 nebo u_0 a v_1), nenajdeme v G žádný vrchol ve vzdálenosti aspoň 3 od vrcholu ohodnoceného hodnotou s a zároveň ve vzdálenosti aspoň 2 od vrcholu ohodnoceného hodnotou $s+2$. Tedy hodnotu $s+3$ nebudeme moci použít. Tudíž z hodnot $s, s+1, s+2$ a $s+3$ můžeme při $L(i,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(4,1)$ použít nejvýše dvě hodnoty. $\square$

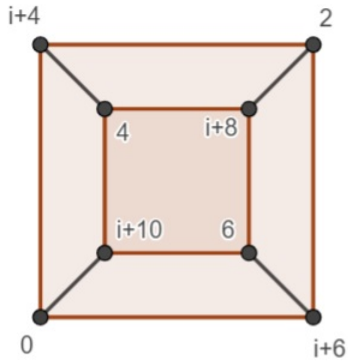
Z tohoto tvrzení mj. vyplývá, že $\lambda_{(4,2,1)}(G) \geq 13$, kde $G = GPG(4,1)$. Nalezením příslušného ohodnocení lze ukázat, že $\lambda_{(4,2,1)}(G) = 13$. Nastane tak při použití hodnot $0, 1, 4, 5, 8, 9, 12$ a 13. Bude ukázáno později.

Tvrzení 4.14. *Nechť máme graf $G = GPG(4,1)$ a v G existuje vrchol ohodnocený hodnotou aspoň i, kde $i \geq 3$ je parametr vystupující v $L(i,2,1)$-ohodnocení. Pak v G existuje buď vrchol s ohodnocením aspoň $2i$, nebo v G existují právě čtyři vrcholy s přiřazenou hodnotou závislou na parametru i a s koeficientem 1 u parametru i a právě čtyři vrcholy, kterým je přiřazena číselná hodnota nezávislá na i.*

Důkaz. Budeme ohodnocovat vrcholy grafu $G = GPG(4,1)$, dokud nějaký vrchol x neohodnotíme hodnotou aspoň i (v závislosti na i). Mohou nastat dva případy. První případ nastává, jestliže v G existuje vrchol y sousední s x, který ještě není ohodnocen. V takovém případě je nejmenší hodnota, kterou můžeme vrcholu y přiřadit, rovna $2i$. Druhý případ nastane, jestliže všechny sousední vrcholy vrcholu x jsou již ohodnoceny (hodnotou nezávislou na i). Pakliže již nelze na žádný z dosud neohodnocených vrcholů použít hodnotu nezávislou na i, nejsou žádné dva ze zbývajících neohodnocených vrcholů sousední, a lze je tedy ohodnotit pouze pomocí hodnoty závislé na parametru i s koeficientem 1 u i nebo aspoň jeden z nich bude ohodnocen hodnotou aspoň $2i$. $\square$

Díky tomuto tvrzení a snaze najít takové ohodnocení, kde největší hodnota použitá při $L(i,2,1)$-ohodnocení grafu G závisí pouze na parametru i s koeficientem 1 u i, lze tvrdit, že $\lambda_{(i,2,1)}(G) = i + c$ pro dostatečně velké i a nějakou konstantu c ($c \in \mathbb{N}$). Zbývá zjistit, jak velké i musí být, a najít nejmenší takovou konstantu c.

Tvrzení 4.15. *Nechť $G = GPG(4,1)$. Jestliže $i \geq 10$, pak $\lambda_{(i,2,1)}(G) = i + 10$.*



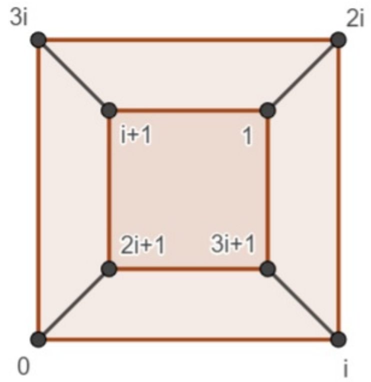
Obrázek 15: Graf $GPG(4,1)$ ohodnocený hodnotami $0 \div (i+10)$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové ohodnocení grafu $G = GPG(4,1)$. Na obrázku 15 je znázorněn graf G s ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div (i+10)$. Pro $i \geq 10$ platí: $i + 10 \leq ci$, kde $c \geq 2$ je přirozené číslo. Zbývá ukázat, že G nelze ohodnotit hodnotami $0 \div (i+9)$. Musíme ohodnotit 4 vrcholy hodnotami, které jsou nezávislé na i. Jedná se např. o vrcholy u_0, u_2, v_1, v_3 (nebo jejich posun). Vzdálenost každých dvou těchto vrcholů je 2, a tak rozsah hodnot při ohodnocení hodnotami $0, 2, 4, 6$ jako na obrázku 15 (hodnoty na těchto vrcholech lze libovolně promíchat) je minimální. Na zbylé čtyři vrcholy už budeme muset použít hodnotu závislou na i, neboť jsou sousední s některým z již ohodnocených vrcholů. Nejmenší hodnotu, kterou lze použít, je hodnota $i + 4$. A jelikož všechny dosud neohodnocené vrcholy jsou po dvou ve vzdálenosti 2, dosáhneme ohodnocení s nejmenším rozsahem při použití hodnot $i + 6, i + 8, i + 10$. $\square$

Pro $4 \leq i < 10$ (pro $i = 3$ máme již vyřešeno) může být hodnota $\lambda_{(i,2,1)}(G)$ jiná. Někdy může být výhodnější, když koeficient u i je větší než 1. Tedy zkoumáme hodnoty koeficientu c ($c \geq 2$ je přirozené číslo) takové, že $ci < 10 + i$, kde $i \geq 4$. Jednoduchou úpravou zjišťujeme, že $c < 4$. Konkrétně pro $c = 3$, je $i = 4$ a pro $c = 2$ je $i = 4, \ldots, 9$. Zbývá tedy dořešit otázku, jak je to s $\lambda_{(i,2,1)}(G)$ pro $4 \leq i < 10$.

Tvrzení 4.16. *Nechť $G = GPG(4,1)$. Jestliže $i = 3$ nebo $i = 4$, pak $\lambda_{(i,2,1)}(G) = 3i + 1$.*

Důkaz. Pro $i = 3$ vyplývá z důkazu tvrzení 4.3. Též jsme pod tvrzením 4.13 ukázali, že $\lambda_{(4,2,1)}(G) \geq 13$. Zbývá nalézt ohodnocení $G = GPG(4,1)$ s takovýmto ohodnocením. Obrázek 16 znázorňuje graf G ohodnocený hodnotami $0 \div (3i+1)$, kde $i = 3$ nebo $i = 4$. Tedy $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 10$ a $\lambda_{(4,2,1)}(G) = 13$. $\square$



Obrázek 16: Graf $GPG(4,1)$ ohodnocený hodnotami $0 \div (3i+1)$

Předcházející tvrzení vyústí v následující větu.

