ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

Soustavy rovnic ve výuce matematiky na 2. st. ZŠ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Michaela Radová

Učitelství pro základní školy, obor Učitelství matematiky pro základní školy

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň 2022

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 26. dubna 2022

....
vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce PhDr. Lukášovi Honzíkovi, Ph.D. za spolupráci, odborné vedení, cenné rady a připomínky při tvorbě práce.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

SEZNAM ZKRATEK

RVP – rámcový vzdělávací plán

ŠVP – školní vzdělávací plán

ZV – základní vzdělání

MŠMT – Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy

Úvod

Soustavy rovnic je jedno z témat, které se běžně probírá na základních školách v osmém, či devátém ročníku. Metodika výuky dané problematiky je velice různorodá a každý učitel danou látku učí po svém. Z tohoto důvodu jsem se rozhodla svou diplomovou práci zaměřit tímto směrem, abych pomohla stávajícím, ale i budoucím učitelům zvýšit kvalitu výuky daného tématu. V mé diplomové práci se nejprve vracím k počátkům výuky soustav rovnic a jejich využití v úlohách. Čtenářům diplomové práce nastíním konkrétní modelové příklady, které se využívaly v Řecku, Mezopotámii, Egyptě, Číně, Indii a Evropě. K daným historickým celkům vždy uvádím významné osobnosti a dochované písemné prameny. V následující teoretické části se budu zabývat obecný zavedením rovnic a jejich soustav poté se zaměřím na lineární rovnice, které jsou probírány na základní škole. Konkrétně se budu zabývat jednotlivými metodami řešení soustav lineárních rovnic. Každou metodu stručně popíši a představím ji na modelovém příkladu. U každého příkladu vykonám ověření postupu pomocí zkoušky. V dané kapitole se zaměřím i na slovní úlohy. U jednotlivých typů slovních úloh představím konkrétní metodu pro řešení vybraného typu slovní úlohy.

Soustavy rovnic a kurikulární pojetí bude kapitola, ve které se nejprve zaměřím na formulaci soustav rovnic v rámcovém vzdělávacím plánu a seznámím stručně čtenáře s RVP. V dané kapitole zpracuji několik vybraných školních vzdělávacích plánů a porovnám je mezi sebou. Vysvětlím co je to tematický plán a zdůrazním jeho důležité části a jeho výhody.

V poslední kapitole Metody vyučování a problémová místa seznámím čtenáře s několika učebnicemi a pracovními sešity, které se věnují tématu soustavy rovnic. V této kapitole též představím typy motivačních úloh, uvedené metody řešení, porovnám přehlednost zadání jednotlivých úloh, porovnám počet úloh a zhodnotím atraktivitu v jednotlivých materiálech. V kapitole se také pokusím upozornit na problematická místa z pohledu učitelů a z pohledu žáků.

1 HISTORIE ROVNIC A JEJICH VÝUKY

V historii matematiky můžeme narazit na spoustu zajímavých úloh, které jsou řešitelné pomocí rovnic. Dříve se rovnice řešily úplně jinými postupy než v dnešní době. S některými z těchto způsobů se seznámíme v následujícím textu. Často také narazíme na jiné způsoby zápisu operací, které dnes běžně používáme. Dříve se také používalo méně symbolů a více slov.

1.1 ROVNICE A ŘECKO

V Řecku počítání často zůstávalo stranou a pozornost matematiků byla zaměřena spíše na teorii. Řekové využívali pro řešení rovnic často geometrii, tímto způsobem řešili následující typy:

$$ax = b^2,$$

$$ax = bc,$$

$$x^2 = ab,$$

$$ax - x^2 = b^2,\ b < \frac{a}{2}$$

$$ax + x^2 = b^2,$$

$$x^2 - ax = b^2, \text{ kde vždy } a, b, c \in R^+.$$

Důležitou roli v Řecké matematice měl Diofantos, který je autorem spisu Aritmetika. Spis pochází z 3. století n. l. a je zde poprvé v historii zavedena algebraická symbolika a také symbol, který reprezentuje neznámou S'. Také byly ve spisu zavedeny symboly pro mocniny a pro operaci odčítání. Dále byla zformulována pravidla pro řešení rovnic:

1. Stejné odečíst od stejného tak, aby na každé straně zůstal jen jeden člen jiného stupně.
2. Přičíst záporné členy k oběma stranám rovnice tak, aby na obou stranách rovnice zůstaly kladné členy.

Diofantos se zabýval hlavně řešením lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav. Dalším významným autorem sbírky epigramů Anthologia Palatina, která se zabývala řešením lineárních rovnic a jejich soustav, byl Metrodoros, který žil ve 4. stol. n. l.

1.1.1 Příklady úloh ze sbírky:

a) *Když Kyprida spatřila, že Erós pláče, zeptala se ho: Co tě tak rozstesknilo, mohu to vědět? Šel jsem z Helikónu a nesl jsem mnoho jablek, říká Erós, ale potom mne náhle přepadly Múzy a zmocnily se sladké nůše. Dvanáctinu v mžiku popadla Euterpé, Kleió si oddělila pětinu, Thaleia osminu. Dvacátý díl pro sebe zabrala Malpomené a čtvrtinu Terpsichoré. Sedminu uchvátila a jak přelud zmizela Erató. Třicet plodů si vzala Polymnia. Sto dvacet se jich dostalo Uránii a tři sta Kalliopé. A tak se vracím domů s prázdnýma rukama, zbylo mi jen půl stovky jablek.* [7]

Počet jablek označíme *x*. Úloha vede na následující rovnici:

$$\frac{1}{12}x+\frac{1}{5}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{20}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+30+120+300=x-50$$

Po vyřešení této rovnice získáme výsledek, že Erós měl na začátku 3360 jablek.

b) *Těžce naložená vínem šla oslice s mezkem. A oslice sténala velice silně pod tíží nákladu. Její společník to viděl a řekl vzdychajícímu zvířeti: Matko, pročpak naříkáš jako plačící holčička? Kdybys mi dala jednu libru, nesl bych dvakrát tolik, jako ty neseš; když mi jednu vezmeš, poneseme oba stejně. Vypočítej mi, ó matematiku, kolik každý nesl.* [8]

Počet liber, které nesl mezek, označíme *x* a počet liber, které nesla oslice, označíme *y*. Dále úloha vede k soustavě rovnic:

$$2(y-1)=x+1,$$

$$x-1=y+1.$$

Po vyřešení této soustavy dojdeme k výsledku, že mezek nesl 7 liber a oslice 5 liber.

1.2 Rovnice a Mezopotámie

V Mezopotámii se již v 18. století př. n. l. řešily úlohy, které dnes řešíme pomocí lineárních rovnic a jejich soustav. Opět se využívala geometrie a chyběla matematická symbolika. Využívali známé pojmy: délka, šířka, výška, hloubka a dále plocha, obsah nebo čtverec šířky, čtverec délky. Součin tří neznámých byl označován jako objem. Často nebyl dodržen princip homogenity a sčítali se délky, šířky, obsahy a objemy dohromady. K zápisu čísel se využívala šedesátková poziční soustava.

1.2.1 PŘÍKLADY ÚLOHY:

Součet výměr dvou polí dává 30 čtverečních jednotek. Z nich sklidili (18, 20) měřic zrna. Určete výměru pole, když víte, že ze 30 čtverečních jednotek prvního pole sklízejí (20, 0) měřic zrna a ze 30 čtverečných jednotek druhého pole sklízejí (15, 0) měřic zrna. [7]

$$(18, 20) = 18.60 + 20 = 1100,$$
$$(20, 0) = 20.60 = 1200,$$
$$(15, 0) = 15.60 = 900,$$

Na 30 čtverečních jednotek: $\frac{1200}{30} = 40; \frac{900}{30} = 30$

Označíme si výměry polí x, y, pak budou rovnice vypadat následovně:

$$40x + 30y = 1100,$$

$$x + y = 30.$$

Výměry polí jsou 20 a 10 čtverečních jednotek.

1.3 ROVNICE A EGYPT

Matematika v Egyptě je založena na dvou dochovaných spisech, kterými jsou Rhindův papyrus, známý také jako Londýnský, či Ahmosův papyrus. Dochovaná kopie tohoto spisu pochází z 16. století př. n. l. a Moskevský papyrus, který pochází ze 17. století př. n. l. Řešení úloh z těchto spisů lze označovat za začátek algebry. Často je ve spisech používaná metoda chybného předpokladu, či metoda přímým dělením.

1.3.1 PŘÍKLADY ÚLOHY Z PAPYRUSU:

Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15. [7]

Zápis pomocí našich symbolů bude následující:

$$x + \frac{1}{4}x = 15$$

Egypťané řešili tuto úlohu pomocí metody chybného předpokladu. Řešitel nejprve předpokládá, že hledané množství je rovno čtyřem, protože jednu čtvrtinu ze čtyř lze vypočítat snadno. Dosazením čísla 4 za x do levé strany rovnice dostane číslo 5, na pravé straně rovnice je ovšem číslo 15, to je číslo třikrát větší než 5. Tím pádem dojdeme k chybnému předpokladu a musíme ho násobit třemi. Potom získáme $x = 12$.

1.4 ROVNICE A ČÍNA

V Číně byl dochován spis Matematika v devíti knihách, který vznikl až v 1. století n. l. Je to soubor úloh, mezi nimiž nalezneme úlohy vedoucí na řešení pomocí lineární rovnice nebo užitím soustavy rovnic. Tento spis je jednou z nejvýznamnějších učebnic, která výrazně ovlivnila vývoj a vyučování matematiky v Číně. V současné době je tato kniha dostupná i v českém jazyce. Konkrétně v sedmé kapitole nalezneme slovní úlohy vedoucí na řešení pomocí soustav rovnic. V osmé kapitole nalezneme slovní úlohy vedoucí na řešení pomocí matic.

