

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Diplomová práce
Stabilizace odhadu kovarianční matice
pro Markowitzův model portfolia

Plzeň 2019

Bc. Šárka Kopová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

V Plzni dne 17. 5. 2019

.....

Bc. Šárka Kopová

Poděkování

Chtěla bych poděkovat touto cestou paní RNDr. Blance Šedivé, Ph.D. za vedení mé diplomové práce, cenné rady, odborný dohled a čas, který mně věnovala při konzultacích a tvorbě této práce. Obrovské díky patří také rodičům a bratrovi za neustálou podporu a pomoc po celou dobu studia.

Abstrakt

Předkládaná diplomová práce je zaměřena na analýzu stability odhadu kovarianční matice. Odhad kovarianční matice je následně využit v modelu optimálního portfolia v Markowitzově smyslu. Největší důraz byl kladen na to, jak dlouhou časovou řadu zvolit pro odhad kovarianční matice a zda má významný vliv délka historie, ze které je kovarianční matice odhadována, na investici do příslušných aktiv. Analýza byla prováděna pomocí simulovaných a reálných dat v rozsahu let 2006 - 2018. Sada reálných dat pochází z amerických burz NYSE a NASDAQ, bylo voleno 50 společností s nejvyšší tržní kapitalizací. Provedená analýza ukázala, že čím delší je časový horizont, tím menší jsou rozdíly mezi maximálními a minimálními vlastními čísly kovariančních matic a kovarianční matice se stávají stabilnějšími, a také čím delší je časový horizont, tím je investice v případě volby reálných dat výnosnější.

Klíčová slova

Kovarianční matice, Markowitzův model, očekávaný výnos, očekávané riziko, cenné papíry, optimální portfolio, optimální váhy, burza, průměrování, vlastní čísla.

Abstract

This magister thesis is focused on analysis of stability of covariance matrix estimation. The estimate of covariance matrix is then used in the optimal portfolio model in the Markowitz sense. The greatest emphasis was put on it, how long to take the time series for the covariance matrix estimate and whether the length of history, from which the covariance matrix is estimated, has a significant impact to the investment in the relevant assets. The analysis was conducted using simulated and real data over the period 2006 - 2018. The real data set comes from NYSE and NASDAQ and were elected 50 companies with the highest market capitalization. The analysis showed that the longer the time horizon is taken, the smaller the differences between the maximum and minimum eigenvalues are and the covariance matrixes are more stable. Further in the case of choosing real data the longer the time horizon is, the more profitable the investment is.

Key words

Covariance matrix, Markowitz model, expected return, expected risk, stocks, optimal portfolio, optimal weights, stock exchange, averaging, eigenvalues.

Obsah

Značení	1
Úvod	2
1 Pojmy pro konstrukci portfolia v Markowitzově smyslu	4
1.1 Charakteristiky aktiv a portfolia	4
1.1.1 Odhad parametrů R_i , σ_i a C_{ij}	6
1.2 Dominance aktiv a indifferenční křivky	8
1.3 Přípustná, efektivní portfolia a jejich množiny	9
1.4 Model CAPM - model kapitálových aktiv (Capital Asset Pricing Model)	11
1.5 Polopřímka CML (Capital Market Line)	11
1.6 Množina efektivních portfolií ve smyslu Markowitze	12
1.6.1 Markowitzovo optimální portfolio	14
1.7 Optimalizační úlohy v Markowitzově smyslu	15
2 Teorie náhodných matic	18
2.1 Teorie náhodných matic	18
2.2 Empirická korelace	19
3 Metody stabilizace odhadu kovarianční matice	20
3.1 Metoda stabilizace na základě odhadů matic z různých časových intervalů T	20
3.2 Metoda stabilizace na základě průměrování kovariančních matic	21
4 Ověřování stability na simulovaných datech	22
4.1 Obecná teorie pro simulaci dat	22
4.2 Simulace dat	23
4.3 Metoda stabilizace na základě odhadů kovariančních matic $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ z různých časových intervalů T	24
4.3.1 Metoda pro zjišťování stability kovariančních matic \mathbf{C} pomocí vlastních čísel kovariančních matic	24
4.3.2 Metoda pro nalezení nejlepší délky časového intervalu T pomocí optimálních portfolií	25

4.4	Metoda stabilizace na základě průměrování kovariančních matic $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	32
4.4.1	Metoda pro zjišťování stability kovariančních matic $\bar{\mathbf{C}}$ pomocí vlastních čísel kovariančních matic	33
4.4.2	Metoda pro nalezení nejlepší délky časového intervalu T pomocí optimálních portfolií	34
5	Ověřování stability na reálných datech	39
5.1	Metoda stabilizace na základě odhadů kovariančních matic $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ z různých časových intervalů T	39
5.1.1	Metoda pro zjišťování stability kovariančních matic \mathbf{C} pomocí vlastních čísel kovariančních matic	40
5.1.2	Metoda pro nalezení nejlepší délky časového intervalu T pomocí optimálních portfolií	41
5.2	Metody stabilizace na základě průměrování kovariančních matic $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	46
5.2.1	Metoda pro zjišťování stability kovariančních matic $\bar{\mathbf{C}}$ pomocí vlastních čísel kovariančních matic	47
5.2.2	Metoda pro nalezení nejlepší délky časového intervalu T pomocí optimálních portfolií	47
	Závěr	54
	Literatura	57
	Příloha	59
	A Simulovaná data metoda 1, volby T	59
	B Simulovaná data - obě metody	65
	C Reálná data - metoda 1, volby T	70
	D Reálná data - obě metody	75
	E Tabulka - TOP 50 společností	80
	F Seznam složek a souborů na DVD	81
	G Seznam použitých funkcí v softwaru R	84

Seznam obrázků

1.1	Prostor $\sigma_p - R_p$	8
1.2	Indiferenční křivky	9
1.3	Přípustná a efektivní množina u rizikových aktiv	10
1.4	Přípustná a efektivní množina - přidáno bezrizikové aktivum	10
1.5	Polopřímka CML	12
1.6	Množina efektivních portfolií pomocí Markowitzze [8, str. 45]	14
1.7	Markowitzovo optimální portfolio [8, str. 46]	14
3.1	Ukázka volby měsíčního portfolia na dvouměsíčních datech	20
4.1	Ukázka nasimulovaných dat	24
4.2	Hodnoty rozdílů max. a min. vlastního čísla pro dané kovari- anční matice v dané investici	25
4.3	Počet změn akcií - průměrně za 10 investic	28
4.4	Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic	29
4.5	Hodnoty portfolií - dvouleté investice, $T = 21$ dní	29
4.6	Hodnoty portfolií - dvouleté investice, $T = 252$ dní	30
4.7	Hodnoty portfolií při různých variantách T v jedné investici	30
4.8	Riziko - výnos - (různé varianty T v jedné investici)	31
4.9	Riziko - výnos, průměrně za 10 investic	31
4.10	Hodnota portfolií při $T = 21$ dní a $T = 252$ dní ve dvouleté investici	32
4.11	Hodnoty rozdílů max. a min. vlastního čísla pro dané kovari- anční matice	33
4.12	Počet změn - průměrně za 10 investic	34
4.13	Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic	35
4.14	Počet změn - průměrně za 10 investic, 2 metody	35
4.15	Hodnoty portfolií - 12 investic, průměr z 12 matic	36
4.16	Hodnoty portfolií - 1 investice	36
4.17	Hodnoty portfolií - 1 investice, obě metody	37
4.18	Prostor „riziko - výnos“ - 1 investice, obě metody	37
4.19	Prostor „riziko - výnos“ - všechny investice, obě metody	38

5.1	Hodnoty rozdílů max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice v letech 2016 - 2018	40
5.2	Počet změn akcií - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018)	41
5.3	Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018)	42
5.4	Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2018, $T = 21$ dní	42
5.5	Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2018, $T = 252$ dní	43
5.6	Hodnoty portfolií - roky 2016 - 2018	43
5.7	Riziko - výnos - roky 2016 - 2018	44
5.8	Hodnoty portfolií - roky 2010 - 2012	45
5.9	Riziko - výnos, průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018) . .	46
5.10	Hodnoty rozdílů max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice	47
5.11	Počet změn akcií - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018)	48
5.12	Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018)	49
5.13	Počet změn akcií - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018), 2 metody	49
5.14	Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018), 2 metody	50
5.15	Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2018, průměr z 12 matic	50
5.16	Hodnoty portfolií - roky 2016 - 2018	51
5.17	Hodnoty portfolií - roky 2016 - 2018, obě metody	51
5.18	Prostor „riziko - výnos“ - roky 2016 - 2018, obě metody	52
5.19	Prostor „riziko - výnos“ - roky 2007 - 2018, obě metody	52
A.1	Hodnoty portfolií - roky 2016 - 2018	59
A.2	Hodnoty portfolií - roky 2015 - 2017	60
A.3	Hodnoty portfolií - roky 2013 - 2015	60
A.4	Hodnoty portfolií - roky 2012 - 2014	60
A.5	Hodnoty portfolií - roky 2011 - 2013	61
A.6	Hodnoty portfolií - roky 2010 - 2012	61
A.7	Hodnoty portfolií - roky 2009 - 2011	61
A.8	Hodnoty portfolií - roky 2008 - 2010	62
A.9	Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2009	62
B.1	Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic- 2 metody	66
B.2	Hodnoty portfolií - roky 2016 - 2018, obě metody	66
B.3	Hodnoty portfolií - roky 2013 - 2015, obě metody	67
B.4	Hodnoty portfolií - roky 2012 - 2014, obě metody	67
B.5	Hodnoty portfolií - roky 2011 - 2013, obě metody	67
B.6	Hodnoty portfolií - roky 2010 - 2012, obě metody	68
B.7	Hodnoty portfolií - roky 2009 - 2011, obě metody	68
B.8	Hodnoty portfolií - roky 2008 - 2010, obě metody	68
B.9	Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2009, obě metody	69

C.1	Hodnoty portfolií - roky 2015 - 2017	70
C.2	Hodnoty portfolií - roky 2014 - 2016	71
C.3	Hodnoty portfolií - roky 2013 - 2015	71
C.4	Hodnoty portfolií - roky 2012 - 2014	71
C.5	Hodnoty portfolií - roky 2011 - 2013	72
C.6	Hodnoty portfolií - roky 2009 - 2011	72
C.7	Hodnoty portfolií - roky 2008 - 2010	72
C.8	Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2009	73
D.1	Hodnoty portfolií - roky 2015 - 2017, obě metody	76
D.2	Hodnoty portfolií - roky 2014 - 2016, obě metody	76
D.3	Hodnoty portfolií - roky 2013 - 2015, obě metody	76
D.4	Hodnoty portfolií - roky 2012 - 2014, obě metody	77
D.5	Hodnoty portfolií - roky 2011 - 2013, obě metody	77
D.6	Hodnoty portfolií - roky 2010 - 2012, obě metody	77
D.7	Hodnoty portfolií - roky 2009 - 2011, obě metody	78
D.8	Hodnoty portfolií - roky 2008 - 2010, obě metody	78
D.9	Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2009, obě metody	78

Seznam tabulek

1.1	Ukázka tvorby upravené ceny (Adjusted close) [USD]	7
4.1	Průměrná hodnota rozdílu max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice v investici	25
4.2	Bezriziková úroková sazba R_f v jednotlivých letech	26
4.3	Průměrné hodnoty rozdílu max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice	33
5.1	Průměrná hodnota rozdílu max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice v letech 2016 - 2018	40
5.2	Sledované charakteristiky [USD] - průměr z 10 investic	45
5.3	Průměrné hodnoty rozdílu max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice	47
A.1	Sledované charakteristiky [USD] - průměr z 10 investic	62
A.2	Hodnoty očekávaných výnosů jednotlivých portfolií v průběhu deseti dvouletých investic, $T = 21$ dní	63
A.3	Hodnoty rizik jednotlivých portfolií v průběhu deseti dvoule- tých investic, $T = 21$ dní	64
B.1	Průměrné hodnoty počtu změn v jednotlivých investicích	65
B.2	Tržní kapitalizace v jednotlivých investicích	65
B.3	Sledované charakteristiky [USD] - metoda průměrování matic	69
C.1	Hodnoty očekávaných výnosů jednotlivých portfolií v průběhu deseti dvouletých investic, $T = 21$ dní	73
C.2	Hodnoty rizik jednotlivých portfolií v průběhu deseti dvoule- tých investic, $T = 21$ dní	74
D.1	Průměrné hodnoty počtu změn v jednotlivých investicích	75
D.2	Tržní kapitalizace v jednotlivých investicích	75
D.3	Sledované charakteristiky [USD] - metoda průměrování matic	79
E.1	Výpis TOP 50 amerických společností, seřazení sestupně podle tržní kapitalizace (k 3. 2. 2019)	80

Značení

\mathbb{N}	množina obsahující všechna kladná čísla
\mathbb{R}	množina obsahující všechna reálná čísla
\mathbb{R}^n	množina obsahující všechny uspořádané n -tice reálných čísel
$E(X)$	střední hodnota náhodné veličiny X
$D(X)$	rozptyl náhodné veličiny X
$cov(X, Y)$	kovariance mezi náhodnými veličinami X a Y
$\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$	sloupcový vektor z prostoru \mathbb{R}^n
$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	matice reálných čísel tvořená n řádky a n sloupci
$\mathbf{w} \succeq \mathbf{0}$	$\forall i \in \{1, \dots, n\} : w_i \geq 0$
$X \cap Y$	průnik množin X a Y
$\min M$	číslo $a \in M$ se nazývá minimum množiny M , pokud $\forall x \in M \Rightarrow x \geq a$
$\max M$	číslo $b \in M$ se nazývá maximum množiny M , pokud $\forall x \in M \Rightarrow x \leq b$
$f(\mathbf{w})$	funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mající hodnotu v bodě $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$
$\frac{\partial f}{\partial t}$	parciální derivace funkce f vzhledem k proměnné t
$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$	druhá parciální derivace funkce f vzhledem k proměnné t

Úvod

Diplomová práce je zaměřena na analýzu stability odhadu kovarianční matice, která je následně použita k modelu optimálního portfolia v Markowitzově smyslu. Pro tvorbu optimálního portfolia a pro výhodnou investici do daných aktiv je stabilní odhad kovarianční matice jeden z klíčových bodů.

V první kapitole jsou uvedeny základní pojmy, které jsou potřebné pro konstrukci portfolia v Markowitzově smyslu. Jedná se o popis charakteristik aktiv a portfolia, následně je popsán odhad parametrů očekávaného výnosu z portfolia, rizika změny výnosu, a také kovariance mezi jednotlivými náhodnými veličinami. V prostoru „*riziko - výnos*“ je vysvětlena dominance aktiv a tvorba indiferenčních křivek. Vysvětlen je i model CAPM a následně polopřímka CML. Pro tvorbu množin efektivních portfolií budou využity optimalizační úlohy pomocí kvadratické optimalizace. Optimální portfolio se bude zjišťovat pomocí zavedení bezrizikového aktiva do portfolia.

Druhá kapitola popisuje teorii náhodných matic, kde hlavní zaměření je cíleno na rozdělení vlastních čísel kovarianční matice.

Třetí kapitola je věnována samotným metodám pro stabilizaci odhadu kovariančních matic. Pro stabilizaci je využita metoda, kde hlavní myšlenkou je zvolení nejlepšího časového intervalu, ze kterého budou odhadovány nejdříve relativní přírůstky (výnosnosti), potažmo kovarianční matice. Další metodou stabilizace je odhad kovarianční matice na základě průměrování různého počtu odpovídajících kovariančních matic. Pro zjišťování nejlepších variant v jednotlivých metodách, kdy je odhadnutá kovarianční matice nejvíce stabilní, jsou využity vlastní čísla matice, porovnávají jsou hodnoty rozdílů maximálního a minimálního vlastního čísla. Další přístupem, jak nalézt nejlepší variantu reálného časového horizontu, aby investor dosáhl co nejvyššího výnosu, je využití výše zmíněného optimálního portfolia a následně investice do daných aktiv. Porovnávají jsou poté hodnoty tržních kapitalizací a absolutní počty změn aktiv při aktualizacích portfolia v investici, a také výnosnost a rizikovost jednotlivých investic.

Ověřování metod je nejdříve prováděno na simulovaných datech, kdy je pro modelování cen využito exponenciální Wienerův proces a následně dochází k ověření na reálných datech pocházejících z obchodování na amerických burzách NYSE a NASDAQ. Pro analýzu bylo zvoleno 50 amerických společností s nejvyšší tržní kapitalizací. Výběr amerického trhu je z důvodu velkého počtu společností, počet společností na tuzemské burze cenných papírů je pro tuto analýzu nedostačující. Rozsah, který bude testován, je zvolen na 12 let. K analýze je využito software *R*.

Kapitola 1

Pojmy pro konstrukci portfolia v Markowitzově smyslu

Metody optimalizace portfolia zahrnují soubor postupů a analýz, jejichž cílem je najít rozdělení kapitálu do skupiny předem daných aktiv tak, aby výsledná kombinace aktiv byla v předem daném smyslu optimální.

1.1 Charakteristiky aktiv a portfolia

Při formulaci modelu portfolia se vychází z předpokladu, že aktiva jsou popsána jako náhodné veličiny. Při práci bude využito následující značení a předpoklady [2, str. 25 - 26]:

Je uvažováno, že portfolio bude obsahovat $n \in \mathbb{N}$ aktiv A_i ($i = 1, \dots, n$). Každé aktivum A_i je charakterizováno náhodnou veličinou X_i , neboli výnosem aktiva A_i za určitou dobu. Předpokladem náhodné veličiny X_i je, že pochází z normálního rozdělení $X_i \sim N(E(X_i), D(X_i))$.

Aktivum A_i ($i = 1, \dots, n$) je tedy charakterizováno:

$E(X_i)$ střední hodnotou náhodné veličiny X_i , v ekonomické interpretaci lze chápat střední hodnotu jako očekávaný výnos a

$D(X_i)$ rozptylem náhodné veličiny X_i , které slouží ke kvantifikaci rizika.

Pomocí rozptylu lze potom získat směrodatnou odchylku náhodné veličiny X_i ve tvaru $\sqrt{D(X_i)}$, neboli riziko změny výnosu aktiva za určitou dobu.

Další charakteristikou aktiv je kovariance $cov(X_i, X_j)$ mezi dvojicemi náhodných veličin X_i a X_j , která vyjadřuje lineární vztah mezi dvěma aktivy.

Portfoliem složeným z aktiv A_i lze pak nazývat lineární kombinaci těchto aktiv. Pro portfolio jsou využity následující charakteristiky, které jsou v souladu s běžně používaným postupem při tvorbě portfolio:

$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektor, který odpovídá procentním zastoupením jednotlivých aktiv v portfolio,

$l_i \in \mathbb{R}$ dolní mez, která označuje nejmenší povolený procentuální podíl aktiva A_i v portfolio,

$u_i \in \mathbb{R}$ horní mez, která označuje největší povolený procentuální podíl aktiva A_i v portfolio, jestliže se jedná o procentuální podíly, potom $u_i \leq 1$,

souhrnně lze psát nerovnost ve tvaru: $l_i \leq w_i \leq u_i$,

$X_p = \sum_{i=1}^n w_i \cdot X_i$ náhodná veličina, která popisuje výnos z portfolio aktiv za určitou dobu,

$E(X_p) = R_p = \sum_{i=1}^n w_i \cdot E(X_i)$ střední hodnota náhodné veličiny, která popisuje výnos z portfolio aktiv, neboli se jedná o očekávaný výnos z portfolio aktiv za určitou dobu,

$D(X_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot cov(X_i, X_j) \cdot w_j$ rozptyl náhodné veličiny X_p a

$\sqrt{D(X_p)} = \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot cov(X_i, X_j) \cdot w_j}$ směrodatná odchylka náhodné veličiny, která popisuje riziko změny výnosu z portfolio aktiv za určitou dobu.

V praktických aplikacích jsou často používány omezující podmínky pro zastoupení aktiv v portfolio. Jako typický příklad se uvádí, když je dolní hranice u_i nulová, neboli jde o hledání nejlepší investice (portfolio) při zakázku „sell short“ ($\mathbf{w} \succeq \mathbf{0}$), povolení „sell short“ znamená držení záporného podílu aktiva A_i v portfolio [2, str. 23]. Častou modifikací základního modelu je též úprava zastoupení jednotlivých aktiv v portfolio tak, aby bylo pracováno pouze s celočíselnými hodnotami.

1.1.1 Odhad parametrů R_i , σ_i a C_{ij}

Pro stanovení co nejpřesnějších hodnot očekávaného výnosu R_p z portfolia aktiv za určitou dobu a rizika změny výnosu σ_p z portfolia aktiv za určitou dobu bude dále využita historická metoda. Tato metoda je založena na vývoji tržních cen aktiv. Jedná se o plně standartizovanou a objektivizovanou metodu na rozdíl například od metody odhadů parametrů založené na expertním přístupu, kdy experti poskytují informace o vývoji cen akcie dané firmy [2, str. 27 -28].

Pro výpočet relativních přírůstků $\bar{r}_{i,t}$ tržní ceny aktiva A_i v čase $(t + k)$ oproti tržní ceně v čase t bude v práci využíván ($\bar{r}_{i,t}$ lze chápat jako realizace náhodné veličiny X_i):

$$\bar{r}_{i,t} = \frac{P_{i,t+k} - P_{i,t}}{P_{i,t}}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

kde

$P_{i,t}$ je tržní cena aktiva A_i v čase t , $t = 1, 2, \dots$ a

k je zpoždění neboli délka období pro určení velikosti změny tržní ceny aktiva, dále v práci bude vždy brána jednodenní změna tržní ceny, tedy $k = 1$.

Pomocí relativních přírůstků $\bar{r}_{i,t}$ se v dalším postupu bude např. odvozovat odhad střední hodnoty náhodné veličiny X_i , viz vzorec (1.3).

Budou-li za aktiva brány akcie, u kterých dochází k vyplácení dividend, potom budou ceny akcie (Close) převedeny pomocí multiplikátoru $m_{i,t}$ na bezdividendové (Adjusted close) [9]:

$$m_{i,t} = 1 - \frac{d_{i,t+1}}{P_{i,t}}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

kde

$d_{i,t}$ je hodnota dividendy aktiva A_i , kterou má držitel akcie k dispozici, pokud v čase t drží akcii A_i před tzv. ex-date. Ex-date je první den, kdy lze prodat akcie bez ztráty nároku na výplatu dividendy nebo také první den, kdy kupující již nemá na nejbližší dividendu nárok.

Příklad Je-li k datu 12. 5. (ex-date) čistá dividendy 2,4 USD a k 11. 5. má tržní cena akcie (Close) hodnotu 16 USD, potom je vypočten multiplikátor následujícím způsobem $m = \left(1 - \frac{2,4}{16}\right) = 0,85$.

U akcií může také docházet k jejich štěpení v libovolném poměru (např. v poměru 1:2, 1:5, atd.). Jestliže ke štěpení dochází, potom je nutné tržní ceny akcie před datem štěpení násobit příslušným poměrem.

V tab. 1.1 je zobrazena tvorba upravené tržní ceny (Adjusted close) z původních tržních cen (Close) [9].

Datum	Cena (Close), Dividenda, Štěpení	Upravená cena (Adjusted close)
16. 2.	Close = 49.99	$0.5 * 0.9968 * 46.99 = 23.42$
17. 2.	Close = 48.30	$0.5 * 0.9968 * 48.3 = 24.07$
18. 2.	Close = 24.96, Štěpení = 2:1	$0.9968 * 24.96 = 24.88$
19. 2.	Close = 24.91	$0.9968 * 24.91 = 24.83$
20. 2.	Close = 24.95	$0.9968 * 24.95 = 24.87$
21. 2.	Close = 24.53, Dividenda = 0.08 (Ex-date)	24.53
22. 2.	Close = 24.54	24.54

Tabulka 1.1: Ukázka tvorby upravené ceny (Adjusted close) [USD]

Očekávaný výnos aktiva A_i za určitou dobu je značen R_i a je odhadem střední hodnoty $E(X_i)$. Výpočet je pomocí aritmetického průměru relativních přírůstků tržních cen $\bar{r}_{i,t}$ ve tvaru:

$$R_{i,t}(T) = \frac{1}{T-1} \sum_{\tau=t-(T-1)}^t \bar{r}_{i,\tau}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Dochází tedy k odhadu výnosnosti aktiva i v čase t na základě $T-1$ historických jednodenních výnosností ($k=1$ a T je počet dní, ze kterých bude odhadována výnosnost a rizikovost).

Riziko změny výnosů aktiva A_i za určitou dobu je značeno σ_i a je odhadem výběrové směrodatné odchylky $\sqrt{D(X_i)}$. Vzorec je ve tvaru:

$$\sigma_{i,t}(T) = \sqrt{\frac{1}{T-2} \sum_{\tau=t-(T-1)}^t (\bar{r}_{i,\tau} - R_{i,t}(T))^2}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Pro výpočet rizika změny celého portfolia musíme znát kovarianci C_{ij} mezi dvojicemi náhodných veličin X_i a X_j . Kovariance C_{ij} je odhadem kovariance $cov(X_i, X_j)$ mezi dvojicemi X_i a X_j . Vzorec je v následujícím tvaru:

$$C_{ij,t}(T) = \frac{1}{T-2} \sum_{\tau=t-(T-1)}^t (\bar{r}_{i,\tau} - R_{i,t}(T))(\bar{r}_{j,\tau} - R_{j,t}(T)), \quad (1.5)$$

kde $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, n$.

Pomocí kovariancí $C_{ij,t}(T)$ mezi dvojicemi náhodných veličin můžeme vytvořit kovarianční matici $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve tvaru:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11,t}(T) & C_{12,t}(T) & \dots & C_{1n,t}(T) \\ C_{21,t}(T) & C_{22,t}(T) & \dots & C_{2n,t}(T) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1,t}(T) & C_{n2,t}(T) & \dots & C_{nn,t}(T) \end{pmatrix}.$$

Kovarianční matice \mathbf{C} obsahuje na hlavní diagonále rozptyly jednotlivých aktiv.

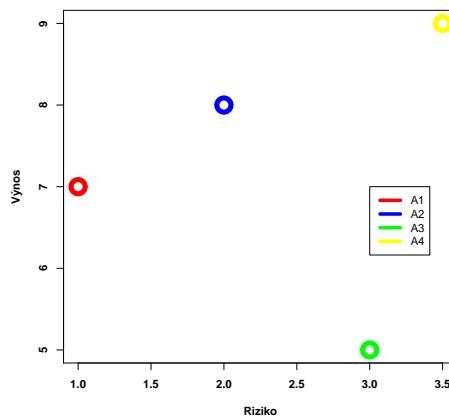
Matici lze charakterizovat pomocí vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (odpovídajících času t na základě T historických výnosností), protože je symetrická a pozitivně definitní (má pouze reálná kladná vlastní čísla).

