



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Modální řízení soustavy homogenních vozidel

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejíž úplný seznam je její součástí.

V Plzni, 2022

.....

Poděkování

Tímto bych chtěl velice poděkovat vedoucí této bakalářské práce RNDr. Janě Königsmarkové za odborné vedení, veškerý věnovaný čas a cenné rady, bez kterých bych tuto práci nebyl schopen dokončit. Poděkování také patří mé rodině a přátelům, kteří mě během zpracování této práce udržovali v psychické pohodě.

Abstrakt

V této bakalářské práci se budeme věnovat otázce multi-agentního řízení soustavy homogenních vozidel. U takovýchto systému máme snahu dosáhnout, zde za pomoci centralizovaného řízení, řetězové stability při zajištění požadované rychlosti soustavy a vzdálenosti mezi vozidly. Multi-agentní systém je složen z jednotlivých homogenních subsystémů. Na základě návrhu těchto subsystémů obdržíme stavový popis celé soustavy vozidel, pro který budeme navrhovat stavovou zpětnou vazbu. Návrh této stavové zpětné vazby provádíme za použití metody přiřazení Jordanovy formy. Pomocí tohoto řízení pak, kromě zajištění řetězové stability, můžeme systému udávat přídatné požadavky, jako třeba jaké o sobě budou mít vozidla informace, tzn. jaký typ informační topologie bude soustava obsahovat. Výstupy multi-agentních systémů jsou následně na základě přiřazené Jordanovy formy a tvaru stavové zpětné vazby, získané pro dané požadavky předávané informace a obdržení řetězové stability porovnány a diskutovány na několika příkladech.

Klíčová slova: řízení multi-agentních systémů, stavová zpětná vazba, přiřazení Jordanovy formy, stavový popis, komunikační topologie, řetězová stabilita soustavy, inteligentní dálnice, stabilita dynamického systému

Abstract

In this Bachelor thesis, we will address the issue of multi-agent control of a system of homogeneous vehicles. With a system like this, we have an effort to achieve, here by centralized control, string stability in ensuring the required system velocity and distance between vehicles. The multi-agent system is composed of individual homogeneous sub-systems. Based on the design of these sub-systems we will receive a state space of the whole vehicle system for which we will be designing the state feedback. We design this state feedback using the method of assigning Jordan's form. Using this control, in addition to providing string stability, we can give the system additional requirements, such as what information the vehicles will have about each other, i.e. what form of information topology the system will propose. The outputs of multi-agent systems are then compared and discussed based on the assigned form of Jordan and the shape of the state feedback obtained for the requests transmitted information and the receipt of chain stability.

Key words: multi-agent collaborative control, state feedback, Jordan form assignment, state space, communication topology, string stability, intelligent highway, dynamic system stability

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Historie multi-agentního řízení	2
1.2	Základní informace o soustavě vozidel	3
2	Komunikační struktury kolony	4
2.1	Centralizovaná, decentralizovaná, distribuovaná struktura	4
2.2	Topologie toku informací	5
2.3	Komunikační problémy v IFT	6
3	Stabilita subsystémů kolony.	7
3.1	Vnitřní stabilita	7
3.2	Vnější stabilita	8
3.3	Póly systému	9
3.4	Normy	10
4	Stabilita soustavy vozidel	11
4.1	Individuální stabilita	11
4.2	Řetězová stabilita	12
4.2.1	Definice řetězové stability	13
5	Stavová zpětná vazba	15
5.1	Návrhové metody zpětnovazební matice F	16
6	Návrh řízení soustavy homogenních vozidel	17
6.1	Dynamika soustavy vozidel	17
6.2	Návrh zpětnovazební matice F na základě přiřazené Jordanovy formy	20
7	Závěr	31

1 Úvod

zá bakalářské práci se budeme věnovat tématu řízení soustavy homogenních vozidel, přesněji vozidel jedoucích na komunikaci, nejčastěji dálnici, za sebou v zástupu. Takové systémy označujeme jako multi-agentní kooperativní systémy, které sestávají z více aktérů nazývaných agenti. Výrazem agent se zde charakterizuje systém, resp. subsystém, který představuje v soustavě samotný autonomní objekt, tj. v našem případě vozidlo. Tito agenti jsou schopni samostatně provádět některé činnosti a kooperovat mezi sebou, za účelem vykonání práce, kterou by jako jednotlivci nezvládli nebo by byla obtížná anebo by ji společně mohli zvládnout lépe. Abychom dosáhli kooperace mezi jednotlivými agenty, musí mezi nimi být zavedeny komunikační vazby, předávající informace nutné k jejich spolupráci. Takovéto propojení se běžně označuje jako topologie toku informací, kterým se podrobněji zabývají v práci [1], [2].

Tyto topologické sítě lze vytvářet za použití grafové teorie. Tato teorie poskytuje data o informačním toku mezi agenty, kde agenti v grafu představují jeho vrcholy a hrany komunikační, resp. informační tok. Graf může obsahovat neorientované nebo orientované hrany. V řízení soustavy vozidel se spíše užijí orientované hrany, které udávají, jakým směrem komunikace, resp. informace, probíhá. Orientace může být jednosměrná či obousměrná v závislosti na požadované topologii. Grafovou teorii podrobně popisují v [3].

Řízení multi-agentních kooperativních dynamických systémů reprezentuje způsob, jak ovládat soustavu nezávislých strojů, aby zvládly společnými akcemi dosáhnout kolektivního výsledku. Takovéto řízení se zvláště zaměřuje na závislosti jednotlivých agentů soustavy mezi sebou, které se projevují v dynamice celé soustavy. Tuto soustavu je pak možné řídit různými technikami řízení, mimo jiné pomocí stavové zpětné vazby F ($u = Fx$). Stavovou zpětnou vazbu F se snažíme navrhnout tak, aby matice dynamiky uzavřeného systému $A_c = A + BF$ měla požadovanou Jordanovu formu. Tento návrh zkoumali v pracích [4], [5]. Tímto návrhem se v této práci budeme také zabývat, za účelem stabilizace celé soustavy. Zatímco stabilita jednotlivých agentů je v klasické teorii řízení široce prozkoumána, u teorie multi-agentního řízení je výzkum teprve celkem na začátku. U stability multi-agentních systémů kromě dynamiky a stability jednotlivých agentů, hraje významnou roli i informační propojení jednotlivých agentů. Stabilitu u těchto systémů určuje také to, jak se chyby (poruchy) na jednotlivých vozidlech projevují na těch ostatních, tzn. jak se poruchy projevují do celého řetězce, tato stabilita soustavy je označována jako řetězová stabilita. Jsou-li splněny její podmínky, pak nám říká, že nedochází k zesilování poruch stavů soustavy postupem v řetězci.

