Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

S-pakovací barvení cirkulačních grafů

Plzeň 2022 Petra Melicharová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 23. května 2022

Petra Melicharová

Abstrakt

Tato práce je zaměřena na S-pakovací barvení. Nechť $S = (a_1, a_2, \dots)$ je neklesající posloupnost přirozených čísel. Funkci, která přiřazuje vrcholům grafu G barvy reprezentované přirozenými čísly tak, že vrcholy obarvené barvou i musí být ve vzdálenosti větší než a_i, nazveme S-pakovacím barvením grafu G. Nejmenší přirozené číslo k, pro které existuje S-pakovací barvení grafu G pomocí k barev, nazveme S-pakovacím chromatickým číslem a značíme jej $\chi_S(G)$.

Tato práce je rozdělena na dvě části. První část zpracovává vybrané známé výsledky v oblasti S-pakovacího barvení. Druhá část této práce je pak zaměřena na vlastní výzkum v oblasti S-pakovacího barvení kubických cirkulantů pomocí sekvencí S ve tvaru $(1, 1, 2, 2, 2, \dots)$, $(1, 2, 2, 2, \dots)$ a $(2, 2, 2, \dots)$. Kubickým cirkulantem přitom míníme graf $G = C_{2t}(1, t)$, kde $V(G) = \{1, \dots, 2t\}$ a $H(G) = \{\{i, i + 1\}, i = 1, \dots, 2t - 1\} \cup \{\{1, 2t\}\} \cup \{\{i, i + t\}, i = 1, \dots, t\}$.

Klíčová slova

cirkulant, S-pakovací barvení, vrcholové barvení

Abstract

This thesis is focused on an S-packing colorings of graphs. Let $S = (a_1, a_2, \dots)$ be a non-decreasing sequence of positive integers. A mapping which assigns colors represented by positive integers to vertices of a graph G such that vertices with color i have mutual distance greater than a_i is called an S-packing coloring of the graph G. The smallest integer k such that there exists an S-packing coloring of G using k colors is called the S-packing chromatic number and is denoted by $\chi_S(G)$.

This thesis is divided into two parts. The first part sumarizes some known results on the S-packing colorings. The second part of this thesis is focused on own research on the S-packing coloring of cubic circulant graphs using sequences $S = (1, 1, 2, 2, 2, \dots)$, $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$ and $S = (2, 2, 2, \dots)$. By a cubic circulant graph we mean the graph $G = C_{2t}(1, t)$ with $V(G) = \{1, \dots, 2t\}$ and $H(G) = \{\{i, i+1\}, i = 1, \dots, 2t-1\} \cup \{\{1, 2t\}\} \cup \{\{i, i+t\}, i = 1, \dots, t\}$.

Key words

circulant graph, S-packing coloring, vertex coloring

Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala Doc. RNDr. Přemyslu Holubovi, Ph.D za jeho vstřícnost, trpělivost a cenné rady při vypracovávání mé bakalářské práce a za veškerý čas, který mi ochotně věnoval.

Obsah

1 Úvod

Celá tato práce je věnována S-pakovacímu barvení. Tento pojem byl formálně představen v roce 2012 v článku [16], jehož autory jsou Goddard a Xu. Mějme neklesající sekvenci $S = (a_1, a_2, \dots)$, kde a_i jsou přirozená čísla. S-pakovacím barvením grafu G nazveme funkci, která přiřazuje vrcholům grafu G barvy reprezentované přirozenými čísly tak, že vrcholy obarvené barvou i musí být ve vzdálenosti alespoň $a_i + 1$. Nejmenší přirozené číslo k takové, že existuje S-pakovací barvení grafu G pomocí k barev, nazveme S-pakovacím chromatickým číslem a značíme jej $\chi_S(G)$. Poznamenejme, že pomocí S-pakovacího barvení lze popsat některá již dříve definovaná barvení, jako například d-distanční, pakovací či přípustné vrcholové barvení. Tato tři zmíněná obarvení budou pro úplnost definována v kapitole 3.

Tato práce je rozdělena na dvě části. První část zpracovává vybrané známé výsledky v oblasti S-pakovacího barvení. Zaměříme se zde tak na některé základní poznatky, které v roce 2012 uvedli výše zmínění Goddard a Xu [16]. Dále zde uvedeme výsledky S-pakovacího barvení subkubických grafů a podrozdělení grafů, nekonečných cest a některých sítí, distančních grafů a cirkulantů.

Poslední zmíněné grafy, cirkulanty, budou předmětem druhé části této práce, která obsahuje vlastní výsledky. Mějme přirozené číslo n a množinu $D = \{t_1, \dots, t_k\}$, kde t_i jsou přirozená čísla taková, že pro všechna i platí $t_i < n$. Cirkulantem nazveme neorientovaný graf s množinou vrcholů $\{1, 2, \dots, n\}$ a množinou hran $\{\{x, y\} : |x-y| \equiv t_i \pmod{n}, i = 1, \dots, k\}$ a značíme jej $C_n(t_1, \dots, t_k)$. My se zaměříme na speciální třídu cirkulantů $C_n(t_1, t_2)$, kde navíc $t_1 = 1$, $t_2 > 1$ a $n = 2t$, přičemž cílem této práce je určit hodnoty S-pakovacích chromatických čísel pro sekvence S ve tvaru $(1, 1, 2, 2, 2, \dots)$, $(1, 2, 2, 2, \dots)$ a $(2, 2, 2, \dots)$.

2 Definice základních pojmů

V rámci této kapitoly uvedeme některé pojmy a značení z teorie grafů, které budeme následně v této práci používat. Většina zde uvedených definic je převzata ze skript [8]. Pro úplnost začněme definicí neorientovaného grafu.

Definice 2.1. Mějme konečnou množinu V. *Neorientovaným grafem G* rozumíme dvojici $(V(G), H(G))$, kde $H(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$. Prvky množiny $V(G)$ nazýváme *vrcholy* a prvky množiny $H(G)$ *hrany* (neorientované).

Dva vrcholy grafu G spojené hranou nazýváme *sousední*. Celá tato práce je zaměřena pouze na neorientované grafy. Pojmem graf tak budeme vždy myslet neorientovaný graf. Dále, *řádem grafu G* označujeme počet vrcholů tohoto grafu a značíme jej n. Následuje definice podgrafu.

Definice 2.2. Mějme grafy G_1, G_2. Řekneme, že G_2 je *podgrafem* grafu G_1, jestliže $V(G_2) \subseteq V(G_1)$ a zároveň $H(G_2) \subseteq H(G_1)$. Píšeme $G_2 \subseteq G_1$.

V rámci kapitoly 5 zmiňujeme v některých důkazech izomorfní grafy. Definujme proto i tento pojem.

Definice 2.3. Mějme grafy G_1, G_2. *Izomorfismem grafů* G_1 a G_2 rozumíme bijekci $f : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$, pro kterou platí, že $\{x, y\} \in H(G_1)$ právě tehdy, když $\{f(x), f(y)\} \in H(G_2)$. Grafy G_1 a G_2 pak nazýváme *izomorfní* a píšeme $G_1 \cong G_2$.

Dále definujme grafy typu cesta a kružnice. Tyto pojmy následně využijeme i pro některé další definice.

Definice 2.4. Mějme $n \in \mathbb{N}$. Graf $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{\{i, i+1\}, i = 1, \ldots, n-1\})$ nazveme *cestou délky* $n-1$ a píšeme $G = P_n$.

Definice 2.5. Mějme $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Graf $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{\{i, i+1\}, i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{n, 1\}\})$ nazveme *kružnicí délky* n a píšeme $G = C_n$.

Dodejme, že délkou cesty či kružnice rozumíme počet hran této cesty či kružnice. Následující pojem cesta v grafu je klíčový pro souvislost grafu, jejíž definice následuje.

Definice 2.6. *Cestou v grafu G* mezi vrcholy x a y nazveme sekvenci vrcholů $x = x_1, x_2, \ldots, x_k = y, k \in \mathbb{N}$ takovou, že $x_i \in V(G), i = 1, \ldots, k$, a $\{x_i, x_{i+1}\} \in H(G), i = 1, \ldots, k-1$, přičemž vrcholy cesty se nesmí opakovat. *Kružnicí v grafu G* obsahující vrchol x nazveme sekvenci vrcholů $x = x_1, x_2, \ldots, x_k = x, k \in \mathbb{N}$ takovou, že $x_i \in V(G), i = 1, \ldots, k$ a $\{x_i, x_{i+1}\} \in H(G), i = 1, \ldots, k-1$, přičemž vrcholy kružnice se nesmí opakovat s výjimkou $x_1 = x_k$.

Definice 2.7. Řekneme, že graf G je *souvislý*, jestliže pro každé $x, y \in V(G)$ existuje cesta mezi x a y v grafu G.

Maximální souvislé podgrafy grafu G pak nazveme *komponentami* tohoto grafu. V rámci jednotlivých komponent je pak možné určit vzdálenosti mezi vrcholy.

Definice 2.8. Mějme graf G. *Vzdáleností vrcholů* $x, y \in V(G)$ rozumíme délku nejkratší cesty mezi x a y v grafu G a značíme ji $\mathrm{dist}_G(x, y)$.

Definujme nyní průměr grafu. Pro definici tohoto pojmu je klíčová právě výše uvedená vzdálenost vrcholů v grafu.

Definice 2.9. *Průměrem grafu* G rozumíme maximální vzdálenost dvou vrcholů v grafu G a značíme jej $\mathrm{diam}(G)$.

Poznamenejme, že pokud graf G není souvislý, píšeme $\mathrm{diam}(G) = \infty$. Dále definujme pojem obvod grafu.

Definice 2.10. Mějme graf G. *Obvodem grafu* rozumíme délku nejkratší kružnice v G.

Opět, pokud G neobsahuje kružnici, řekneme, že má nekonečný obvod. Následuje definice stupně vrcholu.

Definice 2.11. Mějme graf G a $x \in V(G)$. Číslo

$$d_G(x) = |\{y \in V(G) : \{x, y\} \in H(G)\}|$$

nazveme *stupeň vrcholu* x v grafu G.

Minimálním stupněm grafu G rozumíme $\min_{x \in V(G)}\{d_G(x)\}$ a značíme jej $\delta(G)$. Analogicky, *maximální stupeň* grafu G představuje $\max_{x \in V(G)}\{d_G(x)\}$ a značíme jej $\Delta(G)$.

Zaměřme se nyní na některé konkrétní třídy grafů. Začněme kubickými a subkubickými grafy, pro jejichž definici využijeme právě stupně vrcholů.

Definice 2.12. Graf G nazveme *kubický*, jestliže $\forall x \in V(G) : d_G(x) = 3$.

Definice 2.13. Graf G nazveme *subkubický*, jestliže $\forall x \in V(G) : d_G(x) \leq 3$.

Platí tedy, že každý kubický graf je zároveň subkubickým grafem. Dalším typem grafů, na které budeme v této práci odkazovat, jsou rovinné grafy.

Definice 2.14. Graf G nazveme *rovinným*, jestliže existuje jeho nakreslení do roviny takové, že se žádné hrany nekříží.

U rovinných grafů můžeme navíc definovat tzv. *stěnu*. Jde o část roviny ohraničenou hranami tohoto grafu. Následuje definice úplných grafů.

Definice 2.15. Mějme $n \in \mathbb{N}$. Graf $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{2})$ nazveme *úplným grafem* a píšeme $G = K_n$.

V následujících kapitolách budeme často využívat tzv. bipartitnost grafu. Definujme proto i tento pojem.

Definice 2.16. Mějme dvě množiny vrcholů V_1, V_2. Neorientovaný graf G s množinou vrcholů $V(G) = V_1 \cup V_2$ a množinou hran takovou, že pro každou hranu $\{x, y\}$ platí, že $x \in V_1$ a $y \in V_2$ či naopak, nazveme *bipartitní graf.*

S využitím výše uvedených pojmů definujme nyní třídu úplných bipartitních grafů.

Definice 2.17. Mějme dvě množiny vrcholů V_1, V_2. *Úplným bipartitním grafem* rozumíme takový bipartitní graf G, do kterého již nelze přidat žádnou hranu. Pokud navíc $|V_1| = m$ a $|V_2| = n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, píšeme $G = K_{m,n}$.

Pro některé hodnoty m, n navíc existuje speciální pojmenování těchto grafů. Například pro $K_{1,n}$, kde n je libovolné přirozené číslo, dostáváme tzv. *hvězdu.* Posledním pojmem z teorie grafů, který uvedeme v této kapitole, je kolo.

Definice 2.18. Mějme kružnici C_{n-1}, kde $n \in \mathbb{N}$. Graf G vzniklý z této kružnice přidáním jednoho vrcholu a všech možných hran tento vrchol obsahující nazveme *kolo* a píšeme $G = W_n$.

Na závěr této kapitoly ještě zmiňme pár značení netýkající se striktně teorie grafů. Největší společný dělitel čísel a, b zde bude značen jako $\gcd(a, b)$, z anglického greatest common divisor. Dále výraz $a \mid b$, popřípadě $a \nmid b$, znamená a dělí b, popřípadě a nedělí b.

3 Vybrané typy barvení

V této kapitole se zaměříme na definice čtyř vybraných typů vrcholového barvení. Konkrétně se jedná o S-pakovací barvení, přípustné vrcholové barvení, d-distanční barvení a pakovací barvení.

Nejprve definujme barvení S-pakovací, které je předmětem této práce. Tento pojem byl poprvé zmíněn v roce 2008 [15] a následně jej formálně představili v roce 2012 Goddard a Xu [16].

Definice 3.1. Nechť G je graf a $S = (a_1, a_2, \dots)$ je neklesající sekvence přirozených čísel. Funkci $f : V(G) \longrightarrow \mathbb{N}$ takovou, že platí

$$\forall x, y \in V(G) : f(x) = f(y) = i \Rightarrow \mathrm{dist}_G(x, y) > a_i, i \in \mathbb{N},$$

nazveme *S-pakovacím barvením* grafu G. Nejmenší přirozené číslo k, pro které existuje S-pakovací barvení grafu G pomocí barev $1, \dots, k$, nazveme *S-pakovacím chromatickým číslem* grafu G a značíme jej $\chi_S(G)$.

Existuje-li S-pakovací barvení grafu G pro danou sekvenci S, řekneme, že graf G je S-obarvitelný. Naopak, pokud pro danou sekvenci S neexistuje k takové, že graf G lze obarvit pomocí k barev, píšeme $\chi_S(G) = \infty$. Dále barvou typu i budeme označovat barvu takovou, že každé dva vrcholy obarvené touto barvou musí být ve vzdálenosti větší než a_i.

Dodejme ještě, že Goddard a Xu se ve svém článku [16] zaměřili na S-pakovací chromatické číslo nekonečné cesty a složitost S-pakovacího barvení grafů pomocí tří barev. První ze zmíněných problematik bude věnována podkapitola níže.

Nyní se zaměříme na zbylé tři typy barvení, na které budeme místy odkazovat v následující kapitole. Jako první definujme přípustné vrcholové barvení, které je intenzivně zkoumáno více než 100 let.

Definice 3.2. Nechť G je graf. Funkci $f : V(G) \longrightarrow \mathbb{N}$ takovou, že platí

$$\forall x, y \in V(G) : f(x) = f(y) \Rightarrow \{x, y\} \notin H(G),$$

nazveme *přípustným vrcholovým barvením* grafu G. Nejmenší přirozené číslo k, pro které existuje přípustné vrcholové barvení grafu G pomocí barev $1, \dots, k$, nazveme *chromatickým číslem* grafu G a značíme jej $\chi(G)$.

Jak plyne z výše uvedené definice, v případě přípustného vrcholového barvení žádné dva sousední vrcholy grafu nelze obarvit stejnou barvou. Poznamenejme ještě, že přípustné vrcholové barvení lze chápat jako speciální případ barvení S-pakovacího, kdy $a_i = 1$ pro všechna i.

Dále definujme pojem d-distančního barvení. Tento typ barvení poprvé uvedli v roce 1969 F. Kramer a H. Kramer [22, 23].

Definice 3.3. Nechť G je graf a $d \in \mathbb{N}$. Funkci $f : V(G) \longrightarrow \mathbb{N}$ takovou, že platí

$$\forall x, y \in V(G) : f(x) = f(y) \Rightarrow \operatorname{dist}_G(x, y) > d,$$

nazveme *d-distančním barvením* grafu G. Nejmenší přirozené číslo k, pro které existuje d-distanční barvení grafu G pomocí barev $1, \ldots, k$, nazveme *d-distančním chromatickým číslem* grafu G a značíme jej $\chi_d(G)$.

Také d-distančí barvení lze chápat jako speciální případ barvení S-pakovacího, kdy tentokrát $a_i = d$ pro všechna i.

Poslední definice této kapitoly se týká pakovacího barvení.

Definice 3.4. Nechť G je graf a $i \in \mathbb{N}$. Funkci $f : V(G) \longrightarrow \mathbb{N}$ takovou, že platí

$$\forall x, y \in V(G) : f(x) = f(y) = i \Rightarrow \operatorname{dist}_G(x, y) > i,$$

nazveme *pakovacím barvením* grafu G. Nejmenší přirozené číslo k, pro které existuje pakovací barvení grafu G pomocí barev $1, \ldots, k$, nazveme *pakovacím chromatickým číslem* grafu G a značíme jej $\chi_\rho(G)$.

Koncept pakovacího chromatického čísla byl poprvé uveden v roce 2008 [15], ovšem pod pojmem vysílací (broadcast) chromatické číslo. Název vycházel z problematiky přidělování vysílacích frekvencí rozhlasovým stanicím, kterou bylo toto barvení inspirováno. Opět, pokud u S-pakovacího barvení položíme $a_i = i$ pro všechna i, obdržíme barvení pakovací. S-pakovací barvení tak zobecňuje zbylé tři uvedené typy barvení, a proto v následujících kapitolách budeme ke všem typům barvením přistupovat jako k barvení S-pakovacímu.

4 Zpracování vybraných známých výsledků v oblasti S-pakovacího barvení

Tato kapitola je věnována vybraným známým výsledkům v oblasti S-pakovacího barvení. Připomeňme, že $S = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ představuje neklesající posloupnost přirozených čísel $a_i, i \in \mathbb{N}$. S-pakovacím barvením potom rozumíme funkci, která přiřazuje množině vrcholů grafu G barvy reprezentované přirozenými čísly tak, že vrcholy s barvou i musí být ve vzdálenosti větší než a_i. Nejmenší přirozené číslo k, pro které existuje S-pakovací barvení grafu G pomocí barev $1, \dots, k$, nazveme S-pakovacím chromatickým číslem grafu G a píšeme $\chi_S(G) = k$.

V této kapitole jsou nejprve uvedeny základní poznatky v oblasti S-pakovacího barvení. Následně se zaměříme i na S-pakovací barvení specifičtějších tříd grafů, jako jsou subkubické grafy a podrozdělení grafů, nekonečné cesty a sítě, distanční grafy a na závěr cirkulanty.

4.1 Základní poznatky

Na začátku této podkapitoly uvedeme tři zřejmá pozorování.