1.2 Dominance aktiv a indifferenční křivky

Pro investora jsou nejdůležitějšími charakteristikami očekávaný výnos portfolia R_p a riziko změny výnosu portfolia σ_p . Tyto charakteristiky lze znázornit v rovině $\sigma_p - R_p$ a pro rozhodování lze využít dominance jednotlivých aktiv [2, str. 47 - 48], kdy o aktivu A_1 se dá říct, že dominuje A_2 , jestliže platí

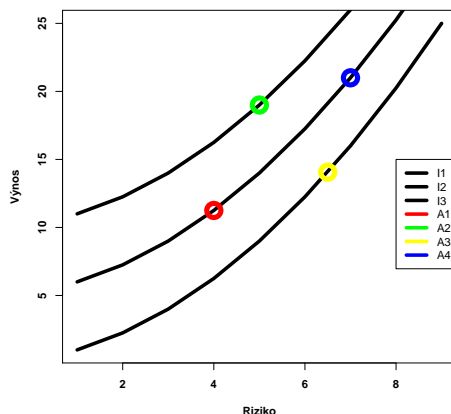
$$R_{A_1} \geq R_{A_2} \quad \wedge \quad \sigma_{A_1} \leq \sigma_{A_2}.$$

Na obr. 1.1 je uveden příklad, kdy aktivum A_1 i A_2 dominuje A_3 .



Obrázek 1.1: Prostor $\sigma_p - R_p$

Jestliže dominance aktiv není jednoznačná dochází k využití tzv. *indiferenčních křivek*, každá křivka je také znázorněna v rovině $\sigma_p - R_p$ a obsahuje jednotlivá portfolia, kde konkrétnímu portfoliu odpovídá konkrétní bod.



Obrázek 1.2: Indiferenční křivky

Jednotlivé kombinace portfolií, které leží na stejné indiferenční křivce, bere investor za stejně žádoucí. Na obr 1.2 je tato vlastnost zobrazena, protože portfolia A_1 a A_4 mají pro investora stejný užitek, i když portfolio A_1 má nižší výnos než portfolio A_4 , tento fakt ale kompenzuje u portfolia A_1 nižší riziko vzhledem k portfoliu A_4 .

Preferenci investora lze vyjádřit pomocí užitkové funkce tzv. „*utility function*“ $f(\sigma_p, R_p)$, kdy funkce dvojici „*riziko - výnos*“ přiřadí danou preferenci a hladiny této funkce jsou potom indiferenční křivky

$$(\sigma_p, R_p) \rightarrow f(\sigma_p, R_p). \quad (1.6)$$

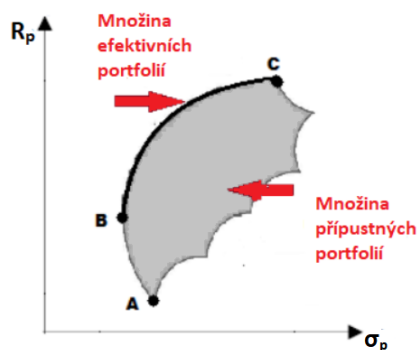
Dále také investor bude více volit portfolia ležící na křivce, která je výše než zbývající indiferenční křivky. Na investorově postoji k riziku závisí tvar a sklon křivek [2, str. 47].

1.3 Přípustná, efektivní portfolia a jejich množiny

Přípustnou množinou nazýváme množinu všech dostupných portfolií, kterou lze vytvořit změnou procentuálního zastoupení daných aktiv. Díky existenci *efektivní množiny*, která je podmnožinou přípustné množiny nemusí investor vyhodnocovat všechna dostupná portfolia. Pro portfolia z množiny efektivních portfolií musí platit [5, str. 27], že

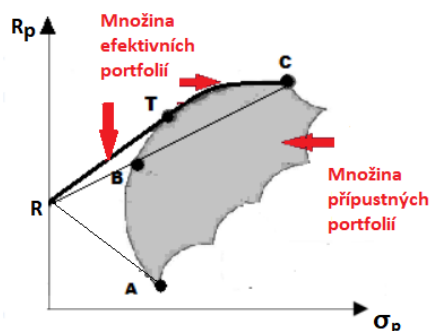
- (i) „*nabízejí při různých úrovních rizika maximální očekávanou výnosnost,*“
- (ii) „*nabízejí při různých očekávaných úrovních výnosnosti minimální riziko.*“

Tyto podmínky jsou ukázány na obr. 1.3, kdy portfolio B je tvořeno tím, že dochází k minimalizaci rizika s maximálním výnosem, naopak portfolio C maximalizuje výnos při minimálním riziku. Efektivní množina je potom tvořena křivkou mezi body B a C . Z dominance aktiv je portfolio A neefektivní, protože při vyšším riziku je jeho očekávaná výnosnost nižší než u portfolia B .



Obrázek 1.3: Přípustná a efektivní množina u rizikových aktiv

Jestliže je do portfolia přidáno *bezrizikové aktivum*, dochází ke změně efektivní množiny. Bezrizikové aktivum má nulové riziko změny výnosu σ_f a očekávaný výnos $R_f > 0$ je vždy předem známý a je brán obvykle ve výši výnosů pokladničních poukázek, státních dluhopisů nebo např. termínovaných vkladů. Nejvýše jedno bezrizikové aktivum obsahuje portfolio z efektivní množiny, protože bezrizikové aktivum, které má nejvyšší očekávaný výnos R_f , dominuje všechna zbývající [5, str. 32].



Obrázek 1.4: Přípustná a efektivní množina - přidáno bezrizikové aktivum

Z obr. 1.4 je patrná změna efektivní množiny, která už není pouze tvořená křivkou mezi body T a C , ale i úsečkou mezi body R a T . Bod T je tečný s množinou přípustných řešení a nazývá se *tangenciální portfolio*, protože směrnice úsečky mezi body R a T je rovna tangenci úhlu, kterou svírá polopřímka s imaginární osou rovnoběžnou s osou σ_p a vedoucí z bodu R .

1.4 Model CAPM - model kapitálových aktiv (Capital Asset Pricing Model)

Portfolio v tomto modelu obsahuje nejen riziková aktiva, ale i bezrizikové aktivum (nákup státního dluhopisu, bezriziková půjčka, atd.). Efektivní množina je ve stejném tvaru jako na obr. 1.4. V modelu jsou stejně jako v Markowitzově modelu využity statistické charakteristiky, a proto tento model na Markowitzův model navazuje [5, str. 57].

V modelu CAPM jsou si investoři rovni v tom smyslu, že

- mají na sestavení portfolia stejné období,
- všichni investoři jsou rizikově averzní,
- existuje stejná bezriziková sazba dostupná pro všechny investory,
- aktiva jsou nekonečně dělitelná,
- informace jsou stejně dostupné pro všechny investory,
- investoři mají totožné (homogenní) očekávání (stejně odhadnutí očekávaných výnosností, rizika i kovariančních matic),
- investor si ze dvou portfolií se stejným očekávaným rizikem vybere to portfolio, které má vyšší výnos (nenasycenost investora), a také má odpor k riziku, neboli si ze dvou portfolií se stejným očekávaným výnosem vybere to portfolio, které má nižší riziko [5, str. 57].

Je zřejmé, že výše zmíněné předpoklady může splňovat pouze modelový trh a jestliže všichni investoři budou postupovat stejným způsobem, potom lze z jejich chování odvodit rovnovážný vztah mezi dvojicí „riziko - výnos“ jednotlivých aktiv na trhu. Na trhu musí existovat rovnováha, jestliže do portfolia a jeho kombinací s bezrizikovým aktivem budou investovat všichni investoři, tomuto portfoliu se potom říká *tržní portfolio M*. Portfolio je tedy tvořeno investicemi do všech dostupných rizikových aktiv v takovém poměru, kde investice do jednotlivého aktiva je rovna relativní tržní hodnotě. Nalezení tohoto portfolia je pomocí polopřímky CML [5, str. 58].

1.5 Polopřímka CML (Capital Market Line)

Jestliže bude zavedeno bezrizikové aktivum s nulovým rizikem a výnosností $R_f > 0$, potom polopřímka CML znázorňuje rovnováhu mezi očekávanou výnosností a rizikem efektivních portfolií. Polopřímka vychází z bodu $R = [0, R_f]$ a prochází bodem $M = [\sigma_M, R_M]$, který je tečný s množinou

efektivních portfolií a dochází tedy k maximalizaci tangenty úhlu α (směrnice polopřímky v (1.7)), který svírá polopřímka CML s imaginární osou, která je rovnoběžná s osou σ_p a vede z bodu R (znázornění na obr. 1.5). Za předpokladů uvedených v předešlé kapitole 1.4 bude *tangenciální portfolio* T odpovídat *tržnímu portfoliu* M . Je-li zakázán „sell short“, potom je polopřímka CML nahrazena úsečkou spojující body R a M .

Vzorec pro výpočet polopřímky je ve tvaru:

$$R_p = \frac{R_M - R_f}{\sigma_M} \sigma_p + R_f, \quad \sigma_p \geq 0, \quad (1.7)$$

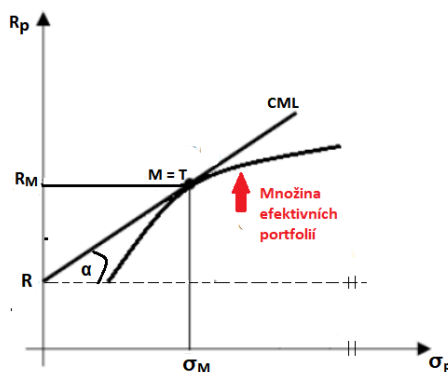
kde je

R_f očekávaný výnos bezrizikového aktiva za určitou dobu,

σ_p riziko změny výnosu z portfolia aktiv za určitou dobu,

R_M očekávaný výnos tržního portfolia M za určitou dobu a

σ_M riziko změny výnosu tržního portfolia M za určitou dobu [5, str. 58].



Obrázek 1.5: Polopřímka CML

1.6 Množina efektivních portfolií ve smyslu Markowitze

Tento model současně minimalizuje funkci rizika změny výnosnosti σ_p , a zároveň dochází k maximalizování očekávané výnosnosti R_p . Model lze brát jako hledání *Pareto optimálního portfolia*.

Úloha 1. Úloha je definována tak, že při známé výnosnosti $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^n$ a kovarianční matici $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hledáme vektor $\mathbf{w}_{par} \in \mathbb{R}^2$, kde dochází k maximalizaci $f_1(\mathbf{w})$ a minimalizaci $f_2(\mathbf{w})$, ve tvaru

$$f_1(\mathbf{w}) = -R_p(\mathbf{w}) = -\mathbf{R}^T \mathbf{w}, \quad f_2(\mathbf{w}) = \sigma_p(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w}, \quad (1.8)$$

za podmínek

$$\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \quad \text{a} \quad \mathbf{w} \succeq \mathbf{0}. \quad (1.9)$$

Tento postup je k nalezení v [1, str. 186].

Pareto optimální vektory lze sestavit využitím *skalarizace*, a tedy vektor \mathbf{w}_{par} lze najít ve tvaru

$$\mathbf{w}_{par} = -x_1 \mathbf{R}^T \mathbf{w} + x_2 \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w}, \quad (1.10)$$

za podmínek

$$\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \quad \text{a} \quad \mathbf{w} \succeq \mathbf{0}. \quad (1.11)$$

Hodnoty multiplikátoru $x_1 > 0$ a $x_2 > 0$ jsou voleny podle toho, jestli investor preferuje výnos nad rizikem a nebo opačně, jak moc chce mít investor investici bezpečnou. Zvětšuje-li se x_1 , potom dochází k maximalizování výnosnosti, naopak je-li větší x_2 , potom dochází k minimalizování rizika.

Bez újmy na obecnosti lze volit hodnotu multiplikátoru $x_1 = 1$. Jestliže dochází k fixaci x_1 , potom pro libovolné x_2 , s výjimkou dvou hodnot multiplikátorů $x_2 \rightarrow 0^+$ a $x_2 \rightarrow +\infty$, se pro úlohu (1.10) - (1.11) dostanou všechna Pareto optimální portfolia. V případě první hodnoty $x_2 \rightarrow 0^+$ je získána maximální očekávaná výnosnost bez ohledu na riziko a druhá hodnota $x_2 \rightarrow +\infty$ značí minimální riziko bez ohledu na očekávanou výnosnost [1, str. 186].

Tyto dvě výše zmíněné volby multiplikátorů x_2 lze nadefinovat zvlášť. Nejdříve definujeme přípustnou množinu portfolií \mathcal{G} má tvar

$$\mathcal{G} = \{(\sigma_p, R_p) \mid R_p = \mathbf{R}^T \mathbf{w}, \quad \sigma_p = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w}, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{w} \succeq \mathbf{0}\}. \quad (1.12)$$

Podmínku $\mathbf{0} \preceq \mathbf{w} \preceq \mathbf{1}$ lze nahradit obecnou podmínkou $\mathbf{l} \preceq \mathbf{w} \preceq \mathbf{u}$, kde budou předem zadané vektory $\mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

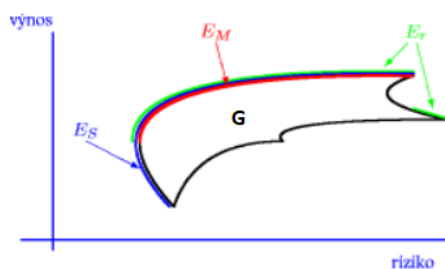
Pro hledání extrémních hodnot efektivních portfolií, je potřebné nadefinovat množinu E_r portfolií, která maximalizují očekávaný výnos:

$$E_r = \{(\sigma_r, R_r) \in \mathcal{G} \mid R_r = \max_{(\sigma_r, R_p) \in \mathcal{G}} R_p\}, \quad (1.13)$$

dále pak množinu E_s , která minimalizuje riziko (množina efektivních portfolií ve smyslu Sharpeho):

$$E_s = \{(\sigma_s, R_s) \in \mathcal{G} \mid \sigma_s = \min_{(\sigma_p, R_s) \in \mathcal{G}} \sigma_p\}. \quad (1.14)$$

Množina efektivních portfolií v Markowitzově smyslu E_M (množina Pareto optimálních vektorů) je potom dána průnikem těchto množin E_r a E_s a je ilustrována na obr. 1.6 [8, str. 45].



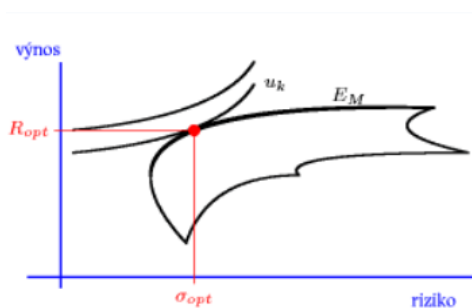
Obrázek 1.6: Množina efektivních portfolií pomocí Markowitze [8, str. 45]

1.6.1 Markowitzovo optimální portfolio

Je-li \mathcal{G} množina přípustných řešení a E_M množina efektivních portfolií v Markowitzově smyslu a investorův vztah k riziku je vyjádřen v prostoru $\sigma_p - R_p$ indifferenčními křivkami u_1, u_2, \dots , potom Markowitzovo optimální portfolio je takové portfolio X_{opt} , pro které existuje indifferenční křivka u_k tak, že

$$\{(\sigma_{opt}, R_{opt})\} = E_M \cap u_k. \quad (1.15)$$

Jestliže má přípustná množina obvyklý „deštníkový tvar“, existuje právě jedno optimální portfolio pro investora s averzí k riziku [8, str. 46].



Obrázek 1.7: Markowitzovo optimální portfolio [8, str. 46]

1.7 Optimalizační úlohy v Markowitzově smyslu

Pro hledání optimálního portfolia \mathbf{w}_{opt} jsou k dispozici různé varianty optimalizačních úloh odvíjející se od investorových preferencí, zda např. preferuje povolení nebo zakázání tzv. „*sell short*“, zda bude do portfolia přidáno bezrizikové aktivum, nebo různé kombinace jednotlivých podmínek [7, str. 99].

V následující úloze, kde se hledají optimální váhy \mathbf{w}_{opt} portfolia je předpoklad, že se bude investovat pouze do rizikových aktiv (není zahrnuté bezrizikové aktivum) a je zakázán tzv. „*sell short*“:

Úloha 2. Úloha je definována tak, že při známé kovarianční matici $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vektoru očekávaných výnosností $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^n$ a minimálnímu přijatelnému výnosu $R_{min} \in \mathbb{R}$ hledáme vektor $\mathbf{w}_{opt} \in \mathbb{R}^n$ takový, že funkce

$$\sigma_p(\mathbf{w}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i C_{ij} w_j} = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.16)$$

nabývá svého minima v bodě \mathbf{w}_{opt} za podmínek

$$R_p(\mathbf{w}) = \mathbf{R}^T \mathbf{w} \geq R_{min}, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \quad \text{a} \quad \mathbf{w} \succeq \mathbf{0}. \quad (1.17)$$

Postup řešení je k nalezení v [1, str. 155].

Tato úloha klade požadavek na určitou minimální výši očekávaného výnosu portfolia R_p , a zároveň dochází k minimalizování rizika portfolia σ_p , neboli volba optimálního portfolia \mathbf{w}_{opt} zahrnuje kompromis mezi rizikem a očekávaným výnosem [1, str. 155].

Pomocí účelové funkce (1.16) dochází k minimalizaci rizika změny výnosu za danou dobu. První omezující podmínka v (1.17) má zaručit dosažení alespoň minimálního výnosu, který je přijatelný pro dané portfolio. Druhá podmínka v (1.17) zajišťuje využití celého rozpočtu, který investor poskytne pro tento účel, neboli součet relativních podílů je roven jedné. Třetí nerovnost říká, že je zakázán tzv. „*sell short*“, jestliže by byl povolen, potom by tato podmínka byla vynechána [1, str. 155].

Výpočet v Úloze 2 je proveden pomocí kvadratické optimalizace [1, str. 152], která má následující tvar:

Definice 1. Necht' jsou dány vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ a matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a symetrická matice $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Úlohou kvadratické optimalizace se rozumí úloha, kde se hledá vektor $\mathbf{w}_{opt} \in \mathbb{R}^n$ takový, že funkce

$$f(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{w} + \mathbf{c}^T \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.18)$$

nabývá svého minima v bodě \mathbf{w}_{opt} za podmínek

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{b} \quad \text{a} \quad \mathbf{G} \mathbf{w} \succeq \mathbf{h}. \quad (1.19)$$

Přípustná množina je určena lineárními podmínkami a účelová funkce v (1.18) je kvadratická [1, str. 152].

V Úloze 2 je vektor \mathbf{c} nulový, matice \mathbf{D} je nahrazena kovarianční maticí $2\mathbf{C}$. V rovnostní podmínce v (1.19) je matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tvořena vektorem samých jedniček a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$ je tvořen jedničkou, v nerovnostní podmínce je matice $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$ jednotková matice až do řádku n , v řádku $n+1$ jsou poté očekávané výnosy a vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n+1}$ je nulový a v posledním řádku je minimální očekávaný výnos R_{min} .

V následující variantě je do portfolia zahrnuto bezrizikové aktivum s nulovým rizikem a s kladnou výnosností R_f a je zakázán tzv. „sell short“, podrobnější popis je v kapitole 1.4, potažmo 1.5. Optimální váhy \mathbf{w}_{opt} portfolia jsou potom hledány následujícím způsobem:

Úloha 3. Úloha je definována tak, že při známé kovarianční matici $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vektoru očekávaných výnosností $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^n$ a výnosnosti bezrizikového aktiva $R_f > 0$ hledáme vektor $\mathbf{w}_{opt} \in \mathbb{R}^n$ takový, že funkce

$$\alpha(\mathbf{w}) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i R_i - R_f}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i C_{ij} w_j}} = \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{w} - R_f}{\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w}}}, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.20)$$

nabývá svého maxima v bodě \mathbf{w}_{opt} za podmínek

$$\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \quad \text{a} \quad \mathbf{w} \succeq \mathbf{0}. \quad (1.21)$$

Bude-li povolen tzv. „sell short“, potom nebude zahrnuta druhá podmínka v podmínkách (1.21) [7, str. 100].

V dalším postupu bude pro získání optimálního vektoru vah \mathbf{w}_{opt} využita Úloha 3 a dojde k přeformulaci, kdy úloha bude řešena jako konvexní kvadratické programování. Tato optimalizace má smysl jen tehdy, pokud

$$\mathbf{R}^T \mathbf{w} - R_f > 0,$$

jinak by byl výnos záporný a nikdo by nechtěl držet riziková aktiva.

Úloha 4. [4, str. 159] Úloha je definována tak, že při známé kovarianční matici $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vektoru očekávaných výnosností $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^n$ a výnosnosti bezrizikového aktiva $R_f > 0$ hledáme vektor $\mathbf{w}'_{opt} \in \mathbb{R}^n$ takový, že funkce

$$\sigma_p(\mathbf{w}') = \mathbf{w}'^T \mathbf{C} \mathbf{w}', \quad \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^n, \quad (1.22)$$

nabývá svého minima v bodě \mathbf{w}'_{opt} za podmínek

$$\mathbf{R}^T \mathbf{w}' - R_f \mathbf{1}^T \mathbf{w}' = 1, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w}' = q, \quad \mathbf{w}' \succeq \mathbf{0} \quad \text{a} \quad q \geq 0. \quad (1.23)$$

Parametr $q \geq 0$ je v dalším postupu volen jedna, protože potom tato podmínka zajišťuje využití celého rozpočtu.

V účelové funkci (1.18) je nahrazena matice \mathbf{D} kovarianční maticí $2\mathbf{C}$, vektor \mathbf{c} je zde nulový. V rovnostní podmínce (1.19) je matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ tvořena dvěma sloupci, kdy první sloupec tvoří rozdíl $\mathbf{R} - R_f \mathbf{1}$ a druhý sloupec je sloupec samých jedniček a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$ je tvořen dvěma jedničkami. V nerovnostní podmínce je matice $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jednotková matice a vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ je nulový.

Optimální váhy jsou vypočteny pomocí vzorce:

$$\mathbf{w}_{opt} = \frac{\mathbf{w}'_{opt}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{w}'_{opt}}. \quad (1.24)$$

Kapitola 2

Teorie náhodných matic

Pro využití vlastních čísel kovarianční matice \mathbf{C} v dalším postupu je důležité zaměřit se na rozdělení vlastních čísel kovarianční matice. K tomuto bude využito Marčenkovo - Pasturovo rozdělení, více informací je k nalezení v [13].

2.1 Teorie náhodných matic

Rozptyl náhodné veličiny X_p je ve tvaru $D(X_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot cov(X_i, X_j) \cdot w_j$,

alternativně ho lze i psát ve tvaru $D(X_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \sigma_i Z_{ij} \sigma_j w_j$, kde Z_{ij} je korelační matice.

Pro množinu n aktiv obsahuje korelační matice $\frac{n(n-1)}{2}$ prvků, které musí být stanoveny z n časových řad délky T . Pokud T není ve srovnání s n příliš odlišné, lze předpokládat, že odhad kovariance je velmi různý, a proto je empirická korelační funkce do značné míry náhodná. Díky tomu, že kovarianční matice je pozitivně definitní, lze tuto matici popisovat pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů. Vlastní čísla matice, která jsou nízká (dokonce až nulová), odpovídají portfoliu akcií, které mají nenulovou výnosnost a extrémně nízkou rizikovitost. Tato portfolia jsou spojena s chybami odhadu vyplývajícími z nedostatečného množství dat. Jedním z přístupů odstranění malých vlastních čísel je metoda náhodných matic.

Spektrální vlastnosti matice \mathbf{Z} mohou být porovnávány s náhodnou korelační maticí.

Věta 1. Necht \mathbf{X} je $T \times n$ matice, kde jejími prvky jsou i.i.d náhodné veličiny s nulovým průměrem a konečným rozptylem σ^2 a necht \mathbf{R} je matice, která je definovaná následujícím způsobem

$$\mathbf{R} = \frac{1}{T} \mathbf{X}^T \mathbf{X},$$

potom v limitě $T, n \rightarrow \infty$ platí poměr $Q = T/n \geq 1$ a hustota vlastních čísel matice \mathbf{R} je

$$P(\lambda) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_{max} - \lambda)(\lambda - \lambda_{min})}}{\lambda}, \quad \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}, \quad (2.1)$$

kde maximální a minimální vlastní číslo má hodnotu

$$\lambda_{max/min} = \sigma^2 \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{Q}} \right)^2. \quad (2.2)$$

Rozdělení $P(\lambda)$ se potom značí jako Marčenkovo-Pasturovo hustota a teoretické hodnoty maximálního a minimálního čísla určují hranice pro náhodnou matici. Pokud jsou vlastní čísla matice mimo tyto hranice, potom se vlastní čísla odchyľují od náhodných [13].

2.2 Empirická korelace

V praktických aplikacích teoretická očekávaná hodnota R_i , potažmo kovarianční matice C_{ij} jsou neznámé a jsou odhadovány z realizací i -tého aktiva v čase t , kde $t = 1, \dots, T$, viz podkapitola 1.1.1. Předpokladem realizací, které jsou označeny $\bar{r}_{i,t}$, je že budou centrovány a standartizovány. Normalizovaná matice výnosů $T \times n$ bude značena \mathbf{X} : $X_{i,t} = \frac{\bar{r}_{i,t}}{\sqrt{T}}$. Jednoduchá cesta jak charakterizovat korelaci mezi aktivy je využít Pearsonův odhad korelační matice, kdy lze psát $\mathbf{E} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$, kde \mathbf{E} označuje empirickou korelační matici. Je zapotřebí pečlivě rozlišovat korelační matici \mathbf{Z} statistického modelu a odhadnutou korelační matici na základě dat. Hlavní myšlenkou Marčenkovo-Pasturovo výsledků je charakteristika rozdílů mezi korelační maticí \mathbf{Z} a empirickou korelační maticí \mathbf{E} [13].

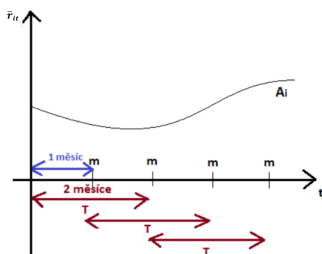
Kapitola 3

Metody stabilizace odhadu kovarianční matice

3.1 Metoda stabilizace na základě odhadů matic z různých časových intervalů T

Hlavní metodou pro zjišťování stability kovariančních matic je zvolení různých časových intervalů T , ze kterých jsou vypočteny nejdříve relativní přírůstky $\bar{r}_{i,t}$, potažmo odhady výnosností $R_{i,t}(T)$, rizikovostí $\sigma_{i,t}(T)$ a kovarianční matice \mathbf{C} .

Pro stabilizaci odhadnutých kovariančních matic je potřebné nejdříve zafixovat počet dní $m > 0$, po jejichž uplynutí investor aktualizuje své portfolio, a také je potřebné určit časový interval $T > 0$, neboli počet hodnot (k - denních výnosností), ze kterých bude portfolio sestaveno, např. může být zvoleno měsíční portfolio ($m = 21$ dní) tvořené pomocí měsíčních dat ($T = 21$ dní), dvouměsíčních dat ($T = 42$ dní), tříměsíčních dat ($T = 63$ dní) nebo ročních dat ($T = 252$ dní). Na obr. 3.1 je zobrazena varianta, kdy je doba portfolio zvolena na 2 měsíce ($T = 42$ dní) a je brána klouzavě po měsících ($m = 21$ dní), neboli je zvoleno měsíční portfolio na dvouměsíčních datech.