1.4.1 PŘÍKLADY ÚLOH ZE SPISU:

a) *Několik lidí společně kupuje berana. Když každý přispěje pěti penízi, bude chybět 45 penízů do ceny berana. Když každý přispěje sedmi penízi, budou chybět tři peníze. Kolik je lidí, jakou cenu má beran?* [7]

Označíme si počet lidí jako *x* a ceny berana *y*. A získáme následující soustavu rovnic:

$$5x + 45 = y,$$
$$7x + 3 = y.$$

Po vyřešení se dostaneme k hodnotám, že lidí bylo 21 a beran stál 150 penízů.

b) *Při prodeji dvou buvolů, 5 ovcí a koupi 13 vepřů zůstalo 1000 čchien, při prodeji 3 buvolů a 3 vepřů stačily peníze přesně na koupi 9 ovcí a při prodeji 6 ovcí a 8 vepřů koupili 5 buvolů a nedostalo se 600 čchien. Určete cenu buvola, ovce a vepře.* [5]

V této úloze máme tři neznámé, označíme si je postupně *x, y, z* a získáme soustavu rovnic:

$$2x + 5y - 13z = 1000,$$

$$3x - 9y + 3z = 0,$$

$$-5x + 6y + 8z = -600.$$

Po vyřešení nám vyjde cena buvola 1200, ovce 500 a vepře 300.

1.5 ROVNICE A INDIE

V Indii byly dochovány spisy matematika Bháskara II. Je zde využita metoda falešného předpokladu. Další příklady o rovnicích se objevují ve spisech matematika Mahávíra, žijícího v 9. století n. l.

1.5.1 PŘÍKLADY ÚLOH ZE SPISU:

a) *Stádo opic bavící se v háji se rozdělilo na dvě části. Čtverec osminy jejich počtu se bavil skákáním ve větvích. Dvanáct opic vítalo radostným křikem tichý rozbřesk dne. Kolik opic je celkem?* [5]

Počet opic si označíme *x* a dostaneme rovnici:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

Po vypočítání dostaneme dvě hodnoty a to 48 a 16, obě vyhovují řešení.

b) *Během souboje kohoutů se jeden z diváků dohodl s jejich majiteli. Prvnímu řekl: "Když zvítězí tvůj kohout, dáš mi svou výhru, když prohraješ, zaplatím ti dvě třetiny možné výhry." Druhému soupeři řekl: "Když zvítězí tvůj kohout, dáš mi svou výhru, když prohraješ, zaplatím ti tři čtvrtiny možné výhry." V obou případech získá divák 12 penízů. Jakou výhru mohl získat každý majitel kohouta?* [7]

Označíme x, y výhry obou majitelů kohoutů, pak dostaneme soustavu:

$$x - \frac{3}{4}y = 12,$$

$$y - \frac{2}{3}x = 12.$$

Po vyřešení získáme $x = 42$ a $y = 40$.

1.6 ROVNICE A EVROPA

Úlohy řešené pomocí rovnic se našly ve spisech arménského matematika Anania Širakaci, který žil v 7. století. A dále ve sbírce Úlohy k bystření mladíků, která vznikla na dvoře Karla Velikého a autorem je Alkuin z Yorku. Z této sbírky také vychází známá úloha o převozníkovi, který má převézt vlka, kozu a zelí. Dalším významným matematikem byl Leonardo Pisánský zvaný Fibonacci, jeho spis Liber abaci obsahuje úlohy vedoucí k řešení pomocí lineárních a kvadratických rovnic.

Obrázek 1: Koza, vlk, zelí
(Zdroj: https://mozkolam.cz/slovni-hlavolamy/logicke-ulohy/vlk-koza-a-zeli)

1.6.1 PŘÍKLADY ÚLOH:

a) *Dva muži procházející po cestě viděli čápy a říkali si mezi sebou: Kolik jich je? Když se o jejich počtu poradili, řekli: Kdyby jich bylo ještě jednou tolik a ještě po třetí tolik a polovina třetiny (onoho trojnásobku), po přidání dvou by jich bylo sto. Ať řekne, kdo může, kolik jich bylo, které pocestní pozorovali.* [8]

Počet čápů si označíme *x* a sestavíme následující rovnici:

$$3x + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.3x + 2 = 100$$

Po vyřešení zjistíme, že čápů bylo 28.

b) *Jestliže jeden člověk dostane od druhého 7 denárů, bude mít pětkrát více než druhý. Jestliže druhý člověk dostane od prvního 5 denárů, bude mít sedmkrát více než první. Kolik mají nyní?* [1]

Úlohu vyřešíme pomocí soustavy rovnic:

$$x + 7 = 5(y - 7),$$

$$7(x - 5) = y + 5.$$

Po vyřešení se dostaneme k výsledku, že první má $7\frac{2}{17}$ a druhý má $1\frac{14}{17}$.

2 ROVNICE A JEJICH SOUSTAVY

Rovnice je jeden ze základních pojmů v matematice a jeden z prostředků, díky kterému celá matematika funguje. Uvažujeme-li dvě funkce $f(x)$, $g(x)$, které jsou definovány na nějaké množině D, pak nalezení všech $x \in D$, které splňují $f(x) = g(x)$ se nazývá rovnice o jedné neznámé x. Funkce $f(x)$ je levou stanou rovnice a funkce $g(x)$ je pravou stranou rovnice. Každá rovnice má své kořeny a to každé číslo $x_0 \in D$, které vyhovuje vztahu $f(x_0) = g(x_0)$. Množinu všech kořenů rovnice označujeme řešením rovnice. Rovnice mohou mít jedno řešení, ale také žádné anebo nekonečně mnoho řešení. Rovnice pro n neznámých má následující tvar $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$. Rovnice dále můžeme dělit na algebraické a nealgebraické. Algebraická rovnice n-tého stupně o jedné neznámé má tvar $a_n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, kde levou stanu rovnice tvoří polynom n-tého stupně $a_n \neq 0$, přičemž se předpokládá, že $n \geq 1$. Pokud rovnici nelze zobrazit v předešlém tvaru jedná se o rovnici nealgebraickou. Mezi nejjednodušší algebraické rovnice patří lineární rovnice a kvadratické rovnice. Mezi nealgebraické rovnice patří exponenciální rovnice, logaritmické rovnice nebo rovnice goniometrické.

Soustavou rovnic rozumíme více rovnic, které řešíme dohromady. V soustavě obvykle nalezneme více než jednu proměnou a řešením je pak taková kombinace čísel, která vyhovuje všem zadaným rovnicím. Soustava může mít více než jedno řešení, ale nemusí mít také řešení žádné.

Na základní škole se ale setkáme pouze s lineárními rovnicemi a soustavami lineárních rovnic většinou o dvou neznámých ve výjimkách o třech neznámých.

2.1 LINEÁRNÍ ROVNICE A JEJICH SOUSTAVY

Lineární rovnice je taková rovnice, kterou můžeme upravit na tvar $ax + b = 0$, kde $a, b \in R\,; a \neq 0; a, b$ jsou konstanty a x je proměnná. V praxi ale často narážíme na příklady, kdy potřebujeme řešit dvě a více rovnic dohromady.

Předpis soustavy rovnic o dvou neznámých bude mít následující tvar:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

kde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$ jsou konstanty a $x, y \in R$ jsou proměnné.

V soustavě rovnic se také setkáme s více proměnnými a naším úkolem je najít takovou kombinaci čísel, kterou když dosadíme za proměnné, tak nám všechny rovnice dávají smysl nebo-li za jejich řešení považujeme každou uspořádanou dvojici čísel $[x_0, y_0]$, která je řešením obou jejich rovnic. V matematice a lineární algebře se jako soustava lineárních rovnic označuje množina dvou nebo více lineárních rovnic se dvěma nebo více proměnnými.

2.1.1 METODY ŘEŠENÍ

Soustavu lineárních rovnic řešíme pomocí ekvivalentních úprav. Mezi ně patří:

- Přičtení nebo odečtení stejného čísla nebo výrazu obsahujícího neznámou k oběma stranám rovnice.
- Násobení nebo dělení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem nebo výrazem obsahující neznámou.
- Výměna stran rovnice.
- Umocnění obou stran rovnice stejným přirozeným číslem (obě strany musejí být kladné).

Máme čtyři metody na jejich řešení. U lineárních soustav rovnic se také na konci výpočtu provádí zkouška. Zkouška spočívá v tom, že dosadíme jednotlivě čísla, která nám vyšla za jednotlivé proměnné a porovnáme rovnost levých a pravých stran rovnic. Pokud v řešení používáme pouze ekvivalentní úpravy, zkouška není vyloženě nutná.

- **Dosazovací metoda**

Tato metoda se někdy vyskytuje také pod názvem substituční. Princip je takový, že z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a takto získaný výraz dosadíme za příslušnou neznámou do druhé rovnice soustavy. Vznikne nám jedna lineární rovnice, kterou vyřešíme a poté pomocí výsledku dořešíme i rovnici první.

Použití metody:

$$3x + y = 4 \rightarrow y = 4 - 3x$$

$$x - 2y = 6$$

Dosazení do druhé rovnice:

$$x - 2(4 - 3x) = 6$$

$$x - 8 + 6x = 6$$

$$\underline{x = 2}$$

$$y = 4 - 3.2$$

$$\underline{y = -2}$$

Řešení: K={[2, -2]}

Zkouška:

$$L_1 = 3.2 + (-2) = 4$$

$$P_1 = 4$$

$$L_1 = P_1$$

$$L_2 = 2 - 2.(-2) = 6$$

$$P_2 = 6$$

$$L_2 = P_2$$

- **Sčítací metoda**

Metoda také nazývaná adiční spočívá v tom, že jednotlivé rovnice vynásobíme vhodnými (nenulovými) čísly, aby členy s jednou z neznámých představovaly po této úpravě opačné výrazy a jejich součet byl nulový. Po sečtení takhle vzniklých rovnic by nám měla zbýt jedna lineární rovnice s jednou neznámou.

Použití metody:

$$2x + y = 5$$

$$x + y = 4 \;/.(-1)$$

$$2x + y = 5$$

$$-x - y = -4$$

$$\underline{x = 1} \qquad 1 + y = 4$$

$$y = 4 - 1$$

$$\underline{y = 3}$$

Řešení: K={[1, 3]}

Zkouška: $L_1 = 2.1 + 3 = 5$

$P_1 = 5$

$L_1 = P_1$

$L_2 = 1 + 3 = 4$

$P_2 = 4$

$L_2 = P_2$

- **Srovnávací metoda**

Srovnávací metoda také komparační je založena na tom, že z obou rovnic vyjádříme stejnou neznámou a ze získaných výrazů vytvoříme jednu rovnici o jedné neznámé, kterou vyřešíme. Hodnotu pak dosadíme do jedné z rovnic a dořešíme druhou neznámou.