V této práci se budeme tedy a priori soustředit na centralizované řízení. Toto řízení multi-agentních systémů může mít různé druhy provedení, které závisí na umístění centrální řídicí jednotky. Centrální jednotka shromažďuje data z jednotlivých agentů a zároveň provádí jejich zpracování, výpočty a rozhodování o průběhu daných agentů. Tato jednotka může být umístěna ve vedoucím agentu celého řetězce, který bývá označován jako lídr kolony. V takovém případě dochází ke komunikaci mezi vozidly (V2V-Vehicle to Vehicle). Nebo může být řídicí jednotka umístěna v silniční infrastruktuře, pak V2I (Vehicle to Infrastructure). Centralizované řízení je v některých aspektech jednodušší oproti distribuovanému, resp. decentralizovanému řízení, jelikož není nutné navrhovat ovládací programy pro veškeré agenty, ale jen pro řídicí jednotku, která ostatním agentům rozešle akce nutné k vykonání. Je také vhodné pro jeho jednoduchou údržbu. Používá se pro ne příliš rozsáhlé systémy, pro které je toto řízení velice účinné. Jiným typem řízení jsou distribuované, resp. decentralizované řízení, u kterých je složitost jejich návrhu zapříčiněna rozložením řídicích jednotek do více agentů a nutností komunikace a spolupráce mezi jednotlivými agenty.

Využití multi-agentního systému nacházíme od optimalizace výpočetních procesů, řízení distribuce energie v energetických sítích, až například k autonomnímu ovládání vozidel. V dnešní době zdražování pohonných hmot a neustálému zvyšování silničního provozu, může mít multi-agentní řízení silničního provozu veliký vliv na ekonomiku, ekologii a bezpečnost spojenou s tímto druhem dopravy. Vhodným řízením vozidel jedoucích v zástupu je možné snížit celkovou spotřebu paliva vozidel v soustavě. Budou-li vozidla udržovat mezi sebou vhodnou vzdálenost, vytvoří se na základě jejich aerodynamiky vzduchová bublina. Největší odpor vzduchu tak bude vyvíjen pouze na vozi-

dlo jedoucí v čele kolony, což povede ke snížení spotřeby ostatních vozidel. To bude mít za následek nižší spalování pohonných hmot, a tedy snížení emisí CO_2 vypouštěných do ovzduší. Udržování požadované vzdálenosti také povede na lepší uspořádání vozidel na dálnici, což zvýší její provozní kapacitu. Co se týče bezpečnosti provozu v práci [6] bylo ukázáno, že s rostoucí rychlostí vozidel, roste i pravděpodobnost dopravní nehody. Nehody jsou podle této práce nejčastěji způsobeny nedodržováním předepsané rychlosti. U správně řízených multi-agentních systémů se však vozidla snaží vždy udržet danou rychlost, což snižuje riziko vzniku nehod. Multi-agentní řízení, které má informace o agentech získávaných komunikací, tak bude mít větší přehled o celkovém stavu kolony a rychlejší reakční dobu, než-li samostatně jedoucí autonomní vozidla, či člověk vozidlo řídící. To může vést ke zvýšení rychlosti provozu a tedy snížení časové náročnosti přepravy.

V této bakalářské práci bychom se měli seznámit s multi-agentním řízením a pojmy jako řetězcová stabilita a topologie toku informací. Předchozí znalosti bychom pak chtěli využít při návrhu řízení soustavy homogenních vozidel, tj. soustavy vozidel, které mají stejný dynamický popis. Řízení budeme provádět stavovým zpětným regulátorem za využití přiřazení vhodné Jordanovy formy. Regulátor se budeme snažit navrhnout tak, aby vozidla po celou dobu jízdy udržovala mezi sebou požadovanou vzdálenost a aby jela celé kolona námi zvolenou rychlost. Tyto požadavky pak musí být splněné i při změně počátečních podmínek, či působení poruch. Návrh zpětné vazby provedeme pro různé délky kolon, různé přiřazení Jordanových forem. Různé Jordanovy formy zkoumáme, abychom získali vhled do toho, jakého řízení můžeme dosáhnout. Například některé Jordanovy formy budou vhodné pro zajištění řetězové stability, nebo symetrie soustavy, některé mohou umožnit přejít od centralizovaného řízení k distribuovanému, pokud se nám povedlo eliminovat potřebu znalosti některých stavových veličin. Některé příklady zde budeme demonstrovat v závěru práce. Většina výpočtů byla provedena v software Maple s využitím knihovny, s využitím knihovny *JordanFormAssignment* z [5].

1.1 Historie multi-agentního řízení

Vývoj multi-agentních systémů a jejich řízení lze vysledovat do konce 19. století, přesněji 80. let. V této době se výzkum zaměřoval převážně na oblast mobilních robotů. Před tímto obdobím se teorie řízení převážně zabývala solovým řízením robotů, či distribuovaností jejich řízení k řešení určitých problémů, ovšem toto řízení neobsahovalo robotické prvky. Jednou z prvních prací zabývajících se touto tematikou byl projekt California's Partners for Advanced Transit [7], přesněji zaměřující se na řízení skupinového pohybu automobilů.

Hlavním podnětem k vytvoření multi-agentního řízení bylo zkoumání běžné synchronizace v přírodě. Jedná se především o kolektivní chování zvířat ve skupině, kde různé druhy zvířat předvádějí v kolektivu různé chování. Takové kolektivní chování následně zvířata ve skupině využívají k informování skupiny o možném hrozcím nebezpečí, snížení energie nutné k pohybu, lepším vyhlídkám během lovu, či provedení určitého úkonu. Jednat se může o stádo koní, hmyzí roj nebo hejno ryb, ptáků apod. V takovém kolektivu jednotliví členové jednájí individuálně na základě smyslových vjemů, které ovlivňuje jejich blízké okolí. Přehled může mít jen o svých sousedech, ale o zbytku skupiny nemusí vůbec vědět. Reynolds v [8] odvodil sledováním těchto přírodních jevů zákony individuálního chování členů skupiny třemi pravidly

- sladění směru pohybu a rychlosti se skupinou,
- vyvarování se srážce se skupinou,
- zachování malé nejlépe konstantní vzdálenosti mezi se skupinou,

Tyto pravidla odvozená z kolektivního pohybu skupin zvířat v přírodě najdou vhodné využití i v technické problematice, v našem případě řízení soustavy vozidel. Stav takovéto soustavy jsou výrazně ovlivněny její velikostí, tedy počtem vozidel a způsobem, jakým si agenti mezi sebou vyměňují informace, či zda vůbec k této výměně může dojít. Například u hejna ryb, kde je k vizuální informaci přidává informace o vodním proudu, vznikajícím plavbou ryb, mají ryby větší přehled o okolí. To jim umožní rychlejší reakci oproti zvířatům, která využívají pouze vizuální informace (např. koně), [8].