Obrázek 3.1: Ukázka volby měsíčního portfolio na dvouměsíčních datech

Následně jsou vypočteny relativní přírůstky $\bar{r}_{i,t}$, a poté dochází k odhadnutí jednotlivých kovariančních matic \mathbf{C} . Zjišťování, zda jsou matice stabilní lze např. pomocí rozdílů maximálního a minimálního vlastního čísla jednotlivých matic a dalším ukazatelem je hledání „pro praxi“ nejlepší délky historie, která investorovi zajistí nejlepší výnos z investice. Dochází také k porovnávání hodnot jednotlivých tržních kapitalizací, a také výsledných absolutních hodnot změn počtu akcií jednotlivých společností, které jsou vypočteny při aktualizacích portfolií (výsledná hodnota je zjištěna rozdílem počtu akcií, kdy investor musel při aktualizaci portfolia prodat staré akcie a následně podle aktualizovaného portfolia koupit nové).

3.2 Metoda stabilizace na základě průměrování kovariančních matic

Pro průměrování kovariančních matic $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots$, které lze odvodit pomocí vzorce (1.5), bude využít výběrový průměr, kdy jsou postupně průměrovány jednotlivé prvky kovarianční matice, které jsou na stejných pozicích zvolených matic. Využití výběrového průměru je za předpokladu, že mají kovarianční matice stejnou dimenzi ($n \times n$).

Tento postup a vytvoření nové kovarianční matice $\bar{\mathbf{C}}$ lze provést, protože původní kovarianční matice jsou pozitivně definitní, a tím je tedy pozitivně definitní i nová zprůměrovaná kovarianční matice (operace sčítání a násobení kladnou konstantou zachovávají pozitivní definitnost) [11, str. 119].

Kapitola 4

Ověřování stability na simulovaných datech

4.1 Obecná teorie pro simulaci dat

Nejprve dochází k simulaci dat, kdy je pro modelování cen akcie P_t , $t \geq 0$ ve spojitém čase nejčastěji využíván exponenciální Wienerův proces (geometrický Browneův pohyb), který je definován jako Itoův proces ve tvaru

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dW_t \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

kde je

μ drift,

σ difuze,

P_t cena akcie a

W_t Wienerův proces.

Diskretizovaný zápis je poté ve tvaru

$$P_{t+\Delta t} = P_t + P_t \mu \Delta t + P_t \sigma \Delta W_t = P_t (1 + \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}), \quad (4.2)$$

kde je

P_t cena akcie v čase $t \geq 0$,

Δt zvolená perioda (např. 250 obchodních dní),

μ drift,

σ difuze a

ϵ náhodná složka ($\epsilon \sim N(0, 1)$) [3, str. 473].

Rovnice v (4.2) naznačuje, že dochází k modelování výnosů daného aktiva pomocí (deterministické) driftové složky $\mu \Delta t$ a (náhodné) difuzní složky $\sigma \Delta W_t \sim N(0, \epsilon^2 \Delta t)$.

Využití mají v praxi spíše až logaritmické ceny ve tvaru $p_t = \ln P_t$, neboť pak logaritmická míra zisku neboli relativní přírůstky jsou ve tvaru

$$\bar{R}_t = \ln(1 + \bar{r}_t) = \ln P_t - \ln P_{t-1} = p_t - p_{t-1}. \quad (4.3)$$

Následně po provedení logaritmické transformace pomocí Itoova lemmatu, kdy

$$\frac{\partial \ln P_t}{\partial P_t} = \frac{1}{P_t}, \quad \frac{\partial^2 \ln P_t}{\partial P_t^2} = -\frac{1}{P_t^2}, \quad \frac{\partial \ln P_t}{\partial t} = 0, \quad (4.4)$$

vznikne rovnice ve tvaru

$$dp_t = d \ln P_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0. \quad (4.5)$$

Tato diferenciální rovnice se poté vyřeší pomocí integrování (náhodný integrál) a řešení je ve tvaru

$$p_t = p_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t, \quad t \geq 0. \quad (4.6)$$

Po odlogaritmování pro původní cenu P_t platí

$$P_t = P_0 e^{((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)}, \quad t \geq 0. \quad (4.7)$$

4.2 Simulace dat

Pro simulace byl využit model odvozený v podkapitole 4.1 a byly zvoleny následující hodnoty parametrů:

$n = 50$ počet akcií,

délka simulačního procesu = 3 019,

$\Delta t = \frac{1}{250}$ jedna perioda,

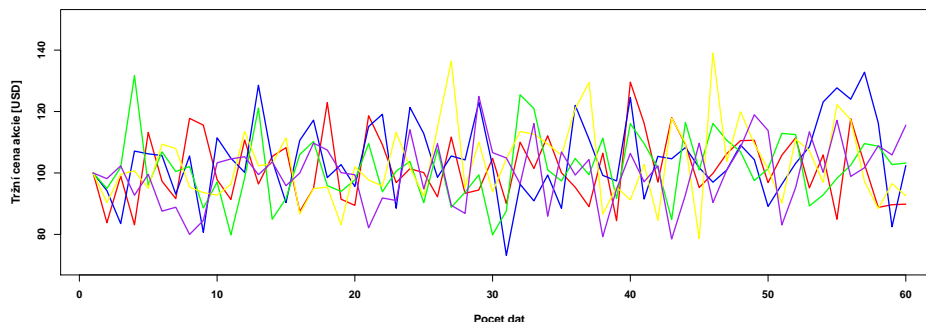
$P_0 = 100$ USD počáteční cena,

$\mu = 3$ % drift,

$\sigma = 12$ % volatilita a

$\epsilon \sim N(0,1)$ náhodná veličina.

Na obr. 4.1 je pro lepší ilustraci vykreslen průběh prvních pěti realizací a délka simulačního procesu je zvolena na 60 hodnot, postup simulace je k nalezení v souboru *simulace_dat.R* v příloženém DVD.



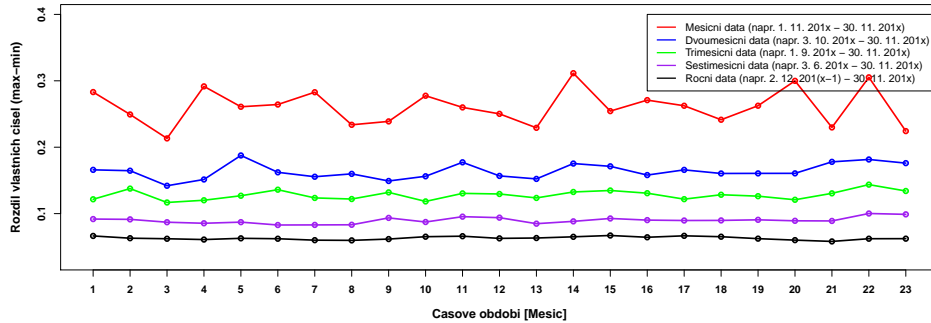
Obrázek 4.1: Ukázka nasimulovaných dat

4.3 Metoda stabilizace na základě odhadů kovariančních matic $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ z různých časových intervalů T

Pro odhady jednotlivých kovariančních matic $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je zapotřebí nejdříve určit časové intervaly, podle kterých budou počítány relativní přírůstky $\bar{R}_{i,t}$, potažmo odhady výnosností $R_{i,t}(T)$. Doba, za jak dlouho se bude portfolio aktualizovat, bude zvolena na jeden měsíc (tedy 21 pracovních dní, $m = 21$ dní) po dobu 2 let (24 měsíců, první měsíc nákup akcií, poslední měsíc prodej všech akcií). Počet hodnot T , ze kterých bude portfolio sestaveno, je voleno 5 variantami, a to měsíčně ($T = 21$ dní), dvouměsíčně ($T = 42$ dní), tříměsíčně ($T = 63$ dní), půlročně ($T = 126$ dní) a ročně ($T = 252$ dní).

4.3.1 Metoda pro zjišťování stability kovariančních matic \mathbf{C} pomocí vlastních čísel kovariančních matic

Pro charakterizaci a zjišťování stability kovarianční matice budou využity její vlastní čísla. Vlastní čísla lze brát z důvodu toho, že kovarianční matice je pozitivně definitní, vlastní čísla jsou tedy reálná kladná čísla, a také je známo rozdělení vlastních čísel, viz kapitola 2. Vlastní čísla jsou tedy dána v nějakém rozmezí, proto se lze obracet pouze na maximální a minimální vlastní číslo. Z rozdílu těchto dvou čísel jednotlivých kovariančních matic se bude sledovat, zda jsou u kovariančních matic patrné změny. Na obr. 4.2 je viditelné, že největší rozdíly a kolísání je u investice s nejkratším časovým intervalem $T = 21$ dní. Naopak největší stabilitu vykazuje nejdelší časový interval $T = 252$ dní.



Obrázek 4.2: Hodnoty rozdílů max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice v dané investici

Tento fakt je potvrzen i v tab. 4.1, kdy je patrné, že čím větší je počet dní v portfoliu T , tím více klesá průměr rozdílů maximálních a minimálních vlastních čísel v dané investici.

Časové období	Průměr (max. - min.)
1 měsíc	0,26075
2 měsíce	0,16385
3 měsíce	0,12794
6 měsíců	0,08981
12 měsíců	0,06302

Tabulka 4.1: Průměrná hodnota rozdílů max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice v investici

4.3.2 Metoda pro nalezení nejlepší délky časového intervalu T pomocí optimálních portfolií

Tato metoda je zaměřena na zjištění, který časový horizont T by měl být využit tak, aby investor dosáhl co nejvyššího výnosu. Dochází k využití vah jednotlivých optimálních portfolií získaných optimalizací pomocí relativních přírůstků $\bar{R}_{i,t}$ a kovariančních matic $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pro výpočet relativních přírůstků $\bar{R}_{i,t}$ je zvoleno zpoždění $k = 1$ (výpočet jednodenního výnosu). Pro další zpracování byla využita tvorba portfolia podle Markowitzova modelu a v souboru *stabilizace_opt_port_sim.R* je pro tento model brána funkce *solve.QP()*, podle které se budou hledat optimální váhy \mathbf{w}_{opt} jednotlivých portfolií. Optimální váhy portfolia jsou hledány totožně, jako je uvedeno v Úloze 3 v kapitole 1.7, je tedy využita bezriziková úroková míra R_f , kdy odhad je volen pomocí ročních výnosů amerických státních pokladničních poukázek [15].

Denní výnosnost R_f je vypočtena podle vzorce:

$$R_f = \sqrt[365]{1+i} - 1, \quad (4.8)$$

kde i je odpovídající roční výnosnost, jednotlivé hodnoty jsou k nalezení v tab. 4.2.

Rok	Roční výnosnost p.a.	Denní výnosnost Rf		Rok	Roční výnosnost p. a.	Denní výnosnost Rf
2018	2,25%	0,0061%		2012	0,13%	0,0004%
2017	1,17%	0,0032%		2011	0,17%	0,0005%
2016	0,60%	0,0016%		2010	0,17%	0,0005%
2015	0,30%	0,0008%		2009	0,45%	0,0012%
2014	0,11%	0,0003%		2008	1,63%	0,0044%
2013	0,13%	0,0004%		2007	4,71%	0,0126%

Tabulka 4.2: Bezriziková úroková sazba R_f v jednotlivých letech

Dále platí podmínka zákazu „*sell short*“ a součet vah je roven jedné. Výsledné optimální váhy, očekávané výnosnosti a rizikovosti jednotlivých portfolií jsou k nalezení v příloženém DVD. Na ukázkou jsou v Příloze A, v tab. A.2 a A.3 vypsány jednotlivé hodnoty R_p a σ_p v průběhu deseti dvouletých investic při zvoleném časovém intervalu $T = 21$ dní.

Pomocí získaných optimálních vah dochází k investici do jednotlivých akciových společností.

Vyčíslení celkových hodnot jednotlivých portfolií ve zvoleném časovém horizontu:

Celková hodnota prvního portfolia byla vypočtena pomocí následujících kroků:

1. zvolení počáteční hodnoty peněžních prostředků ve výši 1 000 000 USD,
2. rozdělení peněžních prostředků pomocí odpovídajících vah mezi jednotlivých 50 společností, v této chvíli dochází k zohlednění poplatků za nákup akcií, aby nedošlo k přesažení původního rozpočtu (k rozdělení se bere odpovídající nižší částka než je původní rozpočet),
3. přepočet na konkrétní počty kusů jednotlivých akcií, neboli podíl rozdělených prostředků z bodu 2 a hodnot uzavíracích cen (Close) k příslušnému dni počátku investice (první den následujícího měsíce), počty akcií zaokrouhleny na celá čísla (kusy),
4. vypočtení konkrétních poplatků podle objemu realizovaného obchodu (výše poplatků bude popsána níže) a

5. výpočet celkové hodnoty portfolia (celkové vynaložené prostředky na nákup akcií) je pomocí součtu poplatků z bodu 4 a skutečných výdajů vypočtených součinem počtu kusů a uzavírací ceny k počátku investice.

Aktualizace vstupů byla zvolena vždy po měsíci (21 pracovních dní) po dobu 2 let, po uplynutí doby dochází k překoupení akcií a celková hodnota aktualizovaných portfolií je vypočtena následujícím způsobem:

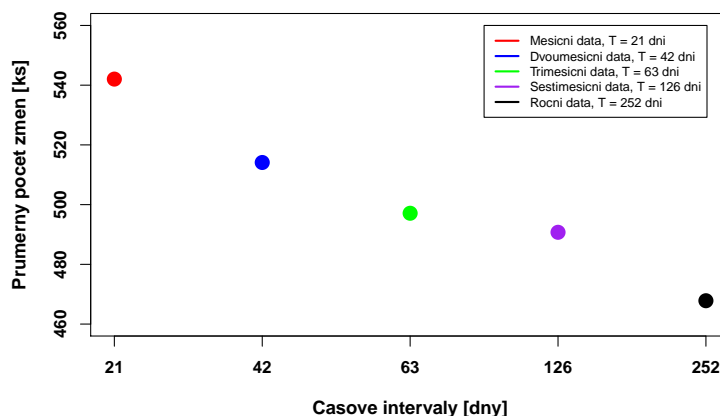
1. výpočet nových peněžních prostředků pomocí součinu počtu kusů akcií vypočtených k předešlému měsíci (počty z předešlého bodu 3) a uzavírací ceny akcie k příslušnému dni počátku aktualizované investice,
2. rozdělení peněžních prostředků z bodu 1 pomocí nových optimálních vah mezi jednotlivé společnosti,
3. přepočtení na konkrétní počty kusů akcií,
4. výpočet změny počtu akcií oproti předešlému portfoliu (jestliže je rozdíl kladný, potom se jedná o nákup akcií, naopak se jedná o prodej akcií),
5. objem z prodeje přebytečných akcií, vypočtený součinem odpovídajících cen a počtu akcií, je využit k vyčíslení odpovídajících poplatků z prodeje a následnému odečtení od celkového objemu z prodeje přebytečných akcií,
6. z dostupných prostředků z prodeje přebytečných akcií lze nakoupit nové akcie, které odpovídají vahám aktualizovaného portfolia a nepřevyšují dostupné prostředky z prodeje (i se zahrnutím poplatků za následný nákup nových akcií),
7. výpočet celkové hodnoty nového portfolia je potom dán součtem hodnoty prostředků akcií, které při aktualizaci zůstaly totožné a hodnoty prostředků za nákup akcií včetně poplatků a
8. nový počet akcií je dán součtem původních počtu kusů, které zůstaly při aktualizaci totožné a nových počtů kusů získaných při nákupu.

Aktualizace portfolia bude prováděna 22 krát (po dobu 2 let), v posledním měsíci dochází k prodeji všech akcií, celková hodnota portfolia je potom získána součinem počtu kusů akcií z předešlého měsíce a uzavírací ceny akcie k příslušnému dni prodeje, na závěr je hodnota snížena o odpovídající poplatky z prodeje.

Poplatky, které vznikají při transakcích jako je nákup a prodej akcií, budou v obou sadách dat počítány stejným způsobem.

V případě amerických akcií jsou při způsobu podání pokynu přes internet poplatky ve výši 14,9 USD, jestliže objem realizovaného obchodu nepřesáhl hodnotu 13 275 USD, naopak jestli objem realizovaného obchodu tuto částku přesáhl, potom jsou brány poplatky ve výši 4,90 USD + (0,10 % z objemu realizovaného obchodu). Další poplatek je při prodeji akcií, a to ve výši 0,00231 % z objemu každého prodeje. Posledním jednorázovým poplatkem je 10 USD za realizaci obchodu přes Internet, více informací k poplatkům je k nalezení v [12].

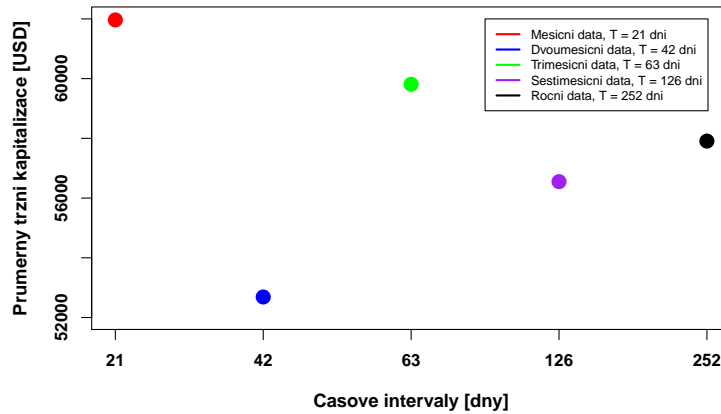
Z pozorovaných deseti dvouročných investic byl vypočten celkový průměr počtu změn akcií při jednotlivých aktualizacích portfolií v různých časových intervalech T , viz obr. 4.3. Hodnoty, ze kterých byl vypočten celkový průměr, jsou k nalezení v tab. B.1 v Příloze B.



Obrázek 4.3: Počet změn akcií - průměrně za 10 investic

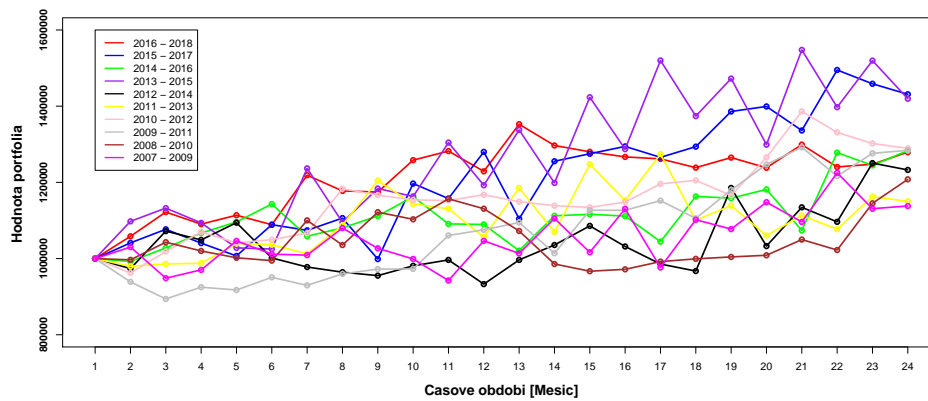
Čím delší je časový horizont, tím méně dochází ke změnám počtu kusů akcií při aktualizacích portfolií (investor drží více původní akcie). Průměrný počet změn akcií je u nasimulovaných dat a při takto zvolených poplatcích ve všech variantách průměrně stejný, liší se pouze v desítkách kusů akcií.

Vypočtena je také celková průměrná tržní kapitalizace pro jednotlivé časové intervaly, průměr je stejně jako v předešlém případě počítán z deseti sledovaných investic. I v tomto případě lze říci, že s rostoucím časovým horizontem T , klesá průměrná tržní kapitalizace. Hodnoty, ze kterých byl vypočten celkový průměr, jsou k nalezení v tab. B.2 v Příloze B.



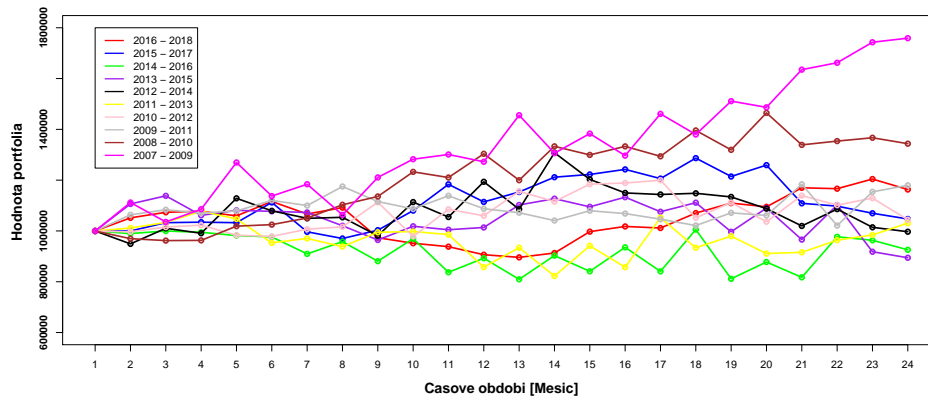
Obrázek 4.4: Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic

Na následujícím obr. 4.5 jsou zobrazeny celkové hodnoty portfolií v průběhu dvouletých investic, kdy časový interval je volen nejkratší možný. Jednotlivé průběhy investic mají vysokou variabilitu mezi jednotlivými sousedními měsíčními portfolii. Všechny investice končí při prodeji portfolia v kladných hodnotách.



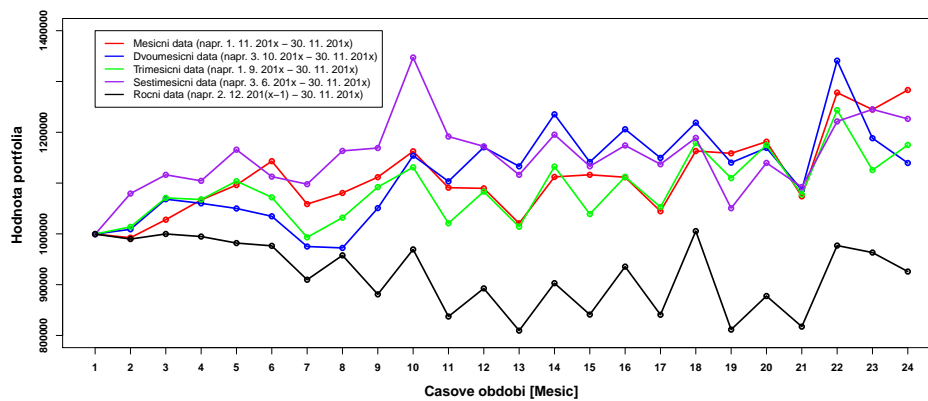
Obrázek 4.5: Hodnoty portfolií - dvouleté investice, $T = 21$ dní

Při zvolení nejdelšího časového horizontu $T = 252$ dní, ze kterého jsou měsíční portfolia počítána, mají průběhy investic také vysokou variabilitu, n rozdíl od předešlého grafu nelze říci, že by investice byly výnosné, protože většina z nich končí pod počáteční hodnotou 1 000 000 USD.



Obrázek 4.6: Hodnoty portfolií - dvouleté investice, $T = 252$ dní

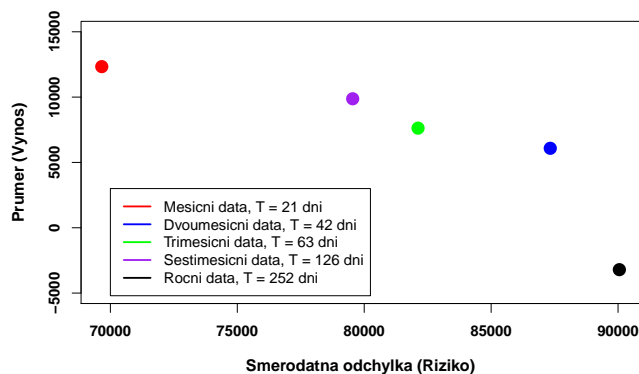
Na obr. 4.7 je zobrazena jedna investice (ostatní varianty jsou k nalezení v Příloze A, obr. A.1 - A.9) pro různé časové intervaly T , ze kterých jsou odhadnuty jednotlivé kovarianční matice. Z grafu je viditelné, že jestliže by se investor rozhodoval na konci dvouleté investice, potom by si vybral investici s nejkratším časovým horizontem $T = 21$ dní, naopak za nejhorší investici lze uvažovat tu, která má časový interval nejdelší.



Obrázek 4.7: Hodnoty portfolií při různých variantách T v jedné investici

Pro zjišťování nejlepší investice lze využít výnos, který bude brán jako rozdíl hodnot jednotlivých sousedních portfolií. V prostoru „*riziko - výnos*“ se budou zobrazovat výsledky, kdy „*riziko*“ bude bráno jako průměrná variabilita jednotlivých výnosů a bude vypočteno pomocí výběrové směrodatné odchylky, průměrný „*výnos*“ bude vypočten pomocí aritmetického průměru z jednotlivých výnosů.

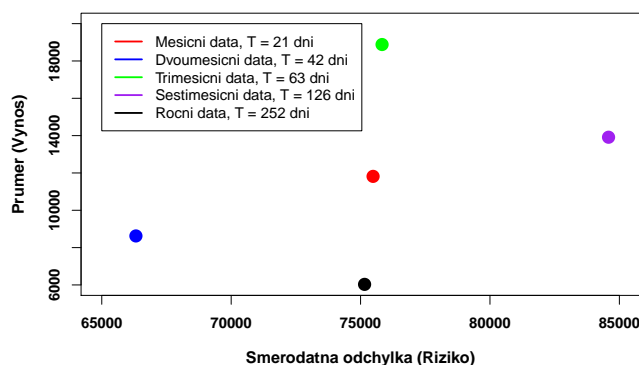
Dojde-li k zobrazení investice z obr. 4.7 v prostoru „riziko - výnos“, potom se lze ve výše zmíněné myšlence utvrdit, protože všechny možné varianty dominují variantu s nejdelším časovým horizontem ($T = 252$ dní).



Obrázek 4.8: Riziko - výnos - (různé varianty T v jedné investici)

Průběhy jednotlivých investic jsou velmi různé ve stejných časových intervalech (viz obr. 4.5 a 4.6), velká odlišnost je i jestliže se jedná o dvouroční investici v konkrétních letech při různých časových intervalech T .

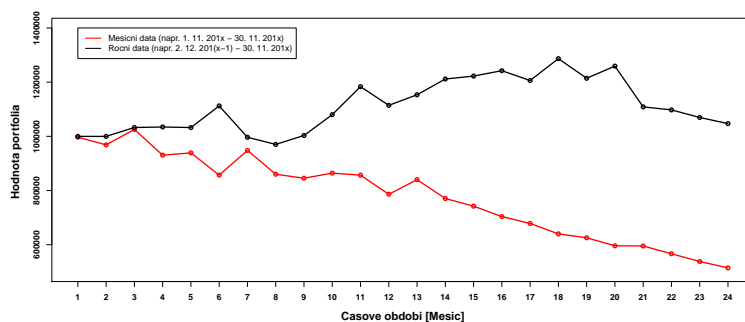
Pro objektivní pohled dochází ke zprůměrování výnosů a variabilit jednotlivých (deseti) investic v různých časových intervalech T , výsledek je znázorněn na následujícím obr. 4.9 a v tab. A.1 v Příloze A jsou k nalezení hodnoty, ze kterých došlo k vypočtení celkového průměru.