Použití metody:

$$y = 2x + 3$$

$$y = 10x - 5$$

$$2x + 3 = 10x - 5$$

$$-8x = -8$$

$$\underline{x = 1}$$

$$y = 2.1 + 3$$

$$\underline{y = 5}$$

Řešení: K = {[1, 5]}

Zkouška: $L_1 = 5$

$P_1 = 2.1 + 3 = 5$

$L_1 = P_1$

$L_2 = 5$

$P_2 = 10.1 - 5 = 5$

$L_2 = P_2$

➢ Grafická metoda

Každou lineární rovnici můžeme zároveň zobrazit jako funkci. Z obou rovnic vyjádříme neznámou *y,* čímž získáme předpis funkce a sestrojíme grafy.

Mohou nastat následující situace, kdy sestrojené přímky představující rovnice jsou:

- Různoběžné → soustava má jedno řešení a to průsečík těchto přímek
- Rovnoběžné různé → soustava nemá žádné řešení
- Rovnoběžné splývající →soustava má nekonečně mnoho řešení

Použití metody:

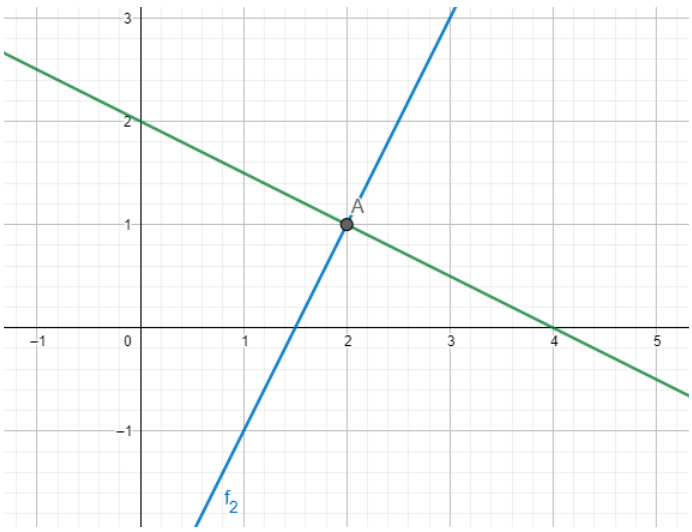
$$x + 2y - 4 = 0$$

$$2x - y - 3 = 0$$

$$f_1: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$f_2: y = 2x - 3$$

Sestrojíme grafy obou funkcí.



Obrázek 2: Grafická metoda

Průsečíkem přímek je bod A= [2, 1] a to znamená, že je jediným řešením této soustavy rovnic.

2.1.2 POČET ŘEŠENÍ

Ne vždy má soustava právě jedno řešení. Soustava může mít nekonečně mnoho řešení, nebo naopak žádné řešení. Nekonečně mnoho řešení mají například rovnice, které jsou sobě násobkem, jak můžeme vidět u následující soustavy rovnic:

$$x + y = 3$$
$$2x + 2y = 6$$

Příkladem soustavy rovnic nemající žádné řešení je ta, která obsahuje dvě protichůdné rovnice, které nemohou platit zároveň:

$$x + y = 5$$
$$x + y = 6$$

2.1.3 SLOVNÍ ÚLOHY

Růžena Blažková definuje ve své publikaci slovní úlohy jako úlohy, v nichž je souvislost mezi danými a hledanými údaji vyjádřena slovní formulací a v nichž je třeba na základě vhodných úvah zjistit, jaké operace je třeba provést s danými údaji, abychom došli k údajům, které máme určit. [2]

Dělení slovních úloh dle kontextu

- **Obecné slovní úlohy**

Příklad: Na dvoře pobíhalo třikrát více slepic než ovcí. Všechna tato zvířata měla dohromady 170 nohou. Kolik bylo na dvoře ovcí a kolik slepic?

Zápis:

	Počet kusů	Počet nohou	Počet nohou všech kusů
slepice	x	2	2x
ovce	y	4	4y
celkem			170

Tabulka 1: Zápis obecné slovní úlohy

Sestavení soustavy rovnic:

$$3y = x$$
$$2x + 4y = 170$$

$$6y + 4y = 170$$
$$y = 17$$

$$3.17 = x$$
$$x = 51$$

Zkouška: $L_1 = 3.17 = 51$ $\quad P_1 = 51$ $\quad L_1 = P_1$

$L_2 = 2.51 + 4.17 = 102 + 68 = 170$ $\quad P_2 = 170$ $\quad L_2 = P_2$

Odpověď: Na dvoře pobíhalo 51 slepic a 17 ovcí. [4]

Slovní úlohy o pohybu

Jsou takové slovní úlohy, kde se nachází údaje o dráze, rychlosti a době pohybu. K řešení této úlohy využíváme vzorec pro dráhu rovnoměrného pohybu $s = v * t$, kde jsou postupně veličiny dráha, rychlost a čas. Můžeme se nejčastěji setkat s následujícími úlohami:

a) Dva objekty se pohybují stejným směrem ze stejného místa.

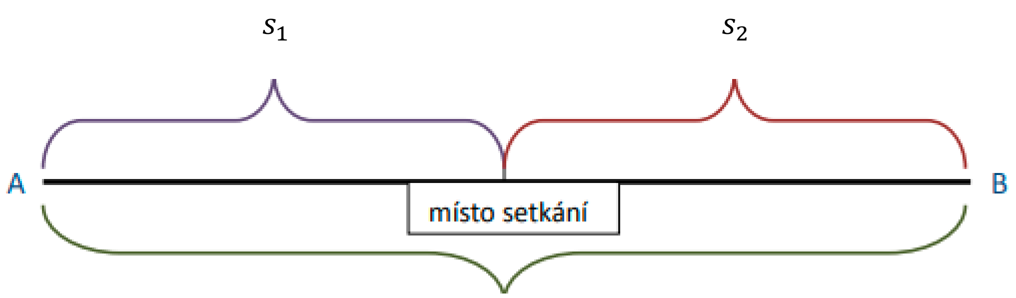
b) Dva objekty se pohybují různým směrem ze stejného místa.

c) Dva objekty se pohybují proti sobě z různých míst.

d) Dva objekty se pohybují opačným směrem z různých míst.

Příklad: Cyklista vyjede z místa A rychlostí 25 km/h. Proti němu vyjede motocyklista rychlostí 55 km/h. Vzdálenost míst A a B je 60 km. Kdy a kde se setkají?

Zápis:



Cyklista: $v_1 = 25\ km/h$ $\qquad$ Motocykl: $v_2 = 55\ km/h$

$$|AB| = s = 60\ km$$

Sestavení rovnice:

$$\frac{\begin{matrix} t_1 = t_2 = t \\ s_1 + s_2 = s \end{matrix}}{}$$

$$v_1 . t_1 + v_2 . t_2 = s$$

$$25t + 55t = 60$$

$$t = 0{,}75h = 45\ min$$

$$s_1 = 25.0{,}75 = 18{,}75\ km \qquad s_2 = 55.0{,}75 = 41{,}25\ km$$

Odpověď:
Setkají se po 45 minutách, kdy cyklista urazí dráhu 18,75 km a motocyklista 41,25 km.

- **Slovní úlohy o společné práci**

V těchto slovních úlohách vykonávají dva subjekty nějakou činnost a liší se dobou, za kterou danou činnost vykonají (výkonností).

Příklad: První dělník by sám splnil úkol za 8 hodin, druhý za 6 hodin. Po dvou hodinách společné práce odešel první dělník k lékaři a druhý práci dokončil sám. Kolik hodin pracoval druhý dělník sám? Jak dlouho trvalo splnit úkol?

Zápis:

	Každý sám	Za 1 hodinu	Za x hodin
1. dělník	8 hodin	$\frac{1}{8}$	$\frac{x}{8}$
2. dělník	6 hodin	$\frac{1}{6}$	$\frac{x}{6}$
celkem			1

Tabulka 2: Zápis slovní úlohy o společné práci

Sestavení rovnice:

$$\frac{2}{8}+\frac{2}{6}+\frac{x}{6}=1$$

$$14+4x=24$$

$$x=2{,}5h$$

$$\text{Práce celkem: } 2{,}5+2= \ 4{,}5\ hodiny$$

Odpověď:

Druhý dělník pracoval sám 2,5 hodiny. Celková práce trvala dohromady 4,5 hodiny. [4]

- **Slovní úlohy o směsích**

Úlohy, u kterých zjišťujeme složení složek, či celkové směsi.

Příklad: Limonáda se plní do menších láhví s objemem 0,33 litru a do větších s objemem 0,7 litru. Přitom 1 200 litrů limonády bylo stočeno do 3 300 lahví obou velikostí. Kolik menších a kolik větších láhví bylo plněno?

Zápis:

	Objem	Počet lahví	Celkový objem
1. druh	0,33	x	0,33x
2. druh	0,7	y	0,7y
celkem		3300	1200

Tabulka 3: Zápis slovní úlohy o směsích

Sestavení soustavy rovnic:

$$x + y = 3300$$
$$0{,}33x + 0{,}7y = 1200$$

$$x = 3300 - y$$

$$0{,}33(3300 - y) + 0{,}7y = 1200$$

$$1089 - 0{,}33y + 0{,}7y = 1200$$

$$0{,}37y = 111$$

$$y = 300, \;\; x = 300$$

Odpověď: Celkem bylo naplněno 300 větších a 300 menších lahví.

- **Řešení slovní úlohy vedoucí na soustavu o dvou neznámých s využitím tabulky**

Jedná se o speciální metodu, kterou lze použít na základní škole pro žáky v ročnících, ve kterých s řešením soustavy rovnic nejsou ještě seznámeny. Jak můžete vidět na následujícím obrázku na konkrétním příkladu, kde se dvě neznámé zanesou pomocí jedné.

Příklad: V hotelu jsou pouze dvoulůžkové a pětilůžkové pokoje. Kolik kterých pokojů najdeme v hotelu, jestliže víme, že hotel má celkem 30 pokojů a vejde se tam 99 lidí?

Zápis:

	Počet pokojů	Počet lidí
Dvoulůžkové	x	$2x$
Pětilůžkové	$30 - x$	$5(30 - x)$
celkem	30	99

Tabulka 4: Zápis pomocí jedné neznámé

Řešení:

$$2x + 5(30 - x) = 99$$

$$51 = 3x$$

$$x = 17$$

Zkouška, zpětné dosazení do tabulky:

17	34
13	65
30	99

Tabulka 5: Zpětné dosazení

Odpověď: V hotelu mají 17 dvoulůžkových pokojů a 13 pětilůžkových pokojů.

