

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Teorie řetězových zlomků a jejich
aplikace**

Plzeň, 2022

Bc. Patrik Drda

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne

.....

Poděkování

Tímto chci poděkovat svému vedoucímu práce RNDr. Petru Tomiczkovi, CSc, že mi umožnil zpracovat dané téma práce, dále za vztřícnost a odborné rady při konzultacích a psaní práce. Poděkování patří i mé rodině a přítelkyni za podporu během mého studia.

Abstrakt

Tato práce se zabývá studiem analytické teorie řetězových zlomků a jejich použitím v aplikaci, konkrétně v obecných procesech zrodu a zániku. Hlavním cílem této práce bylo představit metodu řetězových zlomků na řešení těchto procesů. K lepšímu pochopení metody se seznámíme se základními pojmy a definicemi z analytické teorie řetězových zlomků, jejich korespondencí a konvergencí. Chceme docílit toho, aby čtenář při čtení závěrečné kapitoly týkající se aplikace řetězových zlomků měl již potřebné znalosti k lepšímu pochopení dané metody. Předložíme několik modelů a budeme zkoumat vhodnost této metody. Výsledky porovnáme s přesnými výsledky (pokud existují) a s výsledky získané z použité literatury. Každá kapitola také obsahuje několik příkladů k lepšímu porozumění daného tématu.

Klíčová slova: Řetězový zlomek, korespondence, problém momentů, Laplaceova transformace, obecné procesy zrodu a zániku

Abstract

This thesis is concerned with the study of the analytic theory of continued fractions and its application to general birth and death processes. The main aim of this work was to introduce the method of continued fractions to solve these processes. To better understand the method, we will introduce the basic concepts and definitions of analytic continued fraction theory, their correspondence and convergence. We want to achieve that when the reader reads the final chapter on the application of continued fractions, he or she already has the necessary knowledge to better understand the method. We will present several models and investigate the suitability of this method. We will compare the results with exact results (if any) and with those obtained from the used literature. Each chapter also contains several examples to better understand the topic.

Keywords: Continued fraction, correspondence, moment problem, Laplace transform, general birth and death processes

Obsah

Úvod	1
1 Historické přiblížení analytické teorie řetězových zlomků	3
1.1 Aplikace řetězových zlomků	6
2 Základní pojmy a definice	8
2.1 Symboly a notace	8
2.2 Formální definice. Konvergence.	9
2.3 Ekvivalentní transformace	10
2.4 Zúžení a rozšíření	11
2.4.1 Sudé zúžení	11
2.4.2 Liché zúžení	12
2.5 Generování řetězového zlomku z posloupnosti	12
3 Reprezentace funkcí řetězovým zlomkem	15
3.1 Korespondence	16
3.2 Kritéria pro korespondenci	18
4 Typy řetězových zlomků a související algoritmy	22
4.1 C-zlomky	22
4.1.1 Korespondence C-zlomků	22
4.2 Regulární C-zlomky	23
4.2.1 Korespondence regulárních C-zlomků	23
4.2.2 qd-algoritmus	24
4.3 S-zlomky	29
4.4 J-zlomky	30
4.4.1 Korespondence J-zlomku	31
4.4.2 Problém momentů, ortogonální polynomy a řetězové zlomky	31
5 Konvergence řetězových zlomků	46
6 Aplikace řetězových zlomků v obecných procesech zrodu a zániku	51
6.1 Výpočetní postupy	59
6.1.1 Příklady	63
7 Závěr	72
Literatura	75
Příloha A	78

Použité značení

\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
\mathbb{C}^*	rozšířená množina komplexních čísel
\mathbb{N}	množina přirozených čísel
$a_n, a_n(z), b_n, b_n(z)$	prvky řetězového zlomku
$f_n, f_n(z)$	n -tý aproximant řetězového zlomku
$A_n, A_n(z), B_n, B_n(z)$	n -tý čítec a jmenovatel aproximantu
Δ_n	determinantní formule
$\Re(z)$	reálná část komplexního čísla z
$ z $	absolutní hodnota komplexního čísla z
$\arg z$	$= \{\alpha \in \mathbb{R}; z = z e^{i\alpha}\}$, argument komplexního čísla z
$\ \cdot\ $	norma
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	skalární součin
\deg	stupeň polynomu
μ_k	k -tý moment
$I_\psi^n(f)$	n -uzlová kvadratura
$H_k^{(n)}$	Hankelův determinant
\mathbb{J}_k	Jacobiho matice
$\psi(t)$	distribuční funkce
\mathbb{L}	množina mocninných řad
$L(z)$	mocninná řada
$\lambda(L)$	první nenulový člen
$\mathcal{L}(f)$	Laurentův rozvoj funkce f
$\mathcal{T}(f)$	Taylorův rozvoj funkce f
\mathcal{L}	přímá Laplaceova transformace
\mathcal{L}^{-1}	inverzní Laplaceova transformace
λ	intenzita růstu
μ	intenzita zániku

Úvod

V současné době se na většině českých škol nevyučuje teorie řetězových zlomků a studenti tak přicházejí o matematický objekt, který stál nejen u zrodu nových matematických oborů, ale našel si využití i v aplikované matematice. V teorii čísel jsou řetězové zlomky stále aktuální, ale analytická teorie řetězových zlomků téměř upadla do zapomnění.

Naším cílem je tak představit čtenářům analytickou teorii řetězových zlomků a ukázat využití řetězových zlomků v teorii náhodných procesů, konkrétně v obecných procesech zrodu a zániku. Inspirováni prací [28] a publikací [19] se pokusíme srozumitelnou cestou představit metodu založenou na reprezentaci Laplaceovy transformace pomocí řetězových zlomků, kterou v článku [27] představili matematici Murphy a O'Donohoe. Jejich motivací pro tvorbu této metody byla série článků, kde matematici Karlin a McGregor rozvinuli formální teorii obecných procesů zrodu a zániku, ve které vyjadřují pravděpodobnosti přechodu pomocí posloupnosti ortogonálních polynomů a spektrální míry. Zatímco tato práce přinesla cenné teoretické poznatky, stále chybí jasný postup na určení ortogonálních polynomů a míry související s libovolnou množinou intenzit růstu a zániku. Navíc, pokud jsou známi polynomy a míra, nemusí mít pravděpodobnosti přechodu vhodnou analytickou reprezentaci či vhodný výpočetní tvar. Analytickou reprezentaci v uzavřeném tvaru pro pravděpodobnosti přechodu obecných procesů zrodu a zániku mají tak pouze několik typů procesů. Mezi ně patří například Poissonův proces, Yuelův proces či lineární proces zrodu a zániku.

V této práci si dáváme za cíl seznámit čtenáře s původně prezentovanou metodou a ukázat její výhody či nevýhody ve zvolených modelech. Předtím však čtenáře seznámíme se stručnou historií analytické teorie řetězových zlomků. Poté budou ve 2. kapitole představeny základní definice a vlastnosti o řetězových zlomcích.

Ve 3. kapitole se budeme věnovat korespondenci mezi řetězovým zlomkem a mocninnou řadou, neboť je základním kamenem k reprezentaci funkcí řetězovým zlomkem. Výhodou této reprezentace mohou být lepší konvergenční vlastnosti oproti mocninné řadě.

V návaznosti na 3. kapitolu budou ve 4. kapitole představeny základní typy řetězových zlomků. Zaměříme se na jejich korespondenční vlastnosti a ukážeme si algoritmus na hledání řetězového zlomku z koeficientů mocninné řady. Tento algoritmus bude poté použit při použití studované metody k hledání kořenů jistých polynomů. Velkou část této kapitoly budeme věnovat spojení tzv. problému momentů, Gauss–Christoffelovi kvadratury, řetězových zlomků a ortogonálních poly-

nomů. Tato část vznikla z důvodu lepšího porozumění studované metodě, kterého se nám nedostalo ve zmíněných publikacích. Tak jako u řad, i u řetězových zlomků se setkáváme s pojmem konvergence. V 5. kapitole nalezneme nejdůležitější věty a definice z teorie konvergence řetězových zlomků, které budeme potřebovat znát v závěrečné kapitole.

Závěrečná 6. kapitola bude vyústěním výše uvedených kapitol. Představíme si zde studovanou metodu a výpočetní postupy této metody. Chceme docílit toho, aby čtenář při čtení závěrečné kapitoly měl již potřebné znalosti k lepšímu pochopení dané metody. Závěrem předložíme několik modelů a budeme zkoumat vhodnost této metody. Výsledky budeme porovnávat s přesnými výsledky (pokud existují) a s výsledky získané v práci [28] nebo v [19].

Každá kapitola také obsahuje několik příkladů k lepšímu porozumění daného tématu obsaženého v dané kapitole.

Kapitola 1

Historické přiblížení analytické teorie řetězových zlomků

V této kapitole si přiblížíme stručnou historii o analytické teorii řetězových zlomků. Navazujeme tak na historické přiblížení o kterém jsme pojednávali zde [8, str. 3–4]. Při psaní této kapitoly jsme vycházeli z [2].

Počátek analytické teorie sahá do 19. století, které může být považováno za zlatý věk řetězových zlomků. Bylo to období, kdy tento obor byl znám všem matematikům. Mezi matematiky, kteří přispěli k tomuto rozvoji, byli např. Cauchy, Gauss, Jacobi, Hermit. Henri Padé ve své práci (1892) formuloval koncept racionálních aproximací a zdůraznil spojení s teorií řetězových zlomků. V tomto století se také objevují první pokusy dokázat konvergenci řetězových zlomků. Tyto výsledky vyvrcholily Stieltjesovým založením analytické teorie řetězových zlomků.

Zřejmě první, kdo ukázal skutečnou užitečnost transformace divergentní mocninné řady na konvergentní řetězový zlomek byl Edmond Nicolas Laguerre. Tento výsledek otevřel Stieltjesovi cestu k analytické teorii. Laguerre vycházel z určitého integrálu ve tvaru

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} du}{z + u} = e^z \int_z^{+\infty} \frac{e^{-u} du}{u}.$$

Rozvojem tohoto integrálu do mocninné řady získal

$$J = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{z} - \frac{u}{z^2} + \frac{u^2}{z^3} - \dots \right) e^{-u} du$$

a integrací po částech dostal řadu

$$J = \frac{1}{z} - \frac{1!}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - \frac{3!}{z^4} + \dots,$$

která diverguje pro všechna z .

Laguerre si však všiml, že tato divergující řada je formálně rovna řetězovému zlomku

$$F = \frac{1}{z+1} - \frac{1^2}{z+3} - \frac{2^2}{z+5} - \frac{3^2}{z+7} - \dots'$$

který má ekvivalentní zápis ve tvaru

$$F = \frac{1}{z} + \frac{1}{1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{3} + \dots$$

Základním výsledkem, který Laguerre získal je, že $J = F$, tj. určitý integrál je roven řadě, která je odvozena z řetězového zlomku. Proto byl řetězový zlomek pouze mezistupněm mezi integrálem a řadou. Jak bude uvedeno níže, tento výsledek dosáhl své plné obecnosti až se Stieltjesovou prací.

První důkladný a obecný výzkum divergentních řad se datuje do roku 1886, kdy Poincaré současně se Stieltjesem pracoval na asymptotických řadách, které nazvali semikonvergentními řadami. Tato studie vedla Stieltjese k jednomu z nejvýznamnějších příspěvků devatenáctého století v teorii řetězových zlomků.

Stieltjesova práce o řetězových zlomcích byla velmi důkladná. Stala se východiskem pro rozvoj mnoha myšlenek v matematice, například spektrální teorie operátorů. Stieltjes byl skutečným zakladatelem analytické teorie řetězových zlomků, což je podle definice, kterou uvedl Wall, teorie řetězových zlomků ve vztahu k analýze: teorie rovnic, ortogonálních polynomů, mocninných řad, nekonečných matic, kvadratických forem v nekonečně mnoha proměnných, určitých integrálů, problému momentů, analytických funkcí a sčítání divergentních řad.

Stieltjesův první článek o řetězových zlomcích vyšel v roce 1884. Zabýval se Gaussovým kvadraturním vzorcem

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

a řetězovým zlomkem

$$C = \frac{2}{x} - \frac{1/3}{x} - \frac{9/35}{x} - \frac{16/63}{x} - \dots$$

Dokázal, že pokud P_n/Q_n je n -tým aproximantem C , potom uzly x_1, \dots, x_n kvadraturního vzorce jsou kořeny n -tého jmenovatele Q_n , který je polynom stupně n a platí

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

Pokud $x \in [-1, 1]$, potom řetězový zlomek konverguje k integrálu ve tvaru

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{x - t}$$

Stejně výsledky platí pro

$$\int_a^b \frac{f(t) dt}{x - t},$$

kde f je nezáporná funkce na $[a, b]$.

Stieltjes byl velmi fascinován metodou Gaussovy kvadratury a v roce 1884 byl prvním, kdo dokázal její konvergenci pro libovolnou spojitou funkci v intervalu integrace. Také ho velmi nadchla analogie mezi Gaussovou kvadraturou a určitým

typem řetězových zlomků. Po dobu deseti let, podněcován korespondencí a přátelstvím s Hermitem, na tomto tématu usilovně pracoval a nakonec, jen několik měsíců před svou smrtí, vytvořil svůj slavný spis *Recherches sur les fractions continues*, který vyšel v roce 1894.

Stieltjes ve své práci zkoumal řetězový zlomek

$$\frac{1}{a_1 z} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3 z} + \frac{1}{a_4} + \dots'$$

kde prvky a_i jsou reálná čísla a z je komplexní proměnná. Ukázal, že pokud řada $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ diverguje, pak řetězový zlomek konverguje k funkci F , která je analytická v komplexní rovině vyjma záporné reálné osy a počátku, tj.

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\alpha(t)}{t+z},$$

kde $\alpha(t)$ je omezená a neklesající funkce na $[0, +\infty)$. Pokud řada $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ konverguje, potom sudá a lichá část řetězového zlomku konverguje k různým limitám F_1 a F_2 ve tvaru

$$F_1(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\alpha_1(t)}{t+z} \quad \text{a} \quad F_2(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\alpha_2(t)}{t+z}.$$

Řetězový zlomek lze formálně rozvinout do řady ve tvaru

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots,$$

kde koeficienty c_i jsou všechny kladné. Stieltjes ukázal jak získat koeficienty c_i z prvků a_i , ale tyto výrazy jsou velmi komplikované. Naopak prvky a_i lze získat z koeficientů c_i , např. pomocí Hankelových determinantů.

Uvedme, že v tomto spisu bylo obsaženo mnoho nových důležitých konceptů. První z nich nazval Stieltjes *problémem momentů*. Pro danou posloupnost (c_n) hledáme omezenou a neklesající funkci $\alpha(x)$ na $[0, +\infty)$ takovou, že platí

$$c_n = \int_0^{+\infty} t^n d\alpha(t), \quad n = 0, 1, \dots$$

Podle toho, zda je funkce α jedinečná nebo ne (což je podobné jako jednoznačnost F), byl problém nazván *determinovaný* nebo *nedeterminovaný*. Druhou novou myšlenkou je *Stieltjesův integrál*, protože funkce α může být nespojitá.

Na počátku 20. století byl problém konvergence řetězových zlomků stále aktuální. Matematici, kteří přinesli důležité výsledky o konvergenci řetězových zlomků byli například Pringsheim, Seidel, Worpitzky či Vleck. Poslední zmiňovaný se již v roce 1903 pokusil rozšířit Stieltjesovu teorii na řetězové zlomky (nazývané J-zlomky) ve tvaru

$$\frac{1}{z+b_1} - \frac{a_1}{z+b_2} - \frac{a_2}{z+b_3} - \dots'$$

kde prvky a_i jsou kladná reálná čísla a b_i jsou reálná čísla. V některých případech spojil tyto řetězové zlomky s typem určitých integrálů, které našel Stieltjes, ale s oborem integrace přes celou reálnou osu.

Na Vleckovy výsledky navázal matematik Hubert Stanley Wall. Wall vytvořil teorii pozitivně definitních řetězových zlomků, která rozšiřuje Stieltjesovu teorii na J -zlomky s komplexními prvky. Tato teorie souvisí, jak uvidíme ve 4. kapitole, s teorií tridiagonálních matic. V roce 1948 vyšla jeho publikace (viz [37]) zabývající se analytickou teorií řetězových zlomků, která také zahrnovala maticovou teorii řetězových zlomků vyvíjenou s jeho studenty ve 20 letech 20. století. Poznamenejme, že tato publikace navazuje na Perronovo knihu *Die Lehre von den Kettenbrüchen* z roku 1913 (viz [29]). Tato kniha zahrnuje jak aritmetickou, tak analytickou teorii řetězových zlomků.

Je vhodné zmínit, že toto je pouze stručný výťah z historie analytické teorie řetězových zlomků, na které se podílelo mnoho známých matematiků, např. Jones, Magnus, Henrici, Waadeland, Lorentzen atd. Proto pro více informací o historii této teorie doporučujeme knihu [2] nebo článek [23].

1.1 Aplikace řetězových zlomků

Studium analytické teorie řetězových zlomků přineslo s sebou i několik aplikací. Například v roce 1926 matematik E. L. Ince publikoval knihu o obyčejných diferenciálních rovnicích (viz [17]), kde se zabýval souvislostí mezi diferenciálními rovnicemi a řetězovými zlomky. Jedná se o rozšíření Eulerovy práce o Riccatiho diferenciální rovnici.

V roce 1929 matematik T. C. Fry použil řetězové zlomky pro řešení problému s elektrickou sítí. V síti žebříkového typu vedou běžné zákony teorie obvodů ke vzorci

$$F(p) = J_1 + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{J_3} + \frac{1}{Y_4} + \dots$$

kde admitance Y_i jsou reciproké hodnoty odpovídajících impedanci J_i .

V roce 1954 vyvinul matematik Rutishauser tzv. kvocient difereční algoritmus na hledání všech kořenů daného polynomu (viz [32]). Podstatou tohoto algoritmu je transformace řady

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots$$

do řetězového zlomku

$$\frac{a_0}{z + a_1} - \frac{1 + a_2}{z + a_3} + \dots$$

a

$$\frac{a_0}{z + a_1} - \frac{a_1 a_2}{z + a_2 + a_3} - \frac{a_3 a_4}{z + a_4 + a_5} - \dots$$

Jak takovou transformaci provést ukázal Stieltjes v roce 1889.

Z řetězovými zlomky se lze také setkat v článku *Methods of Conjugate Gradients for*

solving Linear Systems (1952) matematiků M. Hestenes a E. Stiefela. Tato práce (viz [13]) dává do souvislosti ortogonální polynomy, řetězové zlomky a Gaussovo kvadraturu s metodou konjugovaných gradientů.

V letech 1957 a 1958 vyšla série článků ([20], [21] a [22]), kde matematici Karlin a McGregor ukázali spojení procesů zrodu a zániku a Stieltjesova problému momentů. V této průkopnické sérii článků Karlin a McGregor rozvíjejí formální teorii obecných procesů zrodu a zániku, které vyjadřují své pravděpodobnosti přechodu v členech posloupnosti ortogonálních polynomů $(Q_n(x), n \geq 0)$ a pravděpodobnostní míry ϕ , tj. dokázali, že pravděpodobnost přechodu P může být vyjádřena jako

$$P_{ij}(t) = P(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_0^{+\infty} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\phi(x), \quad t \geq 0, \quad i, j = 0, 1, \dots,$$

kde koeficienty π_j jsou definovány jako

$$\pi_n = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n = 0, \\ \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} & \text{pokud } n \geq 1. \end{cases}$$

Vzhledem k tomuto spojení nebylo překvapením, že Murphy a O'Donohoe v roce 1975 (viz [27]) zjistili, že řetězové zlomky a procesy zrodu a zániku spolu také souvisí. Konkrétně získali řetězový zlomek představující Laplaceovu transformaci $p_r(t)$, tedy pravděpodobnost existence populace o velikosti r v čase t (tyto výsledky budou představeny v 6. kapitole).

Na závěr této kapitoly poznamenejme, že z českých matematiků se teorii řetězových zlomků věnoval Karel Rychlík, který do češtiny přeložil druhé vydání Khinchinova spisu z roku 1949 (viz [16]). S řetězovými zlomky se lze setkat v práci I. Babušky (viz [1]) z roku 1955. V této práci se řetězové zlomky používají k řešení soustavy lineárních rovnic s úplně regulární otevřenou maticí. Dále se řetězové zlomky objevují v článku Oldřicha Vašíčka (viz [35]) z roku 1964, kde je výraz pro Laplace-Stieltjesovu transformaci distribuční funkce čekací doby podán ve tvaru nekonečného řetězového zlomku. V roce 1983 byla vyvinuta českým fyzikem Jiřím Horáčkem a T. Sasakawou metoda řetězových zlomků k řešení integrálních rovnic teorie rozptylu jako jsou Lippmann-Schwingerova rovnice nebo Faddeevovy rovnice (viz [14]). Od této doby do současnosti jsme nezaznamenali v české literatuře nové příspěvky k analytické teorii řetězových zlomků (narozdíl od aritmetické teorie) či jejich využití v aplikaci.

Kapitola 2

Základní pojmy a definice

V této kapitole se seznámíme se základními pojmy a definicemi z teorie řetězových zlomků. Představíme si také některé základní vlastnosti řetězových zlomků např. ekvivalenci, jejich sudé či liché zúžení. Na závěr kapitoly si tyto znalosti přiblížíme na příkladě.

Pro napsání této kapitoly jsme čerpali z [19], [26] a [37].

2.1 Symboly a notace

Výraz

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \quad (2.1)$$

nazýváme *řetězovým zlomkem*, kde a_n a b_n jsou komplexní čísla a $a_n \neq 0$. Několik pohodlnějších zápisů řetězového zlomku lze nalézt v literatuře [37, str. 17]. Zde budeme (2.1) zapisovat ve tvaru

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \mathbf{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n),$$

V souladu s tím n -tý *aproximant* f_n řetězového zlomku je výraz

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\dots + \frac{a_n}{b_n}}}},$$
$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \mathbf{K}_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k}.$$

Řetězový zlomek (2.1) je více než posloupnost aproximantů (f_n) . Na řetězový zlomek lze pohlížet jako na zobrazení uspořádané dvojice posloupností $((a_n), (b_n))$ do posloupnosti (f_n) . Tento jiný pohled na definici řetězového zlomku bude upřesněn v následující části.

2.2 Formální definice. Konvergence.

Definice 2.1. Řetězový zlomek je uspořádaná dvojice

$$\left(((a_n), (b_n)), (f_n) \right), \quad (2.2)$$

kde (a_n) a (b_n) jsou dané posloupnosti komplexních čísel, $a_n \neq 0$, a kde (f_n) je posloupnost komplexních čísel z rozšířené komplexní roviny (tj. $f_n \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$), které jsou dané vztahem

$$f_n = S_n(0), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

kde

$$S_0(w) = s_0(w), \quad S_n(w) = S_{n-1}(s_n(w)), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$s_0(w) = b_0 + w, \quad s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Čísla a_n a b_n budeme nazývat *n-tým částečným čitatelem* a *jmenovatelem* (zjednodušeně *proky*). Výraz (2.2) nazýváme *nekonečným řetězovým zlomkem*. V případě, že (a_n) má konečný počet nenulových členů, nazýváme (2.2) *konečným řetězovým zlomkem*. Dále v textu předpokládáme, že řetězový zlomek (2.2) je nekonečný, pokud není uvedeno jinak.

Číslo

$$f_n = S_n(0) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\ddots + \frac{a_n}{b_n}}}}, \quad (2.3)$$

$$f_n = S_n(0) = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k}, \quad (2.4)$$

tedy nazýváme *n-tým aproximantem*. Obecněji zavedeme

$$S_n(w) = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n + w} \quad (2.5)$$

a číslo $S_n(w) \in \mathbb{C}^*$ nazýváme *n-tým modifikovaným aproximantem*.

Matematickou indukcí lze dokázat (viz [37, str. 15]), že modifikovaný aproximant $S_n(w)$ lze napsat jako

$$S_n(w) = \frac{A_n + A_{n-1}w}{B_n + B_{n-1}w}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

kde hodnoty $A_{n-1}, A_n, B_{n-1}, B_n$ jsou nezávislé na proměnné w a můžeme je spočítat pomocí rekurentních vztahů

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

s počátečními podmínkami

$$A_{-1} = 1, \quad B_{-1} = 0, \quad A_0 = b_0, \quad B_0 = 1.$$

Pro n -tý aproximant f_n tedy platí

$$f_n = S_n(0) = \frac{A_n}{B_n}, \quad f_{n-1} = S_n(\infty) = S_{n-1}(0) = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}. \quad (2.8)$$

Hodnoty A_n a B_n budeme nazývat n -tým čitatelem a n -tým jmenovatelem n -tého aproximantu f_n z řetězového zlomku (2.2). Důležitou vlastností čísel A_n a B_n je tzv. *determinantní formule*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} A_n & A_{n-1} \\ B_n & B_{n-1} \end{vmatrix} = A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n a_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Důkazy vztahů (2.6), (2.9) lze nalézt v [37, str. 15-16].

Definice 2.2 (Konvergence). Řekneme, že řetězový zlomek (2.2) *konverguje*, jestliže posloupnost aproximantů $(f_n) = (S_n(0))$ konverguje k limitě $f \in \mathbb{C}^*$. Potom takovou limitu f nazýváme *hodnotou* řetězového zlomku. To znamená, že můžeme napsat

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{B_n} = b_0 + \mathbf{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}. \quad (2.10)$$

2.3 Ekvivalentní transformace

Definice 2.3. Dva řetězové zlomky $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ a $d_0 + \mathbf{K}(c_n/d_n)$ nazveme *ekvivalentní* právě tehdy, když mají stejnou posloupnost aproximantů. Ekvivalenci dvou řetězových zlomků budeme značit

$$b_0 + \mathbf{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} \equiv d_0 + \mathbf{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{d_n}.$$

Následující věta charakterizuje ekvivalenci dvou řetězových zlomků.

Věta 2.4 ([19, str. 31]). Řetězové zlomky $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ a $d_0 + \mathbf{K}(c_n/d_n)$ jsou ekvivalentní právě tehdy, když existuje posloupnost komplexních čísel (r_n) , kde $r_0 = 1$, $r_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, taková, že platí

$$d_0 = b_0, \quad c_n = r_n r_{n-1} a_n, \quad d_n = r_n b_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

Důsledek 2.5.

$$b_0 + \mathbb{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} \equiv b_0 + \mathbb{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n},$$

kde

$$d_n = b_n \prod_{k=1}^n a_k^{(-1)^{n+1-k}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Důsledek 2.6. Jestliže $b_n \neq 0$ pro $n \geq 1$, potom $b_0 + \mathbb{K}(a_n/b_n) \equiv b_0 + \mathbb{K}(c_n/1)$, kde

$$c_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad c_n = \frac{a_n}{b_n b_{n-1}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

2.4 Zúžení a rozšíření

V této sekci nechť A_n, B_n a f_n označuje n -tý čítel, jmenovatel a aproximant řetězového zlomku $b_0 + \mathbb{K}(a_n/b_n)$ a nechť C_n, D_n a g_n označuje n -tý čítel, jmenovatel a aproximant řetězového zlomku $d_0 + \mathbb{K}(c_n/d_n)$. Potom $d_0 + \mathbb{K}(c_n/d_n)$ nazveme *zúžením* řetězového zlomku $b_0 + \mathbb{K}(a_n/b_n)$ pouze tehdy, když existuje posloupnost (n_k) taková, že

$$g_k = f_{n_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Řetězový zlomek $b_0 + \mathbb{K}(a_n/b_n)$ je potom nazýván *rozšířením* řetězového zlomku $d_0 + \mathbb{K}(c_n/d_n)$.

Pokud navíc k (2.12) existuje posloupnost $\{n_k\}$ taková, že

$$C_k = A_{n_k}, \quad D_k = B_{n_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

potom $d_0 + \mathbb{K}(c_n/d_n)$ nazýváme *kanonickým zúžením* řetězového zlomku $b_0 + \mathbb{K}(a_n/b_n)$.

2.4.1 Sudé zúžení

Definice 2.7. Řetězový zlomek $d_0 + \mathbb{K}(c_n/d_n)$ nazýváme *sudým zúžením* nebo *sudou částí* řetězového zlomku $b_0 + \mathbb{K}(a_n/b_n)$ pouze tehdy, pokud

$$g_n = f_{2n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

a *sudým kanonickým zúžením* řetězového zlomku $b_0 + \mathbb{K}(a_n/b_n)$ pouze tehdy, když

$$C_n = A_{2n}, \quad D_n = B_{2n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Na otázku existence sudého kanonického zúžení nám dává odpověď následující věta.