Pozorování 4.1 [16]. *Nechť G je graf, $S_a = (a_1, a_2, \dots)$ a $S_b = (b_1, b_2, \dots)$. Je-li $\chi_{S_a}(G) = k$ a $b_i \leq a_i$ pro $i = 1, \dots, k$, potom $\chi_{S_b}(G) \leq k$.*

Pozorování 4.2 [16]. *Nechť G_2 je podgraf grafu G_1. Potom $\chi_S(G_2) \leq \chi_S(G_1)$ pro libovolnou sekvenci S.*

Platnost tohoto pozorování lze velmi snadno ověřit: vzdálenost libovolných dvou vrcholů v grafu G_2 je vždy větší nebo rovna jejich vzdálenosti v původním grafu G_1. Tudíž, libovolné S-pakovací barvení grafu G_1 je zároveň S-pakovacím barvením grafu G_2 a spodní hranici $\chi_S(G_1)$ lze tak odhadnout S-pakovacím chromatickým číslem jeho libovolného podgrafu G_2.

Pozorování 4.3 [16]. *Nechť G je konečný graf řádu n a $S = (a_1, a_2, \dots)$. Potom*

(1) $1 \leq \chi_S(G) \leq n$,

(2) $\chi_S(G) = 1$ *právě tehdy, když G nemá žádné hrany,*

(3) $\chi_S(G) = n$ *právě tehdy, když G je souvislý a $a_1 \geq \operatorname{diam}(G)$.*

Jak plyne z výše uvedeného pozorování, pro libovolný graf G řádu n představuje 1 triviální dolní mez S-pakovacího chromatického čísla a n jeho triviální horní mez.

Nicméně většina grafů má výrazně nižší S-pakovací chromatické číslo než n. Rovnost nastává například u úplných grafů K_n, a to nezávisle na tvaru sekvence S.

V rámci shrnutí základních poznatků zde dále zmíníme výsledky pro úplné bipartitní grafy a kola. Jejich přesné hodnoty S-pakovacích chromatických čísel pro všechny možné sekvence S dokázali Goddard a Xu [16].

Tvrzení 4.4 [16]. *Nechť $K_{m,n}$ je úplný bipartitní graf, $m \leq n$ a $S = (a_1, a_2, \ldots)$. Potom*

$$\chi_S(K_{m,n}) = \begin{cases} 2, & \text{je-li } a_1 = a_2 = 1, \\ m+1, & \text{je-li } a_1 = 1 < a_2, \\ m+n, & \text{je-li } a_1 > 1. \end{cases}$$

Tvrzení 4.5 [16]. *Nechť W_n je kolo a $S = (a_1, a_2, \ldots)$. Potom*

$$\chi_S(W_n) = \begin{cases} 3, & \text{je-li } a_1 = a_2 = 1 \text{ a } n \text{ je liché}, \\ 4, & \text{je-li } a_1 = a_2 = 1 \text{ a } n \text{ je sudé}, \\ \lfloor n/2 \rfloor + 2, & \text{je-li } a_1 = 1 < a_2, \\ n, & \text{je-li } a_1 > 1. \end{cases}$$

Výše zmínění Goddard a Xu [16] také charakterizovali grafy s S-pakovacím chromatickým číslem 2.

Tvrzení 4.6 [16]. *Nechť G je souvislý graf a $S = (a_1, a_2, \ldots)$.*

(1) Je-li $a_1 = a_2 = 1$, potom $\chi_S(G) = 2$ právě tehdy, když G je bipartitní.

(2) Je-li $a_1 = 1 < a_2$, potom $\chi_S(G) = 2$ právě tehdy, když G je hvězda.

(3) Je-li $a_1 > 1$, potom $\chi_S(G) = 2$ právě tehdy, když G je K_2.

Uvažujme nyní sekvenci S ve tvaru $S = (1, 1, 1, \ldots)$. Jedná se tedy o přípustné vrcholové barvení, které lze chápat jako speciální případ barvení S-pakovacího, jak je uvedeno v kapitole 3. Následující věta udává horní mez S-pakovacího chromatického čísla pro grafy, jejichž žádná komponenta nepředstavuje úplný graf. Dodejme, že tuto horní mez stanovil Brooks v roce 1941 [7].

Věta 4.7 [7]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta(G) > 2$ takový, že žádná jeho komponenta není úplným grafem řádu $\Delta(G)$, a nechť $S = (1, 1, 1, \ldots)$. Potom $\chi_S(G) \leq \Delta(G) - 1$.*

Poslední věta této podkapitoly charakterizuje grafy s S-pakovacím chromatickým číslem $d + 1, d \in \mathbb{N}$, pro sekvenci $S = (d, d, d, \ldots)$. Poznamenejme, že v tomto případě jde o d-distanční barvení.

Věta 4.8 [24]. *Nechť G je graf řádu n a $S = (d, d, d, \ldots)$. Potom $\chi_S(G) = d+1$ právě tehdy, když G splňuje jednu z následujích možností:*

(1) $n = d + 1$,

(2) G je cesta délky větší než $d + 1$,

(3) G je kružnice, jejíž délka je násobkem čísla $d + 1$.

4.2 S-pakovací barvení subkubických grafů a podrozdělení grafů

V této podkapitole se zaměříme na S-pakovací barvení subkubických grafů a podrozdělení grafů. Definujme proto nejprve pojem podrozdělení grafu.

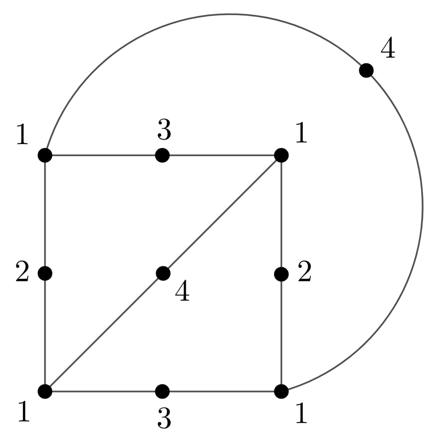
Definice 4.9. Nechť G je graf. *Podrozdělením* grafu G rozumíme graf vzniklý z G nahrazením každé jeho hrany cestou délky dva a značíme jej $S(G)$.

Zaměřme se nejprve na sekvence S ve tvaru $S = (1, d, d, d, \dots)$, kde $d \in \{2, 3\}$. Gastineau a Togni [14] dokázali následující tvrzení.

Tvrzení 4.10 [14]. *Nechť* G *je graf a* $S = (a_1, \dots, a_k)$. *Je-li* G S*-obarvitelný, potom podrozdělení* $S(G)$ *grafu* G *je* $(1, 2a_1 + 1, \dots, 2a_k + 1)$*-obarvitelné.*

Důsledek 4.11 [14]. *Podrozdělení* $S(G)$ *libovolného subkubického grafu* G *je* $(1, 3, 3, 3)$*-obarvitelné.*

Tento důsledek vyplývá přímo z tvrzení 4.10 a Brooksovy věty 4.7. Z té dostáváme, že každý subkubický graf, vyjma K_4, je $(1, 1, 1)$-obarvitelný. Tudíž, aplikací tvrzení 4.10, $S(G)$ je $(1, 3, 3, 3)$-obarvitelné pro všechny subkubické grafy G různé od K_4. Zbývá tak definovat $(1, 3, 3, 3)$-obarvení grafu $S(K_4)$, které je znázorněno na obrázku 4.1 níže.



Obrázek 4.1: $(1, 3, 3, 3)$-obarvení grafu $S(K_4)$

Gastineau a Togni [14] dále určili obecnou horní mez S-pakovacího chromatického čísla subkubických grafů pro $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$.

Věta 4.12 [14]. *Každý subkubický graf je* $(1,2,2,2,2,2,2)$*-obarvitelný.*

Následující věta uvádí, že pokud je subkubický graf tzv. 3-iregulární, lze tento výsledek ještě zlepšit. Definujme však nejprve obecně d-iregulární graf.

Definice 4.13. Nechť G je graf a $d \in \mathbb{N}$. Řekneme, že G je *d-iregulární*, jestliže neobsahuje žádné sousední vrcholy stupně d.

Věta 4.14 [14]. *Každý 3-iregulární subkubický graf je* $(1,2,2,2)$*-obarvitelný.*

V rámci analýzy sekvencí $S = (1,d,d,d,\dots), d \in \{2,3\}$, zde uveďme další známé výsledky pro podrozdělení grafů. Poznamenejme, že podrozdělení libovolného subkubického grafu je vždy 3-iregulární.

Tvrzení 4.15 [14]. *Nechť G je graf a $\delta(G) \geq 3$. Je-li podrozdělení $S(G)$ grafu G* $(1,2,2)$*-obarvitelné, potom G je bipartitní.*

Důsledek 4.16 [14]. *Nechť G je graf a $S(G)$ jeho podrozdělení. Je-li $\delta(G) \geq 3$, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(1) $S(G)$ je $(1,2,2)$*-obarvitelný.*

(2) $S(G)$ je $(1,2,3)$*-obarvitelný.*

(3) $S(G)$ je $(1,3,3)$*-obarvitelný.*

(4) G je bipartitní.

Výše uvedený důsledek lze snadno dokázat. Je-li G je bipartitní, tedy je $(1,1)$-obarvitelný, potom aplikací tvrzení 4.10 obdržíme $(1,3,3)$-obarvitelnost $S(G)$. Dále, je-li $S(G)$ $(1,3,3)$-obarvitelné, potom je také $(1,2,3)$-obarvitelné a $(1,2,2)$-obarvitelné, jak plyne z pozorování 4.1 uvedeného v kapitole Základní poznatky. Na závěr, je-li $S(G)$ $(1,2,2)$-obarvitelné, pak z tvrzení 4.15 dostáváme, že G je bipartitní.

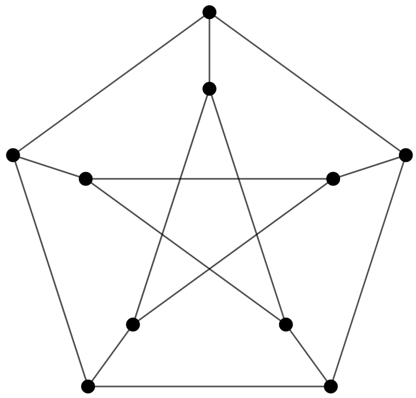
Gastineau a Togni [14] se dále věnovali sekvencím S ve tvaru $S = (1,1,2,2,2,\dots)$. Níže uvedená věta formuluje obecnou horní mez S-pakovacího chromatického čísla subkubických grafů pro tento typ sekvence S.

Věta 4.17 [14]. *Každý subkubický graf je* $(1,1,2,2,2)$*-obarvitelný.*

Jak ovšem udávají hned následující věty 4.18 a 4.19, omezíme-li se na ještě specifičtější třídy grafů, lze tento výsledek opět zlepšit.

Věta 4.18 [25]. *Každý rovinný subkubický graf s obvodem alespoň* 8 *je* $(1,1,2,2)$*-obarvitelný.*

Věta 4.19 [14]. *Každý 3-iregulární subkubický graf je* $(1,1,2)$*-obarvitelný.*



Obrázek 4.2: Petersenův graf

Další tvrzení této podkapitoly se zabývá $(1, 1, a_3, a_4)$-obarvitelností níže zobrazeného Petersenova grafu (obrázek 4.2). Jedná se o kubický graf na 10 vrcholech disponující mnoha neobvyklými vlastnostmi, kvůli kterým je často využíván jako protipříklad různých hypotéz.

Tvrzení 4.20 [14]. *Petersenův graf není* $(1, 1, a_3, a_4)$*-obarvitelný pro žádné* $a_3, a_4 \geq 2$

Dosavadní experimenty navíc naznačují, že Petersenův graf je pravděpodobně jediným subkubickým grafem, který není $(1, 1, 2, 3)$-obarvitelný.

Uvažujme nyní sekvenci S ve tvaru $(2, 2, 2, \dots)$. Borodin a Ivanova [4] stanovili minimální obvod rovinného subkubického grafu, pro který lze tento graf obarvit využitím pouze 4 barev typu 2.

Věta 4.21 [4]. *Každý rovinný subkubický graf s obvodem alespoň* 23 *je* $(2, 2, 2, 2)$*-obarvitelný.*

Závěrem této podkapitoly věnujme pozornost sekvencím S ve tvaru $(1, 2, 3, \dots)$. Poznamenejme, že S v tomto tvaru představuje pakovací barvení. Balogh, Kostochka a Liu [1] dokázali, že příslušné S-pakovací chromatické číslo není u kubických grafů omezeno.

Věta 4.22 [1]. *Pro každé pevné* $k \in \mathbb{N}, k \geq 12, g \geq 2k + 2$ *a* $S = (1, 2, 3, \dots)$ *platí, že skoro každý kubický graf* G *s obvodem alespoň* g *má* $\chi_S(G) > k$.

Poslední dvě tvrzení této podkapitoly udávají hodnotu S-pakovacího chromatického čísla pro podrozdělení úplných a bipartitních grafů. Stále uvažujeme $S = (1, 2, 3, \dots)$.

Tvrzení 4.23 [6]. *Nechť* K_n *je úplný graf,* $S(K_n)$ *jeho podrozdělení,* $n \geq 3$ *a* $S = (1, 2, 3, \dots)$*. Potom* $\chi_S(S(K_n)) = n + 1$.

Tvrzení 4.24 [15]. *Nechť* G *je souvislý bipartitní graf řádu* $n, n \geq 3$*,* $S(G)$ *jeho podrozdělení a* $S = (1, 2, 3, \dots)$*. Potom* $\chi_S(S(G)) = 3$.

4.3 S-pakovací barvení nekonečné cesty

V rámci přehledu známých výsledků v oblasti S-pakovací barvení se dále zaměříme na nekonečné cesty. Začněme opět s definicí tohoto pojmu.

Definice 4.25. Neorientovaný graf G s množinou vrcholů $V(G) = \mathbb{Z}$ a množinou hran $H(G) = \{\{i, i+1\}, i \in \mathbb{Z}\}$ nazveme *nekonečnou cestou* a píšeme $G = P_\infty$.

Problematikou S-pakovacího barvení nekonečné cesty se zabývali i výše zmínění Goddard a Xu [16]. Ti se nejprve zaměřili na sekvence S, pro které jsou výsledná S-pakovací chromatická čísla malá. Nejdříve charakterizovali sekvence S, pro které je příslušné S-pakovací chromatické číslo rovno 2. Následující pozorování vyplývá z tvrzení 4.6 uvedeného výše v podkapitole Základní poznatky.

Pozorování 4.26 [16]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta a $S = (a_1, a_2, \dots)$. Potom $\chi_S(P_\infty) = 2$ právě tehdy, když $a_1 = a_2 = 1$.*

Dále uvedli tvar sekvencí S, které vedou na S-pakovací chromatické číslo rovno 3.

Tvrzení 4.27 [16]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta a $S = (a_1, a_2, \dots)$. Potom $\chi_S(P_\infty) = 3$ právě tehdy, když sekvence $S = (1, 2, 3)$, $S = (1, 3, 3)$ nebo $S = (2, 2, 2)$.*

Poznamenejme, že v případě sekvence $S = (1, 2, 3)$ se jedná o pakovací barvení.

Uvažujme nyní sekvence S ve tvaru aritmetické posloupnosti. Tedy $a_i = a_1 + (i - 1)d, d \in \mathbb{N}$.

Tvrzení 4.28 [16]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta a $S = (2, 3, 4, \dots)$. Potom $\chi_S(P_\infty) = 6$.*

Dodejme, že k důkazu dvou výše uvedených tvrzení 4.27 a 4.28 Goddard a Xu [16] využili tzv. periodické barvení. Periodickým barvením rozumíme takové barvení, kde existuje $p \in \mathbb{Z}$ takové, že vrchol x obarven stejnou barvou jako vrchol $x + p$ pro všechny $x \in V(P_\infty)$. Takovéto obarvení lze výhodně zapsat pomocí opakujícího se vzoru uvedeného v hranatých závorkách. Například vzor $[1, 2, 3, 4]$ značí periodické obarvení $\dots, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, \dots$. Tedy $p = 2$.

Konkrétně v důkazu tvrzení 4.27 Goddard a Xu [16] realizovali $(2, 2, 2)$-pakovací barvení nekonečné cesty pomocí periodického vzoru $[1, 2, 3]$. Pro sekvence $S = (1, 3, 3)$ a $S = (1, 2, 3)$ pak nekonečnou cestu obarvili využitím periodického vzoru $[1, 2, 1, 3]$.

Tvrzení 4.29 [15]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta, e je Eulerovo číslo a $S = (a, a + 1, a + 2, \dots)$. Potom $(e - 1)a \leq \chi_S(P_\infty) \leq 2a + 3$.*

Tedy pro sekvenci $S = (a, a + 1, a + 2, \dots)$ vyjde příslušné S-pakovací chromatické číslo nekonečné cesty konečné. Jak udává hned následující tvrzení, konečnost tohoto čísla je zajištěna pro všechny sekvence S ve tvaru zcela libovolných aritmetických posloupností.

Tvrzení 4.30 [16]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta a S je aritmetická posloupnost. Potom $\chi_S(P_\infty)$ je konečné.*

Goddard a Xu [16] dále dokázali dolní mez S-pakovacího chromatického čísla nekonečné cesty pro sekvenci S ve tvaru libovolné aritmetické posloupnosti.

Tvrzení 4.31 [16]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta, e je Eulerovo číslo a $S = (a, a + d, a + 2d, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(P_\infty) \geq \begin{cases} (e^d - 1)(a - d + 1)/d, & \textit{je-li } a \geq d, \\ ((a + 1)e^{\frac{d}{1+1/a}} - (a - d + 1))/d, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Pro následující tvrzení uvažujme sekvenci $S = (1, 2, 4, \dots)$. Takto zadaná sekvence je ve tvaru geometrické posloupnosti a lze tedy obecně psát $a_i = a_1 \cdot q^{n-1}, q \in \mathbb{N}$.

Tvrzení 4.32 [16]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta a $S = (1, 2, 4, \dots)$. Potom $\chi_S(P_\infty) = \infty$.*

Poslední tvrzení této podkapitoly udává S-pakovací chromatické číslo nekonečné cesty pro takovou sekvenci S, kde $a_i = 2^i - 1$ pro $i = 1, \dots, k$ a $a_{k+1} = 2^k - 1$. Na rozdíl od předchozí sekvence z tvrzení 4.32 je pro tuto S-pakovací číslo konečné.

Tvrzení 4.33 [16]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta a nechť $S = (a_1, a_2, \dots)$, kde $a_i = 2^i - 1$ pro $i = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N}$ a $a_{k+1} = 2^k - 1$. Potom $\chi_S(P_\infty) = k + 1$.*

Jak je patrné z výše uvedených tvrzení, zlom v konečnosti S-pakovacího chromatického čísla nastává mezi aritmetickou a geometrickou posloupností. Přesná hranice ovšem zatím není známa.

4.4 S-pakovací barvení nekonečných sítí

Tato podkapitola shrnuje výsledky S-pakovacího barvení vybraných typů nekonečných sítí. Konkrétně se zaměříme na čtvercové, trojúhelníkové a šestiúhelníkové sítě, v tomto pořadí. K definici nekonečné čtvercové sítě je využito kartézského součinu grafů. Definujme proto nejprve tento pojem.

Definice 4.34. Nechť G_1 a G_2 jsou grafy. Neorientovaný graf s množinou vrcholů $V(G_1) \times V(G_2)$ a množinou hran takovou, že vrcholy (x_1, x_2) a (y_1, y_2) jsou spojeny hranou právě tehdy, když $x_1 = y_1$ a $\{x_2, y_2\} \in H(G_2)$ nebo $x_2 = y_2$ a $\{x_1, y_1\} \in H(G_1)$, nazveme *kartézským součinem grafů* a značíme jej $G_1 \square G_2$.