Dělení slovních úloh podle oblasti matematiky

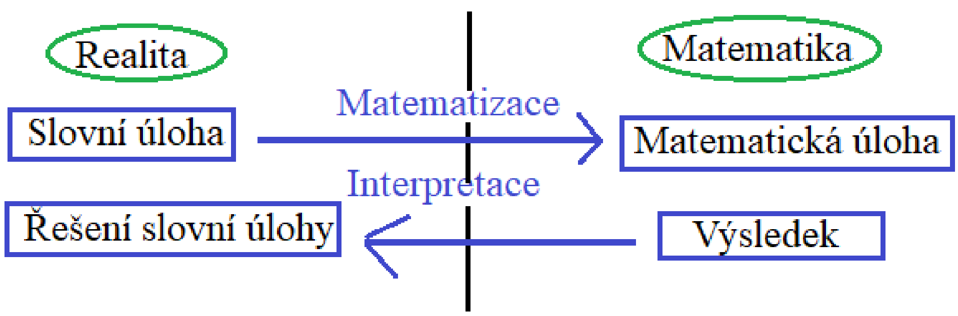
- **Matematické slovní úlohy**

Úlohy, které jsou vyjádřeny v příslušném symbolickém jazyce kalkulu. O číslech se hovoří, ale zadání se musí přeložit do matematického kalkulu. Dále tyto úlohy dělíme:

- Úlohy aritmetické – např.: Které číslo je třeba přičíst k 13, abychom dostali 32?
- Úlohy algebraické – např.: Rozdíl čísla a jeho odmocniny je 20. Určete toto číslo.
- Úlohy s geometrickým obsahem – např.: Vyšetřete množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu.

- **Nematematické slovní úlohy**

Jedná se o úlohy s textem, což znamená, že se v nich vyskytuje aspoň jeden termín, který nepatří do žádné matematické teorie. Řešení úloh s nematematickým textem podrobně popisuje následující obrázek 3. Na obrázku je znázorněn postup matematizace slovní úlohy na matematickou úlohu a zpětná interpretace výsledku na řešení zadané slovní úlohy.



Obrázek 3: Slovní úlohy s nematematickým kontextem

3 SOUSTAVY ROVNIC A KURIKULÁRNÍ POJETÍ

Kurikulárním dokumentem rozumíme dokument, který vymezuje koncepci, cíle a vzdělávací obsah dané etapy vzdělávání a vzniká na dvojí úrovni.

- Státní úroveň – tvorba RVP
- Školní úroveň – tvorba ŠVP

3.1 RÁMCOVÝ VZDĚLÁVACÍ PROGRAM (RVP)

Rámcový vzdělávací program je kurikulární dokument, který vytvořilo ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. Podílelo se na jeho tvorbě mnoho vzdělaných lidí. Byl několikrát zrevidován, poslední revize je z roku 2021. Rozděluje se na čtyři části. První část se věnuje vymezení rámcového vzdělávacího programu v systému kurikulárních dokumentů. Druhá část se věnuje charakteristice vzdělávání. Kam spadá školní docházka, hodnocení výsledků vzdělávání, získání stupně vzdělání a ukončení dosaženého vzdělávání. Třetí část se věnuje cílům vzdělávání, klíčovým kompetencím, vzdělávacím oblastím, průřezovým tématům a rámcovým učebním plánům. Příklad vzdělávacích oblastí je: jazyk a jazyková komunikace, matematika a její aplikace, člověk a příroda, člověk a společnost aj. Každá oblast je podrobně rozebrána a je v ní popsáno, jaké informace by se měly žákům předat. A také jaká témata by měl učitel zařadit do výuky a rozebrat je s žáky. Poslední část se zabývá vzděláváním žáků se speciálními vzdělávacími potřebami, vzděláváním žáků nadaných a mimořádně nadaných, materiálními, personálními, hygienickými, organizačními a jinými podmínkami pro uskutečnění RVP ZV, pak zásadami pro zpracování, vyhodnocování a úpravami školního vzdělávacího programu. Tento obsáhlý dokument slouží k vytvoření školního vzdělávacího programu.

Lineární rovnice jsou v tomto dokumentu uvedeny jen stručně:

Zařazeny jsou na 2. stupeň základní školy nebo do nižších ročníků víceletých gymnázií. Soustavy jsou uvedené v kapitole Číslo a proměnná.

- M-9-1-08 žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav
- Učivo rovnice – lineární rovnice, soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými [9]

3.2 ŠKOLNÍ VZDĚLÁVACÍ PROGRAMY (ŠVP)

Školním vzdělávacím plánem rozumíme kurikulární dokument, který vytváří pedagogičtí pracovníci jednotlivých škol, a je schvalován ředitelem dané školy. Každý ŠVP musí být veřejně přístupný a musí vycházet z aktuálního RVP. Obsahové uspořádání tohoto dokumentu není pevně stanoveno.

Nedílnou součástí školních vzdělávacích programů jsou podle RVP průřezová témata, která se zabývají aktuálními problémy ze současného světa. Tato průřezová témata slouží k individuálnímu uplatnění žáků a vzniku kooperace mezi žáky. Průřezová témata pomáhají rozvíjet osobnost žáka v oblasti postojů a hodnot. Mezi průřezová témata řadíme osobnostní a sociální výchovu, výchovu demokratického občana, výchovu k myšlení v Evropských a globálních souvislostech, multikulturní výchovu, environmentální výchovu a mediální výchovu.

Dále jsem se podrobně zaměřila na školní vzdělávací plány tří škol v Plzni a porovnala zařazení soustavy rovnic do obsahu výuky.

3.2.1 SPORTOVNÍ GYMNÁZIUM PLZEŇ

ŠVP na této škole je obsáhlejší a skládá se z 887 stránek. Zahrnuje programy pro všechny ročníky gymnázia a ještě navíc má speciální program pro vzdělání se sportovní přípravou. Gymnázium je škola zaměřená na skloubení sportovní přípravy a vzdělání žáků. Tato škola je určena pro všechny žáky, kteří jsou sportovně nadaní, a sport je jejich denní záležitostí. Žáci jsou už od šestého ročníku připravováni k pozdějšímu studiu na vysoké škole. Škola si potrpí na kvalifikovaných učitelích a na standardní kvalitě výuky. Výuka je podle ŠVP na této škole rozmanitá a všeobecně žáky rozvíjí a motivuje k dalšímu studiu. Podtitul ŠVP této školy je *Vstupní brána na vysokou školu*.

Časové vymezení hodin matematiky, jak můžeme vidět na obrázku 4, je v šestém ročníku pět hodin týdně, v sedmém a osmém ročníku čtyři hodiny týdně a v devátém ročníku tři hodiny týdně.

Časové vymezení:

Hodinová dotace				
Ročník	prima	sekunda	tercie	kvarta
Počet hodin	5	4	4	3

Obrázek 4: Časové vymezení SG

S rovnicemi se žáci poprvé setkají v tercii, což je osmý ročník základní školy. Soustavy dvou lineárních rovnic se vyučují až v kvartě neboli devátém ročníku základní školy. Hned na toto učivo pak navazují slovní úlohy řešené pomocí soustavy rovnic. [13]

3.2.2 28. ZÁKLADNÍ ŠKOLA PLZEŇ

ŠVP této školy je zaměřeno na výchovu kulturního, tvořivého, komunikativního, mravně odpovědného člověka, který hledá své místo v životě, chápe hodnotu zdraví a aktivně usiluje o jeho ochranu. ŠVP se podle toho i jmenuje „Tvořivá škola pro všechny“. Škola chce podle ŠVP využívat nejmodernější technologie k rozvoji svých žáků, snaží se zapojovat objevování, praktickou výuku, či práci v týmech. Dalším důležitým cílem školy je posilovat u žáků kladný vztah k pohybu jako přirozené součásti života. Škola si také podle ŠVP potrpí na vztahy ve škole, jak mezi učiteli, tak žáky, či rodiči. ŠVP je celkem složeno z 583 stránek. [12]

Časové vymezení

Vyučovací předmět Matematika se realizuje ve všech ročnících ZŠ v této hodinové dotaci:

	1. stupeň					2. stupeň			
Ročník	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Počet hodin	4	5	5	5	5	4	5	5	5

Obrázek 5: Časové vymezení 28. ZŠ

Časové vymezení matematiky, jak můžeme vidět na obrázku 5, je čtyři hodiny týdně v šestém ročníku a pak pět hodin týdně v sedmém až devátém ročníku. Žáci řeší lineární rovnice v osmém ročníku a se soustavami rovnic se setkávají v ročníku devátém. Navazují zde logicky slovní úlohy řešené pomocí soustav.

3.2.3 14. ZÁKLADNÍ ŠKOLA PLZEŇ

V ŠVP je škola definována jako škola jazykům, sportu a tvořivosti otevřená. Dokument této školy má 283 stránek. Cílem školy, který je uvedený v ŠVP je pomoci žákům získávat klíčové kompetence a zdokonalovat je, poskytovat všeobecný základ pro život a praktické jednání. Škola je zaměřena na rozšířenou výuku jazyků, sportu, tvořivých činností a matematicko-přírodovědných předmětů.

Časové vymezení matematiky je v šestém ročníku pět hodin a v sedmém až devátém ročníku čtyři hodiny týdně. Rovnice jsou řazeny do osmého ročníku a soustavy rovnic se řeší v ročníku devátém. [11]

3.3 TEMATICKÝ PLÁN

Tematický plán je tvořen individuálně pedagogem a pomáhá k organizaci a časovému rozložení výuky, musí vycházet ze školou daného ŠVP. Obsahuje konkrétně probírané učivo, název předmětu, jméno učitele, hodinovou dotaci apod. Tematický plán se může během školního roku upravovat.

V tematickém plánu různých škol a učitelů jsou soustavy rovnic popsány podrobněji a učivo je rozvrženo do konkrétních vyučovacích hodin podle hodinové dotace každé školy.

