Posudek oponenta bakalářské práce

Autor/Autorka	Alena Rečková
Název práce	Cyklické vlastnosti cirkulačních grafů
Studijní obor	Matematika a její aplikace
Oponent práce	Adam Kabela

Splnění cílů práce:

- [ ] nadstandardně
- [ ] velmi dobře
- [x] splněny
- [ ] s výhradami
- [ ] nebyly splněny

Odborný přínos práce:

- [ ] nové výsledky
- [ ] netradiční postupy
- [x] zpracování výsledků z různých zdrojů
- [ ] shrnutí výsledků z různých zdrojů
- [ ] bez přínosu

Matematická (odborná) úroveň:

- [ ] vynikající
- [ ] velmi dobrá
- [x] průměrná
- [ ] podprůměrná
- [ ] nevyhovující

Věcné chyby:

- [ ] téměř žádné
- [ ] vzhledem k rozsahu přiměřený počet
- [x] méně podstatné, větší množství
- [ ] podstatnější, větší množství
- [ ] závažné

Grafická, jazyková a formální úroveň:

- [ ] vynikající
- [x] velmi dobrá
- [ ] průměrná
- [ ] podprůměrná
- [ ] nevyhovující

Slovní hodnocení a dotazy:

Hodnocení je přiloženo na další straně.

Práci doporučuji uznat jako kvalifikační.

Navrhuji hodnocení známkou:

velmi dobře

Datum, jméno a podpis: 3. června 2022, Adam Kabela

Posouzení

Hlavním tématem předložené bakalářské práce je výskyt kružnic daných délek v cirkulantech. Práce je připravena pečlivě. Text je napsán jasně a srozumitelně. K dobré čitelnosti práce přispívá také přehledné formátování a množství kvalitně připravených obrázků. Použité zdroje jsou citovány.

Kapitoly 3, 4 a 5 dávají čtenáři dobrou představu o známých vlastnostech cirkulantů a kružnic v cirkulantech. Tyto kapitoly mají povahu komentovaného výčtu známých výsledků, v kapitolách se nediskutují myšlenky důkazů zmíněných výsledků, hlubší souvislosti nebo širší kontext pancyklické teorie grafů. V Kapitole 6 je dokázáno několik jednoduchých tvrzení o kružnicích ve speciálních typech cirkulantů. Část dokazovaných tvrzení přímo odpovídá speciálním případům známých obecnějších tvrzení, která jsou zmíněna v Kapitole 5. Důkazy tvrzení v Kapitole 6 tvoří předpisy pro kružnice daných délek, hlavními použitými nástroji jsou sudost/lichost a počítání modulo. Jednoduchost důkazové techniky odpovídá charakteru studovaných otázek. I v rámci daného úzkého tématu by bylo možné studovat otázky hlouběji a ve větší obecnosti. Konkrétní příklad možné obecnější otázky připojuji níže.

Po matematické stránce je možné v práci najít chyby, pro ilustraci níže připojuji konkrétní komentáře. Uvedené komentáře se týkají částí, které hrají důležitou roli vzhledem k obsahu práce.

Celkový dojem z textu je následující. Jedná se o výsledek systematické rešeršní práce a vlastní práce na jednoduchých otázkách a získané poznatky jsou umně uspořádány do uceleného textu, což vyžaduje netriviální kombinaci dovedností. Tyto dovednosti jsou dobrými předpoklady pro případnou práci autorky na složitějším a matematicky hlubším problému. Bylo-li cílem bakalářské práce například získání a zlepšení těchto dovedností, pak práce tento cíl splnila. Zdá se, že výběr a zpracování tématu nedává prostor pokročilejším matematickým dovednostem. Práci doporučuji k obhajobě a navrhuji hodnocení známku velmi dobře.

Komentáře

Komentář k definici cirkulantu (Abstrakt na straně 3 a Definice 3.2 na straně 8). *Myšlenka definice je jasně srozumitelná, ale technicky definice nefunguje správně. Například cirkulant $C_3(1)$ by dle definice měl množinu vrcholů $\{v_1, v_2, v_3\}$ a měl by obsahovat hranu v_2v_0. Problém je indexování vrcholů od* 1 *a použití operace modulo pro definici hran.*

Komentář k Větě 5.7 [7] (strana 17 v práci). *Tvrzení neplatí. Nejmenší protipříklad je graf C_6 (kružnice délky* 6*). Tento graf je souvislý a bipartitní a lze jej zapsat jako cirkulant $C_6(1)$, ale neobsahuje kružnice všech sudých délek. Problém je vynechaný předpoklad o počtu skoků v cirkulantu.*

Komentář k Větě 5.10 [7] (strana 18 v práci). *Tvrzení neplatí. Nejmenší protipříklad je graf K_4 (úplný graf obsahující* 4 *vrcholy). Tento graf lze zapsat jako cirkulant $C_4(1, 2)$, ale graf není bipartitní. Podle použité Definice 5.4 tedy graf není hranově bipancyklický. Problém je použití jiné definice hranové bipancyklicity v bakalářské práci a v článku, z nějž je citováno tvrzení Věty 5.10.*

Otázka

V práci mimo jiné studujete bipartitnost speciálních typů cirkulantů (Tvrzení 6.2, 6.4 a 6.10). Prosím rozmyslete si, jak by se zhruba dokazovalo následující obecnější tvrzení.

Tvrzení. *Souvislý cirkulant (s alespoň dvěma vrcholy) je bipartitní, právě když má sudý počet vrcholů a všechny skoky jsou liché.*

Pomocné poznámky k otázce

Tvrzení můžete dokazovat různě. Například pro důkaz dopředné implikace můžete využít následující fakta.

Fakt 1 (Věta 4.11 [15] na straně 14 v práci). *Každý souvislý cirkulant (s alespoň třemi vrcholy) má Hamiltonovskou kružnici.*

Fakt 2 (Věta 3.7 [15] na straně 9 v práci). *Počet komponent cirkulantu* $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *je roven* $\gcd(n, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Fakt 3. *Buď* $C_n(s, \ell)$ *cirkulant takový, že* s *je sudé a* ℓ *liché číslo. Potom* $C_n(s, \ell)$ *obsahuje lichou kružnici.*

Pro důkaz Faktu 3 je možno nahlédnout, že $\frac{\mathrm{lcm}(s,\ell)}{s} + \frac{\mathrm{lcm}(s,\ell)}{\ell}$ je liché číslo, a zdůvodnit, že graf obsahuje lichou kružnici této nebo kratší délky.

K důkazu zpětné implikace můžete použít následující fakt.

Fakt 4. *Úplný bipartitní graf* $K_{n,n}$ *lze zapsat jako cirkulant* $C_{2n}(1, 3, \ldots, 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)$ *a bipartitnost se zachovává při odebírání hran.*