Věta 2.8 ([26, str. 83-84]). *Kanonické zúžení řetězového zlomku $b_0 + \mathbb{K}(a_n/b_n)$ s*

$$C_n = A_{2n}, \quad D_n = B_{2n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

existuje právě tehdy, když $b_{2n} \neq 0$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$, a je dáno vztahem

$$d_0 + \mathbb{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{d_n} = b_0 + \frac{a_1 b_2}{a_2 + b_1 b_2} - \frac{a_2 a_3 b_4 / b_2}{a_4 + b_3 b_4 + a_3 b_4 / b_2} - \dots \quad (2.14)$$

kde

$$\begin{aligned} d_0 &= b_0, \quad c_1 = a_1 b_2, \quad d_1 = a_2 + b_1 b_2, \\ c_n &= -\frac{a_{2n-2} a_{2n-1} b_{2n}}{b_{2n-2}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \\ d_n &= a_{2n} + b_{2n-1} b_{2n} + \frac{a_{2n-1} b_{2n}}{b_{2n-2}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

2.4.2 Liché zúžení

Definice 2.9. Řetězový zlomek $d_0 + \mathbb{K}(c_n/d_n)$ nazýváme *lichým zúžením* nebo *lichou částí* řetězového zlomku $b_0 + \mathbb{K}(a_n/b_n)$ pouze tehdy, pokud

$$g_n = f_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

a *lichým kanonickým zúžením* řetězového zlomku $b_0 + \mathbb{K}(a_n/b_n)$ pouze tehdy, když

$$C_0 = \frac{A_1}{B_1}, \quad D_0 = 1, \quad C_n = A_{2n+1}, \quad D_n = B_{2n+1} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Věta 2.10 ([26, str. 85]). *Kanonické zúžení řetězového zlomku $b_0 + \mathbb{K}(a_n/b_n)$ s*

$$C_n = A_{2n+1}, \quad D_n = B_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

existuje právě tehdy, když $b_{2n+1} \neq 0$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$, a je dáno vztahem

$$d_0 + \mathbb{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{d_n} = \frac{a_1 + b_0 b_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3 / b_1}{b_1(a_3 + b_2 b_3)} - \frac{a_3 a_4 b_1 b_5 / b_3}{a_5 + b_4 b_5 + a_4 b_5 / b_3} - \dots \quad (2.15)$$

kde

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{a_1 a_2 b_3}{b_1}, \quad c_2 = -\frac{a_3 a_4 b_1 b_5}{b_3}, \\ d_0 &= \frac{a_1 + b_0 b_1}{b_1}, \quad d_1 = b_1(a_3 + b_2 b_3) + a_2 b_3, \\ c_n &= -\frac{a_{2n-1} a_{2n} b_{2n+1}}{b_{2n-1}}, \quad n = 3, 4, 5, \dots, \\ d_n &= a_{2n+1} + b_{2n} b_{2n+1} + \frac{a_{2n} b_{2n+1}}{b_{2n-1}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

2.5 Generování řetězového zlomku z posloupnosti

Mějme posloupnost $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$. Zabýváme se nyní otázkou, zda existuje řetězový zlomek, který má tuto posloupnost (f_n) jako posloupnost jeho aproximantů (viz 2.2)?

Věta 2.11 ([26, str. 70]). Komplexní posloupnosti $(A_n)_{n=-1}^{+\infty}$ a $(B_n)_{n=-1}^{+\infty}$ jsou čitatelem a jmenovatelem nějakého řetězového zlomku $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ pouze pokud

$$A_{-1} = B_0 = 1, \quad B_{-1} = 0, \quad \Delta_n = A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} \neq 0 \quad (2.16)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Pokud (2.16) platí, potom $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ je jednoznačně určen výrazy

$$b_0 = A_0, \quad b_1 = B_1, \quad a_1 = A_1 - A_0 B_1, \\ a_n = -\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad b_n = \frac{A_n B_{n-2} - B_n A_{n-2}}{\Delta_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Pokud máme danou pouze posloupnost aproximantů $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$, řetězový zlomek $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ již není jednoznačný. Jedním ze způsobů, jak použít větu 2.11 je zvolit

$$B_n = 1, \quad A_n = f_n \quad \text{když } f_n \neq \infty \\ B_n = 0, \quad A_n = 1 \quad \text{když } f_n = \infty \quad (2.18)$$

pro $n = 0, 1, 2, \dots$.

Důsledek 2.12. Posloupnost $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ z \mathbb{C}^* je posloupnost aproximantů pro nějaký řetězový zlomek $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ pouze tehdy, když

$$f_0 \neq \infty \text{ a } f_n \neq f_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.19)$$

Získané základní znalosti o řetězových zlomcích si přiblížíme na následujícím příkladu.

Příklad 2.13 (Motivace z [26, str. 70]). Pokusme se najít řetězový zlomek $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$, který má posloupnost aproximantů $f_n = n/(n+1)$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$. Dále se pokusme nalézt sudou část daného řetězového zlomku.

Řešení. S volbou (2.18) pro A_n a B_n nalezneme z věty 2.11, že $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ má aproximanty f_n jestliže $b_0 = f_0 = 0, b_1 = 1, a_1 = f_1 - f_0 = 1/2$ a

$$a_n = -\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = -\frac{A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1}}{A_{n-1} B_{n-2} - B_{n-1} A_{n-2}} = -\frac{f_n - f_{n-1}}{f_{n-1} - f_{n-2}} = -\frac{\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}}{\frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n-1}} = -\frac{n-1}{n+1}, \\ b_n = \frac{A_n B_{n-2} - B_n A_{n-2}}{\Delta_{n-1}} = \frac{f_n - f_{n-2}}{f_{n-1} - f_{n-2}} = \frac{\frac{n}{n+1} - \frac{n-2}{n-1}}{\frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n-1}} = \frac{2n}{n+1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Tudíž, řetězový zlomek

$$\mathbf{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1/2}{2/2} + \frac{-1/3}{4/3} + \frac{-2/4}{6/4} + \frac{-3/5}{8/5} + \frac{-4/6}{10/6} + \dots$$

má posloupnost aproximantů $f_n = n/(n+1)$, a konverguje k hodnotě

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 1.$$

Vzhledem k tomu, že platí $b_{2n} \neq 0$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$, potom z věty 2.8 existuje kanonické zúžení řetězového zlomku $b_0 + \mathbf{K}(a_n/b_n)$ s $C_n = A_{2n}$, $D_n = B_{2n}$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$, a pro c_n, d_n platí vztahy

$$\begin{aligned} d_0 = b_0 = 0, \quad c_1 = a_1 b_2 = \frac{2}{3}, \quad d_1 = a_2 + b_1 b_2 = 1, \\ c_n = -\frac{a_{2n-2} a_{2n-1} b_{2n}}{b_{2n-2}} = -\frac{2n-3}{2n+1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \\ d_n = a_{2n} + b_{2n-1} b_{2n} + \frac{a_{2n-1} b_{2n}}{b_{2n-2}} = \frac{4n-2}{2n+1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Dostáváme tak řetězový zlomek

$$\mathbf{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{d_n} = \frac{2/3}{1} + \frac{-1/5}{6/5} + \frac{-3/7}{10/7} + \frac{-5/9}{14/9} + \frac{-7/11}{18/11} + \dots$$

Pro ověření správnosti vypíšeme několik aproximantů

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{C_1}{D_1} = \frac{2}{3}, \quad \frac{A_4}{B_4} = \frac{C_2}{D_2} = \frac{4}{5}, \quad \frac{A_6}{B_6} = \frac{C_3}{D_3} = \frac{6}{7}.$$

Kapitola 3

Reprezentace funkcí řetězovým zlomkem

Důležitou aplikací řetězových zlomků je reprezentace holomorfních funkcí komplexní proměnné z řetězovým zlomkem

$$b_0(z) + \mathbf{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(z)}{b_n(z)} = b_0(z) + \mathbf{K} (a_n(z)/b_n(z)), \quad (3.1)$$

kde $a_n(z)$ a $b_n(z)$ jsou libovolné polynomy v proměnné z nebo $1/z$. Dále označíme n -tý aproximant výrazem $f_n(z)$, n -tý čítec $A_n(z)$ a n -tý jmenovatel $B_n(z)$.

Uvažujme například funkci $\ln(1+z)$, tato funkce je pro $z \in \mathbb{C}$ kromě $\Re(z) \leq -1$ reprezentována řetězovým zlomkem ve tvaru (viz [26, str. 21])

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1} + \frac{z/2}{1} + \frac{z/6}{1} + \frac{2z/6}{1} + \frac{2z/10}{1} + \frac{3z/10}{1} + \dots \quad (3.2)$$

Pokud nyní spočítáme první čtyři aproximanty spolu s jejich rozvojem v mocninnou řadu v bodě 0, získáme tak

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{z}{1} = z + 0z^2 + 0z^3 + 0z^4 + \dots, \\ f_2(z) &= \frac{2z}{2+z} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{4} - \frac{z^4}{8} + \dots, \\ f_3(z) &= \frac{z^2+6z}{4z+6} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{2z^4}{9} + \dots, \\ f_4(z) &= \frac{3z^2+6z}{z^2+6z+6} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

Pokud porovnáme získané rozvoje z daných aproximantů $f_n(z)$ s Taylorovou řadou pro danou funkci, tj.

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots, \quad (3.3)$$

můžeme si všimnout, že rozvoj $f_1(z)$ a $f_2(z)$ souhlasí s řadou (3.3) do prvního a druhého členu. To samé lze vypočítat u $f_3(z)$, jeho rozvoj souhlasí s řadou do třetího členu atd. V následujících sekcích této práce si ukážeme, že takováto shoda pokračuje. Tuto vlastnost nazýváme *korespondencí* mezi mocninnou řadou a rozvojem řetězového zlomku. Náležitě definice budou uvedeny níže. Při sepsání této kapitoly jsme čerpali z [5], [19] a [26].

3.1 Korespondence

Nechť $\mathbb{K}(a_n(z)/b_n(z))$ je řetězový zlomek s polynomy $a_n(z)$ a $b_n(z)$. Zajímá nás následující otázka: Koresponduje $\mathbb{K}(a_n(z)/b_n(z))$ s mocninnou řadou se středem $z_0 = 0$, tj. s řadou

$$L(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n z^n, \quad m \in \mathbb{Z}, c_n \in \mathbb{C}, c_m \neq 0? \quad (3.4)$$

To znamená, že k -tý aproximant

$$f_k(z) = \frac{a_1(z)}{b_1(z)} + \frac{a_2(z)}{b_2(z)} + \cdots + \frac{a_k(z)}{b_k(z)} = \frac{A_k(z)}{B_k(z)} \quad (3.5)$$

má rozvoj do mocninné řady, která se dostatečně shoduje s $L(z)$. Nyní si uvedeme důležité definice.

Definice 3.1. (Množina \mathbb{L}). Nechť \mathbb{L} označuje množinu všech mocninných řad (3.4) se středem $z_0 = 0$ s nulovým prvkem $l_0(z) = \sum 0z^n$ a obvyklými operacemi sčítání a násobení.

Definice 3.2. (Taylorova a Laurentova řada). Řada (3.4) se nazývá *Taylorovou řadou* se středem $z_0 = 0$, jestliže $m \geq 0$ a *Laurentovou řadou* se středem $z_0 = 0$, jestliže $m < 0$.

Definice 3.3. Pro funkce $f(z)$, meromorfní v okolí bodu $z_0 = 0$, označme symbolem $\mathcal{L}(f)$ rozvoj funkce f v Laurentovu řadu v okolí bodu $z_0 = 0$ ¹.

To znamená, že $\mathcal{L}(f) \in \mathbb{L}$. Pro všechny $L(z) \in \mathbb{L}$ definujeme $\lambda(L)$ vztahem

$$\lambda(L) = \begin{cases} m & L(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n z^n, \quad c_m \neq 0, \\ +\infty & L(z) = l_0(z). \end{cases} \quad (3.6)$$

Následující vlastnosti funkcionálu λ jsou snadno odvoditelné: Pro každé L_1 a L_2 z \mathbb{L} platí,

$$\lambda(L_1 L_2) = \lambda(L_1) + \lambda(L_2), \quad (3.7)$$

$$\lambda\left(\frac{L_1}{L_2}\right) = \lambda(L_1) - \lambda(L_2), \quad L_2 \neq l_0, \quad (3.8)$$

$$\lambda(L_1 + L_2) \text{ je } \begin{cases} = \min[\lambda(L_1), \lambda(L_2)] & \text{pokud } \lambda(L_1) \neq \lambda(L_2), \\ \geq \lambda(L_1) & \text{pokud } \lambda(L_1) = \lambda(L_2). \end{cases} \quad (3.9)$$

Normu $\|\cdot\|$ definujeme pro $L(z) \in \mathbb{L}$ vztahem

$$\|L\| := 2^{-\lambda(L)}, \quad L \in \mathbb{L},$$

kde $2^{-\infty} = 0$. Lze ukázat, že splňuje vlastnosti normy. Proto množina \mathbb{L} je normovaným prostorem $(\mathbb{L}, \|\cdot\|)$ ².

¹Více o meromorfní funkci a Laurentově řadě např. v [6].

²Více o normovaném prostoru např. v [34].

Definice 3.4. (Korespondence s $L(z)$ v bodě $z_0 = 0$). Řekneme, že řetězový zlomek $\mathbb{K}(a_n(z)/b_n(z))$ koresponduje s $L(z)$ v bodě $z_0 = 0$, jestliže

$$v_n := \lambda(L - \mathcal{L}(f_n)) \rightarrow +\infty. \quad (3.10)$$

Číslo v_n nazýváme *řádem korespondence* $f_n(z)$ s $L(z)$.

Příklad 3.5. Uvažujme opět funkci z úvodu kapitoly a její rozvoj v řadu

$$\ln(1+z) = L(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

Dále mějme čtyři aproximanty $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, $f_4(z)$ z úvodního příkladu a jejich rozvoj v Laurentovu řadu v okolí bodu $z_0 = 0$, tj.

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z \sim \mathcal{L}(f_1(z)) = z + 0z^2 + 0z^3 + \dots, \\ f_2(z) &= \frac{2z}{2+z} \sim \mathcal{L}(f_2(z)) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{4} - \frac{z^4}{8} + \dots, \\ f_3(z) &= \frac{z^2+6z}{4z+6} \sim \mathcal{L}(f_3(z)) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{2z^4}{9} + \dots, \\ f_4(z) &= \frac{3z^2+6z}{z^2+6z+6} \sim \mathcal{L}(f_4(z)) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

Ze vztahu (3.10) nyní můžeme spočítat posloupnost čísel v_n . Dostáváme

$$v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 4, v_4 = 5.$$

Později ukážeme, že platí $v_n = n + 1$ a tedy $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Řetězový zlomek koresponduje s řadou $L(z)$ v bodě $z_0 = 0$.

Pokud $B_k(z) \neq 0$, potom aproximant $f_k(z)$ v (3.5) je racionální funkcí, a $\mathcal{L}(f_k)$ je dobře definován (viz [36, str. 162]). Je však jednodušší považovat a_n, b_n, A_n a B_n jako prvky přímo z \mathbb{L} . Potom aproximanty

$$L_n(z) = \frac{a_1(z)}{b_1(z)} + \frac{a_2(z)}{b_2(z)} + \dots + \frac{a_n(z)}{b_n(z)} = \frac{A_n(z)}{B_n(z)} \quad (3.11)$$

jsou opět prvky z \mathbb{L} , pokud $B_n \neq l_0$. Zřejmě tedy $L_n = \mathcal{L}(f_n)$.

Vzhledem k tomu, že $L(z) \in (\mathbb{L}, \|\cdot\|)$ můžeme výraz (3.10) vyjádřit ve tvaru

$$\|L - L_n\| \rightarrow 0,$$

kde L_n je dané výrazem (3.11), tj. řetězový zlomek $\mathbb{K}(a_n(z)/b_n(z))$ koresponduje s L pouze tehdy, když $\mathbb{K}(a_n(z)/b_n(z))$ konverguje k L v této normě.

Někdy je vhodné uvažovat korespondenci v jiných bodech než $z_0 = 0$. Korespondence v bodě $z_0 = a$ je stejná jako konvergence v normovaném prostoru $(\mathbb{L}_a, \|\cdot\|_a)$, kde \mathbb{L}_a sestává z Laurentových řad

$$\begin{cases} L(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n(z-a)^n & a \neq \infty, c_m \neq 0, \\ L(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n(z)^{-n} & a = \infty. \end{cases} \quad (3.12)$$

a $\|L\|_a = 2^{-m}$ jako dříve. Pro všechny $L(z) \in \mathbb{L}_\infty$ definujeme λ :

$$\lambda(L) = \begin{cases} m & L(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_{-n} z^{-n}, \quad c_{-m} \neq 0, \\ +\infty & L(z) = l_0(z). \end{cases} \quad (3.13)$$

Pro korespondenci v bodě $z_0 = \infty$ máme zejména následující lemma.

Lemma 3.6 ([26, str. 244]). Řetězový zlomek $\mathbb{K}(a_n(z)/b_n(z))$ s polynomy $a_n(z)$ a $b_n(z)$ koresponduje v bodě $z_0 = \infty$ s řadou $L(z)$ pouze tehdy, když řetězový zlomek $\mathbb{K}(a_n(1/z)/b_n(1/z))$ koresponduje s řadou $L(1/z)$ v bodě $z_0 = 0$.

3.2 Kritéria pro korespondenci

Následující sekce nám pomůže odpovědět na následující otázky.

- Existuje pro daný řetězový zlomek (3.1) mocninná řada $L(z)$ s kterou řetězový zlomek koresponduje?
- Dokážeme nalézt pro danou mocninnou řadu $L(z)$ korespondující řetězový zlomek (3.1)?

Věty a příklady v této sekci budeme aplikovat pro korespondenci v bodě $z_0 = 0$. Související výsledky platí i pro korespondenci v bodě $z_0 = \infty$.

Vzhledem k předchozí části jsme vedeni ke studiu konvergence v $(\mathbb{L}, \|\cdot\|)$. O normovaném prostoru $(\mathbb{L}, \|\cdot\|)$ je známo, že je úplný (viz [26, str. 247]). Proto posloupnost (L_n) z \mathbb{L} konverguje k $L \in \mathbb{L}$ pouze tehdy, když (L_n) je Cauchyovskou posloupností, tj. tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\|L_{n+m} - L_n\| < \varepsilon \quad (3.14)$$

pro všechna m a $n \in \mathbb{N}$ s $n \geq N$.

Tato podmínka může být zjednodušena, viz následující lemma.

Lemma 3.7 ([26, str. 247]). Posloupnost (L_n) je Cauchyovskou posloupností v $(\mathbb{L}, \|\cdot\|)$ tehdy, když $\|L_{n+1} - L_n\| \rightarrow 0$.

Co je tedy potřeba k tomu, aby řetězový zlomek $\mathbb{K}(a_n(z)/b_n(z))$ s polynomy $a_n(z)$ a $b_n(z)$ korespondoval s nějakou $L \in \mathbb{L}$? Jinými slovy, co je potřeba, aby aproximanty $L_n(z) = \mathcal{L}(f_n(z))$ byly Cauchyovskou posloupností v $(\mathbb{L}, \|\cdot\|)$? Budeme vyšetřovat rozdíl

$$L_{n+1}(z) - L_n(z) = \frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{(-1)^n \prod_{k=1}^{n+1} a_k(z)}{B_n(z)B_{n+1}(z)}, \quad (3.15)$$

kde poslední krok plyne z determinantní formule (2.9). Použitím vztahu (3.7) a (3.8) získáme

$$\lambda(L_{n+1} - L_n) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda(a_k(z)) \right) - \lambda(B_n(z)) - \lambda(B_{n+1}(z)), \text{ pokud } B_n(z) \neq l_0, B_{n+1}(z) \neq l_0.$$

A tedy v řeči řetězového zlomku dostáváme následující větu.

Věta 3.8 ([19, str. 151–152]). *Nechť $K(a_n(z)/b_n(z))$ je řetězový zlomek s polynomy $a_n(z) \not\equiv 0$ a $b_n(z)$ pro $n \in \mathbb{N}$, a nechť $f_n(z) = A_n(z)/B_n(z)$ je jeho n -tý aproximant. Potom platí následující tvrzení.*

1. $K(a_n(z)/b_n(z))$ koresponduje k nějaké $L \in \mathbb{L}$ právě tehdy, když

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda(a_k(z)) \right) - \lambda(B_n(z)) - \lambda(B_{n+1}(z)) \rightarrow +\infty \text{ pro } n \rightarrow +\infty. \quad (3.16)$$

2. Pokud $K(a_n(z)/b_n(z))$ koresponduje s $L \in \mathbb{L}$, potom je řada L jednoznačně určená.
3. Pokud výraz ve (3.16) ostře roste k $+\infty$, potom je řád korespondence mezi $f_n(z) = A_n(z)/B_n(z)$ a řadou $L(z)$ určen vztahem

$$v_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda(a_k(z)) \right) - \lambda(B_n(z)) - \lambda(B_{n+1}(z)). \quad (3.17)$$

Příklad 3.9 (Motivace z [26, str. 23]). Vraťme se opět k příkladu 3.1, pokusme se nyní pomocí tvrzení z věty (3.8) určit, zda daný řetězový zlomek (3.2) koresponduje s danou řadou (3.3) v bodě $z_0 = 0$ a poté určíme řád korespondence v_n . Uvažujeme tedy řetězový zlomek ve tvaru

$$\frac{z}{1} + \frac{z/2}{1} + \frac{z/6}{1} + \frac{2z/6}{1} + \frac{2z/10}{1} + \frac{3z/10}{1} + \dots'$$

kde $a_{2n}(z) = nz/(4n - 2)$, $a_{2n+1}(z) = nz/(4n + 2)$ a $b_n(z) = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme dále, že platí

$$\begin{aligned} \lambda(B_{2n}(z)) &= 0, \\ \lambda(B_{2n+1}(z)) &= 0. \end{aligned}$$

Důkaz. Vlastním postupem dokážeme tvrzení $\lambda(B_{2n}(z)) = 0$. Druhé tvrzení $\lambda(B_{2n+1}(z))$ se dokáže podobně. K důkazu použijeme matematickou indukci.

Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť $\lambda(B_2(z)) = \lambda(1 + a_2(z)) = 0$. Dále předpokládejme, že pro $n = k$ platí:

$$\lambda(B_{2k}(z)) = 0.$$

Ověřme zda tvrzení platí i pro $n = k + 1$.

Mějme z (2.7)

$$\begin{aligned} \lambda(B_{2k+2}(z)) &= \lambda(B_{2k+1}(z) + a_{2k+2}(z)B_{2k}(z)) = \\ &= \lambda(B_{2k}(z) + a_{2k+1}(z)B_{2k-1}(z) + a_{2k+2}(z)B_{2k}(z)) = \\ &= \lambda\left(B_{2k}(z)(1 + a_{2k+2}(z)) + a_{2k+1}(z)B_{2k-1}(z)\right). \end{aligned}$$

Ze vztahu (3.7) dále ukážeme, že platí

$$\begin{aligned} \lambda\left(B_{2k}(z)(1 + a_{2k+2}(z))\right) &= \lambda(B_{2k}(z)) + \lambda(1 + a_{2k+2}(z)) = 0, \\ \lambda(a_{2k+1}(z)B_{2k-1}(z)) &= \lambda(a_{2k+1}(z)) + \lambda(B_{2k-1}(z)) \geq 1. \end{aligned}$$

Potom ze vztahu (3.9) plyne

$$\lambda(B_{2k+2}(z)) = \lambda(B_{2k}(z)(1 + a_{2k+2}(z)))$$

a tedy získáváme $\lambda(B_{2k+2}(z)) = 0$. Tím je dokázáno, že $\lambda(B_{2n}(z)) = 0$. \square

Proto bude platit, že $\lambda(B_n(z)) = \lambda(B_{n+1}(z)) = 0$. Dále platí, že $\lambda(a_n(z)) = 1$ a $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda(a_k) = n + 1$. Dostáváme tak

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda(a_k(z)) \right) - \lambda(B_n(z)) - \lambda(B_{n+1}(z)) = n + 1. \quad (3.18)$$

Vzhledem k tomu, že platí vztah (3.16) z věty 3.8, koresponduje daný řetězový zlomek s nějakou řadou $L \in \mathbb{L}$ v bodě $z_0 = 0$, která je jednoznačně určená (viz tvrzení 2. z věty 3.8). Jelikož platí i tvrzení 3. z věty 3.8, řád korespondence určíme ze vztahu (3.18), tj. $\nu_n = n + 1$.

Příklad 3.10 ([5, str. 35]). Uvažujme řetězový zlomek ve tvaru

$$1 + \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(z)}{b_n(z)} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z}{1} + \frac{z}{1} \dots'$$

kde $a_n(z) = z$ a $b_n(z) = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Z rekurentních formulí (2.7) můžeme ověřit, že n -tý jmenovatel $B_n(z)$ je polynom ve tvaru

$$B_n(z) = 1 + (n - 1)z + \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A proto $\lambda(B_n(z)) = \lambda(B_{n+1}(z)) = 0$. Dále platí, že $\lambda(a_n(z)) = 1$ a $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda(a_k(z)) = n + 1$. Z tohoto důvodu platí vztah (3.16), neboť

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda(a_k(z)) \right) - \lambda(B_n(z)) - \lambda(B_{n+1}(z)) = n + 1,$$

a proto existuje jednoznačně určená řada $L \in \mathbb{L}$. Řád korespondence určíme ze vztahu (3.17), tj. $\nu_n = n + 1$.

Poznámka 3.11. V příkladu 3.9 jsme zjistili, že daný řetězový zlomek koresponduje s nějakou řadou. Z předchozích příkladů dále víme se kterou řadou daný řetězový zlomek koresponduje. Poznamenejme, že určit takovou řadu není snadné (tj. určit $c_n \in \mathbb{C}$), později bude ukázáno, že snadnější je opačný postup, tj. k dané řadě určit řetězový zlomek, který s řadou koresponduje.

Uveďme ještě jeden příklad, kde řetězový zlomek nekoresponduje s žádnou řadou $L \in \mathbb{L}$ v bodě $z_0 = 0$.

Příklad 3.12 ([26, str. 248]). Uvažujme řetězový zlomek ve tvaru

$$1 + \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(z)}{b_n(z)} = 1 + \frac{z+1}{1} + \frac{z+2}{1} + \frac{z+3}{1} + \dots + \frac{z+n}{1} + \dots'$$

kde $a_n(z) = z + n$ a $b_n(z) = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Opět bychom mohli ukázat (viz důkaz v příkladu 3.9), že platí

$$\lambda(B_{2n}(z)) = 0, \lambda(B_{2n+1}(z)) = 0.$$

Platí tedy i $\lambda(B_n(z)) = \lambda(B_{n+1}(z)) = 0$. Oproti předchozím příkladům zde platí $\lambda(a_n(z)) = 0$. Z tohoto důvodu neplatí vztah (3.16), a daný řetězový zlomek nekoresponduje s nějakou řadou $L \in \mathbb{L}$.

Poznámka 3.13. V této kapitole jsme uvažovali $a_n(z)$ a $b_n(z)$ jako polynomy, jak je tomu ve většině aplikací. Nicméně, většina toho, co je zde předloženo, platí i pro obecnější situaci, kdy $a_n(z)$ a $b_n(z)$ jsou funkce proměnné z , které jsou meromorfní v okolí bodu $z_0 = 0$ (nebo v jiném pevném bodě $z = a \in \mathbb{C}^*$).

Poznámka 3.14. Z předchozích dvou příkladů si můžeme všimnout, že dané řetězové zlomky mají rozdílné vlastnosti. Tyto korespondenční vlastnosti jsou úzce spojeny se stupněm a tvarem daných polynomů $a_n(z)$ a $b_n(z)$. V následující kapitole si představíme základní typy řetězových zlomků s rozdílnými korespondenčními vlastnostmi a s tím související algoritmy.

Kapitola 4

Typy řetězových zlomků a související algoritmy

V této obsáhlé kapitole se budeme zabývat vlastnostmi tří nejpoužívanějších korespondujících řetězových zlomků tzv. *C-zlomků*, *J-zlomků* a *S-zlomků*.

Část této kapitoly je věnována algoritmu pro výpočet koeficientů řetězového zlomku ze znalosti členů korespondující mocninné řady (tzv. *qd*-algoritmus). Velká část této kapitoly je zaměřena na souvislost problému momentů, ortogonálních polynomů a řetězových zlomků. Budou zde uvedeny některé zajímavé věty, které budou důležité v závěrečné kapitole. Dále uvedme, že tato část v práci byla sepsána z důvodu lepšího pochopení závěrečné kapitoly (více v závěrečné kapitole).