4 METODY VYUČOVÁNÍ A PROBLÉMOVÁ MÍSTA

4.1 UČEBNICE A PRACOVNÍ SEŠITY - ROZBOR

V této části jsem se podrobně zaměřila na učebnice a pracovní sešity běžně používané na školách. Hlavním cílem zkoumání bylo, jak je v nich téma soustav rovnic uchopeno. Základními kritérii bylo:

- Typ úvodní úlohy
- Jaké metody řešení jsou uvedeny
- Jak jsou úlohy a příklady přehledné
- Celkový počet úloh
- Atraktivita učebnice, pracovního sešitu (obrázky, grafické zpracování,…)

4.1.1 VYBRANÉ UČEBNICE A PRACOVNÍ SEŠITY

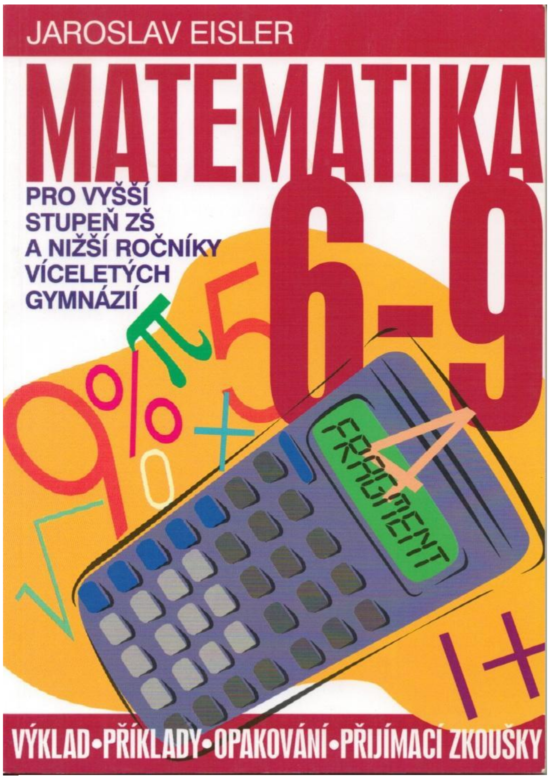
Pro následující analýzu jsem si vybrala dále uvedené učebnice a pracovní sešity.

- EISLER, Jaroslav. *Matematika 6-9 pro vyšší stupeň ZŠ a nižší ročníky víceletých gymnázií: [výklad, příklady, opakování, přijímací zkoušky]*. Havlíčkův Brod: Fragment, 1999. ISBN 80-7200-374-7.
- HERMAN, Jiří. *Matematika: rovnice a jejich soustavy*. Praha: Prometheus, 1999. Kvarta. ISBN 80-7196-137-x.
- ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2013. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-439-1.
- OSTRÝTOVÁ, Lenka. *Matematika od šestky do devítky*. V Praze: Fragment, 2021. ISBN 978-80-253-5034-8.
- PRESOVÁ, Jana, Jana DAVIDOVÁ a Dana HERMOCHOVÁ. *Hravá matematika 9: pracovní sešit pro 9. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. 2. vydání. Praha: Taktik, 2017. ISBN 978-80-7563-099-5.
- PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL, Jitka BOUŠKOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 9 pro základní školy*. 2. vydání. Praha:

SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost, 2019. ISBN 978-80-7235-614-0.

- TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika s nadhledem 9: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2020. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-518-0.

EISLER, Fragment 1999



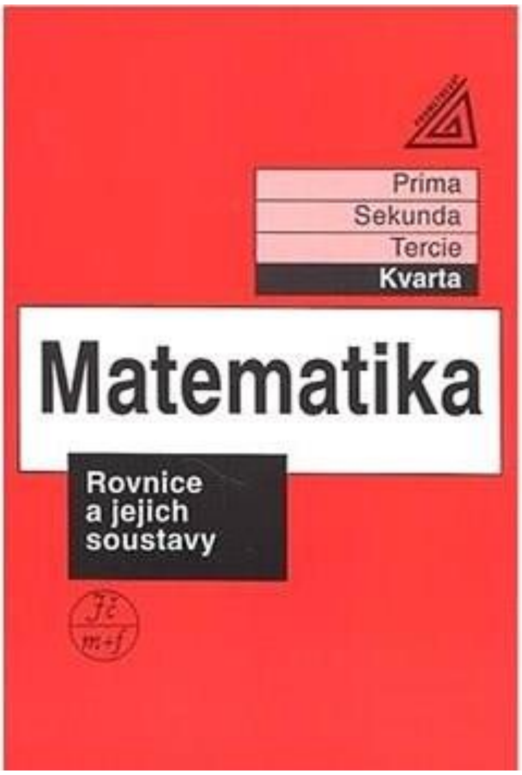
Obrázek 6: Matematika 6-9

Kniha je určená spíše jako souhrn učiva k přípravě na přijímací zkoušky na střední školu. Je v ní zahrnuto veškeré učivo od šesté do deváté třídy. Najdeme zde teorii a také ke každé kapitole příklady na procvičování i s řešením.

Tato učebnice je rozdělena na část teoretickou a část s příklady. V teoretické části se hned v úvodu soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých dozvíme, jaké máme metody řešení a kdy kterou můžeme použít. Následuje řešený příklad metodou dosazovací, k příkladu jsou doplněny slovní popisky postupu, na závěr je ukázán výpočet zkoušky.

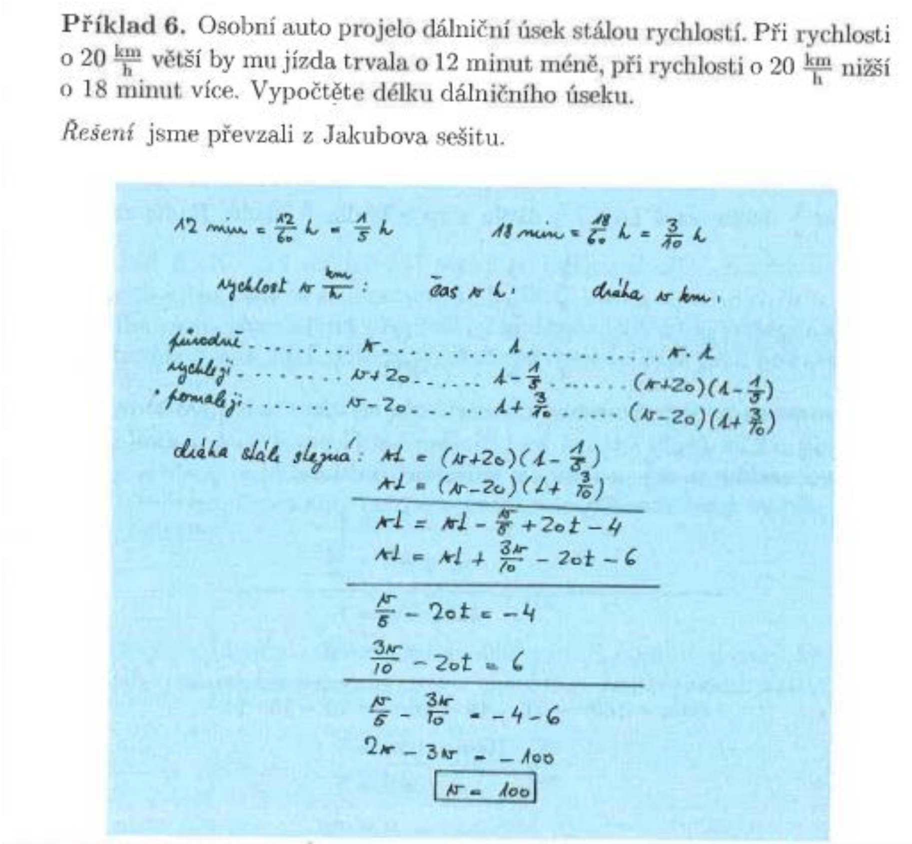
Na stejném příkladu je uvedena metoda sčítací i metoda porovnávací. Takže rozdíl mezi jednotlivými metodami je krásně rozpoznatelný a názorný. Dále následují ještě dvě různé řešené soustavy rovnic, jedna metodou sčítací a druhá pomocí metody dosazovací. Na závěr teoretické části najdeme v učebnici shrnutí, které hovoří o různých počtech řešení, ale bohužel zde nejsou uvedeny bližší informace, jak poznáme, kdy daná situace nastane. Jsou zde uvedeny tři různé slovní úlohy včetně doplněné podrobným řešením. Dvě jsou vyřešeny metodou sčítací a třetí je řešena metodou dosazovací. V procvičovací části s příklady nalezneme pouze devět různých soustav k řešení. Následují slovní úlohy, kde máme šest různých příkladů. Tato učebnice obsahuje učivo pro celý 2. stupeň základní školy proto je zde vše uvedeno jen stručně a učebnice bohužel neobsahuje moc velké množství příkladů k procvičování.

HERMAN, Prometheus, 1999



Obrázek 7: Matematika - Rovnice a jejich soustavy

Jedná se o knihu z řady učebnic matematiky, které v plném rozsahu pokrývají základní učivo v souladu s RVP. Nad rámec učiva nalezneme v knize vybrané úlohy z matematických olympiád pro nadané žáky. Na začátku kapitoly Rovnice s více neznámými nalezneme slovní úvod do tématu, který shrnuje předešlé učivo a seznamuje žáky s učivem novým. Tento úvod působí motivačně a nabádá k pokračování ve čtení. Autor se také zaměřil na řešení slovní úlohy s využitím soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Vše je podrobně a srozumitelně popsáno. Každý teoretický popis je vždy podložen příkladem k procvičení. Nejprve se žáci naučí vyjadřovat jednu neznámou pomocí druhé neznámé. Pak následuje seznámení s metodou srovnávací, dosazovací a sčítací. Ke každé metodě nalezneme v učebnici vždy několik řešených příkladů a příklady k procvičení. Následují řešené příklady, u kterých jsou uvedeny různé počty řešení. Vše je srozumitelně vysvětleno a názorně ukázáno na příkladu. Následuje celá kapitola s různými příklady k procvičení, a poté je teoreticky uvedeno použití soustav pro řešení slovních úloh. Opět je vše ukázáno na několika řešených příkladech a na stejném principu je vždy připravený příklad na procvičení. Na obrázku 8 si můžeme prohlédnout ručně psané řešení jednoho příkladu.



Příklad 6. Osobní auto projelo dálniční úsek stálou rychlostí. Při rychlosti o 20 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ větší by mu jízda trvala o 12 minut méně, při rychlosti o 20 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ nižší o 18 minut více. Vypočtěte délku dálničního úseku.

Řešení jsme převzali z Jakubova sešitu.