Propojením lokálních počítačových sítí s internetem, se možnosti provedení složitějších výpočtů výrazně zlepšili, a s rozvojem komunikačních technologií, vzrostl v 90. letech zájem využít multi-agentní systémy v leteckém odvětví. Obzvláště pro řízení bezpilotních letounů, nebo také dronů, (UAV-unmanned aerial vehicle), které se v současné době využívají v mnoha odvětvích. Problematika řízení UAV byla studována například v pracích [9], [10].

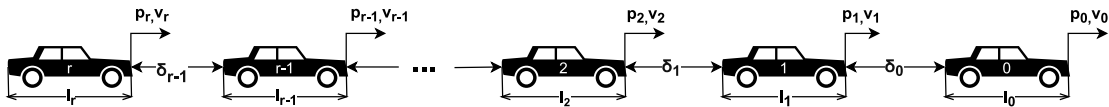
V poslední době se multi-agentní systémy hojně používají ve sféře transportních systémů, ať už jde o vzdušnou nebo pozemní dopravu. Pro efektivnost dopravy by byla vhodná plná automatizace těchto systémů, to však kvůli složitosti celého úkolu není zcela možné, neboť kromě správně navrženého systému je nutné zajistit i přizpůsobivost na náhodně se objevující problémy. U pozemní dopravy, kterou zde budeme zkoumat, je snaha dosáhnout dále zmiňované "inteligentní dálnice". Jde o automatizovaný dopravní systém, který může využívat centralizovaného nebo distribuovaného řízení, a řešit tak problémy transportní dopravy. Vhodným návrhem takového řízení by pak mohlo být možné vyhnout se překážkám na silnici, zabránit dopravním nehodám či zvýšit hustotu provozu na komunikaci, takovými tématy se zabývají v práci [7].

Současnými záležitostmi v oblasti multi-agentních systémů je v dnešní době hlubší zpracování problému kooperace, autonomie, společných akcí a vazeb. Lze již říci, že tyto systémy dosáhly úrovně dospělosti, což je spojeno s jejich využitím v řadě oborů a kromě prvotní oblasti výzkumu přecházejí také do prostředí sloužící jako rozhraní mezi člověkem a počítačem. Multi-agentní systémy již ovlivňují sféry, jako zábava, vzdělání, modelování a simulace různých typů sociálních sítí a organizací.

V budoucnosti by pak mohlo další zkoumání multi-agentních systémů přinést ovládnání a porozumění komplexních a spleťtých vztahů ve reálném světě a to způsoby, které byly s doposud známými metodami fyzicky neuskutečnitelné. Aplikacemi v budoucnu mohou být zmiňované inteligentní dálnice, chytré domy nebo by mohly být multi-agentní systémy implementovány do podpůrných systémů, sloužících pro sledování a opravu veškerých poruch těchto systémů.

1.2 Základní informace o soustavě vozidel

V této práci se budeme zabývat řízením soustavy $r + 1$ vozidel jedoucích v zástupu ve stejném pruhu, tzn. v koloně. Číslo r udává počet následovníků vedoucího vozidla, tedy lídra, kterého budeme značit číslem 0. Vedoucí vozidlo slouží jako referenční, jehož rychlost $v_0(t)$ je referenční rychlostí pro všechna zbylá vozidla v koloně, tedy požadujeme, aby $v_0(t) = v_1(t) = \dots = v_r(t)$ a poloha lídra $p_0(t)$ se používá jako počáteční souřadnice kolony (proto $p_0(t) = 0$), viz. 1, dále značíme jen v_i a p_i . Koordinace řízení vozidel spočívá v udržení formace, vyhýbání se kolizi, přizpůsobení formace počasí a stavu vozovky, rychlé ustálení formace po poruchách, přizpůsobení formace po příjezdu a odjezdu nějakého vozidla. V důsledku toho jsou vzdálenosti mezi vozidly δ_i proměnnými, které je třeba řídit. Ve formaci může být poloha každého vozidla definována různě



Obrázek 1: Soustava jedoucích vozidel ve formaci kolony s vyznačením důležitých parametrů.

(počátečním, středovým či koncovým bodem vozidla), v našem případě řekněme počátečním, a je označena p_i , $i = 0, 1, \dots, r$, což je vzdálenost i -tého vozidla od vozidla vedoucího. Jelikož uvažujeme homogenní soustavu, pak délka všech vozidel bude stejná, tzn. $l_i = l$ Aktuální vzdálenost mezi vozidly (δ_i), pak definujeme jako

$$\delta_i = p_i - p_{i+1} - l, \quad (1)$$

kde l je jednotná délka všech vozidel. Rychlost vozidla v_i lze určit pomocí derivace příslušné polohy nebo díky vyhodnocení ze senzorů. Jak už bylo řečeno rychlost lídra v_0 udává celkovou rychlost

kolony, kterou chceme dodržovat a požadujeme ji za konstantní, tedy v . Z čehož můžeme psát odchylku od požadované rychlosti, resp. relativní rychlost

$$\delta v_i(t) = v_i(t) - v, \quad (2)$$

Cílem je také udržet požadovanou vzdálenost mezi jedoucimi vozidly Δ . Požadovanou vzdálenost v zásadě určujeme na základě brzdě dráhy, která vychází ze stavu vozovky, počasí a rychlosti skupiny. Pak můžeme definovat odchylku od této požadované hodnoty, kterou budeme dále řídit, následovně

$$\delta p_i = \delta_i - \Delta. \quad (3)$$

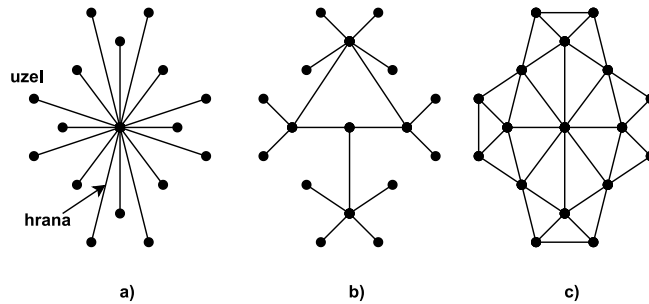
2 Komunikační struktury kolony

V této kapitole se budeme zabývat způsobem komunikace a získávání informací mezi vozidly v koloně. Představíme si základní topologie pro komunikaci a možnosti získávání informací o vozidlech. Dále si uvedeme potíže, které nastanou objeví-li se problémy v komunikaci mezi vozidly.