Definice 4.35. Mějme nekonečnou cestu P_∞. Kartézský součin $P_\infty \square P_\infty$ nazveme *nekonečnou čtvercovou sítí* a značíme jej $\mathbb{Z}^2$.

Problematikou S-pakovacího chromatického čísla nekonečných sítí se zabývali již mnohokrát zmínění Goddard a Xu [17]. Ti se v rámci studia nekonečné čtvercové sítě zaměřili nejprve na S-pakovací barvení pomocí nejvýše šesti barev.

Tvrzení 4.36 [17]. *Nechť $\mathbb{Z}^2$ je nekonečná čtvercová síť a $S = (a_1, a_2, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(\mathbb{Z}^2) = \begin{cases} 2, & \textit{právě tehdy, když } a_1 = a_2 = 1, \\ 5, & \textit{právě tehdy, když } a_1 = a_5 = 2 \textit{ nebo } a_1 = 1, a_2 \geq 2 \textit{ a } a_5 \leq 3. \end{cases}$$

Dále neexistuje žádná sekvence S taková, že $\chi_S(\mathbb{Z}^2) = 3$ nebo $\chi_S(\mathbb{Z}^2) = 4$.

Poznamenejme, že výše uvedené tvrzení v sobě zahrnuje tvrzení pro $\chi_S(\mathbb{Z}^2) \in \{2, 3, 4\}$ a tvrzení pro $\chi_S(\mathbb{Z}^2) = 5$. Tato tvrzení Goddard a Xu [17] uvedli a dokázali odděleně a zde byla spojena pro přehlednost.

Následující tvrzení charakterizuje sekvence, pro které je S-pakovací chromatické číslo nekonečné čtvercové sítě rovno šesti.

Tvrzení 4.37 [17]. *Nechť $\mathbb{Z}^2$ je nekonečná čtvercová síť a $S = (a_1, a_2, \dots)$. Potom $\chi_S(\mathbb{Z}^2) = 6$ právě tehdy, když $S = (2, 2, 2, 2, 3, 3)$ nebo $S = (1, 2, 2, 2, 4, 4)$.*

Uvažujme nyní sekvence $S = (d, d, d, \dots), d \in \mathbb{N}$. Pro tento typ sekvencí je již zapotřebí použít většího počtu barev. Poznamenejme ještě, že sekvence S v tomto tvaru představují d-distanční barvení.

Tvrzení 4.38 [11]. *Nechť $\mathbb{Z}^2$ je nekonečná čtvercová síť a $S = (d, d, d, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(\mathbb{Z}^2) = \begin{cases} \frac{(d+1)^2}{2}, & \textit{je-li } d \textit{ liché}, \\ \frac{(d^2+2d+2)}{2}, & \textit{je-li } d \textit{ sudé}. \end{cases}$$

Zaměřme se nyní na sekvence S ve tvaru aritmetické posloupnosti. B. Martin, Raimondi, Chen a J. Martin [26] stanovili s využitím SAT-solveru dolní a horní hranici S-pakovacího chromatického čísla nekonečné čtvercové sítě pro $S = (1, 2, 3, \dots)$. Jde tedy o případ pakovacího barvení.

Věta 4.39 [26]. *Nechť $\mathbb{Z}^2$ je nekonečná čtvercová síť a $S = (1, 2, 3, \dots)$. Potom $13 \leq \chi_S(\mathbb{Z}^2) \leq 15$.*

Následující tvrzení dává odpověď na S-pakovací chromatická čísla pro zbylé sekvence S ve tvaru aritmetických posloupností, tedy různých od $(1, 2, 3, \dots)$.

Tvrzení 4.40 [17]. *Nechť $\mathbb{Z}^2$ je nekonečná čtvercová síť a S nekonstantní aritmetická posloupnost různá od $(1, 2, 3, \dots)$. Potom $\chi_S(\mathbb{Z}^2) = \infty$.*

Jak vyplývá z tvrzení 4.40, už pro $S = (2, 3, 4, \dots)$ je příslušné S-pakovací chromatické číslo nekonečné. Goddard a Xu [17] si proto položili otázku, zda přidání určitého počtu barev typu 2 na začátek sekvence $S = (2, 3, 4, \dots)$ může tento výsledek zlepšit. Odpověď nám dává následující tvrzení.

Tvrzení 4.41 [17]. *Nechť* $\mathbb{Z}^2$ *je nekonečná čtvercová síť. Potom*

$$\chi_S(\mathbb{Z}^2) = \begin{cases} \infty, & \textit{je-li } S = (2,2,3,4,5,\dots), \\ 7, & \textit{je-li } S = (2,2,2,2,3,4,5,\dots). \end{cases}$$

Přidání jedné barvy typu 2 k sekvenci $S = (2,3,4,\dots)$ konečnost S-pakovacího chromatického čísla neovlivní. Změna nastává až přidáním tří a více barev tohoto typu. Zda přidání dvou barev typu 2 vede také na konečné S-pakovací chromatické číslo, není zatím známo.

Zaměřme se dále na nekonečnou trojúhelníkovou síť. Uveďme opět nejprve definici tohoto pojmu.

Definice 4.42. Mějme nekonečnou čtvercovou síť $\mathbb{Z}^2$. Graf získaný ze $\mathbb{Z}^2$ přidáním všech hran typu $\{(x,x'),(x+1,x'-1)\}$ nazveme *nekonečnou trojúhelníkovou sítí* a značíme jej T.

Problematikou pakovacího chromatického čísla nekonečné trojúhelníkové sítě se zabývali Finbow a Rall [13]. Jak uvádí následující věta, na rozdíl od čtvercové nekonečné sítě je zde příslušné S-pakovací chromatické číslo nekonečné.

Věta 4.43 [13]. *Nechť* T *je nekonečná trojúhelníková síť a* $S = (1,2,3,\dots)$. *Potom* $\chi_S(T) = \infty$.

Jak vyplývá z výše uvedené věty, pro libovolnou ostře rostoucí sekvenci S je S-pakovací chromatické číslo nekonečné.

Následující věta dává odpověď na hodnotu tohoto čísla v případě d-distančního barvení, tedy pro sekvence $S = (d,d,d,\dots), d \in \mathbb{N}$.

Věta 4.44 [27]. *Nechť* T *je nekonečná trojúhelníková síť a* $S = (d,d,d,\dots)$. *Potom*

$$\chi_S(T) = \begin{cases} (d+1)^2 - (\frac{d+1}{2})^2, & \textit{je-li } d \textit{ liché}, \\ (d+1)^2 - \frac{d}{2}(\frac{d}{2}+1), & \textit{je-li } d \textit{ sudé}. \end{cases}$$

Na závěr této podkapitoly uvedeme vybrané výsledky v oblasti S-pakovacího barvení nekonečné šestiúhelníkové sítě, kdy opět začneme její definicí.

Definice 4.45. Nekonečný rovinný 3-regulární graf takový, že každá jeho stěna je šestiúhelník, nazveme *nekonečnou šestiúhelníkovou sítí* a značíme jej H.

Uvažujme nejprve sekvence S ve tvaru $(d,d,d,\dots), d \in \mathbb{N}$. Tvrzení, jehož autory jsou Jacko a Jendroľ [20], je zde kvůli přehlednosti rozděleno do dvou, pro d liché a d sudé. Dodejme ještě, že pro sekvence tohoto tvaru jde o d-distanční barvení.

Tvrzení 4.46 [20]. *Nechť* H *je nekonečná šestiúhelníková síť,* $S = (d,d,d,\dots)$ *a* d *je liché. Potom* $\chi_S(H) = [\ \frac{3}{8}(d+1)^2]$.

Tvrzení 4.47 [20]. *Nechť H je nekonečná šestiúhelníková síť, $S = (d, d, d, \dots)$ a d je sudé.*

(1) Pokud $d \geq 8$, potom $(\frac{3}{8}d^2 + \frac{3}{4}d + 2) \leq \chi_S(H) \leq \lceil \frac{3}{8}(d + \frac{4}{3})^2 \rceil$.

(2) Pokud $d < 8$, potom

$$\chi_S(H) = \begin{cases} 4, & \text{je-li } d = 2, \\ 11, & \text{je-li } d = 4, \\ 20, & \text{je-li } d = 6. \end{cases}$$

Tak jako u nekonečné čtvercové sítě, i zde se dále zaměříme na sekvence S ve tvaru aritmetické posloupnosti. Uvažujme opět nejprve sekvenci $S = (1, 2, 3, \dots)$.

Věta 4.48 [12, 21]. *Nechť H je nekonečná šestiúhelníková síť a $S = (1, 2, 3, \dots)$. Potom $\chi_S(H) = 7$.*

Poznamenejme, že za důkazem výše uvedené věty stojí dvě skupiny autorů. Nejprve Fiala, Klavžar a Lidický [12] nalezli obarvení nekonečné šestiúhelníkové sítě pomocí pouze 7 barev a stanovili tak horní hranici příslušného S-pakovacího chromatického čísla. Následně Korže a Vesel [21] dokázali, že číslo 7 představuje zároveň i hranici dolní.

Následuje očekávané tvrzení pro zbylé sekvence S tvaru aritmetických posloupností. Toto tvrzení, jehož autory jsou Goddard a Xu [17], je zároveň posledním této podkapitoly.

Tvrzení 4.49 [17]. *Nechť H je nekonečná šestiúhelníková síť a S nekonstantní aritmetická posloupnost různá od $(1, 2, 3, \dots)$. Potom $\chi_S(H) = \infty$.*

4.5 S-pakovací barvení distančních grafů

Předposlední podkapitola týkající se zpracování vybraných známých výsledků v oblasti S-pakovacího barvení je věnována S-pakovacímu barvení distančních grafů. Začněme definicí této třídy grafů.

Definice 4.50. Mějme množinu přirozených čísel $D = \{t_1, \dots, t_k\}$. Neorientovaný graf G s množinou vrcholů $V(G) = \mathbb{Z}$ a množinou hran $H(G) = \{\{x, y\} : |x - y| \in D\}$ se nazývá *distanční graf* a píšeme $G = G(\mathbb{Z}, D)$.

Pro zkrácení zápisu přeznačme $G(\mathbb{Z}, D) = G(\mathbb{Z}, \{t_1, \dots, t_k\})$ jako $G(t_1, \dots, t_k)$. Navíc dále bez újmy na obecnosti uvažujme, že $t_i < t_{i+1}, i = 1, \dots, k - 1$.

Zaměřme se nejprve na distanční grafy $G(t_1, t_2)$. Následující tvrzení je užitečné pro určení pakovacího chromatického čísla nesouvislých distančních grafů. Dodejme, že distanční graf $G(t_1, t_2)$ je souvislý právě tehdy, když čísla t_1 a t_2 jsou nesoudělná, tedy $\gcd(t_1, t_2) = 1$.

Tvrzení 4.51 [10]. *Nechť $G(t_1, t_2)$ je distanční graf, $g = \gcd(t_1, t_2)$ a $S = (1, 2, 3, \dots)$. Potom $\chi_S(G(t_1, t_2)) = \chi_S(G(\frac{t_1}{g}, \frac{t_2}{g}))$.*

Uvažujme nyní distanční grafy $G(t_1, t_2)$ takové, že $t_1 = 2$ a $t_2 > t_1$ je liché. Jak je uvedeno výše, takové distanční grafy jsou souvislé. V rámci shrnutí známých výsledků S-pakovacího barvení takovýchto distančních grafů zmiňme nejprve sekvenci $S = (1, 1, 1, \dots)$. Jde tedy o přípustné vrcholové barvení.

Věta 4.52 [2]. *Nechť $G(2, t_2)$ je distanční graf, $t_2 \geq 3$ je liché a $S = (1, 1, 1, \dots)$. Potom $\chi_S(G(2, t_2)) = 3$.*

Souvislými distančními grafy $G(t_1, t_2)$, kde $t_1 = 2$, se zabývali Brešar, Ferme a Kamenická [5]. Ti nejprve dokázali hodnotu S-pakovacího chromatického čísla této třídy grafů pro sekvenci $S = (1, 1, 2, 2, 2, \dots)$.

Věta 4.53 [5]. *Nechť $G(2, t_2)$ je distanční graf, $t_2 \geq 3$ je liché a $S = (1, 1, 2, 2, 2, \dots)$. Potom $\chi_S(G(2, t_2)) = 4$.*

Následně určili také hodnotu tohoto čísla pro sekvenci $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$. Dodejme, že stále uvažujeme souvislé distanční grafy $G(2, t_2)$. Musí tedy platit, že t_2 je liché.

Věta 4.54 [5]. *Nechť $G(2, t_2)$ je distanční graf, t_2 je liché a $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$.*

(1) Pokud $t_2 > 3$, potom $\chi_S(G(2, t_2)) = 5$.

(2) Pokud $t_2 = 3$, potom $\chi_S(G(2, 3)) = 6$.

Poznamenejme, že výše uvedená věta v sobě zahrnuje věty pro $t_2 = 3$ a $t_2 > 3$, které zde byly spojeny pro přehlednost.

V rámci S-pakovacího barvení souvislých distančních grafů $G(2, t_2)$ se Brešar, Ferme a Kamenická [5] zaměřili i na barvení d-distanční, tedy na sekvence $S = (d, d, d, \dots)$. Následující dvě věty udávají dolní a horní mez příslušného S-pakovacího chromatického čísla.

Věta 4.55 [5]. *Nechť $G(2, t_2)$ je distanční graf, $t_2 \geq 3$ je liché, $S = (d, d, d, \dots)$ a $d \geq \frac{t_2+1}{2}$. Potom $\chi_S(G(2, t_2)) \geq 1 + t_2(d - \frac{t_2-3}{2})$.*

Věta 4.56 [5]. *Nechť $G(2, t_2)$ je distanční graf, $t_2 \geq 3$ je liché a $S = (d, d, d, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(G(2, t_2)) \leq \begin{cases} 1 + d(d+1), & \text{je-li } d \leq \frac{t_2+1}{2}, \\ t_2 d + \frac{1}{4}(-t_2^2 + 2t_2 + 7), & \text{je-li } d > \frac{t_2+1}{2}. \end{cases}$$

Položíme-li navíc $t_2 = 3$, spojením vět 4.55 a 4.56 obdržíme následující důsledek.

Důsledek 4.57 [5]. *Nechť $G(2, 3)$ je distanční graf a $S = (d, d, d, \dots)$. Je-li $d \geq 2$, potom $\chi_S(G(2, 3)) = 3d + 1$.*

Dále zde uveďme některé přesné hodnoty S-pakovacích chromatických čísel, kde S je stále tvaru $(d, d, d, \dots)$.

Věta 4.58 [5]. *Nechť $G(2, t_2)$ je distanční graf, $t_2 \geq 5$ je liché a $S = (d, d, d, \dots)$. Je-li $d \geq t_2 - 3$, potom $\chi_S(G(2, t_2)) = 1 + t_2(d - \frac{t_2-3}{2})$.*

Věta 4.59 [5]. *Nechť $G(2, t_2)$ je distanční graf, t_2 je liché a $S = (2, 2, 2, \dots)$.*

(1) Pokud $t_2 > 3$, potom

$$\chi_S(G(2, t_2)) = \begin{cases} 5, & \textit{je-li } t_2 \equiv 1, 9 \pmod{10}, \\ 6, & \textit{je-li } t_2 \equiv 3, 5, 7 \pmod{10}. \end{cases}$$

(2) Pokud $t_2 = 3$, potom $\chi_S(G(2, 3)) = 7$.

Opusťme nyní distanční grafy $G(2, t_2)$ a položme $t_1 = 1$, přičemž D bude stále dvouprvková množina. Dostáváme tak distanční grafy $G(1, t_2)$. Takovéto grafy jsou díky volbě t_1 vždy souvislé. Pro tuto třídu distančních grafů zde uvedeme nejprve výsledky pro $S = (1, 2, 3, \dots)$, tedy výsledky z oblasti pakovacího barvení.

Následující věta, jejíž autorem je Togni [28], udává horní meze příslušného S-pakovacího chromatického čísla v závislosti na hodnotě t_2.

Tvrzení 4.60 [28]. *Nechť $G(1, t_2)$ je distanční graf a $S = (1, 2, 3, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(G(1, t_2)) \leq \begin{cases} 89, & \textit{je-li } t_2 = 2l + 1, l \geq 35, \\ 40, & \textit{je-li } t_2 = 2l + 1, l \geq 223, \\ 179, & \textit{je-li } t_2 = 2l, l \geq 89, \\ 81, & \textit{je-li } t_2 = 2l, l \geq 224, \\ 29, & \textit{je-li } t_2 = 96l \pm 1, l \geq 1, \\ 59, & \textit{je-li } t_2 = 96l + 1 \pm 1, l \geq 1. \end{cases}$$

Stále uvažujme distanční grafy $G(1, t_2)$. Ekstein, Holub a Lidický [9] určili horní meze S-pakovacího chromatického čísla sekvence $S = (1, 2, 3, \dots)$ pro velká t_2. Klíčem k určení těchto mezí byla vhodná reprezentace distančního grafu $G(1, t_2)$ jako nekonečné spirály s t_2 polopřímkami kolmými na tuto spirálu.

Věta 4.61 [9]. *Nechť $G(1, t_2)$ je distanční graf, $t_2 \geq 575$ je liché a $S = (1, 2, 3, \dots)$. Potom $\chi_S(G(1, t_2)) \leq 35$.*

Věta 4.62 [9]. *Nechť $G(1, t_2)$ je distanční graf, $t_2 \geq 648$ je sudé a $S = (1, 2, 3, \dots)$. Potom $\chi_S(G(1, t_2)) \leq 56$.*

Poznamenejme, že výše uvedené věty 4.61 a 4.62 představují ve skutečnosti jednu, která zde byla rozdělena pro přehlednost.

V rámci distančních grafů $G(1, t_2)$ zde uveďme ještě výsledek pro $S = (2, 2, 2, \dots)$. Taková sekvence S představuje d-distanční barvení, kde $d = 2$.

Věta 4.63 [2]. *Nechť $G(1, t_2)$ je distanční graf, $t_2 \geq 3$ a $S = (2, 2, 2, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(G(1, t_2)) = \begin{cases} 5, & \textit{je-li } t_2 \equiv 2, 3 \pmod 5, \\ 6, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Dodejme, že hodnota S-pakovacího čísla pro distanční graf $G(1, 2)$ bude uvedena níže v rámci tvrzení 4.67.

Dále se zaměříme na souvislé distanční grafy $G(t_1, t_2)$, kde t_1 a t_2 jsou libovolná nesoudělná čísla taková, že $t_1 < t_2$. Následující dvě věty, jejichž autory jsou Ekstein, Holub a Togni [10], udávají horní a dolní meze S-pakovacího chromatického čísla pro $S = (1, 2, 3, \dots)$. Opět se tedy věnujeme pakovacímu barvení.

Věta 4.64 [10]. *Nechť $G(t_1, t_2)$ je distanční graf, t_1, t_2 nesoudělná přirozená čísla a $S = (1, 2, 3, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(G(t_1, t_2)) \leq \begin{cases} 30, & \textit{je-li } t_1 \textit{ liché a } t_2 \geq 825 \textit{ liché,} \\ 56, & \textit{je-li } t_1 \textit{ liché a } t_2 \geq 898 \textit{ sudé,} \\ 56, & \textit{je-li } t_1 \textit{ sudé a } t_2 \geq 923 \textit{ liché.} \end{cases}$$

Věta 4.65 [10]. *Nechť $G(t_1, t_2)$ je souvislý distanční graf, $t_2 \geq 9$ a $S = (1, 2, 3, \dots)$. Potom $\chi_S(G(t_1, t_2)) \geq 12$.*

Poznamejme ještě, že výše uvedená věta 4.64 vznikla spojením tří pro jednotlivé horní meze S-pakovacího chromatického čísla.