Věta 4.17. *Nechť $G = GPG(4,1)$ a $i \geq 3$. Pak platí:*

$$\lambda_{(i,2,1)}(G) = \begin{cases} 3i+1, & \text{pokud } i \leq 4; \\ i+10, & \text{pokud } i \geq 10. \end{cases} \tag{18}$$

Důkaz. Přímo vyplývá z předchozích tvrzení. □

Zbývá nalézt hodnotu $\lambda_{(i,2,1)}(G)$, kde $5 \leq i < 10$. Kandidátem na $\lambda_{(i,2,1)}(G)$ pro $5 \leq i < 10$ je hodnota $i+10$. Zbývající možností, jak hodnotu $\lambda_{(i,2,1)}(G)$ vylepšit, je najít ohodnocení grafu G s maximální použitou hodnotou ve tvaru $2i+c$, kde c je nějaká nezáporná celá konstanta splňující $2i+c < i+10$. Tedy $c < 5$. V následující hypotéze je vyslovena domněnka, že takovéto ohodnocení neexistuje, tedy, že $\lambda_{(i,2,1)}(G) = i+10$ pro $i \geq 5$.

Hypotéza 4.18. *Nechť $G = GPG(4,1)$ a $i \geq 3$. Pak platí:*

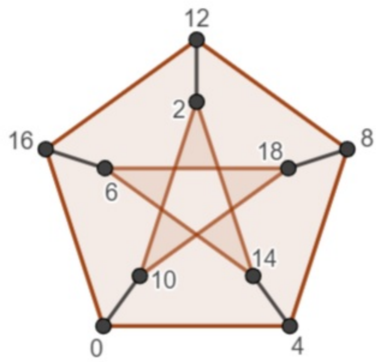
$$\lambda_{(i,2,1)}(G) = \begin{cases} 3i+1, & \text{pokud } i \leq 4; \\ i+10, & \text{pokud } i \geq 5. \end{cases} \tag{19}$$

4.3 $L(3,2,1)$-ohodnocení na $GPG(p_1,2)$

Tvrzení 4.19. *Nechť $G = GPG(5,2)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 18$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(3,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(5,2)$. Na obrázku 17 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 18$.

Nyní ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 17$. Důkaz provedeme analogicky jako pro graf $G = GPG(3,1)$. I pro graf $G = GPG(5,2)$ zřejmě platí: pro všechny dvojice $x, y \in V(G)$ je $\mathrm{dist}_G(x,y) \leq 2$, tedy pro každé dva různé vrcholy $x, y \in V(G)$ musí platit, že $|f(x) - f(y)| \geq 2$. Graf G má 10 vrcholů. Sporem budeme předpokládat, že existuje $L(3,2,1)$-ohodnocení tohoto grafu hodnotami v rozsahu $0 \div 17$. Pak ale musíme ohodnotit dva různé vrcholy $x, y \in V(G)$ hodnotami, pro něž platí: $|f(x) - f(y)| \leq 1$. Což je ale spor. Tedy graf G nelze ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div 17$. □



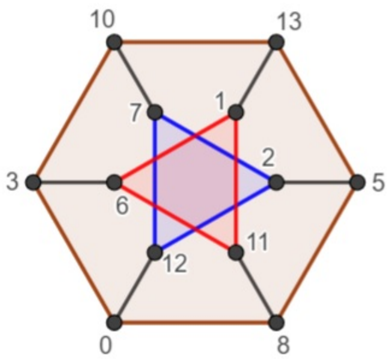
Obrázek 17: Graf $GPG(5,2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 18$

Tvrzení 4.20. *Nechť* $G = GPG(6,2)$. *Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 13$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(3,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(6,2)$. Na obrázku 18 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 13$.

Nyní ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 12$. Vrcholy v_{2p} a stejně tak vrcholy v_{2p+1}, kde $p = 0, 1, 2$, indukují kružnici (na obrázku 18 je jedna znázorněna modře, druhá červeně). Vzdálenost dvou vrcholů, z nichž právě jeden leží na modré kružnici a druhý na červené, je buď 3, nebo 4. Ohodnotíme-li vrcholy, pro něž je $\mathrm{dist}_G(x,y) = 4$ hodnotou f_s, pak žádný další vrchol G nebudeme moci ohodnotit hodnotou f_{s+1} ani hodnotou f_{s-1}.

Graf G má 12 vrcholů. Sporem předpokládejme, že existuje $L(3,2,1)$-ohodnocení s rozsahem 12, tj. hodnotami $0 \div 12$. Mohou nastat dvě možnosti: musíme buďto 5 různých vrcholů ohodnotit pěti po sobě jdoucími hodnotami $f_s, \ldots, f_{s+4}$, nebo dvěma různým vrcholům přiřadit stejnou hodnotu f_s.



Obrázek 18: Graf $GPG(6,2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 13$

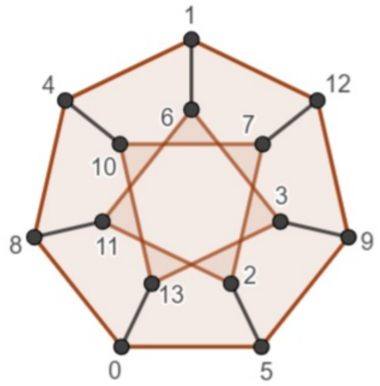
Nejprve ukážeme, že první varianta vůbec nemůže nastat. I nyní nastává několik možností, jaké vrcholy můžeme ohodnotit. Když hodnotou f_s ohodnotíme vrchol u_0 a hodnotu f_{s+1} přiřadíme vrcholu u_3, pak hodnotu f_{s+2} nebudeme moci použít, neboť každý další vrchol je ve vzdálenosti nejvýše 2 od u_0 nebo u_3. Další možnost je taková, že hodnotou f_s ohodnotíme vrchol u_0 a hodnotou f_{s+1} ohodnotíme vrchol v_3 (nebo analogicky opačně). Na obrázku 18 tuto možnost reprezentují například vrcholy ohodnocené hodnotami 0 a 1. Pak hodnotu f_{s+2} musíme přiřadit vrcholu v_2 (nebo v_4). Potom vrchol, který ohodnotíme hodnotou f_{s+3} musí ležet na vnější kružnici a musí být sousední s vrcholem u_0. V našem znázornění se jedná o vrchol u_5. Jediný dosud neohodnocený vrchol ve vzdálenosti 3 od vrcholu u_5 je vrchol u_2, ten je ale sousední s v_2, jemuž jsme přiřadili hodnotu f_{s+2}, tedy vrchol u_2 nemůže být ohodnocen hodnotou f_{s+4}. Ohodnotíme-li hodnotou f_s vrchol v_0 a vrcholu v_1 přiřadíme hodnotu f_{s+1}, pak hodnotu f_{s+2} budeme muset přiřadit vrcholu u_4. Pak ale jediný dosud neohodnocený vrchol ve vzdálenosti aspoň 3 od u_4 je vrchol u_1. Ten je ale sousední s vrcholem v_1, jemuž jsme už přiřadili hodnotu f_{s+1}, a tedy hodnotu f_{s+3} nebudeme moci použít. Proto v grafu G neexistuje pět různých vrcholů, které bychom dokázali ohodnotit pěti po sobě jdoucími hodnotami.