Při sepsání této kapitoly jsme vycházeli z [5], [10], [11], [12], [15], [19], [25], [26] a [37].

4.1 C-zlomky

Definice 4.1 (C-zlomek). Řetězový zlomek ve tvaru

$$b_0 + \mathbf{K}_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n z^{\alpha_n}}{1} \right), \quad a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \alpha_n \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

se nazývá *C-zlomek*. Pokud $\alpha_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, potom (4.1) se nazývá *regulární C-zlomek*.

4.1.1 Korespondence C-zlomků

Význam C-zlomků spočívá v jejich silných korespondenčních vlastnostech v kombinaci s jejich jednoduchým tvarem. Následující věty popisují korespondenci mezi množinou všech C-zlomků, zahrnující i konečné C-zlomky a množinou Taylorových řad $L(z)$ se středem $z_0 = 0$ (tj. platí $\lambda(L) \geq 0$). Předtím ještě označme symbolem $\mathcal{T}(f)$ rozvoj funkce f v Taylorovu řadu v okolí bodu $z_0 = 0$.

Věta 4.2. Každý C-zlomek (4.1) koresponduje s jednoznačně určenou Taylorovou řadou $L \in \mathbb{L}$ ve tvaru

$$L(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad c_n \in \mathbb{C} \quad (4.2)$$

a řád korespondence mezi n -tým aproximantem $f_n(z)$ a řadou $L(z)$ je

$$v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Věta 4.3. Necht $L(z)$ je Taylorova řada se středem $z_0 = 0$ s $L(0) = c_0$. Potom buď existuje C-zlomek (4.1) korespondující s $L(z)$ se středem $z_0 = 0$, nebo pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ existuje konečný C-zlomek

$$f_n(z) = c_0 + \mathbf{K}_{k=1}^n \left(\frac{a_k z^{\alpha_k}}{1} \right), \quad (4.4)$$

takový, že

$$L(z) = \mathcal{T}(f_n(z)). \quad (4.5)$$

Věta 4.4. Pokud $f(z)$ je racionální funkce holomorfní v bodě $z_0 = 0$ a pokud $L(z) = \mathcal{T}(f(z))$ je rozvoj funkce v Taylorovu řadu se středem $z_0 = 0$, potom existuje konečný C-zlomek $f_n(z)$ ve tvaru (4.4) takový, že (4.5) platí.

Důkaz. Důkazy vět viz [19, str. 157–159]. □

Poznámka 4.5. Poslední věta implikuje, že neracionální funkce, holomorfní v $z_0 = 0$, má vždy korespondující nekonečný C-zlomek (viz [26, str. 256]).

4.2 Regulární C-zlomky

Důležitý typ řetězového zlomku je regulární C-zlomek ve tvaru

$$1 + \frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \frac{a_3 z}{1} + \dots, \quad a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (4.6)$$

V této sekci se zabýváme několika důležitými vlastnostmi těchto regulárních C-zlomků. Hlavní výsledky se soustředí na *kvocient-diferenční algoritmus* (qd-algoritmus). Ukážeme, že qd-algoritmus dává vyhovující numerickou metodu pro výpočet členů a_n regulárního C-zlomku (4.6) korespondujícího s danou mocninou řadou. Dále ukážeme, že qd-algoritmus může být použit k výpočtu pólů analytických funkcí.

4.2.1 Korespondence regulárních C-zlomků

Věta 4.6 ([19, str. 222]). Každý regulární C-zlomek (4.6) koresponduje s jednoznačně určenou Taylorovou řadou ve tvaru

$$l(z) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n \quad (4.7)$$

a řád korespondence mezi n -tým aproximantem $f_n(z)$ a řadou $l(z)$ je $v_n = n + 1$.

Definice 4.7. (Hankelův determinant). Hankelovy determinanty $H_k^{(n)}$ (o rozměru k) sdružené s řadou

$$L(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

jsou definovány vztahy

$$H_0^{(n)} = 1, \quad H_k^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.8)$$

Následující věta dává nutnou a postačující podmínku, že pro danou řadu (4.7) bude existovat korespondující regulární C-zlomek (4.6).

Věta 4.8 ([19, str. 224–226]). (A) Pokud pro danou řadu

$$l(z) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n \quad (4.9)$$

existuje regulární C-zlomek

$$1 + \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n z}{1} \right), \quad a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (4.10)$$

který koresponduje s $l(z)$, potom platí

$$H_k^{(1)} \neq 0 \text{ a } H_k^{(2)} \neq 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.11)$$

a

$$a_1 = H_1^{(1)}, \quad a_{2m} = -\frac{H_{m-1}^{(1)} H_m^{(2)}}{H_m^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}, \quad a_{2m+1} = -\frac{H_{m+1}^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}{H_m^{(1)} H_m^{(2)}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.12)$$

(B) Naopak, pokud (4.11) platí, potom regulární C-zlomek (4.10) s členy a_n definovanými v (4.12) koresponduje s (4.9).

4.2.2 qd-algoritmus

Koeficienty a_m lze získat z koeficientů c_n použitím qd-algoritmu, který zde předkládáme ve dvou formách. Standardní, která je nestabilní, použijeme k hledání řetězového zlomku a progresivní, která je více stabilní [5, str. 108], použijeme k hledání pólů jistých analytických funkcí.

Definice 4.9. (qd-tabulka). qd-tabulka je tabulka skládající se z hodnot $q_m^{(n)}$ a $e_m^{(n)}$, kde horní index označuje sestupnou diagonálu a dolní index sloupec:

$$\begin{array}{ccccccc}
 e_0^{(0)} & & & & & & \\
 & q_1^{(0)} & & & & & \\
 e_0^{(1)} & & e_1^{(0)} & & & & \\
 & q_1^{(1)} & & q_2^{(0)} & & & \\
 e_0^{(2)} & & e_1^{(1)} & & e_2^{(0)} & & \\
 & q_1^{(2)} & & q_2^{(1)} & & \cdot & \\
 e_0^{(3)} & & e_1^{(2)} & & \cdot & \cdot & \\
 & q_1^{(3)} & & \cdot & & \cdot & \ddots \\
 e_0^{(4)} & & \cdot & & \cdot & \cdot & \ddots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & &
 \end{array} \tag{4.13}$$

Ve standardní formě je qd -algoritmus sdružený s Taylorovou řadou $L(z)$ ve tvaru (4.2), hodnoty

$$e_0^{(n)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.14}$$

$$q_1^{(n)} = \frac{c_{n+1}}{c_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.15}$$

$$e_m^{(n)} = q_m^{(n+1)} - q_m^{(n)} + e_{m-1}^{(n+1)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.16}$$

$$q_{m+1}^{(n)} = \frac{e_m^{(n+1)}}{e_m^{(n)}} q_m^{(n+1)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.17}$$

jsou spočteny zleva doprava a vyplňují levou dolní polovinu tabulky (4.13), tedy pod hlavní diagonálou s horním indexem ⁽¹⁾. Počáteční hodnoty (4.14) a (4.15) vyplňují první dva sloupce.

Definice 4.10. (Kosočtvercové pravidla). Vztahy (4.16) a (4.17) se nazývají *kosočtvercová pravidla* pro qd -algoritmus, protože každé z nich spojuje čtyři prvky, a to buď sčítáním nebo násobením, které tvoří kosočtverec v qd -tabulce (4.13):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & q_m^{(n)} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 e_{m-1}^{(n+1)} & & & & e_m^{(n)} \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & & q_m^{(n+1)} & & q_{m+1}^{(n)} \\
 & & & & \\
 & & & & e_m^{(n+1)} \\
 & & & &
 \end{array} \tag{4.18}$$

Kosočtvercová pravidla se tedy používají k výpočtu prvků $e_m^{(n)}$ a $q_{m+1}^{(n)}$ v nejvzdálenějším pravém rohu každého kosočtverce.

Následující věta nám dává návod, jak získat členy a_m řetězového zlomku (4.10) z členů c_n řady (4.9).

Věta 4.11 ([19, str. 229]). *Nechť $l(z)$ je daná Taylorova řada (4.9). Pokud (4.11) platí a pokud $e_m^{(n)}, q_m^{(n)}$ splňují (4.14) až (4.17), potom členy a_m regulárního C-zlomku (4.10) korespondujícího s řadou $l(z)$ existují a jsou dány vztahy*

$$a_1 = c_1, \quad a_{2m} = -q_m^{(1)}, \quad a_{2m+1} = -e_m^{(1)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.19)$$

Podmínka (4.11) ve větě 4.8 garantuje, že qd -algoritmus se při výpočtu nepřerušuje, viz následující věta.

Věta 4.12 ([19, str. 229]). *Nechť je dána řada (4.2). Pokud existuje číslo $k \in \mathbb{N}$ takové, že $H_m^{(n)} \neq 0$ pro $m = 1, 2, \dots, k$ a $n \geq 0$, potom hodnoty $q_m^{(n)}$ a $e_m^{(n)}$ existují pro $m = 1, 2, \dots, k$ a $n \geq 0$ a jsou dány*

$$q_m^{(n)} = \frac{H_{m-1}^{(n)} H_m^{(n+1)}}{H_m^{(n)} H_{m-1}^{(n+1)}}, \quad e_m^{(n)} = \frac{H_{m+1}^{(n)} H_{m-1}^{(n+1)}}{H_m^{(n)} H_m^{(n+1)}}, \quad m \geq 1. \quad (4.20)$$

Příklad 4.13 (Motivace z [5, str. 109]). Uvažujme exponenciální funkci ve tvaru

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.21)$$

a pokusme se pro ní najít regulární C-zlomek, který s ní koresponduje.

Počáteční hodnoty $e_0^{(n)}$ a $q_1^{(n)}$ pro $n \geq 0$ vypočteme ze vztahů (4.14), (4.15) a jsou rovny

$$e_0^{(n)} = 0, \quad q_1^{(n)} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Použitím kosočtvercových pravidel (4.16) a (4.17) vytvoříme qd -tabulku (4.13)¹.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ 0 & -\frac{1}{2} & & & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & & & \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & & & \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & & \\ 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{10} & & & \\ & \frac{1}{4} & \frac{3}{20} & & & \\ 0 & -\frac{1}{20} & & & & \\ & \frac{1}{5} & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Z věty 4.11 lze vypočítat, že jsou pro nás důležité hodnoty s horním indexem⁽¹⁾, tj. hodnoty

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{10}, \dots$$

¹Vytvořenou tabulku lze nalézt v příloženém souboru qd_algo.m.

Dále z věty 4.11 získáváme návod na výpočet členů a_m . Tedy regulární C-zlomek korespondující s řadou (4.21) a reprezentující funkci e^z je ve tvaru

$$e^z \approx 1 + \frac{z}{1} + \frac{-\frac{1}{2}z}{1} + \frac{\frac{1}{6}z}{1} + \frac{-\frac{1}{6}z}{1} + \frac{\frac{1}{10}z}{1} \dots, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.22)$$

Dalo by se ukázat, že obecně platí

$$a_{2n}(z) = -\frac{1}{2(2n-1)}z, \quad a_{2n+1}(z) = \frac{1}{2(2n+1)}z, \quad n = 1, 2, \dots$$

Řetězový zlomek (4.22) je tedy regulární C-zlomek a z věty 4.6 víme, že řetězový zlomek (4.22) koresponduje s jednoznačně určenou formální Taylorovou řadou ve tvaru (4.9). Otázkou zůstává, zda daný řetězový zlomek (4.22) koresponduje s danou řadou (4.21)?

Vypíšeme dále čtyři aproximanty $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, $f_4(z)$ získaného řetězového zlomku a jejich rozvoje v Taylorovou mocninnou řadu se středem $z_0 = 0$. Aproximanty vypočítáme z rekurentních vztahů (2.7):

$$\begin{aligned} f_1(z) &= 1 + z \sim \mathcal{T}(f_1(z)) = 1 + z + 0z^2 + 0z^3 + 0z^4, \dots, \\ f_2(z) &= -\frac{z+2}{z-2} \sim \mathcal{T}(f_2(z)) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{4} + \frac{z^4}{8} + \dots, \\ f_3(z) &= \frac{z^2+4z+6}{6-2z} \sim \mathcal{T}(f_3(z)) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{18} + \dots, \\ f_4(z) &= \frac{z^2+6z+12}{z^2-6z+12} \sim \mathcal{T}(f_4(z)) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots \end{aligned}$$

Lze si všimnout, že s přibývajícimi aproximanty se jejich rozvoje více a více shodují s řadou (4.21). Tento výsledek může naznačovat, že řetězový zlomek (4.22) by mohl korespondovat s řadou (4.21), tzn. že námi použitý qd -algoritmus by mohl být správný. K dokončení našeho příkladu (tvrzení) je potřeba splnění předpokladu věty 4.11, tj. že platí nenulovost Hankelových determinantů, viz (4.11). Ukázat, že předpoklad (4.11) platí, je obecně velmi komplikované. V závěru této části uvedeme postačující podmínky, které zajistí, že Hankelovy determinanty budou splňovat předpoklad (4.11).

Věta 4.14 ([12, str. 605]). *Nechť $\psi(t)$ je reálná nezáporná omezená neklesající funkce definovaná na intervalu $[0; +\infty)$, a necht' Stieltjesovy integrály*

$$c_n = \int_0^{+\infty} t^n d\psi(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

existují. Necht' dále $H_m^{(n)}$ označuje Hankelovy determinanty sdružené s řadou

$$L(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Potom:

(A) *Pokud má funkce $\psi(t)$ alespoň k bodů vzrůstu, potom*

$$H_m^{(n)} \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots, k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

(B) *Pokud má funkce $\psi(t)$ nekonečně mnoho bodů vzrůstu, potom (4.24) platí pro všechna m .*

Uvedme, že určit funkci $\psi(t)$ je velmi obtížné. Určení této funkce není předmětem této práce, avšak věta 4.14 bude mít své odůvodnění v pozdějších kapitolách.

Věta 4.15 ([10, str. 36]). *Nechť $L(z)$ je Taylorova řada se středem $z_0 = 0$ z meromorfní funkce*

$$f(z) = e^{\gamma z} \frac{\prod_{i=1}^{+\infty} (1 + \alpha_i z)}{\prod_{i=1}^{+\infty} (1 - \beta_i z)}, \quad (4.25)$$

kde $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \gamma \geq 0$ a $\sum(\alpha_i + \beta_i) < +\infty$. Potom:

Pokud $\gamma > 0$ nebo pokud alespoň jedna z posloupností (α_i) a (β_i) má nekonečný počet nenulových členů, potom platí

$$H_m^{(n)} \neq 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

K dokončení našeho příkladu stačí využít věty 4.15 a můžeme zvolit $\alpha_i = \beta_i = 0$ s $\gamma = 1$. Proto předpoklad (4.11) platí a námi získané výsledky jsou správné.

Poznamenejme, že ke splnění podmínky (4.11) také postačí, pokud mocninná řada je tzv. *normální*, tj. $c_n \neq 0, n \geq 0$ (viz [10, str. 16] a [19, str. 229]).

qd-algoritmus může být také použit k výpočtu nulových bodů a pólů jistých funkcí, viz následující věta.

Věta 4.16 ([11, str. 612]). *Nechť $L(z)$ je Taylorova řada se středem $z_0 = 0$ z funkce $f(z)$ holomorfní v počátku a meromorfní na disku $D_r = \{z : |z| < r\}$. Nechť póly z_j funkce $f(z)$ na disku D_r jsou uspořádány tak, že*

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots < r,$$

kde každý pól se vyskytuje v posloupnosti (z_k) tolikrát, jaký je jeho řád. Nechť Hankelovy determinanty sdružené s řadou $L(z)$ splňují

$$H_m^{(n)} \neq 0 \quad m = 1, 2, \dots, k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Potom:

(A) *Pro každé m takové, že $0 < m \leq k$ platí*

$$|z_{m-1}| < |z_m| < |z_{m+1}|,$$

(kde $z_0 = 0$ a pokud $f(z)$ má pouze k pólů, tak $z_{k+1} = \infty$),

a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_m^{(n)} = \frac{1}{z_m}.$$

(B) *Pro každé m takové, že $0 < m \leq k$ platí*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_m^{(n)} = 0.$$

Jak již bylo zmíněno na úvod této sekce, k hledání pólů či nulových bodů jistých funkcí budeme používat progresivní formu qd -algoritmu. V progresivní formě, která je více stabilní, vycházíme ze znalosti první diagonály, tj.

$$q_1^{(1)}, e_1^{(1)}, q_2^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, \quad (4.26)$$

kterou lze získat z řetězového zlomku (viz věta 4.11) a poté postupovat podle upravených kosočtvercových pravidel

$$q_m^{(n+1)} = q_m^{(n)} + e_m^{(n)} - e_{m-1}^{(n+1)}, \quad \left(e_0^{(n+1)} = 0 \right), \quad (4.27)$$

$$e_m^{(n+1)} = \frac{e_m^{(n)} q_{m+1}^{(n)}}{q_m^{(n+1)}}, \quad m = 1, 2, \dots, k-1. \quad (4.28)$$

Nevýhoda této formy je obtížné určení startovních hodnot (4.26), nicméně tento způsob nám i přesto postačí v kapitole, kde tato metoda bude použita.

4.3 S-zlomky

Definice 4.17 (S-zlomek). Řetězový zlomek ve tvaru

$$\mathbf{K}_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n z}{1} \right), \quad a_n > 0, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.29)$$

nebo řetězový zlomek takový, že je s řetězovým zlomkem (4.29) ekvivalentní, se nazývá *Stieltjesův zlomek* nebo zkráceně *S-zlomek*.

Například řetězový zlomek

$$\mathbf{K}_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{b_n} \right), \quad b_n > 0$$

je S-zlomek, protože stačí zvolit hodnoty

$$a_1 = \frac{1}{b_1}, \quad a_n = \frac{1}{b_{n-1} b_n}, \quad n > 1$$

a z důsledku 2.6 plyne, že dané řetězové zlomky jsou ekvivalentní.

Definice 4.18 (Modifikovaný S-zlomek). Nějaký řetězový zlomek nazveme *modifikovaným S-zlomkem*, pokud existuje transformace $z \rightarrow g(z)$ taková, že výsledný řetězový zlomek je S-zlomkem (viz [5, str. 36]).

Příklad 4.19. Modifikovaným S-zlomkem je například řetězový zlomek

$$\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{1} + \frac{a_3}{z} + \frac{a_4}{1} + \dots, \quad a_n > 0, \quad (4.30)$$

neboť záměnou proměnné $z \rightarrow 1/z$ dostáváme

$$\begin{aligned}
 \frac{a_1}{\frac{1}{z} + \frac{a_2}{1 + \frac{a_3}{\frac{1}{z} + \frac{a_4}{1 + \dots}}}}} &= \frac{a_1}{\frac{1}{z} \left(1 + \frac{a_2 z}{1 + \frac{a_3}{\frac{1}{z} + \frac{a_4}{1 + \dots}}} \right)} = \frac{a_1 z}{1 + \frac{a_2 z}{1 + \frac{a_3 z}{1 + \frac{a_4 z}{1 + \dots}}}}} = \\
 &= \frac{a_1 z}{1 + \frac{a_2 z}{1 + \frac{a_3 z}{1 + \frac{a_4 z}{1 + \dots}}}}}.
 \end{aligned}$$

Je zřejmé, že tímto postupem vytvoříme řetězový zlomek (4.29).

S-zlomek je speciálním případem regulárního C-zlomku, proto jsou všechny věty a algoritmy ze sekce 3.2 aplikovatelné i na S-zlomky. I přesto si uveďme podmínky na korespondenci, neboť tyto podmínky získáme v jednodušší formě než v případě C-zlomků.

Věta 4.20 ([5, str. 114]). *S-zlomek (4.29) koresponduje s řadou*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n c_n z^{n+1} \quad (4.31)$$

a *Modifikovaný S-zlomek (4.30) koresponduje s řadou*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n c_n}{z^{n+1}} \quad (4.32)$$

právě tehdy, když Hankelovy determinanty související s c_n splňují

$$H_k^{(1)} > 0, \quad H_k^{(2)} > 0, \quad k \geq 1. \quad (4.33)$$

4.4 J-zlomky

Definice 4.21 (J-zlomek). Řetězový zlomek ve tvaru

$$\frac{1}{b_1 + z} + \mathbf{K}_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-a_{n-1}^2}{b_n + z} \right), \quad a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad b_n \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.34)$$

se nazývá *J-zlomkem*.

4.4.1 Korespondence J-zlomku

Věta 4.22 ([19, str. 249–250]). Každý J-zlomek ve tvaru (4.34) koresponduje s řadou

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n c_n}{z^{n+1}} \quad (4.35)$$

v bodě $z_0 = \infty$. Řád korespondence mezi n -tým aproximantem $f_n(z)$ a řadou (4.35) je $\nu_n = 2n + 1$.

Existence J-zlomku odpovídajícího libovolné řadě 4.35 v bodě $z_0 = \infty$ není zaručena. Nutné podmínky na koeficienty c_n řady (4.35) jsou dány v následující větě.

Věta 4.23 (JT80, str. 244). Pokud pro danou řadu (4.35) existuje J-zlomek (4.34), který k ní koresponduje, potom

$$H_k^{(1)} \neq 0 \quad k \geq 1. \quad (4.36)$$

4.4.2 Problém momentů, ortogonální polynomy a řetězové zlomky

Reálný J-zlomek a Jacobiho matice

V této části se zaměříme na spojitost mezi reálným J-zlomkem a Jacobiho maticí a ukážeme zajímavou vlastnost kořenů n -tého jmenovatele $B_n(z)$.

Lemma 4.24 ([37, str. 64]). n -té jmenovatele $B_n(z)$ řetězového zlomku (4.34) jsou dány determinantem ve tvaru

$$B_n(z) = \begin{vmatrix} b_1 + z & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 + z & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 + z & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} + z & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1} & b_n + z \end{vmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.37)$$

Definice 4.25 (Reálný J-zlomek). Řetězový zlomek (4.34) nazýváme *reálný J-zlomek*, pokud jsou všechny prvky a_n a b_n reálné.

Definice 4.26 (Jacobiho matice). Reálnou symetrickou tridiagonální maticí

$$\mathbb{J}_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{k-1} \\ & & & \beta_{k-1} & \alpha_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (4.38)$$

kde $\beta_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, k - 1$, nazveme *Jacobiho maticí*.

Tridiagonální matice mají důležitou vlastnost, že jejich charakteristický polynom $\varphi_k(\lambda)$ lze vypočítat pomocí jednoduchých rekurentních relací

$$\varphi_0(\lambda) = 1, \quad \varphi_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda,$$

$$\varphi_k(\lambda) = (\alpha_k - \lambda) \varphi_{k-1}(\lambda) - \beta_{k-1}^2 \varphi_{k-2}(\lambda), \quad k = 2, 3, \dots,$$

kde $\varphi_k(\lambda)$ je monický polynom (tj. koeficient u proměnné v nejvyšší mocnině je roven jedné). Pro Jacobiho matici je posloupnost polynomů $\varphi_2(\lambda), \varphi_3(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)$ Sturmovou posloupností. Jelikož koeficienty u nejvyšších mocnin proměnné jsou u všech těchto polynomů kladné, jsou podle Sturmovy věty všechny kořeny těchto polynomů reálné a kořeny dvou po sobě následujících polynomech se prokládají (viz [31, str. 534–536]). Platí tedy, že všechna vlastní čísla Jacobiho matice jsou reálná a různá.

Ze znalosti vlastností vlastních čísel Jacobiho matice jsme schopni dokázat následující větu týkající se kořenů n -tého jmenovatele $B_n(z)$ reálného J-zlomku.

Věta 4.27 ([37, str. 114]). *Kořeny n -tého jmenovatele $B_n(z)$ reálného řetězového zlomku (4.34) jsou všechny reálné a různé.*

Vlastní úvahou dokažme tuto větu.

Důkaz. Pokud budeme uvažovat $z = -\lambda$ a $b_n = \alpha_n, a_n = \beta_n$, potom platí

$$B_n(z) = \det(\mathbb{J}_n + z\mathbb{I}) = \det(\mathbb{J}_n - \lambda\mathbb{I}). \quad (4.39)$$

Z (4.39) je zřejmé, že hledání kořenů polynomu $B_n(z)$ je shodné s hledání vlastních čísel Jacobiho matice \mathbb{J}_k . Vlastní čísla Jacobiho matice jsou reálná, různá a tedy i kořeny polynomu $B_n(z)$ jsou reálná a různá. \square

Stieltjesův problém momentů a Gauss–Christoffelova kvadratura

V této podsekci se zaměříme na spojitost mezi Stieltjesovým problémem momentů a Gauss–Christoffelovou kvadraturou. Nejdříve je však potřeba se seznámit se základními pojmy s teorie problému momentů a Stieltjesova integrálu.

Definice 4.28 (distribuční funkce). Funkci ψ nazveme *distribuční funkcí* na reálném intervalu (a, b) , kde $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, pokud je funkce ψ omezená a neklesající na intervalu (a, b) . Pokud ψ je distribuční funkcí na (a, b) , pak říkáme, že k -tý moment pro funkci ψ existuje, pokud Riemannův-Stieltjesův integrál (dále jen Stieltjesův integrál)

$$\int_a^b t^k d\psi(t) \quad (4.40)$$

konverguje. V tomto případě nazveme integrál (4.40) *k -tým momentem* pro ψ .

V problému momentů jde tedy o to, určit (reálnou) omezenou a neklesající funkci $\psi(t)$ definovanou na (a, b) , takovou že její momenty (4.40) se rovnají posloupnosti předepsaných čísel $\mu_k, k = 0, 1, \dots$. Tzn., že pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\mu_k = \int_a^b t^k d\psi(t). \quad (4.41)$$

Definice 4.29 (Stieltjesův problém momentů). Pokud $a = 0$ a $b = +\infty$, problém momentů pro posloupnost $(\mu_k)_{k=0}^{+\infty}$ reálných čísel nazveme *klasickým Stieltjesovým problémem momentů*. Distribuční funkci ψ splňující (4.41) pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ nazveme *řešením Stieltjesova problému momentů* pro posloupnost $(\mu_k)_{k=0}^{+\infty}$ na (a, b) .

Definice 4.30 (Momentová distribuční funkce). Distribuční funkce ψ , která je řešení Stieltjesova problému momentů, budeme nazývat *momentovou distribuční funkcí* na (a, b) .

S problémem momentů vyvstávají následující otázky:

1. Existuje řešení, tzn. existuje momentová distribuční funkce $\psi(t)$?
2. Je dané řešení jednoznačné?
3. Jak lze dané řešení zkonstruovat?

Následující věta je nutnou a postačující podmínkou pro existenci řešení Stieltjesova problému momentů.

Věta 4.31 ([37, str. 327]). *Stieltjesův problém momentů pro posloupnost $(\mu_k)_{k=0}^{+\infty}$ reálných čísel má řešení pouze tehdy, když Hankelovy determinanty (viz definice 4.7) související s $(\mu_k)_{k=0}^{+\infty}$ splňují*

$$H_k^{(0)} > 0, \quad H_k^{(1)} > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Postačující podmínkou pro jednoznačnost řešení Stieltjesova problému momentů je splnění tzv. *Carlemanova kritéria*, viz následující věta.

Věta 4.32 ([37, str. 330]). *Pokud $(\mu_k)_{k=0}^{+\infty}$ je posloupností reálných čísel, pro které Stieltjesův problém momentů má řešení, potom tento problém momentů je jednoznačný, pokud*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu_k} \right)^{\frac{1}{2k}} = +\infty. \quad (4.42)$$

Ještě předtím, než si ukážeme jak dané řešení zkonstruovat, si představíme některé důležité věty z teorie Stieltjesova integrálu.

Věta 4.33 ([37, str. 240]). *Pokud existuje Stieltjesův integrál funkce $f(t)$ vzhledem k funkci $\psi(t)$, potom existuje Stieltjesův integrál funkce $\psi(t)$ vzhledem k funkci $f(t)$, a integrál připouští integraci po částech ve formě*

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = f(b)\psi(b) - f(a)\psi(a) - \int_a^b \psi(t) df(t). \quad (4.43)$$

Věta 4.34 ([37, str. 241]). *Pokud funkce $\psi(t)$ je spojitá na $a \leq t \leq b$ a má derivaci $\psi'(t)$ takovou, že $f(t)\psi'(t)$ je Riemannovsky integrovatelná na $a \leq t \leq b$, potom*

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \int_a^b f(t)\psi'(t) dt. \quad (4.44)$$

Definice 4.35 (funkce s konečnou variací). Pokud existuje taková konstanta $K \in \mathbb{R}$, že pro každé dělení intervalu $a \leq t \leq b$ platí odhad

$$\sum_{i=1}^n |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \leq K,$$

potom funkci $\psi(t)$ nazýváme *funkcí s konečnou variací* na intervalu $a \leq t \leq b$.