Komunikační struktura specifikuje tok informací mezi jednotlivými vozidly a nebo mezi vozidly a silnicí. Komunikační struktura je určena informacemi, které jsou používány regulátorem, jako např. absolutní/relativní vzdálenost nebo rychlost atd. Tyto informace jsou získávány palubními senzory nebo prostřednictvím komunikace. Struktura komunikace je tedy důležitý aspekt, který má velký vliv na proveditelnost řízení kolony a její vlastnosti.[11]

2.1 Centralizovaná, decentralizovaná, distribuovaná struktura

Komunikační strukturu lze rozdělit do třech hlavních skupin: centralizovaná, decentralizovaná a distribuovaná, viz. Obr.2. Tyto komunikační struktury jsou založeny na grafové teorii, probírané v práci [3]. Komunikační struktura udává, jak jsou přenášeny informace mezi vozidly a řídicími jednotkami, řízení multi-agentního systému tedy závisí na dané komunikační struktuře. Můžeme tedy říct, že komunikační struktura udává rozložení řídicích jednotek. V této práci se budeme soustředit na centralizované řízení, resp. strukturu.

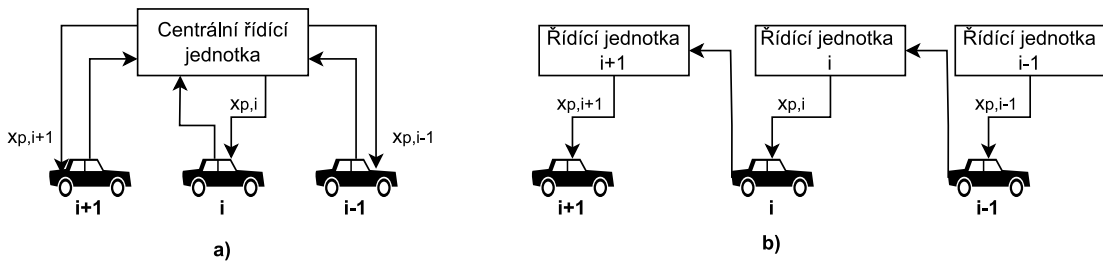


Obrázek 2: Komunikační struktury a)centralizovaná b)decentralizovaná c)distribuovaná

Centralizované řízení má řídicí jednotku umístěnou na centrálním místě, která shromažďuje a interpretuje data ze všech komunikujících vozidel. Dále provádí výpočty, na základě kterých určuje vhodné odezvy pro jednotlivá vozidla (např. jízdní akci), tyto reakce poté odesílá každému vozidlu, viz. Obr.3a. Fyzické umístění centrálních řídicích jednotek může být v jednom z vozidel v koloně, většinou jím bývá lídr (komunikace probíhá mezi vozidly V2V-Vehicle to Vehicle), nebo silniční infrastruktura (komunikace probíhá mezi vozidly a silnicí V2I-Vehicle to Infrastructure). Vozidla zde působí jako senzory, které poskytují měření centrálnímu řízení. Centralizované řídicí jednotky jsou také označovány jako systémy "inteligentní dálnice", [11], [12].

Výhodou centralizovaného řízení je jednodušší návrh aplikačních programů. Není nutné navrhovat program pro jednotlivá vozidla, ale pouze pro centrální řídicí jednotku, která na jejich základě odesílá vozidlům požadované akce k provedení. Takové řízení se také lépe udržuje, jelikož stačí provést akci pouze na centrální jednotce. Centralizované řízení je vhodné a účinné použít, pokud řízený systém není příliš složitý.

Zásadní nevýhodou centralizovaného řízení je, že pokud komunikační stanice vysílá a přijímá bezdrátové informace z jednoho místa, může dojít k velkým zpožděním komunikace a také zvýšenému riziku selhání komunikace. Pokud k takovému selhání dojde, řízení přestane fungovat, což v systému kolony může mít fatální následek ve formě hromadné dopravní nehody. Další nevýhodou je vysoké výpočetní zatížení centrální jednotky, která provádí veškeré výpočty a rozhoduje o průběhu postupu kolony, [13].



Obrázek 3: Znázornění principu a) centralizovaného a b) distribuovaného řízení.

Naproti tomu distribuované řízení, převážně využívající komunikaci mezi vozidly V2V, je takové, kde každé vozidlo shromažďuje a interpretuje informace z ostatních vozidel samo, pomocí komunikace a nebo palubních senzorů, a na základě výpočtů určuje svou vlastní odezvu, viz. Obr.3b. Pokud jsou používány pouze palubní senzory, říkáme o systému, že je autonomní, zatímco neautonomní nebo kooperativní označujeme takový systém, kde je zahrnuta i komunikace. Většina novějších studií se zaměřuje spíše na zkoumání distribuovaného, nežli centralizovaného řízení, jelikož požadavky na komunikační systém a nutné změny stávající infrastruktury silnic nejsou u tohoto případu tak závažné. Distribuované řízení z decentralizovaného zcela odstraňuje rozdělené centrální uzly, úplně tedy eliminuje centralizaci. U takového řízení mají agenti stejné přístupy k ostatním informacím [11], [12].

Výhodou distribuovaného (i decentralizovaného) řízení oproti centralizovanému je odolnost systému na působící poruchy a na chyby v komunikaci, při přerušení komunikace nedojde k rozpadu řízení, jelikož každé vozidlo rozhoduje o své akci i na základě palubních senzorů. Navíc při závadě komunikace či samotného vozidla je možné překonfigurovat komunikační topologii mezi vozidly tak, aby provoz kolony nebyl narušen. Další z výhod takového řízení/komunikace je převedení některých výpočtů na jednotlivá vozidla. Centrální jednotka tedy nebude tolik zatěžována a může působit jen jako zpracování pomocných událostí.