Obrázek 4.9: Riziko - výnos, průměrně za 10 investic

Z obrázku lze říci, že nelze dojít k jednoznačnému rozhodnutí, jaký časový interval by měl investor preferovat. Nejhůře dopadla varianta s nejdelším (ročním) časovým horizontem, která má při nejnižším výnosu i vysokou variabilitu, nízký výnos je patrný i u krátkého časového intervalu $T = 42$ dní. Nejlepší výsledek by patrně vykazovala varianta s tříměsíčním časovým intervalem (při největším výnosu má i relativně nízkou variabilitu).

Jestliže by teoreticky došlo ke zvýšení poplatků (např. ke zvýšení procenta z objemu realizovaného obchodu, a to z 0,10 % na alespoň 5 %), potom by se nejdelší časový horizont pro tvorbu kovarianční matice stal nejlepší volbou, viz obr. 4.10, počet průměrných změn při aktualizacích také rapidně klesne (dochází pouze k průměrným změnám 252 kusů akcií, o polovinu nižší než v předešlém sledování). Varianta s nejkratším časovým úsekem se začne jevit jako nejhorší.



Obrázek 4.10: Hodnota portfolií při $T = 21$ dní a $T = 252$ dní ve dvouleté investici

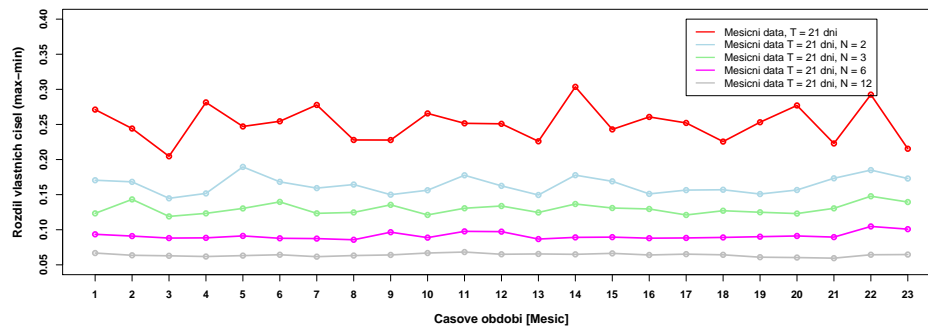
4.4 Metoda stabilizace na základě průměrování kovariančních matic $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

V této podkapitole budou kovarianční matice $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ odhadovány pomocí výběrového průměru ze zvoleného počtu kovariančních matic, metoda je popsána v kapitole 3.2 a naprogramována v souboru *stab_opt_port_pr_sim.R*. Zvolený počet matic, ze kterých se bude průměrovat, se bude odvíjet od toho, která varianta počtu dní T , ze kterého budou vypočítávány jednotlivé charakteristiky, se konkrétně bude analyzovat. Bude-li se např. zkoumat varianta dvouleté investice, kdy je časový interval zvolen na 2 měsíce ($T = 42$ dní), potom budou v této metodě odhadnuty nejdříve dvě kovarianční matice, které budou tvořeny odpovídajícím měsíčním počtem hodnot (21 dní) a následně dojde k jejich průměrování. Pro variantu $T = 63$ dní budou průměrovány 3 kovarianční matice odhaduté pomocí odpovídajících měsíčních

hodnot ($T = 126$ dní - 6 kovariančních matic, $T = 252$ dní - 12 kovariančních matic). Varianta, kdy je počet hodnot, ze kterých se odhaduje nejkratší ($T = 21$ dní), zůstává neměnná.

4.4.1 Metoda pro zjišťování stability kovariančních matic $\overline{\mathbf{C}}$ pomocí vlastních čísel kovariančních matic

Jestliže dochází k vykreslení rozdílů maximálních a minimálních vlastních čísel (obr. 4.11) jednotlivých průměrovaných matic (tvořené pomocí různých počtů matic), potom dochází ke zjištění, že čím je počet kovariančních matic, ze kterých se průměruje vyšší, tím menší jsou rozdíly mezi vlastními čísly a zprůměrovaná kovarianční matice $\overline{\mathbf{C}}$ je nejstabilnější.



Obrázek 4.11: Hodnoty rozdílů max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice

Potvrzeno je to i v tab. 4.3 ve čtvrtém sloupci, kde také s přibývajícím počtem matic klesá průměr rozdílů vlastních čísel zprůměrované kovarianční matice $\overline{\mathbf{C}}$. Druhý sloupec v tabulce obsahuje průměrné hodnoty rozdílů, kdy nedocházelo k průměrování a kovarianční matice byly tvořeny pomocí různých variant počtu dnů T .

Parametry	Průměr (max - min)	Parametry	Průměr (max - min)
1 měsíc, N = 1	0,26075	1 měsíc, N = 1	0,26075
2 měsíce, N = 1	0,16385	1 měsíc, N = 2	0,16425
3 měsíce, N = 1	0,12794	1 měsíc, N = 3	0,12972
6 měsíců, N = 1	0,08981	1 měsíc, N = 6	0,09132
12 měsíců, N = 1	0,06302	1 měsíc, N = 12	0,06400

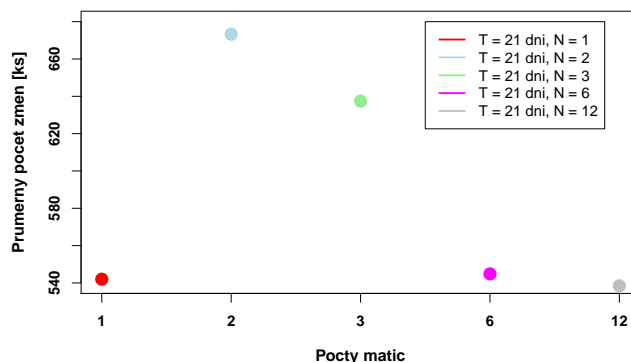
Tabulka 4.3: Průměrné hodnoty rozdílů max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice

Z tabulky je patrné, že v metodě průměrování kovariančních matic dochází jen k nepatrnému zhoršení, průměrných rozdílů vlastních čísel oproti první analyzované metodě.

4.4.2 Metoda pro nalezení nejlepší délky časového intervalu T pomocí optimálních portfolií

Pro zjišťování, která investice je nejlepší ve smyslu největšího výnosu, budou opět využity optimální váhy \mathbf{w}_{opt} , vypočtené pomocí metody, která je popsána v Úloze 3 v kapitole 1.7 (využití bezrizikové sazby R_f , hodnoty jsou k nalezení v tab. 4.2), využíváno je opět kvadratického programování (funkce *solve.QP*). Počet dní (doba trvání portfolia T), ze kterého bude portfolio tvořeno, je zvoleno na 1 měsíc ($T = 21$ dní), protože zprůměrované kovarianční matice jsou tvořeny výběrovými průměry z různého počtu matic, které jsou odhadnuté pomocí jednoho konkrétního měsíce. Aktualizace portfolia je také vždy po jednom měsíci ($m = 21$ dní). Poté, co dojde ke zjištění optimálních vah, dochází k tvorbě dvouletých investic (celý popis tvorby investice je v podkapitole 4.3.2). Výsledné optimální váhy, očekávané výnosnosti a rizikovosti jednotlivých portfolií jsou k nalezení v příloženém DVD. Na základě průběhů jednotlivých investic se investor bude rozhodovat, která z nich bude pro něj nejvýhodnější.

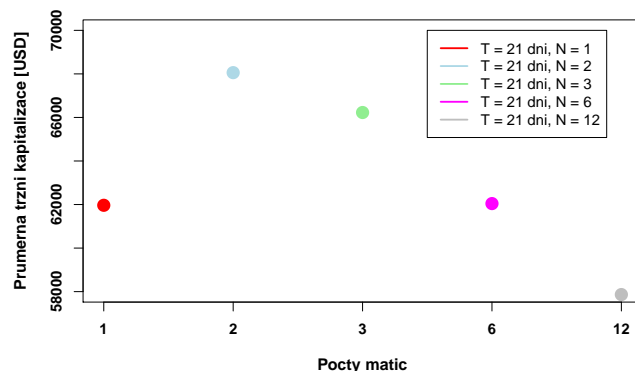
Nejdříve byly vypočteny průměrné počty změn při jednotlivých aktualizacích portfolií v dané dvouleté investici (jedná se o absolutní počty). Na obr. 4.12 je znázorněn celkový průměrný počet změn z deseti pozorovaných investic při různých variantách počtu průměrovaných matic. Hodnoty, ze kterých byl vypočten celkový průměr, jsou k nalezení v tab. B.1 v Příloze B.



Obrázek 4.12: Počet změn - průměrně za 10 investic

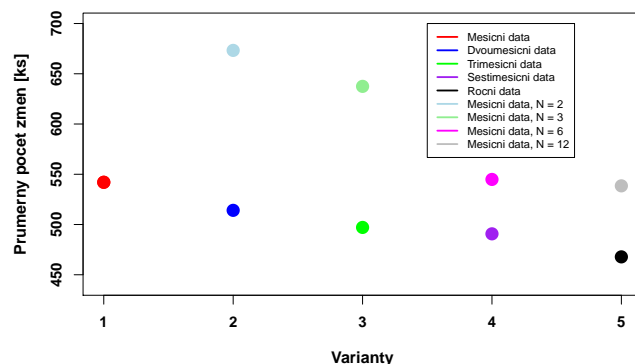
Z grafu je patrné, že varianta, kdy nedochází k průměrování kovariančních matic, má stejný (nejnižší počet změn) jako varianta s největším počtem průměrovaných matic (12 matic). Jestliže, ale dochází k průměrování za pomocí různého počtu matic, potom počet změn klesá s přibývajícím počtem matic.

Stejného výsledku je dosaženo, i když je počítána průměrná tržní kapitalizace, viz obr. 4.13. Hodnoty, ze kterých byl vypočten celkový průměr, jsou k nalezení v tab. B.2 v Příloze B.



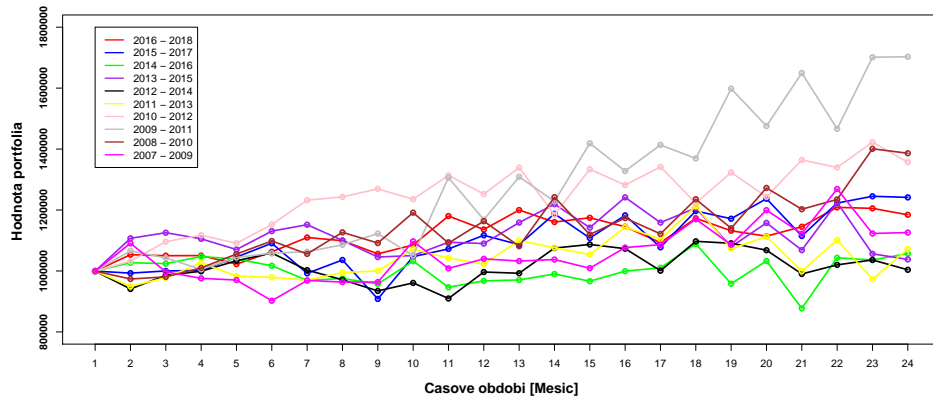
Obrázek 4.13: Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic

Na obr. 4.14 je vykresleno porovnání průměrných změn s metodou popsanou výše v podkapitole 4.3.2. Pomocí druhé metody dochází k růstu počtu změn akcií při aktualizacích portfolií. V obou variantách je s přibývajícím počtem dní T , potažmo s přibývajícím počtem matic patrný pokles. Průměrný počet změn ve všech variantách je dost nízký, proto v dalším postupu nebude na první pohled jednoznačné, podle které varianty by měl investor investovat. K potvrzení dochází, jestliže se porovnávají průměrné tržní kapitalizace, viz Příloha B, obr. B.1.



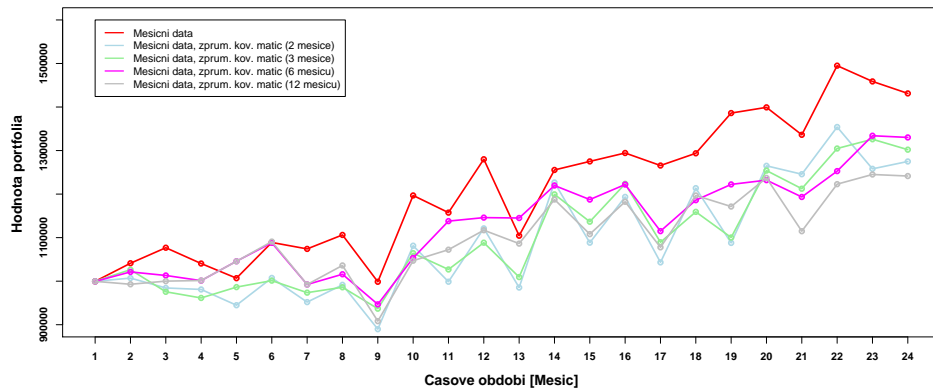
Obrázek 4.14: Počet změn - průměrně za 10 investic, 2 metody

Ilustrace průběhu deseti investic na dalším grafu (obr. 4.15) ukazuje jejich rozdílnost a hlavně vysokou variabilitu v průběhu daných dvouletých investic (varianty investic, kdy je průměrováno 12 matic).



Obrázek 4.15: Hodnoty portfolií - 12 investic, průměr z 12 matic

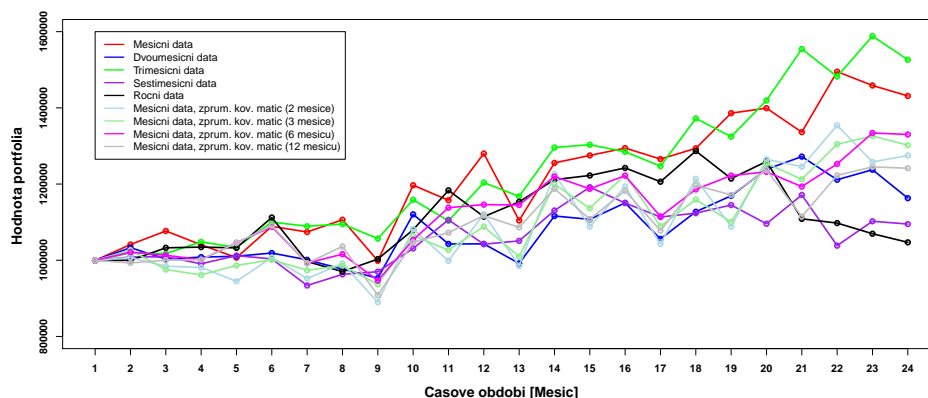
Na následujícím grafu je vykreslení průběhu jedné dvouroční investice při různých variantách počtu matic, ze kterých je tvořena výsledná kovarianční matice \mathbf{C} .



Obrázek 4.16: Hodnoty portfolií - 1 investice

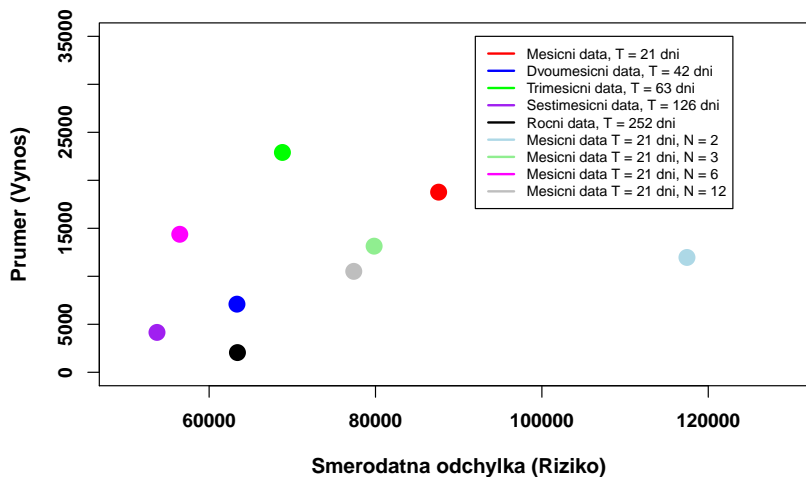
Největší odchylka je patrná u investice, kdy nedochází k průměrování matic. U variant, kde dochází k průměrování kovariančních matic, je průběh investice velmi podobný.

Jsou-li vykresleny průběhy obou metod jedné investice do jednoho grafu (obr. 4.15, ostatní varianty jsou k nalezení v Příloze B, obr. B.2 - B.9), potom dochází ke zjištění, že investice tvořené pomocí průměrování matic mají na konci investice vyšší výnos (jediná výjimka, kdy je výnos vyšší u první metody je u varianty, kdy časový interval na odhad matice je zvolen na 63 dní).



Obrázek 4.17: Hodnoty portfolií - 1 investice, obě metody

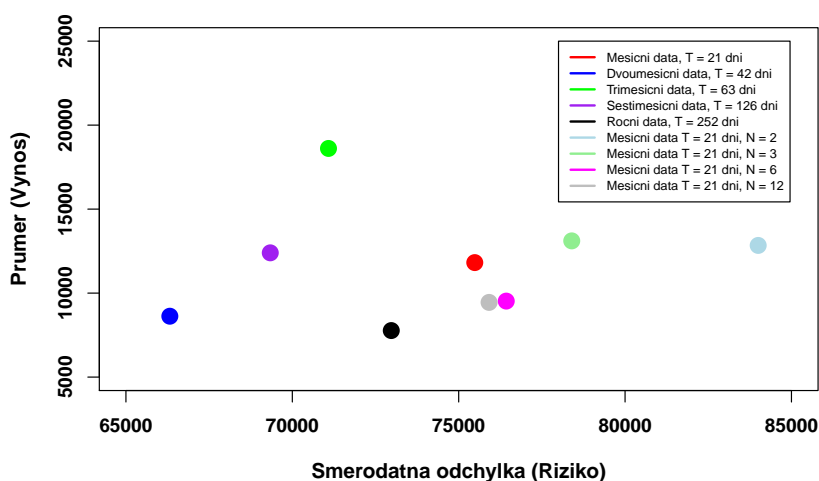
K potvrzení výše zmíněných faktů dochází v prostoru „riziko - výnos“.



Obrázek 4.18: Prostor „riziko - výnos“ - 1 investice, obě metody

Z obr. 4.18 je zjištěno, že metoda, kde je využito průměrování kovariančních matic, má v porovnání s první metodou ve všech variantách vyšší variabilitu.

Pro úplný objektivní pohled, protože každý průběh investice v různě zvolených variantách je rozdílný, dojde v prostoru „riziko - výnos“ k vykreslení zprůměrovaných výnosů a variabilit pro jednotlivé dvouleté investice, které jsou tvořené nejdříve pomocí první metody (kovarianční matice tvořená pomocí různě dlouhých časových intervalů T), následně i pomocí druhé metody (průměrování kovariančních matic, v tab. B.3 v Příloze B jsou k nalezení hodnoty, ze kterých došlo k vypočtení celkového průměru).



Obrázek 4.19: Prostor „riziko - výnos“ - všechny investice, obě metody

Graf zobrazuje, že druhá metoda v porovnání s první metodou má ve všech případech vyšší variabilitu. Jestliže se bude porovnávat výnos jednotlivých investic v obou metodách, pak dochází k nejednoznačnému výsledku, v každé variantě je výnos v porovnání obou metod různý. Kdyby mělo dojít k rozhodnutí investora, kterou metodu volit, došlo by k výběru první metody a nejpravděpodobněji k volbě varianty, kdy je kovarianční matice potažmo portfolio tvořeno pomocí 63 dní, protože tato varianta vykazuje nejvyšší výnos při relativně nízké variabilitě.

U takto nasimulovaných dat je objektivnost obou metod zkrácená, protože data jsou nasimulována náhodně, jsou tedy na sobě navzájem nezávislá a tedy nedochází ke zřetelnému vyhodnocení, kterou metodu vybrat, aby výnos z investice byl co nejvyšší.

Pro lepší porovnání a vyhodnocení jednotlivých metod budou v následující kapitole využita reálná data.

Kapitola 5

Ověřování stability na reálných datech

Reálná data, která budou využita pro testování a ověřování jednotlivých postupů, byla vybrána na amerických trzích NYSE (New York Stock Exchange) a NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automated Quotations) a stažena ze zdroje [14]. Z těchto dvou trhů bylo vybráno 50 společností (aktiv), která mají nejvyšší tržní kapitalizaci (např. byly vybrány společnosti *Amazon.com Inc.*, *Microsoft Corp.*, *Alphabet Inc.*, *Apple Inc.*, atd., celé pořadí je k nalezení v Příloze E, v tab. E.1 nebo v odkazu [10]). Využití amerických trhů je z důvodu velkého množství společností, které obchodují s cennými papíry (cenné papíry z BCPP nebyly využity z důvodu malého rozsahu výběru, které je pro toto testování nedostačující). Data byla stažena v rozsahu let 2006 - 2018 (přesný rozsah je 6. 11. 2006 - 1. 11. 2018). V souboru *stab_opt_port_real.R* dochází ke stažení výše zmíněných dat pomocí funkce *getSymbols()*, data jsou následně uložena v souborech *data_12.csv* a *datacl_12.csv*. Pro další využití bude brána tržní cena (Close), a také upravená uzavírací cena (Adjusted close), která je očištěná od dividend a možných štěpení akcií, úplný postup tvorby upravené uzavírací ceny je popsán v kapitole 1.1.1, a také v odkazu [9].

Při transakcích jako je nákup a prodej akcií jsou vždy placeny poplatky. Celý popis výpočtu poplatků je k nalezení v podkapitole 4.3.2 a podrobné informace jsou v odkazu [12].

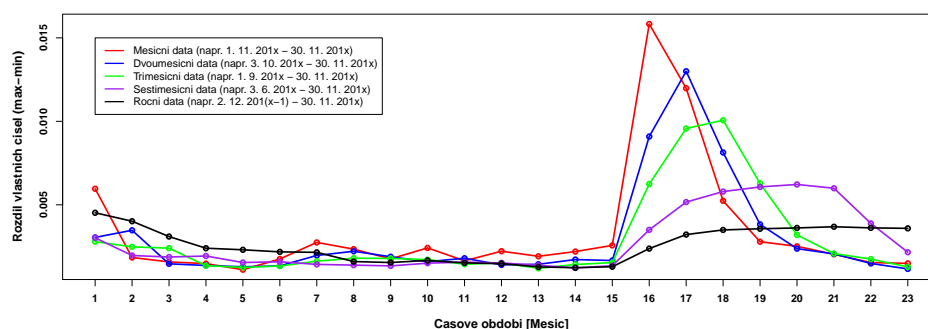
5.1 Metoda stabilizace na základě odhadů kovariančních matic $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ z různých časových intervalů T

Odhady kovariančních matic $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ budou tvořeny stejně jako u simulovaných dat v kapitole 4.3. Nejdříve je zapotřebí určit časové intervaly,

podle kterých budou vypočteny jednodenní ($k = 1$) relativní přírůstky $\bar{r}_{i,t}$, v tomto případě opět 5 variant ($T = 21$ dní, $T = 42$ dní, $T = 63$ dní, $T = 126$ dní a $T = 252$ dní), aktualizace portfolia je zvolena také po měsíci ($m = 21$ dní) po dobu 2 let (24 měsíců).

5.1.1 Metoda pro zjišťování stability kovariančních matic C pomocí vlastních čísel kovariančních matic

Zjištění, zda jsou kovarianční matice v různých časových intervalech T stejné (stabilní), lze zjišťovat z rozdílu maximálního a minimálního vlastního čísla kovariančních matic v průběhu dvouleté investice v letech 2016 - 2018.



Obrázek 5.1: Hodnoty rozdílů max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice v letech 2016 - 2018

Obr. 5.1 ilustruje, že čím je větší počet dní T v portfoliu, tím je rozdíl vlastních čísel nižší, to je potvrzeno i v tab. 5.1, kde také s přibývajícím počtem hodnot klesá průměr rozdílů vlastních čísel.

Časové období	Průměr (max. - min.)
1 měsíc	0,00335
2 měsíce	0,00299
3 měsíce	0,00288
6 měsíců	0,00276
12 měsíců	0,00259

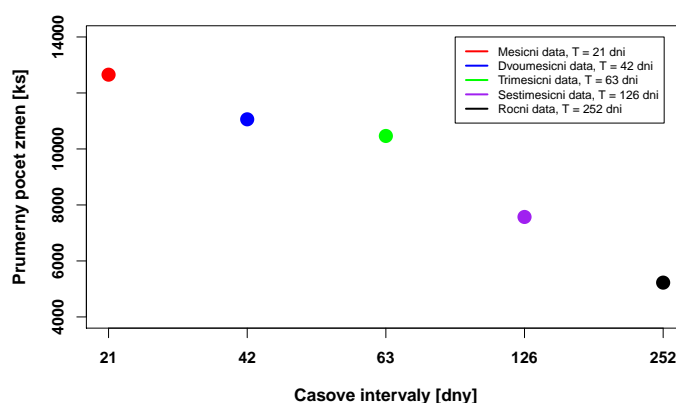
Tabulka 5.1: Průměrná hodnota rozdílů max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice v letech 2016 - 2018

Největší stabilitu tedy vykazují kovarianční matice, které jsou tvořené pomocí nejdelšího časového intervalu $T = 252$ dní.

5.1.2 Metoda pro nalezení nejlepší délky časového intervalu T pomocí optimálních portfolií

Zjišťování, která investice je pro investora nejvýhodnější ve smyslu nejvyššího výnosu, bude totožné jako v kapitole 4.3.2, kde tedy pomocí optimálních vah \mathbf{w}_{opt} se vytvoří portfolia, jejichž pomocí dochází k jednotlivým rozhodnutím investora. Výsledné optimální váhy, očekávané výnosnosti a rizikovosti jednotlivých portfolií jsou k nalezení v příloženém DVD. Na ukázkou jsou v Příloze C, v tab. C.1 a C.2 vypsány jednotlivé hodnoty R_p a σ_p v průběhu deseti dvouletých investic při zvoleném časovém intervalu $T = 21$ dní.

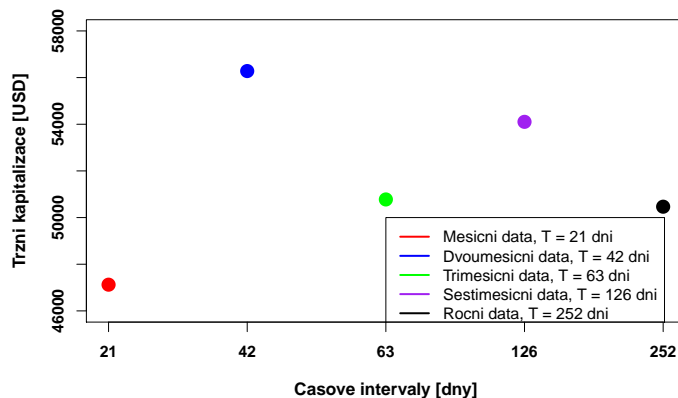
Graf na obr. 5.2 znázorňuje průměrný počet změn akcií při jednotlivých aktualizacích portfolií v dané dvouroční investici. Celkový průměr byl vypočten z 10 pozorovaných investic (dvouroční investice v rozsahu let 2007 - 2018), jedná se o absolutní počet změn akcií. Hodnoty, ze kterých byl vypočten celkový průměr, jsou k nalezení v tab. C.1 v Příloze C.



