FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2021

Vyšetřování podélných vln v tenkých viskoelastických tyčích za účelem identifikace materiálových parametrů

Jakub Šulda[1]

1 Úvod

Cílem této práce je sestavit model popisující šíření podélných vln v tenké prizmatické viskoelastické homogenní tyči a následně jej využít k identifikaci vlastností vybraných typů materiálů. K popisu vlastností viskoelastického prostředí se mimo jiné využívají diskrétní reologické modely, které jsou tvořeny různými kombinacemi zapojení elastických pružin a vazkých tlumičů (viz Sobotka (1981)). Mezi nejjednodušší modely patří Voigtův-Kelvinův a Maxwellův model. První z nich je reprezentován paralelním spojením pružiny a tlumiče a je vhodný pro popis tečení. Naopak ve druhém zmíněném modelu jsou tyto elementy zapojeny v sérii, což umožňuje modelovat jev relaxace. V této práci je pro popis materiálových vlastností použit komplexní model zobecněného standardního viskoelastického tělesa (ZSVT), ve kterém je elastická pružina paralelně spojena s navzájem paralelně zapojenými n Maxwellovými modely. Tento model tak umožňuje popsat oba výše uvedené jevy.

2 Matematický model úlohy a identifikace materiálových parametrů

Šíření podélných vln v 1D viskoelastickém prostředí, jehož vlastnosti jsou reprezentovány ZSVT modelem, popisuje parciální integrodiferenciální rovnice druhého řádu

$$\left(c_{0,E}^2 + \sum_{i=1}^{n} c_{0,i}^2\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{0,i}^2 E_i}{\lambda_i} \int_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,\tau)\right) e^{-\frac{E_i}{\lambda_i}(\tau - t)} \mathrm{d}\tau = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t), \quad (1)$$

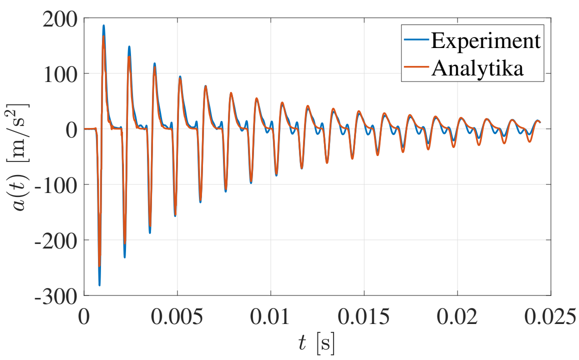
kterou lze odvodit analogickým postupem jako v elastickém případě (viz Graff (1991)). Konstanty E_i, λ_i postupně představují modul pružnosti pružiny a vazkost tlumiče v i-té Maxwellově větvi, $c_{0,E}$ a $c_{0,i}$ jsou pak konstanty definované pro jednotlivé pružiny analogicky jako rychlost c_0 podélných vln v 1D elastickém prostředí. Funkce $u(x,t)$ závislá na podélné souřadnici x a čase t představuje osový posuv tyče. Řešení rovnice (1) lze s výhodou hledat v Laplaceově oblasti. Při zohlednění nulových počátečních podmínek je možné pro obraz posuvu $U(x,p)$ psát

$$U(x,p) = A_1(p) \sinh \frac{px}{C_0(p)} + A_2(p) \cosh \frac{px}{C_0(p)}, \quad (2)$$