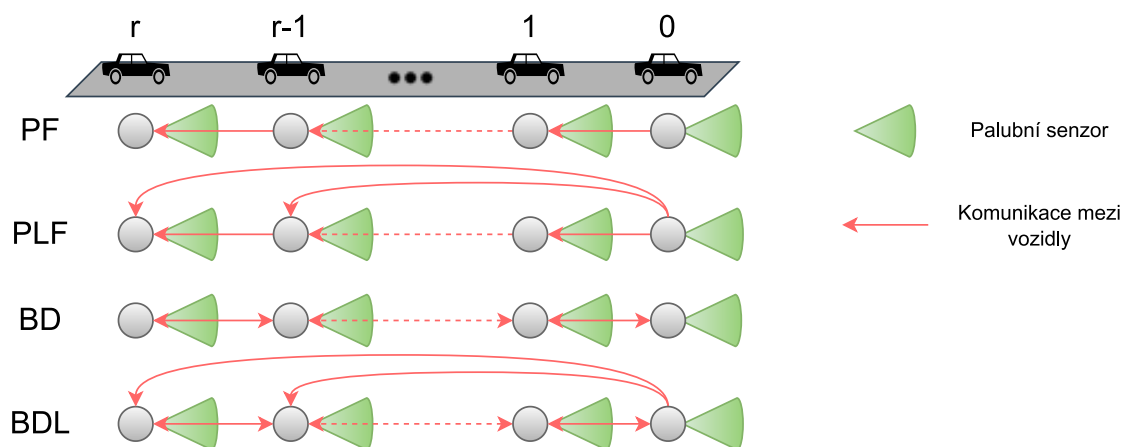
Nevýhodou zde však může být nutnost komunikace mezi zařízeními různých výrobců a jejich vzájemné součinnosti, což může výrazně ovlivnit složitost řídicích programů, [12], [13].

2.2 Topologie toku informací

Topologie toku informací (dále jen IFT-Information Flow Topology) popisuje, jakým způsobem si vozidlo mění informace s ostatními vozidly. Různé IFT jsou definovány na základě komunikačních podmínek. Na Obr. 4. můžeme vidět následující nejčastěji užívané topologie pro kolonu $r + 1$ vozidel, kde r udává počet následovníků lídra [2]:

- Následovník předchůdce (PF→predecessor following)
- Následovník předchůdce a lídra (PLF→predecessor leader following)
- Obousměrný přenos (BD→bidirectional)

- Obousměrný přenos s lídrem (BDL→bidirectional-leader)



Obrázek 4: Topologie toku informací pro kolonu vozidel.

Dále se používají topologie s následováním dvou předchůdců (TPF) a následováním dvou předchůdců a lídra (TPLF). Obecněji lze tyto IFT zapsat následovně k PF a k PLF, kde k udává počet následovníků, se kterými je komunikováno. Existuje i mnoho dalších topologií, které mohou být zkoumány podobným způsobem.

Je dobré podotknout, že informace předávaná IFT mezi jednotlivými vozidly může obsahovat všechny podrobnosti, jako poloha, rychlost a zrychlení vozidla nebo pouze některé z nich, a to tedy za předpokladu, že nedojde k selhání komunikace. Vozidlo může získávat jízdní stavy prostřednictvím palubních senzorů nebo komunikací s ostatními vozidly.

Při použití palubních senzorů, jsou-li k řízení potřeba absolutní polohy, může být použit systém GPS/DGPS (podrobněji v [14]), ty však nelze používat samostatně, jelikož mají nízkou obnovovací frekvenci (~ 1 Hz) a nejsou dostatečně přesné. Alternativně by mohly být po celé dálnici rozmístěny malé magnety, které by udávaly vzdálenost od začátku dálnice, což by bylo náročně realizovatelné. Kromě toho lze také použít pozorovatele, jako je rozšířený Kalmanův filtr (podrobněji v práci [15]), který z palubních měření rychlosti určí odhad absolutní polohy. Absolutní rychlosti lze měřit velice přesně například pomocí snímačů umístěných na kolech vozidel. Co se týče absolutního zrychlení, to můžeme odhadnout z měření rychlosti nebo je možné ho změřit pomocí akcelerometru.

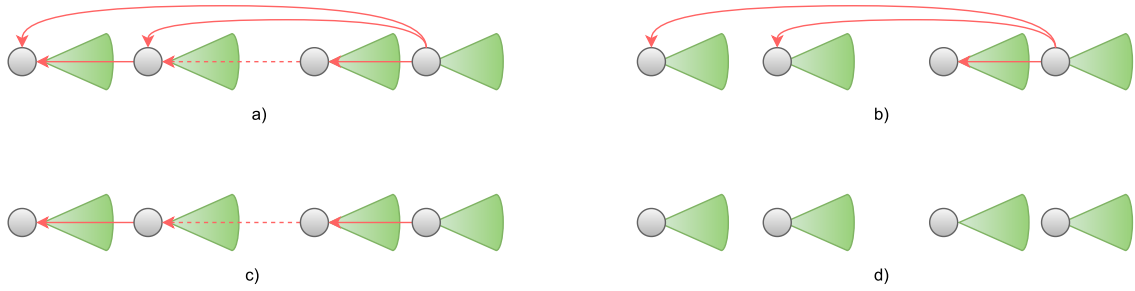
K řízení kolony je také možné použít informace o relativní poloze a rychlosti, ty lze přesně měřit i při vysokých rychlostech např. použitím radaru nebo zařízení lidar (podrobněji viz [16]). Bohužel šum na měření relativních poloh a rychlostí je takový, že relativní zrychlení nelze odhadnout s přijatelným poměrem signálu k šumu nebo fázovým zpožděním. Možností je použití bezdrátové komunikace k obdržení zrychlení ostatních vozidel, [11].

Geometrie formace udává požadovanou vzdálenost mezi jednotlivými vozidly v systému kolony, v mnoha pracích také označováno jako politika dosahu. Základně se dělí na politiku konstantní vzdálenosti a konstantní časový pokrok, viz [1].