Druhá možnost nastává, ohodnotíme-li dva vrcholy stejnou hodnotou f_s – nutně se jedná o vrcholy ležící na vnitřních kružnicích. Ohodnoťme tedy např. vrcholy v_0 a v_3 hodnotou 0. Pak hodnota 1 nemůže být použita a hodnotou 2 může být ohodnocen vrchol na vnější kružnici nesousední s v_0 a v_3, tedy např. u_1. Hodnotu 2 na ohodnocení dalšího vrcholu již nemůžeme použít. Dále víme, že nemůžeme použít pět po sobě jdoucích hodnot, a proto jedinou možností, jak ohodnotit graf G v rozsahu $0 \div 12$, je nějakou další hodnotu použít dvakrát. Kdybychom teď ohodnotili hodnotou 3 vrchol u_4, nemůžeme hodnotu 4 vůbec použít (jediný vrchol ve vzdálenosti aspoň 3 od u_4 je totiž vrchol v_1, který je sousední s vrcholem u_1, který je již ohodnocen hodnotou 2). Hodnotu 3 tedy přiřadíme vrcholu v_4. Jediný vrchol, který teď můžeme ohodnotit hodnotou 4, je vrchol v_5. Je patrné, že jedinými dosud neohodnocenými vrcholy na vnitřních kružnicích jsou vrcholy v_1 a v_2, a ty nelze ohodnotit stejnými hodnotami. Proto ani tímto způsobem neohodnotíme graf G v rozsahu $0 \div 12$.

Ještě musíme ukázat, co se stane, když při použití hodnot $0, 0, 2$ nepoužijeme hodnotu buď 3, nebo 4, přičemž stále budeme muset použít ještě aspoň jednu hodnotu dvakrát. Kdybychom použili dvakrát hodnotu $f_s \neq f_{max} = 12$, nesměli bychom na ohodnocení grafu G použít hodnoty 1, f_{s-1}, f_{s+1} a jednu z hodnot 3 nebo 4, a tedy nutně hodnota $f_s = 4$ (při vynechání hodnoty 3) nebo $f_s = 5$ (při vynechání hodnoty 4). Hodnoty, které tedy můžeme použít, jsou $0, 0, 2, 4, 4$ nebo $0, 0, 2, 3, 5, 5$. Při použití hodnot $0, 0, 2, 4, 4$ pak musíme použít hodnoty $6, 7, 8, 9$, ale hodnotu 10 už nemůžeme použít. A poslední tři dosud neohodnocené vrcholy nebudeme moci ohodnotit pouze pomocí hodnot 11 a 12. Použijeme-li hodnoty $0, 0, 2, 3, 5, 5$, dále nutně budeme muset použít hodnoty $7, 8, 9, 10$. A tedy nutně poslední dva neohodnocené vrcholy musíme ohodnotit hodnotou 12. Hodnotami $0, 0, 5, 5, 12, 12$ ohodnotíme obě vnitřní kružnice, a tedy čtyřmi po sobě jdoucími hodnotami $7, 8, 9$ a 10 budeme muset ohodnotit vrcholy na vnější kružnici, což evidentně není možné.

Poslední možnost nastane, budou-li jedinými opakujícími se hodnotami hodnoty 0 a $f_{max} = 12$. Za této situace nesmíme použít hodnoty 1, 11 a jednu z hodnot 3 nebo 4. Kvůli nemožnosti použití pěti po sobě jdoucích hodnot bychom však nemohli použít aspoň jednu další hodnotu, a tak ani tento způsob ohodnocování nám nedá ohodnocení grafu G v rozsahu hodnot $0 \div 12$. Tedy graf G nelze ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div 12$. $\square$

Tvrzení 4.21. *Nechť* $G = GPG(7,2)$. *Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 13$.

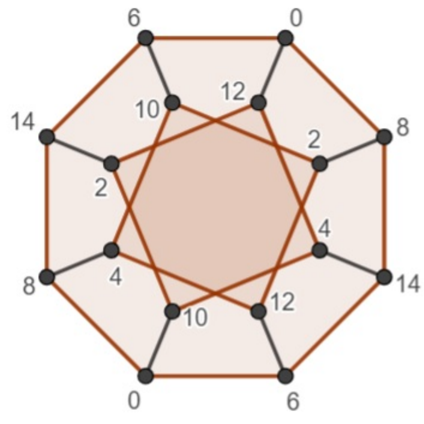


Obrázek 19: Graf $GPG(7,2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 13$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(3,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(7,2)$. Na obrázku 19 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 13$.

Nyní ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 12$. Graf G má 14 vrcholů. Abychom tedy mohli ohodnotit graf hodnotami $0 \div 12$, museli bychom v grafu G najít 2 různé vrcholy x, y takové, že $\text{dist}_G(x,y) = 4$. Pak bychom tyto vrcholy mohli ohodnotit stejnou hodnotou. Jelikož ale pro všechny vrcholy x, y platí: $\text{dist}_G(x,y) \leq 3$, takové vrcholy nenajdeme. Tedy v G neexistují vrcholy se stejným ohodnocením. Tedy graf G nelze ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div 12$. $\square$

Tvrzení 4.22. *Nechť* $G = GPG(8,2)$. *Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 14$.

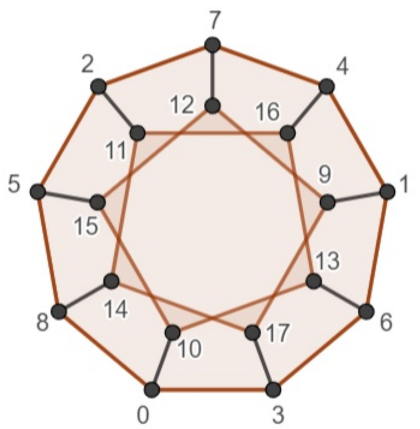


Obrázek 20: Graf $GPG(8,2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 14$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(3,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(8,2)$. Na obrázku 20 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 14$.