Věta 4.36 ([37, str. 241–242]). *Pokud $f(t)$ je spojitá a $\psi(t)$ je funkce s konečnou variací na intervalu $a \leq t \leq b$, potom existuje Stieltjesův integrál funkce $f(t)$ vzhledem k funkci $\psi(t)$.*

V našem případě pro dané $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a \leq b < +\infty$ dostáváme z vět 4.43 a 4.44 integrál

$$\int_a^b d\psi(t) = \psi(b) - \psi(a). \quad (4.45)$$

Pro lepší porozumění si uveďme ukázkový příklad převzatý z [5, str. 85].

Příklad 4.37 ([5, str. 85]). Nechť posloupnost $(\mu_k)_{k=0}^{+\infty}$ reálných čísel je definována vztahem

$$\mu_k = k!, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Přímým ověřením zjistíme, že

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

potom z věty 4.34 dostáváme, že Stieltjesův problém momentů pro $(\mu_k)_{k=0}^{+\infty}$ má řešení

$$\psi(t) = -e^{-t}, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Dané řešení je navíc jednoznačné, neboť platí

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{2k}} = +\infty.$$

V tomto příkladě jsme řešení našli přímým ověřením. Obecně je však nalezení řešení velmi komplikované. Pro zkonstruování řešení budeme v následujících odstavcích uvažovat zjednodušenou verzi Stieltjesova problému momentů. V této verzi je dán interval $[a, b]$ a neklesající (ne nutně spojitá) reálná funkce $\psi(t)$ definovaná na $[a, b]$. Dále předpokládejme, že $\psi(a) = 0$ a $\psi(b) = 1$, takže integrál (4.45) je roven jedné. Tento předpoklad má svůj důvod. Z definice Stieltjesova integrálu se dá ukázat, že řešení daného problému je jedinečné, pokud je normalizováno zvolenými podmínkami (viz [12, str. 637]).

Definice 4.38 (bod vzrůstu). *Bod vzrůstu t_* distribuční funkce $\psi(t)$ definujeme jako bod, pro který existuje okolí, kde není funkce $\psi(t)$ konstantní. Počet bodů vzrůstu funkce $\psi(t)$ budeme značit $n(\psi)$. Poznamenejme, že $n(\psi)$ může být i nekonečno.*

Nyní si lze představit zjednodušenou verzi Stieltjesova problému momentů:

Problém 4.39 (zjednodušená verze Stieltjesova problému momentů). Nechť $\psi(t)$ je neklesající reálná funkce definovaná na daném reálném intervalu $[a, b]$ s $\psi(a) = 0$ a $\psi(b) = 1$, a nechť jsou dány momenty funkce $\psi(t)$ ve tvaru

$$\mu_k = \int_a^b t^k d\psi(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Pro daná kladná čísla n chceme určit neklesající reálnou funkci $\psi^{(n)}(t)$ na $[a, b]$ s n body vzrůstu $t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$, kde

$$a < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b,$$

a s nimi spojené kladné váhy $\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)}$, kde $\sum_{j=1}^n \psi_j^{(n)} = 1$, tj.

$$\psi^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } a \leq t < t_1^{(n)}, \\ \sum_{j=1}^i \psi_j^{(n)} & \text{pokud } t_i^{(n)} \leq t < t_{i+1}^{(n)}, i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \sum_{j=1}^n \psi_j^{(n)} = 1 & \text{pokud } t_n^{(n)} \leq t \leq b, \end{cases} \quad (4.46)$$

takovou, že prvních $2n$ momentů funkce $\psi^{(n)}(t)$ souhlasí s prvními $2n$ momenty dané funkce $\psi(t)$, tzn.

$$\int_a^b t^k d\psi^{(n)}(t) = \mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1. \quad (4.47)$$

Pro bližší pohled na problém si stručně shrneme důležité definice a věty z numerické kvadratury. Více informací o numerické kvadratuře lze nalézt v [9, str. 20–22].

Uvažujme n různých čísel $\varrho_1, \dots, \varrho_n \in (a, b]$ a n reálných čísel $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Pokud $f(t)$ je Riemann-Stieltjovský integrovatelná na $[a, b]$, lze integrál z této funkce napsat jako

$$I_\psi(f) \equiv \int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j f(\varrho_j) + E_\psi^n(f), \quad (4.48)$$

kde $E_\psi^n(f)$ reprezentuje nějakou chybu.

Definice 4.40 (n -uzlová kvadratura). Člen

$$I_\psi^n(f) \equiv \sum_{j=1}^n \varepsilon_j f(\varrho_j) \quad (4.49)$$

se nazývá n -uzlová kvadratura pro aproximaci integrálu $I_\psi(f)$. Čísla $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ a $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ nazýváme *uzly* a *váhy* kvadratury.

Cílem je vybrat takové uzly a váhy, aby chyba $E_\psi^n(f)$ byla malá. Když je chyba rovna nule, kvadratura (4.40) je tzv. *přesná*. O kvadratuře, která je přesná pro všechny polynomy stupně k , ale ne pro všechny polynomy vyššího stupně, se říká, že má *algebraický stupeň přesnosti k* .

Vzhledem k tomu, že n předpokládáme konečné, je Stieltjesův integrál na levé straně rovnice (4.47) dán rovností

$$\int_a^b t^k d\psi^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^n \psi_j^{(n)} \{t_j^{(n)}\}^k.$$

Pokud n různých čísel $t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)} \in (a, b]$ a n kladných čísel $\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)}$ (v součtu 1) řeší zjednodušený Stieltjesův problém momentů, potom

$$\sum_{j=1}^n \psi_j^{(n)} \{t_j^{(n)}\}^k = \int_a^b t^k d\psi(t), \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Protože nějaký polynom stupně nejvýše $2n - 1$ je lineární kombinací monomů t^k , $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$, pak z poslední rovnice plyne, že

$$\sum_{j=1}^n \psi_j^{(n)} p(t_j^{(n)}) = \int_a^b p(t) d\psi(t) \quad (4.50)$$

platí pro nějaký polynom $p(t)$ stupně nejvýše $2n - 1$.
Předchozí úvahy lze shrnout takto:

Řešením zjednodušeného Stieltjesova problému momentů získáme n -uzlovou kvadraturu pro daný Riemannův–Stieltjesův integrál s distribuční funkcí $\psi(t)$. Tato kvadratura má kladné váhy a algebraický stupeň přesnosti $2n - 1$.

A naopak, pokud n -uzlová kvadratura pro Riemann–Stieltjesovo integrál s distribuční funkcí $\psi(t)$ má kladné váhy a algebraický stupeň přesnosti $2n - 1$, pak dává řešení zjednodušeného Stieltjesova problému momentů (viz [25, str. 76]).

Níže bude ukázáno, že tzv. Gauss–Christoffelova kvadratura dává řešení zjednodušeného Stieltjesova problému momentů.

Nechť dále uvažujeme neklesající distribuční funkci $\psi(t)$ na konečném reálném intervalu $[a, b]$ s $\psi(a) = 0$, $\psi(b) = 1$ a s $n(\psi)$ body vzrůstu, kde $n(\psi)$ může být nekonečno. Protože $\psi(t)$ je funkce s konečnou variací, pak Stieltjesův integrál

$$I_\psi(f) = \int_a^b f(t) d\psi(t) \quad (4.51)$$

existuje pro nějakou danou spojitou funkci $f(t)$ (viz věta 4.36).

Nyní si definujeme tzv. interpolační kvadraturu pro aproximaci integrálu (4.51).

Definice 4.41 (n -uzlová interpolační kvadratura). n -uzlová interpolační kvadratura pro aproximaci Stieltjesova integrálu (4.51) je definována vztahy

$$I_\psi^n(f) \equiv \sum_{j=1}^n \psi_j^{(n)} f(t_j^{(n)}) , \quad \text{kde} \quad (4.52)$$

$$\psi_j^{(n)} \equiv \int_a^b \frac{q_n(t)}{q_n'(t_j^{(n)}) (t - t_j^{(n)})} d\psi(t) \quad \text{pro } j = 1, \dots, n, \quad (4.53)$$

$$q_n(t) = (t - t_1^{(n)}) \cdots (t - t_n^{(n)}) .$$

Lemma 4.42 ([25, str. 79]). n -uzlová kvadratura ve tvaru (4.40) má algebraický stupeň přesnosti nejvýše $n - 1$ pouze tehdy, když je to n -uzlová interpolační kvadratura ve tvaru (4.52)–(4.53).

Vzhledem k tomu, že nelze očekávat algebraický stupeň $2n$ nebo vyšší (viz [25, str. 79]), ukáže se, že pro každé $n < n(\psi)$ existuje volba n uzlů takových, že výsledná interpolační kvadratura má algebraický stupeň přesnosti $2n - 1$. Nejdříve si však definujeme posloupnost monických ortogonálních polynomů a popíšeme jejich vlastnosti.

Definice 4.43 (skalární součin). Nechť ψ je momentová distribuční funkce na intervalu (a, b) , kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Potom *skalární součin* $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ nad prostorem \mathbb{P} reálných polynomů, je definován jako

$$\langle f, g \rangle_\psi = \int_a^b f(t)g(t) d\psi(t), \quad f, g \in \mathbb{P}. \quad (4.54)$$

Číslo

$$\|f\|_\psi = \sqrt{\langle f, f \rangle_\psi} = \left(\int_a^b f^2(t) d\psi(t) \right)^{1/2}$$

nazýváme *normou* polynomu f .

Definice 4.44 (posloupnost ortogonálních polynomů). Posloupnost reálných polynomů $(P_n(t))_{n=0}^{+\infty}$ se nazývá *posloupností ortogonálních polynomů* pro ψ , pokud pro $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\begin{aligned} \deg P_n &= n, \\ \langle P_m, P_n \rangle_\psi &= 0, \quad m \neq n, \\ \langle P_n, P_n \rangle_\psi &= \|P_n\|_\psi^2 > 0. \end{aligned}$$

Definice 4.45 (monický polynom). Posloupnost ortogonálních polynomů $(Q_n(t))_{n=0}^{+\infty}$ se nazývá *monická*, pokud má každý polynom $Q_n(t)$ u nejvyšší mocniny koeficient roven 1.

Následující lemma uvádí jednu ze základních vlastností kořenů monických ortogonálních polynomů.

Lemma 4.46 ([25, str. 81]). Uvažujme kladné číslo $n \leq n(\psi)$ (kde $n(\psi)$ může být konečné nebo nekonečné). Potom n kořenů monického polynomu $Q_n(t)$ jsou různé a umístěné na intervalu $(a, b]$. Pokud $n < n(\psi)$, potom jsou kořeny polynomu $Q_n(t)$ umístěné na otevřeném intervalu (a, b) .

Jak uvidíme dále, získáme jednoznačně definovanou n -uzlovou mechanickou kvadraturu, která má algebraický stupeň přesnosti $2n - 1$.

Lemma 4.47 ([25, str. 81–82]). Uvažujme kladné číslo $n < n(\psi)$ (kde $n(\psi)$ může být konečné nebo nekonečné). n -uzlová kvadratura má algebraický stupeň přesnosti $2n - 1$ pouze tehdy, když je to interpolační kvadratura ve tvaru (4.52)–(4.53) s n uzly dané jako kořeny polynomu $Q_n(t)$.

Nyní již lze přejít k definici *Gauss–Christoffelovy kvadratury*.

Definice 4.48 (Gauss–Christoffelova kvadratura). n -uzlová *Gauss–Christoffelova kvadratura* je jednoznačně definovaná interpolační kvadratura (4.52)–(4.53), která má algebraický stupeň přesnosti $2n - 1$.

Pro váhy $\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)}$ Gauss–Christoffelovy kvadratury platí, že jsou kladné (viz [LiStra13, str. 85]). Tyto váhy jsou občas nazývány *Christoffelova čísla*. Aplikací Gauss–Christoffelovy kvadratury na konstantní polynom $p(t) \equiv 1$ dostáváme výsledek

$$\psi_1^{(n)} + \dots + \psi_n^{(n)} = \int_a^b d\psi(t).$$

Z předpokladu, že $\psi(a) = 0$ a $\psi(b) = 1$ dostáváme, že integrál na pravé straně je roven jedné.

Protože Gauss–Christoffelova kvadratura má kladné váhy a algebraický stupeň přesnosti $2n - 1$, můžeme tak přistoupit k následující větě.

Věta 4.49 ([25, str. 85]). *Pro každé kladné číslo $n < n(\psi)$ (kde $n(\psi)$ může být nekonečné), n různých uzlů $t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)} \in (a, b)$ (dané kořeny $Q_n(t)$), a s tím souvisejících n kladných vah $\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)}$ (dané (4.53) a součtem rovné 1) Gauss–Christoffelovy kvadratury, jednoznačně definujeme distribuční funkci $\psi^{(n)}(t)$, která řeší zjednodušený Stieltjesův problém momentů.*

Výše uvedenou větu lze pochopit tak, že n -uzlová Gauss–Christoffelova kvadratura představuje jakousi redukci modelu s odpovídajícími momenty. Původní model je dán distribuční funkcí $\psi(t)$ s $n(\psi) \leq +\infty$ body vzrůstu a redukovaný model je daný distribuční funkcí $\psi^{(n)}(t)$ s $n < n(\psi)$ body vzrůstu dané kořeny n -tého monického polynomu $Q_n(t)$. Redukovaný model odpovídá prvním $2n$ momentům původního modelu (viz [25, str. 85]).

Na závěr této části se krátce podíváme na konvergenční vlastnosti Gauss–Christoffelovy kvadratury. Nechť tedy $\psi(t)$ je neklesající spojitá funkce na konečném intervalu $[a, b]$ s $\psi(a) = 0$ a $\psi(b) = 1$. Potom $n(\psi)$ je nekonečno a Gauss–Christoffelova kvadratura je definovaná pro nějaké číslo n . Poznamenejme, že již v roce 1884 Stieltjes sepsal a dokázal větu týkající se konvergence Gauss–Christoffelovy kvadratury. Podle Stieltjesovy věty platí, že jsou-li a i b konečné a $f(t)$ spojitá na $[a, b]$, potom

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \psi_j^{(n)} f(t_j^{(n)}) = \int_a^b f(t) d\psi(t). \quad (4.55)$$

Nyní uvažujme mírnou změnu zápisu a nechť t je libovolné pevné (reálné) číslo mimo interval $[a, b]$. Potom funkce

$$f(u) \equiv \frac{1}{t - u}$$

je spojitá na $[a, b]$, a z výsledku konvergence Gauss–Christoffelovy kvadratury vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \frac{\psi_j^{(n)}}{t - t_j^{(n)}} = \int_a^b \frac{d\psi(u)}{t - u}, \quad (4.56)$$

kde $t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$ jsou kořeny $Q_n(t)$ a $\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)}$ jsou kladné váhy.

V následující části si ukážeme, že výše uvedený výraz (4.56) úzce souvisí s řetězovými zlomky.

Řetězové zlomky a monické polynomy

V této části budeme pokračovat v rozvoji toho, co nás dovedlo k rovnici (4.56), a spojíme výrazy v této rovnici s posloupností ortogonálních polynomů a řetězovými

zlomky. Začneme stručným shrnutím dalších důležitých vět týkající se posloupnosti ortogonálních polynomů.

Následující věta ukazuje, že lze monické polynomy $Q_n(t)$ definovat pomocí rekurentních vztahů.

Věta 4.50 ([9, str. 11]). *Nechť $Q_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$, jsou monické polynomy pro momentovou distribuční funkci $\psi(t)$. Potom,*

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= (b_n + t)Q_{n-1}(t) - a_n^2 Q_{n-2}(t), \quad n = 1, 2, \dots, \\ Q_{-1}(t) &= 0 \quad Q_0(t) = 1, \end{aligned} \quad (4.57)$$

kde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\langle tQ_n, Q_n \rangle_\psi}{\|Q_n\|_\psi^2} \\ a_n &= \frac{\|Q_n\|_\psi}{\|Q_{n-1}\|_\psi}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Z následujících dvou vět vyplývá, že každá posloupnost monických ortogonálních polynomů je posloupností jmenovatelů reálného J-zlomku (4.34). A naopak, posloupnost jmenovatelů nějakého reálného J-zlomku je posloupností monických ortogonálních polynomů pro nějakou distribuční funkci ψ na (a, b) .

Věta 4.51 ([15, str. 85–86]). *Nechť $(Q_n(t))_{n=0}^{+\infty}$ je posloupnost monických ortogonálních polynomů pro momentovou distribuční funkci ψ na (a, b) . Potom $(Q_n(t))_{n=0}^{+\infty}$ je posloupností jmenovatelů reálného J-zlomku*

$$\frac{1}{b_1 + t} + \mathbf{K}_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-a_{n-1}^2}{b_n + t} \right)$$

s koeficienty

$$b_n = \frac{\langle tQ_n, Q_n \rangle_\psi}{\|Q_n\|_\psi^2}, \quad a_n = \frac{\|Q_n\|_\psi}{\|Q_{n-1}\|_\psi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Věta 4.52 ([19, str. 252–253]). *Nechť $Q_n(t)$ označuje n -tý jmenovatel reálného J-zlomku (4.34) a nechť ψ označuje momentovou distribuční funkci. Potom $(Q_n(t))_{n=0}^{+\infty}$ je posloupností monických ortogonálních polynomů vzhledem k ψ .*

Protože polynomy $Q_n(t)$ ve větě 3.47 jsou jmenovateli $B_n(t)$ reálného J-zlomku (4.34), můžeme je konstruovat použitím základních rekurentních vztahů (2.7), tj.

$$\begin{aligned} Q_{-1}(t) &= 0, \quad Q_0(t) = 1, \\ Q_n(t) &= (b_n + t)Q_{n-1}(t) - a_n^2 Q_{n-2}(t), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.58)$$

kde a_n a b_n jsou koeficienty reálného J-zlomku (4.34).

Výše zmíněná věta plyne z obecnější, tzv. Favardovy věty.

Věta 4.53 ([15, str. 22]). *Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ jsou nějaké posloupnosti splňující*

$$a_n > 0, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

a necht' $(Q_n(t))_{n=0}^{+\infty}$ je posloupnost, definována rekurentním vztahem (4.58). Potom existuje momentová distribuční funkce $\psi(t)$ na (a, b) taková, že $(Q_n(t))_{n=0}^{+\infty}$ je posloupností ortogonálních monických polynomů vzhledem k ψ .

Jako v předchozí části uvažujme neklesající funkci $\psi(t)$ definovanou na konečném reálném intervalu $[a, b]$ s $\psi(a) = 0$, $\psi(b) = 1$, $n(\psi) \leq +\infty$ a s tím související posloupnost monických ortogonálních polynomů (viz definice 4.45). Tyto polynomy jsou generovány rekurentními vztahy (4.58), které jsou určeny koeficienty b_n, a_n . Použitím těchto koeficientů definujeme n -tý aproximant $f_n(z)$ reálného J-zlomku (4.34), tj.

$$f_n(z) = \frac{1}{b_1 + z - \frac{a_1^2}{b_2 + z - \frac{a_2^2}{\ddots \frac{a_{n-1}^2}{b_n + z}}} = \frac{A_n(z)}{B_n(z)}. \quad (4.59)$$

Pokud $n(\psi) = N < +\infty$, potom posloupnost ortogonálních polynomů je konečná a tedy i posloupnost aproximantů $f_1(z), \dots, f_N(z)$ je konečná (viz [25, str. 97]). Obecně je posloupnost aproximantů nekonečná (viz druhá kapitola). Čítec $A_n(z)$ a jmenovatel $B_n(z)$ jsou polynomy stupně $n - 1$ a n . Následující dvě věty obsahují známé výsledky o těchto polynomech.

Věta 4.54 ([25, str. 98]). *Nechť $\psi(t)$ je momentová distribuční funkce, n -tý čítec $A_n(z)$ reálného J-zlomku (4.34) může být vyjádřen pomocí n -tého jmenovatele $B_n(z)$ rovností ve tvaru*

$$A_n(z) = \int_a^b \frac{B_n(z) - B_n(t)}{z - t} d\psi(t) = \int_a^b \frac{Q_n(z) - Q_n(t)}{z - t} d\psi(t), \quad n \geq 1. \quad (4.60)$$

Z výše uvedeného vztahu získáme jiný výraz pro váhy (4.53) Gauss-Christoffelovy kvadratury (tzv. Christoffelova čísla), tj.

$$\psi_j^{(n)} = \frac{A_n(t_j^{(n)})}{B_n'(t_j^{(n)})} = \frac{A_n(t_j^{(n)})}{Q_n'(t_j^{(n)})} = \frac{A_n(t_j^{(n)})}{\prod_{j \neq i} (t_j^{(n)} - t_i^{(n)})}. \quad (4.61)$$

Následující věta ukazuje důležitou vlastnost rozkladu na parciální zlomky n -tého aproximantu $f_n(z)$, tj. odhaluje uzly a váhy příslušné Gauss-Christoffelovy kvadratury.

Věta 4.55 ([25, str. 99–100]). *n -tý aproximant $f_n(z)$ reálného J-zlomku (4.34) korespondujícího s $\psi(t)$ může být rozložen na parciální zlomky*

$$f_n(z) = \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{\psi_j^{(n)}}{z - z_j^{(n)}} = \sum_{j=1}^n \frac{\psi_j^{(n)}}{z - t_j^{(n)}}, \quad (4.62)$$

kde $t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$ a $\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)}$ jsou uzly a váhy n -uzlové Gauss–Christoffelovy kvadratury související s $\psi(t)$.

Výše uvedené výsledky lze shrnout takto:

n -tý aproximant $f_n(z)$ reálného J-zlomku (4.34) je podíl dvou polynomů $A_n(z)$ a $B_n(z)$ se stupněm polynomu $n-1$ a n . Tento podíl lze rozvinout v součet parciálních zlomků (4.62). Váhy n -uzlové Gauss–Christoffelovy kvadratury ve výrazu (4.62) lze spočítat z výrazu (4.61) a uzly jako kořeny jmenovatele $B_n(z)$, který je shodný s monickým polynomem $Q_n(z)$. O kořenech $z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}$ polynomu $B_n(z)$ víme, že jsou reálné a různé (viz lemma 4.46 nebo věta 4.27). Výše získané výsledky si nyní přiblížíme na příkladě.

Příklad 4.56. Uvažujme reálný J-zlomek ve tvaru

$$\frac{1}{1+z} + \mathbf{K}_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-2^2}{n+z} \right) = \frac{1}{1+z} - \frac{2^2}{2+z} - \dots - \frac{2^2}{n+z} - \dots,$$

kde $a_{n-1} = 2$ a $b_n = n$ pro $n = 1, 2, \dots$. Pokud spočítáme například aproximant $f_3(z)$, získáme

$$f_3(z) = \frac{A_3(z)}{B_3(z)} = \frac{1}{1+z} - \frac{2^2}{2+z} - \frac{2^2}{3+z} = \frac{z^2 + 5z + 2}{z^3 + 6z^2 + 3z - 10}.$$

Tento aproximant lze podle věty 4.55 rozložit na součet parciálních zlomků ve tvaru

$$f_3(z) = \frac{z^2 + 5z + 2}{z^3 + 6z^2 + 3z - 10} = \frac{1/9}{z+5} + \frac{4/9}{z+2} + \frac{4/9}{z-1},$$

kde uzly $t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, t_3^{(3)}$ jsme našli řešením rovnice

$$t^3 + 6t^2 + 3t - 10 = 0.$$

Váhy (Christoffelova čísla) $\psi_1^{(3)}, \psi_2^{(3)}, \psi_3^{(3)}$ lze spočítat z výrazu (4.61). Dostáváme tak hodnoty

$$\begin{aligned} \psi_1^{(3)} &= \frac{A_3(t_1^{(3)})}{\prod_{1 \neq i} (t_1^{(3)} - t_i^{(3)})} = \frac{(-5)^2 + 5 \cdot (-5) + 2}{(-5 - (-2)) \cdot (-5 - 1)} = \frac{1}{9}, \\ \psi_2^{(3)} &= \frac{A_3(t_2^{(3)})}{\prod_{2 \neq i} (t_2^{(3)} - t_i^{(3)})} = \frac{(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 2}{(-2 - (-5)) \cdot (-2 - 1)} = \frac{4}{9}, \\ \psi_3^{(3)} &= \frac{A_3(t_3^{(3)})}{\prod_{3 \neq i} (t_3^{(3)} - t_i^{(3)})} = \frac{1^2 + 5 \cdot 1 + 2}{(1 - (-2)) \cdot (1 - (-5))} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Dále se můžeme přesvědčit, že platí $\psi_1^{(3)} + \psi_2^{(3)} + \psi_3^{(3)} = 1$.

Rozklad na parciální zlomky z věty 4.55 umožňuje následující rozvoj. Pro dostatečně velké $|z|$ můžeme rozložit j -tý člen součtu v (4.62) jako

$$\frac{\psi_j^{(n)}}{z - z_j^{(n)}} = \sum_{l=0}^{2n} \psi_j^{(n)} \{z_j^{(n)}\}^j \frac{(-1)^l}{z^{l+1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$$

a tudíž

$$f_n(z) = \sum_{j=1}^m \frac{\psi_j^{(n)}}{z - z_j^{(n)}} = \sum_{l=0}^{2n} \frac{(-1)^l}{z^{l+1}} \left(\sum_{j=1}^n \psi_j^{(n)} \{z_j^{(n)}\}^j \right) + O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right).$$

Protože $z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}$ a $\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)}$ jsou uzly a váhy n -uzlové Gauss–Christoffelovy kvadratury související s $\psi(t)$, a protože tato kvadratura řeší zjednodušenou verzi Stieltjesova problému momentů (viz věta 4.49), je prvních $2n$ koeficientů z rozvoje $f_n(z)$ do mocninné řady se středem $z_0 = \infty$ rovno prvním $2n$ momentům funkce $\psi(t)$, tj.

$$f_n(z) = \sum_{l=1}^{2n} \frac{(-1)^l \mu_l}{z^{l+1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad (4.63)$$

$$\mu_l = \int_a^b t^l d\psi(t) = \sum_{j=1}^n \psi_j^{(n)} \{z_j^{(n)}\}^j, \quad l = 1, \dots, 2n. \quad (4.64)$$

Pokud se vrátíme zpět k výrazu (4.56) a budeme uvažovat funkci $f(t) = 1/(z - t)$, získáme

$$\int_a^b \frac{d\psi(t)}{z - t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \frac{\psi_j^{(n)}}{z - z_j^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n(z)}{B_n(z)} \quad (4.65)$$

pro všechna komplexní čísla z mimo $\Re(z) \in [a, b]$ (viz [25, str. 100]).

Spojení problému momentů a řetězových zlomků je tedy následující:

Z Favardovy věty 4.53 jsme zjistili, že distribuční funkce ψ je jednoznačně určena reálným J-zlomek (4.34). Navíc jsme zjistili, že řada (4.63), ke které reálný J-zlomek (4.34) koresponduje, má koeficienty μ_n , které jsou momenty integrálu (4.40). Z výše uvedeného je také zřejmé, že pro konstrukci řešení zjednodušeného problému momentů (4.41), u kterého předpokládáme existenci řešení, je třeba stanovit řetězový zlomek korespondující s řadou v (4.63) a z rozkladu jeho aproximantů na parciální zlomky najít (4.46).

Bez ztráty na obecnosti uvažujme $\psi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 1$ a $\mu_0 = 1$. Nechť

$$\frac{1}{z} + \frac{a_2}{1} + \frac{a_3}{z} + \frac{a_4}{1} + \dots, \quad a_n > 0,$$

je modifikovaný S-zlomek. Lze ukázat, že aproximanty $f_n(z)$ daného řetězového zlomku mohou být reprezentovány ve formě součtu parciálních zlomků, tj.

$$f_n(z) = \sum_{i=1}^m \frac{\psi_i^{(n)}}{z + t_i^{(n)}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

kde $m = (n + 1)/2$ nebo $m = n/2$, $\psi_i^{(n)} > 0, i = 1, 2, \dots, m$ a $0 \leq t_1^{(n)} < \dots < t_m^{(n)}$. Definujme neklesající funkci $\psi_n(t)$ ve tvaru

$$\psi^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } t \leq t_1^{(n)}, \\ \sum_{j=1}^i \psi_j^{(n)} & \text{pokud } t_i^{(n)} < t \leq t_{i+1}^{(n)}, i = 1, 2, \dots, m-1, \\ \sum_{j=1}^m \psi_j^{(n)} = 1 & \text{pokud } t_m^{(n)} < t < +\infty, \end{cases} \quad (4.66)$$

potom lze aproximant $f_n(z)$ určit ve tvaru

$$f_n(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\psi^{(n)}(t)}{z+t}, \quad (4.67)$$

kde $\Re(z) > 0$ (viz [12, str. 577]).