Obrázek 5.2: Počet změn akcií - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018)

Z grafu je patrné, že jestliže je počet dat, ze kterých je počítána kovarianční matice \mathbf{C} nízký, potom je absolutní počet změn akcií vysoký, investor ne-drží ve velké míře původní akcie v portfoliu. Čím delší je časový horizont T , tím méně dochází ke změnám (investor drží více původní počty akcií). Interval mezi dvěma a třema měsíci není velký, a proto i počet změn je v těchto variantách podobně vysoký.

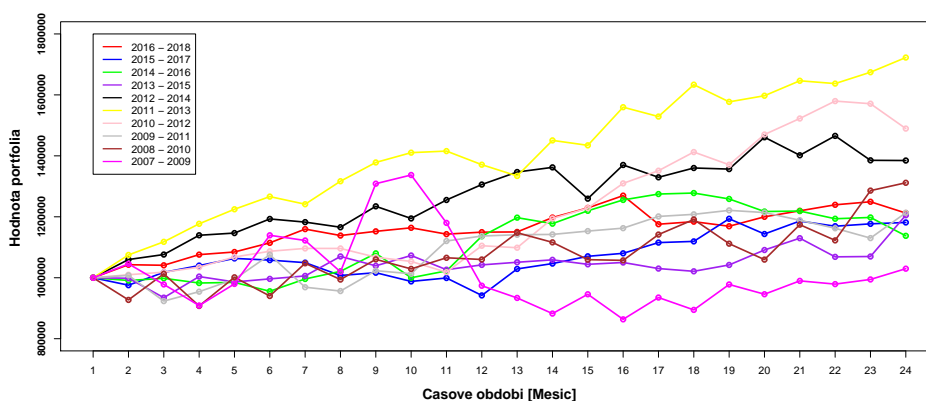
Průměrné počty změn nemají v tomto případě vysokou vypovídající hodnotu, protože reálné ceny jednotlivých akcií jsou různě vysoké. V tomto případě je lepší porovnávat tržní kapitalizaci.



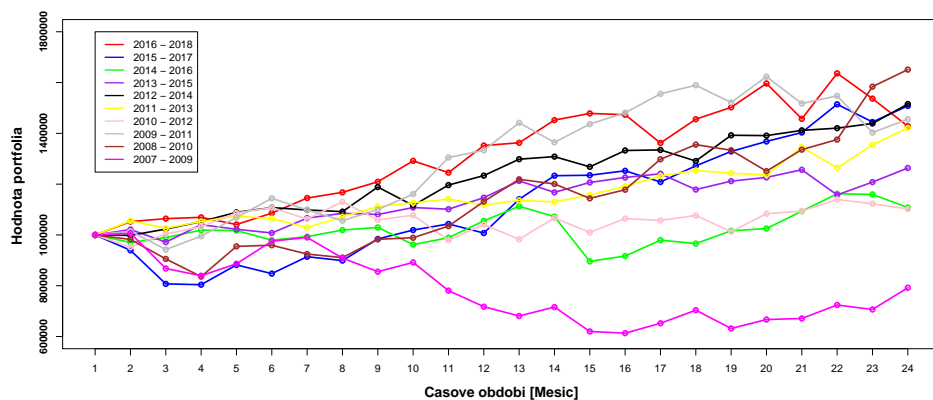
Obrázek 5.3: Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018)

Nejnižší průměrnou tržní kapitalizaci vykazuje varianta, kdy je časový interval nejkratší. Jestliže by docházelo k porovnání s předešlou variantou, kdy se analyzovaly počty změn akcií, potom lze říci, že i když je počet změn akcií nejvyšší, nemusí platit, že tržní kapitalizace bude také nejvyšší. Hodnoty, ze kterých byly vypočteny průměry jsou k nalezení v Příloze D, tab. D.2.

Na následujícím obr. 5.4 a obr. 5.5 jsou ilustrovány celkové hodnoty portfolií, kdy v prvním grafu byl počet dní T zvolen na 21, v druhém byl potom počet dní T zvolen na 252. Jednotlivé křivky zobrazují vždy průběh dvouroční investice v průběhu let 2007 - 2018.



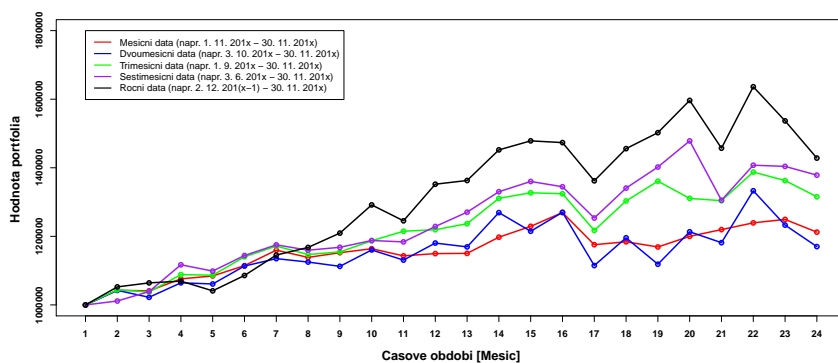
Obrázek 5.4: Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2018, $T = 21$ dní



Obrázek 5.5: Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2018, $T = 252$ dní

Z obou grafů jsou patrné velké rozdíly ve výnosech i variabilitě mezi jednotlivými portfolii v dané dvouleté investici. Mezi dvouletými investicemi jsou také obrovské rozdíly. Největší pokles celkových hodnot portfolií byl zaznamenán v letech 2007 - 2009, příčina poklesu byla způsobená tím, že byla registrována ekonomická krize. Hodnoty jednotlivých portfolií na konci investice (při prodeji portfolia), které jsou tvořeny pomocí 21 dní (viz obr. 5.4) dosahují ve většině případů nižších hodnot, než je tomu na obr. 5.5, tedy u portfolií, které jsou tvořené větším počtem dat $T = 252$ dní.

Na obr. 5.6 jsou znázorněny průběhy investic v letech 2016 - 2018 při různých časových intervalech T .

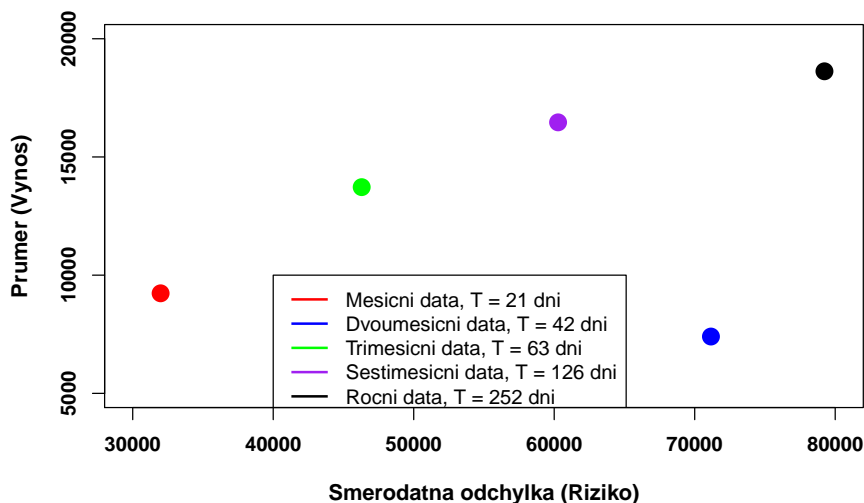


Obrázek 5.6: Hodnoty portfolií - roky 2016 - 2018

Při tomto průběhu by patrně pro investora bylo nejlepší investovat v nejdelším časovém horizontu ($T = 252$ dní), kdy hodnota peněžních prostředků při prodeji všech akcií bude nejvyšší. Portfolia, která jsou tvořena nejkratším časovým intervalem ($T = 21$ dní a $T = 42$ dní), mají patrně nejnižší variabilitu.

Pro zjišťování nejlepší investice bude stejně jako u simulovaných dat využít výnos, který bude brán jako rozdíl hodnot jednotlivých sousedních portfolií. Následně v prostoru „riziko - výnos“ se budou zobrazovat výsledky, kdy „riziko“ je bráno jako variabilita jednotlivých výnosů a bude vypočteno pomocí výběrové směrodatné odchylky, průměrný „výnos“ bude vypočten pomocí aritmetického průměru z jednotlivých výnosů.

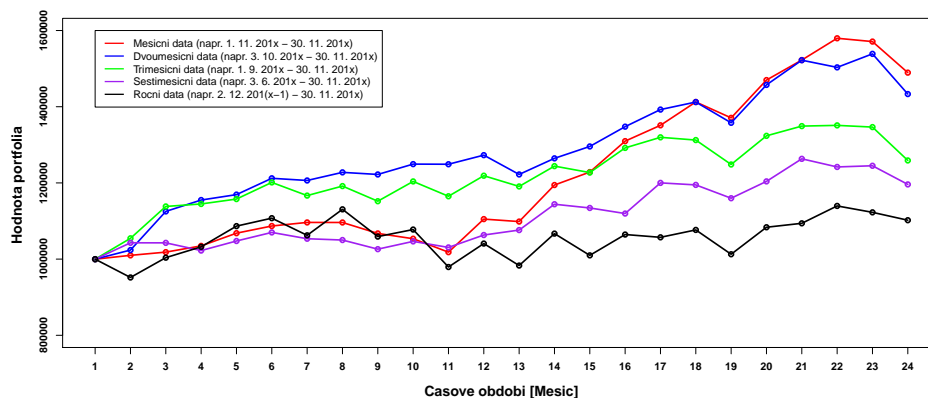
Z předchozího obrázku bylo vyhodnoceno, že nejvyšší výnos bude při nejdelším časovém intervalu a naopak, že nejnižší variabilitu budou mít portfolia tvořená nejkratším časovým intervalem. Toto vyhodnocení se potvrzuje i v prostoru „riziko - výnos“. V tomto případě závisí na investitorově preferencích, zda by si vybral investici s vysokým výnosem, ale i vysokým rizikem a nebo naopak by neriskoval a zvolil by nižší výnos při nízkém riziku.



Obrázek 5.7: Riziko - výnos - roky 2016 - 2018

Průběhy jednotlivých dvouročních investic jsou velmi odlišné ve stejném časovém intervalu T (viz obr. 5.4 a 5.5), od toho se odvíjí i velká odlišnost, jestli se jedná o dvouroční investici v konkrétních letech, v různých časových

intervalech T , např. investice v letech 2010 - 2012 značí, že po prodeji portfolia v posledním roce by bylo nejlepší brát investici při nejkratších časových horizontech ($T = 21$ dní a $T = 42$ dní), naopak při nejdelším časovém horizontu by na tom investor byl nejhůře (ostatní grafy dvouročních investic jsou k nalezení v Příloze C, obr. C.1 - C.8).



Obrázek 5.8: Hodnoty portfolií - roky 2010 - 2012

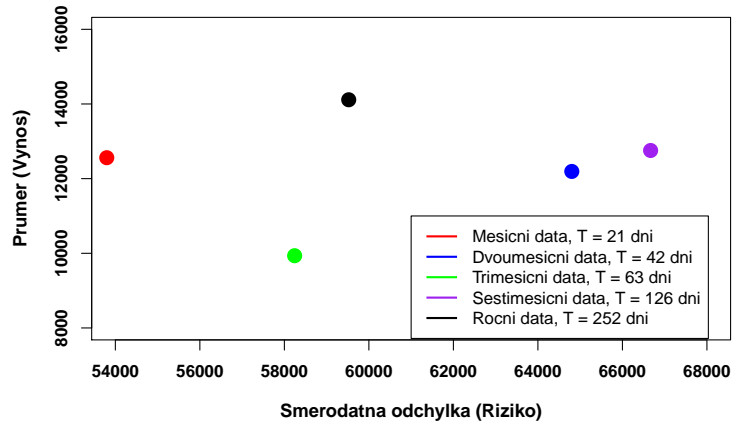
Pro zjištění objektivního pohledu došlo ke zprůměrování výnosů a variabilit pro jednotlivé dvouroční investice v různých časových úsecích, výsledek je znázorněn v tab. 5.2.

Roky	1 měsíc		2 měsíce		3 měsíce		6 měsíců		12 měsíců	
	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko
16 - 18	9 233	31 985	7 404	71 157	13 724	46 298	16 464	60 275	18 624	79 236
15 - 17	7 893	35 761	6 383	30 589	11 304	51 869	17 299	67 718	22 087	64 639
14 - 16	5 985	42 574	10 540	51 309	9 028	66 997	4 418	72 244	4 703	55 912
13 - 15	8 928	44 434	12 342	61 415	14 795	69 586	9 607	96 981	11 468	43 584
12 - 14	16 728	55 876	26 026	80 965	19 162	60 556	24 779	51 343	22 413	44 295
11 - 13	31424	51 364	25 573	71 864	14635	49 920	21 241	47 411	18 307	41 976
10 - 12	21 289	46 800	18 843	44 559	11 267	46 102	8 534	33 996	4 447	53 691
09 - 11	9 276	49 270	17 798	82 833	14 015	53 704	9 519	71 905	19 804	74 930
08 - 10	13 554	75 939	11 449	76 824	8 176	78 704	14 782	85 724	28 311	73 505
07 - 09	1 299	103 966	-14 427	74 507	-16 751	58 611	902	79 075	-9 032	63 462
Průměr	12 561	53 798	12 193	64 802	9 935	58 243	12 754	66 667	14 113	59 523

Tabulka 5.2: Sledované charakteristiky [USD] - průměr z 10 investic

Tyto průměrné hodnoty jsou vykresleny na obr. 5.9 v prostoru „riziko - výnos“ a dochází k potvrzení faktů, které byly zmíněny výše, a to že při takto zvolených poplatcích je nejvyšší průměrný výnos zaznamenán u varianty s volbou největšího počtu dat ($T = 252$ dní), naopak nejnižší průměrná va-

riabilita je u varianty s volbou nejkratšího časového horizontu ($T = 21$ dní). U ostatních variant by se dalo říci, že jsou zmíněnými volbami T dominovány.



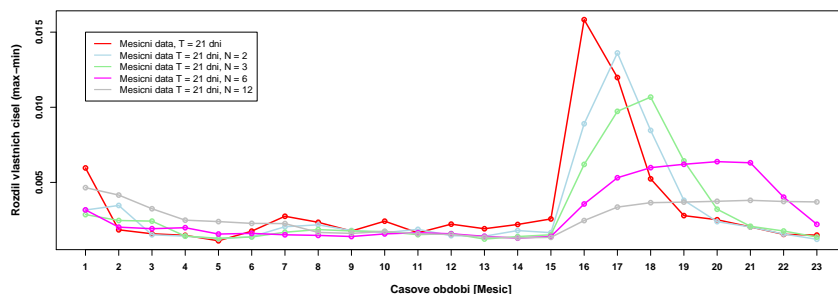
Obrázek 5.9: Riziko - výnos, průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018)

5.2 Metody stabilizace na základě průměrování kovariančních matic $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Odhady zprůměrovaných kovariančních matic $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ budou tvořeny stejným způsobem jako u simulovaných dat v podkapitole 4.4 a jsou naprogramovány v souboru *stab_opt_port_pr_real.R*. Dochází tedy opět k průměrování různého počtu kovariančních matic. Zvolený počet matic se bude odvíjet od toho, která varianta počtu dní T , ze které budou vypočítávány jednotlivé charakteristiky, se bude konkrétně analyzovat. Jestliže se např. bude zkoumat varianta dvouroční investice, kdy je časový interval zvolen na 2 měsíce ($T = 42$ dní), potom budou v této metodě odhadnuty nejdříve dvě kovarianční matice, které budou tvořeny odpovídajícím měsíčním počtem hodnot (21 dní) a následně dojde k jejich průměrování, v dalších variantách se postupuje stejným způsobem.

5.2.1 Metoda pro zjišťování stability kovariančních matic \bar{C} pomocí vlastních čísel kovariančních matic

Na následujícím obrázku jsou vykresleny pro dvouletou investici v letech 2016 - 2018 rozdíly minimálních a maximálních vlastních čísel jednotlivých kovariančních matic.



Obrázek 5.10: Hodnoty rozdílů max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice

Obr. 5.10 opět ilustruje fakt, že čím větší je počet průměrovaných matic, tím je rozdíl vlastních čísel nižší, to je potvrzeno i v tab. 5.3 ve čtvrtém sloupci, kde také s přibývajícím počtem matic klesá průměr rozdílu vlastních čísel zprůměrované kovarianční matice \bar{C} . Druhý sloupec v tabulce obsahuje průměrné hodnoty rozdílů, kdy nedocházelo k průměrování a kovarianční matice byly tvořeny pomocí různých variant počtu dnů T .

Parametry	Průměr (max - min)	Parametry	Průměr (max - min)
1 měsíc, N = 1	0,00335	1 měsíc, N = 1	0,00335
2 měsíce, N = 1	0,00299	1 měsíc, N = 2	0,00305
3 měsíce, N = 1	0,00288	1 měsíc, N = 3	0,00294
6 měsíců, N = 1	0,00276	1 měsíc, N = 6	0,00285
12 měsíců, N = 1	0,00259	1 měsíc, N = 12	0,00268

Tabulka 5.3: Průměrné hodnoty rozdílu max. a min. vlastního čísla pro dané kovarianční matice

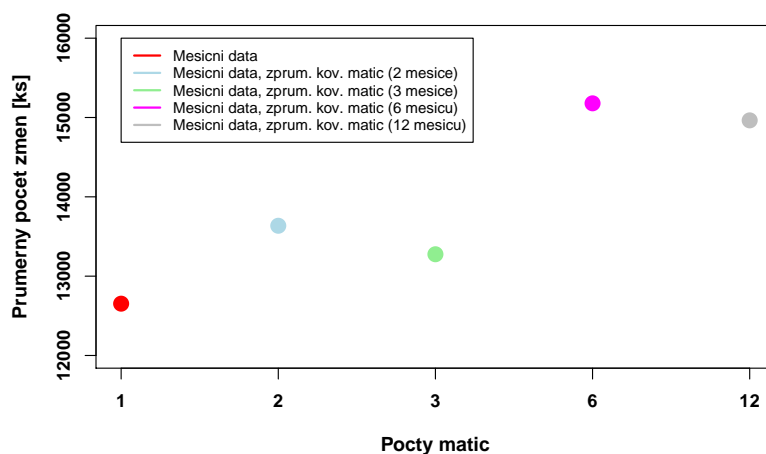
Z tabulky je patrné, že v metodě průměrování kovariančních matic dochází ke zhoršení, průměrné rozdíly vlastních čísel jsou vyšší než při odhadování původní metodou.

5.2.2 Metoda pro nalezení nejlepší délky časového intervalu T pomocí optimálních portfolií

Pro zjišťování nejvýnosnější investice se bude využívat stejného postupu jako je tomu v podkapitole 4.3.2, kdy pomocí optimálních vah \mathbf{w}_{opt} budou vytvořeny jednotlivá portfolia a následně průběhy investic, investor se

na základě těchto výsledků bude rozhodovat, která investice bude pro něj nejvýhodnější. Výsledné optimální váhy, očekávané výnosnosti a rizikovosti jednotlivých portfolií jsou k nalezení v příloženém DVD.

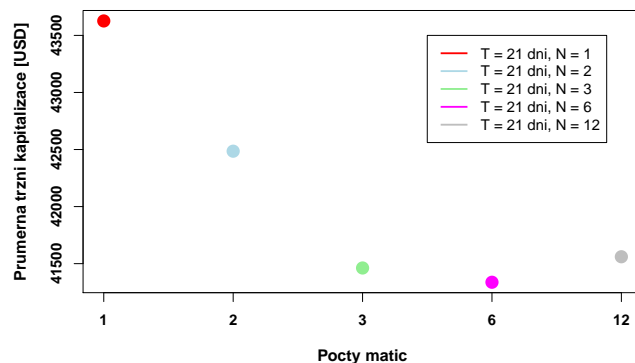
Nejdříve byly vypočteny průměrné počty změn (jedná se o absolutní počty) při jednotlivých aktualizacích portfolií v dané dvouroční investici. Celkový průměrný počet změn z 10 pozorovaných investic je vykreslen na obr. 5.11. Hodnoty, ze kterých byl vypočten celkový průměr, jsou k nalezení v tab. D.1 v Příloze D.



Obrázek 5.11: Počet změn akcií - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018)

Z grafu je patrné, že průměrný počet změn s přibývajícím počtem průměrovaných kovariačních matic má veskrze rostoucí charakter. Rozdíly počtu změn mezi jednotlivými variantami jsou oproti předešlé metodě nízké.

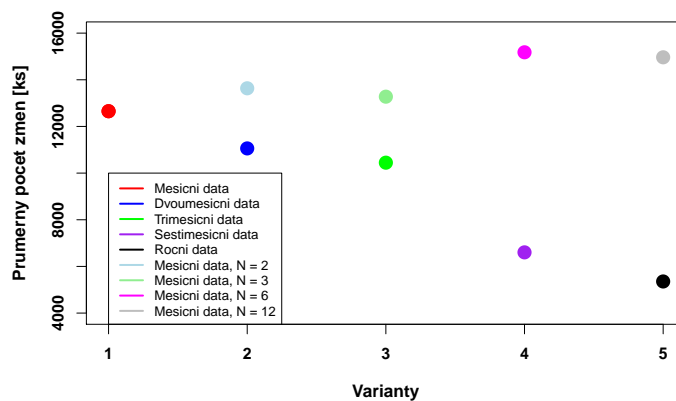
Stejně jako u předešlé metody bude spíše analyzována průměrná tržní kapitalizace v průběhu deseti investic. Hodnoty, ze kterých byl vypočten celkový průměr, jsou k nalezení v tab. D.2 v Příloze D.



Obrázek 5.12: Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018)

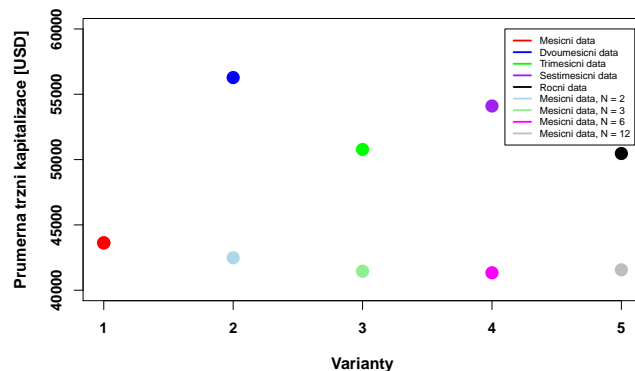
V tomto případě dochází k tomu, že s přibývajícím počtem průměrovaných matic průměrná tržní kapitalizace klesá.

Na obr. 5.13 je nejprve porovnání průměrných změn s metodou popsanou v kapitole 5.1. V těchto metodách jsou viditelné velké rozdíly, metoda první má strmý pokles, narozdíl od této metody, která má spíše rostoucí charakter.



Obrázek 5.13: Počet změn akcií - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018), 2 metody

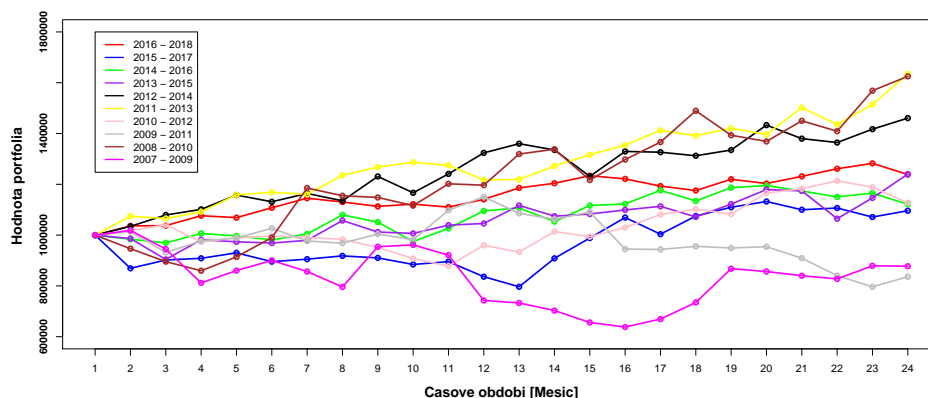
Následně dochází k porovnání průměrné tržní kapitalizace.



Obrázek 5.14: Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic (roky 2007 - 2018), 2 metody

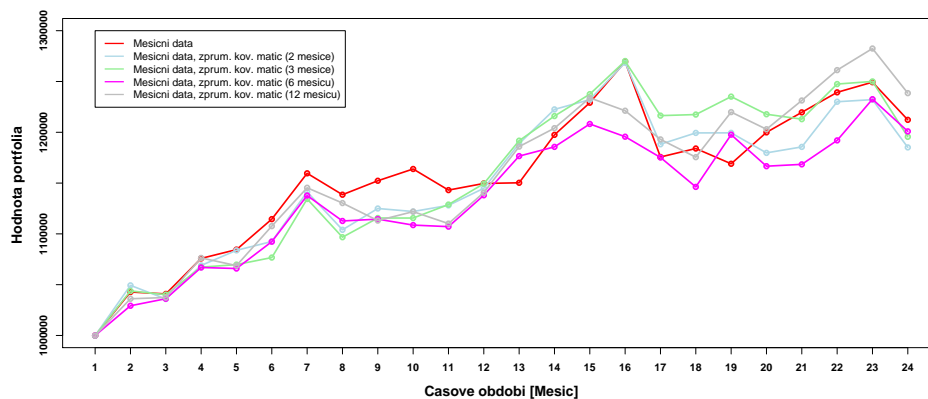
Z obr. 5.14 je patrné, že jestli je odhad kovarianční matice získán pomocí průměrování příslušného počtu matic, potom je tržní kapitalizace nižší než je tomu u první metody. V porovnání s obr. 5.13 je patrné, že čím vyšší je průměrný počet změn akcií, tím nižší je průměrná tržní kapitalizace.

Ilustrace průběhu deseti investic na dalším grafu (obr. 5.15) ukazuje jejich rozdílnost. Pouze dvě investice by byly na konci (po prodeji všech akcií) prodávající a jedna z dvojice je investice, která už byla výše zmíněná, jedná se o investici v letech 2007 - 2009, kdy byla registrována ekonomická krize.