Nyní ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 13$. Graf G má 16 vrcholů. Abychom ohodnotili graf G v rozsahu $0 \div 13$, musíme ohodnotit dva různé vrcholy x, y stejnou hodnotou f_s a zároveň musí existovat třetí vrchol z s ohodnocením f_{s-1}, f_s nebo f_{s+1}. Vzdálenost libovolného vrcholu u_t a vrcholu v_r je nejvýše 3, tedy vrcholy u_t a v_r nelze ohodnotit stejnou hodnotou. V grafu G proto existují pouze dvě možnosti, jak ohodnotit dva různé vrcholy stejnou hodnotou f_s. První možností je ohodnotit hodnotou f_s dva vrcholy ve vzdálenosti 4 na vnější kružnici (na obrázku 20 tuto možnost reprezentují např. vrcholy ohodnocené hodnotou 0). Druhou možností je pak ohodnotit hodnotou f_s dva vrcholy v_r a v_t, které jsou od sebe ve vzdálenosti 4, na obrázku 20 tuto možnost reprezentují např. vrcholy ohodnocené hodnotou 2. V každé z těchto možností však v grafu G neexistuje třetí vrchol takový, že vzdálenost tohoto vrcholu od každého z vrcholů ohodnocených hodnotou f_s je aspoň 3, tedy nelze žádný další vrchol ohodnotit hodnotou f_{s-1}, f_s ani f_{s+1}. Tedy graf G nelze ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div 13$. $\square$

Tvrzení 4.23. *Nechť $G = GPG(9,2)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 17$.*



Obrázek 21: Graf $GPG(9,2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 17$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje takové $L(3,2,1)$-ohodnocení grafu $G = GPG(9,2)$. Na obrázku 21 je znázorněn G spolu s příslušným ohodnocením vrcholů hodnotami $0 \div 17$.

Nyní ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 16$. Graf G má 18 vrcholů a vrcholy u_t ($t = 0, \ldots, 8$) vytvářejí vnější kružnici o devíti vrcholech, podobně vrcholy v_r ($r = 0, \ldots, 8$) vytvářejí vnitřní kružnici o devíti vrcholech. Dle věty 3.15 víme, že kružnice o 9 vrcholech (C_9) má $\lambda_{(3,2,1)}(C_9) = 8$. Vzdálenost dvou vrcholů u_t a v_r je nejvýše 3, stejně tak vzdálenost vrcholů v_r a v_t. Tedy pouze vrcholy ležící na vnější kružnici mohou být od sebe ve vzdálenosti 4 (a tedy ohodnoceny stejnou hodnotou). Například se jedná o vrcholy u_0 a u_4. Abychom G ohodnotili v rozsahu $0 \div 16$, musíme ohodnotit dva vrcholy x, y grafu G stejnou hodnotou f_s. Pak ale nenajdeme v grafu G vrchol z takový, že $\mathrm{dist}_G(x,z) \geq 3$ a zároveň $\mathrm{dist}_G(y,z) \geq 3$. Proto vrchol z nelze ohodnotit žádnou z hodnot f_{s-1}, f_s a f_{s+1}. Jelikož na vrcholy v_t musíme použít právě 9 různých hodnot, vrcholy u_t nelze ohodnotit hodnotami s menším rozsahem než 8 a jelikož hodnoty přiřazené vrcholům u_t jsou odlišné od v_r, $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 16$. Tedy graf G nelze ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div 16$. $\square$

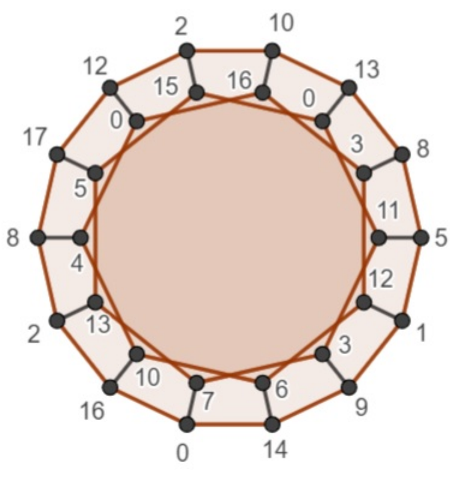
4.3.1 Horní a dolní odhady pro $\lambda_{(3,2,1)}(GPG(p_1, 2))$

Nechť máme graf $G = GPG(p_1, 2)$. Připomeňme, že G obsahuje jednu vnější kružnici a jednu nebo dvě vnitřní kružnice. Jedna vnitřní kružnice vznikne, je-li p_1 liché, v tom případě má vnější i vnitřní kružnice lichý počet vrcholů; dvě vnitřní kružnice vzniknou, je-li p_1 sudé. Pokud navíc je $p_1 = 4p$, kde $p \geq 2$ je přirozené číslo, mají obě vnitřní kružnice sudý počet vrcholů, je li $p_1 = 4l + 2$, kde $l \in \mathbb{N}$, mají obě vnitřní kružnice lichý počet vrcholů.

Následující pomocná tvrzení vyústí ve větu hovořící o horní hranici rozpětí $\lambda_{(3,2,1)}(G)$ pro graf $G = GPG(p_1, 2)$ s $p_1 = 2p \geq 10$. Důkazy těchto tvrzení využívají větu 3.15. Dle této věty pro $n \geq 3$ je $\lambda_{(3,2,1)}(C_n) = 6$, pokud $n = 3$, $\lambda_{(3,2,1)}(C_n) = 7$, pokud n je sudé, $\lambda_{(3,2,1)}(C_n) = 8$, pokud n je liché a $n \neq 3, 7$, a $\lambda_{(3,2,1)}(C_n) = 9$, pokud $n = 7$. Dále důkazy využívají věty 3.13 a 3.14 hovořící o $f_O(V_G)$.

První dvě pomocná tvrzení hovoří o konkrétních hodnotách, kterých parametr p_1 nabývá. Jedná se vlastně o výjimky, které nelze zahrnout do obecnějšího případu. Výjimka $p_1 = 14$ vzniká kvůli vzniku dvou vnitřních kružnic o 7 vrcholech, přičemž kružnice o sedmi vrcholech má $\lambda_{(3,2,1)}(C_7) = 9$. Druhá výjimka, $p_1 = 22$, vzniká kvůli vzniku dvou vnitřních kružnic o 11 vrcholech, které nelze ohodnotit pomocí $f_O(V_{C_4})$ a $f_O(V_{C_5})$. Proto je třeba tyto příklady vyřešit zvlášť. Důkazy těchto tvrzení vyplývají z přípustného ohodnocení příslušných grafů, jež jsou zachyceny na obrázcích 22 a 23.

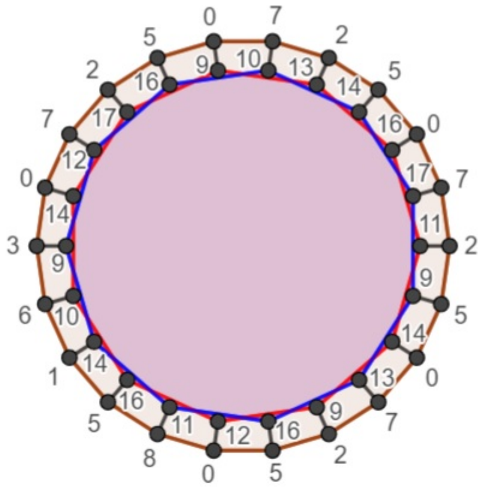
Tvrzení 4.24. *Nechť* $G = GPG(14, 2)$*. Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 17$.