Uvažujme nyní zcela obecné distanční grafy $G(t_1, \dots, t_k)$ a sekvenci $S = (1, 1, 1, \dots)$. Sekvence S v tomto tvaru představuje přípustné vrcholové barvení. Barvení distančních grafů pomocí této sekvence S je intenzivně zkoumáno a je zde známo mnoho výsledků. Jejich souhrn lze nalézt například v diplomové práci J. Hofmana [19]. V této práci uvedeme pouze větu udávající obecnou horní mez příslušného S-pakovacího chromatického čísla.

Věta 4.66 [30]. *Pro každou konečnou množinu $D = \{t_1, \dots, t_k\}$ a pro $S = (1, 1, 1, \dots)$ platí, že distanční graf $G(t_1, \dots, t_k)$ má $\chi_S(G(t_1, \dots, t_k)) \leq |D| + 1$.*

Tedy, pokud množina D obsahuje nejvýše 2 prvky, lze díky výše uvedeným výsledkům snadno určit možné hodnoty chromatického čísla distančního grafu $G(D)$. Pro takový distanční graf $G(D)$ je příslušné S-pakovací chromatické číslo rovno 2, pokud $|D| = 1$ nebo pokud jsou t_1, t_2 lichá a graf je tak bipartitní. Pro ostatní případy je toto číslo rovno 3, neboť graf obsahuje kružnici liché délky.

Na závěr této podkapitoly se zaměřme na 2-distanční barvení vybraných tříd distančních grafů ve speciálním tvaru. Poznamenejme, že toto 2-distanční barvení lze opět zobecnit jako barvení S-pakovací pomocí sekvence S ve tvaru $(2, 2, 2, \dots)$. Následující tvrzení udává hodnotu příslušného S-pakovacího chromatického čísla pro distanční grafy $G(1, \dots, k)$. Tedy $t_i = i, i = 1, \dots, k$.

Tvrzení 4.67 [2]. *Nechť $G(1,\ldots,k)$ je distanční graf, $k \geq 2$ a $S = (2,2,2,\ldots)$. Potom*

$$\chi_S(G(1,\ldots,k)) = 2k+1 = \Delta(G(1,\ldots,k)) + 1.$$

Dále uvažujme distanční grafy $G(1, t_2, t_2+1)$, kde $t_2 \geq 3$. Poznamenejme, že případem $t_2 = 2$ se zabývalo tvrzení 4.67. Jak uvádí nadcházející věta, pro $t_2 \equiv 2, 4 \pmod 7$ lze příslušný distanční graf obarvit pomocí 7 barev typu 2.

Věta 4.68 [2]. *Nechť $G(1, t_2, t_2+1)$ je distanční graf, $t_2 \geq 3$ a $S = (2,2,2,\ldots)$. Potom*

$$\chi_S(G(1, t_2, t_2+1)) = 7 = \Delta(G(1, t_2, t_2+1)) + 1$$

právě tehdy, když $t_2 \equiv 2, 4 \pmod 7$.

Následuje věta pro obecnou horní mez S-pakovacího chromatického čísla této třídy grafů. Připomeňme, že stále uvažujeme $S = (2,2,2,\ldots)$.

Věta 4.69 [2]. *Nechť $G(1, t_2, t_2+1)$ je distanční graf, $t_2 \geq 3$ a $S = (2,2,2,\ldots)$. Potom*

$$\chi_S(G(1, t_2, t_2+1)) \leq 9 = \Delta(G(1, t_2, t_2+1)) + 3.$$

Spojením vět 4.68 a 4.69 pak dostáváme výsledné rozmezí tohoto čísla.

Důsledek 4.70 [2]. *Nechť $G(1, t_2, t_2+1)$ je distanční graf, $t_2 \geq 3$, $t_2 \not\equiv 2, 4 \pmod 7$ a $S = (2,2,2,\ldots)$. Potom*

$$8 \leq \chi_S(G(1, t_2, t_2+1)) \leq 9.$$

V rámci analýzy sekvencí $S = (2,2,2,\ldots)$ zde závěrem uveďme známé výsledky pro distanční grafy $G(1,\ldots,l,t_k), l \geq 2, l < t_k$. Tedy $t_i = i, i = 1,\ldots,k-1$. Poznamenejme, že případ $t_k = l+1$ je již zahrnut v tvrzení 4.67.

Věta 4.71 [2]. *Nechť $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$, $G(1,\ldots,l,t_k)$ je distanční graf a $S = (2,2,2,\ldots)$. Potom*

$$\chi_S(G(1,\ldots,l,t_k)) = 2l+3 = \Delta(G(1,\ldots,l,t_k)) + 1$$

právě tehdy, když $t_k \equiv l+1, l+2 \pmod{2l+3}$.

Opět následuje věta udávající obecnou horní mez S-pakovacího chromatického čísla této třídy grafů.

Věta 4.72 [2]. *Nechť $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$, $G(1,\ldots,l,t_k)$ je distanční graf a $S = (2,2,2,\ldots)$. Potom*

$$\chi_S(G(1,\ldots,l,t_k)) \leq 4l+2 = 2\Delta(G(1,\ldots,l,t_k)) - 2.$$

Poslední výsledek této podkapitoly obdržíme spojením vět 4.71 a 4.72.

Důsledek 4.73 [2]. *Nechť* $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$*,* $G(1, \ldots, l, t_k)$ *je distanční graf,* $t_k \not\equiv l+1, l+2 \pmod{2l+3}$ *a* $S = (2, 2, 2, \ldots)$*. Potom*

$$2l + 4 \leq \chi_S(G(1, \ldots, l, t_k)) \leq 4l + 2.$$

4.6 S-pakovací barvení cirkulantů

Závěrem kapitoly 4 věnujme pozornost S-pakovacímu barvení cirkulantů.

Definice 4.74. Mějme přirozené číslo n a množinu přirozených čísel $D = \{t_1, \ldots, t_k\}$ takovou, že platí $t_i < n, i = 1, \ldots, k$. Neorientovaný graf G s množinou vrcholů $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ a množinou hran $H(G) = \{\{x, y\} : |x - y| \equiv t_i \pmod{n}, i = 1, \ldots, k\}$ se nazývá *cirkulant* a píšeme $G = C_n(t_1, \ldots, t_k) = C_n(D)$.
Prvky množiny $D = \{t_1, \ldots, t_k\}$ pak nazveme generátory a číslo k dimenzí cirkulantu G.

Poznamenejme, že množina hran je zde definována stejným způsobem, jako u distančních grafů definovaných výše. Na rozdíl od distančních grafů jsou však cirkulanty konečné. Obdobně jako v předchozí podkapitole 4.5, i zde bez újmy na obecnosti uvažujme, že $t_i < t_{i+1}, i = 1, \ldots, k - 1$.

Níže uvedené tvrzení udává podmínku pro souvislost těchto grafů.

Tvrzení 4.75 [3, 29]. *Nechť* $C_n(t_1, \ldots, t_k)$ *je cirkulant. Potom* $C_n(t_1, \ldots, t_k)$ *je souvislý právě tehdy, když* $\gcd(t_1, \ldots, t_k, n) = 1$.

Pro sekvence $S = (1, 1, a_3, \ldots)$ je klíčové, zda je barvený graf bipartitní. Podmínku pro bipartitnost cirkulantů dokázal v roce 2003 Heuberger [18].

Věta 4.76 [18]. *Nechť* $C_n(t_1, \ldots, t_k)$ *je souvislý cirkulant. Potom* $C_n(t_1, \ldots, t_k)$ *je bipartitní právě tehdy, když* $t_1, \ldots, t_k$ *jsou lichá a* n *je sudé.*

Heuberger [18] se dále zabýval přípustným vrcholovým barvením cirkulantů, tedy sekvencemi S ve tvaru $(1, 1, 1, \ldots)$. Nejprve se zaměřil na cirkulanty, kde D tvoří pouze jednoprvkovou množinu, tedy $D = \{t_1\}$.

Věta 4.77 [18]. *Nechť* $C_n(t_1)$ *je souvislý cirkulant a* $S = (1, 1, 1, \ldots)$*. Potom*

$$\chi_S(C_n(t_1)) = \begin{cases} 2, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ 3, & \text{je-li } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Nyní se zaměříme na cirkulanty $C_n(t_1, t_2)$, kde $D = \{t_1, t_2\}$. Speciálnímu případu těchto cirkulantů bude následně věnována i kapitola 5 týkající se vlastních výsledků.

Věta 4.78 [18]. *Nechť $C_n(t_1, t_2)$ je souvislý cirkulant a $S = (1, 1, 1, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(C_n(t_1, t_2)) = \begin{cases} 2, & \textit{jsou-li } t_1, t_2 \textit{ lichá a } n \textit{ je sudé,} \\ 4, & \textit{je-li } n \neq 5, 3 \nmid n \textit{ a } (t_2 \equiv \pm 2t_1 \pmod{n} \textit{ nebo } t_1 \equiv \pm 2t_2 \pmod{n}), \\ 4, & \textit{je-li } n = 13 \textit{ a } (t_2 \equiv \pm 5t_1 \pmod{13} \textit{ nebo } t_1 \equiv \pm 5t_2 \pmod{13}), \\ 5, & \textit{je-li } n = 5, \\ 3, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Poznamenejme, že v případě, kdy t_1, t_2 jsou lichá a n je sudé, je příslušný cirkulant $C_n(t_1, t_2)$ bipartitní, jak udává věta 4.76, což implikuje jeho $(1, 1)$-obarvitelnost.

Položme nyní $t_1 = 1$. Heuberger [18] se v rámci S-pakovacího barvení cirkulantů pro $S = (1, 1, 1, \dots)$ zaměřil také na speciální případ cirkulantů $C_n(1, t_2)$, kde t_2 a n jsou nesoudělná čísla. Následuje série tří tvrzení charakterizující hodnoty n a t_2, pro které je příslušné S-pakovací chromatické číslo rovno 3.

Tvrzení 4.79 [18]. *Nechť $C_n(1, t_2)$ je cirkulant, n je liché, $t_2 \in \{2, \frac{n-1}{2}\}$ a $\gcd(n, t_2) = 1$. Potom $C_n(1, t_2)$ je $(1, 1, 1)$-obarvitelný právě tehdy, když $3 \mid n$.*

Tvrzení 4.80 [18]. *Nechť $C_n(1, t_2)$ je cirkulant, n je liché, $\max\{2, \frac{n-3}{3}\} < t_2 \leq \frac{n-3}{2}$ a $\gcd(n, t_2) = 1$. Potom $C_n(1, t_2)$ je $(1, 1, 1)$-obarvitelný právě tehdy, když $(n, t_2) \neq (13, 5)$.*

Tvrzení 4.81 [18]. *Nechť $C_n(1, t_2)$ je cirkulant, n je liché, $3 \leq t_2 \leq \frac{n-3}{3}$ a $\gcd(n, t_2) = 1$. Potom $C_n(1, t_2)$ je $(1, 1, 1)$-obarvitelný.*

Zůstaňme stále u cirkulantů $C_n(t_1, t_2)$, ovšem položme nyní $t_1 = 2$. Těmito cirkulanty se zabývali také výše zmínění Brešar, Ferme a Kamenická [5]. Ti navíc bez újmy na obecnosti předpokládali, že $n \geq 2t_2$. Nejprve se zaměřili na sekvenci $S = (1, 1, 1, \dots)$, tedy na přípustné vrcholové barvení. Pro důkaz následujícího tvrzení využili periodické barvení délky $t_2 + 2$.

Připomeňme, že periodickým barvením rozumíme takové barvení, kde existuje $p \in \mathbb{Z}$ takové, že vrchol x obarven stejnou barvou jako vrchol $x + p$ pro všechny $x \in V(C_n(t_1, t_2)) \subset \mathbb{N}$. V tomto případě tedy $p = t_2 + 2$.

Tvrzení 4.82 [5]. *Nechť $C_n(2, t_2)$ je cirkulant, $t_2 \geq 3$ je liché, $n = (t_2 + 2)m, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $S = (1, 1, 1, \dots)$. Potom $\chi_S(C_n(2, t_2)) = 3$.*

Poznamenejme, že předpoklad n je násobkem $t_2 + 2$, je nezbytný pro využití periodického vzoru této délky.

Pozměněný periodický vzor, ovšem stále délky $t_2 + 2$, byl využit pro důkaz následujícího důsledku udávajícího hodnotu S-pakovacího chromatického čísla pro $S = (1, 1, 2, 2, 2, \dots)$. Hodnota tohoto čísla je důsledkem věty 4.53 uvedené v předchozí podkapitole S-pakovací barvení distančních grafů.

Důsledek 4.83 [5]. *Nechť* $C_n(2, t_2)$ *je cirkulant,* $t_2 \geq 3$ *je liché,* $n = 2(t_2+2)m, m \in \mathbb{N}$ *a* $S = (1, 1, 2, 2, 2, \dots)$. *Potom* $\chi_S(C_n(2, t_2)) = 4$.

Brešar, Ferme a Kamenická [5] se v rámci cirkulantů $C_n(2, t_2)$ dále zaměřili na $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$. Níže uvedený důsledek vyplývá z věty 4.54, v jejímž důkazu byl využit periodický vzor délky 25.

Důsledek 4.84 [5]. *Nechť* $C_n(2, 3)$ *je cirkulant,* $n = 25m, m \in \mathbb{N}$ *a* $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$. *Potom* $\chi_S(C_n(2, 3)) = 6$.

I další důsledek vychází z věty 4.54. Dodejme, že stále uvažujeme sekvenci $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$.

Důsledek 4.85 [5]. *Nechť* $C_n(2, t_2)$ *je cirkulant,* $t_2 \geq 5$ *je liché, a* $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$. *Nastane-li jedna z následujích možností:*

(1) $t_2 = 5$ *a* $n = 14m, m \in \mathbb{N}$,

(2) $t_2 = 4l - 1, l \in \mathbb{N}$, $3 \nmid t_2$ *a* $n = 6m > 2t_2, m \in \mathbb{N}$,

(3) $t_2 = 4l - 1, l \in \mathbb{N}$, $3 \mid t_2$ *a* $n = 2(4l - 3)m, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

potom $\chi_S(C_n(2, t_2)) = 5$.

Na závěr této podkapitoly uveďme ještě několik důsledků týkajících se barvení cirkulantů $C_n(2, t_2)$ pomocí sekvencí S tvaru $(d, d, d, \dots)$. Jak už bylo mnohokrát uvedeno výše, jde o případ d-distančního barvení. Následující důsledek opět vychází z výsledků pro distanční grafy, tentokrát z důsledku 4.57.

Důsledek 4.86 [5]. *Nechť* $C_n(2, 3)$ *je cirkulant,* $d \geq 2$, $n = (3d + 1)m, m \in \mathbb{N}$ *a* $S = (d, d, d, \dots)$. *Potom* $\chi_S(C_n(2, 3)) = 3d + 1$.

Druhý důsledek vyplývá z věty 4.58.

Důsledek 4.87 [5]. *Nechť* $C_n(2, t_2)$ *je cirkulant,* $t_2 \geq 5$ *je liché,* $d \geq t_2 - 3$, $n = (1+t_2(d-\frac{t_2-3}{2}))m, m \in \mathbb{N}$ *a* $S = (d, d, d, \dots)$. *Potom* $\chi_S(C_n(2, t_2)) = (1+t_2(d-\frac{t_2-3}{2}))$.

Poslední výsledek této podkapitoly určuje možné hodnoty S-pakovacího chromatického čísla pro $S = (2, 2, 2, \dots)$, tedy $d = 2$. Tento důsledek obdržíme spojením věty 4.59 a důsledku 4.86.

Důsledek 4.88 [5]. *Nechť* $C_n(2, t_2)$ *je cirkulant,* $t_2 \geq 5$ *je liché a* $S = (2, 2, 2, \dots)$. *Potom*

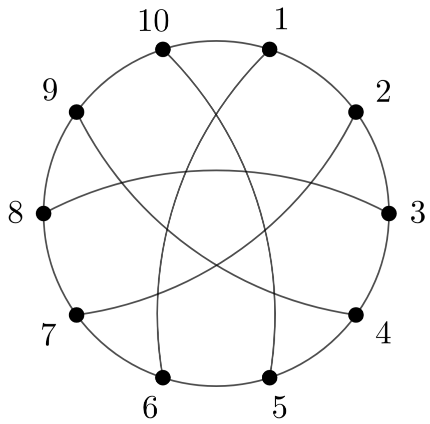
$$\chi_S(C_n(2, t_2)) = \begin{cases} 5, & \textit{je-li } t_2 \equiv 1, 9 \pmod{10} \textit{ a } n = 5m \geq 4t, \\ 6, & \textit{je-li } t_2 \in \{5, 7, 13\} \textit{ a } n = 6m \geq 4t_2, \\ 6, & \textit{je-li } t_2 \equiv 3, 5, 7 \pmod{10}, t_2 \geq 15 \textit{ a } n = sm \geq 4t_2, \end{cases}$$

kde $s = 5p+6l, l < 5, t_2+1 = 5a+l$ *a* $p = a-l$, $m \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$. *Navíc,* $\chi_S(C_n(2, 3)) = 7$, *pokud* $n = 7m$.

Závěrem poznamenejme, že všechny důsledky uvedené v této podkapitole vychází z vět či důsledků pro distanční grafy, jimž je věnována předcházející podkapitola 4.5. Brešar, Ferme a Kamenická [5], kteří stojí za zde uvedenými výsledky z oblasti S-pakovacího barvení jak distančních grafů $G(2, t_2)$, tak i cirkulantů $C_n(2, t_2)$ zde využili jejich podobnosti.

5 Vlastní výsledky v oblasti S-pakovacího barvení cirkulantů $C_{2t}(1,t)$

Tako kapitola je věnována S-pakovacímu barvení speciální třídy cirkulantů $C_n(t_1,t_2)$ takových, že $t_1 = 1$, $t_2 > 1$ a $n = 2t_2$. Pro zkrácení zápisu označme t_2 jako t. Na obrázku 5.1 níže je znázorněn cirkulant $C_{10}(1,5)$. Poznamenejme, že čísla 1 až 10 zde představují očíslování vrcholů.



Obrázek 5.1: cirkulant $C_{10}(1,5)$

V této kapitole se zaměříme na určení hodnot S-pakovacího chromatického čísla pro sekvence S ve tvaru $(1,1,2,2,2,\dots)$, $(1,2,2,2,\dots)$ a $(2,2,2,\dots)$. Ještě, než přejdeme k samotnému barvení cirkulantů $C_{2t}(1,t)$ pomocí těchto tří sekvencí, uveďme zde zavedené pojmy a značení, které v této kapitole budeme následně využívat.

Pojmem vnější kružnice zde označujeme kružnici $C_{2t} = (\{1,\dots,2t\}, \{\{i,i+1\}, i = 1,\dots,2t-1\} \cup \{\{2t,1\}\})$.