Obrázek 5.15: Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2018, průměr z 12 matic

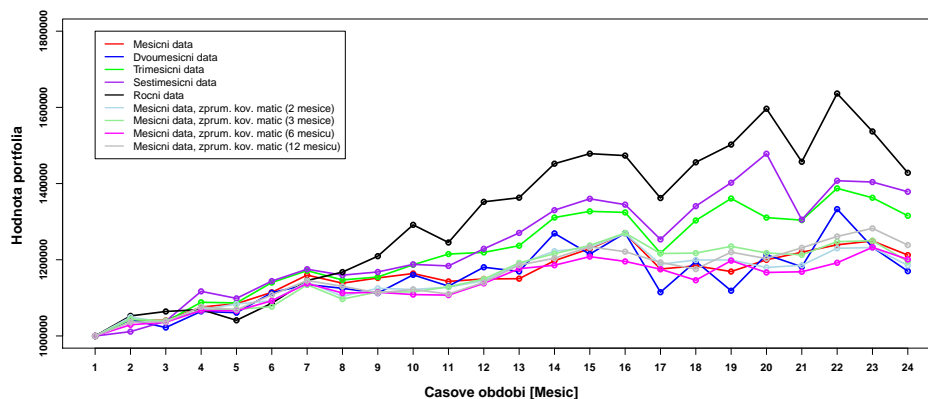
Průběh jedné dvouroční investice (roky 2016 - 2018) při různých počtech průměrovaných matic je vykreslen na následujícím obrázku.



Obrázek 5.16: Hodnoty portfolií - roky 2016 - 2018

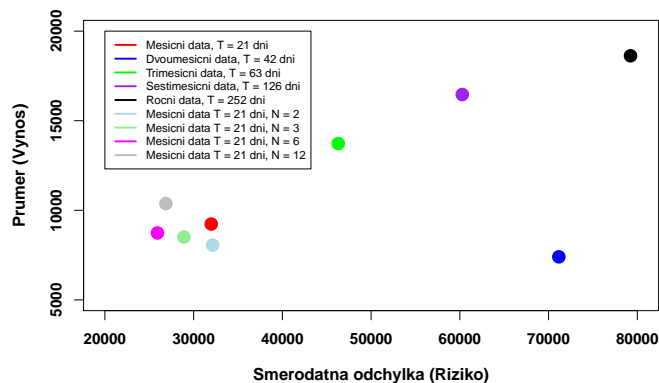
Jednotlivé investice mají přibližně stejný průběh (podobné hodnoty tržních kapitalizací). Na konci investice by na tom nejlépe byla investice, kde dochází k průměrování nejvíce kovariančních matic.

Jestliže dojde k vykreslení jednotlivých investic obou metod do jednoho grafu (obr. 5.17), dochází ke zjištění, že první metoda bude mít na konci investic vyšší výnos skoro u všech variant (ostatní varianty dvouročních investic jsou k nalezení v Příloze D, obr. D.1 - D.9).



Obrázek 5.17: Hodnoty portfolií - roky 2016 - 2018, obě metody

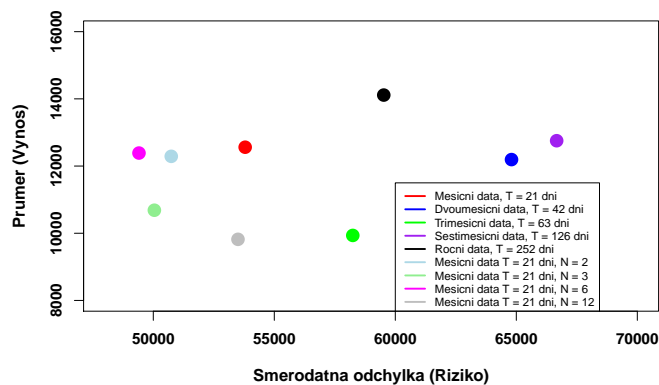
K potvrzení těchto faktů dochází i v prostoru „riziko - výnos“.



Obrázek 5.18: Prostor „riziko - výnos“ - roky 2016 - 2018, obě metody

Z obr. 5.18 je patrné, že tato zvolená investice při průměrování matic má ve všech variantách různých počtu matic podobný průběh (malé rozdíly ve varabilitě). Naopak výnosnost těchto investic je oproti předešlé metodě nižší.

Pro objektivní pohled dochází ke zprůměrování jednotlivých výnosů a rizik pro deset dvouletých investic, kdy kovarianční matice jsou tvořené pomocí různých časových intervalů T a pro investice, kdy kovarianční matice jsou průměrovány pomocí různých počtů kovariančních matic (v tab. D.3 v Příloze D jsou k nalezení hodnoty, ze kterých došlo k vypočtení celkového průměru), znázornění řešení je v prostoru „riziko - výnos“, viz obr. 5.19.



Obrázek 5.19: Prostor „riziko - výnos“ - roky 2007 - 2018, obě metody

Jestliže je využita metoda pro odhad kovarianční matice pomocí průměrování různého počtu kovariančních matic (matice tvořené z měsíčních dat $T = 21$ dní), potom je průměrná variabilita (rizikovost) jednotlivých investic nižší než je tomu u metody, která je zmíněná jako první (stabilizace na základě různého počtu dat T , ze kterého jsou odhadnuty kovarianční matice). U první metody je nejvyšší výnosnost u varianty, kdy je pro tvorbu matice využito nejdelšího časového horizontu $T = 252$ dní. Nejnižší výnosnost vykazuje varianta, kdy kovarianční matice je průměrována z největšího počtu matic ($N = 12$). Ostatní varianty (matice tvořené pomocí časového intervalu $T = 42$ dní, $T = 63$ dní a $T = 126$ dní a kovarianční matice tvořené průměrováním dvou, tří a šesti matic) mají veskrze stejnou průměrnou výnosnost. Jako nejlepší varianta s nejnižším variabilitou by se jevila investice, jejíž kovarianční matice je tvořena průměrováním šesti odpovídajících kovariančních matic.

Závěr

Cílem práce bylo analyzovat stabilizaci odhadu kovarianční matice. Analýza byla prováděna na dvou sadách dat, kdy jedna sada byla nasimulovaná a druhá sada dat byla tvořena reálnými daty z amerických trhů NYSE a NASDAQ, počet aktiv byl zvolen na 50, rozsah dat určen na 12 let (2006 - 2018). Pro analýzu stabilizace byly využity dvě metody, kdy první metoda byla založená na různě dlouhém časovém intervalu T , ze kterého se odhadovaly relativní přírůstky a potažmo kovarianční matice. Bylo zvoleno 5 časových variant ($T = 21$ dní, $T = 42$ dní, $T = 63$ dní, $T = 126$ dní a $T = 252$ dní). V druhé metodě byla kovarianční matice tvořena průměrováním různého počtu příslušných kovariančních matic ($T = 21$ dní), byly zvoleny 4 různé varianty (2, 3, 6 a 12 matic). Tyto varianty byly voleny záměrně, aby mohlo dojít k porovnávání obou metod. Doba trvání investice, která se bude analyzovat, je zvolena na 2 roky, aktualizace je vždy po měsíci ($m = 21$ dní), v průběhu zvoleného rozsahu let dojde k 10 dvouročním investicím.

Pro zjištění nejstabilnějších variant kovariančních matic byly využity vlastní čísla příslušných matic, konkrétně rozdíly maximálních a minimálních vlastních čísel kovariančních matic odhadnutých v průběhu aktualizací v dané investici. U nasimulovaných dat byly pro obě metody registrovány nejnižší rozdíly s přibývajícím časovým horizontem T , potažmo s přibývajícím počtem průměrovaných kovariančních matic. Jestliže dojde k porovnávání jednotlivých metod, nižší rozdíly vlastních čísel vykazuje první metoda. Stejných výsledků je dosaženo i u reálných dat s jediným rozdílem, že rozdíly hodnot jsou v tisícinách (u nasimulovaných dat jsou rozdíly v desetínách).

Další úlohou bylo najít „pro praxi“ nejlepší délku historie dat, neboli zjišťování nejvyššího výnosu z dvouleté investice. Došlo k využití optimálních portfolií, kdy je do portfolia zavedeno bezrizikové aktivum (zvoleny státní americké pokladniční poukázky). Optimální váhy portfolií v jednotlivých aktualizacích jsou optimalizovány pomocí kvadratické optimalizace. Pomocí těchto získaných vah lze investovat do jednotlivých aktiv.

U simulovaných dat je vypočtena průměrná tržní kapitalizace a průměrný počet změn v průběhu deseti dvouletých investic. Dochází ke zjištění, že se zvětšujícím se časovým intervalem T a s rostoucím počtem průměrovaných matic klesá jak průměrná tržní kapitalizace, tak i průměrný počet změn. Klesání v tomto případě není nijak významné. Pro získání objektivního pohledu byl vypočten průměrný výnos a průměrná variabilita (riziko) při každé sledované variantě jednotlivých metod v rozsahu deseti dvouletých investic. Dojde-li k vykreslení těchto hodnot v prostoru „*riziko - výnos*“, potom lze vypožorovat, že druhá metoda, tedy metoda průměrování matic má v porovnání s první metodou ve všech případech vyšší variabilitu. Jestliže dojde k porovnávání jednotlivých výnosů, pak nelze říct jednoznačně, která metoda je na tom lépe, protože ve dvou variantách je na tom lépe první metoda, v dalších potom je na tom lépe metoda druhá. Díky nižší variabilitě by se jevila jako lepší metoda první, kde je stabilizace volena pomocí různých časových intervalů T . U takto nasimulovaných dat je objektivnost obou metod zkršená, protože data jsou nasimulována náhodně, jsou tedy na sobě navzájem nezávislá. Nedochází tedy ke zřetelnému vyhodnocení, kterou variantu v obou metodách vybrat, aby výnos z investice byl co nejvyšší.

U reálných dat je analyzována tržní kapitalizace v průběhu deseti dvouletých investic, protože reálné ceny jednotlivých akcií jsou různě vysoké, a proto průměrné počty změn akcií nemají vysokou vypovídací hodnotu. Dochází ke zjištění, že průměrná tržní kapitalizace je nižší, jestliže je využita metoda, kdy je využita kovarianční matice, která je odhadnuta pomocí průměrování příslušného počtu matic. Lze také říci, že čím vyšší je průměrný počet změn akcií, tím nižší je průměrná tržní kapitalizace. Jednotlivé investice mají velmi rozdílný průběh, proto také dochází k vypočtení průměrných výnosů a variabilit v rozsahu deseti dvouletých investic. Jestliže dojde k vykreslení průměrných hodnot v prostoru „*riziko - výnos*“, potom lze říci, že varianty investic, kdy je využíváno průměrování kovariančních matic, mají nižší variabilitu, než je tomu u první zmíněné metody. Nejvyšší průměrnou výnosnost vykazuje varianta s nejdelším zvoleným časovým horizontem $T = 252$ dní. Varianty (matice tvořené pomocí časového intervalu $T = 42$ dní, $T = 63$ dní a $T = 126$ dní a kovarianční matice tvořené průměrováním dvěma, třemi a šesti maticemi) mají v porovnání veskrze stejnou průměrnou výnosnost.

Na závěr lze říci, že čím delší je zvolená délka dat pro odhad kovarianční matice, potažmo čím větší počet matic se průměruje, tím menší jsou rozdíly maximálních a minimálních vlastních čísel kovarianční matice a kovarianční matice se stává stabilnější. Dále také, jestliže je u reálných dat využita pro investici kovarianční matice, která je odhadnuta zprůměrováním několika kovariančních matic, potom je vykazována nižší rizikovost daných investic. Posledním závěrem je, že čím delší je časový horizont, ze kterého je kovarianční matice odhadována, tím je investice v případě volby reálných dat výnosnější.

Z hlediska praktického přístupu je tedy pro investora nejvýhodnější brát co nejdelší časovou řadu, ze které bude kovarianční matice odhadována.

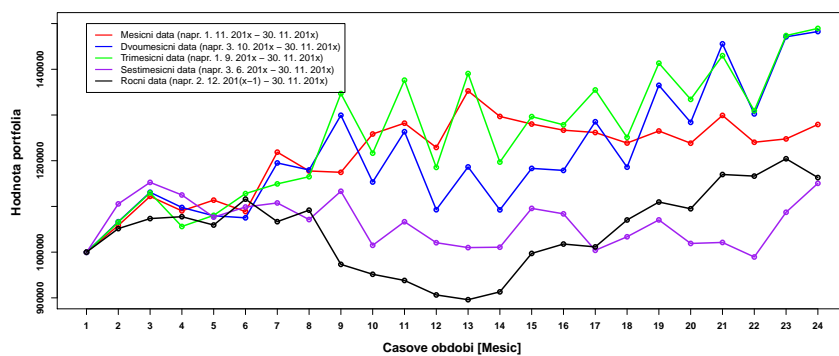
Literatura

- [1] BOYD, Stephen a VANDENBERGHE, Lieven. *Convex optimization*. New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 978-0-521-83378-3.
- [2] BRADA, Jaroslav. *Teorie portfolia*. Praha: Ediční oddělení VŠE Praha, 1996. ISBN 80-7079-259-0.
- [3] CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress, s. r. o., 2013. ISBN 978-80-86929-93-4.
- [4] CORNUEJOLS, Gerard a TÛTÛNCÛ, Reha. *Optimization Methods in Finance*. New York: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-86170-0.
- [5] ČÁMSKÝ, František. *Přednášky k předmětu ESF/PFTEPO vyučovaném na Masarykově univerzitě v Brně* [online]. 2008 [cit. 20. 3. 2019]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/el/1456/jaro2008/PFTEPO>
- [6] DANIELSSON, Jon. *Financial risk forecasting: the theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and Matlab*. John Wiley & Sons, 2011. ISBN 978-0-470-66943-3.
- [7] ELTON, Edwin J., GRUBER, Martin J., BROWN, Stephen J., & GOETZMANN, William N.. *Modern portfolio theory and investment analysis*. John Wiley & Sons, 2009. ISBN 0-471-42856-6.
- [8] FRIESL, Michal a ŠEDIVÁ, Blanka. *Finanční matematika HYPERTEXTOVĚ* [online]. 2003 [cit. 20. 3. 2019]. Dostupné z: <https://home.zcu.cz/friess/hfim/hFimS.pdf>
- [9] HELP.YAHOO.COM. *Finance help* [online]. © 2019 [cit. 16. 1. 2019]. Dostupné z: <https://help.yahoo.com/kb/finance/adjusted-close-sln28256.html>
- [10] IWEBLISTS.COM. *Stock Market Capitalization of the 50 Largest American Companies* [online]. © 2019 [cit. 16. 1. 2019]. Dostupné z: <http://www.iweblists.com/us/commerce/MarketCapitalization.#top>

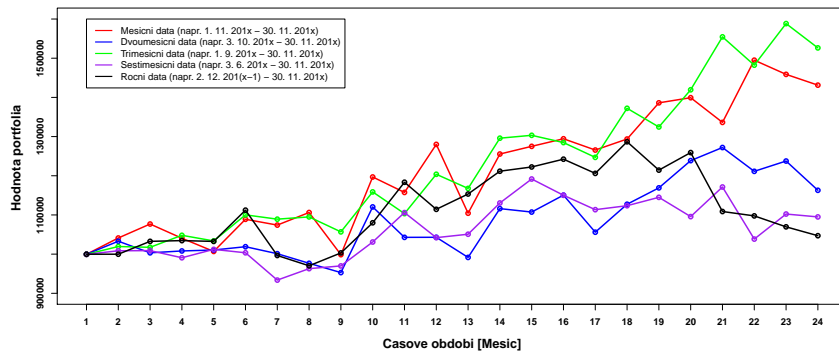
- [11] JOHNSON, Richard A., WICHERN, Dean W.. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Pearson Prentice Hall, 2007. ISBN 978-0-13-185-3.
- [12] PATRIA-DIRECT.CZ. *Sazebník poplatků platný od 1. 1. 2018* [online]. © 2019 [cit. 16. 3. 2019]. Dostupné z: <https://cdn.patria-direct.cz/Sazebnik - PD.pdf>
- [13] ŠEDIVÁ, Blanka, ŤOUPAL, Tomáš. *The Principles of Random Matrix Theory and Their Application to the Portfolio Choice*. In APLIMAT 2017 PROCEEDINGS. Bratislava: Vydavateľstvo SPEKTRUM STU, 2017. s. 1380-1387. ISBN 978-80-227-4650-2.
- [14] YAHOO! FINANCE.COM. *Finance Home* [online]. © 2019 [cit. 16. 1. 2019]. Dostupné z: <https://finance.yahoo.com>
- [15] YCHARTS.COM. *1 Year Treasury Bill Rate* [online]. © 2019 [cit. 22. 4. 2019]. Dostupné z: https://ycharts.com/indicators/1_year_treasury_bill_rate_annual

Příloha A

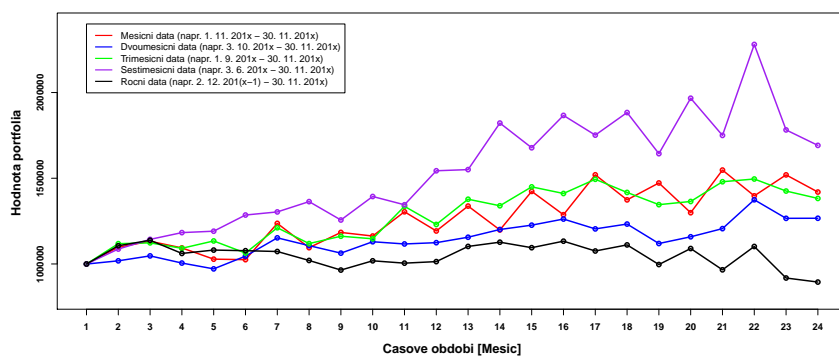
Simulovaná data metoda 1, volby T



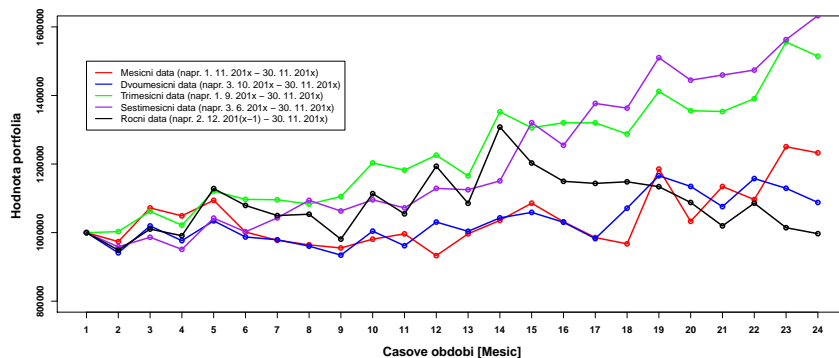
Obrázek A.1: Hodnoty portfolií - roky 2016 - 2018



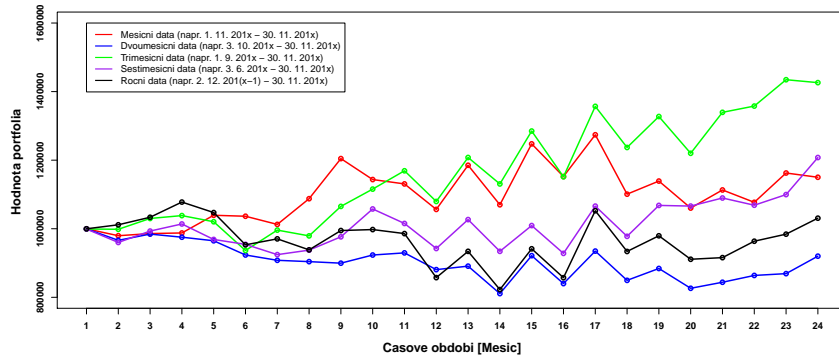
Obrázek A.2: Hodnoty portfolií - roky 2015 - 2017



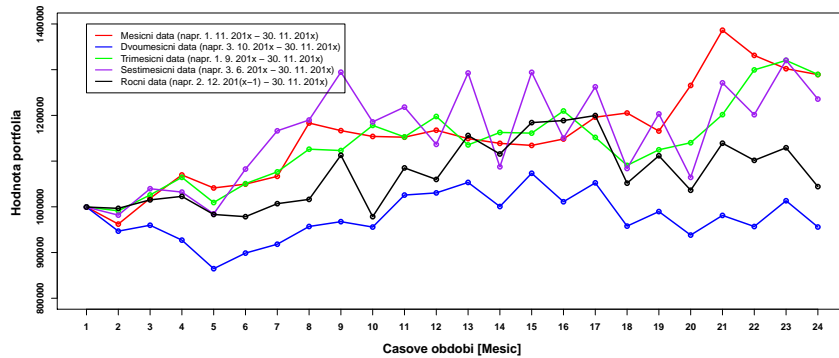
Obrázek A.3: Hodnoty portfolií - roky 2013 - 2015



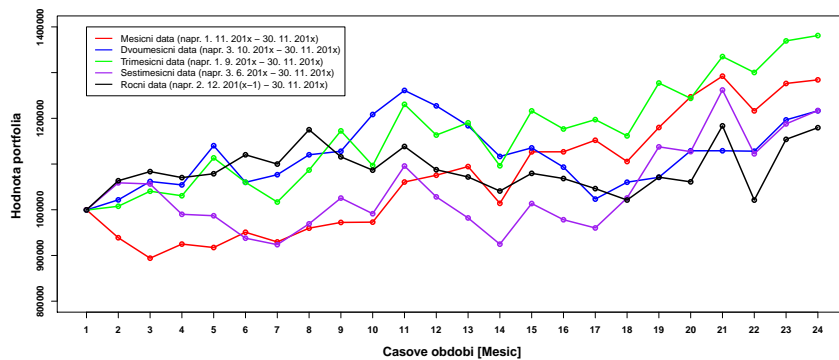
Obrázek A.4: Hodnoty portfolií - roky 2012 - 2014



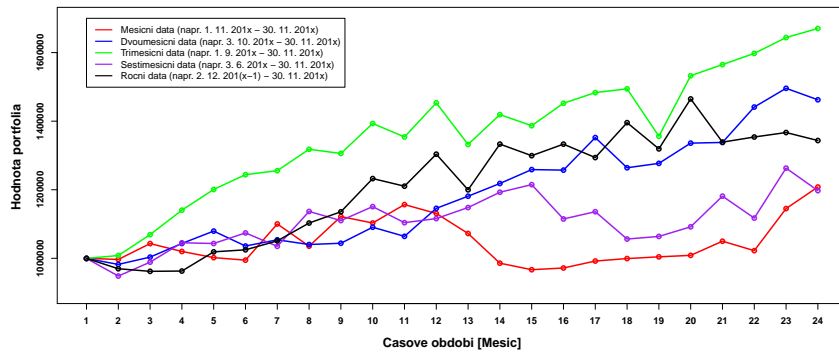
Obrázek A.5: Hodnoty portfolií - roky 2011 - 2013



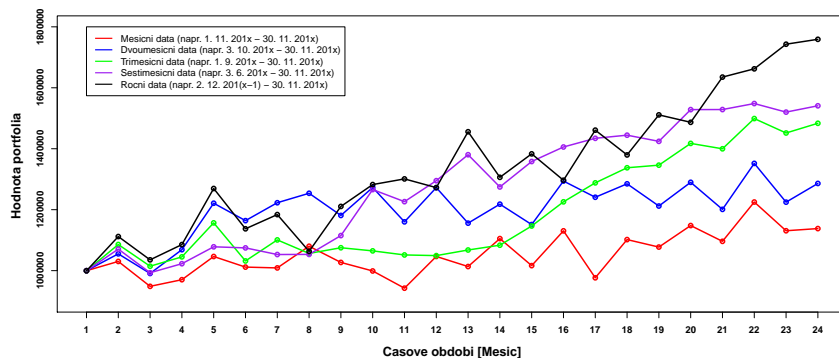
Obrázek A.6: Hodnoty portfolií - roky 2010 - 2012



Obrázek A.7: Hodnoty portfolií - roky 2009 - 2011



Obrázek A.8: Hodnoty portfolií - roky 2008 - 2010



Obrázek A.9: Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2009

Roky	1 měsíc		2 měsíce		3 měsíce		6 měsíců		12 měsíců	
	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko
16 - 18	12 145	54 054	20 992	108 466	21 300	118 522	6 572	57 772	7 094	45 855
15 - 17	18 769	87 589	7 102	63 345	22 905	68 811	4 156	53 731	2 054	63 404
14 - 16	12 333	69 661	6 083	87 320	7 627	52 121	9 874	79 547	-3 207	90 052
13 - 15	18 250	142 910	11 616	64 779	16 637	87 980	30 088	211 573	-4 580	77 703
12 - 14	10 118	81 204	3 831	54 484	22 379	70 029	27 531	65 513	-134	87 008
11 - 13	6542	86 855	-3 464	50 396	18560	91 943	9 069	66 112	1 348	78 919
10 - 12	12 596	48 701	-1 901	48 525	12 603	44 127	10 275	122 142	1 942	70 438
09 - 11	12 361	51 167	9 433	47 622	16 601	68 495	9 452	69 094	7 818	62 876
08 - 10	9 050	52 720	20 121	45 626	29 161	68 107	8 597	61 117	14 951	70 297
07 - 09	6 011	79 969	12 447	92 619	21 040	58 172	23 532	59 217	33 024	104 994
Průměr	11 817	75 483	8 626	66 319	18 881	75 831	13 915	84 581	6 031	75 155

Tabulka A.1: Sledované charakteristiky [USD] - průměr z 10 investic

Portfolia / Roky	16 - 18	15 - 17	14 - 16	13 - 15	12 - 14	11 - 13	10 - 12	09 - 11	08 - 10	07 - 09
1	0,00240	0,00364	0,00353	0,00336	0,00416	0,00267	0,00111	0,00027	0,00408	0,00362
2	0,00312	0,00352	0,00345	0,00175	0,00129	0,00352	0,00377	0,00319	0,00228	0,00240
3	0,00260	0,00200	0,00139	0,00210	0,00241	0,00153	0,00150	0,00278	0,00259	0,00099
4	0,00014	0,00243	0,00244	0,00105	0,00234	0,00259	0,00271	0,00367	0,00139	0,00162
5	0,00215	0,00166	0,00504	0,00273	0,00134	0,00235	0,00195	0,00176	0,00220	0,00265
6	0,00256	0,00184	0,00290	0,00229	0,00139	0,00274	0,00225	0,00099	0,00107	0,00271
7	0,00069	0,00054	0,00247	0,00391	0,00179	0,00026	0,00042	0,00168	0,00115	0,00302
8	0,00257	0,00105	0,00242	0,00309	0,00326	0,00331	0,00368	0,00097	0,00291	0,00337
9	0,00235	0,00203	0,00244	0,00312	0,00314	0,00255	0,00286	0,00170	0,00447	0,00235
10	0,00098	0,00197	0,00134	0,00197	0,00273	0,00082	0,00177	0,00161	0,00181	0,00164
11	0,00079	0,00360	0,00373	0,00258	0,00384	0,00192	0,00158	0,00157	0,00267	0,00382
12	0,00353	0,00206	0,00314	0,00109	0,00303	0,00316	0,00175	0,00231	0,00288	0,00397
13	0,00170	0,00240	0,00364	0,00353	0,00336	0,00416	0,00267	0,00111	0,00027	0,00408
14	0,00307	0,00312	0,00352	0,00345	0,00175	0,00129	0,00352	0,00377	0,00319	0,00228
15	0,00152	0,00260	0,00200	0,00139	0,00210	0,00241	0,00153	0,00150	0,00278	0,00259
16	0,00452	0,00014	0,00243	0,00244	0,00105	0,00234	0,00259	0,00271	0,00367	0,00139
17	0,00065	0,00215	0,00166	0,00504	0,00273	0,00134	0,00235	0,00195	0,00176	0,00220
18	0,00301	0,00256	0,00184	0,00290	0,00229	0,00139	0,00274	0,00225	0,00099	0,00107
19	0,00174	0,00069	0,00054	0,00247	0,00391	0,00179	0,00026	0,00042	0,00168	0,00115
20	0,00081	0,00257	0,00105	0,00242	0,00309	0,00326	0,00331	0,00368	0,00097	0,00291
21	0,00313	0,00235	0,00203	0,00244	0,00312	0,00314	0,00255	0,00286	0,00170	0,00447
22	0,00313	0,00098	0,00197	0,00134	0,00197	0,00273	0,00082	0,00177	0,00161	0,00181
23	0,00272	0,00079	0,00360	0,00373	0,00258	0,00384	0,00192	0,00158	0,00157	0,00267
23	0,00321	0,00353	0,00206	0,00314	0,00109	0,00303	0,00316	0,00175	0,00231	0,00288