Obrázek 22: Graf $G = GPG(14, 2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 17$

Tvrzení 4.25. *Nechť* $G = GPG(22, 2)$*. Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 17$.

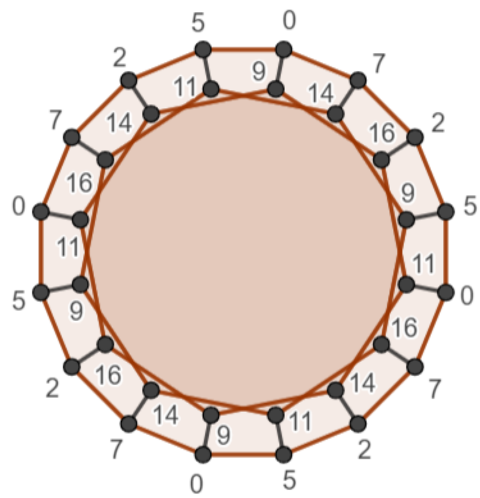
Nyní přejdeme k obecnějším tvrzením.



Obrázek 23: Graf $G = GPG(22, 2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 17$

Tvrzení 4.26. *Nechť $G = GPG(p_1, 2)$ a $p_1 = 4p$, kde $p \geq 3$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 16$.*

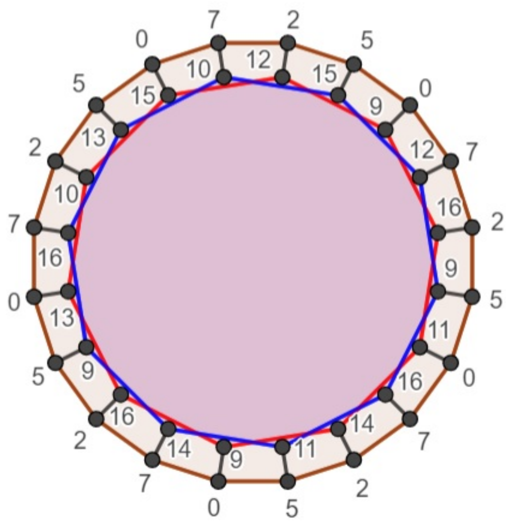
Důkaz. Nastávají dvě možnosti. Nejprve předpokládejme, že $p_1 = 8l$, kde $l \geq 2$. Za tohoto předpokladu ohodnotíme vrcholy na vnější kružnici grafu G pouze nakopírováním $f_O(V_{C_4})$ – p-krát za sebou nakopírujeme hodnoty 0, 5, 2, 7, jimiž ohodnotíme vrcholy u_r. Pro indexy $s = 0, \ldots, (p-1)$ ohodnoťme vrcholy u_{4s} hodnotou 0, vrcholy u_{4s+1} hodnotou 5, vrcholy u_{4s+2} hodnotou 2 a vrcholy u_{4s+3} hodnotou 7. Vrcholy na obou vnitřních kružnicích pak ohodnotíme pomocí hodnot $9, 14, 11$ a 16 (jedná se o $f_O(V_{C_4})$ s posunem hodnot o 9). Hodnotu 9 přiřaďme vrcholu v_0 a pokračujme v ohodnocování vnitřní kružnice neustálým přiřazováním hodnot $9, 14, 11, 16$. Pro $t = 0, \ldots, (l-1)$ pak dostaneme: $f(v_{8t}) = 9$, $f(v_{8t+2}) = 14$, $f(v_{8t+4}) = 11$ a $f(v_{8t+6}) = 16$.



Obrázek 24: Graf $G = GPG(16, 2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 16$

Druhou vnitřní kružnici ohodnotíme podobným způsobem: nejprve hodnotou 9 ohodnoťme libovolný vrchol, jež sousedí s nějakým vrcholem u_{4t+1} a zároveň je ve vzdálenosti 4 od vrcholu v_{8r}. Pak hodnoty $9, 14, 11, 16$ za sebe opět nakopírujeme tak, že pro přípustné indexy $(t = 0, \ldots, (l-1))$: $f(v_{8t+5}) = 9$, $f(v_{8t+7}) = 14$, $f(v_{8t+1}) = 11$ a $f(v_{8t+3}) = 16$. Tím dostaneme přípustné ohodnocení, jelikož vrchol ohodnocený hodnotou 7 je vždy sousední s vrcholem s přiřazenou hodnotou buď 14, nebo 16, a vrcholy, jimž byla přiřazena stejná hodnota, jsou vždy ve vzdálenosti aspoň 4.

Nyní se podívejme na druhou možnost, totiž, že $p_1 = 8l + 4$, kde $l \in \mathbb{N}$. Situace je zde podobná. Jediný rozdíl je v tom, že při ohodnocování vnitřních kružnic budeme muset po nakopírování hodnot $9, 14, 11, 16$ na posledních šest hodnot použít hodnoty 9, 12, 15, 10, 13, 16 (v tomto pořadí, jedná se o $f_O(V_{C_6})$ s posunem hodnot o 9). Pro přípustné indexy $(s = 0, \ldots, (p-1))$ tedy ohodnoťme vrcholy u_{4s} hodnotou 0, vrcholy u_{4s+1} hodnotou 5, vrcholy u_{4s+2} hodnotou 2 a vrcholy u_{4s+3} hodnotou 7. Vrcholy první vnitřní kružnice ohodnotíme takto: $f(v_{p_1-12}) = 9, f(v_{p_1-10}) = 12, f(v_{p_1-8}) = 15, f(v_{p_1-6}) = 10, f(v_{p_1-4}) = 13$ a $f(v_{p_1-2}) = 16$ a dále pro dosud neohodnocené vrcholy a přípustné indexy, kde $t = 0, \ldots, (l-2)$, mějme $f(v_{8t}) = 9, f(v_{8t+2}) = 14, f(v_{8t+4}) = 11$ a $f(v_{8t+6}) = 16$.