Podobná reprezentace platí pro libovolnou funkci vzniklou z konvergentního modifikovaného S-zlomku (4.30), viz následující věta.

Věta 4.57 ([12, str. 578]). *Pro každou posloupnost aproximantů modifikovaného S-zlomku (4.30) existuje podposloupnost indexů (n_k) a funkce $\psi(t)$ definovaná na $(0, +\infty)$, že platí*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A_{n_k}(z)}{B_{n_k}(z)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\psi(t)}{z+t}, \quad (4.68)$$

kde $\Re(z) > 0$.

Příklad 4.58 (Motivace z [5, str. 87]). Protože

$$\int_0^{+\infty} t^k d\psi(t) = k!, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (4.69)$$

má jednoznačné řešení pro posloupnost $(\mu_k)_{k=0}^{+\infty}$, tj. $\psi(t) = -e^{-t}$, potom z věty 4.14 a vztahu (4.63) daná řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mu_k}{z^{k+1}}, \quad (4.70)$$

jejíž koeficienty jsou momenty μ_k , koresponduje s modifikovaným S-zlomkem (4.30). Členy a_k modifikovaného S-zlomku (4.30) lze spočítat pomocí qd -algoritmu (viz věta 4.11). Dostáváme tak řetězový zlomek ve tvaru

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{1} + \frac{1}{z} + \frac{2}{1} + \frac{2}{z} + \frac{3}{1} + \frac{3}{z} + \dots + \frac{n}{1} + \frac{n}{z} + \dots \quad (4.71)$$

Pokud budeme uvažovat neklesající funkci $\psi_n(t)$ ve tvaru (4.66), potom lze aproximant $f_n(z)$ napsat ve tvaru (4.67), např. pro čtvrtý aproximant $f_4(z)$ platí

$$f_4(z) = \frac{A_4(z)}{B_4(z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1} + \frac{1}{z} + \frac{2}{1} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}{z+2+\sqrt{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}{z+2-\sqrt{2}} = \int_0^{+\infty} \frac{d\psi^{(4)}(t)}{z+t}.$$

kde funkce $\psi_4(t)$ je definována ve tvaru

$$\psi^{(4)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } 0 \leq t \leq 2 - \sqrt{2}, \\ \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} & \text{pokud } 2 - \sqrt{2} < t \leq 2 + \sqrt{2}, \\ 1 & \text{pokud } 2 + \sqrt{2} < t < +\infty. \end{cases}$$

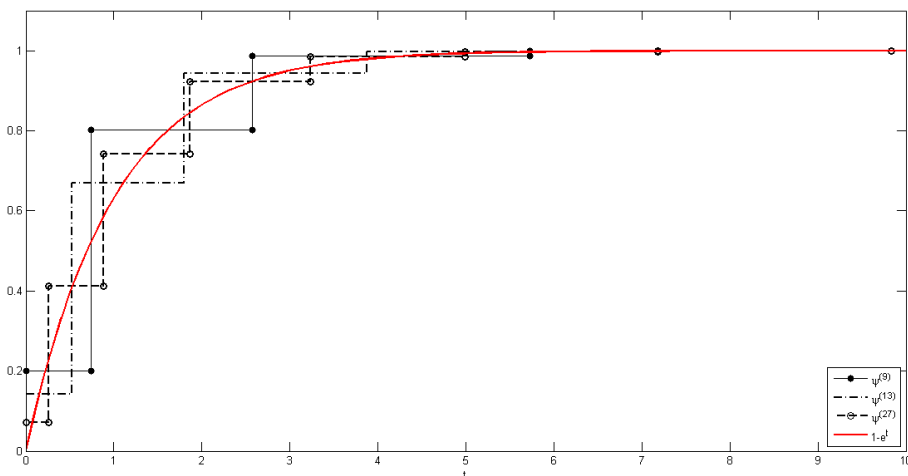
O výše uvedené rovnosti mezi čtvrtým aproximantem a integrálem se lze přesvědčit výpočtem daného integrálu.

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\psi^{(4)}(t)}{z+t} = \int_0^{2-\sqrt{2}} \frac{d\psi^{(4)}(t)}{z+t} + \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} \frac{d\psi^{(4)}(t)}{z+t} + \int_{2+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{d\psi^{(4)}(t)}{z+t}.$$

Z vět 4.33 a 4.34 postupně získáváme pro jednotlivé integrály hodnoty

$$\begin{aligned} \int_0^{2-\sqrt{2}} \frac{d\psi^{(4)}(t)}{z+t} &\stackrel{4.43}{=} \frac{1}{z+2-\sqrt{2}} \cdot \psi^{(4)}(2-\sqrt{2}) - \frac{1}{z} \cdot \psi^{(4)}(0) - \int_0^{2-\sqrt{2}} 0 d\frac{1}{z+t} = 0, \\ \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} \frac{d\psi^{(4)}(t)}{z+t} &= \frac{1}{z+2+\sqrt{2}} \cdot \psi^{(4)}(2+\sqrt{2}) - \frac{1}{z+2-\sqrt{2}} \cdot \psi^{(4)}(2-\sqrt{2}) - \\ &- \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} d\frac{1}{z+t} \stackrel{4.44}{=} \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}{z+2+\sqrt{2}} + \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(z+t)^2} dt = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}{z+2+\sqrt{2}} - \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}{z+2+\sqrt{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}{z+2-\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}{z+2-\sqrt{2}}, \\ \int_{2+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{d\psi^{(4)}(t)}{z+t} &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{2+\sqrt{2}}^c \frac{d\psi^{(4)}(t)}{z+t} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{z+c} \cdot \psi^{(4)}(c) - \\ &- \frac{1}{z+2+\sqrt{2}} \cdot \psi^{(4)}(2+\sqrt{2}) - \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{2+\sqrt{2}}^c 1 d\frac{1}{z+t} \stackrel{4.44}{=} \\ &\stackrel{4.44}{=} -\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}{z+2\sqrt{2}} + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{2+\sqrt{2}}^c \frac{1}{(z+t)^2} dt = \\ &= -\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}{z+2+\sqrt{2}} + \frac{1}{z+2+\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}{z+2+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Pro představu si vykreslíme další funkce ² $\psi^{(n)}$, konkrétně $\psi^{(9)}$, $\psi^{(13)}$ a $\psi^{(27)}$.



Obrázek 4.1: Vykreslení funkcí $\psi^{(9)}$, $\psi^{(13)}$ a $\psi^{(27)}$

²Vykreslené funkce lze nalézt v příloženém souboru příklad03ch.m.

Pro tento modifikovaný S-zlomek (4.71) platí, že je konvergentní (viz věta 5.6), proto z věty 4.57 lze tento řetězový zlomek reprezentovat integrálem ve tvaru

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{1+z} + \frac{2}{z+1} + \frac{2}{z+1} + \frac{3}{z+1} + \frac{3}{z+1} + \dots = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{z+t} dt, \quad |\arg z| < \pi.$$

Na závěr této kapitoly si představíme speciální typ J-zlomku. Tento zlomek bude mít své opodstatnění v závěrečné kapitole.

Příklad 4.59 ([37, str. 119]). Uvažujme reálný J-zlomek ve tvaru

$$\frac{1}{k_1 k_2} \Big/ \left(k_1 + z - \frac{k_3 k_4}{k_2 + k_3 + z - \frac{k_5 k_6}{k_4 + k_5 + z - \dots}} \right), \quad k_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.72)$$

Reálný J-zlomek (4.72) je zajímavý tím, že je sudou částí modifikovaného S-zlomku (4.30) ve tvaru

$$\frac{1}{z} + \frac{k_1}{1+z} + \frac{k_2}{z+1} + \frac{k_3}{z+1} + \frac{k_4}{z+1} + \dots \quad (4.73)$$

Dále pro řetězový zlomek (4.72) platí následující věta týkající se vlastností kořenů n -tého jmenovatele aproximantu ze (4.72).

Věta 4.60 ([37, str. 119]). *Kořeny z_1, z_2, \dots, z_n n -tého jmenovatele aproximantu z reálného J-zlomku (4.72) jsou všechny reálné, různé a platí*

$$0 < -z_1 < -z_2 < \dots < -z_n.$$

Důkaz. Při vlastním dokazování věty se zaměříme pouze na dokázání zápornosti kořenů, ostatní vlastnosti již byly dokázány v předchozích odstavcích. Vzhledem k tomu, že kořeny n -tého jmenovatele $B_n(z)$ aproximantu z reálného J-zlomku (4.34) lze spočítat ze znalosti vlastních čísel Jacobiho matice (viz (4.39)), stačí potom dokázat, že platí $\det \mathbb{J}_k = B_k(0) > 0$ pro $k = 1, 2, \dots, n$. Pokud toto platí, pak daná Jacobiho matice \mathbb{J}_n je pozitivně definitní a všechna její vlastní čísla jsou kladná (viz [7, str. 11]) a tudíž, kořeny n -tého jmenovatele $B_n(z)$ jsou všechny záporná.

K důkazu využijeme vlastnosti, že reálný J-zlomek (4.72) je sudou částí modifikovaného S-zlomku ve tvaru (4.73). n -tý jmenovatel aproximantu z řetězového zlomku (4.73) budeme značit $T_n(z)$, částečný jmenovatel a částečný čítec budeme značit $s_n(z)$ a $t_n(z)$. Platí tedy $T_{2n}(z) = B_n(z)$, $s_1(z) = 1$, $s_n(z) = k_{n-1}$ a $t_{2n-1}(z) = z$, $t_{2n} = 1$ pro $n = 1, 2, \dots$. Pokud nyní dosadíme $z = 0$, dostáváme pro $T_{2n}(0)$ (dále jen T_{2n}) výraz:

$$\begin{aligned} T_{2n}(0) &= t_{2n}(0) T_{2n-1}(0) + s_{2n}(0) T_{2n-2}(0) = T_{2n-1} + s_{2n} T_{2n-2} = \\ &= s_{2n-1} T_{2n-3} + s_{2n} [T_{2n-3} + s_{2n-2} T_{2n-4}] = (s_{2n} + s_{2n-1}) T_{2n-3} + s_{2n} s_{2n-2} T_{2n-4} = \\ &= (s_{2n} + s_{2n-1}) T_{2n-3} + s_{2n} s_{2n-2} [T_{2n-5} + s_{2n-4} T_{2n-6}] = \\ &= (s_{2n} + s_{2n-1}) s_{2n-3} T_{2n-5} + s_{2n} s_{2n-2} T_{2n-5} + s_{2n} s_{2n-2} s_{2n-4} T_{2n-6} = \\ &= (s_{2n} s_{2n-3} + s_{2n-1} s_{2n-3} + s_{2n} s_{2n-2}) T_{2n-5} + s_{2n} s_{2n-2} s_{2n-4} T_{2n-6} = \\ &= \dots = (s_{2n} s_{2n-3} + s_{2n-1} s_{2n-3} + s_{2n} s_{2n-2} + \dots) T_1 + s_{2n} s_{2n-2} s_{2n-4} \dots s_2 T_0 = \\ &= s_{2n} s_{2n-2} s_{2n-4} \dots s_2 = k_1 k_3 k_5 \dots k_{2n-1} > 0. \end{aligned}$$

Platí tedy $\det \mathbb{J}_n = B_n(0) = T_{2n}(0) > 0$ a důkaz je tak hotov. \square

Kapitola 5

Konvergence řetězových zlomků

Protože uvažujeme nekonečné řetězové zlomky, je důležité znát, zda daný řetězový zlomek konverguje a ve které oblasti. Dále pro řetězové zlomky s prvky $a_n(z)$ a $b_n(z)$, které jsou funkcí proměnné z , je důležité zajistit, kde v komplexní rovině konvergují. Cílem této kapitoly není podat vyčerpávající popis konvergence řetězových zlomků (více o konvergenci se lze dočíst v [19]). V této kapitole zadefinujeme pojem stejnoměrná konvergence a předložíme několik vět týkající se konvergence S-zlomků. Připomeňme, že konvergence k ∞ je akceptována. Na závěr této kapitoly se stručně seznámíme s problémem, pokud při výpočtu nekonečného konvergentního řetězového zlomku budeme uvažovat pouze aproximaci pomocí aproximantu řetězového zlomku. Chyby, které se přitom dopouštíme budeme nazývat *chyba zkrácení* (nebo také *zanedbání*). Předložíme zde několik vět pro horní odhad této chyby. Při psaní této kapitoly jsme vycházeli z [5], [12], [19] a [26].

Definice 5.1 (oblast). Množinu $D \subseteq \mathbb{C}$ budeme nazývat *oblastí*, pouze tehdy, když D je souvislou otevřenou množinou.

Definice 5.2 (stejnoměrná konvergence). Posloupnost $(f_n(z))$ meromorfních funkcí v oblasti D říkáme, že *konverguje stejnoměrně* na kompaktní podmnožině K v D , pokud ¹:

1. existuje $N_K \in \mathbb{N}$ takové, že $f_n(z)$ je holomorfní v nějaké oblasti obsahující K pro všechna $n \geq N_K$
2. pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $N_\varepsilon > N_K$ takové, že

$$\sup_{z \in K} |f_{n+m}(z) - f_n(z)| < \varepsilon, \quad n \geq N_\varepsilon, \quad m = 1, \dots$$

Řekneme, že řetězový zlomek s n -tým aproximantem $f_n(z)$ konverguje stejnoměrně na kompaktní podmnožině K v oblasti D tehdy a jen tehdy, když posloupnost $(f_n(z))$ splňuje výše uvedené podmínky.

Pro důkaz konvergence řetězových zlomků s konstantními členy, konkrétně pro regulární C-zlomek (4.6) ve tvaru $\mathbb{K}(a_n/1)$, (kde $z = 1$), se dobře hodí tzv. *Parabola teorém* a *Multiple parabola teorém*.

¹Více o souvislých a kompaktních množinách např. v [34].

Věta 5.3 ([19, str. 105–106]). *Pokud všechny prvky a_n řetězového zlomku $K(a_n/1)$ leží v parabolické oblasti*

$$P_\alpha = \left[w : |w| - \Re(w \cdot e^{-2i\alpha}) \leq \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right], \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad (5.1)$$

potom řetězový zlomek $K(a_n/1)$ konverguje ke konečné hodnotě pouze tehdy, když alespoň jedna z řad

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2n}}{a_3 a_5 \cdots a_{2n+1}} \right|, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{a_3 a_5 \cdots a_{2n+1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2n}} \right| \quad (5.2)$$

je divergentní.

Věta 5.4 ([19, str. 106–107]). *Nechť prvky a_n řetězového zlomku $K(a_n/1)$ leží v parabolické oblasti definované nerovností*

$$|a_n| - \Re(a_n e^{-i(\kappa_n + \kappa_{n-1})}) \leq 2p_{n-1}(\cos(\kappa_n) - p_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

kde $p_n > 0$ a κ_n jsou reálné a kde

$$\left| p_n e^{i\kappa_n} - \frac{1}{2} \right| \leq d < \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

1. *Potom sudá a lichá část řetězového zlomku $K(a_n/1)$ konvergují ke konečné hodnotě.*
2. *Hodnoty všech aproximantů jsou konečné a leží v polorovině*

$$V_0 = [w : \Re(w \cdot e^{-i\kappa_0}) \geq -p_0].$$

3. *Řetězový zlomek $K(a_n/1)$ sám konverguje ke konečné hodnotě, pokud alespoň jedna z řad (5.2) je divergentní.*
4. *Postačující podmínkou pro konvergenci řetězového zlomku $K(a_n/1)$ ke konečné hodnotě je, že a_n leží v příslušné parabolické oblasti (5.3) a že pro nějaké $M > 0$ platí*

$$|a_n| \leq M, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Následující věta je založena na předchozí větě. Jedná se o tzv. *Cardioid teorém*.

Věta 5.5 ([19, str. 134–135]). *Nechť $K(a_n z/1)$ je regulární C-zlomek takový, že prvky a_n jsou nenulové komplexní čísla splňující nerovnost*

$$|a_n| - \Re(a_n) \leq k g_{n-1}(1 - g_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.5)$$

kde k je kladné číslo a kde (g_n) je posloupnost reálných čísel takových, že

$$0 < \varepsilon < g_n < 1 - \varepsilon, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.6)$$

kde $0 < \varepsilon < 1/2$. Potom:

1. *Sudá a lichá část řetězového zlomku $\mathbf{K}(a_n z/1)$ konvergují k holomorfním funkcím pro všechna z v kardioidní oblasti*

$$C_k = \left[z : |z| < \frac{1 + \cos(\arg z)}{k} \right]. \quad (5.7)$$

Konvergence je stejnoměrná v každé kompaktní podmnožině C_k .

2. *Regulární C-zlomek $\mathbf{K}(a_n z/1)$ konverguje k funkci holomorfní v C_k , pokud alespoň jedna z řad (5.2) diverguje.*
3. *Postačující podmínkou pro konvergenci řetězového zlomku $\mathbf{K}(a_n z/1)$ k funkci holomorfní v C_k je, že existuje $M > 0$ takové, že platí*

$$|a_n| \leq M, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.8)$$

Z výše uvedené věty plyne důležitá věta týkající se konvergence S-zlomku.

Věta 5.6 ([19, str. 136]). *Nechť $\mathbf{K}(a_n z/1)$ je S-zlomek (tzn. $a_n > 0$).*

1. *Potom sudá a lichá část S-zlomku konverguje k funkcím holomorfním v oblasti*

$$D = [z : |\arg z| < \pi]. \quad (5.9)$$

Sudá i lichá část konvergují stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině D .

2. *S-zlomek $\mathbf{K}(a_n z/1)$ konverguje k holomorfní funkci v D , pokud alespoň jedna z řad (5.2) diverguje.*
3. *Pokud S-zlomek $\mathbf{K}(a_n z/1)$ konverguje v jediném bodě v D , potom konverguje ve všech bodech v D k holomorfní funkci.*
4. *Postačující podmínkou pro konvergenci S-zlomku k funkci holomorfní v D je, když existuje $M > 0$ takové, že platí*

$$|a_n| \leq M, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.10)$$

Při zkoumání konvergence řetězových zlomků pro funkce $f(z)$ je cílem, najít co největší množiny konvergence. Nyní bude situace jiná. Vycházíme-li z daného řetězového zlomku, cílem je získat nejmenší možnou chybu pro $|f(z) - f_n(z)|$.

Definice 5.7 (chyba zkrácení aproximantu). *Pokud řetězový zlomek $\mathbf{K}(a_n/b_n)$ s n -tým aproximantem f_n konverguje ke konečné limitě f , potom*

$$|f - f_n| \quad (5.11)$$

se nazývá chyba zkrácení n -tého aproximantu.

Henrici a Pfluger dokázali následující odhad chyby zkrácení n -tého aproximantu pro S-zlomek:

Věta 5.8 ([19, str. 312–313]). *Nechť $K(a_n z/1)$ je S-zlomek konvergující pro každé z v oblasti (5.9) k funkci $f(z)$ holomorfní v D . Pokud $f_n(z)$ označuje n -tý aproximant S-zlomku $K(a_n z/1)$, potom pro každé $z \in D$ a $n = 2, 3, 4, \dots$, platí*

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \begin{cases} |f_n(z) - f_{n-1}(z)|, & |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} \\ \left| \frac{f_n(z) - f_{n-1}(z)}{\sin(\arg z)} \right|, & \frac{\pi}{2} < |\arg z| < \pi. \end{cases} \quad (5.12)$$

Dále také získali apriorní odhad pro $|f_n(z) - f_{n-1}(z)|$, viz následující věta:

Věta 5.9 ([12, str. 602–607]). *Nechť $K(a_n z/1)$ je S-zlomek takový, že koresponduje s řadou*

$$c_0 z + c_1 z^2 + c_2 z^3 + \dots$$

se středem $z_0 = 0$. Nechť dále S-zlomek konverguje pro každé z v $D = [z : |\arg z| < \pi]$ k funkci $f(z)$ holomorfní v D . Pro každé $z \in D$ necht $f_n(z)$ označuje n -tý aproximant S-zlomku a necht

$$\xi = \Re \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right).$$

Potom je $\xi > 0$, a jestliže zavedeme funkci ve tvaru

$$C = C(a_1, z) = \frac{a_1}{\left| \frac{1}{z} \right| \cos \left(\frac{\phi}{2} \right)} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}, \quad (5.13)$$

kde $\phi = \arg(1/z)$. Potom pro $n = 2, 3, 4, \dots$ platí

$$|f_n(z) - f_{n-1}(z)| \leq C \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{2\xi}{\sqrt{a_k}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.14)$$

$$|f_{n+1}(z) - f_n(z)| \leq C \left(1 + 2\xi \left| \frac{c_n}{c_0} \right|^{\frac{1}{2n}} \right)^{-\frac{n}{2}}, \quad (5.15)$$

$$|f_{n+1}(z) - f_n(z)| \leq C \left(1 + \frac{2\xi}{e} \sum_{k=1}^n \left| \frac{c_0}{c_k} \right|^{\frac{1}{2k}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.16)$$

Získané znalosti o konvergenci S-zlomku (4.29) si přiblížíme na následujícím příkladě.

Příklad 5.10 (Motivace z [19, str. 314]). Uvažujme opět (viz motivační příklad z úvodu kapitoly 2) řetězový zlomek ve tvaru

$$\frac{z}{1} + \frac{z/2}{1} + \frac{z/6}{1} + \frac{2z/6}{1} + \frac{2z/10}{1} + \frac{3z/10}{1} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}$$

vzniklý z funkce $\ln(1+z)$. Vzhledem k tomu, že platí

$$a_1 > 0, \quad a_{2n} = \frac{n}{2(2n-1)} > 0, \quad a_{2n+1} = \frac{n}{2(2n+1)} > 0, \quad n = 2, 3, \dots,$$

jedná se o S-zlomek. Dále se lze přesvědčit, že daný řetězový zlomek je konvergentní, neboť dokážeme najít M (např. $M = 1$) takové, že platí $|a_n| \leq M$ pro $n = 1, 2, \dots$

Tato podmínka je postačující pro konvergenci daného S-zlomku, viz vztah (5.10) věty 5.6. Dále ze vztahu (5.9) zmíněné věty konverguje daný S-zlomek na oblasti $D = [z : |\arg z| < \pi]$. Dokonce platí, že konverguje na oblasti $|\arg(1+z)| < \pi$ (viz [26, str. 136]).

Nechť dále $f_n(z)$ označuje n -tý aproximant daného S-zlomku a položme $z = 1$. Bude nás zajímat odhad chyby zkrácení n -tého aproximantu, tj. odhad chyby pro $|\ln 2 - f_n(1)|$. Pro odhad lze využít poznatků z vět 5.8 a 5.9. Výsledky pro $n = 2, 3, 4, 5$ a např. $n = 10$ shrneme do níže uvedené tabulky:

n	2	3	4	5	...	10
$ \ln 2 - f_n(1) $	0.027	0.007	0.001	0.0002		2.3×10^{-8}
$ f_n(1) - f_{n-1}(1) $	0.333	0.033	0.008	0.001		1.7×10^{-7}
$C \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{2}{\sqrt{a_k}}\right)^{-1/2}$	0.650	0.268	0.127	0.054		9.97×10^{-4}

Tabulka 5.1: Odhad chyby pro $|\ln 2 - f_n(1)|$

Poslední odhady pro různá n získáme výpočtem

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{2}{\sqrt{a_k}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pokud například z tabulky vezmeme výsledky pro $n = 10$, dostáváme následující horní odhady pro $|\ln 2 - f_{10}(1)|$:

$$|\ln 2 - f_{10}(1)| \leq 1.7 \times 10^{-7} \leq 9.97 \times 10^{-4}.$$

Lze si dále všimnout, že řetězový zlomek rychle konverguje k hodnotě $\ln 2$. Pro porovnání uvedme, že pokud sečteme 10 členů Taylorovy řady z funkce $\ln(1+z)$, získáme absolutní chybu 0.048. Řada tedy v porovnání s řetězovým zlomkem konverguje k dané hodnotě velmi pomalu.

Poznámka 5.11. Důvodem rychlejší konvergence je, že aproximanty řetězového zlomku jsou za určitých podmínek prvky tzv. Padého aproximace, která patří mezi nelineární akcelerátory konvergence (vice o Padého aproximaci v [37] nebo [26]).

Kapitola 6

Aplikace řetězových zlomků v obecných procesech zrodu a zániku

Jak již bylo zmíněno v první kapitole týkající se historie řetězových zlomků, ukázali v roce 1975 matematici Murphy a O'Donohoe, na základě prací Karlina a McGregora, na spojitost mezi obecnými procesy zrodu a zániku a řetězovými zlomky [27]. V této kapitole seznámíme čtenáře z jejich výsledky. Při sepsání této kapitoly jsme vycházeli jak z jejich práce [28], tak i z [19]. Je nutno poznamenat, že v uvedených pracích nejsou zmíněny podrobné postupy, proto bylo potřeba některé z nich pomocí dalších zdrojů (viz publikace [18] a článek [4]) odvodit. K tomu bylo potřeba vytvořit 4. kapitolu, kde se odkazujeme na některé výsledky z teorie problému momentů, Gaussovy kvadratury a reálných J-zlomků. V sekci Výpočetní postupy poté uvažujeme dvě metody na hledání kořenů n -tého jmenovatele B_n . Z [19] používáme zmíněný qd -algoritmus (viz Algoritmus 1), tento algoritmus měl v [19, str. 372] bohužel malou chybu, kterou jsme ale snadno opravili. Dále jsme museli ověřit předpoklady použití této metody. Druhá metoda na hledání kořenů je totožná s hledáním vlastních čísel symetrické a pozitivně definitní matice. Na závěr této kapitoly poté uvažujeme několik příkladů pro ověření správnosti níže uvedených postupů a porovnáme je jak s přesnými výsledky, tak i s výsledky v [28] a v [19]. To vše v přehledných tabulkách a obrázcích.

Budeme uvažovat populaci jedinců, kteří se mohou rozmnožovat a zanikat, rozsah populace v čase t je Markovský řetězec, který je definován intenzitami $\lambda_r > 0$, $r = 0, 1, 2, \dots$ (tzv. intenzita růstu) a $\mu_r > 0$, $r = 1, 2, \dots$ (tzv. intenzita zániku). Soustava diferenciálních rovnic pro absolutní pravděpodobnosti $p_r(t) = P(X_t = r)$ (kde X_t je rozsah populace v čase t) má tvar

$$p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \quad (6.1)$$

$$p_r'(t) = \lambda_{r-1} p_{r-1}(t) - (\lambda_r + \mu_r) p_r(t) + \mu_{r+1} p_{r+1}(t), \quad r = 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

s počáteční podmínkou

$$p_r(0) = \delta_{r,m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $\delta_{r,m}$ je Kroneckerovo delta.