Tabulka A.2: Hodnoty očekávaných výnosů jednotlivých portfolií v průběhu deseti dvouletých investic, $T = 21$ dní

Portfolia / Roky	16 - 18	15 - 17	14 - 16	13 - 15	12 - 14	11 - 13	10 - 12	09 - 11	08 - 10	07 - 09
1	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
2	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00054	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
3	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4	0,00001	0,00001	0,00001	0,00094	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
5	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00298	0,00391	0,00001	0,00001
6	0,00001	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
7	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
8	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00103	0,00001	0,00001
9	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
10	0,00001	0,00002	0,00001	0,00001	0,00002	0,00001	0,00353	0,00001	0,00001	0,00001
11	0,00106	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00244	0,00001	0,00002	0,00001	0,00001
12	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00067	0,00001	0,00001	0,00075	0,00288	0,00001
13	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
14	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00054	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
15	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
16	0,00284	0,00001	0,00001	0,00001	0,00094	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
17	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00298	0,00391	0,00001
18	0,00001	0,00001	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
19	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
20	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00103	0,00001
21	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
22	0,00001	0,00001	0,00002	0,00001	0,00001	0,00002	0,00001	0,00353	0,00001	0,00001
22	0,00001	0,00106	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00244	0,00001	0,00002	0,00001
23	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00067	0,00001	0,00001	0,00075	0,00288

Tabulka A.3: Hodnoty rizik jednotlivých portfolií v průběhu deseti dvouletých investic, $T = 21$ dní

Příloha B

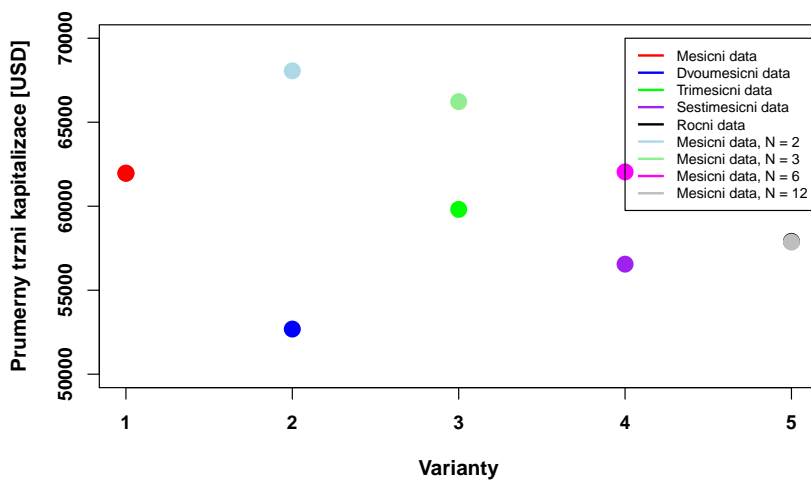
Simulovaná data - obě metody

Roky	T = 21	T = 42	N = 2	T = 63	N = 3	T = 126	N = 6	T = 252	N = 12
16 - 18	546	862	1 124	498	770	390	943	311	392
15 - 17	443	469	1 005	420	529	383	325	426	425
14 - 16	525	657	431	740	560	470	412	465	451
13 - 15	1 078	698	1 192	453	715	485	924	430	737
12 - 14	449	305	592	303	535	453	352	545	300
11 - 13	538	327	210	593	268	397	309	452	369
10 - 12	314	369	533	318	907	1 032	900	625	774
09 - 11	413	277	46	518	574	473	484	420	1 067
08 - 10	365	354	623	670	394	415	376	495	493
07 - 09	752	822	558	459	1 122	383	425	496	491
Průměr	542	514	673	497	637	491	545	466	538

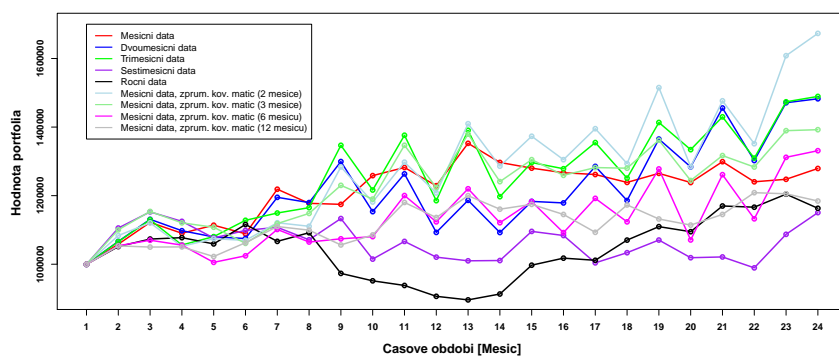
Tabulka B.1: Průměrné hodnoty počtu změn v jednotlivých investicích

Roky	T = 21	T = 42	N = 2	T = 63	N = 3	T = 126	N = 6	T = 252	N = 12
16 - 18	60 101	99 513	114 205	6 508	66 276	51 732	101 297	47 918	58 865
15 - 17	55 625	40 785	8 725	42 825	63 150	43 227	48 410	49 606	50 479
14 - 16	49 663	56 397	30 945	77 090	38 378	62 702	41 731	60 089	38 905
13 - 15	113 216	74 112	12 061	49 671	68 349	65 407	83 021	65 594	68 442
12 - 14	110 216	31 648	66 183	69 031	52 090	43 328	38 954	51 039	41 173
11 - 13	38 128	29 101	38 793	76 577	42 604	108 352	53 807	66 698	58 556
10 - 12	37 385	29 806	57 582	6 002	95 231	56 550	86 316	57 901	57 830
09 - 11	37 963	38 088	52 961	43 902	75 569	51 322	69 802	47 145	94 915
08 - 10	44 906	39 115	60 108	62 666	36 758	37 872	47 421	51 203	51 843
07 - 09	69 454	87 891	49 482	43 487	123 949	44 714	49 862	81 886	58 425
Průměr	61 966	52 688	68 058	59 812	66 226	56 532	62 044	57 909	57 866

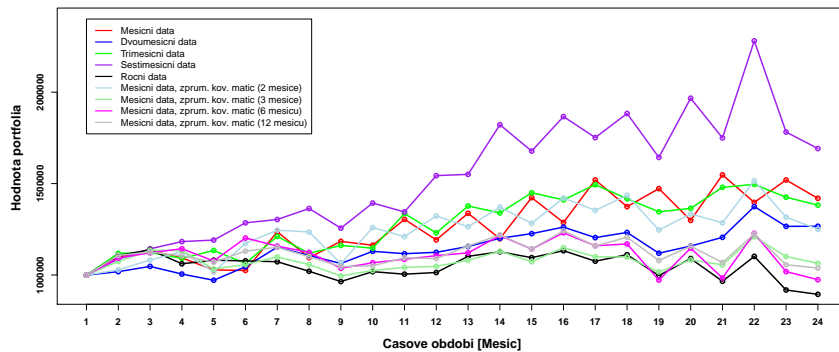
Tabulka B.2: Tržní kapitalizace v jednotlivých investicích



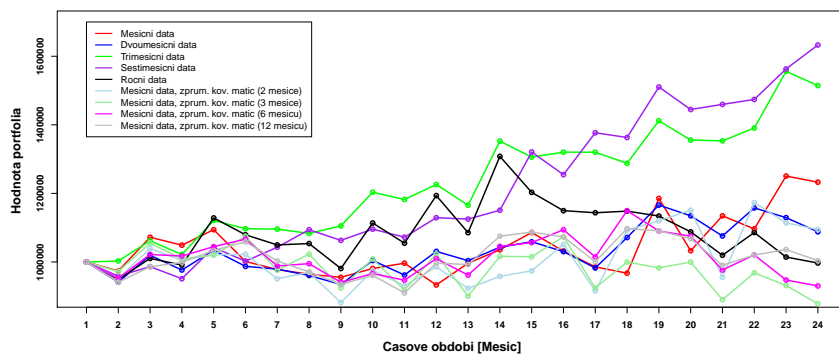
Obrázek B.1: Tržní kapitalizace - průměrně za 10 investic- 2 metody



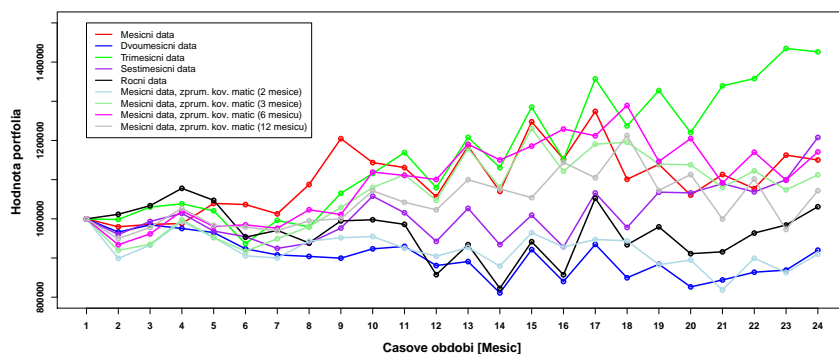
Obrázek B.2: Hodnoty portfolií - roky 2016 - 2018, obě metody



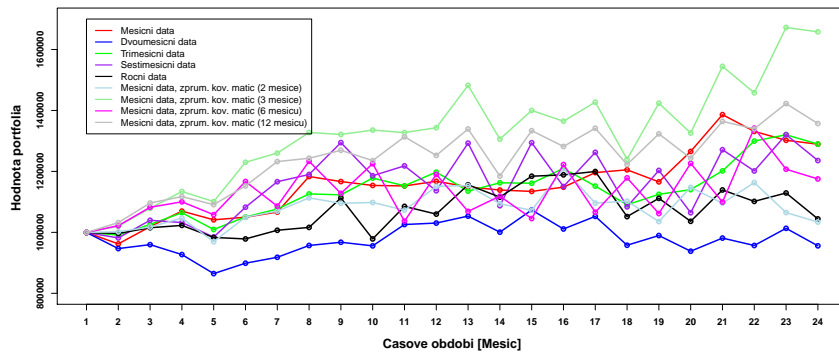
Obrázek B.3: Hodnoty portfolií - roky 2013 - 2015, obě metody



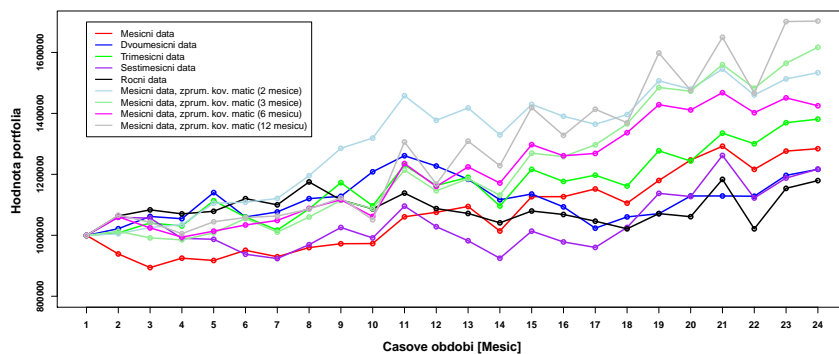
Obrázek B.4: Hodnoty portfolií - roky 2012 - 2014, obě metody



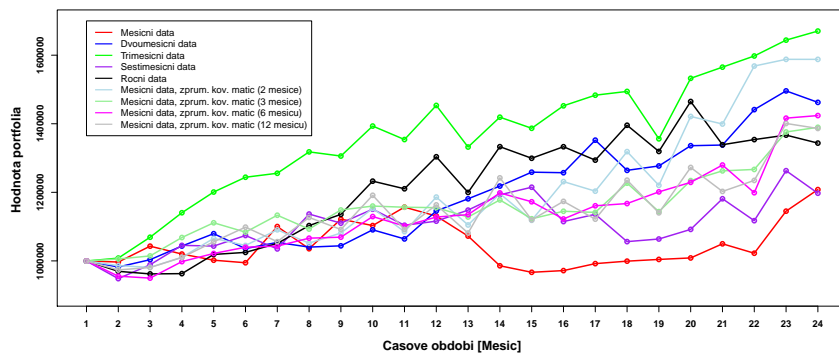
Obrázek B.5: Hodnoty portfolií - roky 2011 - 2013, obě metody



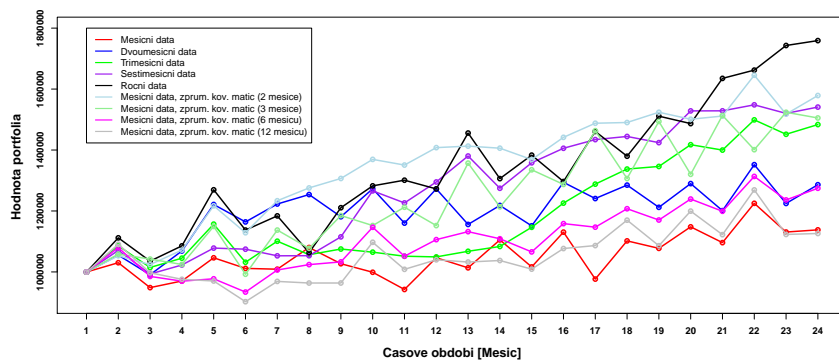
Obrázek B.6: Hodnoty portfolií - roky 2010 - 2012, obě metody



Obrázek B.7: Hodnoty portfolií - roky 2009 - 2011, obě metody



Obrázek B.8: Hodnoty portfolií - roky 2008 - 2010, obě metody



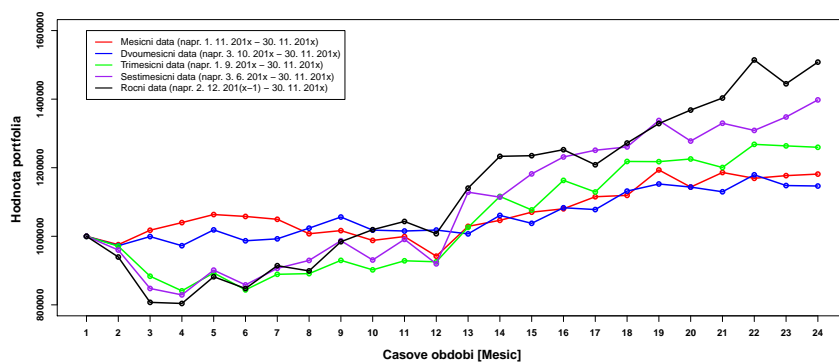
Obrázek B.9: Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2009, obě metody

Roky	N = 1		N = 2		N = 3		N = 6		N = 12	
	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko
16 - 18	12 145	54 054	29 282	129 803	17 063	82 713	14 418	101 604	8 041	44 253
15 - 17	18 769	87 589	11 966	117 439	13 141	79 832	14 379	56 471	10 516	77 388
14 - 16	12 333	69 661	601	57 610	4 122	65 918	6 627	59 657	2 487	67 777
13 - 15	18 250	142 910	10 915	121 737	2 780	64 811	-1 096	111 197	1 667	80 349
12 - 14	10 118	81 204	4 111	92 965	-5 286	80 739	-3 038	59 839	186	49 679
11 - 13	6542	86 855	-3903	49 221	4902	66 858	7 449	65 853	3 142	71 889
10 - 12	12 596	48 701	1 475	65 149	28 617	107 875	7 635	126 304	15 540	79 696
09 - 11	12 361	51 167	23 207	61 929	26 834	61 356	18 495	63 438	30 578	125 132
08 - 10	9 050	52 720	25 571	80 105	16 952	46 869	18 435	56 472	16 814	84 919
07 - 09	6 011	79 969	25 178	64 044	21 983	125 004	11 947	63 425	5 502	78 050
Průměr	11 817	75 483	12 840	84 000	13 111	78 391	9 525	76 429	9 447	75 913

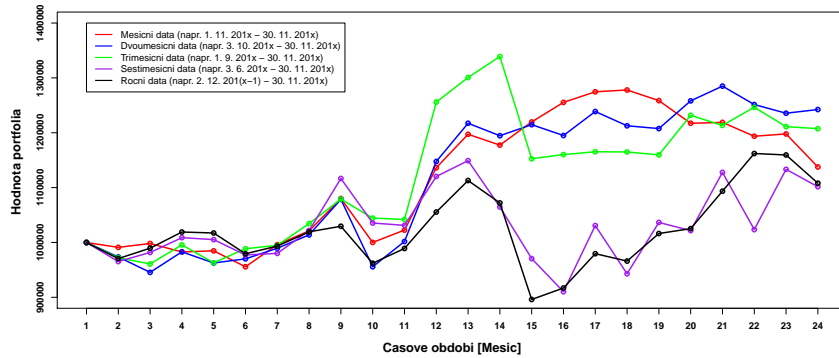
Tabulka B.3: Sledované charakteristiky [USD] - metoda průměrování matic

Příloha C

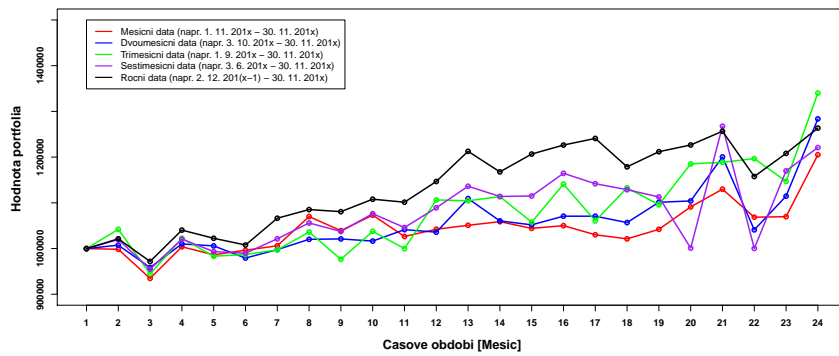
Reálná data - metoda 1, volby T



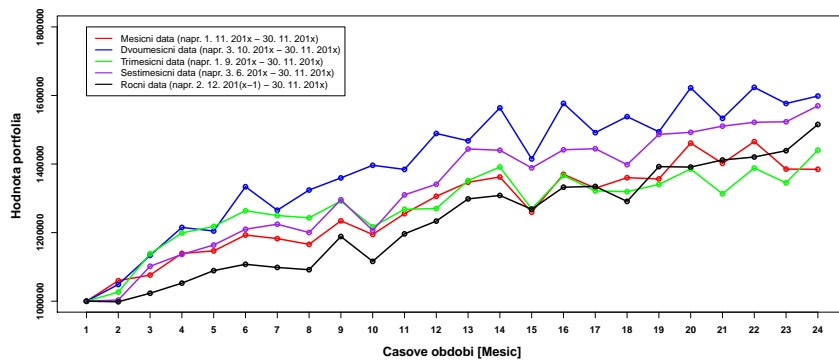
Obrázek C.1: Hodnoty portfolií - roky 2015 - 2017



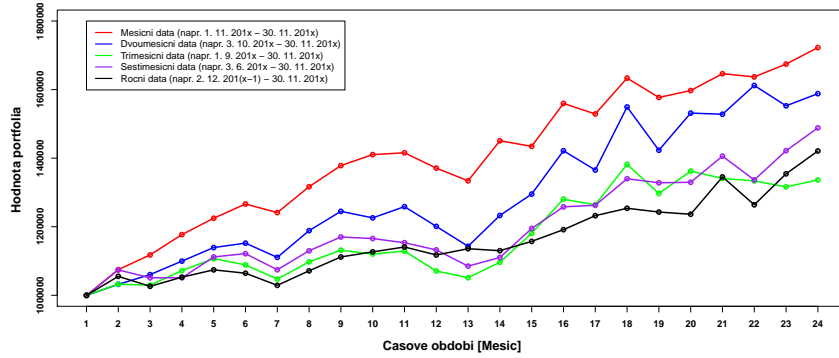
Obrázek C.2: Hodnoty portfolií - roky 2014 - 2016



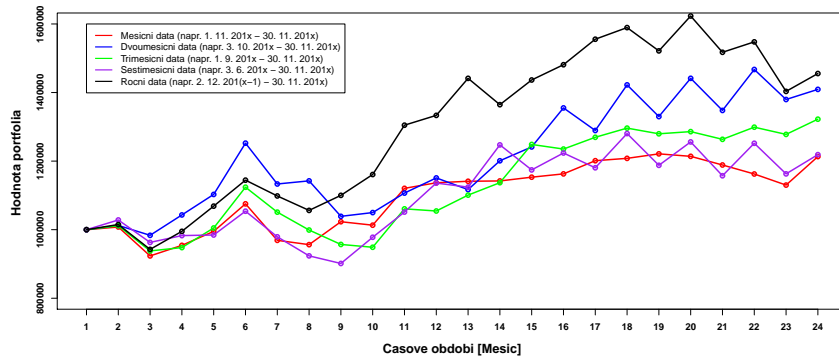
Obrázek C.3: Hodnoty portfolií - roky 2013 - 2015



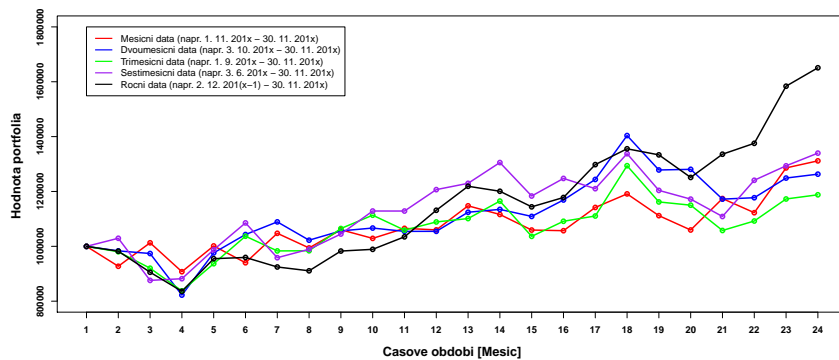
Obrázek C.4: Hodnoty portfolií - roky 2012 - 2014



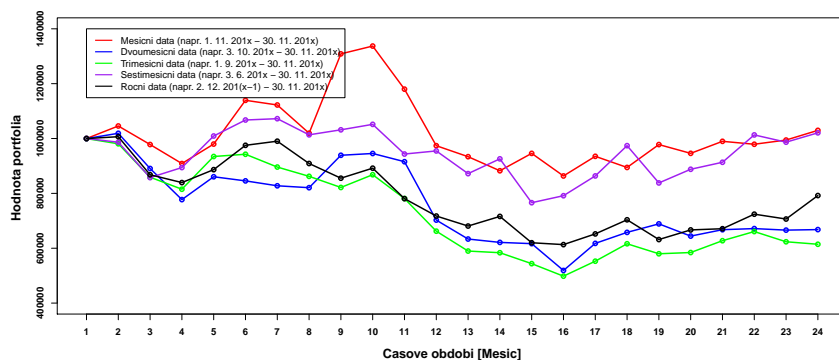
Obrázek C.5: Hodnoty portfolií - roky 2011 - 2013



Obrázek C.6: Hodnoty portfolií - roky 2009 - 2011



Obrázek C.7: Hodnoty portfolií - roky 2008 - 2010



Obrázek C.8: Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2009

Portfolia / Roky	16 - 18	15 - 17	14 - 16	13 - 15	12 - 14	11 - 13	10 - 12	09 - 11	08 - 10	07 - 09
1	0,00519	0,00366	0,00212	0,00365	0,00363	0,00453	0,00453	0,00577	0,00775	0,00603
2	0,00388	0,00216	0,00356	0,00378	0,00590	0,00457	0,00457	0,00575	0,01199	0,00505
3	0,00172	0,00434	0,00599	0,00340	0,00165	0,00411	0,00411	0,00442	0,01025	0,00276
4	0,00421	0,00451	0,00351	0,00580	0,00296	0,00299	0,00299	0,00461	0,00603	0,00640
5	0,00158	0,00380	0,00161	0,00299	0,00346	0,00522	0,00522	0,00380	0,00944	0,00746
6	0,00325	0,00292	0,00454	0,00199	0,00494	0,00276	0,00276	0,00630	0,00795	0,00346
7	0,00340	0,00584	0,00302	0,00331	0,00437	0,00330	0,00330	0,00352	0,00694	0,00402
8	0,00327	0,00463	0,00347	0,00335	0,00299	0,00466	0,00466	0,00172	0,00327	0,00328
9	0,00381	0,00395	0,00597	0,00145	0,00370	0,00537	0,00537	0,00510	0,00777	0,00583
10	0,00207	0,00302	0,00361	0,00454	0,00574	0,00266	0,00266	0,00414	0,00610	0,00504
11	0,00273	0,00386	0,00391	0,00170	0,00371	0,00439	0,00439	0,00710	0,00463	0,00415
12	0,00346	0,00222	0,00524	0,00380	0,00383	0,00584	0,00584	0,00467	0,00348	0,00212
13	0,00364	0,00519	0,00366	0,00212	0,00365	0,00170	0,00170	0,00453	0,00577	0,00775
14	0,00232	0,00388	0,00216	0,00356	0,00378	0,00567	0,00567	0,00457	0,00575	0,01199
15	0,00587	0,00172	0,00434	0,00599	0,00340	0,00581	0,00581	0,00411	0,00442	0,01025
16	0,00424	0,00421	0,00451	0,00351	0,00580	0,00490	0,00490	0,00299	0,00461	0,00603
17	0,00296	0,00158	0,00380	0,00161	0,00299	0,00456	0,00456	0,00522	0,00380	0,00944
18	0,00377	0,00325	0,00292	0,00454	0,00199	0,00383	0,00383	0,00276	0,00630	0,00795
19	0,00451	0,00340	0,00584	0,00302	0,00331	0,00409	0,00409	0,00330	0,00352	0,00694
20	0,00224	0,00327	0,00463	0,00347	0,00335	0,00398	0,00398	0,00466	0,00172	0,00327
21	0,00362	0,00381	0,00395	0,00597	0,00145	0,00436	0,00436	0,00537	0,00510	0,00777
22	0,00363	0,00207	0,00302	0,00361	0,00454	0,00376	0,00376	0,00266	0,00414	0,00610
22	0,00189	0,00273	0,00386	0,00391	0,00170	0,00378	0,00378	0,00439	0,00710	0,00463
23	0,00364	0,00346	0,00222	0,00524	0,00380	0,00366	0,00366	0,00584	0,00467	0,00348