12 min = $\frac{12}{60}$ h = $\frac{1}{5}$ h   18 min = $\frac{18}{60}$ h = $\frac{3}{10}$ h

rychlost v $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$: čas v h. dráha v km.

původní .... v .... t .... $v \cdot t$

rychleji .... $v+20$ ...... $t-\frac{1}{5}$ ...... $(v+20)(t-\frac{1}{5})$

pomaleji .... $v-20$ ...... $t+\frac{3}{10}$ ..... $(v-20)(t+\frac{3}{10})$

dráha stále stejná: $vt = (v+20)(t-\frac{1}{5})$

$$vt = (v-20)(t+\tfrac{3}{10})$$

$$vt = vt - \tfrac{v}{5} + 20t - 4$$

$$vt = vt + \tfrac{3v}{10} - 20t - 6$$

$$\tfrac{v}{5} - 20t = -4$$

$$\tfrac{3v}{10} - 20t = 6$$

$$\tfrac{v}{5} - \tfrac{3v}{10} = -4 - 6$$

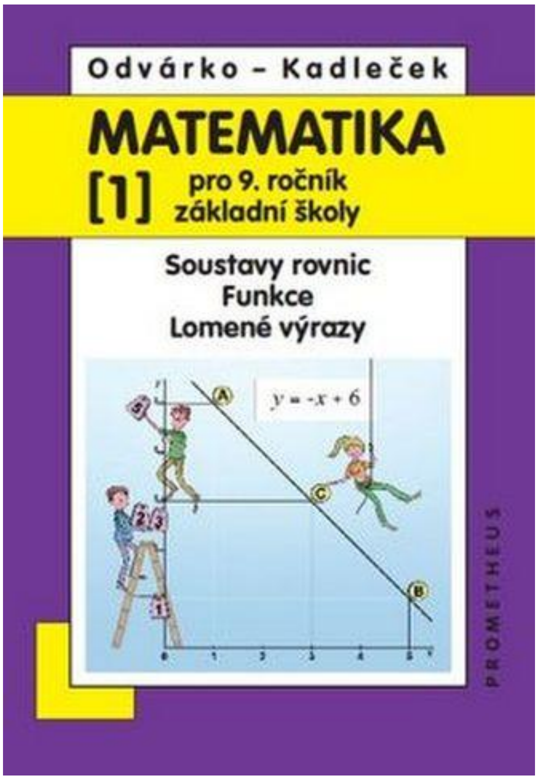
$$2v - 3v = -100$$

$$\boxed{v = 100}$$

Obrázek 8: Řešený příklad

Nakonec následuje celá kapitola, s různými příklady na řešení slovních úloh pomocí soustavy rovnic. Úloh na procvičování v učebnici najdeme velké množství.

ODVÁRKO, KADLEČEK, Prometheus, 2013

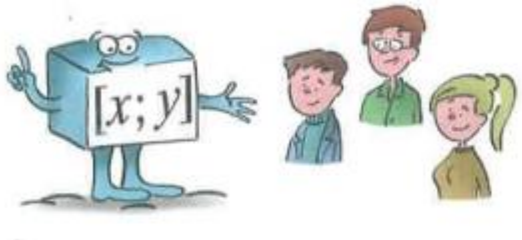


Obrázek 9: Matematika pro 9. ročník ZŠ

Tato kniha je součástí řady učebnic matematiky zpracované podle RVP a má schvalovací doložku MŠMT. V učebnici pro 9. ročník základní školy je jako zavádějící úloha uvedeno řešení rovnice a vysvětleno provádění ekvivalentních úprav. Následuje řešení soustavy rovnic, které je podrobně teoreticky popsáno. V učebnici nejprve nalezneme metodu dosazovací a hned následují příklady na procvičení. Dále se žáci seznámí s metodou sčítací, kterou si opět mohou vyzkoušet na několika konkrétních příkladech. V knize už ale nenalezneme žádnou jinou metodu a přecházíme rovnou na slovní úlohy zabývající se problematikou směsí a roztoků. Navazují slovní úlohy o pohybu řešené pomocí soustav rovnic. K oběma tématům je v knize připraveno několik dalších analogických příkladů. Tato učebnice má velice výrazné barevné obrázky a hlavně průvodce, který se s žáky baví a pokládá si otázky, na které odpovídá, jak můžeme vidět na obrázku 10.

F ***Odpovědi od pramene***

Otázka: Všechny soustavy rovnic, které jsme zatím řešili, měly jen jedno řešení. Je to opravdu vždycky tak?



Odpověď: Není. Vezmi si třeba soustavu rovnic

$$x + y = 1$$
$$x + y = 2$$

se dvěma neznámými x a y. Ta určitě nemá žádné řešení. Neexistují žádná dvě čísla, jejichž součet by byl 1 a zároveň 2.

Otázka: A jsou soustavy rovnic, které mají více řešení než jedno?

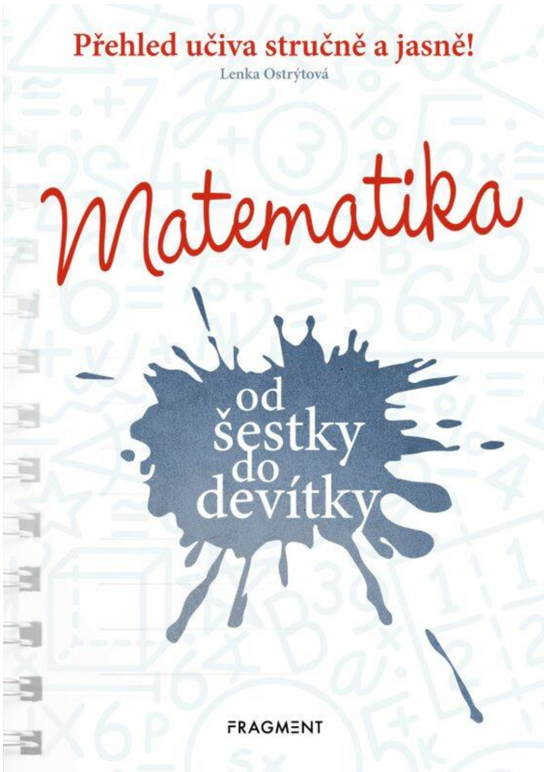
Odpověď: Ano. Například soustava rovnic

$$2x + 2y = 2$$
$$x + y = 1$$

má jako řešení všechny dvojice čísel x a y, pro která platí $y = -x + 1$; mezi řešení patří např. dvojice $[0;1]$, $[1;0]$, $[10;-9]$, $[-1;2]$, $[-2;3]$ atd. Můžeš se o tom přesvědčit dosazením do soustavy rovnic.

Obrázek 10: Průvodce

OSTRÝSOVÁ, Fragment, 2021

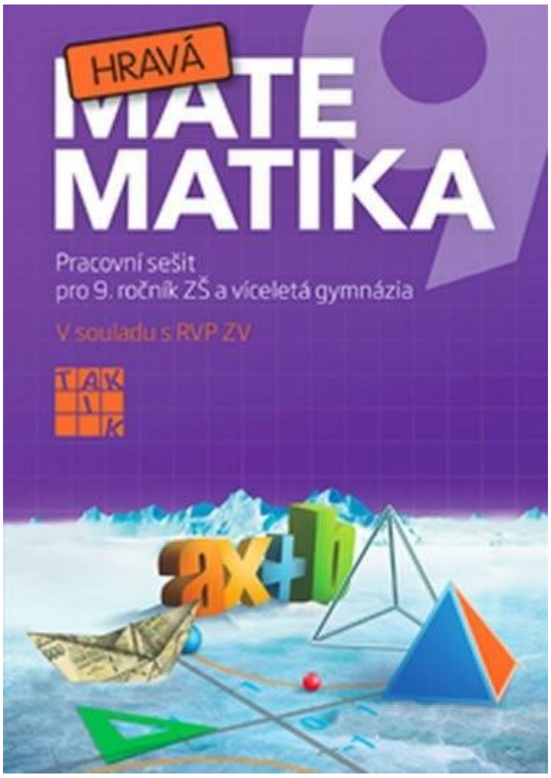


Obrázek 11: Matematika, přehled učiva

Tato učebnice slouží jako přehled učiva za celý 2. stupeň základní školy. Hned na začátku kapitoly zabývající se soustavami rovnic o dvou neznámých nalezneme souhrnnou teorii týkající se jejich řešení.

V knize je pak na příkladech podrobně vysvětlena metoda sčítací, metoda dosazovací, metoda porovnávací i metoda grafická. Následují obecné slovní úlohy řešené pomocí soustavy rovnic. V učebnici nalezneme spoustu řešených příkladů. Jsou zde slovní úlohy o směsích, o pohybu a o společné práci. Bohužel zde opět nejsou žádné příklady k procvičování.

PRESOVÁ, DAVIDOVÁ, HERMOCHOVÁ, Taktik, 2017

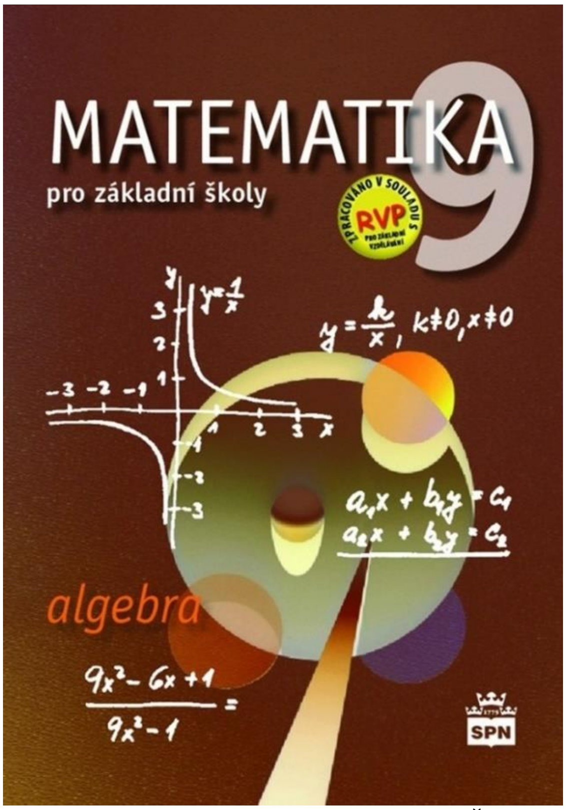


Obrázek 12: Hravá matematika, pracovní sešit

Prostudovala jsem také pracovní sešit s názvem Hravá matematika, který je určen pro 9. ročník základní školy. V pracovním sešitě najdeme uprostřed vyjímatelný přehled učiva a krom něj i mnoho stran úkolů, které prověří pochopení látky ze všech stran. Na začátku každé kapitoly je vždy souhrnné opakování látky z předcházejícího ročníku.