2.3 Komunikační problémy v IFT

Efekt způsobený selháním komunikace nelze ignorovat, přestože kolona propojených autonomních vozidel (dále jen CAV-Connected and Automated Vehicles) přináší mnoho výhod. Proto je IFT důležitá pro stabilitu v koloně. Existují studie, které zkoumaly účinky různých IFT na stabilitu a konvergenci kolony k požadované hodnotě, kterou může být například celková rychlost kolony, či vzdálenost jednotlivých vozidel. Jako například v článku [2], kde studovali účinnosti IFT

na stabilitu a škálovatelnost homogenních kolon CAV s problémy. Dále Syed a kol. studovali vliv IFT na výkon řízení kolony a poté aplikovali lokální řízení, aby dosáhli globálního konsensu (shody mezi vozidly) na požadovaných hodnotách. Výsledky ukázaly, že vážená a omezená strategie řízení snížila složitost komunikace, viz. práce [17]. Většina studií se však zaměřuje pouze na pevné IFT (přesně dané po celou dobu jízdy) za předpokladu ideální komunikace. Nicméně v reálném světě dochází k selhání komunikace náhodou a je tak nutné vyvinout dynamické IFT (může se měnit v průběhu jízdy) pro adaptivní komunikaci kolony [1].



Obrázek 5: Znázornění průběhu problému selhání komunikace z IFT a) PLF do následujících IFT b) LF, c) PF a d) CAV.

Problémy s komunikací však existují ve všech reálných případech kolony. K selhání komunikačního spojení dojde v případě, že se přeruší komunikace mezi některými vozidly. Jako příklad si uvedeme selhání komunikace u topologie PLF viz. Obr. 5a. Zde můžeme vidět, že pokud selže komunikace od předchůdce z topologie PLF se nám stane pouze následování lídra (LF) Obr. 5b. a naopak, selže-li komunikace od lídra, z původní topologie dostaneme pouze PF. Avšak se může stát, že dojde k selhání obou těchto komunikací, jak od lídra, tak od předchůdce a řízení se vrátí k základnímu CAV, což se rovná pevné IFT znázorněné na Obr. 5d. [1].

Vozidla jsou v koloně detekovatelná pomocí palubních senzorů a nebo komunikace, jestli však u některého vozidla dojde k poruše komunikace stává se nedetekovatelným, pokud jede mimo dosah radaru nebo jede mezi dvěma dalšími nekomunikujícími vozidly. V nejhorším případě může být chování nedetekovatelného vozidla zcela opačné oproti ostatním detekovatelným, a to poté vede ke kolizi vozidel. Z bezpečnostního hlediska by proto měl být řídicí algoritmus schopen vypořádat se s nekomunikujícími vozidly. Jedná se o náročný úkol, velice závisící na komunikační struktuře, více je uvedeno například v práci [11].

3 Stabilita subsystémů kolony.

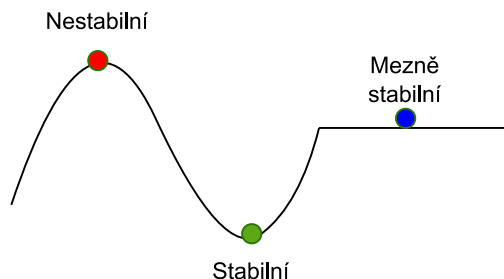
Stabilita je jedna z nejvýznamnějších vlastností systému. Je také označována, jako schopnost dosáhnout ustáleného stavu a přetrvat v něm. Stabilitu můžeme určit z vnitřního (stavového) popisu (vnitřní stabilita) nebo z vnějšího popisu (vnější stabilita), [18], [19].

3.1 Vnitřní stabilita

Mějme tedy vnitřní (stavový) popis spojitého LTI (lineárního časově invariantního) systému definovaný jako

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (4)$$

kde $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ je vektor stavů, $y \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ vektor výstupů, $u \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ vektor vstupů (také vektor řízení), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je matice dynamiky, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matice vstupů, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matice výstupů systému a $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ matice přímé vazby ze vstupu na výstup.



Obrázek 6: Intuitivní zobrazení stability.

V našem případě se budeme soustředit na systém, kde nebude žádný vliv přímé vazby ze vstupu na výstup, tj. $D = 0$, a můžeme tedy upravit předchozí vztah do tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (5)$$

O systému (5) můžeme říct, že je (vnitřně) stabilní právě tehdy, když každý jeho počáteční stav odezní do nuly (počátku stavového prostoru), tj. když všechna vlastní čísla matice dynamiky budou ležet v otevřené levé polorovině komplexní roviny. Tuto podmínku můžeme testovat tak, že všechny kořeny charakteristického polynomu, které lze ze stavového popisu získat řešením rovnice

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (6)$$

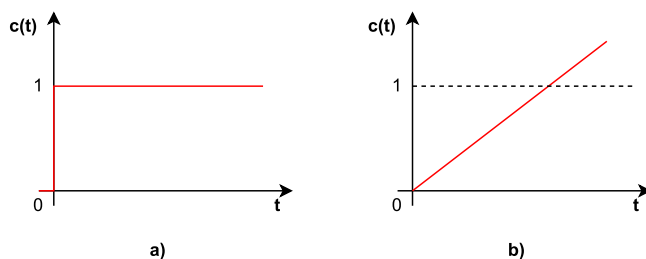
kde I je jednotková matice o stejné velikosti jako matice A , mají zápornou reálnou část.

3.2 Vnější stabilita

Mějme daný vnější popis spojitého LTI systému, popsany pomocí přenosové funkce, kterou získáme ze vztahu (5) následovně

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (7)$$

Potom můžeme o systému (7) říct, že je zvnějšku (BIBO-Bounded Input Bounded Output) stabilní právě tehdy, když odezva na každý omezený signál je také omezená, tj. jmenovatel přenosu má všechny kořeny v otevřené levé polorovině komplexní roviny, tedy jejich reálná část je záporná. Pokud omezený vstup vyvolá neomezený výstup, říkáme, že je systém zvnějšku (BIBO) nestabilní, viz.[19].



Obrázek 7: Znázornění a)omezeného (skok) a b)neomezeného (rampa) signálu.