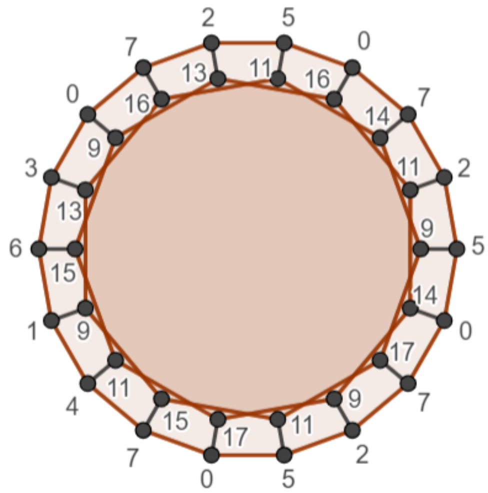


Obrázek 25: Graf $G = GPG(20, 2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 16$

Pro druhou vnitřní kružnici ohodnoťme vrchol $f(v_{p_1-15})$ hodnotou 9 a na následující vrcholy použijme $f_O(V_{C_6})$ s posunem hodnot o 9. Dostaneme: $f(v_{p_1-15}) = 9, f(v_{p_1-13}) = 12, f(v_{p_1-11}) = 15, f(v_{p_1-9}) = 10, f(v_{p_1-7}) = 13$ a $f(v_{p_1-5}) = 16$. Pak už na zbylé dosud neohodnocené vrcholy (a přípustné indexy) budeme používat $f_O(V_{C_4})$ s posunem hodnot o 9, tedy: $f(v_{p_1-3}) = 9, f(v_{p_1-1}) = 14$ a dále $f(v_{8t+1}) = 11, f(v_{8t+3}) = 16, f(v_{8t+5}) = 9$ a $f(v_{8t+7}) = 14$, kde opět $t = 0, \ldots, (l-2)$, s tím, že posledním takto ohodnoceným vrcholem bude vrchol v_{p_1-17} ohodnocený hodnotou 16. Poznamenejme, že pro graf $GPG(12, 2)$, kde tedy $p = 3$ a $l = 1$, je nutné číst indexy jako modulo p_1. Všechny vrcholy ohodnocené stejnou hodnotou jsou od sebe ve vzdálenosti aspoň 4 a vrchol ohodnocený hodnotou 7 není nikdy sousední s vrcholem ohodnoceným hodnotou 9. Tudíž dostáváme přípustné ohodnocení grafu G. Tedy je-li $p_1 = 4p$, kde $p \geq 3$, je $\lambda_{(3,2,1)}GPG(p_1, 2) \leq 16$. $\square$

Obrázky 24 a 25 zobrazují přípustná ohodnocení grafů $GPG(16, 2)$ a $GPG(20, 2)$ hodnotami $0 \div 16$.

Tvrzení 4.27. *Nechť* $G = GPG(p_1, 2)$ *a* $p_1 = 8p + 2$*, kde* $p \in \mathbb{N}$*. Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 17$*.*



Obrázek 26: Graf $G = GPG(18, 2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 17$

Důkaz. Vrcholy na vnější kružnici ohodnoťme pomocí $f_O(V_{C_4})$ a $f_O(V_{C_6})$. Tedy pro $t = 0, \dots, (2p-2)$ je $f(u_{4t}) = 0, f(u_{4t+1}) = 5, f(u_{4t+2}) = 2$ a $f(u_{4t+3}) = 7$ a dále $f(u_{8p-4}) = 0, f(u_{8p-3}) = 3, f(u_{8p-2}) = 6, f(u_{8p-1}) = 1, f(u_{8p}) = 4$ a $f(u_{8p+1}) = 7$. Vrcholy každé vnitřní kružnice pak ohodnotíme pomocí nakopírování hodnot $9, 14, 11, 16$ a přidáním hodnot $13, 9, 15, 11, 17$. Tedy vrcholy v_r, kde $0 \leq r \leq (p_1 - 10)$ ohodnotíme následovně: $f(v_{8t+2}) = 9, f(v_{8t+4}) = 14, f(v_{8t+6}) = 11, f(v_{8t+8}) = 16$. A dále $f(v_{p_1-8}) = 13, f(v_{p_1-6}) = 9, f(v_{p_1-4}) = 15, f(v_{p_1-2}) = 11$ a $f(v_0) = 17$. Tím ohodnotíme jednu kružnici. Druhou kružnici ohodnotíme podobně; vrcholy v_r, kde $0 \leq r \leq p_1 - 7$, ohodnotíme takto $f(v_{8t+5}) = 9, f(v_{8t+7}) = 14, f(v_{8t+9}) = 11, f(v_{8t+11}) = 16$. A dále pak: $f(v_{p_1-5}) = 13, f(v_{p_1-3}) = 9, f(v_{p_1-1}) = 15, f(v_1) = 11$ a $f(v_3) = 17$. Vrcholy ohodnocené stejnou hodnotou, jsou od sebe ve vzdálenosti aspoň 4 a vrchol ohodnocený hodnotou 7 má na kružnicích vždy sousední vrchol ohodnocený hodnotou $14, 15, 16$ nebo 17. Dostáváme tedy přípustné ohodnocení grafu G. ☐

Obrázek 26 zachycuje graf $GPG(18, 2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 17$.

Tvrzení 4.28. *Nechť* $G = GPG(p_1, 2)$*,* $p_1 = 8p + 6$*, kde* $p \in \mathbb{N}$*, a* $p_1 \neq 14, 22$*. Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 18$*.*

Důkaz. Vrcholy na vnější kružnici ohodnoťme stejně podobně jako v předchozím případě, tj. pro $t = 0, \dots, (2p-1)$ je $f(u_{4t}) = 0, f(u_{4t+1}) = 5, f(u_{4t+2}) = 2$ a $f(u_{4t+3}) = 7$ a dále $f(u_{8p}) = 0, f(u_{8p+1}) = 3, f(u_{8p+2}) = 6, f(u_{8p+3}) = 1, f(u_{8p+4}) = 4$ a $f(u_{8p+5}) = 7$. Jednu vnitřní kružnici ohodnoťme pomocí nakopírování hodnot $14, 10, 16, 12$ a 18 a následně hodnot $10, 15, 12$ a 17. Druhou kružnici ohodnoťme stejným způsobem jen s posunem vrcholů tak, aby vrcholy ohodnocené stejnou hodnotou na těchto kružnicích, byly ve vzdálenosti aspoň 4. Tím dostáváme přípustné ohodnocení grafu G. ☐

Důsledek 4.29. *Nechť* $G = GPG(p_1, 2)$, $p_1 = 8p + 6$, *kde* $p \in \mathbb{N}$. *Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 18$.

Důkaz. Důkaz vyplývá z předcházejícího tvrzení a tvrzení 4.24 a 4.25. □

Rozdíl v ohodnocování mezi grafem $G = GPG(p_1, 2)$, kde $p_1 = 8p + 2$ ($p \in \mathbb{N}$), a grafem $H = GPG(p_1, 2)$, kde $p_1 = 8p + 6$ ($p \in \mathbb{N}$) a $p_1 \neq 14, 22$, je ten, že v grafu G lze na ohodnocení jedné vnitřní kružnice použít $f_O(V_{C_5})$ (zvětšené o 9) právě jednou. Oproti tomu v H je třeba $f_O(V_{C_5})$ (zvětšené o 9) použít vícekrát. Kvůli tomu by v H nešlo zabránit, aby nějaký vrchol ohodnocený hodnotou 7 byl sousední s vrcholem ohodnoceným hodnotou 9. Proto $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 17$ a $\lambda_{(3,2,1)}(H) \leq 18$.