Pro řešení těchto rovnic je užitečné zavést Laplaceovu transformaci

$$P_r(s) = \mathcal{L}\{p_r(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} p_r(t) dt, \quad (6.3)$$

potom

$$\begin{aligned} sP_0(s) - \delta_{0,m} &= -\lambda_0 P_0(s) + \mu_1 P_1(s) \\ sP_r(s) - \delta_{r,m} &= \lambda_{r-1} P_{r-1}(s) - (\lambda_r + \mu_r) P_r(s) + \mu_{r+1} P_{r+1}(s). \end{aligned}$$

Dostáváme tak transformovaný systém lineárních diferencních rovnic druhého řádu ve tvaru

$$\mu_1 P_1(s) = (\lambda_0 + s) P_0(s) - \delta_{0,m} \quad (6.4)$$

$$\mu_{r+1} P_{r+1}(s) = -\lambda_{r-1} P_{r-1}(s) + (\lambda_r + \mu_r + s) P_r(s) - \delta_{r,m} \quad (6.5)$$

Zavedením notace

$$L_r = \lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_r, \quad M_r = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r, \quad L_{-1} = M_0 = 1 \quad (6.6)$$

a normalizováním výše uvedených rovnic výrazy

$$f_0^{(m)}(s) = P_0(s), \quad (6.7)$$

$$f_r^{(m)}(s) = (-1)^r M_r P_r(s), \quad r = 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

dostáváme systém rovnic ve tvaru

$$f_1^{(m)}(s) = \delta_{0,m} - (\lambda_0 + s) f_0^{(m)}(s), \quad (6.9)$$

$$f_{r+1}^{(m)}(s) = -\lambda_{r-1} \mu_r f_{r-1}^{(m)}(s) - (\lambda_r + \mu_r + s) f_r^{(m)}(s) + (-1)^r M_r \delta_{r,m}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

Poznamenejme, že (m) neoznačuje derivaci, ale horní index. Položením $m = 0$ a $f_r^{(0)}(s) = f_r$ odvodíme, že

$$f_1 = 1 - (\lambda_0 + s) f_0,$$

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{1}{f_0} - (\lambda_0 + s),$$

$$f_0 = \frac{1}{(\lambda_0 + s) + \frac{f_1}{f_0}}$$

a

$$f_{r+1} = -\lambda_{r-1} \mu_r f_{r-1} - (\lambda_r + \mu_r + s) f_r,$$

$$\frac{f_{r+1}}{f_r} = -\lambda_{r-1} \mu_r \frac{f_{r-1}}{f_r} - (\lambda_r + \mu_r + s),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda_r + \mu_r + s) + \frac{f_{r+1}}{f_r}} &= \frac{\frac{f_r}{f_{r-1}}}{-\lambda_{r-1} \mu_r}, \\ \frac{f_r}{f_{r-1}} &= \frac{-\lambda_{r-1} \mu_r}{(\lambda_r + \mu_r + s) + \frac{f_{r+1}}{f_r}}, \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Kombinací získaných výrazů získáme výraz

$$f_0(s) = \frac{1}{\lambda_0 + s} - \frac{\lambda_0 \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1 + s} - \cdots - \frac{\lambda_{r-1} \mu_r}{(\lambda_r + \mu_r + s) + \frac{f_{r+1}(s)}{f_r(s)}}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

který vede na reálný J-zlomek

$$\frac{1}{\lambda_0 + s} - \frac{\lambda_0 \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1 + s} - \frac{\lambda_1 \mu_2}{(\lambda_2 + \mu_2 + s)} - \cdots \quad (6.11)$$

n -tý čitatel a n -tý jmenovatel aproximantu výše uvedeného zlomku budeme značit $A_n(s)$ a $B_n(s)$. O reálném J-zlomku (6.11) víme (viz příklad 4.59), že je sudou částí modifikovaného S-zlomku ve tvaru

$$\frac{1}{s} + \frac{\lambda_0}{1} + \frac{\mu_1}{s} + \frac{\lambda_1}{1} + \frac{\mu_2}{s} + \frac{\lambda_2}{1} + \cdots, \quad (6.12)$$

který je ekvivalentní s S-zlomkem

$$\frac{z}{1} + \frac{\lambda_0 z}{1} + \frac{\mu_1 z}{1} + \frac{\lambda_1 z}{1} + \frac{\mu_2 z}{1} + \frac{\lambda_2 z}{1} + \cdots, \quad (6.13)$$

kde $z = 1/s$ (viz příklad 4.19). Z věty 5.6 potom plyne, že sudá i lichá část modifikovaného zlomku (6.12) konverguje k holomorfním funkcím v oblasti

$$D = [s : |\arg s| < \pi] \quad (6.14)$$

a konvergence je stejnoměrná na každé kompaktní podmnožině v D . Navíc, řetězový zlomek (6.12) konverguje k holomorfní funkci v D , pokud alespoň jedna z řad

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r}, \quad \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_r}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{r+1}} \quad (6.15)$$

diverguje. Dále budeme předpokládat, že alespoň jedna z řad (6.15) diverguje. Z toho vyplývá, že reálný J-zlomek (6.11) je konvergentní pro všechna $s \in D$.

Pro jednoduchost označme řetězový zlomek (6.11) výrazem $f_0 = f_0(s)$ a definujme rekurzivně další výrazy f_1, f_2, f_3, \dots pomocí vztahu (6.10) s $m = 0$. Získáme tak jedno z řešení soustavy rovnic (6.9) a (6.10) (když $m = 0$). Dále platí, že dva po sobě jdoucí výrazy f_r se nemohou rovnat nule, takže platí $f_{r+1}/f_r \in \mathbb{C}^*$ pro všechna r (viz [19, str. 367]). Při výše uvedeném omezení na s je vidět, že následující dva řetězové zlomky konvergují k meromorfním funkcím, a to

$$\begin{aligned} \frac{f_{r+1}}{f_r} &= -\frac{\lambda_r \mu_{r+1}}{\lambda_{r+1} + \mu_{r+1} + s} - \frac{\lambda_{r+1} \mu_{r+2}}{\lambda_{r+2} + \mu_{r+2} + s} - \cdots \\ f_r &= \frac{(-1)^r L_{r-1} M_r / B_r}{B_{r+1} / B_r} - \frac{\lambda_r \mu_{r+1}}{\lambda_{r+1} + \mu_{r+1} + s} - \frac{\lambda_{r+1} \mu_{r+2}}{\lambda_{r+2} + \mu_{r+2} + s} - \cdots \end{aligned} \quad (6.16)$$

Výše uvedený vztah (6.16) získáme následovně:

Ze vztahů (6.9) a (6.10) postupně dostáváme

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - (\lambda_0 + s)f_0 = A_1 - B_1f_0 = -(B_1f_0 - A_1) \\ f_2 &= -\lambda_0\mu_1f_0 - (\lambda_1 + \mu_1 + s)f_1 = -(\lambda_1 + \mu_1 + s)A_1 + f_0[(\lambda_1 + \mu_1 + s)B_1 - \lambda_0\mu_1B_0] = \\ &= B_2f_0 - A_2 \\ &\vdots \\ f_r &= (-1)^r(B_rf_0 - A_r) \text{ nebo } (-1)^r \frac{f_r}{B_r} = f_0 - \frac{A_r}{B_r}, \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

S pomocí f_0 dostáváme

$$f_0 = \frac{1}{\lambda_0 + s} - \frac{\lambda_0\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1 + s} - \dots - \frac{\lambda_{r-1}\mu_r}{(\lambda_r + \mu_r + s) + \frac{f_{r+1}}{f_r}} = \frac{A_{r+1}}{B_{r+1}}.$$

Pokud použijeme rekurentní vztahy (2.7), lze f_0 vyjádřit jako

$$f_0 = \frac{A_{r+1}}{B_{r+1}} = \frac{\left(b_{r+1} + \frac{f_{r+1}}{f_r}\right)A_r + a_{r+1}A_{r-1}}{\left(b_{r+1} + \frac{f_{r+1}}{f_r}\right)B_r + a_{r+1}B_{r-1}} = \frac{A_{r+1} + \frac{f_{r+1}}{f_r}A_r}{B_{r+1} + \frac{f_{r+1}}{f_r}B_r}.$$

Potom

$$f_0 - \frac{A_r}{B_r} = \frac{A_{r+1} + \frac{f_{r+1}}{f_r}A_r}{B_{r+1} + \frac{f_{r+1}}{f_r}B_r} - \frac{A_r}{B_r} = \frac{A_{r+1}B_r - A_rB_{r+1}}{B_r\left(B_{r+1} + \frac{f_{r+1}}{f_r}B_r\right)},$$

čitatel $A_{r+1}B_r - A_rB_{r+1}$ lze pomocí determinantní formule (2.9) zapsat ve tvaru

$$A_{r+1}B_r - A_rB_{r+1} = (-1)^r \prod_{i=1}^{r+1} a_i = L_{r-1}M_r,$$

takže platí

$$f_0 - \frac{A_r}{B_r} = \frac{L_{r-1}M_r}{B_r\left(B_{r+1} + \frac{f_{r+1}}{f_r}B_r\right)}.$$

a

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^r f_r}{B_r} &= f_0 - \frac{A_r}{B_r} \\ \frac{(-1)^r f_r}{B_r} &= \frac{L_{r-1}M_r}{B_r\left(B_{r+1} + \frac{f_{r+1}}{f_r}B_r\right)} \\ f_r &= \frac{(-1)^r L_{r-1}M_r}{B_{r+1} + \frac{f_{r+1}}{f_r}B_r}, \end{aligned}$$

dostali jsme se tak k řetězovému zlomku (6.16). Tento řetězový zlomek má n -tý jmenovatel aproximantu, označme $B_n^{(r)}$, daný vztahem

$$B_n^{(r)} = B_{r+n}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Pokud nyní budeme uvažovat $m > 0$, potom ze vztahu (6.10) postupně dostáváme

$$\begin{aligned} f_1^{(m)} &= -(\lambda_0 + s)f_0^{(m)} \\ f_2^{(m)} &= -\lambda_0\mu_1f_0^{(m)} - (\lambda_1 + \mu_1 + s)f_1^{(m)} \\ &\vdots \\ f_m^{(m)} &= -\lambda_{m-2}\mu_{m-1}f_{m-2}^{(m)} - (\lambda_{m-1} + \mu_{m-1} + s)f_{m-1}^{(m)} \\ f_{m+1}^{(m)} &= -\lambda_{m-1}\mu_mf_{m-1}^{(m)} - (\lambda_m + \mu_m + s)f_m^{(m)} + (-1)^m M_m \\ f_{m+2}^{(m)} &= -\lambda_m\mu_{m+1}f_m^{(m)} - (\lambda_{m+1} + \mu_{m+1} + s)f_{m+1}^{(m)}, \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

Pro $r = 1, 2, \dots, m$ se dá snadno odvodit rekurzivní vztah

$$B_r f_{r-1}^{(m)} + B_{r-1} f_r^{(m)} = 0 \quad \text{nebo} \quad f_{r-1}^{(m)} = -\frac{B_{r-1}}{B_r} f_r^{(m)} \quad (6.17)$$

pro všechna řešení soustavy (6.9), (6.10). Především pro $r = m$ dostáváme

$$B_m f_{m-1}^{(m)} = -B_{m-1} f_m^{(m)}, \quad (6.18)$$

který, když vložíme do (6.10) s $r = m$ dostaneme

$$f_{m+1}^{(m)} = (-1)^m M_m - \frac{B_{m+1}}{B_m} f_m^{(m)}. \quad (6.19)$$

Pak

$$\begin{aligned} \frac{f_{m+1}^{(m)}}{f_m^{(m)}} &= \frac{(-1)^m M_m}{f_m^{(m)}} - \frac{B_{m+1}}{B_m}, \\ \frac{1}{\frac{B_{m+1}}{B_m} + \frac{f_{m+1}^{(m)}}{f_m^{(m)}}} &= \frac{f_m^{(m)}}{(-1)^m M_m}, \end{aligned}$$

a pro $f_m^{(m)}$ získáme vztah

$$f_m^{(m)} = \frac{(-1)^m M_m}{\frac{B_{m+1}}{B_m} + \frac{f_{m+1}^{(m)}}{f_m^{(m)}}} = \frac{(-1)^m M_m}{\frac{B_{m+1}}{B_m} - \frac{\lambda_m \mu_{m+1}}{(\lambda_{m+1} + \mu_{m+1} + s)} - \dots} \quad (6.20)$$

Porovnáním výrazů (6.16) a (6.20) máme jiný vztah pro výraz $f_m^{(m)}$, tj.

$$f_m^{(m)} = \frac{B_m}{L_{m-1}} f_m. \quad (6.21)$$

Opakovanou aplikací (6.17), tj.

$$\begin{aligned}
 f_0^{(m)} &= -\frac{B_0}{B_1} f_1^{(m)} = -\frac{B_0}{B_1} \cdot -\frac{B_1}{B_2} f_2^{(m)} = \dots = -\frac{B_0}{B_1} \cdot -\frac{B_1}{B_2} \dots - \frac{B_{m-1}}{B_m} f_m^{(m)} = \\
 &= (-1)^{m-0} \frac{B_0}{B_m} f_m^{(m)}, \\
 f_1^{(m)} &= -\frac{B_1}{B_2} f_2^{(m)} = -\frac{B_1}{B_2} \cdot -\frac{B_2}{B_3} f_3^{(m)} = \dots = -\frac{B_1}{B_2} \cdot -\frac{B_2}{B_3} \dots - \frac{B_{m-1}}{B_m} f_m^{(m)} = \\
 &= (-1)^{m-1} \frac{B_1}{B_m} f_m^{(m)}, \\
 &\vdots \\
 f_r^{(m)} &= (-1)^{m-r} \frac{B_r}{B_m} f_m^{(m)}, \quad r \leq m,
 \end{aligned}$$

a použitím vztahu (6.21) nakonec získáme

$$f_r^{(m)} = (-1)^{m-r} \frac{B_r}{L_{m-1}} f_m, \quad r \leq m. \quad (6.22)$$

A pro $r \geq m$ získáme

$$f_r^{(m)} = \frac{B_m}{L_{m-1}} f_r, \quad r = m, m+1, m+2, \dots \quad (6.23)$$

Výrazy (6.7), (6.8), (6.16) a (6.22), (6.23) vedou na reprezentaci $P_r(s)$ řetězovým zlomkem v níže uvedeném tvaru.

Věta 6.1 ([19, str. 369]). *Nechť $(\lambda_r)_{r=0}^{+\infty}$ a $(\mu_r)_{r=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel, a necht' pro $n = 0, 1, \dots$, je $B_n(s)$ označení pro n -tý jmenovatel aproximantu reálného J-zlomku (6.11). Necht' posloupnost $(P_r(s))$ je definovaná následovně:*

$$P_r(s) = \frac{M_m}{M_r} \frac{B_r}{B_m} \left(\frac{1}{B_{m+1}/B_m} - \frac{\lambda_m \mu_{m+1}}{\lambda_{m+1} + \mu_{m+1} + s} - \dots \right), \quad r = 0, 1, \dots, m \quad (6.24)$$

a

$$P_r(s) = \frac{L_{r-1}}{L_{m-1}} \frac{B_m}{B_r} \left(\frac{1}{B_{r+1}/B_r} - \frac{\lambda_r \mu_{r+1}}{\lambda_{r+1} + \mu_{r+1} + s} - \dots \right), \quad r = m, m+1, \dots \quad (6.25)$$

Hodnoty L_r a M_r jsou definovány výrazem (6.6). Potom každý řetězový zlomek (6.24), (6.25) konverguje k funkci $P_r(s)$ meromorfní v oblasti $D = [s : |\arg s| < \pi]$ a $P_r(s)$ je řešením systému diferencních rovnic (6.4), (6.5).

Důkaz. Konvergence plyne z věty 5.6, $P_r(s)$ spočítáme z výrazu (6.8). Dostáváme tak

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{f_r^{(m)}}{(-1)^r M_r} = \frac{(-1)^{m-r} B_r}{(-1)^r M_r L_{m-1}} f_m = \frac{(-1)^{m-r} B_r}{(-1)^r M_r L_{m-1}} \frac{(-1)^m L_{m-1} M_m}{B_m \left(\frac{B_{m+1}}{B_m} + \frac{f_{m+1}}{f_m} \right)} = \\ &= \frac{M_m B_r}{M_r B_m} \frac{1}{\frac{B_{m+1}}{B_m} + \frac{f_{m+1}}{f_m}}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, m, \\ P_r &= \frac{f_r^{(m)}}{(-1)^r M_r} = \frac{B_m}{(-1)^r M_r L_{m-1}} f_r = \frac{B_m}{(-1)^r M_r L_{m-1}} \frac{(-1)^r L_{r-1} M_r}{B_r \left(\frac{B_{r+1}}{B_r} + \frac{f_{r+1}}{f_r} \right)} = \\ &= \frac{L_{r-1} B_m}{L_{m-1} B_r} \frac{1}{\frac{B_{r+1}}{B_r} + \frac{f_{r+1}}{f_r}}, \quad r = m, m+1, \dots \end{aligned}$$

□

Použitím inverzní Laplaceovy transformace definujeme $p_r(t)$ ve tvaru

$$p_r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_r(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} P_r(s) d\omega, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (6.26)$$

kde $s = c + i\omega$, $c > 0$ a kde posloupnost $(P_r(s))_{r=0}^{+\infty}$, definována výrazy (6.24), (6.25), je řešením soustavy diferencních rovnic (6.4)–(6.5). Z toho plyne, že posloupnost $(p_r(t))$ je řešením soustavy rovnic (6.1)–(6.2). Naším hlavním zájmem je použití řetězového zlomku v (6.24)–(6.25) ke spočítání $p_r(t)$. Za tímto účelem nechť $P_{r,n}(s)$ označuje n -tý aproximant řetězového zlomku v (6.24)–(6.25) a nechť

$$p_{r,n}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_{r,n}(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} P_{r,n}(s) d\omega, \quad (6.27)$$

kde $s = c + i\omega$, $c > 0$. V článku [33, str. 176–179] matematici Jones a Magnus zkoumali konvergenci $p_{r,n}(t)$ k $p_r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_r(t)\}$. Uveďme zde pouze stručný postup jejich zkoumání.

Protože platí

$$|p_r - p_{r,n}| \leq \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |P_r(c + i\omega) - P_{r,n}(c + i\omega)| d\omega,$$

snažíme se odhadnout $|P_r - P_{r,n}|$. Pro $r = m, m+1, \dots$ (pro $r \leq m$ je postup podobný) našli následující odhad

$$|P_r - P_{r,n}| \leq \begin{cases} \frac{L_{r-1}}{L_{m-1}} \cdot \frac{1}{\delta^{r-m}} \cdot \frac{1}{\delta^4} |P_{r,n} - P_{r,n-1}|, & |\omega| \leq \Omega, \\ \frac{L_{r-1}}{L_{m-1}} \cdot \frac{1}{|\omega|^{r-m}} \cdot \frac{1}{|\omega|^2} \cdot \frac{1}{\delta^2} |P_{r,n} - P_{r,n-1}|, & |\omega| \geq \Omega, \end{cases}$$

kde pro pevné $\Omega > 0$ platí $-\Omega \leq \omega \leq \Omega$, a $\delta > 0$.

Vzhledem k tomu, že řetězový zlomek z $P_r(t)$ je reálným J-zlomkem, pro který platí,

že je sudou částí S-zlomku, lze výraz $|P_{r,n} - P_{r,n-1}|$ odhadnout z věty (5.9), tzn., že získáme odhad

$$|P_{r,n} - P_{r,n-1}| \leq C \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{2\xi}{\sqrt{a_k}}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

kde $a_1 = 1, a_2 = \lambda_r, a_3 = \mu_{r+1}, a_4 = \lambda_{r+1}, \dots$,

$$\xi = \Re \sqrt{s} = \sqrt{\frac{c + \sqrt{c^2 + \omega^2}}{2}} > 0 \quad \text{a} \quad C = \frac{1}{|s| \cos\left(\frac{\arg s}{2}\right)} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \leq \frac{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}{\sqrt{c^2 + \omega^2}}.$$

Díky tomuto hornímu odhadu byli schopni dokázat následující výsledek.

Věta 6.2 ([19, str. 369–370]). *Nechť $(\lambda_r)_{r=0}^{+\infty}$ a $(\mu_r)_{r=1}^{+\infty}$ jsou posloupnosti kladných čísel takových, že alespoň jedna z řad (6.15) je divergentní. Pro každé $r \geq 0$ a $n \geq 1$ nechť $P_{r,n}(s)$ označuje n -tý aproximant řetězového zlomku $P_r(s)$ ve větě 6.1 a nechť $p_{r,n}(t)$ a $p_r(t)$ jsou definovány výrazy (6.26) a (6.27). Potom:*

1. Pro každé $r = m, m + 1, m + 2, \dots$ existuje funkce $K(t)$, nezávislá na n taková, že platí

$$|p_r(t) - p_{r,n}(t)|^2 \leq K(t) \prod_{k=1}^n \frac{\left(\sqrt{\lambda_{r+k}} + 2\sqrt{c}\right)^{\frac{1}{x_n}} \left(\sqrt{\mu_{r+k}} + 2\sqrt{c}\right)^{\frac{1}{x_n}}}{\left(1 + \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\lambda_{r+k}}}\right) \left(1 + \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\mu_{r+k}}}\right)}, \quad (6.28)$$

kde $x_n = r - m + 7/4 + n/2$. Podobný odhad platí pro $r = 0, 1, \dots, m$.

2. Pokud existuje taková konstanta α , že platí

$$0 < \lambda_r \leq \alpha r \quad \text{a} \quad 0 < \mu_r \leq \alpha r, \quad r = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.29)$$

potom

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{r,n}(t) = p_r(t). \quad (6.30)$$

6.1 Výpočetní postupy

V této sekci popíšeme postup pro výpočet

$$p_{r,n}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_{r,n}(s)\}, \quad (6.31)$$

n -té aproximace pravděpodobnosti $p_r(t)$, tzn., že populace bude mít velikost r v čase t , za předpokladu, že v čase $t = 0$ má velikost m . Naštěstí lze $P_{r,n}(s)$ reprezentovat ve tvaru parciálních zlomků. Tento fakt nám pomůže při použití inverzní Laplaceovy transformace (6.31).

Nechť $A_{r,n}(s)$, $B_{r,n}(s)$ a $P_{r,n}(s)$ označuje n -tý čítec, jmenovatel a aproximant řetězového zlomku reprezentující $P_r(s)$ ve větě 6.1. Pak je zřejmé, že $A_{r,n}(s)$ a $B_{r,n}(s)$ jsou polynomy v proměnné s se stupni $\deg(A_{r,n})$, $\deg(B_{r,n})$ splňující

$$\deg(A_{r,n}) \leq m + n - 1 \quad (6.32)$$

a

$$\deg(B_{r,n}) = \begin{cases} m + n, & r \leq m, \\ r + n, & r \geq m. \end{cases} \quad (6.33)$$

Navíc platí

$$B_{r,n}(s) = \begin{cases} B_{m+n}(s), & r \leq m, \\ B_{r+n}(s), & r \geq m. \end{cases} \quad (6.34)$$

Dále definujeme funkci $N = N(r, m, n)$ ve tvaru

$$N = N(r, m, n) = \begin{cases} m + n, & r \leq m, \\ r + n, & r \geq m, \end{cases} \quad (6.35)$$

a označme kořeny polynomu $B_{r,n}(s)$ výrazy $s_1^{(r,m,n)}, s_2^{(r,m,n)}, \dots, s_N^{(r,m,n)}$. O těchto kořenech víme, že jsou reálné, různé a navíc záporné (viz věta 4.60). Vzhledem k tomu, že $\deg(A_{r,n}) < \deg(B_{r,n})$, lze aproximant $P_{r,n}$ řetězového zlomku pro P_r z věty 6.1 rozložit na součet parciálních zlomků ve tvaru

$$P_{r,n}(s) = \frac{A_{r,n}(s)}{B_{r,n}(s)} = \sum_{j=1}^N \frac{h_j^{(r,m,n)}}{s - s_j^{(r,m,n)}}, \quad r = 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.36)$$

Proto je inverzní Laplaceova transformace $p_{r,n}(t)$ ve tvaru

$$p_{r,n}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_{r,n}(s)\} = \sum_{j=1}^N h_j^{(r,m,n)} e^{s_j^{(r,m,n)} t}. \quad (6.37)$$

Výraz $h_j^{(r,m,n)}$ je konstanta, kterou si níže odvodíme. Nejdříve je však potřeba odvodit tzv. obecnou rekurentní formuli. Vyjdeme z řetězového zlomku pro f_r (viz 6.16). Pro tento řetězový zlomek jsme již ukázali, že platí následující rovnice

$$\frac{(-1)^r f_r}{B_r} = f_0 - \frac{A_r}{B_r}.$$

Jeho n -tý aproximant napíšeme ve tvaru

$$f_{r,n} = \frac{A_n^{(r)}}{B_n^{(r)}} = \frac{A_n^{(r)}}{B_{n+r}}$$

Poté ze znalosti f_0 lze ukázat, že platí

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{\lambda_0 + s} - \frac{\lambda_0 \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1 + s} - \cdots - \frac{\lambda_{r-1} \mu_r}{(\lambda_r + \mu_r + s) + \frac{f_{r+1}}{f_r}} = \frac{A_{r+1}}{B_{r+1}}, \\ f_0 &= \frac{1}{\lambda_0 + s} - \frac{\lambda_0 \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1 + s} - \cdots - \frac{\lambda_r \mu_{r+1}}{(\lambda_{r+1} + \mu_{r+1} + s) + \frac{f_{r+2}}{f_{r+1}}} = \frac{A_{r+2}}{B_{r+2}}, \\ &\vdots \\ f_0 &= \frac{1}{\lambda_0 + s} - \frac{\lambda_0 \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1 + s} - \cdots - \frac{\lambda_{r+n-2} \mu_{r+n-1}}{(\lambda_{r+n-1} + \mu_{r+n-1} + s) + \frac{f_{r+n}}{f_{r+n-1}}} = \frac{A_{r+n}}{B_{r+n}}. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^r f_{r,n}}{B_r} &= \frac{A_{r+n}}{B_{r+n}} - \frac{A_r}{B_r}, \\ \frac{(-1)^r A_n^{(r)}}{B_r B_{r+n}} &= \frac{A_{r+n}}{B_{r+n}} - \frac{A_r}{B_r}, \\ (-1)^r A_n^{(r)} &= A_{r+n} B_r - A_r B_{r+n} \end{aligned}$$

a tedy $A_n^{(r)}$ lze zapsat jako

$$A_n^{(r)} = (-1)^r (A_{r+n} B_r - A_r B_{r+n}). \quad (6.38)$$

Nejdříve uvažujeme, že $r = 0, 1, \dots, m$, potom platí, že n -tý aproximant $P_{r,n}$ lze zapsat jako

$$P_{r,n} = \frac{A_{r,n}}{B_{r,n}} = \frac{(-1)^{m-r} B_r}{(-1)^r M_r L_{m-1}} f_{m,n} = \frac{(-1)^{m-r} B_r}{(-1)^r M_r L_{m-1}} \frac{A_n^{(m)}}{B_{m+n}}$$

Z věty 4.55 již víme, že $h_j^{(r,m,n)}$ jsou tzv. Christoffelova čísla, která se spočítají ze vztahu (4.61), tj.

$$\begin{aligned} h_j^{(r,m,n)} &= \frac{A_{r,n}(s_j)}{B'_{r,n}(s_j)} = \frac{(-1)^{m-r} B_r(s_j)}{(-1)^r M_r L_{m-1}} \frac{A_n^{(m)}(s_j)}{B'_{r,n}(s_j)} = \\ &= \frac{(-1)^{m-r} B_r(s_j)}{(-1)^r M_r L_{m-1}} \frac{(-1)^m (A_{m+n}(s_j) B_m(s_j) - A_m(s_j) B_{m+n}(s_j))}{B'_{r,n}(s_j)}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že platí $B_{m+n}(s_j) = 0$, dostáváme

$$h_j^{(r,m,n)} = \frac{B_r(s_j) B_m(s_j)}{M_r L_{m-1}} \frac{A_{m+n}(s_j)}{B'_{r,n}(s_j)} = \frac{B_r(s_j) B_m(s_j)}{M_r L_{m-1}} \frac{A_N(s_j)}{B'_{r,n}(s_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6.39)$$

kde $s_j = s_j^{(r,m,n)}$ a pro $B'_{r,n} \left(s_j^{(r,m,n)} \right)$ platí

$$B'_{r,n} \left(s_j^{(r,m,n)} \right) = \prod_{j \neq i}^N \left(s_j^{(r,m,n)} - s_i^{(r,m,n)} \right).$$

Vzhledem k tomu, že pro $r = m, m + 1, \dots$ bychom dostali analogickým postupem totožný výraz jako (6.39), není potřeba dalšího odvozování.

Hodnoty $B_r(s_j)$, $B_m(s_j)$ a $A_N(s_j)$ ve výrazu (6.39) spočítáme pomocí rekurentních vztahů (2.7), tj.

$$\begin{aligned} A_1(s_j) &= 1, & A_2(s_j) &= (\lambda_1 + \mu_1 + s_j), \\ A_j(s_j) &= (\lambda_{j-1} + \mu_{j-1} + s_j)A_{j-1}(s_j) - \lambda_{j-2}\mu_{j-1}A_{j-2}(s_j), & j &= 3, 4, \dots, N, \end{aligned} \quad (6.40)$$

a

$$\begin{aligned} B_1(s_j) &= \lambda_0 + s_j, & B_2(s_j) &= (\lambda_1 + \mu_1 + s_j)B_1(s_j) - \lambda_0\mu_1, \\ B_j(s_j) &= (\lambda_{j-1} + \mu_{j-1} + s_j)B_{j-1}(s_j) - \lambda_{j-2}\mu_{j-1}B_{j-2}(s_j), & j &= 3, 4, \dots, r. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Nyní se dostáváme do situace, kdy je potřeba nalézt kořeny $s_j^{(r,m,n)}$ polynomu $B_{r,n}(s)$. V této práci budeme využívat dvou metod na hledání kořenů polynomu $B_{r,n}(s)$. Tyto metody poté v uvedených příkladech porovnáme.