Omezený signál je takový, který má konečnou hodnotu minima a maxima. Pokud jsou tedy hodnoty minima a maxima konečné, znamená to u spojitého signálu, že jsou konečné i všechny

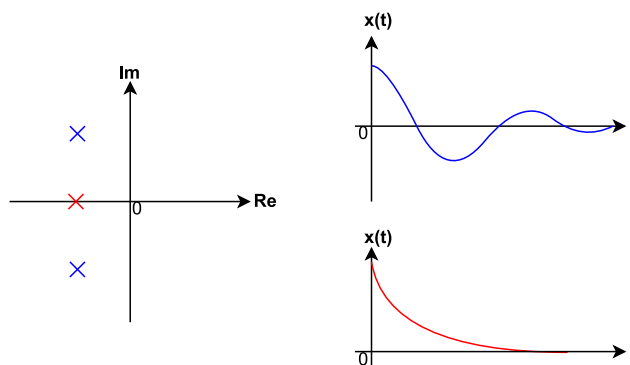
hodnoty mezi nimi, viz. Obr.7a.

BIBO stabilita je vlastnost přenosu (obrazu ze vstupu na výstup). Pokud zjistíme, že je systém vnitřně stabilní, potom je i BIBO stabilní, tato vlastnost však neplatí obráceně. U spojitých LTI systémů se vždy jedná o stabilitu asymptotickou. Asymptoticky stabilní systémy jsou takové, jejichž odezva na nenulové počáteční podmínky lze působením vnějšího vstupu uvést do rovnovážného stavu, tj. jejich odezva postupem času zaniká, [19].

3.3 Póly systému

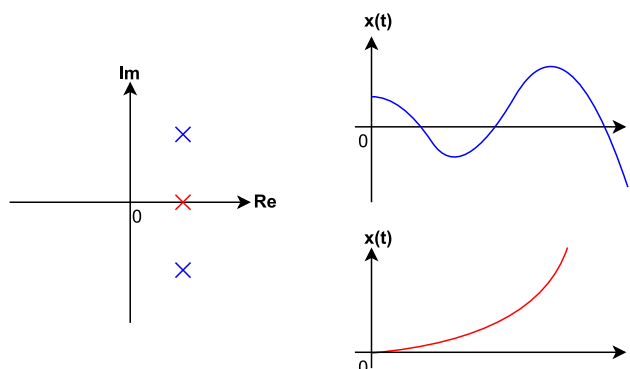
Póly systému označujeme dříve zmíněné kořeny charakteristických polynomů (jmenovatel přenosové funkce (7), vlastní čísla matice dynamiky, tj. kořeny rovnice (6)), na základě kterých rozhodujeme o dynamice systému a pomocí kterých můžeme určit jeho stabilitu, [18], [20].

Leží-li póly systému v otevřené levé polorovině komplexní roviny, tj. mají zápornou reálnou část, říkáme, že je systém stabilní (asymptoticky), viz. Obr.8. Pokud má systém více takových pólů označujeme jako dominantní ty, které jsou nejbližze imaginární ose, tj. které mají největší vliv na dynamiku systému.



Obrázek 8: Stabilní póly a odezvy systémů obsahující tyto póly.

Pokud jsou některé póly systému v otevřené pravé polorovině komplexní roviny, označujeme systém za nestabilní, viz. Obr.9. Systém se stává nestabilním, když se v pravé polorovině vyskytuje již jen jeden pól.

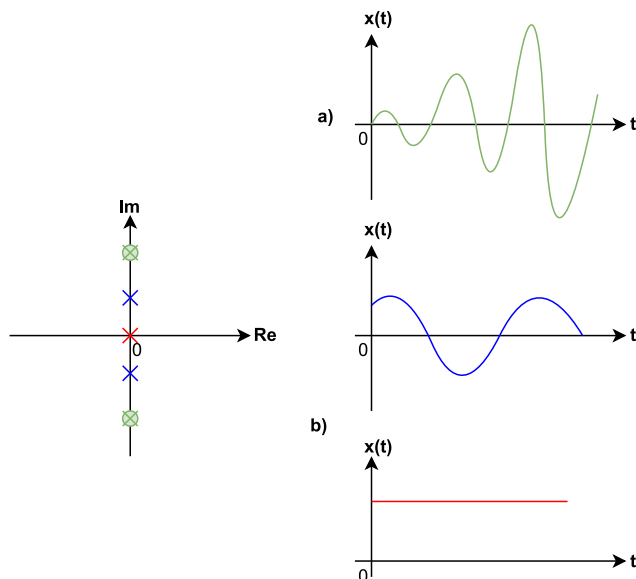


Obrázek 9: Nestabilní póly a odezvy systému obsahující tyto póly.

Vyskytují-li se póly přímo na imaginární ose a neopakují se, tj. nejsou vícenásobné, říkáme, že

je systém na mezi stability, viz. Obr.10b, tyto systémy jsou také označovány za kriticky stabilní. Vícenásobné póly na imaginární ose vedou na nestabilní systém, viz. Obr.10a, [18].

Kriticky stabilní systém generuje na výstupu oscilující signál s konstantní hodnotou amplitudy a frekvence.



Obrázek 10: Póly umístěné na imaginární ose a) nestabilní (vícenásobné póly) b) mezně stabilní a jejich odezvy.

3.4 Normy

Kvantitativní zpracování výkonu a robustnosti řídicích systémů, vyžaduje vhodně zavést signálové a systémové normy, udávající měření velikosti daných signálů a systémových operátorů. V této kapitole uvedeme některé normy signálů a systémů, které jsou důležité pro vyhodnocování optimálního a robustního řízení.

Nechť \mathbb{R} je obor reálných čísel a \mathbb{N} přirozených čísel. Pro vektor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ je tedy definována p -norma následovně:

$$\|x\|_p \triangleq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \in \langle 1, \infty \rangle, n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

$$\|x\|_\infty \triangleq \max_i |x_i| \quad (9)$$

Přejdeme-li do spojité oblasti, definujeme normu spojitého signálu $x(t)$ definovaného na intervalu I , následovně

$$\|x(t)\|_p^I \triangleq \left(\int_I |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, p \in \langle 1, \infty \rangle \quad (10)$$

$$\|x(t)\|_\infty^I \triangleq \sup_{t \in I} |x(t)|, \quad (11)$$

a pokud $I = \langle 0, \infty \rangle$, potom zkráceně označujeme $\|x(t)\|_p \triangleq \|x(t)\|_p^I$. Například, představuje-li signál $x(t)$ napětí nebo proud, pak je tato norma úměrná celkové energii spojené se signálem.