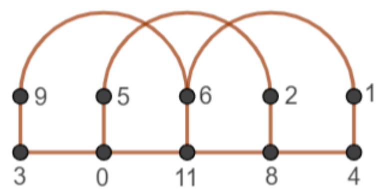
Věta 4.30. *Nechť* $G = GPG(p_1, 2)$. *Pak*

$$\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq \begin{cases} 16, & \text{pokud } p_1 = 4p, \text{ kde } p \geq 3; \\ 17, & \text{pokud } p_1 = 8p + 2, \text{ kde } p \in \mathbb{N}; \\ 18, & \text{pokud } p_1 = 8p + 6, \text{ kde } p \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{20}$$

Důkaz. Důkaz vyplývá z předchozích tvrzení. □

Věta 4.31. *Nechť* $G = GPG(p_1, 2)$. *Pak* $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 11$.

Důkaz. Každý graf $G = GPG(p_1, 2)$ s $p_1 \geq 5$ obsahuje jako podgraf graf H, který je zobrazen (a i ohodnocen) na obrázku 27. Ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(H) = 11$.



Obrázek 27: Podgraf H grafu $GPG(p_1, 2)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 11$

Graf H má 10 vrcholů. Obdobně jako u zobecněných Petersenových grafů označme vrcholy, jež jsou na obrázku 27 ohodnoceny hodnotami 3, 0, 11, 8 a 4, postupně jako u_t s indexy $t = 0, \ldots, 4$, a analogicky vrcholy, jež jsou ohodnoceny hodnotami 9, 5, 6, 2 a 1, označme postupně jako v_t se stejnými indexy t. Pak vrchol u_2 (na obrázku 27 ohodnocen hodnotou 11), má vzdálenost od libovolného dalšího vrcholu menší nebo rovnu dvěma. Ohodnotíme-li tento vrchol hodnotou f_s, nebudeme moci použít hodnoty ani f_{s-1}, ani f_{s+1}. Je evidentní, že $f(u_2) = 0$ nebo $f(u_2) = f_{max}$. Pro spor předpokládejme, že graf H lze ohodnotit s rozsahem $0 \div 10$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f(u_2) = 10$.

Nejprve předpokládejme, že graf H ohodnotíme s rozsahem 10, aniž bychom použili některou hodnotu dvakrát. Jelikož $f(u_2) = 10$, nemůžeme na ohodnocení žádného vrcholu použít hodnotu 9, a tedy zbylých 9 dosud neohodnocených vrcholů je třeba ohodnotit hodnotami $0, \ldots, 8$ s tím, že každou z hodnot použijeme právě jednou. Vrcholy v_1 a v_3 jsou sousední a zároveň jsou jedinými vrcholy, které mají od v_2 vzdálenost 3. Tedy ohodnotíme-li vrchol v_2 hodnotou $f_s \neq 0$, nebudeme moci použít obě hodnoty f_{s-1} a f_{s+1}, dostáváme spor.

Chceme-li tedy graf H ohodnotit s rozsahem 10, pak nutně $f(v_2) = 0$ (při ohodnocení vrcholu u_2 hodnotou 10). Hodnotu 1 přiřaďme vrcholu v_1 (ze symetrie ji můžeme přiřadit i vrcholu v_3). Pak nutně hodnotou 2 musíme ohodnotit vrchol u_4. Nyní hodnotu 3 můžeme přiřadit vrcholu u_0 nebo v_0. Nejprve předpokládejme, že $f(u_0) = 3$. Pak nutně $f(v_3) = 4$, $f(v_4) = 5$ a $f(u_1) = 6$. Nyní zbývá ohodnotit vrcholy v_0 a u_3, žádný z nich však nelze ohodnotit hodnotou 7, jelikož oba tyto vrcholy jsou ve vzdálenosti 2 od vrcholu u_1, jehož jsme ohodnotili hodnotou 6. Nyní se podívejme na možnost, že hodnotou 3 ohodnotíme vrchol v_0. Máme tedy: $f(v_2) = 0, f(v_1) = 1, f(u_4) = 2, f(v_0) = 3$ a $f(u_2) = 10$. Pak nutně $f(v_3) = 4$ a $f(v_4) = 5$. Přiřadíme-li nyní hodnotu 6 vrcholu u_1 nebudeme moci hodnotu 7 použít na ohodnocení některého z dosud neohodnocených vrcholů. Proto hodnotu 6 přiřaďme vrcholu u_0. Pak nutně $f(u_3) = 7$, ale hodnotu 8 nemůžeme vrcholu u_1 přiřadit. Proto graf H nelze ohodnotit hodnotami $0 \div 10$ s tím, že každou z hodnot použijeme právě jednou.

Nyní se podívejme na druhou možnost, kdy některým dvěma vrcholům přiřadíme stejnou hodnotu. Existují tři dvojice vrcholů, jimž může být přiřazena stejná hodnota, jedná se o vrcholy u_0 a u_4, v_0 a v_3 a také v_1 a v_4. Z důvodů popsaných výše je $f(u_2) = 10$ a $f(v_2) = 0$. Na zbývajících 8 dosud neohodnocených vrcholů tak můžeme použít hodnoty 1 až 8, jelikož hodnotu 9 nemůžeme použít. Přiřadíme-li však dvěma vrcholům hodnotu $f_s \neq 0, 9, 10$, nebudeme moci na ohodnocení dalších vrcholů použít ani hodnotu f_{s-1}, ani hodnotu f_{s+1}. Tedy ani za tohoto předpokladu graf H nelze ohodnotit hodnotami s rozsahem 10.

Ukázali jsme, že $\lambda_{(3,2,1)}(H) = 11$. Jelikož H je podgrafem grafu $G = GPG(p_1, 2)$ s $p_1 \geq 5$, je $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 11$. $\square$

Dolní odhad $\lambda_{(3,2,1)}(G)$, kde $G = GPG(p_1, 2)$, lze zlepšovat tím, že jako podgraf zvolíme jiný graf H', např. takový, který vznikne z H přidáním vrcholů u_5 a v_5 a přidáním hran u_4u_5, v_3v_5 a u_5v_5.