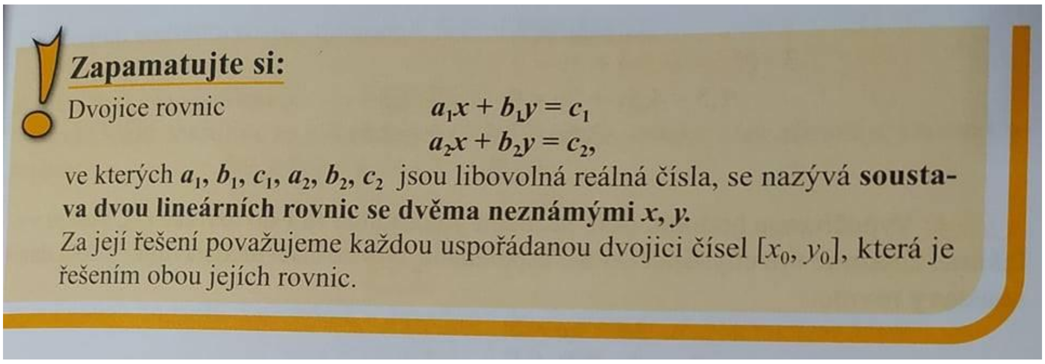
Jsou zde příklady děleny do skupin podle toho, co procvičují, což nenutí mnohé žáky k hlubšímu zamyšlení nad danou problematikou. V sešitě je pár úvodních úloh, autor se zaměřuje na metodu dosazovací, sčítací, srovnávací a v závěru si můžeme vyzkoušet několik souhrnných příkladů. Dále v sešitě najdeme slovní úlohy o směsích, o společné práci a na konec si mohou žáci ověřit své znalosti na souhrnném testu složeném z osmi příkladů a ujistit se, jak danou problematiku zvládají.

PŮLPÁN, ČIHÁK, SPN, 2019



Obrázek 13: Matematika pro ZŠ

V následující učebnici najdeme teoretický základ k učivu o soustavách dvou rovnic o dvou neznámých vysvětlený na konkrétním příkladu soustavy dvou rovnic. Dozvíme se zde, co je metoda dosazovací, metoda sčítací, metoda srovnávací a metoda kombinovaná. Všechny metody jsou jednotlivě popsány a vysvětleny. Po teoretické části navazuje část s cvičením. Další část učebnice je zaměřena na slovní úlohy obecné, o pohybu, o společné práci, o směsích. Vždy je na úvod jedna řešená slovní úloha a následuje několik příkladů. Shrnutí důležité teorie můžeme vidět na obrázku 14, která se nachází vždy za vykřičníkem doplněným slovy: Zapamatujte si!



Zapamatujte si:

Dvojice rovnic
$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2,$$
ve kterých a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 jsou libovolná reálná čísla, se nazývá **soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými x, y.**

Za její řešení považujeme každou uspořádanou dvojici čísel $[x_0, y_0]$, která je řešením obou jejích rovnic.

Obrázek 14: Shrnutí

V poslední kapitole zaměřené na soustavy rovnic se nachází další cvičení, která nejsou řazena podle typu úlohy. K této učebnici vychází také pracovní sešit, ve kterém nalezneme spoustu užitečných příkladů pro žáky.

TLUSTÝ, HUCLOVÁ, Fraus, 2020

V pořadí druhý pracovní sešit má název Matematika s nadhledem a je určen opět pro

Obrázek 15: Matematika s nadhledem

9. ročník základní školy. V tomto sešitě nalezneme teoretický úvod do tématu soustav rovnic, poté následují úlohy k procvičování.

V sešitě si můžeme procvičit metody srovnávací, sčítací a dosazovací. Nejsou zde děleny zvlášť slovní úlohy, jednotlivé typy jsou uvedené dohromady. Celý sešit má barevné prvky a je doplněn o spoustu obrázků. Vždy ve spodní části stránky nalezneme QR kód, který nás navede na online cvičení na počítači. Spodní část stránky zobrazuje obrázek 16.

Obrázek 16: QR kód

Na konci kapitoly je shrnuto, co by žák měl umět. Každý se může zamyslet a odpovědět na připravené otázky, poté si může vybarvit obrázek. Tento sešit je velice přehledný a atraktivní pro žáky zejména propojením s online cvičením.

4.1.2 SHRNUTÍ ROZBORU

Výsledky analýzy vybraných učebnic nalezneme v následující tabulce. Jsou zde uvedena základní kritéria, která byla vybrána na začátku této kapitoly.

učebnice	*Úvodní úloha*	*Metody řešení*	*Přehlednost*	*Počet úloh*	*Atraktivita*
EISLER, Fragment	soustava rovnic	dosazovací sčítací srovnávací	spíš ano	menší počet úloh k procvičování	nic zajímavého pro žáky
HERMAN, Prometheus	slovní úloha	srovnávací dosazovací sčítací	ano	velký počet úloh	motivační obrázky
ODVÁRKO, KADLEČEK, Prometheus	soustava rovnic	dosazovací sčítací	ano	dostatečný	výrazné barevné obrázky
OSTRÝSOVÁ, Fragment	žádná	sčítací dosazovací porovnávací grafická	ano	nedostatečný	nic zajímavého pro žáky
PRESOVÁ, DAVIDOVÁ, HERMOCHOVÁ, Taktik	rovnice	dosazovací sčítací srovnávací	ano	dostatečný	obrázky, barevné doplňky
PŮLPÁN, ČIHÁK, SPN	rovnice	dosazovací sčítací srovnávací kombinovaná	ano	velký počet úloh	barevné prvky
TLUSTÝ, HUCLOVÁ, Fraus	žádná	srovnávací sčítací dosazovací	ano	dostatečný + online cvičení	obrázky, barevné doplňky

Tabulka 6: Shrnutí rozboru učebnic

Podle mých zvolených kritérií vychází nejlépe učebnice matematiky od Jiřího Hermana z nakladatelství Prometheus. Jsou zde podrobně vysvětleny tři základní metody řešení soustav rovnic a to metoda srovnávací, dosazovací a metoda sčítací. Učebnice je srozumitelně členěná a vše je velice přehledné. Dalším kladným bodem v hodnocení je počet úloh k procvičování, který je v porovnání s ostatními nadstandardní. V knize také nalezneme motivační obrázky v jednotném stylu. Druhou nejlepší učebnicí bych zvolila knihu od Zdeňka Půlpána a dalších z nakladatelství SPN, která navíc uvádí ještě řešení soustav rovnic užitím kombinované metody a zároveň s učebnicí je vydáván i pracovní sešit.

Velice dobře na mě zapůsobil pracovní sešit od Pavla Tlustého a Miroslavy Huclové z vydavatelství Fraus, který je propojen s cvičeními na internetu, žáci si mohou učivo procvičovat online samostatně a dostanou se k němu jednoduše přes QR kód s odkazem na každé stránce v sešitě.

4.2 OBTÍŽE ŽÁKŮ PŘI ŘEŠENÍ SOUSTAV

Matematika je důležitým nástrojem pro rozvoj a zlepšení intelektuální kompetence člověka, logické uvažování, prostorová vizualizace, analýza a abstraktní myšlení. Když žáci získají dostatek znalostí v matematice, rozvíjejí početní schopnosti, uvažování, myšlení a schopnost řešit problémy.

Matematika je ve své podstatě hierarchická, takže učení pojmů vyššího řádu je úspěšné pouze tehdy, když koncepty nižšího řádu jsou plně pochopeny. Van de Walle uvedl, že: *„Žáci potřebují vytvořit spojení mezi starými a novými znalostmi. Potřebují se zapojit do reflexivního myšlení a probírat se různými nápady, aby našli ty, které se zdají být nejužitečnější při určování významu nových konceptů, které se učí.“* Ve své knize procesu vzdělávání Bruner také uvedl, že: *„Pokud má dřívější učení poskytnout pozdější učení snazší, musí tak učinit tím, že poskytne obecný obraz, v němž se vztahy mezi věcmi setkávají dříve a později jsou co nejjasnější.“* Tato představa je základem Brunerovy myšlenky spirálového kurikula, která říká: *„Vývoj kurikula by měl opakovat základní myšlenky, stavět na nich, dokud student nepochopí formální aparát, který s nimi souvisí“.* [3],[14]

Když se žáci snaží pochopit abstraktní pojmy, jako je řešení rovnic. Narazíme na tři běžné problémy:

- Nedostatek symbolického pochopení proměnných a koeficientů v rovnici.
- Nepochopení významu znaménka rovná se.
- Spoléhání se na procedurální znalosti bez pojmového porozumění.

Tato zjištění nejsou jedinečná pro předchozí studie, ale platí i pro současné studie. Je tedy zřejmé, že učitelé potřebují žákům pomoci osvojit si znalosti a dovednosti v lineárním řešení rovnic provedením řady opatření.

Obtíže žáků se objevují v kritických oblastech, které jsou podle Rendla a Vondrové definovány jako oblasti: *„V nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a také aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě. Kritickým místem pro děti je algebra, která je klíčová pro řešení soustav rovnic. Největší komplikací bývá práce s proměnou.“* [10]

Podle výzkumu Häggströma je důležité, aby žáci o problémech přemýšleli v jazyku matematiky. Příkladem může být následující obrázek 17 a otázka, které číslo je větší?

Obrázek 17: Velkost čísel

(Zdroj: https://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/17286/3/gupea_2077_17286_3.pdf)

Problémem u řešení rovnic bývá význam proměnné x. Žákům často není jasné, že stejná proměnná nabývá stejné hodnoty a dělá jim problémy pochopit různé významy proměnné x. Často se ve školách objevuje naučený mechanický postup. Žáci jsou schopni soustavu rovnic vyřešit, ale nechápou význam výsledku, který jim vyšel. [5]

4.3 PROBLÉMOVÁ MÍSTA PODLE UČITELŮ

Při zkoumání názorů a postojů učitelů matematiky se nejčastěji dostaneme k následujícím problémům a chybám:

· Zjednodušování algebraických výrazů -> pro žáky vždy problematické

· Žáci jsou obvykle vyučováni algebrou abstraktním způsobem bez použití konkrétních příkladů jako například manipulativní objekty.

· Žáci mají obvykle problémy se čtením a porozuměním matematickým výrokům. V důsledku toho, mají tendenci zaměřit se více na zapamatování postupů namísto pochopení pojmů.