Pro nalezení možného S-pakovacího barvení je potřeba znát vzdálenosti mezi jednotlivými vrcholy. Konkrétně u cirkulantu $C_{2t}(1,t)$ pro každé $i,j \in V(C_{2t}(1,t))$ platí:

$$\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(i,j) = \min\{\mathrm{dist}_{C_{2t}}(i,j); 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}(i+t \pmod{2t}, j)\},$$

kde $\mathrm{dist}_{C_{2t}}(i,j)$ značí vzdálenost vrcholů i,j na vnější kružnici C_{2t}.

Uvažujme nyní obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1,t)$. Pokud $c(i) \pmod{k} = 0$, kde $i \in V(C_{2t}(1,t))$ a $k = \chi_S(C_{2t}(1,t))$, potom položíme $c(i) = k$. Dále $i \pmod{2t} = 0$, kde $i \in V(C_{2t}(1,t))$, znamená $i = 2t$.

V rámci S-pakovacího barvení zde budeme využívat také periodické barvení, respektive peridický vzor. Připomeňme, že pojmem periodické barvení označujeme barvení, pro které existuje $p \in \mathbb{Z}$ takové, že vrcholy i a $i+p$ jsou obarveny stejnou barvou pro všechna $i \in V(C_{2t}(1,t))$. Takovéto obarvení lze vhodně zapsat pomocí zmíněného periodického vzoru uvedeného v hranatých závorkách. Pokud se v rámci tohoto vzoru některý úsek r-krát opakuje, píšeme zde zkráceně $(\dots)^r$. Například periodický vzor $[(1,2),(3,4)^3]$ tak znamená $\dots,1,2,3,4,3,4,3,4,1,2,3,4,3,4,3,4,1,2,\dots$.

5.1 Sekvence $S = (1,1,2,2,2,\dots)$

V rámci této podkapitoly se zaměříme na barvení cirkulantů $C_{2t}(1,t)$ pomocí sekvence S ve tvaru $(1,1,2,2,2,\dots)$. Pro tuto sekvenci je klíčové, zda je barvený graf bipartitní. Podmínku pro bipartitnost této třídy cirkulantů udává následující věta. Poznamenejme, že tato věta je speciálním případem věty 4.76, jejíž autorem je Heuberger [18]. Byla však dokázána nezávisle a je zde tak uveden i její důkaz.

Věta 5.1. *Nechť $C_{2t}(1,t)$ je cirkulant a $t \geq 2$. Potom $C_{2t}(1,t)$ je bipartitní právě tehdy, když t je liché.*

Důkaz. Věta je ve tvaru ekvivalence, dokážeme tedy postupně obě implikace.

$\Rightarrow$ Zvolme obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1,t)$ takové, že pro každé $i \in V(C_{2t}(1,t))$ platí:

$$c(i) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } i \text{ liché,} \\ 2, & \text{je-li } i \text{ sudé.} \end{cases}$$

Ukážeme, že c je přípustné. Uvažujme libovolný vrchol $x \in V(C_{2t}(1,t))$. Vrchol x sousedí s vrcholy $y = (x-1)(\text{mod } 2t)$, $z = (x+1)(\text{mod } 2t)$ a $w = (x+t)(\text{mod } 2t)$ Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $c(x) = 1$, tedy x je liché. Z definice obarvení c snadno zjistíme, že $c(y) = c(z) = 2 \neq c(x)$. Zbývá tedy prověřit barvu vrcholu w. Jelikož x i t jsou lichá, $w = (x+t)(\text{mod } 2t)$ je sudé a je mu proto z definice obarvení c přiřazena barva 2. Žádné dva sousední vrcholy tak nemají stejnou barvu a obarvení c je přípustné. Toto nám následně implikuje bipartitnost cirkulantu $C_{2t}(1,t)$.

$\Leftarrow$ Sporem předpokládejme, že graf $C_{2t}(1,t)$ je bipartitní a t je sudé. V grafu $C_{2t}(1,t)$ tak existuje lichá kružnice daná sekvencí vrcholů $1,\dots,t,t+1,1$, což je spor s jeho bipartitností. ■

Nyní se již zaměříme na přesné hodnoty S-pakovacího čísla cirkulantů $C_{2t}(1,t)$. Jak se dalo očekávat, dostáváme zde dvě možné hodnoty tohoto čísla v závislosti na tom, zda je barvený cirkulant biparitní či nikoliv. Důkaz níže uvedené věty plyne přímo z věty 5.1.

Věta 5.2. *Nechť $C_{2t}(1,t)$ je cirkulant, $t \geq 2$ a $S = (1,1,2,2,2,\dots)$. Je-li t liché, potom $\chi_S(C_{2t}(1,t)) = 2$.*

Důkaz. Z věty 5.1 dostáváme, že t liché implikuje bipartitnost cirkulantu $C_{2t}(1,t)$ a následně i $(1,1)$-obarvitelnost tohoto grafu. ■

Není-li cirkulant $C_{2t}(1,t)$ bipartitní, je příslušné S-pakovací chromatické číslo větší než 2. Jak uvádí hned další věta, pro t sudé je toto číslo kvůli tvaru sekvence S rovno 4.

Věta 5.3. *Nechť $C_{2t}(1,t)$ je cirkulant, $t \geq 2$ a $S = (1,1,2,2,2,\dots)$. Je-li t sudé, potom $\chi_S(C_{2t}(1,t)) = 4$.*

Důkaz. V první části důkazu se zaměříme na dolní mez $\chi_S(C_{2t}(1,t))$ a ukážeme, že $\chi_S(G) > 3$. Sporem předpokládejme, že $\chi_S(G) \leq 3$. Uvažujme tedy obarvení c_2 vrcholů grafu $C_{2t}(1,t)$ pomocí tří barev a vrchol $x \in V(C_{2t}(1,t))$ takový, že $c_2(x) = 3$. Takovýto vrchol v grafu $C_{2t}(1,t)$ musí existovat. Vrchol x sousedí s vrcholy $y = (x-1)(\text{mod } 2t)$, $z = (x+1)(\text{mod } 2t)$ a $w = (x+t)(\text{mod } 2t)$. Zaměřme se nyní na vrcholy y a z.

Nechť $c_2(y) \neq c_2(z)$. Bez újmy na obecnosti $c_2(y) = 1$ a $c_2(z) = 2$. Potom nutně $c_2\Big((y+t)(\text{mod } 2t)\Big) = 2$ a $c_2\Big((z+t)(\text{mod } 2t)\Big) = 1$. Poznamenejme, že barvu 3 dostat nemohou, neboť tato barva je už typu 2 a $\text{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,(y+t)(\text{mod } 2t)) = \text{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,(z+t)(\text{mod } 2t)) = 2$. Jelikož vrchol w sousedí s vrcholy x, $((y+t)(\text{mod } 2t))$ a $((z+t)(\text{mod } 2t))$, nemůže být obarven žádnou ze tří barev, což je ve sporu s obarvením c_2. Pro každý vrchol x takový, že $c_2(x) = 3$, tak musí platit $c_2(y) = c_2(z)$.

Protože v grafu $C_{2t}(1,t)$ existuje vrchol x obarvený barvou 3, lze bez újmy na obecnosti položit $x = 2t$. Potom vrcholy 1 až t lze obarvit následovně:

$$c_2(i) = \begin{cases} 1 \text{ pro } i \text{ liché,} \\ 2 \text{ pro } i \text{ sudé,} \end{cases}$$

kde $i = 1,\dots,t$. Poznamenejme, že přebarvení libovolného vrcholu v tomto úseku barvou 3 nemůže ovlivnit obarvení ostatních. Zaměřme se na vrchol $(t+1)$. Víme, že $c_2(t+1) \neq 1$, jelikož $c_2(1) = 1$ a vrcholy 1 a $(t+1)$ jsou spojeny hranou. Dodejme, že vrchol 1 nemůžeme přebarvit barvou 3, neboť je spojen hranou s vrcholem $2t$. Dále, $c_2(t+1) \neq 2$. Pro t sudé totiž dostáváme $c_2(t) = 2$ a mezi vrcholy t a $(t+1)$ taktéž vede hrana. Opět, ani vrchol t nemůžeme přebarvit barvou 3, neboť jde opět o sousední vrchol vrcholu $2t$. Zároveň však $c_2(t+1) \neq 3$, protože tato barva je už typu 2 a $\text{dist}_{C_{2t}(1,t)}(t+1,2t) = 2$. Graf $C_{2t}(1,t)$ tak nelze obarvit třemi barvami a $\chi_S(C_{2t}(1,t)) > 3$.

Nyní přejděme ke druhé části důkazu, kde se zaměříme na horní mez $\chi_S(C_{2t}(1,t))$ a ukážeme, že $\chi_S(C_{2t}(1,t)) \leq 4$. Definujme proto obarvení c_1 vrcholů grafu $C_{2t}(1,t)$ po řadě sekvencí

$$[(1,2)^{\frac{t-2}{2}},(1,3),(2,1)^{\frac{t-2}{2}},(2,4)]$$

začínající ve vrcholu 1. Ukážeme, že c_1 je $(1,1,2,2)$-pakovací barvení. Uvažujme libovolný vrchol $x \in V(C_{2t}(1,t))$. Vrchol x sousedí s vrcholy $y = (x-1)(\text{mod } 2t)$,

$z = (x+1)(\text{mod } 2t)$ a $w = (x+t)(\text{mod } 2t)$.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $c_1(x) = 1$. Poznamenejme, že pro $c_1(x) = 2$ by byl postup analogický, pouze zaměníme barvy 1 a 2. Z definice obarvení c_1 totiž dostáváme, že $c_1(x) = 1$ právě tehdy, když $c_1(x+t) = 2$. Navíc, barvy 3 i 4 se v grafu vyskytují pouze jednou a nemá tak smysl uvažovat případ $c_1(x) \in \{3, 4\}$. Z definice obarvení c_1 snadno zjistíme, že $c_1(y) \neq c_1(x)$ a zároveň $c_1(z) \neq c_1(x)$. Zbývá tedy prověřit barvu vrcholu w. Uvažujeme dvě možné situace.

1. Nechť je $x < t$. Jelikož $c_1(x) = 1$, z definice obarvení c_1 dostáváme, že x je liché. Zároveň t je sudé, tedy $w = (x+t)(\text{mod } 2t)$ je liché. Pro tuto volbu x je ovšem $w > t$ a je mu tak obarvením c_1 přiřazena barva 2.

2. Nechť je $x > t$. Z definice obarvení c_1 tentokrát dostáváme, že x je sudé. Vrchol $w = (x+t)(\text{mod } 2t)$ je tak v tomto případě také sudý. Opět, pro tuto volbu x je $w < t$ a je mu tak obarvením c_1 přiřazena barva 2.

Žádné dva sousední vrcholy tak nemají stejnou barvu, obarvení c_1 je $(1, 1, 2, 2)$-pakovací barvení a $\chi_S(C_{2t}(1, t)) \leq 4$.

Celkově tak obdržíme $\chi_S(C_{2t}(1, t)) = 4$. ■

5.2 Sekvence $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$

Další podkapitola je věnována sekvenci $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$. Jelikož jsou cirkulanty $C_{2t}(1, t)$ díky volbě $|V(C_{2t}(1, t))| = 2t$ kubické, dostáváme následující obecnou dolní mez příslušného S-pakovacího chromatického čísla.

Tvrzení 5.4. *Nechť G je kubický graf a $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$. Potom $\chi_S(G) \geq 4$.*

Důkaz. Uvažujme libovolný vrchol $x \in V(G)$ takový, že je obarven barvou 1. Takovýto vrchol v grafu G musí existovat. Graf G je kubický, tedy x má tři sousední vrcholy. Zřejmě, každý z těchto čtyř vrcholů musí mít jinou barvu, tedy $\chi_S(G) \geq 4$. ■

Následuje série čtyř tvrzení udávající horní mez S-pakovacího chromatického čísla. Poznamenejme, že přestože jsou všechny horní meze rovné čtyřem, nalezení příslušného obarvení pomocí čtyř barev se liší v závislosti na zbytku po celočíselném dělení t čtyřmi. Jak je uvedeno v důkazu následující věty, v případě $t \equiv 2 \pmod 4$ je $|V(C_{2t}(1, t))| = 2t$ násobkem 4 a obarvení pomocí čtyř barev lze tak jednoduše realizovat periodickým vzorem $[1, 2, 3, 4]$.

Tvrzení 5.5. *Nechť $C_{2t}(1, t)$ je cirkulant, $t \geq 2$ a $S = (1, 2, 2, 2, \dots)$. Je-li $t \equiv 2 \pmod 4$, potom $\chi_S(C_{2t}(1, t)) \leq 4$.*

Důkaz. Definujme obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1,t)$ pomocí periodického vzoru $[1,2,3,4]$ začínajícího ve vrcholu 1. Pro každé $i \in V(C_{2t}(1,t))$ tak platí

$$c(i) := i \pmod 4.$$

Protože t je sudé, je $|V(C_{2t}(1,t))| = 2t$ násobkem 4, tedy $c(2t) = 4$. Dokážeme, že c je $(1,2,2,2)$-pakovací barvení.

Je-li $t = 2$, je $C_{2t}(1,t) \cong K_4$, tedy každý vrchol má jinou barvu a navrhované obarvení c je pro toto t $(1,2,2,2)$-pakovací barvení.

Předpokládejme tedy, že $t \geq 6$, a uvažujme dva vrcholy $x, y \in V(C_{2t}(1,t))$ obarvené stejnou barvou. Pokud $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = \mathrm{dist}_{C_{2t}}(x,y)$, potom je vzdálenost těchto vrcholů násobkem 4, tedy vždy větší než 2, jak snadno zjistíme z definice obarvení c.

Nechť tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) \pmod{2t}, y)$. Místo $t \equiv 2 \pmod 4$ lze ekvivalentně psát $t = 4k+2, k \in \mathbb{N}$. Dále, z předpisu pro obarvení c dostáváme $c(x) = c(x+4) = \cdots = c((x+4k) \pmod{2t})$. Dosadíme-li do tohoto vztahu za $4k$, obdržíme $c(x) = c((x+t-2) \pmod{2t})$. Pro vrchol $(x+t) \pmod{2t}$ pak platí $c((x+t) \pmod{2t}) = (c(x)+2)(\mathrm{mod}\ 4)$. Z definice obarvení c tak $\mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) \pmod{2t}, y) \geq 2$. Tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) > 2$ a navrhované obarvení c je $(1,2,2,2)$-pakovací barvení. ■

Pro $t \equiv 1 \pmod 4$, kde $t \geq 9$, dostáváme $|V(C_{2t}(1,t))| = 4l+2, l \in \mathbb{N}$ a periodický vzor $[1,2,3,4]$ tak nelze použít. Začneme-li totiž s tímto vzorem bez újmy na obecnosti ve vrcholu 1, pro $t \equiv 1 \pmod 4$ bychom měli vrchol $(t+1)$ obarvit barvou 2, což ale nelze, jelikož $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}((t+1),2) = 2$ a barva 2 je už typu 2. Myšlenka proto byla proložit periodický vzor $[1,2,3,4]$ tak, aby vrchol $(t+1)$ dostal barvu 3 a zároveň vrchol $2t$ byl obarven barvou 4 (jinak bychom opět narazili na nedostatečné vzdálenosti mezi vrcholy obarvených stejnou barvou). Pro $S = (1,2,2,2,\dots)$ bylo využito tvaru této sekvence a periodický vzor byl tak prokládán barvou 1. Výsledný tvar obarvení je popsán v důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 5.6. *Nechť $C_{2t}(1,t)$ je cirkulant, $t \geq 9$ a $S = (1,2,2,2,\dots)$. Je-li $t \equiv 1 \pmod 4$, potom $\chi_S(C_{2t}(1,t)) \leq 4$.*

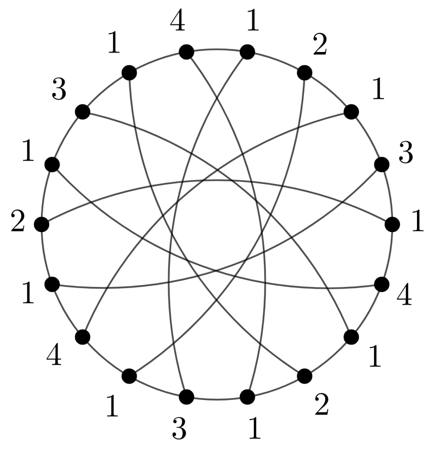
Důkaz. Uvažujme nejprve $t \in \{9, 13\}$. Pomocí programu byla nalezena obarvení cirkulantů $C_{18}(1,9)$ a $C_{26}(1,13)$ znázorněná v tomto pořadí na obrázcích 5.2 a 5.3.

Nechť tedy $t \geq 17$. Definujme obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1,t)$ po řadě sekvencí

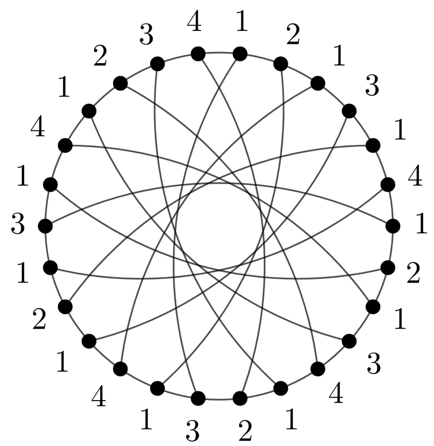
$$[(1,2,1,3,4)^3, (1,2,3,4)^{\frac{t-17}{4}}, (1,2,3,1,4)^3, (1,2,3,4)^{\frac{t-13}{4}}]$$

začínající ve vrcholu 1. Ukážeme, že toto obarvení je $(1,2,2,2)$-pakovací barvení grafu $C_{2t}(1,t)$.

Uvažujme proto dva vrcholy $x, y \in V(C_{2t}(1,t))$ obarvené stejnou barvou. Pokud $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = \mathrm{dist}_{C_{2t}}(x,y)$, potom $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) \geq 2$ pro $c(x) = c(y) = 1$ a $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) \geq 4$ jinak.



Obrázek 5.2: $(1, 2, 2, 2)$-obarvení grafu $C_{18}(1, 9)$



Obrázek 5.3: $(1, 2, 2, 2)$-obarvení grafu $C_{26}(1, 13)$

Nechť tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) \pmod{2t}, y)$. Obarvení c lze vhodně rozepsat do dvou řad tak, že první řada bude obsahovat barvy přiřazené vrcholům 1 až t, tedy bude představovat rozepsaný úsek sekvence $(1, 2, 1, 3, 4)^3, (1, 2, 3, 4)^{\frac{t-17}{4}}, (1, 2)$, a druhá bude zahrnovat barvy přiřazené vrcholům $(t + 1)$ až $2t$, tedy zbývající úsek sekvence $(3, 1, 4), (1, 2, 3, 1, 4)^2, (1, 2, 3, 4)^{\frac{t-13}{4}}$.

$$\begin{array}{c}
1\ 2\ 1\ 3\ 4\ 1\ 2\ 1\ 3\ 4\ 1\ 2\ 1\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ 1\ 2 \\
3\ 1\ 4\ 1\ 2\ 3\ 1\ 4\ 1\ 2\ 3\ 1\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ \dots\ 3\ 4
\end{array}$$

Díky tomuto rozepsání jsou pod sebou barvy protilehlých (tj. sousedních) vrcholů. Aby c bylo $(1, 2, 2, 2)$-pakovací barvení, musí současně platit

$$\begin{gathered}
c(i) \neq c(i+t), \\
c(i) \neq 1 \Rightarrow c(i) \neq c(i+t \pm 1), \\
c(i+t) \neq 1 \Rightarrow c(i \pm 1) \neq c(i+t),
\end{gathered}$$

kde $i = 1, \ldots, t$.

