FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2022

Existence postupných vln jako řešení zobecněného modelu visutého mostu

Hana Levá[1], Gabriela Holubová[2]

1 Úvod

Rovnice, jejichž řešeními jsou postupné vlny, lze nalézt v mnoha aplikacích. Jako typický příklad můžeme zmínit populační modely, modely proudění tekutin nebo modely vibrování dlouhých konstrukcí. V posledním případě je přítomnost takových řešení nežádoucí a je třeba zjistit, za jakých podmínek nastává. Postupné vlny byly pozorovány např. na visutých mostech Golden Gate Bridge nebo Tacoma Narrows Bridge, u něhož v důsledku tohoto jevu došlo v roce 1940 ke zřícení.

V tomto textu se zabýváme existencí řešení ve tvaru postupné vlny $u = u(x,t)$ parciální diferenciální rovnice čtvrtého řádu

$$u_{tt} + u_{xxxx} + \alpha u^+ - \beta u^- + g(u) - 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0, \tag{1}$$

kde $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $u^\pm = \max\{\pm u, 0\}$ a $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$. Další vlastnosti g budou upřesněny později. Jelikož $u \equiv \frac{1}{\alpha}$ je stacionárním řešením rovnice (1), je vhodné uvažovat okrajovou podmínku

$$u(x,t) \to \frac{1}{\alpha} \text{ pro } |x| \to +\infty \tag{2}$$

a hledat tzv. homoklinická řešení. Úloha (1)–(2) může sloužit jako model asymetricky podepřeného nosníku nebo zobecněný model visutého mostu.

Hlavní motivací pro naši práci jsou texty McKenna a Walter (1990) a Chen a McKenna (1997), v nichž byla původně úloha popisující normalizovaný model visutého mostu představena a zkoumána. Autoři dokazují existenci netriviálních řešení ve tvaru postupné vlny za poměrně silných předpokladů.

Výsledky naší práce souhlasí se závěry uvedenými v citované literatuře. Předpoklady na nelinearitu však podstatně zeslabujeme a dále ji zobecňujeme tím, že do ní zahrnujeme zápornou část u^-. Na druhou stranu se zdá, že když připustíme i nelinearity zachovávající znaménko, vede to k omezení možných hodnot vlnové rychlosti.

2 Variační formulace problému

Předpokládáme, že řešení mají tvar $u(x,t) = \frac{1}{a^4} z\left(ax - ca^2 t\right) - \frac{1}{a^4}$, kde $a^4 = \alpha$ a $z \in C^4(\mathbb{R})$. Dále označíme $\tilde{g}(z) = g\left(\frac{1}{\alpha}(z+1)\right)$. Uvažujme Hilbertův prostor $H = W^{2,2}(\mathbb{R})$ a funkcionál

$$I(z) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left((z''(t))^2 - c^2 (z'(t))^2 + \left((z(t)+1)^+\right)^2 + \xi \left(\left((z(t)+1)^-\right)^2 - 1\right) \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} z(t) \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} G(z(t)) \mathrm{d}t$$

[1] studentka doktorského studijního programu Matematika, e-mail: levah@ntis.zcu.cz
[2] Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni, e-mail: gabriela@kma.zcu.cz

s parametry $\xi = \beta/\alpha \geq 0$ a $c^2 \in (0,2)$, kde $G(z) = \int_0^z \tilde{g}(w)\mathrm{d}w$ a $|c\alpha|$ odpovídá vlnové rychlosti. Navíc zavádíme konstantu $C_1 = \frac{4}{4-c^4}$ a uvažujeme, že nelinearita $\tilde{g}$ splňuje následující předpoklady

$$\tilde{g} \in C(\mathbb{R}), \qquad \tilde{g}(0) = 0, \qquad \tilde{g}'_{\pm}(0) \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

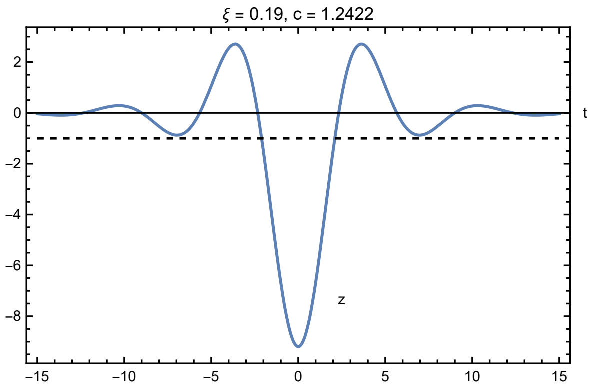
$$\exists \delta > 0 \text{ a } \nu \in (0,1) : \ \tilde{g}(z)z \geq -\tfrac{1-\nu}{C_1} z^2 \text{ pro všechna } |z| \leq \delta, \tag{4}$$

$$\lim_{z \to -\infty} \tilde{g}(z) > -\infty \quad \text{ a } \quad \tilde{g} \text{ je konvexní pro } z < 0 \text{ a konkávní pro } z > 0. \tag{5}$$

Kritické body funkcionálu I odpovídají slabým řešením ve tvaru postupné vlny $z = z(t)$ úlohy (1)–(2), tj. $I'(z)\varphi = 0$ pro $\varphi \in H$.

3 Existence řešení ve tvaru postupné vlny a použité metody

Za předpokladů (3)–(5) má úloha (1)–(2) pro libovolné $\xi \in [0, 1/3)$ a $c^4 \in (12\xi, 4)$ nekonečně mnoho netriviálních homoklinických řešení ve tvaru postupné vlny s libovolnou vlnovou rychlostí $\sqrt[4]{\alpha}c \in \left(-\sqrt[4]{4\alpha}, -\sqrt[4]{12\beta}\right) \cup \left(\sqrt[4]{12\beta}, \sqrt[4]{4\alpha}\right)$, tedy má alespoň jedno vlnové řešení pro pevně zvolenou rychlost. Pro $c < 0$ to znamená, že se vlna pohybuje směrem doleva, pro kladné hodnoty postupuje doprava.



Obrázek 1: Graf klasického řešení z úlohy (1)–(2) s parametry $\xi = 0,19$ a $c = 1,2422$.

Důkaz je založen na variačních metodách, konkrétně pak na použití věty Mountain Pass Theorem. Vzhledem k tomu, že řešíme úlohu na neomezené oblasti, nelze využít klasické argumenty o kompaktních vnořeních prostorů. K důkazu existence kritického bodu I místo toho využijeme metodu nenulové slabé konvergence po vhodné translaci.

Dále byly provedeny numerické experimenty v prostředí MATLAB pro nalezení parametrů popisujících klasické řešení z úlohy (1)–(2). Jedno z možných klasických řešení můžeme vidět na Obrázku 1. Zdá se, že pro zmenšující se hodnoty c, resp. zmenšující se vlnové rychlosti, se amplituda řešení zvětšuje. Tento výsledek je také v souladu s výsledky uvedenými v literatuře.

Poděkování

Příspěvek byl podpořen grantovým projektem č. 22–18261S Grantové agentury České Republiky.

Literatura

Chen, Y. a McKenna, P. J. (1997) Traveling waves in a nonlinearly suspended beam: Theoretical results and numerical observations. *Journal of differential equations*, 136, pp. 325–355.

McKenna, P. J. a Walter, W. (1990) Travelling waves in a suspension bridge. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 50(3), pp. 703–715.