První z nich je pomocí vlastních čísel matice. Vzhledem k tomu, že platí $B_{r,n} = B_{r+n}$, kde B_{r+n} je jmenovatel aproximantu z řetězového zlomku (6.11). Navíc tento řetězový zlomek je reálný J-zlomek a tudíž hledání kořenů polynomu $B_n(s)$ řetězového zlomku (6.11) je shodné s hledáním vlastních čísel Jacobiho matice \mathbb{J}_k (4.38) (dále viz věta 4.27). Lze si také všimnout, že řetězový zlomek (6.11) je řetězový zlomek (4.59), tj. ve tvaru

$$\frac{1}{k_1 + z - \frac{k_1 k_2}{k_2 + k_3 + z - \frac{k_3 k_4}{k_4 + k_5 + z - \dots}}}, \quad k_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.42)$$

kde dosadíme za $k_1 = \lambda_0$, $k_{2n+1} = \lambda_n$ a $k_{2n} = \mu_n$. To tedy znamená, že kořeny polynomu $B_n(s)$ z aproximantu řetězového zlomku (6.11) jsou všechny reálné, různé a záporné (viz věta 4.60) a lze je nalézt z výpočtu vlastních čísel matice ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \sqrt{\lambda_0 \mu_1} & & & & & & & \\ \sqrt{\lambda_0 \mu_1} & \lambda_1 + \mu_1 & \sqrt{\lambda_1 \mu_2} & & & & & & \\ & \sqrt{\lambda_1 \mu_2} & \lambda_2 + \mu_2 & \sqrt{\lambda_2 \mu_3} & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & \sqrt{\lambda_{n-2} \mu_{n-1}} \\ & & & & & & \sqrt{\lambda_{n-2} \mu_{n-1}} & \lambda_{n-1} + \mu_{n-1} & \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

Druhý způsob výpočtu kořenů je použití kvocient diferencčního algoritmu (tzv. qd -algoritmus) z podsekcce 3.2.2. Tento způsob zde využíváme vzhledem k tomu, že

tento algoritmus úzce souvisí s řetězovými zlomky. Budeme zde využívat progresivní formu qd -algoritmu, tzn. vycházíme ze znalosti první diagonály (viz (4.26)), kterou získáme ze znalosti řetězového zlomku (6.12). Z věty 4.11 tak získáme

$$q_j^{(1)} = -a_{2j} = -\lambda_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6.44)$$

$$e_j^{(1)} = -a_{2j+1} = -\mu_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (6.45)$$

a poté postupovat podle upravených kosočtvercových pravidel (4.27) a (4.28), viz následující algoritmus:

Algoritmus 1

Input: $L, K, \lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}$

for $i = 1, 2, \dots, L-1$ **do**

$$q_1^{(i+1)} = e_1^{(i)} + q_1^{(i)}$$

$$e_1^{(i+1)} = \frac{q_2^{(i)}}{q_1^{(i+1)}} e_1^{(i)}$$

for $j = 2, 3, \dots, N-1$ **do**

$$q_j^{(i+1)} = e_j^{(i)} - e_{j-1}^{(i+1)} + q_j^{(i)}$$

$$e_j^{(i+1)} = \frac{q_{j+1}^{(i)}}{q_j^{(i+1)}} e_j^{(i)}$$

end for

$$q_N^{(i+1)} = e_N^{(i)} - e_{N-1}^{(i+1)} + q_N^{(i)}$$

end for

Je nutno poznamenat, že pro využití věty 4.11 je potřeba splnění předpokladu (4.11), tedy že $H_m^{(n)} \neq 0$, $m = 1, 2, \dots, k$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Z Favardovy věty (viz 4.53) plyne, že existuje distribuční funkce $\psi(t)$. Protože kořeny s_1, \dots, s_N a h_1, \dots, h_N z (6.36) jsou uzly a váhy n -uzlové Gauss–Christoffelovy kvadratury (4.40) související s $\psi(t)$, z věty 4.49 víme, že tato kvadratura řeší zjednodušený Stieltjesův problém momentů, tzn.

$$\mu_k = \int_0^{+\infty} t^k d\psi^{(n)}(t) = \int_0^{+\infty} t^k d\psi(t), \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1, \quad (6.46)$$

kde neklesající funkci $\psi^{(n)}(t)$ definujeme ve tvaru

$$\psi^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } t \leq -s_1^{(r,m,n)}, \\ \sum_{j=1}^i h_j^{(r,m,n)} & \text{pokud } -s_i^{(r,m,n)} < t \leq -s_{i+1}^{(r,m,n)}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \sum_{j=1}^N h_j^{(r,m,n)} = 1 & \text{pokud } -s_N^{(r,m,n)} < t < +\infty. \end{cases}$$

Potom z věty (4.14) platí, že pokud má funkce $\psi(t)$ alespoň k bodů vzrůstu, tak platí potřebný předpoklad, tj. $H_m^{(n)} \neq 0$, $m = 1, 2, \dots, k$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Navíc máme, že splnění tohoto předpokladu implikuje ve větě 4.16, že platí

$$s_j^{(r,m,n)} = \lim_{L \rightarrow +\infty} q_j^{(L)}.$$

Proto pro dostatečně velké L může být $q_j^{(L)}$ použito pro přibližný výpočet kořenů $s_j^{(r,m,n)}$.

6.1.1 Příklady

V této části se zaměříme na několik příkladů, na kterých vyzkoušíme výše získané výsledky. Nejdříve volíme příklady shodné v práci [28, str. 35–36], abychom ověřili, zda jsou naše postupy správné. První příklad uvedeme i s postupem, u dalších příkladů uvedeme pouze získané výsledky. Veškeré výpočty pocházejí z vytvořených souborů s přidruženými soubory `christ_num.m`, `roots_method1.m` a `roots_method2` (viz Příloha A). U každého z příkladů budeme uvažovat několik voleb pro r , m a n a jejich vliv na výsledek, dále budeme uvažovat dvě metody na hledání kořenů s_j , tj. pomocí vlastních čísel matice (6.43) a pomocí qd -algoritmu (viz Algoritmus 1). Pro hledání vlastních čísel budeme využívat již implementovanou matlabovskou metodu `eig`.

Příklad 1

V tomto příkladě budeme uvažovat model ze systému hromadné obsluhy, konkrétně systém s neomezeným počtem obsluhy. Je-li X_t počet zákazníků v systému v čase t , je $\{X_t, t \geq 0\}$ proces růstu a zániku s intenzitami

$$\begin{aligned}\lambda_r &= \lambda, & 0 \leq r < +\infty \\ \mu_r &= r\mu, & 1 \leq r < +\infty.\end{aligned}$$

Kolmogorovy diferenciální rovnice pro absolutní pravděpodobnosti $p_r(t)$ jsou ve tvaru

$$\begin{aligned}p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_r'(t) &= \lambda p_{r-1}(t) - (\lambda + r\mu)p_r(t) + (r+1)\mu p_{r+1}(t), \quad r = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

$$p_m(0) = 1, p_r(0) = 0 \quad r \neq m, m = 0, 1, 2, \dots$$

Tuto soustavu lze vyřešit metodou vytvořující funkce, viz [30, str. 113]. Konkrétně řešení pro $m = 0$ je tedy ve tvaru

$$p_r(t) = \frac{1}{r!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^r (1 - e^{-\mu t})^r \exp \left[-\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \right], \quad r \geq 0. \quad (6.47)$$

Pokud budeme chtít získat přibližný výpočet pro $p_r(t)$. Ze vztahu (6.37) získáme, že přibližnou hodnotu $p_r(t)$ lze získat ve tvaru

$$p_{r,n}(t) = \sum_{j=1}^N h_j^{(r,m,n)} e^{s_j^{(r,m,n)} t},$$

kde N je (6.35), čísla h_j spočítáme ze vztahu (6.39). Hodnoty s_j jsou kořeny n -tého jmenovatele z aproximantu řetězového zlomku ve tvaru

$$\frac{1}{\lambda + s} - \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu + s} - \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} - \dots \quad (6.48)$$

O tomto řetězovém zlomku již víme, že je sudou částí modifikovaného S-zlomku ve tvaru

$$\frac{1}{s} + \frac{\lambda}{1} + \frac{\mu}{s} + \frac{\lambda}{1} + \frac{2\mu}{s} + \frac{\lambda}{1} + \dots'$$

a vzhledem k tomu, že platí

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r} = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\mu}{\lambda} + \frac{2\mu^2}{\lambda^2} + \frac{6\mu^3}{\lambda^3} + \frac{24\mu^4}{\lambda^4} + \cdots + \frac{r!\mu^r}{\lambda^r} = +\infty,$$

a řetězový zlomek (6.48) je konvergentní pro všechna $s \in D = [s : |\arg s| < \pi]$. Dále pokud zvolíme např. $\alpha = (\lambda + \mu)$, potom platí

$$0 < \lambda_r = \lambda \leq (\lambda + \mu)r \quad \text{a} \quad 0 < \mu_r = \mu r \leq (\mu + \lambda)r, \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

a z věty 6.2 pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{r,n}(t) = p_r(t).$$

Nyní budeme uvažovat konkrétní hodnoty intenzit. Jako v [28, str. 35] uvažujeme $\lambda_r = \lambda = 0.2$ a $\mu_r = r\mu = 0.4r$. V následujících tabulkách zde uvedeme postupně výsledky pro $r = 0, 1, 2, m = 0, n = 10$ a $r = 0, m = 0, n = 2, 3, 4, 5$. Tyto výsledky porovnáme s přesným řešením (6.47). Dále uvedme, že nejdříve využíváme na výpočet kořenů pouze maticovou metodu, qd -algoritmus rozebereme následně.

$n = 10$	$r = 0, m = 0$		$r = 1, m = 0$		$r = 2, m = 0$	
t	$p_{0,10}(t)$	$p_r(t)$	$p_{1,10}(t)$	$p_r(t)$	$p_{2,10}(t)$	$p_r(t)$
1	0.848(-16)	0.848	0.140(-16)	0.140	0.012(-16)	0.012
2	0.759(-16)	0.759	0.209(-16)	0.209	0.029(-18)	0.029
3	0.705(-16)	0.705	0.246(-16)	0.246	0.043(-17)	0.043
4	0.671(-15)	0.671	0.268(-15)	0.268	0.053(-17)	0.053
5	0.649(-14)	0.649	0.281(-14)	0.281	0.061(-15)	0.061
6	0.635(-13)	0.635	0.289(-13)	0.289	0.066(-15)	0.066
20	0.607(-9)	0.607	0.303(-11)	0.303	0.076(-12)	0.076

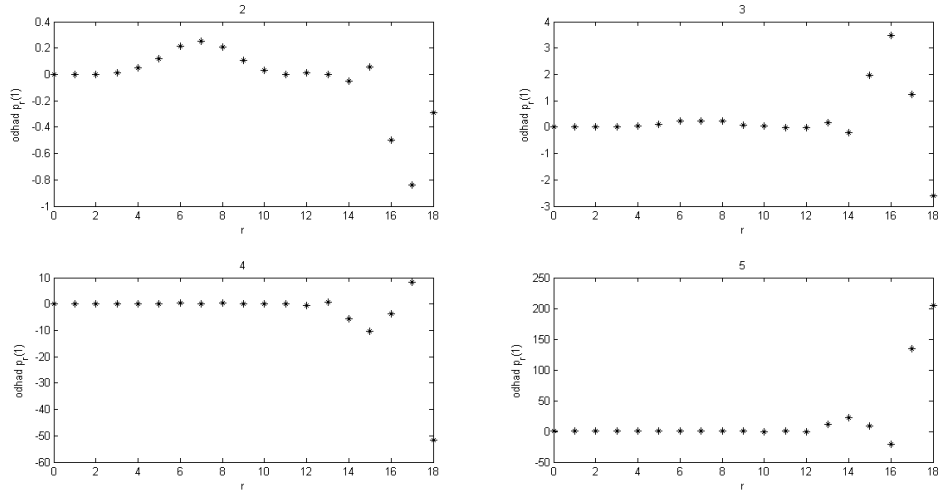
Tabulka 6.1: Porovnání výsledků s přesným řešením pro $r = 0, 1, 2, m = 0, n = 10$, kde $(-k) := 10^{-k} = |p_r(t) - p_{r,10}(t)|$.

$t = 5$	$r = 0, m = 0$		$r = 1, m = 0$		$r = 2, m = 0$	
n	$p_{0,n}(5)$	Δ	$p_{1,n}(5)$	Δ	$p_{2,n}(5)$	Δ
2	0.608	0.041	0.273	0.008	0.060	0.0009
3	0.646	0.003	0.280	0.0006	0.061	0.000
4	0.671	0.0002	0.281	0.00003	0.061	0.000
5	0.649	0.281	0.281	0.000	0.061	0.000

Tabulka 6.2: Porovnání výsledků s přesným řešením pro $r = 0, 1, 2, m = 0, n = 2, 3, 4, 5$, kde $\Delta = |p_r(5) - p_{r,n}(5)|$.

Poznamenejme, že uvedené výsledky v tabulkách 6.1 a 6.2 se plně shodují z výsledky v práci [28, str. 39]. Dále si lze všimnout, že vypočtené hodnoty jsou velmi blízko

analytickému řešení. Z druhé tabulky je patrné, že s rostoucím n roste přesnost výsledku, dokonce již pro malé hodnoty n . Bohužel tyto závěry neplatí pro libovolnou volbu r, m, n . V následujících obrázcích si uvedeme výsledky pro $p_{r,n}(1)$ při volbě $n = 2, 3, 4, 5$ a $r = 0, \dots, 18$. Počáteční hodnotu uvažujeme $m = 10$.



Obrázek 6.1: Výsledky pro $p_{r,n}(1)$ při volbě $m = 10, n = 2, 3, 4, 5$ a $r = 0, \dots, 10$

Tento problém je zmíněn i v článku [4, str. 22], kde jejich pozorováním dospěli k závěru, že metoda selhává přibližně při hodnotách $r + m > 20$. Z našich pozorování docházelo u některých příkladech k selhání metody už při hodnotách $r + m > 15$. Je také zajímavé, že s rostoucí hodnotou n dostáváme extrémější hodnoty $p_r(1)$. Dále poznamenejme, že ve zmíněném článku je popsán jiný postup, který již je více stabilní a tudíž dává přijatelnější výsledky (není předmětem této práce).

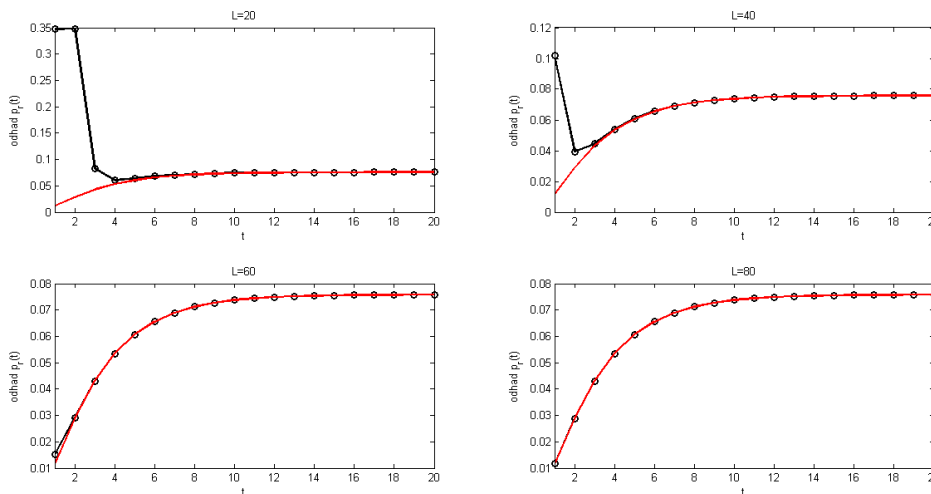
Nyní budeme uvažovat na výpočet kořenů qd -algoritmus (viz algoritmus 1). V následující tabulce budeme zkoumat, jaký vliv má velikost hodnoty L (konkrétně uvažujeme $L = 20$ a 40) na výsledky, když máme postupně pro $r = 0, 1, 2, m = 0$ a $n = 10$.

$n = 10$	$r = 0, m = 0, p_{0,10}(t)$		$r = 1, m = 0, p_{1,10}(t)$		$r = 2, m = 0, p_{2,10}(t)$	
t	$L = 20$	$L = 40$	$L = 20$	$L = 40$	$L = 20$	$L = 40$
1	0.932(-2)	0.850(-3)	-0.408(-1)	0.116(-2)	0.347(-1)	0.102(-2)
2	0.762(-3)	0.759(-4)	0.109(-2)	0.207(-3)	0.348(-1)	0.039(-2)
3	0.697(-3)	0.705(-4)	0.242(-3)	0.246(-5)	0.083(-2)	0.045(-3)
4	0.664(-3)	0.671(-4)	0.272(-3)	0.268(-4)	0.060(-3)	0.054(-4)
5	0.644(-3)	0.649(-4)	0.284(-3)	0.281(-4)	0.064(-3)	0.061(-4)
6	0.607(-3)	0.635(-5)	0.291(-3)	0.289(-4)	0.068(-3)	0.066(-4)
20	0.607(-5)	0.607(-7)	0.303(-6)	0.303(-7)	0.076(-6)	0.076(-7)

Tabulka 6.3: Porovnání výsledků s volbou $L = 20$ a $L = 40$ s přesným řešením pro $r = 0, 1, 2, m = 0, n = 10$, kde $(-k) := 10^{-k} = |p_r(t) - p_{r,10}(t)|$.

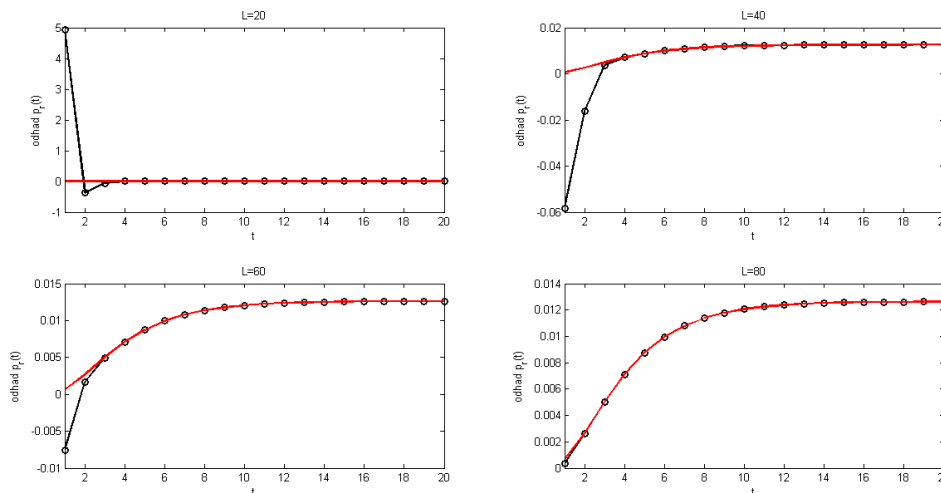
Z tabulky 6.3 si lze všimnout, že pro $L = 40$ dostáváme přesnější výsledky. Dále si lze všimnout, že s rostoucí hodnotou r se zvětšuje nepřesnost prvních několika hodnot

pro t . Tento problém lze odstranit zvolením větší hodnoty pro L (viz následující obrázek 6.2).



Obrázek 6.2: Výsledky pro $p_{2,10}(t)$ při volbě $m = 0$, $n = 10$ a $L = 20, 40, 60, 80$

Stejné řešení problému lze očekávat i při jiné volbě r (viz obrázek 6.3)

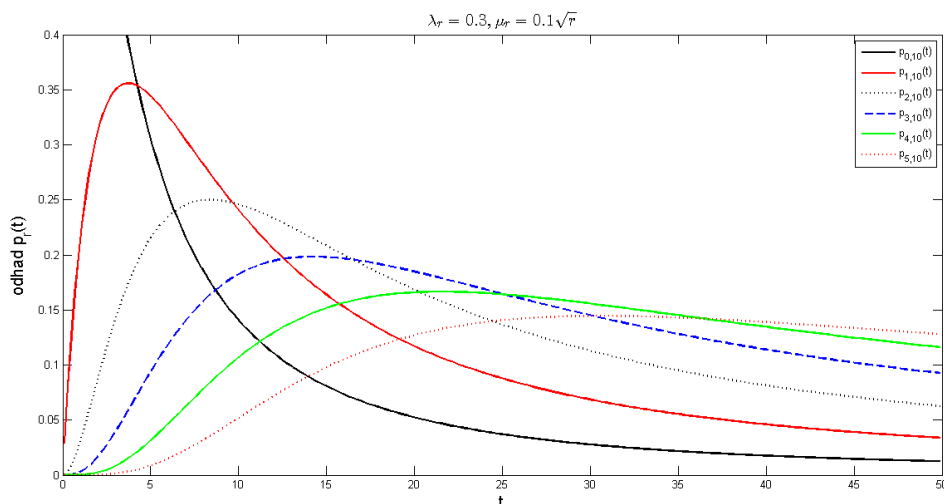


Obrázek 6.3: Výsledky pro $p_{3,10}(t)$ při volbě $m = 0$, $n = 10$ a $L = 20, 40, 60, 80$

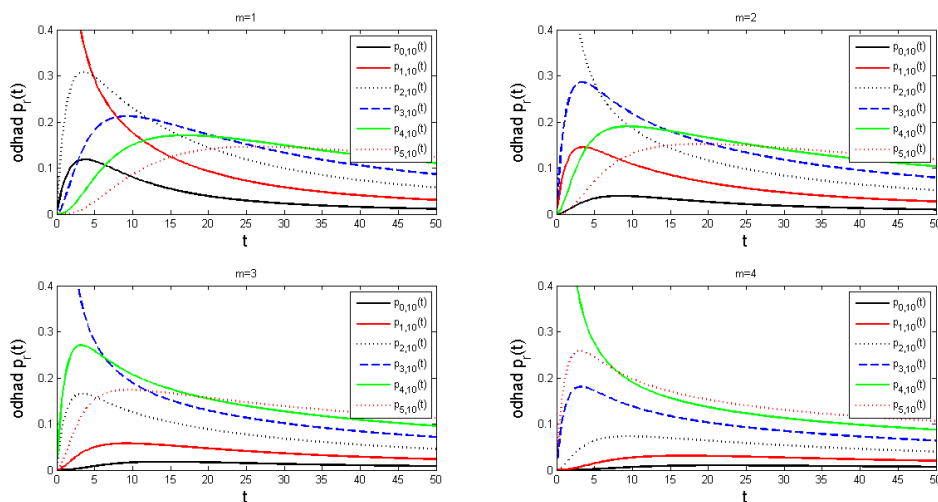
I zde je třeba poznamenat, že i při použití této metody narážíme na problém selhání metody při volbě hodnot $r + m > 20$.

Příklad 2

V tomto příkladě uvažujeme volbu intenzit $\lambda_r = 0.3$ a $\mu_r = 0.1\sqrt{r}$. Tato volba je z důvodu porovnání výsledků ze zmíněné práce [28], kde uvažovali počáteční hodnotu $m = 0$ pro $r = 0, 1, 2, 5$. V naší práci již nebudeme rozebírat získané výsledky v tabulce, ale zobrazíme si je do následujícího obrázku 6.4. Uvedme, že na výpočet kořenů zde používáme metodu na hledání vlastních čísel matice (6.43).


 Obrázek 6.4: Výsledky pro $p_{r,10}(t)$ při volbě $m = 0, n = 10$ a $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Výsledky ve výše uvedeném obrázku se shodují s výsledky v práci [28, str. 44]. Oproti zmíněné práci uvádíme navíc výsledky pro různé počáteční hodnoty, konkrétně $m = 1, 2, 3, 4$ (viz obrázek 6.5). Využíváme tak výhody dnešních numerických softwarů, které skoro před 50 lety chyběly.


 Obrázek 6.5: Výsledky pro $p_{r,10}(t)$ při volbě $m = 1, 2, 3, 4, n = 10$ a $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

V následujících dvou příkladech budeme uvažovat vlastní volbu modelů, na kterých vyzkoušíme fungování studované metody pro výpočet $p_r(t)$.

Příklad 3

Dalším příkladem, kde metoda dobře funguje, je lineární proces růstu a zániku. Absolutní pravděpodobnosti vyhovují soustavě diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned}
 p_0'(t) &= \mu p_1(t) \\
 p_r'(t) &= (r-1)\lambda p_{r-1}(t) - r(\lambda + \mu)p_r(t) + (r+1)\mu p_{r+1}(t), \quad r = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $p_1(0) = 1$. Analytické řešení lze nalézt metodou vytvářející funkce, viz [30, str. 107].

Předpokladem použití naší metody je, že $\lambda > 0$, zde však platí $\lambda_0 = 0$. Ukážeme, že pokud se s hodnotou λ_0 budeme blížit k nule, dostaneme výsledky, které se příliš neliší od přesného řešení. Budeme opět uvažovat konkrétní hodnoty, např. $\lambda_r = 0.2r$ a $\mu_r = 0.4r$ pro $r = 1, 2, \dots$. V následující tabulce lze vidět, že s λ_0 blížíce se k nule, je výsledek skoro totožný s přesným řešením. Uvažujeme hodnoty $m = 1$, $n = 10$, $r = 0, 1, 2$ a např. $t = 20$.

$t = 20$	$r = 0, m = 1$		$r = 1, m = 1$		$r = 2, m = 1$	
$\lambda_0 \approx$	$p_{0,10}(20)$	Δ	$p_{1,10}(20)$	Δ	$p_{2,10}(20)$	Δ
0.1	0.741	0.250	0.186	0.182	0.047	0.045
0.01	0.959	0.032	0.028	0.023	0.008	0.006
0.001	0.987	0.003	0.007	0.002	0.003	0.0006
0.00001	0.991	0.00003	0.0047	0.00002	0.002	0.000006

Tabulka 6.4: Porovnání výsledků pro zmenšující λ_0 s přesným řešením pro $r = 0, 1, 2$, $m = 1$, $n = 10$, kde $\Delta = |p_r(20) - p_{r,10}(20)|$.

t	n	$p_{0,n}(t); L$	$p_{1,n}(t); L$	$p_{3,n}(t); L$	$p_{5,n}(t); L$
1	2	(-4); 25	(-3); 26	(-5); 63	(-5); 94
	6	(-6); 87	(-6); 300	(-5); 113	(-5); 300
	10	(-7); 136	(-7); 142	(-5); 300	(-4); 192
	150	(-5); 300	(-5); 300	NaN	NaN
2	2	(-3); 25	(-3); 26	(-4); 54	(-5); 82
	6	(-7); 84	(-7); 300	(-7); 300	(-7); 143
	10	(-7); 122	(-7); 129	(-6); 156	(-7); 300
	150	(-6); 300	(-6); 300	NaN	NaN
3	2	(-3); 25	(-2); 22	(-3); 45	(-4); 65
	6	(-7); 78	(-6); 77	(-7); 106	(-8); 132
	10	(-7); 110	(-8); 119	(-9); 155	(-8); 176
	150	(-6); 300	(-6); 300	NaN	NaN
5	2	(-2); 22	(-2); 22	(-3); 40	(-4); 56
	6	(-5); 60	(-5); 62	(-5); 76	(-6); 87
	10	(-7); 93	(-7); 98	(-9); 120	(-8); 127
	150	(-7); 300	(-7); 300	NaN	NaN
10	2	(-2); 22	(-2); 20	(-3); 31	(-4); 39
	6	(-4); 47	(-4); 43	(-4); 47	(-5); 56
	10	(-6); 71	(-5); 62	(-6); 68	(-7); 79
	150	(-8); 300	(-10); 300	NaN	NaN
20	2	(-1); 300	(-3); 19	(-4); 22	(-4); 28
	6	(-3); 30	(-3); 29	(-4); 34	(-5); 41
	10	(-4); 42	(-5); 45	(-6); 58	(-6); 54
	150	(-9); 300	(-9); 300	NaN	NaN

Tabulka 6.5: Porovnání výsledků s přesným řešením pro $r = 0, 1, 3, 5$, $m = 1$, $n = 2, 6, 10, 150$ a $\lambda_0 \approx 10^{-10}$, kde $(-k) := 10^{-k} = |p_r(t) - p_{r,n}(t)|$, max. iter. $L = 300$.