Tabulka C.1: Hodnoty očekávaných výnosů jednotlivých portfolií v průběhu deseti dvouletých investic, $T = 21$ dní

Portfolia / Roky	16 - 18	15 - 17	14 - 16	13 - 15	12 - 14	11 - 13	10 - 12	09 - 11	08 - 10	07 - 09
1	0,00504	0,00945	0,00115	0,00264	0,00695	0,00738	0,00738	0,00836	0,05611	0,01013
2	0,00514	0,00771	0,01116	0,00340	0,01087	0,00311	0,00311	0,00569	0,02660	0,00736
3	0,00086	0,01309	0,01088	0,00568	0,00059	0,00455	0,00455	0,01858	0,03019	0,01289
4	0,00274	0,00893	0,00395	0,00405	0,00273	0,00276	0,00276	0,00725	0,04257	0,01121
5	0,00189	0,00270	0,01187	0,00415	0,00343	0,00827	0,00827	0,00253	0,01810	0,01505
6	0,00309	0,00464	0,00583	0,00307	0,00747	0,00260	0,00260	0,00895	0,00960	0,00363
7	0,00350	0,00627	0,00494	0,00371	0,00439	0,00475	0,00475	0,04552	0,00880	0,00643
8	0,00386	0,00532	0,00935	0,00314	0,01069	0,00669	0,00669	0,01328	0,00645	0,01084
9	0,00268	0,00336	0,00753	0,00588	0,00203	0,00822	0,00822	0,00631	0,01107	0,00842
10	0,00424	0,00300	0,02583	0,00347	0,01275	0,01916	0,01916	0,01146	0,00630	0,01138
11	0,00131	0,01120	0,01412	0,00561	0,00350	0,01322	0,01322	0,00505	0,00511	0,04122
12	0,00141	0,00427	0,00621	0,00813	0,00535	0,00922	0,00922	0,00531	0,00637	0,05469
13	0,00272	0,00504	0,00945	0,00115	0,00264	0,01395	0,01395	0,00738	0,00836	0,05611
14	0,00134	0,00514	0,00771	0,01116	0,00340	0,00889	0,00889	0,00311	0,00569	0,02660
15	0,00456	0,00086	0,01309	0,01088	0,00568	0,00471	0,00471	0,00455	0,01858	0,03019
16	0,01323	0,00274	0,00893	0,00395	0,00405	0,00234	0,00234	0,00276	0,00725	0,04257
17	0,00922	0,00189	0,00270	0,01187	0,00415	0,00476	0,00476	0,00827	0,00253	0,01810
18	0,01012	0,00309	0,00464	0,00583	0,00307	0,00975	0,00975	0,00260	0,00895	0,00960
19	0,00526	0,00350	0,00627	0,00494	0,00371	0,00690	0,00690	0,00475	0,04552	0,00880
20	0,00241	0,00386	0,00532	0,00935	0,00314	0,00585	0,00585	0,00669	0,01328	0,00645
21	0,00207	0,00268	0,00336	0,00753	0,00588	0,00738	0,00738	0,00822	0,00631	0,01107
22	0,00292	0,00424	0,00300	0,02583	0,00347	0,00337	0,00337	0,01916	0,01146	0,00630
22	0,00077	0,00131	0,01120	0,01412	0,00561	0,00557	0,00557	0,01322	0,00505	0,00511
23	0,01298	0,00141	0,00427	0,00621	0,00813	0,00991	0,00991	0,00922	0,00531	0,00637

Tabulka C.2: Hodnoty rizik jednotlivých portfolií v průběhu deseti dvouletých investic, $T = 21$ dní

Příloha D

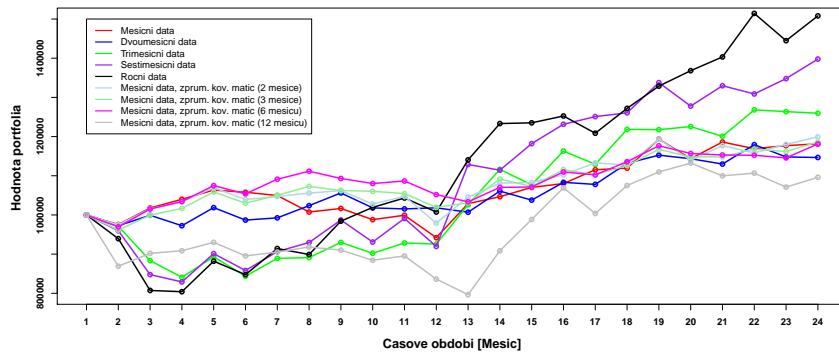
Reálná data - obě metody

Roky	T = 21	T = 42	N = 2	T = 63	N = 3	T = 126	N = 6	T = 252	N = 12
16 - 18	6 699	7 313	6 689	10 297	9 342	3 810	9 327	1 698	7 567
15 - 17	4 440	5 137	6 436	5 158	7 079	3 471	8 520	2 498	6 431
14 - 16	12 603	10 999	12 975	8 322	12 304	2 962	13 153	1 880	11 758
13 - 15	12 440	10 310	15 100	6 095	14 086	2 498	15 191	1 606	13 752
12 - 14	12 157	12 083	16 515	8 493	14 136	3 677	16 655	3 425	15 877
11 - 13	13478	7 719	11595	7 502	12 799	4 438	15 968	3 428	16 409
10 - 12	13 710	7 295	8 090	7 372	8 914	4 306	8 316	2 544	9 751
09 - 11	10 629	10 100	12 874	8 688	9 632	5 381	10 643	4 717	17 833
08 - 10	19 024	21 995	24 202	17 822	24 178	15 255	30 263	18 274	29 492
07 - 09	21 354	17 635	21 876	24 655	20 293	20 231	23 753	13 487	20 770
Průměr	12 653	11 059	13 636	10 447	13 276	6 603	15 179	5 356	14 964

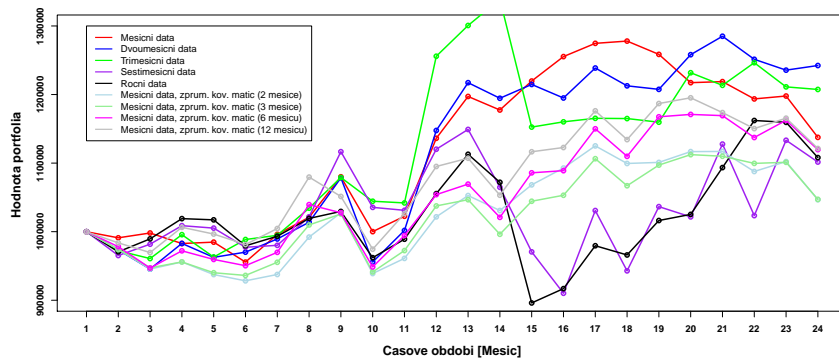
Tabulka D.1: Průměrné hodnoty počtu změn v jednotlivých investicích

Roky	T = 21	T = 42	N = 2	T = 63	N = 3	T = 126	N = 6	T = 252	N = 12
16 - 18	25 122	64 852	24 701	42 935	22 450	54 438	31 501	52 242	24 783
15 - 17	30 586	32 350	27 560	40 367	27 191	4 094	23 312	65 381	40 493
14 - 16	32 457	45 134	39 955	62 379	26 546	70 474	29 039	44 483	31 244
13 - 15	30 447	39 757	39 846	55 739	41 376	51 700	35 635	35 427	39 400
12 - 14	44 034	60 301	62 028	45 168	50 200	58 297	46 927	50 994	44 608
11 - 13	72729	81 059	60514	51 097	36 066	41 452	33 819	32 345	35 589
10 - 12	34 198	42 833	34 937	35 968	37 185	32 614	29 176	33 745	41 430
09 - 11	36 393	80 862	36 669	44 630	45 793	51 816	55 280	61 523	28 670
08 - 10	56 314	56 701	39 337	67 031	46 334	72 076	65 977	64 365	67 708
07 - 09	73 986	58 946	70 166	62 998	78 394	68 223	62 712	64 162	60 215
Průměr	43 627	56 281	42 485	50 777	41 360	54 104	41 337	50 467	41 412

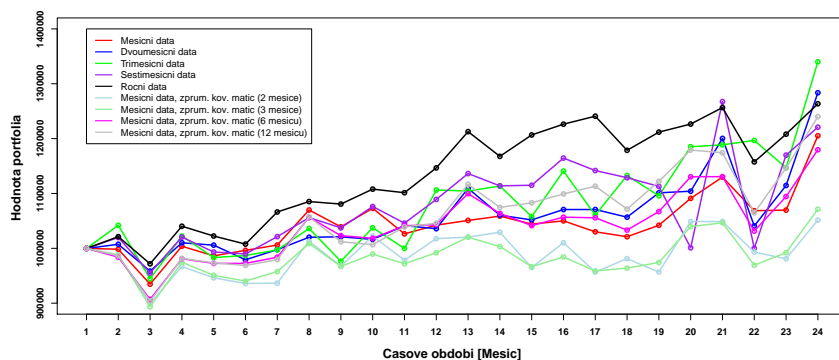
Tabulka D.2: Tržní kapitalizace v jednotlivých investicích



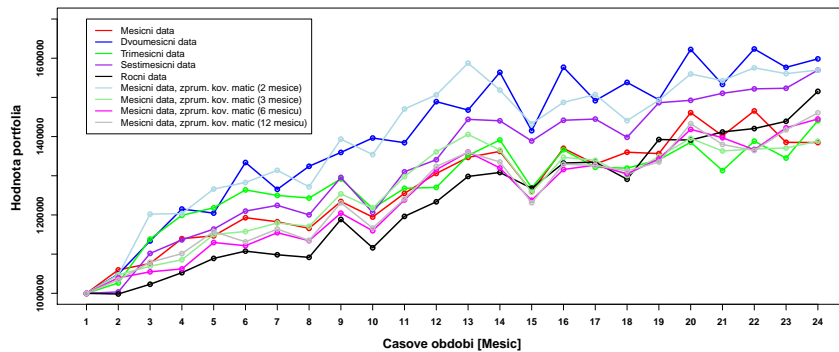
Obrázek D.1: Hodnoty portfolií - roky 2015 - 2017, obě metody



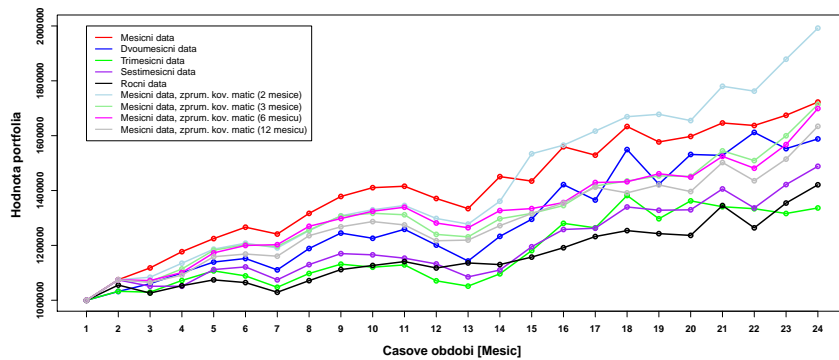
Obrázek D.2: Hodnoty portfolií - roky 2014 - 2016, obě metody



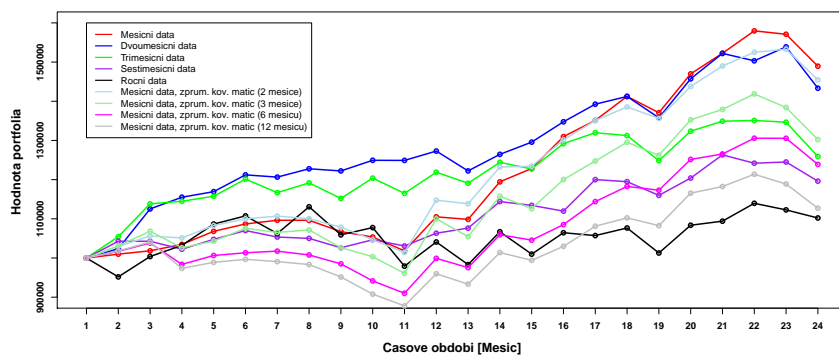
Obrázek D.3: Hodnoty portfolií - roky 2013 - 2015, obě metody



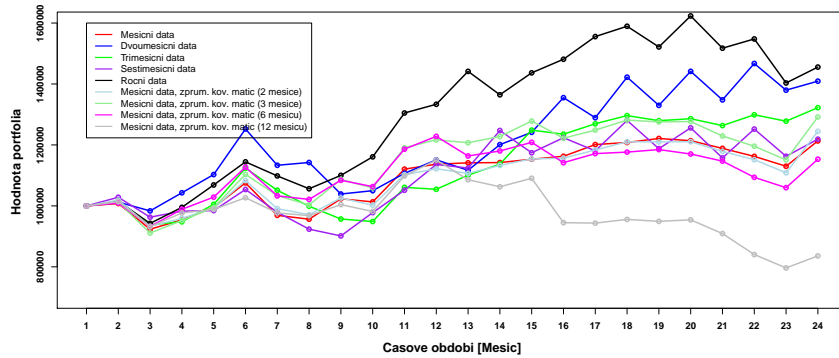
Obrázek D.4: Hodnoty portfolií - roky 2012 - 2014, obě metody



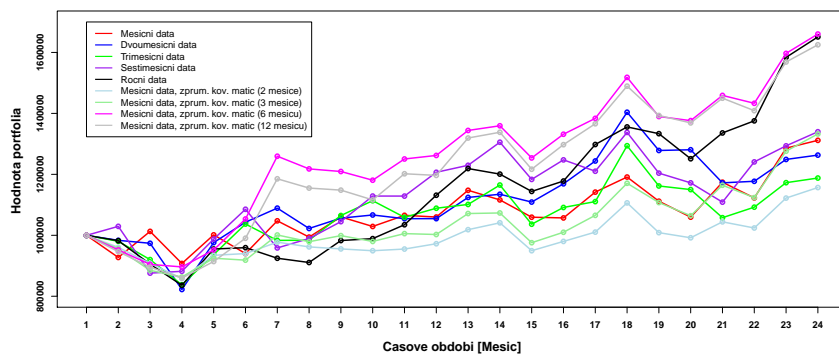
Obrázek D.5: Hodnoty portfolií - roky 2011 - 2013, obě metody



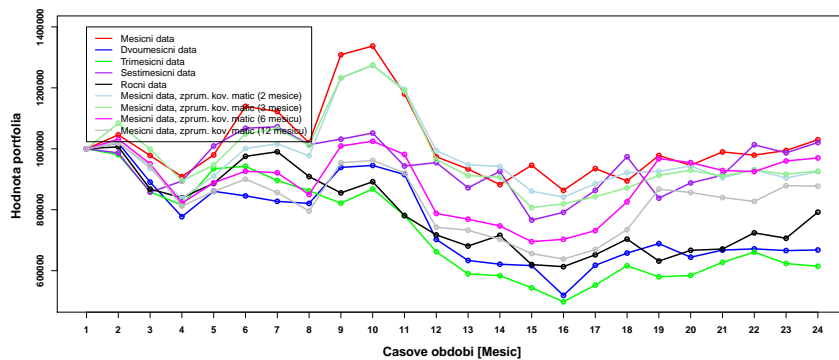
Obrázek D.6: Hodnoty portfolií - roky 2010 - 2012, obě metody



Obrázek D.7: Hodnoty portfolií - roky 2009 - 2011, obě metody



Obrázek D.8: Hodnoty portfolií - roky 2008 - 2010, obě metody



Obrázek D.9: Hodnoty portfolií - roky 2007 - 2009, obě metody

Roky	N = 1		N = 2		N = 3		N = 6		N = 12	
	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko	výnos	riziko
16 - 18	9 233	31 985	8 057	32 143	8 511	28 902	8 738	25 925	10 377	26 872
15 - 17	7 893	35 761	8 661	34 700	8 106	27 370	7 885	26 362	4 181	54 427
14 - 16	5 985	42 574	2 034	35 549	2 055	37 647	5 207	41 517	5 283	42 422
13 - 15	8 928	44 434	2 249	49 618	3 115	44 027	7 826	47 381	10 447	53 225
12 - 14	16 728	55 876	24 774	62 507	16 890	47 869	19 348	46 684	20 037	54 958
11 - 13	31424	51 364	43146	54 535	31038	45 075	30 399	44 772	27 581	48 449
10 - 12	21 289	46 800	19 777	47 179	13 152	55 807	10 392	42 676	5 532	42 910
09 - 11	9 276	49 270	10 636	53 449	12 697	62 905	6 663	57 910	-7 122	55 306
08 - 10	13 554	75 939	6 822	51 990	14 467	63 505	28 720	82 334	27 185	82 371
07 - 09	1 299	103 966	-3 260	85 754	-3 175	87 335	-1 302	78 522	-5 309	74 053
Průměr	12 561	53 798	12 290	50 742	10 686	50 044	12 388	49 408	9 819	53 499

Tabulka D.3: Sledované charakteristiky [USD] - metoda průměrování matic

Příloha E

Tabulka - TOP 50 společností

Žebříček	Jméno společnosti	Zkratka	Tržní kapitalizace (\$B)	Burza
1	Microsoft Corp.	MSFT	889,3	NYSE
2	Apple	AAPL	877,6	NYSE
3	Amazon.com	AMZN	841,0	NASDAQ
4	Alphabet	GOOG	823,4	NASDAQ
5	Johnson & Johnson	JNJ	366,4	NYSE
6	JP Morgan Chase & CO	JPM	348,9	NYSE
7	Exxon Mobil	XOM	339,4	NYSE
8	Walmart	WMT	285,9	NYSE
9	Bank of America Corporation	BAC	282,4	NYSE
10	Proctor & Gamble Co	PG	256,3	NYSE
11	Intel Corp	INTC	244,3	NASDAQ
12	Verizon Communications	VZ	241,3	NYSE
13	UnitedHealth Group	UNH	241,2	NYSE
14	Chevron Corp	CVX	238,1	NYSE
15	Mastercard	MA	237,2	NYSE
16	Cisco Systems	CSCO	234,2	NASDAQ
17	Pfizer	PFE	232,0	NYSE
18	Wells Fargo & Co	WFC	230,1	NYSE
19	AT&T	T	223,6	NYSE
20	Boeing Co	BA	214,1	NYSE
21	Merck & Co	MRK	210,6	NYSE
22	The Home Depot	HD	205,8	NYSE
23	Coca-Cola	KO	193,7	NYSE
24	Oracle Corp	ORCL	190,0	NYSE
25	Comcast Corp	CMCSA	183,2	NASDAQ
26	Walt Disney Co	DIS	171,4	NYSE
27	PepsiCo	PEP	162,4	NASDAQ
28	Netflix	NFLX	157,8	NASDAQ
29	Citigroup	C	152,6	NYSE
30	McDonald's Corp	MCD	141,8	NYSE
31	Philip Morris International	PM	141,2	NYSE
32	Abbot Laboratories	ABT	140,3	NYSE
33	Nike	NKE	136,6	NYSE
34	Adobe	ADBE	135,9	NASDAQ
35	Eli Lilly and Co	LLY	128,3	NYSE
36	Medtronic PLC	MDT	125,8	NYSE
37	Adobe	ADBE	125,8	NASDAQ
38	DowDuPont	DWDP	126,6	NYSE
39	Honeywell International	HON	124,9	NYSE
40	Salesforce.com	CRM	124,5	NYSE
41	International Business Machines Corp	IBM	124,1	NYSE
42	AbbVie	ABBV	120,0	NYSE
43	3M	MMM	119,8	NYSE
44	Amgen	AMGN	119,0	NASDAQ
45	Union Pacific Corp	UNP	117,3	NYSE
46	Accenture plc	ACN	111,2	NYSE
47	Costco Wholesale Corp	COST	108,7	NASDAQ
48	United Technologies Corp	UTX	108,5	NYSE
49	Thermo Fisher Scientific	TMO	107,7	NYSE
50	NVIDIA Corporation	NVDA	102,7	NASDAQ

Tabulka E.1: Výpis TOP 50 amerických společností, seřazení sestupně podle tržní kapitalizace (k 3. 2. 2019)

Příloha F

Seznam složek a souborů na DVD

Složky:

1. výsledky_reálná_data

(a) spouštění_kód

- stab_opt_port_real.R, data_12.csv, datacl_12.csv, hodnoty portfolií (sk.prostredky.cel_1_mes-07-09.csv, ...), absolutní počty změn (pocet_zmen_celk_1_mes-07-09.csv, ...), tržní kapitalizace (trzni_cena_1_mes-07-09.csv)

(b) měs_interval

- složky výsledků dvouletých investic (2016 - 2018, 2015 - 2017, 2014 - 2016, ...),
- složky obsahují příslušná data (d_1.csv, ...), relativní přírůstky - jednodenní výnosnosti (prirustky_1.csv, ...), kovarianční matice (mat_1.csv, ...), optimální váhy (vahymat.csv), očekávané výnosnosti portfolií (ocek.vynos.csv), rizika změn výnosů portfolií (riziko.csv), absolutní počty změn akcií (pocet_zmen_celk_1_mes-07-09.csv), celkové hodnoty portfolií (sk.prostredky.cel_1_mes-07-09.csv), tržní kapitalizace (trzni_cena_1_mes-07-09.csv), rozdíly vlastních čísel (rozdil_1.csv, ...), atd.,

(c) dvou_měs_interval,

(d) tří_měs_interval,

(e) šest_měs_interval,

(f) roční_měs_interval.

Ostatní složky (c) - (f) obsahují stejně pojmenované soubory s příslušnými výsledky, které odpovídají konkrétnímu časovému intervalu.

2. výsledky_průměr_reálná_data

(a) spouštění_kód

- `stab_opt_port_pr_real.R`, `data_12.csv`, `datacl_12.csv`, hodnoty portfolií (`sk.prostredky.cel_1_mes-07-09.csv`, ...), absolutní počty změn (`pocet_zmen_celk_1_mes-07-09.csv`, ...), tržní kapitalizace (`trzni_cena_1_mes-07-09.csv`),

(b) měs_interval

- složky výsledků dvouletých investic (2016 - 2018, 2015 - 2017, 2014 - 2016, ...),
- složky obsahují příslušné odpovídající data pro průměrování (`data_prumer_1.csv`, ...), kovarianční matice (`mat_1.csv`, ...), zprůměrované kovarianční matice (`kov_1.csv`), data pro příslušná portfolia (`d_1.csv`, ...), relativní přírůstky - jednodenní výnosnosti (`prirustky_1.csv`, ...), optimální váhy (`vahymat.csv`), rizika změn výnosů portfolií (`riziko.csv`), očekávané výnosnosti portfolií (`ocek.vynos.csv`), rozdíly vlastních čísel (`rozdil_1.csv`, ...), absolutní počty změn akcií (`pocet_zmen_celk_1_mes-07-09.csv`), celkové hodnoty portfolií (`sk.prostredky.cel_1_mes-07-09.csv`), tržní kapitalizace (`trzni_cena_1_mes-07-09.csv`), atd.,

(c) dvou_měs_interval,

(d) tří_měs_interval,

(e) šest_měs_interval,

(f) roční_měs_interval.

Ostatní složky (c) - (f) obsahují stejně pojmenované soubory s příslušnými výsledky, které odpovídají konkrétnímu časovému intervalu.

3. výsledky_sim_data

(a) spouštění_kód

- `stab_opt_port_sim.R`, `simulace_dat.R`, `data.csv`, hodnoty portfolií (`sk.prostredky.cel_1_mes-07-09.csv`, ...), absolutní počty změn (`pocet_zmen_celk_1_mes-07-09.csv`, ...), tržní kapitalizace (`trzni_cena_1_mes-07-09.csv`),

(b) měs_interval

- složky výsledků dvouletých investic (2016 - 2018, 2015 - 2017, 2014 - 2016, ...),
- složky obsahují příslušná data (`d_1.csv`, ...), relativní přírůstky - jednodenní výnosnosti (`prirustky_1.csv`, ...), kovarianční matice (`mat_1.csv`, ...), optimální váhy (`vahymat.csv`),

očekávané výnosnosti portfolií (ocek.vynos.csv), rizika změn výnosů portfolií (riziko.csv), absolutní počty změn akcií (pocet_zmen_celk_1_mes-07-09.csv), celkové hodnoty portfolií (sk.prostredky.cel_1_mes-07-09.csv), tržní kapitalizace (trzni_cena_1_mes-07-09.csv), rozdíly vlastních čísel (rozdil_1.csv, ...), atd.,

- (c) dvou_mes_interval,
- (d) tři_mes_interval,
- (e) šest_mes_interval,
- (f) roční_mes_interval.

Ostatní složky (c) - (f) obsahují stejně pojmenované soubory s příslušnými výsledky, které odpovídají konkrétnímu časovému intervalu.

4. výsledky_průměr_sim_data

(a) spouštění_kód

- stab_opt_port_pr_sim.R, simulace_dat.R, data.csv, hodnoty portfolií (sk.prostredky.cel_1_mes-07-09.csv, ...), absolutní počty změn (pocet_zmen_celk_1_mes-07-09.csv, ...), tržní kapitalizace (trzni_cena_1_mes-07-09.csv),

(b) mes_interval

- složky výsledků dvouletých investic (2016 - 2018, 2015 - 2017, 2014 - 2016, ...),
- složky obsahují příslušné odpovídající data pro průměrování (data_prumer_1.csv, ...), kovarianční matice (mat_1.csv, ...), zprůměrované kovarianční matice (kov_1.csv), data pro příslušná portfolia (d_1.csv, ...), relativní přírůstky - jednodenní výnosnosti (prirustky_1.csv, ...), optimální váhy (vahymat.csv), rizika změn výnosů portfolií (riziko.csv), očekávané výnosnosti portfolií (ocek.vynos.csv), rozdíly vlastních čísel (rozdil_1.csv, ...), absolutní počty změn akcií (pocet_zmen_celk_1_mes-07-09.csv), celkové hodnoty portfolií (sk.prostredky.cel_1_mes-07-09.csv), tržní kapitalizace (trzni_cena_1_mes-07-09.csv), atd.,

- (c) dvou_mes_interval,
- (d) tři_mes_interval,
- (e) šest_mes_interval,
- (f) roční_mes_interval.

Ostatní složky (c) - (f) obsahují stejně pojmenované soubory s příslušnými výsledky, které odpovídají konkrétnímu časovému intervalu.

Příloha G

Seznam použitých funkcí v softwaru R

Pro postup řešení byl zvolen software R a byly využity tyto funkce:

- *getSymbols()* - funkce, která se využívá pro stažení dat z burzy,
- *Delt()* - funkce, která se využívá pro výpočet k - denních výnosností (relativních přírůstků),
- *diff()* - funkce, která se využívá pro výpočet rozdílů po sobě následujících hodnot,
- *cov()* - funkce, která se využívá pro výpočet kovarianční matice,
- *solve.QP()* - funkce, která se využívá pro řešení kvadratické optimalizace,
- *Reduce()* - funkce, která se využívá pro zprůměrování příslušných kovariančních matic,
- *mean()* - funkce, která se využívá pro výpočet průměru z příslušných hodnot a
- *sd()* - funkce, která se využívá pro výpočet směrodatné odchylky z příslušných hodnot.