Na závěr této části ještě odpovězme na otázku, jak je to s horním odhadem pro $p_1 = 2p+1$, kde $p \geq 5$. Zde je situace mnohem složitější, problém totiž může nastat při ohodnocování vnitřní kružnice. Víme, že kružnici C_n, kde n je liché a $n \geq 9, n \neq 11$, lze ohodnotit pomocí nakopírování $f_O(V_{C_4})$ a $f_O(V_{C_5})$. Mohou nastat tyto případy: kružnici ohodnotíme pouze nakopírováním $f_O(V_{C_5})$ (např. C_{15}) nebo čtyři vrcholy kružnice ohodnotíme pomocí $f_O(V_{C_4})$ a na další vrcholy použijeme nakopírování $f_O(V_{C_5})$ (např. C_{19}) a nebo na ohodnocení prvních pěti vrcholů použijeme $f_O(V_{C_5})$ a pak nakopírujeme $f_O(V_{C_4})$ (např. C_{17}). Poslední možností je pak nakopírování obou vzorů vícekrát než jednou.

Na kružnicích C_{15}, C_{17} a C_{19} si ukážeme, jaký problém může (ale nemusí) nastat. Máme grafy $G_1 = GPG(15, 2)$, $G_2 = GPG(17, 2)$ a $G_3 = GPG(19, 2)$. Vnější kružnici těchto grafů ohodnoťme pomocí nakopírování hodnot $0, 5, 2, 7$ a hodnot $4, 0, 6, 2, 8$. Abychom měli jistotu, že hodnoty příslušné vrcholům u_t a v_t jsou přípustné (tj. $|f(u_t) - f(v_t)| \geq 3$), použijme na ohodnocení vnitřní kružnice hodnoty od 11. Budeme tedy používat kopírování hodnot $11, 16, 13, 18$, resp. $15, 11, 17, 13, 19$. Nejprve se pokusme ohodnotit graf G_1. Ohodnoťme vrchol v_0 hodnotou 15 a pokračujme v kopírování. Dostaneme: $f(v_0) = 15, f(v_2) = 11, f(v_4) = 17, f(v_6) = 13, f(v_8) = 19, \ldots, f(v_{14}) = 17, f(v_1) = 13, f(v_3) = 19, \ldots, f(v_{13}) = 19$. Tím dostaneme přípustné ohodnocení, jelikož vrcholy se stejnou hodnotou jsou ve vzdálenosti aspoň 4. Tedy: $\lambda_{(3,2,1)}(GPG(15,2)) \leq 19$.

Vnitřní kružnici grafu G_2 se pokusíme ohodnotit pomocí tří nakopírování hodnot $11, 16, 13, 18$ a jednoho nakopírování hodnot $15, 11, 17, 13, 19$. Dostaneme tedy: $f(v_0) = 11, f(v_2) = 16, f(v_4) = 13, f(v_6) = 18, \ldots, f(v_{14}) = 18, f(v_{16}) = 11, \ldots$. Vrcholy v_0 a v_{16} jsou ve vzdálenosti 3 a my je ohodnotili stejnou hodnotou, což není možné. Stejný problém nastane i u G_3. Tj. rozhodně ne všechny grafy lze ohodnotit tímto popsaným způsobem. Zobecněním pro lichá čísla p_1 ($p_1 \geq 11$) se budeme zabývat v budoucnu.

5 Závěr

Tato práce shrnuje dosud známé výsledky v oblasti $L(i,j,k)$-ohodnocení grafů. Zabývali jsme se $L(i,j,k)$-ohodnocením zobecněných Petersenových grafů $G = GPG(p_1, p_2)$, kde $p_2 = 1, 2$, se zvláštním důrazem na $L(3,2,1)$-ohodnocení těchto grafů. Pro graf $G = GPG(p_1, 1)$, kde $p_1 = 3, 5, 6, 7, 9$ jsme nalezli konkrétní hodnotu rozpětí $\lambda_{(3,2,1)}$, a doplnili tak výsledky ze článku [4]. Pro graf $G = GPG(3,1)$ jsme nalezli přesnou hodnotu $\lambda_{(i,j,k)}$ v závislosti na parametrech i, j, k a pro graf $G = GPG(4,1)$ jsme pak nalezli hodnotu $\lambda_{(i,2,1)}$ v závislosti na parametru i.

Pro grafy $G = GPG(p_1, 2)$ jsme v úvodních příkladech nalezli příslušné rozpětí $\lambda_{(3,2,1)}$ pro parametr $p_1 = 5, 6, 7, 8$ a 9 a dále jsme nalezli horní mez rozpětí pro G, kde $p_1 \geq 10$ je sudé. Pro $G = GPG(p_1, 2)$ jsme rovněž nalezli dolní mez rozpětí $\lambda_{(3,2,1)}$.

Nalezené odhady by šlo vylepšit hledáním přesného $\lambda_{(3,2,1)}$ na jiném podgrafu, než jsme zkoumali my. Zajímavým rozšířením je také maximální zobecnění v $L(i,j,k)$-ohodnocení pro všechny námi zkoumané grafy. Rovněž zbývá pro $L(3,2,1)$-ohodnocení najít horní odhad pro $G = GPG(p_1, 2)$, kde $p_1 \geq 11$ je liché.

Literatura

[1] J. Clipperton, J. Gehrtz, Z. Szaniszlo, D. Torkornoo: $L(3,2,1)$-Labeling of Simple Graphs. *VERUM, Valparaiso University* (2005).

https://www.valpo.edu/mathematics-statistics/files/2015/07/L3-2-1-Labeling-of-Simple-Graphs.pdf

[2] Definice převzata z anglické wikipedie a upravena.

https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_Petersen_graph

[3] P. Kovář: Úvod do teorie grafů. *Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni*, reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332 (2016).

http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/uvod_do_teorie_grafu.pdf

[4] M. Chia, D. Kuo, H. Liao, C. Yang, R. K. Yeh: $L(3,2,1)$-Labeling of graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics* 15/6 (2011), 2439-2457.

http://society.math.ntu.edu.tw/~journal/tjm/V15N6/TJM-236.pdf

[5] R. Čada, T. Kaiser, Z. Ryjáček: Diskrétní matematika. *Plzeň: Západočeská univerzita*, 170s. ISBN: 80-7082-939-7 (2004).

[6] J. Clipperton: $L(d,2,1)$-Labeling of Simple Graphs. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal* 9/2/2 (2008).

https://scholar.rose-hulman.edu/rhumj/vol9/iss2/2/

[7] W. K. Hale: Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE* 68/12 (1980), 1497-1514.

[8] J. R. Griggs, R. K. Yeh: Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 5/4 (1992), 586-595.

[9] M. Lingscheit, K. Ruff, J. Ward: $L(d,j,s)$ Minimal and Surjective Graph Labeling. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal* 10/1/2 (2009).

https://scholar.rose-hulman.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1146&context=rhumj

[10] J. Fletcher: $L(3,2,1)$-Labeling and Surjective Labeling od Simple Graphs. *Senior Research Paper, Simpson College* (2008).

[11] J. Liu, Z. Shao: The $L(3,2,1)$-labeling problem on graphs. *Mathematica Applicata* 17/4 (2004), 596-602.

[12] J. Sedláček: Úvod do teorie grafů. *Praha: Academia* (1981).