· Neschopnost žáků rozpoznat a pochopit algebraické termíny, jako jsou koeficienty, konstanty, vyhodnotit, zjednodušit, rozšířit a mnoho dalších také přispívá k jejich nízkému úspěchu v řešení lineárních rovnic.

ZÁVĚR

V mé diplomové práci jsem se zaměřila na problematiku výuky soustav rovnic na základní škole. V teoretické části jsem se zabývala historickým ukotvením soustav rovnic v jednotlivých částech světa, jako je například Řecko, Mezopotámie, Egypt, Čína, Indie a Evropa. U každého historického celku jsem seznámila čtenáře s významným matematikem z dané doby. Představila jsem ukázkové příklady i s jejich řešením, na kterých se soustavy rovnic vyučovali. V mé práci jsem definovala, co jsou to soustavy rovnic a dále jsem se konkrétně zaměřila na řešení soustav lineárních rovnic, které jsou probírány na druhém stupni základních škol. U soustav lineárních rovnic jsem se zabývala metodami řešení, počtem řešení a slovními úlohami, které jsou řešené pomocí soustav lineárních rovnic. Zkoumala jsem zařazení kapitoly Soustavy lineárních rovnic v RVP a ŠVP vybraných tří škol a v tematickém plánu každého učitele. V praktické části jsem porovnala dostupné výukové materiály používané na základních školách a u nich se zaměřila na následující kritéria: typ úvodní úlohy, jaké metody řešení jsou uvedeny, jak jsou úlohy a příklady přehledné, celkový počet úloh, atraktivita učebnice, pracovního sešitu (obrázky, grafické zpracování,…). Došla jsem k závěru, že jsou mezi učebnicemi značné rozdíly, a že záleží na konkrétní situaci, kdy a kde chceme knihu využít. Podle zvolených kritérií jsem nakonec zvolila učebnice, které vychází z mého pohledu nejlépe. Následují situace, při kterých žáci dělají nejčastěji chyby při řešení soustav lineárních rovnic a také jaké místa vnímají jako problémové jejich učitelé.

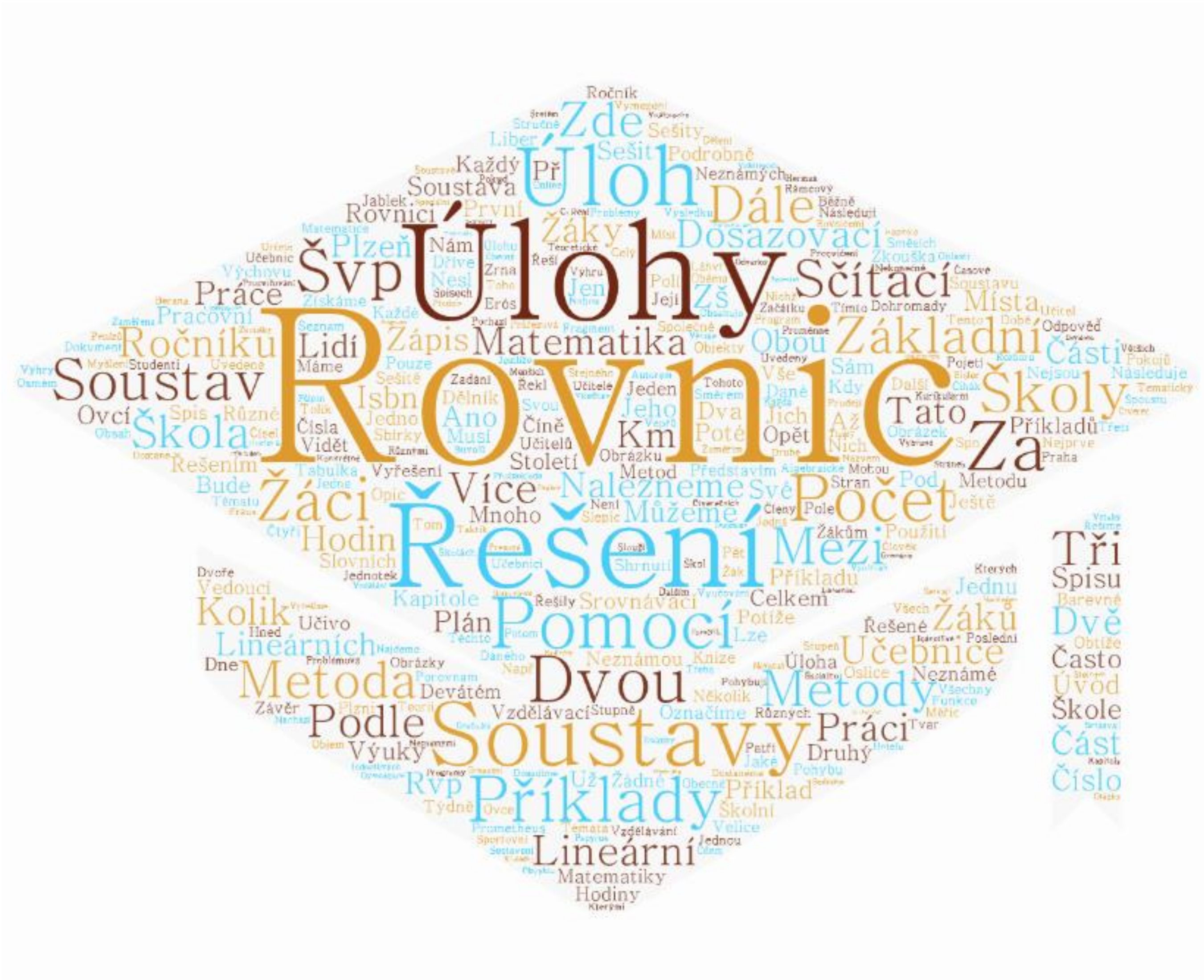
Díky mé diplomové práci se mohou stávající, ale i budoucí učitelé připravovat na hodiny, ve kterých se bude daná látka probírat, a snadněji se zorientují v aktuálně dostupných výukových materiálech.

RESUMÉ

Diplomová práce se věnuje problematice výuky soustav lineárních rovnic. V teoretické části je představen historický vývoj dané problematiky a významné osobnosti, které se s ní zabývali. V práci je uvedena definice soustav rovnic a konkrétně se zaměřuje na soustavy lineárních rovnic, u kterých jsou představeny metody řešení, počet řešení a řešení slovních úloh pomocí soustav lineárních rovnic. Diplomová práce se zaměřuje na zařazení soustav lineárních rovnic v RVP, ŠVP a tematickém plánu. V praktické části jsou představeny výukové materiály a porovnány mezi sebou.

RESUME

The diploma thesis deals with the issue of teaching systems of linear equations. The theoretical part presents the historical development of the issue and the important personalities who dealt with it. The definition of systems of equations is given in the thesis and specifically focuses on systems of linear equations, in which methods of solution, number of solutions and solution of word problems using systems of linear equations are presented. The diploma thesis focuses on anchoring systems of linear equations in RVP, ŠVP and thematic plan. In the practical part, teaching materials are introduced and compared with each other.


Rovnic
Úlohy
Řešení
Soustavy
Úloh
Příklady
Dvou
Pomocí
Metoda
Metody
Soustav
Základní
Školy
Počet
Sčítací
Dosazovací
Matematika
Škola
Žáci
Zde
Dále
Za
Tato
Více
Nalezneme
Můžeme
Mezi
Podle
Lineární
Lineárních
Kolik
Učebnice
Žáků
Tři
Spisu
Dvě
Často
Úvod
Škole
Část
Číslo
Ročníků
Švp
Práce
Matematiky
Hodiny
Rvp
Hodin
Zápis
Lidí
Isbn
Ano
Km
Století
Plán
Kapitole
Celkem
Srovnávací
Neznámou
Označíme
Výuky
Práci
Druhý
Příklad
Příkladu
Příkladů
Části
Místa
Žáky
Plzeň
Soustava
Rovnici
Každý

SEZNAM LITERATURY

[1] BEČVÁŘ, Jindřich. *Matematika ve středověké Evropě*. Praha: Prometheus, 2001. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-232-5.

[2] BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1992, 78 s. ISBN 80-210-0468-1.

[3] BRUNER, J (1960). The Process of Education, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1999. ISBN 0-674-71001-0.

[4] Hlavní stránka, 1.Zš Lovosice. *Soustava lineárních rovnic* [online], 2022 www.1zslovosice.cz [cit. 07.03.2022]. Dostupné z: https://www.1zslovosice.cz/files/documents/1/796/3_Soustava_linearnich_rovnic.pdf

[5] HÄGGSTRÖM, J. (2008). Teaching systems of linear equations in Sweden and China: what is made possible to learn?. Diss. Göteborg : Göteborgs universitet, 2008, Dostupné z: https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/17286

[6] JUŠKEVIČ, Adolf Pavlovič. *Dějiny matematiky ve středověku*. 1. vyd. Praha: Academia, 1978, [na tit. listu nespr.] 1977.

[7] KONFOROVYČ, Andrìj Hryhorovyč. *Významné matematické úlohy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-04-21848-2.

[8] MAČÁK, Karel. *Tři středověké sbírky matematických úloh: Alkuin, Métrodóros, abú Kámil*. Praha: Prometheus, 2001. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-215-5.

[9] MŠMT, *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, 2021 [cit. 07.03.2022]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/160

[10] RENDL, M., VONDROVÁ, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. Pedagogická orientace, Dostupné z: https://journals.muni.cz/pedor/article/view/601

[11] Školní dokumenty | 14. základní škola Plzeň. [online]. [cit. 07.02.2022]. Dostupné z: https://zs14.plzen.eu/skola/skolni-dokumenty/skolni-dokumenty.aspx

[12] ŠVP | 28.ZŠ . 28. základní škola Plzeň | 28. ZŠ [online]. [cit. 07.02.2022]. Dostupné z: https://zs28.plzen.eu/skola/svp/svp.aspx

[13] Učební plány a ŠVP | Sportovní gymnázium Plzeň. Úvod | Sportovní gymnázium Plzeň [online]. 2022 Sportovní gymnázium Plzeň, [cit. 07.02.2022]. Dostupné z: https://www.sgpilsen.cz/ucebni-plany-a-svp

[14] VAN, . W. J. A., & Lovin, L. H. Teaching student-centered mathematics, grades 5-8. Boston: Pearson Education, 2006. ISBN 9780205417971.

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