Z rozepsaného obarvení c vidíme, že $c(i)$ a $c(i+t)$ se vždy liší o 1, o 2 nebo o 3, tedy $c(i) \neq c(i+t)$. Probereme postupně všechny případy.

1. Nechť $|c(i) - c(i+t)| = 1$. Jak je zřejmé z rozepsaného obarvení c, toto nastává pro $i \in \{2, 7, 12\}$, kdy $c(i) = 2$. Dostáváme

$$\begin{aligned} c(i+t) &= 1, \\ c(i+t-1) &= 3, \\ c(i+t+1) &= 4. \end{aligned}$$

   Platí tedy $c(i) \neq c(i+t \pm 1)$. Poznamenejme, že nerovnost $c(i \pm 1) \neq c(i+t)$ ověřovat nemusíme, jelikož $c(i+t) = 1$ a tato barva je typu 1.

2. Nechť $|c(i) - c(i+t)| = 2$. Z definice obarvení c dostáváme $c(i) \neq c(i+t \pm 1)$ a $c(i \pm 1) \neq c(i+t)$.

3. Nechť $|c(i) - c(i+t)| = 3$. Opět z rozepsaného obarvení c snadno zjistíme, že tento případ nastává pro $i \in \{3, 8, 13\}$, kdy $c(i) = 1$. Získáváme

$$\begin{aligned} c(i+t) &= 4, \\ c(i-1) &= 2, \\ c(i+1) &= 3. \end{aligned}$$

   Platí proto $c(i \pm 1) \neq c(i+t)$.

Ukázali jsme tak, že libovolné dva vrcholy obarvené barvou 1 nejsou sousední, a že libovolné dva vrcholy ve vzájemné vzdálenosti 2 obarvené barvou typu 2 mají různé barvy. Tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) \pmod{2t}, y) > 1$ pro $c(x) = c(y) = 1$ a $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) \pmod{2t}, y) > 2$ jinak. Obarvení c je tak $(1,2,2,2)$-pakovací barvení. ■

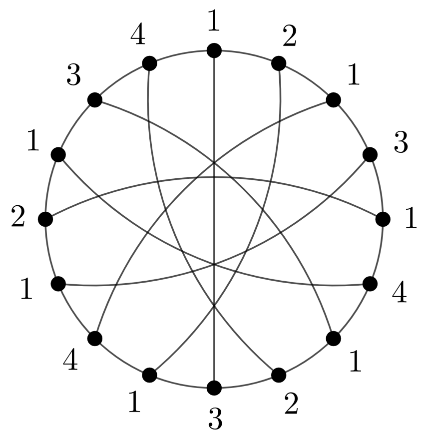
Obdobně postupujeme i pro $t \equiv 0 \pmod 4$, kde $t \geq 8$, a pro $t \equiv 3 \pmod 4$. Opět periodický vzor $[1,2,3,4]$ nelze použít a je třeba jej vhodně proložit barvou 1 tak, abychom dostali $(1,2,2,2)$-pakovací barvení. Z tohoto důvodu jsou i důkazy tvrzení 5.7 a 5.8 analogické s důkazem výše uvedeného tvrzení 5.6.

Tvrzení 5.7. *Nechť $C_{2t}(1,t)$ je cirkulant, $t \geq 8$ a $S = (1,2,2,2,\ldots)$. Je-li $t \equiv 0 \pmod 4$, potom $\chi_S(C_{2t}(1,t)) \leq 4$.*

Důkaz. Uvažujme nejprve $t = 8$. Pomocí programu bylo nalezeno následující obarvení cirkulantu $C_{16}(1,8)$ (obrázek 5.4).

Nechť tedy $t \geq 12$. Definujme obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1,t)$ po řadě sekvencí

$$[(1,2,1,3,4)^2, (1,2,3,4)^{\frac{t-12}{4}}, (1,2,3,1,4)^2, (1,2,3,4)^{\frac{t-8}{4}}]$$



Obrázek 5.4: $(1, 2, 2, 2)$-obarvení grafu $C_{16}(1, 8)$

začínající ve vrcholu 1. Dokážeme, že toto obarvení je $(1, 2, 2, 2)$-pakovací barvení grafu $C_{2t}(1, t)$.

Uvažujme dva vrcholy $x, y \in V(C_{2t}(1, t))$ obarvené stejnou barvou. Jak plyne z definice obarvení c, pokud $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) = \mathrm{dist}_{C_{2t}}(x, y)$, potom $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) \geq 2$ pro $c(x) = c(y) = 1$ a $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) \geq 4$ jinak.

Nechť tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) \pmod{2t}, y)$. Obarvení c lze vhodně rozepsat do dvou řad tak, že první řada bude zahrnovat barvy přiřazené vrcholům 1 až t, tedy bude představovat první polovinu sekvence $(1, 2, 1, 3, 4)^2, (1, 2, 3, 4)^{\frac{t-12}{4}}, (1, 2)$, a druhá bude obsahovat barvy přiřazené vrcholům $(t + 1)$ až $2t$, tedy zbývající polovinu sekvence $(3, 1, 4), (1, 2, 3, 1, 4), (1, 2, 3, 4)^{\frac{t-8}{4}}$.

$$
\begin{array}{c}
1\ 2\ 1\ 3\ 4\ 1\ 2\ 1\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ 1\ 2 \\
3\ 1\ 4\ 1\ 2\ 3\ 1\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ \ldots\ 3\ 4
\end{array}
$$

Díky tomuto rozepsání jsou pod sebou barvy protilehlých (tj. sousedních) vrcholů. Aby c bylo $(1, 2, 2, 2)$-pakovací barvení, musí současně platit

$$
\begin{gathered}
c(i) \neq c(i+t), \\
c(i) \neq 1 \Rightarrow c(i) \neq c(i+t \pm 1), \\
c(i+t) \neq 1 \Rightarrow c(i \pm 1) \neq c(i+t),
\end{gathered}
$$

kde $i = 1, \ldots, t$.

Z rozepsaného obarvení c lze snadno zjistit, že $c(i)$ a $c(i + t)$ se vždy liší o 1, o 2 nebo o 3, tedy $c(i) \neq c(i + t)$. Probereme postupně všechny tři případy.

1. Nechť $|c(i) - c(i + t)| = 1$. Jak je zřejmé z rozepsaného obarvení c, toto nastává

pro $i \in \{2,7\}$, kdy $c(i) = 2$. Pro tato i dostáváme

$$\begin{aligned} c(i+t) &= 1, \\ c(i+t-1) &= 3, \\ c(i+t+1) &= 4. \end{aligned}$$

Platí tedy $c(i) \neq c(i+t\pm 1)$. Poznamenejme, že nerovnost $c(i\pm 1) \neq c(i+t)$ není třeba ověřovat, neboť $c(i+t) = 1$ a tato barva je typu 1.

2. Nechť $|c(i) - c(i+t)| = 2$. Z definice obarvení c dostáváme $c(i) \neq c(i+t\pm 1)$ a $c(i\pm 1) \neq c(i+t)$.

3. Nechť $|c(i) - c(i+t)| = 3$. Opět z rozepsaného obarvení c snadno zjistíme, že tento případ nastává pro $i \in \{3,8\}$, kdy $c(i) = 1$. Získáváme

$$\begin{aligned} c(i+t) &= 4, \\ c(i-1) &= 2, \\ c(i+1) &= 3. \end{aligned}$$

Platí tedy $c(i\pm 1) \neq c(i+t)$.

Ukázali jsme tak, že libovolné dva vrcholy ve vzájemné vzdálenosti 2 obarvené barvou typu 2 mají různé barvy, a že libovolné dva vrcholy obarvené barvou 1 nejsou sousední. Tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = 1+\mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) \pmod{2t}, y) > 1$ pro $c(x) = c(y) = 1$ a $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = 1+\mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) \pmod{2t}, y) > 2$ jinak. Obarvení c je tak $(1,2,2,2)$-pakovací barvení. ■

Tvrzení 5.8. *Nechť $C_{2t}(1,t)$ je cirkulant, $t \geq 3$ a $S = (1,2,2,2,\dots)$. Je-li $t \equiv 3 \pmod 4$, potom $\chi_S(C_{2t}(1,t)) \leq 4$.*

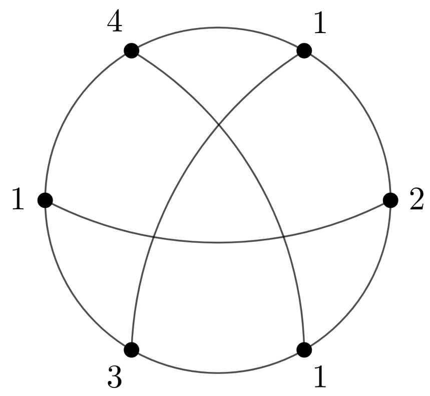
Důkaz. Uvažujme nejprve $t = 3$. Zřejmě $\mathrm{diam}(C_6(1,3)) = 2$, tedy barvy typu 2 mohou být použity pouze jednou a potřebujeme tak barvu 1 přiřadit co nejvíce vrcholům. Z věty 5.1 dostáváme, že graf $C_6(1,3)$ je bipartitní a barvou 1 tak lze obarvit nejvýše tři vrcholy. Zbývají tak tři vrcholy, kterým musíme přiřadit různé barvy typu 2, tedy $\chi_S(C_6(1,3)) = 4$. Možné obarvení cirkulantu $C_6(1,3)$ je znázorněno na obrázku 5.5.

Nechť tedy $t \geq 7$. Definujme obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1,t)$ po řadě sekvencí

$$[(1,2,1,3,4),(1,2,3,4)^{\frac{t-7}{4}},(1,2,3,1,4),(1,2,3,4)^{\frac{t-3}{4}}]$$

začínající ve vrcholu 1. Ukážeme, že toto obarvení je $(1,2,2,2)$-pakovací barvení grafu $C_{2t}(1,t)$.

Uvažujme dva vrcholy $x,y \in V(C_{2t}(1,t))$ obarvené stejnou barvou. Jak je patrné z definice obarvení c, pokud $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = \mathrm{dist}_{C_{2t}}(x,y)$, potom $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) \geq 2$ pro $c(x) = c(y) = 1$ a $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) \geq 4$ jinak.



Obrázek 5.5: $(1, 2, 2, 2)$-obarvení grafu $C_6(1, 3)$

Nechť tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x + t) \pmod{2t}, y)$. Obarvení c vhodně rozepíšeme do dvou řad tak, že první řada bude zahrnovat barvy přiřazené vrcholům 1 až t a druhá bude obsahovat barvy přiřazené vrcholům $(t + 1)$ až $2t$.

$$\begin{array}{c}1\ 2\ 1\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ 1\ 2\\ 3\ 1\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ \ldots\ 3\ 4\end{array}$$

Díky tomuto rozepsání jsou pod sebou barvy protilehlých vrcholů. Aby c bylo $(1, 2, 2, 2)$-pakovací barvení, musí současně platit

$$\begin{gathered}c(i) \neq c(i + t),\\ c(i) \neq 1 \Rightarrow c(i) \neq c(i + t \pm 1),\\ c(i + t) \neq 1 \Rightarrow c(i \pm 1) \neq c(i + t),\end{gathered}$$

kde $i = 1, \ldots, t$.

Z rozepsaného obarvení c lze snadno vyčíst, že $c(i)$ a $c(i + t)$ se vždy liší o 1, o 2 nebo o 3, tedy $c(i) \neq c(i + t)$. Probereme postupně všechny případy.

1. Nechť $|c(i) - c(i + t)| = 1$. Jak vidíme rozepsaného obarvení c, tento případ nastává pro $i = 2$, kdy $c(i) = 2$. Dostáváme

   $$\begin{aligned}c(i + t) &= 1,\\ c(i + t - 1) &= 3,\\ c(i + t + 1) &= 4.\end{aligned}$$

   Platí tedy $c(i) \neq c(i + t \pm 1)$. Poznamenejme, že nerovnost $c(i \pm 1) \neq c(i + t)$ ověřovat nemusíme, jelikož $c(i + t) = 1$ a tato barva je typu 1.

2. Nechť $|c(i) - c(i + t)| = 2$. Z definice obarvení c dostáváme $c(i) \neq c(i + t \pm 1)$ a $c(i \pm 1) \neq c(i + t)$.

3. Nechť $|c(i)-c(i+t)| = 3$. Zřejmě, toto nastává pro $i = 3$, kdy $c(i) = 1$. Získáváme
$$\begin{aligned} c(i+t) &= 4, \\ c(i-1) &= 2, \\ c(i+1) &= 3. \end{aligned}$$
   Platí proto $c(i \pm 1) \neq c(i+t)$.

Dokázali jsme tak, že libovolné dva vrcholy obarvené barvou 1 nejsou sousední, a že libovolné dva vrcholy ve vzájemné vzdálenosti 2 obarvené barvou typu 2 mají různé barvy. Tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) \pmod{2t}, y) > 1$ pro $c(x) = c(y) = 1$ a $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) \pmod{2t}, y) > 2$ jinak. Obarvení c je tak $(1,2,2,2)$-pakovací barvení. ■

Nyní se zaměřme na přesné hodnoty S-pakovacího chromatického čísla. Následující věta vyplývá přímo z tvrzení 5.4 až 5.8.

Věta 5.9. *Nechť $C_{2t}(1,t)$ je cirkulant, $t \in \mathbb{N} \setminus \{1,4,5\}$ a $S = (1,2,2,2,\dots)$. Potom $\chi_S(C_{2t}(1,t)) = 4$.*

Důkaz. Jelikož cirkulant $C_{2t}(1,t)$ je kubický, $\chi_S(C_{2t}(1,t)) \geq 4$, jak plyne z tvrzení 5.4. Zároveň jsme pro tato t nalezli obarvení pomocí 4 barev (tvrzení 5.5 až 5.8), tedy $\chi_S(C_{2t}(1,t)) \leq 4$. Celkově tak dostáváme $\chi_S(C_{2t}(1,t)) = 4$. ■

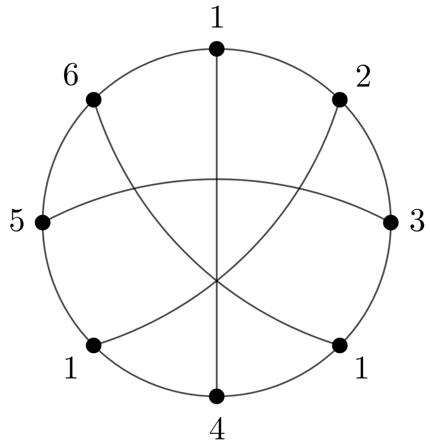
Zbývá tak určit hodnotu tohoto čísla pro $t \in \{4,5\}$. Níže uvedené tvrzení je tak posledním výsledkem v rámci této podkapitoly.

Tvrzení 5.10. *Nechť $C_{2t}(1,t)$ je cirkulant, $t \geq 2$ a $S = (1,2,2,2,\dots)$. Potom*
$$\chi_S(C_{2t}(1,t)) = \begin{cases} 5, & \text{je-li } t = 5, \\ 6, & \text{je-li } t = 4. \end{cases}$$

Důkaz. Toto tvrzení dokážeme postupně pro obě hodnoty t.

1. Nechť $t = 4$. Jelikož $\mathrm{diam}(C_8(1,4)) = 2$, barvy typu 2 mohou být použity pouze jednou. Potřebujeme tak barvu 1 přiřadit co nejvíce vrcholům. Graf $C_8(1,4)$ není bipartitní, jak plyne z věty 5.1, tedy barvou 1 lze obarvit nejvýše tři vrcholy. Zbývá tak pět vrcholů a každému z nich musíme přiřadit jinou barvu typu 2, tedy $\chi_S(C_8(1,4)) = 6$. Možné obarvení pomocí šesti barev je znázorněno na obrázku 5.6.

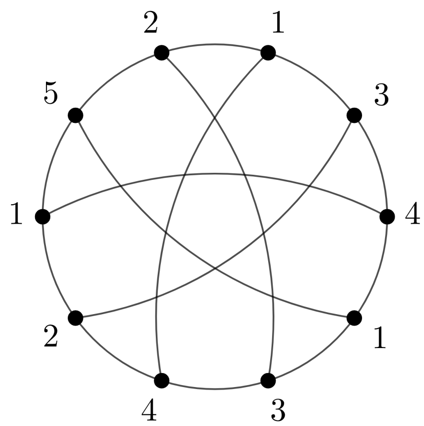
2. Nechť $t = 5$. Zaměřme se nejprve na dolní mez $\chi_S(C_{10}(1,5))$ a dokažme, že $\chi_S(G) > 4$. Sporem předpokládejme, že $\chi_S(G) \leq 4$. Uvažujme proto obarvení c vrcholů grafu $C_{10}(1,5)$ pomocí čtyř barev a vrchol $x \in V(C_{10}(1,5))$ takový, že $c(x) = 1$. Protože v grafu $C_{10}(1,5)$ musí existovat vrchol x obarvený barvou



Obrázek 5.6: $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$-obarvení grafu $C_8(1, 4)$

1, lze bez újmy na obecnosti položit $x = 1$. Vrchol 1 sousedí s vrcholy 10, 2 a 6. Na tyto tři vrcholy bude potřeba dalších tří barev, neboť jsou ve vzájemné vzdálenosti 2. Bez újmy na obecnosti položme $c(10) = 2$, $c(2) = 3$ a $c(6) = 4$. Potom nutně $c(4) = 1$ a $c(8) = 1$. Dále, opět vynuceně $c(5) = 3$ a $c(7) = 2$. Toto nám následně vynucuje $c(3) = 4$. Jelikož vrchol 9 sousedí s vrcholy 8 a 10 a zároveň $\mathrm{dist}_{C_{10}(1,5)}(9, 5) = \mathrm{dist}_{C_{10}(1,5)}(9, 3) = 2$, nemůže být obarven žádnou ze čtyř barev, což je spor s obarvením c. Tedy $\chi_S(C_{10}(1, 5)) > 4$.

Nyní se zaměříme na horní mez $\chi_S(C_{10}(1, 5))$. Obrázek 5.7 ukazuje nalezené obarvení pomocí pěti barev.



Obrázek 5.7: $(1, 2, 2, 2, 2)$-obarvení grafu $C_{10}(1, 5)$

Celkově tak dostáváme $\chi_S(C_{10}(1, 5)) = 5$. ■

5.3 Sekvence $S = (2, 2, 2, \dots)$

Poslední podkapitola je věnována barvení cirkulantů $C_{2t}(1, t)$ pomocí sekvence $S = (2, 2, 2, \dots)$. Poznamenejme, že sekvence v tomto tvaru představuje 2-distanční barvení. Opět, jelikož jsou cirkulanty $C_{2t}(1, t)$ kubické, obrdžíme následující obecnou dolní mez příslušného S-pakovacího chromatického čísla.

Tvrzení 5.11. *Nechť G je kubický graf a $S = (2, 2, 2, \dots)$. Potom $\chi_S(G) \geq 4$.*

Důkaz. Zvolme libovolný vrchol $x \in V(G)$. Graf G je kubický, tedy x má tři sousední vrcholy. Zřejmě, každý z těchto čtyř vrcholů musí mít jinou barvu, tedy $\chi_S(G) \geq 4$. ■

Tak jako v předchozí podkapitole, i zde následuje série čtyř tvrzení udávající horní mez S-pakovacího chromatického čísla. Opět, nalezení možného obarvení se liší v závislosti na zbytku po celočíselném dělení t čtyřmi. V případě $t \equiv 2 \pmod 4$ je $|V(C_{2t}(1, t))| = 2t$ násobkem 4 a je zde tak analogicky jako v tvrzení 5.5 využito obarvení pomocí periodického vzoru $[1, 2, 3, 4]$.