Ve výše uvedené tabulce 6.5 nalezneme absolutní chyby (tj. $|p_{r,n}(t) - p_r(t)|$) mezi přesným řešením $p_r(t)$ a přibližnou hodnotou $p_{r,n}(t)$ při použití první metody na hledání kořenů, tj. výpočet vlastních čísel matice (6.43). Dále zde přikládáme počet iterací potřebné k dosažení uvedené absolutní chyby, pokud volíme na výpočet kořenů qd -algoritmus. Uvažujeme počáteční hodnotu populace $m = 1$ a $\lambda_0 \approx 10^{-10}$ a maximální hodnotu $L = 300$. Velikost populace r v čase t uvažujeme $r = 0$. Z tabulky lze vyzpozorovat, že pro malé n ($n = 6$ nebo $n = 10$) se vypočtené hodnoty prakticky shodují s přesným výsledkem. Zároveň pro velké n nedostáváme o moc lepší výsledky, dokonce při volbě hodnot $r = 3, 5$ metoda selhává, ať už volíme metodu na hledání kořenů pomocí vlastních čísel matice (6.43), tak i qd -algoritmus. Lze tedy očekávat, že pro větší r by metoda selhávala pro libovolnou hodnotu n . Co se týče uvedených metod na hledání kořenů, lze si všimnout, že pro dostatečně přesný výsledek je potřeba pro qd -algoritmus větší hodnotu L , to znamená, že v porovnání s první metodou trvají výpočty déle. V některých případech docházelo k tomu, že se algoritmus nebyl schopen ani po 300 iteracích dostat na požadovanou chybu (ba dokonce po 2000 iteracích).

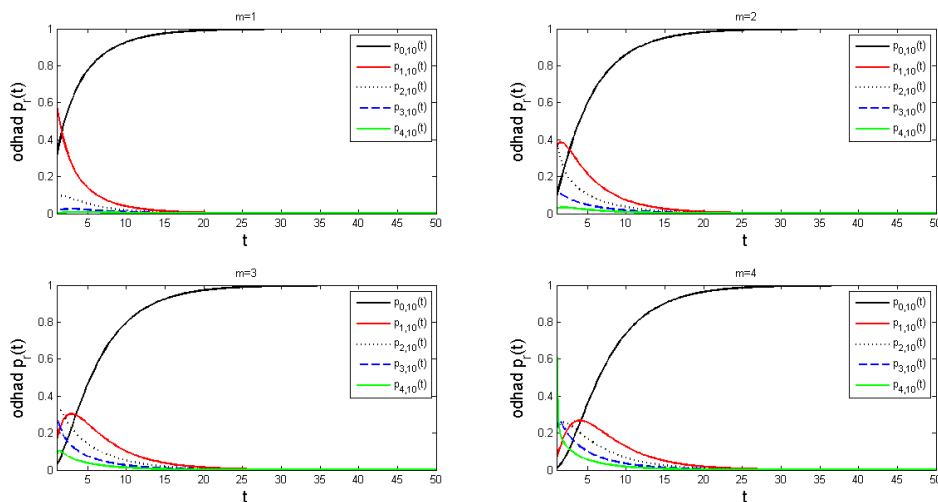
V následující tabulce budeme uvažovat výsledky i pro jinou volbu m . Konkrétně uvažujeme $m = 2, 6, 10, 12$. Budeme sledovat, jak se mění chyba při změně n v čase t .

t	m	$p_{0,5}(t); L$	$p_{0,6}(t); L$	$p_{0,8}(t); L$	$p_{0,20}(t); L$
1	2	(-7); 300	(-6); 26	(-5); 63	(-5); 94
	6	(-4); 300	(-3); 300	(-3); 113	(-4); 300
	10	(-1); 300	(-1); 300	(-1); 300	(-1); 300
	12	(1); 300	(1); 300	(1); 300	(1); 300
2	2	(-7); 300	(-7); 104	(-8); 300	(-7); 300
	6	(-5); 134	(-5); 147	(-6); 300	(-6); 298
	10	(-5); 176	(-6); 300	(-7); 300	(-5); 300
	12	(-5); 300	(-4); 300	(-4); 300	(-4); 300
3	2	(-6); 78	(-7); 93	(-8); 300	(-7); 300
	6	(-6); 120	(-6); 133	(-6); 300	(-7); 300
	10	(-5); 300	(-6); 300	(-5); 300	(-5); 264
	12	(-5); 300	(-5); 145	(-5); 300	(-5); 300
5	2	(-4); 58	(-5); 69	(-6); 87	(-7); 300
	6	(-4); 82	(-5); 98	(-6); 107	(-7); 171
	10	(-4); 300	(-5); 300	(-6); 300	(-7); 178
	12	(-5); 300	(-5); 300	(-5); 300	(-6); 300
10	2	(-3); 39	(-3); 43	(-4); 53	(-7); 300
	6	(-3); 55	(-3); 57	(-4); 68	(-7); 121
	10	(-3); 65	(-3); 68	(-4); 78	(-7); 300
	12	(-3); 70	(-3); 72	(-4); 79	(-7); 155
20	2	(-2); 300	(-3); 32	(-3); 35	(-8); 300
	6	(-2); 38	(-2); 38	(-3); 46	(-7); 123
	10	(-2); 48	(-2); 47	(-3); 54	(-7); 177
	12	(-2); 51	(-2); 49	(-3); 67	(-7); 95

Tabulka 6.6: Porovnání výsledků s přesným řešením pro $r = 0$, $m = 2, 6, 10, 12$, $n = 5, 6, 8, 20$ a $\lambda_0 \approx 10^{-10}$, kde $(-k) := 10^{-k} = |p_0(t) - p_{0,n}(t)|$, max. iter. $L = 300$.

Z tabulky 6.6 lze vypočítat, že s rostoucí hodnotou m roste absolutní chyba mezi vypočtenou hodnotou a přesným řešením. Dále si lze všimnout, že největší chyby získáváme pro počáteční hodnoty t (nejvíce však pro $t = 1$). Této skutečnosti jsme si mohli všimnout i v předešlé tabulce. S rostoucím t si pak nejlépe vede volba $n = 20$. Co se týče qd -algoritmu, opět zde platí, že pro přesnější výsledek bude potřeba mnohem více iterací než 300. To má pak za následek zpomalení uvedené metody. Proto stále preferujeme použití první metody.

Na závěr uvedme několik výsledků $p_{r,10}(t)$ (bez porovnání s přesným řešením a pouze graficky), kde $r = 0, 1, 2, 3, 4$ a při volbě počáteční velikosti populace v čase $t = 0$, např. $m = 1, 2, 3, 4$.



Obrázek 6.6: Výsledky pro $p_{r,10}(t)$ při volbě $m = 1, 2, 3, 4$, $n = 10$ a $r = 0, 1, 2, 3, 4$

Příklad 4

V tomto závěrečném příkladu budeme uvažovat model zrodu-migrace-zániku pro který platí

$$\lambda_r = r\lambda + \tau, \quad \mu_r = r\mu.$$

Každý jednotlivec se rodí s intenzitou λ , zánikne s intenzitou μ a migraci popisuje parametr τ . Kolmogorovy diferenciální rovnice pro absolutní pravděpodobnosti $p_r(t)$ jsou ve tvaru

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\tau p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_r'(t) &= ((r-1)\lambda + \tau)p_{r-1}(t) - (r\lambda + r\mu + \tau)p_r(t) + (r+1)\mu p_{r+1}(t), \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

$$p_m(0) = 1, p_r(0) = 0 \quad r \neq m, m = 0, 1, 2, \dots$$

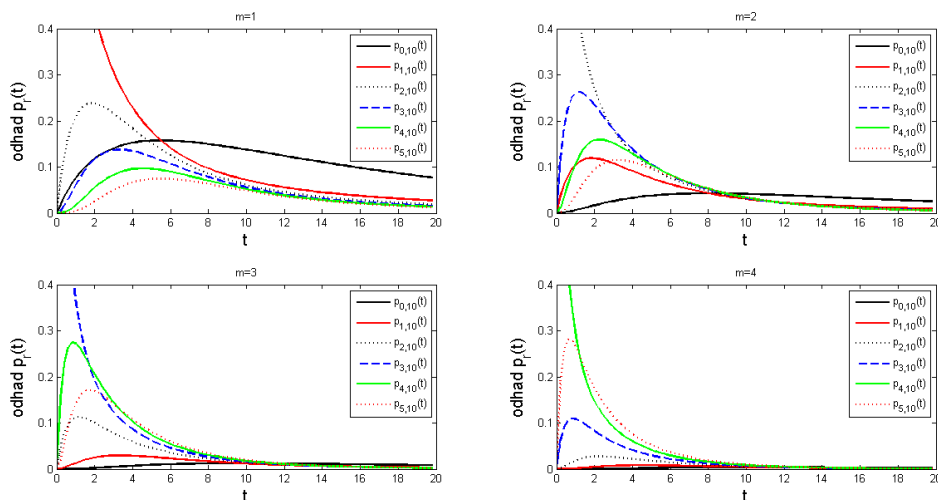
Tuto soustavu lze vyřešit metodou vytvořující funkce, viz [3, str. 121–123].

t	m	$p_{0,2}(t); L$	$p_{0,6}(t); L$	$p_{0,10}(t); L$
1	1	(-6); 16	(-14); 88	(-16); 300
	3	(-8); 41	(-15); 109	(-14); 170
	5	(-10); 73	(-14); 148	(-13); 190
5	1	(-3); 9	(-7); 34	(-11); 81
	3	(-4); 12	(-8); 49	(-12); 97
	5	(-5); 17	(-9); 51	(-13); 102
10	1	(-3); 8	(-5); 21	(-8); 58
	3	(-4); 10	(-6); 23	(-9); 55
	5	(-5); 10	(-7); 31	(-10); 74
15	1	(-3); 9	(-5); 22	(-7); 50
	3	(-3); 3	(-6); 30	(-8); 59
	5	(-4); 8	(-7); 39	(-9); 68
20	1	(-3); 7	(-5); 24	(-7); 51
	3	(-4); 13	(-5); 17	(-8); 73
	5	(-4); 8	(-6); 20	(-8); 55

Tabulka 6.7: Porovnání výsledků s přesným řešením pro $r = 0$, $m = 1, 3, 5$, $n = 2, 6, 10$, kde $(-k) := 10^{-k} = |p_0(t) - p_{0,n}(t)|$, max. iter. $L = 300$.

Z tabulky 6.7 je patrné, že s rostoucí hodnotou n roste přesnost výsledku, je ale dobré poznamenat, že už při volbě $n = 2$ dostáváme dobré výsledky. Lze si dále všimnout, že i při změně hodnoty m se přesnost výsledku drží na dobré úrovni. Co se týče qd -algoritmu a jeho iterací, oproti předchozímu příkladu není potřeba tolik iterací k požadované chybě. To má za následek menší časovou náročnost výpočtu.

Na závěr ještě přikládáme obrázek, kde jsem uvažovali i jiné volby r . Z důvodu komplikovaného tvaru uvádíme bez přesného řešení.



Obrázek 6.7: Výsledky pro $p_{r,10}(t)$ při volbě $m = 1, 2, 3, 4$, $n = 10$ a $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

V této práci jsme uvažovali jen několik málo modelů, více příkladů lze nalézt v článku [4] nebo v práci [28].

Kapitola 7

Závěr

Tato práce se zabývala studiem analytické teorie řetězových zlomků a jejich použitím v aplikaci, konkrétně v obecných procesech zrodu a zániku. Hlavním cílem této práce bylo představit metodu řetězových zlomků na řešení těchto procesů, porovnat získané výsledky z prací [28] a vyzkoušet danou metodu i na jiné modely. Získané výsledky pak porovnat, pokud to bylo možné, s přesným řešením. K lepšímu pochopení metody bylo potřeba čtenáře seznámit se základními pojmy a definicemi z analytické teorie řetězových zlomků.

V kapitole 1 byla sepsána stručná historie o analytické teorii řetězových zlomků a jejich aplikaci. Dozvěděli jsme se tak o zajímavém využití řetězových zlomků v různých oblastech matematiky, hlavně v matematické analýze.

Ve 2. kapitole byla představena základní definice řetězového zlomku a jeho vlastností. Seznámili jsme se tak s pojmy jako prvky řetězového zlomku či n -tý aproximant řetězového zlomku. Z vlastností pak konvergenci, rozšíření nebo zúžení řetězového zlomku. Na závěr kapitoly byl ukázán příklad pro lepší porozumění.

Kapitola 3 obsahovala základní informace o korespondenci mezi řetězovým zlomkem a mocninnou řadou. Tato korespondence je základním stavebním kamenem k reprezentaci funkcí řetězovým zlomkem. Na závěr této kapitoly jsme ukázali na různé korespondenční vlastnosti, pokud uvažujeme různé tvary prvků řetězového zlomku.

Ze závěru 3. kapitoly jsme se tak dostali ke studiu různým typů řetězových zlomků a jejich korespondenčních vlastností. Konkrétně se jedná o tzv. C-zlomky, S-zlomky a J-zlomky. Tyto zlomky byly probrány v následující kapitole 4. Důležitou součástí C-zlomků je tzv. qd -algoritmus. Bylo ukázáno, že pomocí tohoto algoritmu lze získat prvky řetězového zlomku z koeficientů mocninné řady, která s daným řetězovým zlomkem koresponduje. Pro použití tohoto algoritmu byly představeny předpoklady pro jeho použití. Tuto metodu a její předpoklady jsme poté ověřili na příkladě. Dále jsme se dozvěděli, že S-zlomek je typ C-zlomku, kde pouze předpokládáme kladné prvky. S tímto zlomkem poté souvisí tzv. modifikovaný S-zlomek, který je důležitou částí poslední kapitoly. Nejvíce prostoru v kapitole 4 zabírá studium J-zlomku. Po stručném seznámení s korespondenčními vlastnostmi jsme přešli k souvislostem mezi tímto zlomkem a tridiagonální symetrickou maticí, tzv. Jacobiho maticí. Platí

totiž, že kořeny n -tého jmenovatele aproximantu z tzv. reálného J-zlomku lze spočítat z vlastních čísel této Jacobiho matice. Tato skutečnost opět byla důležitým nástrojem při použití studované metody ze závěrečné kapitoly. Dále bylo v této kapitole ukázáno na souvislost s tzv. problémem momentů a Gauss–Christoffelovou kvadraturou. Dozvěděli jsme se, že Gauss–Christoffelova kvadratura za určitých podmínek řeší zjednodušený Stieltjesův problém momentů a naopak, řešením Stieltjesova problému momentů získáme n -uzlovou kvadraturu pro řešení Riemann–Stieltjesova integrálu s nějakou distribuční funkcí. Na to návázalo spojení reálných J-zlomků s posloupností monických ortogonálních polynomů. Jejich spojení je zajímavé v tom, že každá posloupnost monických ortogonálních polynomů je posloupností jmenovatelů reálného J-zlomku. A naopak, posloupnost jmenovatelů nějakého reálného J-zlomku je posloupností monických ortogonálních polynomů pro nějakou distribuční funkci. To vše poté vedlo k důležité větě, tvrdící, že aproximant řetězového zlomku může být rozložen na součet parciálních zlomků s váhami a uzly n -uzlové Gauss–Christoffelovy kvadratury. Na závěr této kapitoly byl představen speciální typ reálného J-zlomků a dokázali jsme, že kořeny n -tého jmenovatele z jeho aproximantu jsou reálné a záporné. Tento speciální typ je hlavní esencí závěrečné kapitoly.

Konvergence řetězových zlomků byla poté studována v kapitole 5. Představili jsme zde pouze stručně několik vět, které byly důležité v následující kapitole. Nejdůležitější z nich byla věta týkající se konvergence S-zlomků. Na závěr této kapitoly jsme se seznámili s tzv. chybou zkrácení řetězového zlomku, tj. jaké chyby se dopustíme, pokud budeme uvažovat pouze n -tý aproximant místo nekonečného zlomku.

Závěrečná šestá kapitola se týkala metody na výpočet absolutní pravděpodobnosti tzv. obecných procesů zrodu a zániku. Matematici Murphy a O’Donohoe našli metodu, jak pomocí řetězových zlomků nalézt řešení tzv. Kolmogorových diferenciálních rovnic. Využili Laplaceovy transformace na převod soustavy diferenciálních rovnic na soustavu diferenčních rovnic. Z této soustavy pak získali řetězový zlomek představující Laplaceovu transformaci $p_r(t)$. Tedy pravděpodobnost existence populace o velikosti r čase t . Naším cílem bylo představit tuto metodu čtenáři, naráželi jsme však na problém, že některé vztahy byly pouze předloženy bez většího odvození a na nás bylo tyto vztahy řádně odvodit. K tomu bylo potřeba se odkazovat na pojmy ze 3. kapitoly, která z tohoto důvodu byla sepsána. Poté navazovala sekce s výpočetními postupy, kde uvažujeme dvě metody na hledání potřebných kořenů n -tého jmenovatele z řetězového zlomku představující Laplaceovu transformaci. První metoda hledá kořeny pomocí vlastních čísel matice, druhá metoda hledá kořeny pomocí qd -algoritmu, u tohoto algoritmu jsme ověřili předpoklady použití, které v publikaci [19] nebyly dostatečně ověřeny. Na závěr jsme uvažovali čtyři příklady (modely), na kterých jsme vyzkoušeli studovanou metodu spolu s metodami na hledání kořenů. První dva modely jsou zvoleny podle práce [28], zbylé dva jsou naším výběrem.

V prvních dvou modelech jsme zjistili, že získané výsledky se plně shodují s výsledky v práci. Tyto výsledky jsme také podrobili srovnání s přesným řešením. Pro určitou volbu hodnot n a L vykazovala metoda malou absolutní chybu mezi příbližnou hodnotou a přesným řešením. Naráželi jsme však na problém při určité volbě parametrů, pro volbu $r + m > 20$ již metoda selhávala. Dále bylo ukázáno, že

s rostoucí hodnotou parametrů n a L jsme dostávali přesnější výsledek. Ale zároveň pro malé n (např. 2,3) se získané výsledky příliš nelišili od přesného řešení (chyba v řádu desetitisícin). V posledních dvou modelech jsme získali prakticky totožné závěry. Metoda opět dobře fungovala pro určitou volbu n . Nejlépe se osvědčila volba $n = 10$. Při použití qd -algoritmu jsme naráželi na problém s přílišným počtem iterací k docílení určité absolutní chyby. Někdy se i stávalo, že metoda ani po 2000 iteracích nedosáhla na předepsanou absolutní chybu. To mělo za následek větší časovou náročnost na výpočet oproti první metodě, tj. hledání vlastních čísel dané matice.

V této práci jsme uvažovali jen několik modelů, kde metoda vykazovala poměrně dobré výsledky. Obecně však metoda selhává při větších hodnotách parametrů r , m a n . Tímto problémem se zabývají v článku [4], kde pro řešení tohoto problému využívají robustnějších metod. Tyto metody poté aplikují na modely z biologie či genetiky. Na tuto práci poté navazuje práce [24], kde se využívá Laplaceovy transformace a řetězových zlomků na dvourozměrné procesy zrodu a zániku.

Literatura

- [1] BABUŠKA, Ivo. *O jednom numerickém řešení úplně regulárních systémů lineárních rovnic a o jeho aplikaci na statické řešení patrových rámu.* Časopis pro pěstování matematiky [online]. 1955, 80(1), 60–88 [cit. 2022-05-15]. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/117149>
- [2] BREZINSKI, Claude. *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. 2. New York: Springer, 1991. ISBN 3-540-15286-5.
- [3] CIPRA, Tomáš. *Matematické metody demografie a pojištění*. Praha: SNTL, 1990. ISBN 80-03-00222-2.
- [4] CRAWFORD, Forrest W. a Marc A. SUCHARD. *Transition probabilities for general birth-death process with applications in ecology, genetics and evolution*. Journal of Mathematical Biology [online]. 2012, 65(3), 553–580 [cit. 2022-05-15]. Dostupné z: <https://www.jstor.org/stable/24247199>
- [5] CUYT, A., V. B. PETERSEN, B. VERDONK, H. WAADELAND a W. B. JONES. *Handbook of Continued Fractions for Special Functions*. 1. New York: Springer, 2008. ISBN 978-1-4020-6948-2.
- [6] ČERNÝ, Ilja. *Základy analýsy v komplexním oboru*. Praha: Academia, 1967.
- [7] ČERNÝ, Martin a Peter ZEMAN. *Lineární algebra pro pokročilé*. Dostupné z: https://kam.mff.cuni.cz/~cerny/data/LA2/advanced/lap2_cviko11-handout.pdf
- [8] DRDA, Patrik. *Řetězové zlomky*. Plzeň, 2019. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni.
- [9] GAUTSCHI, Walter. *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*. Oxford University Press, 2004. ISBN 978-0198506720.
- [10] GRAGG, W. B. *The Padé Table and its Relation to Certain Algorithms of Numerical Analysis*. SIAM Review. 1972, 1(14), 1-62.
- [11] HENRICI, P. *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 1: Power Series, Integration, Conformal Mapping and Location of Zeros*. 1. New York: Wiley, 1974. ISBN 978-0-471-60841-7.
- [12] HENRICI, P. *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 2: Special Functions, Integral Transforms, Asymptotics and Continued Fractions*. 1. New York: Wiley, 1977. ISBN 978-0-471-54289-6.

- [13] HESTENES, M. R. a E. STIEFEL. *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*. J. Research Nat. Bur. Standards. 1952, 49, 409–436.
- [14] HORÁČEK, J. a T. SASAKAWA. *Method of continued fractions with application to atomic physics*. Phys. Rev. A28. 1983, 2151-2156.
- [15] CHIHARA, T. S. *An introduction to orthogonal polynomials*. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1978.
- [16] CHINČIN, A. J. *Řetězové zlomky*. Přírodovědecké vydavatelství Praha, 1952.
- [17] INCE, Edward L. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, 1956. ISBN 978-0486603490.
- [18] JAIN, J. L., S. G. MOHANTY a W. BÖHM. *A Course on Queueing Models*. New York: Chapman and Hall/CRC, 2016. ISBN 978-0367390556.
- [19] JONES W. B., a W. J. THRON. *Continued Fractions: Analytic Theory and Applications*. 1. New York: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1984. ISBN 978-0-521-10152-3.
- [20] KARLIN, S. a J. L. MCGREGOR. *The differential equations of birth-and-death processes, and the Stieltjes moment problem*. Trans. Amer. Math. Soc. [online]. 1957, 85, 489–546 [cit. 2022-05-15]. Dostupné z: doi: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1957-0091566-1>
- [21] KARLIN, S. a J. L. MCGREGOR. *The Classification of Birth and Death Processes*. Trans. Amer. Math. Soc. [online]. 1957, 86, 366-400 [cit. 2022-05-15]. Dostupné z: doi: <https://doi.org/10.2307/1993021>
- [22] KARLIN, S. a J. L. MCGREGOR. *Linear Growth, Birth and Death Processes*. Journal of Mathematics and Mechanics [online]. 1958, 7(4), 643-662 [cit. 2022-05-15]. Dostupné z: <https://www.jstor.org/stable/24900526>
- [23] KJELDSEN, Tinne Hoff. *The Early History of the Moment Problem*. Historia Mathematica [online]. 1993, 20(1), 19–44 [cit. 2022-05-15]. Dostupné z: doi: <https://doi.org/10.1006/hmat.1993.1004>
- [24] LAM SI TUNG HO, Jason XU, Forrest W. CRAWFORD, Vladimir N. MININ a Marc A. Suchard SUCHARD. Birth/birth-death processes and their computable transition probabilities with biological applications. Journal of Mathematical Biology [online]. 2018, 76, 911–944 [cit. 2022-05-18]. Dostupné z: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5783825/>
- [25] LIESEN, Jörg a Zdeněk STRAKOŠ. *Krylov Subspace Methods: Principles and Analysis*. 1. Oxford: OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2013. ISBN 978-0-19-965541-0.
- [26] LORENTZEN, Lisa a Haakon WAADELAND. *Continued Fractions with applications*. 1. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1992. ISBN 0-444-89265-6.
- [27] MURPHY, J. A. a M. R. O'DONOHUE. *Some Properties of Continued Fractions with Applications in Markov Processes*. IMA Journal of Applied Mathematics. 1975, 16(1), 57–71. Dostupné z: doi: <https://doi.org/10.1093/imamat/16.1.57>

- [28] O'DONOHUE, M. R. *Applications of continued fractions in one and more variables* [online]. Brunel, 1974 [cit. 2022-05-15]. Dostupné z: <https://bura.brunel.ac.uk/bitstream/2438/5800/1/FulltextThesis.pdf>. Disertace. Brunel university.
- [29] PERRON, Oskar. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Leipzig: Teubner, 1913.
- [30] PRÁŠKOVÁ, Zuzana a Petr LACHOUT. *Základy náhodných procesů I*. Vyd. 2., V Matfyzpressu 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2012. ISBN 978-807-3782-108.
- [31] RALSTON, Anthony. *Základy numerické matematiky*. Praha: Academia, 1973.
- [32] RUTISHAUSER, H. *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*. Z. Angew. Math. Phys. 1954, 5, 233–251.
- [33] SAFF, E. B. a R. S. VARGA, ed. *Padé and Rational Approximation: Theory and Application*. 1. New York: Academic Press, 1977. ISBN 0-12-614150-9.
- [34] TAYLOR, A. E. *Úvod do funkcionální analýzy*. Praha: Academia, 1973.
- [35] VAŠÍČEK, Oldřich. *Jedna speciální čekací disciplína v systému hromadné obsluhy*. Aplikace matematiky [online]. 1965, 10(1), 59–71 [cit. 2022-05-15]. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/102981>
- [36] VESELÝ, Jiří. *Komplexní analýza pro učitele* [online]. Praha: Karolinum, 2000 [cit. 2022-05-16]. ISBN 80-246-0202-4. Dostupné z: <https://matematika.cuni.cz/dl/vesely/kompl.pdf>
- [37] WALL, H. S. *Analytic theory of continued fractions*. New York: Dover Publications, 2018. ISBN 04-868-2369-5.

Příloha A

Zde uvádíme seznam souborů, které se nacházejí v příloženém CD (složka Příloha A). Dále zde uvádíme jejich stručný popis. Tyto soubory byly použité k získání výsledků této práce. Veškeré výpočty byly napsány v softwaru MATLAB R2014a.

A.1 qd_algo.m

Funkce určená k výpočtu prvků C-zlomku z koeficientů mocninné řady pomocí *qd*-algoritmů.

A.2 priklad03ch.m

Funkce určená k vizualizaci distribučních funkcí $\psi^n(t)$. Tato funkce byla použita v kapitole 4.

A.3 roots_method1.m

Funkce určená k výpočtu kořenů s_j n -tého polynomu $B_n(s)$ pomocí matlabovské metody `eig` na výpočet vlastních čísel matice.

```
[roots, R]=roots_method1(K, lambda_0, lambda_r, mu_r)
```

- K je velikost matice
- λ_0 je λ_0
- λ_r, μ_r jsou intenzity růstu a zániku
- `roots` je vektor kořenů
- R je velikost vektoru `roots`

A.4 roots_method2.m

Funkce určená k výpočtu kořenů s_j n -tého polynomu $B_n(s)$ pomocí *qd*-algoritmu.

```
[roots, R]=roots_method2(L, K, lambda_0, lambda_r, mu_r)
```

- L je počet iterací algoritmu

A.5 christ_num.m

Funkce určená na hledání Christoffelových čísel h_j a pravděpodobnosti $p_{r,n}(t)$.

```
[h, p_r]=christ_num(r,m,n, lambda_0, lambda_r, mu_r, roots_search, L)
```

- roots_search je volba metody na hledání kořenů.
 - 1 je použití roots_method1.m
 - 2 je použití roots_method2.m
- h je vektor Christoffelových čísel
- p_r je vektor pravděpodobností

A.6 queue_BDP_ex.m

Funkce určená k výpočtu absolutních pravděpodobností v příkladu 1.

A.7 ex_sqrt.m

Funkce určená k výpočtu absolutních pravděpodobností v příkladu 2.

A.8 linear_BDP_ex.m

Funkce určená k výpočtu absolutních pravděpodobností v příkladu 3.

A.9 linear_BDP_ex_iter.m

Funkce určená k výpočtu počtu iterací qd -algoritmu při dané absolutní chybě. Týká se příkladu 1.

A.10 ex_imigrace.m

Funkce určená k výpočtu absolutních pravděpodobností v příkladu 4.

A.11 ex_imigrace_iter.m

Funkce určená k výpočtu počtu iterací qd -algoritmu při dané absolutní chybě. Týká se příkladu 4.