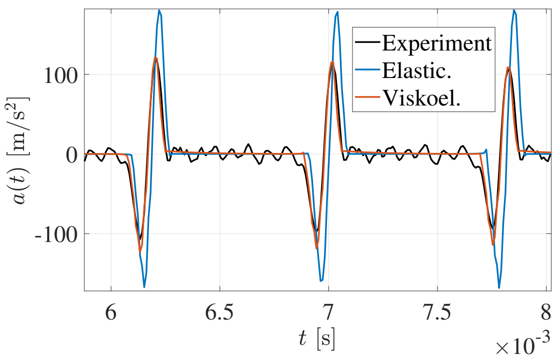
kde $p \in \mathbb{C}$ a funkce $C_0(p)$ charakterizuje komplexní rychlost vlny. Tvary neznámých funkcí $A_1(p)$, $A_2(p)$ lze nalézt z okrajových podmínek úlohy, které zohledňují způsob uložení tyče a její buzení. K získání požadované odezvy tyče v časové oblasti byla na řešení (2) aplikována zpětná numerická Laplaceova transformace. Konkrétně byla využita metoda prezentovaná v práci Brančík (1999) založená na kombinaci rychlé Fourierovy transformace a ε-algoritmu pro urychlení konvergence metody.

[1] student navazujícího studijního programu Aplikovaná mechanika, obor Dynamika konstrukcí a mechatronika, e-mail: jsulda@students.zcu.cz

Pro ověření správnosti odvozeného řešení a následnou identifikaci materiálových parametrů byly v rámci práce provedeny experimenty na tenkých tyčích délek 1 m a 2 m a průměrech 5 až 8 mm z polyoximetylenu (POM-C), polykarbonátu (PC 1000), oceli a hliníku. Na jednom konci byly tyče buzeny rázovým kladívkem, na druhém konci pak bylo snímáno zrychlení pomocí piezoelektrického akcelerometru. Aby bylo možné získat pomocí odvozeného řešení odezvu tyče, která by byla v dobré shodě s naměřenou, bylo zapotřebí nejprve identifikovat materiálové vlastnosti jednotlivých tyčí. Za tímto účelem byl v prostředí Matlab vytvořen program využívající standardní funkci *fmincon* a objekt *GlobalSearch*. Dvoufázovým optimalizačním procesem byla pak minimalizována cílová funkce, která vyjadřovala normovaný rozdíl mezi naměřenými daty a výsledky získanými pomocí analytických vztahů pro materiálové parametry zvoleného ZSVT. Pomocí výše zmíněného postupu se podařilo identifikovat materiálové parametry pro uvedené materiály. Na obr. 1 je zobrazeno porovnání naměřené odezvy a odezvy vypočtené s identifikovanými materiálovými parametry ZSVT ($n = 10$) pro materiál POM-C. Analogická shoda vychází i při porovnání semi-analytických výsledků s experimentálními daty pro materiál PC 1000. Při porovnání odezev pro typicky elastické materiály (ocel, hliník) dojde při použití modelu ZSVT s $n = 10$ v delších časech k výrazně lepší shodě, než kdybychom zmíněné materiály modelovali jako čistě elastické (viz obr. 2).



Obrázek 1: Porovnání naměřené a vypočtené odezvy pro materiál POM-C



Obrázek 2: Porovnání naměřené a vypočtené odezvy pro hliník charakterizovaný elastickým a viskoelastickým modelem

3 Závěr

V této práci byly odvozeny analytické vztahy popisující šíření vln ve viskoelastickém 1D prostředí, jehož vlastnosti byly popsány ZSVT modelem. Výsledky provedených experimentů potvrdily správnost odvozeného řešení a umožnily provést efektivní identifikaci vlastností vybraných materiálů. V další fázi práce bude úloha zobecněna na identifikaci frekvenčně závislých materiálových parametrů viskoelastických materiálů.

Poděkování

Příspěvek byl podpořen grantem SGS-2019-009 ZČU v Plzni.

Literatura

Brančík, L. (1999) Programs for fast numerical inversion of Laplace transforms in Matlab language environment. *Proceedings of 7th MATLAB Conference*, pp. 27-39.

Graff, K. F. (1991) Wave motion in elastic solids, *Dover Publications, Inc., New York.*

Sobotka, Z. (1981) Reologie hmot a konstrukcí, *Studie ČSAV, Academia, Praha.*