Tvrzení 5.12. *Nechť $C_{2t}(1, t)$ je cirkulant, $t \geq 2$ a $S = (2, 2, 2, \dots)$. Je-li $t \equiv 2 \pmod 4$, potom $\chi_S(C_{2t}(1, t)) \leq 4$.*

Důkaz. Definujme obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1, t)$ pomocí periodického vzoru $[1, 2, 3, 4]$ začínajícího ve vrcholu 1. Pro každé $i \in V(C_{2t}(1, t))$ tedy platí

$$c(i) := i \pmod 4.$$

Dodejme, že jelikož t je sudé, je $|V(C_{2t}(1, t))| = 2t$ násobkem 4 a $c(2t) = 4$. Ukážeme, že c je $(2, 2, 2, 2)$-pakovací barvení.

Je-li $t = 2$, je $C_{2t}(1, t) \cong K_4$. Každý vrchol tak dostane jinou barvu a navrhované obarvení c je pro tuto volbu t $(2, 2, 2, 2)$-pakovacím barvením.

Předpokládejme tedy, že $t \geq 6$. Uvažujme dva vrcholy $x, y \in V(C_{2t}(1, t))$ obarvené stejnou barvou. Pokud $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) = \mathrm{dist}_{C_{2t}}(x, y)$, pak z definice obarvení c snadno zjistíme, že vzdálenost těchto vrcholů je násobkem 4, tedy vždy větší než 2.

Nechť tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x + t) \pmod{2t}, y)$. Místo $t \equiv 2 \pmod 4$ lze ekvivalentně psát $t = 4k+2, k \in \mathbb{N}$. Dále, z předpisu pro obarvení c plyne, že $c(x) = c(x + 4) = \dots = c((x + 4k) \pmod{2t})$. Dosadíme-li do této rovnosti za $4k$, dostáváme $c(x) = c((x+t-2) \pmod{2t})$. Pro vrchol $(x+t) \pmod{2t}$ pak platí $c((x+t) \pmod{2t}) = (c(x) + 2) \pmod 4$. Z definice obarvení c tak obdržíme $\mathrm{dist}_{C_{2t}}((x + t) \pmod{2t}, y) \geq 2$. Tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) > 2$ a navrhované obarvení c je $(2, 2, 2, 2)$-pakovací barvení. ■

Pokud $t \equiv 1 \pmod 4$, kde $t \geq 17$, dostáváme $|V(C_{2t}(1, t))| = 4l + 2, l \in \mathbb{N}$ a periodický vzor $[1, 2, 3, 4]$ tak nelze použít. Jak již bylo řečeno v předchozí podkapitole, začneme-li s tímto vzorem ve vrcholu 1, pro $t \equiv 1 \pmod 4$ bychom měli vrchol $(t + 1)$ obarvit barvou 2, což ale nelze, jelikož $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}((t + 1), 2) = 2$. Opět je zde proto myšlenka proložit periodický vzor $[1, 2, 3, 4]$ tak, aby vrchol $(t + 1)$ dostal barvu 3 a zároveň vrchol $2t$ byl obarven barvou 4 (jinak bychom opět narazili na nedostatečné vzdálenosti vrcholů obarvených stejnou barvou). Protože všechny barvy jsou typu 2, pro proložení periodického vzoru je třeba využít pátou barvu. Výsledný tvar obarvení lze nalézt v důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 5.13. *Nechť $C_{2t}(1, t)$ je cirkulant, $t \geq 17$ a $S = (2, 2, 2, \dots)$. Je-li $t \equiv 1 \pmod 4$, potom $\chi_S(C_{2t}(1, t)) \leq 5$.*

Důkaz. Definujme obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1, t)$ po řadě sekvencí

$$[(1, 2, 3, 4, 5)^3, (1, 2, 3, 4)^{\frac{t-17}{4}}, (1, 2, 3, 4, 5)^3, (1, 2, 3, 4)^{\frac{t-13}{4}}]$$

začínající ve vrcholu 1. Ukážeme, že toto obarvení je $(2, 2, 2, 2, 2)$-pakovací barvení grafu $C_{2t}(1, t)$.

Uvažujme dva vrcholy $x, y \in V(C_{2t}(1, t))$ obarvené stejnou barvou. Jak plyne z definice obarvení c, pokud $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) = \mathrm{dist}_{C_{2t}}(x, y)$, potom $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) \geq 4$.

Nechť tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) \pmod{2t}, y)$. Rozepišme si definované obarvení c do dvou řad tak, že první řada bude obsahovat barvy přiřazené vrcholům 1 až t, tedy bude představovat rozepsaný úsek sekvence $(1, 2, 3, 4, 5)^3, (1, 2, 3, 4)^{\frac{t-17}{4}}, (1, 2)$, a druhá bude zahrnovat barvy přiřazené vrcholům $(t + 1)$ až $2t$, tedy zbývající úsek sekvence $(3, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 5)^2, (1, 2, 3, 4)^{\frac{t-13}{4}}$.

$$\begin{array}{l} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ 1\ 2 \\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ \dots\ 3\ 4 \end{array}$$

Díky tomuto rozepsání jsou pod sebou vždy barvy protilehlých (tj. sousedních) vrcholů. Protože všechny barvy jsou typu 2, musí současně platit

$$\begin{gathered} c(i) \neq c(i + t), \\ c(i \pm 1) \neq c(i + t), \\ c(i) \neq c(i + t \pm 1), \end{gathered}$$

kde $i = 1, \dots, t$.

Z rozepsaného obarvení c snadno zjistíme, že $c(i)$ a $c(i + t)$ se vždy liší o 2 nebo o 3, tedy $c(i) \neq c(i + t)$. Probereme postupně oba případy.

1. Nechť $|c(i) - c(i + t)| = 2$. Z definice obarvení c dostáváme $c(i \pm 1) \neq c(i + t)$ a $c(i) \neq c(i + t \pm 1)$.

2. Nechť $|c(i) - c(i+t)| = 3$. Jak je zřejmé z rozepsaného obarvení c, toto nastává pro $i \in \{4, 5, 9, 10, 14, 15\}$, kdy $c(i) = 4$ pro $i \in \{4, 9, 14\}$ a $c(i) = 5$ pro $i \in \{5, 10, 15\}$.

Pro $c(i) = 4$ získáváme

$$\begin{aligned} c(i-1) &= 3, \\ c(i+1) &= 5, \\ c(i+t) &= 1, \\ c(i+t-1) &= 5, \\ c(i+t+1) &= 2. \end{aligned}$$

Analogicky pro $c(i) = 5$ dostáváme

$$\begin{aligned} c(i-1) &= 4, \\ c(i+1) &= 1, \\ c(i+t) &= 2, \\ c(i+t-1) &= 1, \\ c(i+t+1) &= 3. \end{aligned}$$

V obou případech platí, že $c(i \pm 1) \neq c(i+t)$ a $c(i) \neq c(i+t \pm 1)$.

Ukázali jsme tak, že libovolné dva vrcholy ve vzájemné vzdálenosti nejvýše 2 mají různé barvy, tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t)(\mathrm{mod}\ 2t), y) > 2$. Obarvení c je tak $(2,2,2,2,2)$-pakovacím barvením grafu $C_{2t}(1,t)$. ■

Analogicky postupujeme i pro $t \equiv 0 \pmod 4$, kde $t \geq 12$, a pro $t \equiv 3 \pmod 4$, kde $t \geq 7$. Protože pro tato t neplatí rovnost $V(C_{2t}(1,t)) = 4l, l \in \mathbb{N}$, je třeba vhodně proložit periodický vzor $[1,2,3,4]$ pátou barvou. Důkazy tvrzení 5.14 a 5.15 jsou tak opět analogické s důkazem výše uvedeného tvrzení 5.13.

Tvrzení 5.14. *Nechť $C_{2t}(1,t)$ je cirkulant, $t \geq 12$ a $S = (2,2,2,\ldots)$. Je-li $t \equiv 0 \pmod 4$, potom $\chi_S(C_{2t}(1,t)) \leq 5$.*

Důkaz. Uvažujme obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1,t)$ po řadě sekvencí

$$[(1,2,3,4,5)^2, (1,2,3,4)^{\frac{t-12}{4}}, (1,2,3,4,5)^2, (1,2,3,4)^{\frac{t-8}{4}}]$$

začínající ve vrcholu 1. Ukážeme, že toto obarvení je $(2,2,2,2,2)$-pakovací barvení cirkulantu $C_{2t}(1,t)$.

Uvažujme proto dva vrcholy $x, y \in V(C_{2t}(1,t))$ obarvené stejnou barvou. Pokud $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = \mathrm{dist}_{C_{2t}}(x,y)$, potom $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) \geq 4$, jak plyne z definice obarvení c.

Nechť tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t)(\mathrm{mod}\ 2t), y)$. Rozepišme si definované obarvení c do dvou řad, kdy první řada bude zahrnovat barvy přiřazené vrcholům 1 až t a druhá bude obsahovat barvy přiřazené vrcholům $(t+1)$ až $2t$.

$$\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ 1\ 2 \\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ \ldots\ 3\ 4 \end{matrix}$$

Díky tomuto rozepsání jsou pod sebou vždy barvy protilehlých vrcholů. Všechny barvy jsou typu 2, musí tedy současně platit

$$\begin{aligned} c(i) &\neq c(i+t), \\ c(i \pm 1) &\neq c(i+t), \\ c(i) &\neq c(i+t\pm 1), \end{aligned}$$

kde $i = 1, \dots, t$.

Z rozepsaného obarvení c je patrné, že $c(i)$ a $c(i+t)$ se vždy liší o 2 nebo o 3, tedy $c(i) \neq c(i+t)$. Probereme postupně obě situace.

1. Nechť $|c(i) - c(i+t)| = 2$. Z definice obarvení c dostáváme $c(i \pm 1) \neq c(i+t)$ a $c(i) \neq c(i+t\pm 1)$.

2. Nechť $|c(i) - c(i+t)| = 3$. Jak je patrné z rozepsaného obarvení c, toto nastává pro $i \in \{4, 5, 9, 10\}$, kdy $c(i) = 4$ pro $i \in \{4, 9\}$ a $c(i) = 5$ pro $i \in \{5, 10\}$. Pro $c(i) = 4$ dostáváme

$$\begin{aligned} c(i-1) &= 3, \\ c(i+1) &= 5, \\ c(i+t) &= 1, \\ c(i+t-1) &= 5, \\ c(i+t+1) &= 2. \end{aligned}$$

Analogicky pro $c(i) = 5$ získáváme

$$\begin{aligned} c(i-1) &= 4, \\ c(i+1) &= 1, \\ c(i+t) &= 2, \\ c(i+t-1) &= 1, \\ c(i+t+1) &= 3. \end{aligned}$$

V obou případech platí, že $c(i \pm 1) \neq c(i+t)$ a $c(i) \neq c(i+t\pm 1)$.

Ukázali jsme tak, že libovolné dva vrcholy ve vzájemné vzdálenosti nejvýše 2 mají různé barvy, tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x, y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t) (\mathrm{mod}\ 2t), y) > 2$ a obarvení c je tak $(2, 2, 2, 2, 2)$-pakovacím barvením cirkulantu $C_{2t}(1, t)$. ■

Tvrzení 5.15. *Nechť $C_{2t}(1, t)$ je cirkulant, $t \geq 7$ a $S = (2, 2, 2, \dots)$. Je-li $t \equiv 3 \pmod 4$, potom $\chi_S(C_{2t}(1, t)) \leq 5$.*

Důkaz. Definujme obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1, t)$ po řadě sekvencí

$$[(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 4)^{\frac{t-7}{4}}, (1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 4)^{\frac{t-3}{4}}]$$

začínající ve vrcholu 1. Dokážeme, že toto obarvení je $(2,2,2,2,2)$-pakovací barvení grafu $C_{2t}(1,t)$.

Uvažujme dva vrcholy $x, y \in V(C_{2t}(1,t))$ obarvené stejnou barvou. Pokud pro tyto vrcholy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = \mathrm{dist}_{C_{2t}}(x,y)$, potom $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) \geq 4$, jak je zřejmé z definice obarvení c.

Nechť tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t)(\mathrm{mod}\ 2t), y)$. Definované obarvení c si můžeme rozepsat do dvou řad tak, že první řada bude obsahovat barvy přiřazené vrcholům 1 až t a druhá bude zahrnovat barvy přiřazené vrcholům $(t+1)$ až $2t$.

$$\begin{array}{c}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ 1\ 2\\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ \ldots\ 3\ 4\end{array}$$

V tomto rozepsání máme pod sebou vždy barvy protilehlých vrcholů. Protože všechny barvy jsou typu 2, musí současně platit

$$\begin{aligned} c(i) &\neq c(i+t),\\ c(i\pm 1) &\neq c(i+t),\\ c(i) &\neq c(i+t\pm 1),\end{aligned}$$

kde $i \in [t]$.

Z rozepsaného obarvení c lze snadno vyčíst, že $c(i)$ a $c(i+t)$ se vždy liší o 2 nebo o 3, tedy $c(i) \neq c(i+t)$. Zaměříme se postupně na oba případy.

1. Nechť $|c(i) - c(i+t)| = 2$. Z definice obarvení c dostáváme $c(i\pm 1) \neq c(i+t)$ a $c(i) \neq c(i+t\pm 1)$.

2. Nechť $|c(i) - c(i+t)| = 3$. Jak je zřejmé z rozepsaného obarvení c, toto nastává pro $i \in \{4,5\}$, kdy $c(i) = 4$ pro $i = 4$ a $c(i) = 5$ pro $i = 5$. Pro $i = 4$ získáváme

$$\begin{aligned} c(i-1) &= 3,\\ c(i+1) &= 5,\\ c(i+t) &= 1,\\ c(i+t-1) &= 5,\\ c(i+t+1) &= 2.\end{aligned}$$

Analogicky pro $i = 5$ obdržíme

$$\begin{aligned} c(i-1) &= 4,\\ c(i+1) &= 1,\\ c(i+t) &= 2,\\ c(i+t-1) &= 1,\\ c(i+t+1) &= 3.\end{aligned}$$

V obou případech $c(i\pm 1) \neq c(i+t)$ a $c(i) \neq c(i+t\pm 1)$.

Dokázali jsme tak, že libovolné dva vrcholy ve vzájemné vzdálenosti nejvýše 2 jsou obarveny různými barvami, tedy $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}(x,y) = 1 + \mathrm{dist}_{C_{2t}}((x+t)(\bmod 2t), y) > 2$. Obarvení c je tak $(2,2,2,2,2)$-pakovacím barvením grafu $C_{2t}(1,t)$. ■

S využitím získaných horních a dolních mezí S-pakovacího chromatického čísla pro vybrané hodnoty t se nyní zaměříme na jeho přesné hodnoty.

Věta 5.16. *Nechť $C_{2t}(1,t)$ je cirkulant, $t \in \mathbb{N} \setminus \{1,3,4,5,8,9,13\}$ a $S = (2,2,2,\dots)$.*

(1) Je-li $t \equiv 2 \pmod 4$, potom $\chi_S(C_{2t}(1,t)) = 4$.

(2) Není-li $t \equiv 2 \pmod 4$, potom $\chi_S(C_{2t}(1,t)) = 5$.

Důkaz. V rámci tohoto důkazu postupně dokážeme obě implikace.

(1) Jelikož cirkulant $C_{2t}(1,t)$ je kubický, dostáváme z tvrzení 5.11 $\chi_S(G) \geq 4$. Zároveň z tvrzení 5.12 víme, že pro tuto volbu t existuje obarvení pomocí čtyř barev, tedy $\chi_S(C_{2t}(1,t)) \leq 4$. Celkově tak dostáváme $\chi_S(C_{2t}(1,t)) = 4$.

(2) Z tvrzení 5.13, 5.14 a 5.15 víme, že pro tuto volbu t existuje obarvení pomocí pěti barev. Sporem předpokládejme, že $t \not\equiv 2 \pmod 4$ a $\chi_S(C_{2t}(1,t)) < 5$. Uvažujme tedy obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1,t)$ pomocí čtyř barev a vrchol $x \in V(C_{2t}(1,t))$ takový, že $c(x) = 2$. Takovýto vrchol v grafu $C_{2t}(1,t)$ musí existovat. Vrchol x sousedí s vrcholy $y = (x-1)(\bmod 2t)$, $z = (x+1)(\bmod 2t)$ a $w = (x+t)(\bmod 2t)$. Na tyto tři vrcholy bude zapotřebí dalších tří barev, neboť jsou ve vzájemné vzdálenosti 2. Bez újmy na obecnosti tak položme $c(y) = 1$, $c(z) = 3$ a $c(w) = 4$. Potom nutně

$$
\begin{aligned}
c((w-1)(\bmod 2t)) &= 3,\\
c((w+1)(\bmod 2t)) &= 1.
\end{aligned}
$$

Dále, opět vynuceně

$$
\begin{aligned}
c((x-2)(\bmod 2t)) &= 4,\\
c((x+2)(\bmod 2t)) &= 4,\\
c((w-2)(\bmod 2t)) &= 2,\\
c((w+2)(\bmod 2t)) &= 2.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že použití čtyř barev si vynucuje periodické obarvení. To je však možné pouze, pokud je $|V(C_{2t}(1,t))| = 2t$ násobkem 4, tedy pro t sudá. Pro $t \equiv 1 \pmod 4$ a $t \equiv 3 \pmod 4$ tak dostáváme spor a musí proto platit $t \equiv 0 \pmod 4$.

Zaměřme se nyní na protilehlé vrcholy x a w. Místo $t \equiv 0 \pmod 4$ lze ekvivalentně psát $t = 4k, k \in \mathbb{N}$. Protože v grafu $C_{2t}(1,t)$ existuje vrchol x obarvený barvou 2, lze bez újmy na obecnosti položit $x = 2$. Periodické obarvení c tak můžeme zapsat předpisem

$$c(i) := i \pmod 4,$$

kde $i = 1, \dots 2t$. Pak zřejmě z předpisu pro obarvení c platí

$$c(x) = c((x + 4k)(\mathrm{mod}\ 2t)) = c((x + t)(\mathrm{mod}\ 2t)) = c(w),$$

což je spor. Graf $C_{2t}(1, t)$ tak nelze pro $t \not\equiv 2 \pmod 4$ obarvit pomocí čtyř barev, tedy $\chi_S(C_{2t}(1, t)) = 5$. ■

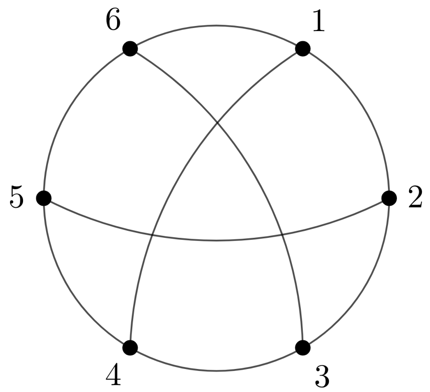
Zbývá tak určit hodnoty tohoto čísla pro $t \in \{3, 4, 5, 8, 9, 13\}$. Poznamenejme, že hodnota S-pakovacího chromatického čísla pro $t \in \{5, 9, 13\}$ je sice 5, ovšem z důvodu malé hodnoty t zde není možné využít princip pouhého prokládaní periodického vzoru $[1, 2, 3, 4]$ barvou 5, jako v tvrzení 5.13, 5.14 a 5.15, a důkaz je zde proto uveden odděleně.

Tvrzení 5.17. *Nechť $C_{2t}(1, t)$ je cirkulant, $t \geq 2$ a $S = (2, 2, 2, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(C_{2t}(1, t)) = \begin{cases} 5, \text{ je-li } t \in \{5, 9, 13\}, \\ 6, \text{ je-li } t \in \{3, 8\}, \\ 8, \text{ je-li } t = 4. \end{cases}$$

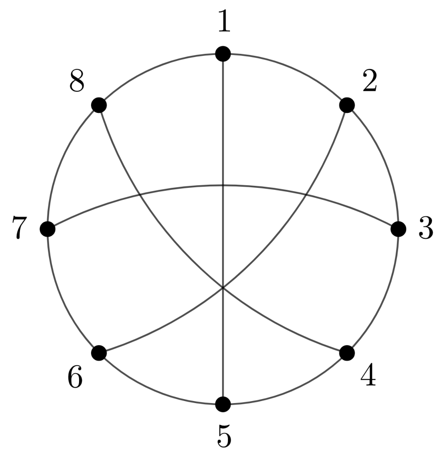
Důkaz. Toto tvrzení dokážeme postupně pro jednotlivé hodnoty t.

1. Nechť $t \in \{3, 4\}$. Potom zřejmě $\mathrm{diam}(C_{2t}(1, t)) = 2$, tedy každý vrchol musí být obarven jinou barvou a $\chi_S(C_{2t}(1, t)) = |V(C_{2t}(1, t)|$. Výsledná obarvení cirkulantů $C_6(1, 3)$ a $C_8(1, 4)$ jsou pro vizuální představu znázorněna na obrázcích 5.8 a 5.9 níže.



Obrázek 5.8: $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$-obarvení grafu $C_6(1, 3)$

2. Nechť $t \in \{5, 9, 13\}$. Zaměřme se nejprve na dolní mez $\chi_S(C_{2t}(1, t))$. Ukažme, že $\chi_S(G) > 4$. Sporem předpokládejme, že $\chi_S(G) \leq 4$. Uvažujme tedy obarvení c vrcholů grafu $C_{2t}(1, t)$ pomocí čtyř barev a vrchol $x \in V(C_{2t}(1, t))$ takový, že $c(x) = 2$. Takovýto vrchol v grafu $C_{2t}(1, t)$ musí existovat. Vrchol x sousedí s



Obrázek 5.9: $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$-obarvení grafu $C_8(1, 4)$

vrcholy $y = (x-1) \pmod{2t}$, $z = (x+1) \pmod{2t}$ a $w = (x+t) \pmod{2t}$. Na tyto tři vrcholy bude zapotřebí dalších tří barev, neboť jsou ve vzájemné vzdálenosti 2. Bez újmy na obecnosti tak položme $c(y) = 1$, $c(z) = 3$ a $c(w) = 4$. Potom nutně

$$c((w-1) \pmod{2t}) = 3,$$
$$c((w+1) \pmod{2t}) = 1.$$

Dále, opět vynuceně

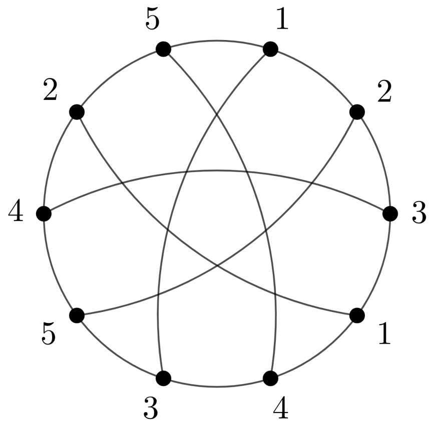
$$c((x-2) \pmod{2t}) = 4.$$

Pro $t = 5$ v tuto chvíli nastává u vrcholu $(x+2) \pmod{2t}$ problém. Tento vrchol nemůže být obarven žádnou ze čtyř barev, jelikož sousedí s vrcholem z a zároveň $\mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}((x+2) \pmod{2t}, (w+1) \pmod{2t}) = \mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}((x+2) \pmod{2t}, x) = \mathrm{dist}_{C_{2t}(1,t)}((x+2) \pmod{2t}, (x-2) \pmod{2t}) = 2$. Pro $t = 5$ tak už v tuto chvíli máme spor. Pro $t \in \{9, 13\}$ pokračujeme v diskuzi obarvení c a vynuceně dostáváme, že

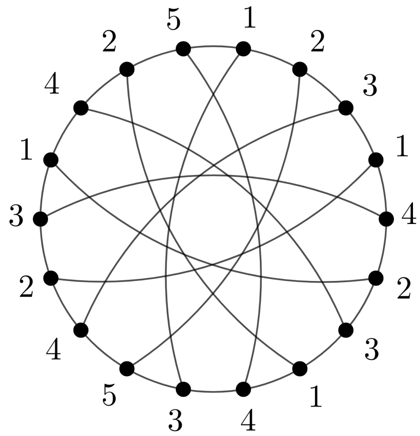
$$c((x+2) \pmod{2t}) = 4,$$
$$c((w-2) \pmod{2t}) = 2,$$
$$c((w+2) \pmod{2t}) = 2.$$

Vidíme, že použití čtyř barev si vynucuje periodické obarvení. To je však možné pouze, pokud je $|V(C_{2t}(1,t))| = 2t$ násobkem 4, tedy pro t sudá, což je spor. Tedy $\chi_S(C_{2t}(1,t)) > 4$.

Nyní se zaměříme na horní mez $\chi_S(C_{2t}(1,t))$. Pomocí programu byla nalezena následující obarvení cirkulantů $C_{10}(1, 5)$, $C_{18}(1, 9)$ a $C_{26}(1, 13)$ znázorněná v tomto pořadí na obrázcích 5.10, 5.11 a 5.12.



Obrázek 5.10: $(2,2,2,2,2)$-obarvení grafu $C_{10}(1,5)$



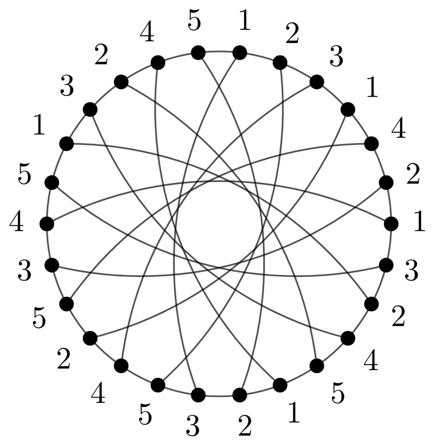
Obrázek 5.11: $(2,2,2,2,2)$-obarvení grafu $C_{18}(1,9)$

Celkově tak dostáváme $\chi_S(C_{2t}(1,t)) = 5$.

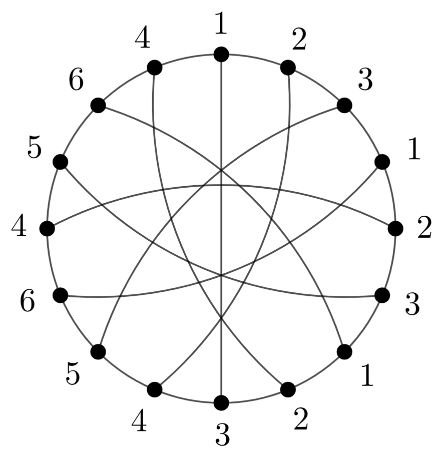
3. Nechť $t = 8$. Pro tuto hodnotu t byl důkaz proveden využitím programu, kdy řešení bylo nalezeno až pro 6 a více barev. Dostáváme tak $\chi_S(C_{2t}(1,t)) = 6$. Navržené obarvení je ukázáno na obrázku 5.13. ■

Závěrem této práce zde ještě uveďme důsledek vyplývající z věty 5.16 a tvrzení 5.17.

Důsledek 5.18. *Nechť $C_{2t}(1,t)$ je cirkulant, $t \geq 2$ a nechť $S = (2,2,2,\dots)$. Potom $\chi_S(C_{2t}(1,t)) = 4$ právě tehdy, když $t \equiv 2 \pmod 4$.*



Obrázek 5.12: $(2,2,2,2,2)$-obarvení grafu $C_{26}(1,13)$



Obrázek 5.13: $(2,2,2,2,2,2,2)$-obarvení grafu $C_{16}(1,8)$

6 Závěr

Cílem této práce bylo studium S-pakovacího barvení grafů. V první části této práce byly uvedeny vybrané známé výsledky z oblasti S-pakovacího barvení. Tyto výsledky byly rozděleny do podkapitol podle tříd barvených grafů. Ve druhé části pak byly nalezeny přesné hodnoty S-pakovacího chromatického čísla cirkulantů $C_{2t}(1,t)$ pro sekvence S ve tvaru $(1,1,2,2,2,\dots)$, $(1,2,2,2,\dots)$ a $(2,2,2,\dots)$. V případě $S=(1,1,2,2,2,\dots)$ nabývá příslušné chromatické číslo pouze hodnot 2 a 4, a to v závislosti na bipartitnosti barveného grafu $C_{2t}(1,t)$.

Pro sekvenci $S=(1,2,2,2,\dots)$ je pro $t\geq 14$ toto číslo vždy rovno 4, přičemž předpis možného obarvení pomocí čtyř barev se liší v závislosti na zbytku po celočíselném dělení t čtyřmi. I u poslední sekvence $S=(2,2,2,\dots)$ je pro $t\geq 14$ hodnota příslušného S-pakovacího chromatického čísla, tedy i předpis možného obarvení, závislý na zbytku po celočíselném dělení t čtyřmi. V tomto případě $\chi_S=4$ pokud $t\equiv 2 \pmod 4$ a $\chi_S=5$ jinak.

7 Přílohy

```
//hlavni trida
public class Graph {

  //hlavni metoda
  public static void main(String[] args) {
    //volba konkretni sekvence
    int[] s = {1,2,2,2};
    //poskytnuti sekvence tride Coloring
    Coloring.sequence = s;
    //poskytnuti poctu vrcholu tride Matrix
    Matrix.n = 16;
    Matrix.fillMatrix();
    Coloring.graphColoring(Matrix.distanceMatrix, Coloring.sequence.length);
    System.out.println();
  }
}

//trida pro konkretni pocet vrcholu sestavi distancni matici
public class Matrix {
  //pocet vrcholu
  //nastavuje se ve tride Graph
  public static int n;
  //distancni matice
  public static int[][] distanceMatrix;
  //mozne cesty mezi vrcholy
  public static int[] ways = new int[4];

  //metoda vrati pozici minima z pole, tj. index, na kt. je minimum
  public static int minimum (int[] list) {
    //na zacatku se jako minimum bere prvek na nulte pozici
    int min = 0;
    //prochazeni pole: pokud najdu mensi prvek, jeho pozice se zaznamena
    for (int i = 0; i < list.length; i++)
    if (list[i] < list[min]) {
      min = i;
    }
    return min;
  }
  //metoda vezme dva vrcholy a vrati jejich vzdalenost
  public static int distance(int x, int y) {
    //naplneni pole moznymi cestami
    ways[0] = Math.abs(x-y);
```

```
    ways[1] = n - Math.abs(x-y);
    ways[2] = Math.abs(((x+(n/2)) % n)-y) + 1;
    ways[3] = n - Math.abs(((x+(n/2)) % n)-y) + 1;
    //urceni minima
    //vraceni pozice/indexu minima
    int position = minimum(ways);
    return ways[position];
  }
  //metoda naplni distancni matici
  public static void fillMatrix() {
    //matice typu nXn
    distanceMatrix = new int[n][n];
    for (int i = 0; i < distanceMatrix.length; i++) {
      for(int j = 0; j < distanceMatrix[0].length; j++ ) {
        //pokud narazim na vzdalenost vrcholu se sebou samym
        //velka hodnota
        if (i == j) {
          distanceMatrix[i][j] = 9;
        }
        else {
          distanceMatrix[i][j] = distance(i,j);
        }
      }
    }
  }
}

//samotny algoritmus barveni
public class Coloring {

  //pole reprezentuje vrcholy
  //index udava cislo vrcholu, hodnota na indexu pak barvu, kt. je
   obarven
  public static int[] vertices;
  //sekvence
  //nastavuje se ve tride Graph
  public static int[] sequence;

  //v je index, tj. vrchol, ktery se barvi
  //c je barva
  //metoda zjistuje, zda je mozne obarvit vrchol danou barvou
  public static boolean isPossible (int v, int matrix[][], int c) {
    //cyklus projde vsechny vrcholy
    for (int i = 0; i < matrix.length; i++) {
      //prvek v matici udava vzdalenost mezi vrcholy
      //pokud je vzdalenost mensi nez hodnota a_i a vrchol i je uz
   barvou c obarveny
      if (matrix[v][i] <= sequence[c-1]  && c == vertices[i]) {
        return false;
```

```
      }
    }
    return true;
  }
  //rekurzivni metoda
  //vraci true, pokud se podari obarvit vsechny vrcholy
  //m je pocet barev
  public static boolean graphColoringRecursive(int matrix[][], int m,
   int v) {
    //vsechny vrcholy jsou obarvene
    //pocet vrcholu je delka matice
    if (v == matrix.length) {
      return true;
    }
    //pro vrchol v se testuji mozne barvy
    //k dispozici m barev
    //barvu 0 neuvazuji
    for (int c = 1; c <= m; c++) {
      //zkouska, jestli jde obarvit danou barvou
      if (isPossible(v, matrix, c)) {
        //je to mozne, priradim vrcholu barvu
        vertices[v] = c;

        //rekurze
        if (graphColoringRecursive(matrix, m, v + 1)) {
          return true;
        }
        //pokud barva nevede na reseni, odeberu ji
        vertices[v] = 0;
      }
    }
    //pokud nepujde priradit zadna barva
    return false;
  }
  //vraci false, pokud graf neni obarvitelny pro tuto sekvenci
  //metoda konci po nalezeni prvniho mozneho reseni
  //m je pocet barev
  public static void graphColoring(int matrix[][], int m) {
    //inicializace pole vrcholu
    vertices = new int[Matrix.n];
    for (int i = 0; i < Matrix.n; i++) {
      vertices[i] = 0;
    }
    //obarvovani od nulteho vrcholu
    //pokud se to nepodari, je zde vypis pro osetreni chyby
    if (!graphColoringRecursive(matrix, m, 0)) {
      System.out.println("Neexistuje reseni.");
      return;
    }
```

```
    printSolution();
  }
  //metoda vypise mozne obarveni
  public static void printSolution () {
    System.out.println("Mozne reseni:");
    for (int i = 0; i < Matrix.n; i++) {
      System.out.print(" " + vertices[i] + " ");
    }
    System.out.println();
  }
}
```

Literatura

[1] J. Balogh, A. Kostochka, X. Liu: Packing chromatic number of cubic graphs. *Discrete Mathematics* **341** (2018), 474–483.

[2] B. Benmedjdoub, I. Bouchemakh, É. Sopena: 2-distance colorings of integer distance graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **39** (2019), 589–603.

[3] F.T. Boesch, R. Tindell: Circulants and their connectivities. *Journal of Graph Theory* **8** (1984), 487–499.

[4] O.V Borodin, A.O. Ivanova: 2-distance 4-coloring of planar subcubic graphs. *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **5** (2011), 535–541.

[5] B. Brešar, J. Ferme, K. Kamenická: S-packing colorings of distance graphs $G(\mathbb{Z}, \{2, t\})$. *Discrete Applied Mathematics* **298** (2021), 143–154.

[6] B. Brešar, S. Klavžar, D.F. Rall: On the packing chromatic number of Cartesian products, hexagonal lattice, and trees. *Discrete Applied Mathematics* **155** (2007), 2303–2311.

[7] R.L. Brooks: On colouring the nodes of a network. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **37** (1941), 194–197.

[8] R. Čada, T. Kaiser, Z. Ryjáček: Diskrétní matematika, ZČU Plzeň, 170s. ISBN: 80–7082–939–7 (2004).

[9] J. Ekstein, P. Holub, B. Lidický: Packing chromatic number of distance graphs. *Discrete Applied Mathematics* **160** (2012), 518–524.

[10] J. Ekstein, P. Holub, O. Togni: The packing coloring of distance graphs $D(k, t)$. *Discrete Applied Mathematics* **167** (2014), 100–106.

[11] G. Fertin, E. Godard, A. Raspaud: Acyclic and k-distance coloring of the grid. *Information Processing Letters* **87** (2003), 51–58.

[12] J. Fiala, S. Klavžar, B. Lidický: The packing chromatic number of infinite product graphs clanku. *European Journal of Combinatorics* **30** (2009), 1101–1113.

[13] A.S. Finbow, D.F. Rall: On the packing chromatic number of some lattices. *Discrete Applied Mathematics* **158** (2010), 1224–1228.

[14] N. Gastineau, O. Togni: S-packing colorings of cubic graphs. *Discrete Mathematics* **339** (2016), 2461–2470.

[15] W.Goddard, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, J.M. Harris, D.F. Rall: Broadcast chromatic numbers of graphs. *Ars Combinatoria* **86** (2008), 33–50.

[16] W. Goddard, H. Xu: The S-packing chromatic number of a graph. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **32** (2012), 795–806.

[17] W. Goddard, H. Xu: A note on S-packing colorings of lattices. *Discrete Applied Mathematics* **166** (2014), 255–262.

[18] C. Heuberger: On planarity and colorability of circulant graphs. *Discrete Mathematics* **268** (2003), 153–169.

[19] J. Hofman: Chromatické parametry a cyklické vlastnosti distančních grafů, Diplomová práce, ZČU Plzeň (2020).

[20] P. Jacko, S. Jendroľ: Distance coloring of the hexagonal lattice. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **25** (2005), 151–166.

[21] D. Korže, A. Vesel: On the packing chromatic number of square and hexagonal lattice. *Ars Math. Contemp.* **7** (2014), 13–22.

[22] F. Kramer, H. Kramer: Un probleme de coloration des sommets d'un graphe. *CR Acad. Sci. Paris A* **268** (1969), 46–48.

[23] F. Kramer, H. Kramer: Ein Färbungsproblem der Knotenpunkte eines Graphen bezüglich der Distanz *p*. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl* **14** (1969), 1031–1038.

[24] F. Kramer, H. Kramer: A survey on the distance-colouring of graphs. *Discrete mathematics* **308** (2008), 422–426.

[25] R. Liu, X. Liu, M. Rolek, G. Yu: Packing $(1, 1, 2, 2)$-coloring of some subcubic graphs. *Discrete Applied Mathematics* **283** (2020), 626–630.

[26] B. Martin, F. Raimondi, T. Chen, J. Martin: The packing chromatic number of the infinite square lattice is between 13 and 15. *Discrete Applied Mathematics* **225** (2017), 136–142.

[27] A. Ševčíková: Distant chromatic number of the planar graphs, Rigorózní práce, UPJŠ Košice (2001).

[28] O. Togni: On packing colorings of distance graphs. *Discrete Applied Mathematics* **167** (2014), 280–289.

[29] V.A. Vorobieb: The simplest structures of homogeneous computer systems. *Comput. Syst. Novosibirsk* **60** (1974), 35–49.

[30] H. Walther: Über eine spezielle Klasse unendlicher Graphen. *Graphentheorie* **2** (1990), 268–295.