Pro dynamický systém $G(s)$, viz.(7), můžeme zavést normu systému $\|G(s)\|_\infty$ definovanou jako

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} |G(j\omega)|, \quad (SISO) \quad (12)$$

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} \bar{\sigma}|G(j\omega)|, \quad (MIMO), \quad (13)$$

kde SISO označuje systémy s jedním vstupem a jedním výstupem (single input, single output) a MIMO systémy s více vstupy a více výstupy (multiple inputs, multiple outputs), a $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ je největší singulární číslo matice přenosů $G(j\omega)$, [21], [22].

V této práci se budeme nejvíce soustředit na systémové normy $\|\cdot\|_2$ a $\|\cdot\|_\infty$, které budou vystupovat u definic řetězové stability.

4 Stabilita soustavy vozidel

V této kapitole se zaměříme na způsoby zajištění stability homogenní kolony vozidel. O koloně řekneme, že je homogenní, pokud všechna její vozidla mají stejnou dynamiku, jinak nazýváme kolonu heterogenní. Abychom o koloně mohli tvrdit, že je stabilní, musí být stabilní jako celek i individuálně každá její jednotka - vozidlo, zároveň je tedy nutné splnit podmínky individuální i řetězové stability, viz [21], které si zde uvedeme. Ukážeme, jak jednotlivé stability ověřovat a představíme si běžně používané definice řetězové stability, s potřebnými definičními vztahy.

Systém kolony se skládá z několika jednotlivých vozidel, tudíž i dynamika takového systému bude vycházet z dynamiky těchto vozidel. Označme matici dynamiky i -tého vozidla $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matici vstupů $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Potom můžeme matici dynamiky celého systému vytvořit pomocí těchto matic (A_i, B_i) ,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & B_n \end{bmatrix}, \quad (14)$$

kde $\mathbf{0}$ představuje nulové matice kompatibilních rozměrů. V této práci se budeme zabývat homogenním řetězcem vozidel, proto budeme v matici dynamiky uvažovat všechny prvky na hlavní diagonále stejné, tj. $A_1 = \dots = A_n$. Dále, protože jsme také zaváděli jako stavy systému odchylky mezi polohami po sobě jdoucích vozidel, rozšíří se matice dynamiky celého systému ještě o hlavní naddiagonálu, ve které se budou vyskytovat nenulové bloky A_p kompatibilních rozměrů. Výsledná matice dynamiky bude mít podobu

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_p & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A_p \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

4.1 Individuální stabilita

Individuální stabilitou je v [21] popisována schopnost každého ze členů kolony konvergovat k požadovaným trajektoriím, požadované vzdálenosti mezi vozidly a požadované rychlosti. Tedy, každý ze členů je individuálně stabilní, pokud odchylka aktuální vzdálenosti konverguje k požadované vzdálenosti, a pokud aktuální rychlost konverguje k požadované rychlosti kolony, tj. pro rovnici (3) a (2) je splněno

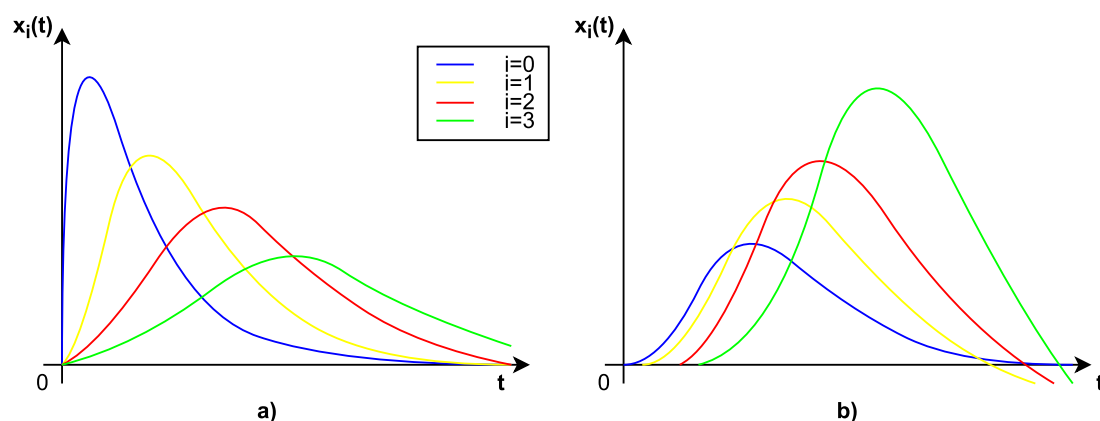
$$\delta p_i \rightarrow 0, \delta v_i \rightarrow 0.$$

Musíme však počítat s tím, že relativní vzdálenost δp_i bude při zrychlení či zpomalení předchozího vozidla nenulová, [23] Chap. 11. Tudíž, i individuálně stabilní vozidla mohou hodně zesilovat poruchy a způsobovat dopravní komplikace. Následně je potom tedy nutné popsat, jak by se chyby (odchyly od požadovaných vzdáleností a rychlostí) šířily mezi jednotlivými vozidly postupem v koloně. O tomto pojednává řetězová stabilita, kterou si uvedeme v následující kapitole 4.2.

4.2 Řetězová stabilita

U řízení kolony narážíme na problém s řetězovou stabilitou, resp. nestabilitou. Jedná se o situaci, kdy poruchy stavů systému mohou být v řetězci vozidel postupně zesilovány. Z různých studií vyplývá, že nestabilita řetězce formace kolony může vést k vytvoření dopravních kolon, což vážně ohrožuje výhody řízení kolony. To nastává příčinou nevhodného řízení jednotlivých vozidel v koloně, což také může vést ke zvýšené spotřebě pohonných hmot, a tedy vyšším emisím CO₂, [2]. Řetězovou stabilitou se tedy zabýváme, jelikož nám umožňuje vyřešit předchozí dopady nestability. Avšak přináší další výhody, jako zvýšení bezpečnosti provozu, či umožnění navýšení kapacity dálnic, vlivem řízení na konstantní vzdálenosti, kdy jednotlivá vozidla budou na dálnici lépe uspořádána.

Pro vyřešení problému nestability, byla řetězová stabilita široce studována pro řízení kolony vozidel. O koloně vozidel tedy můžeme říct, že je řetězově stabilní, jestliže nezesiluje poruchy stavů šířením přes řetězec vozidel, jinak říkáme, že je kolona řetězově nestabilní. Intuitivně je situace znázorněna na Obr.11, kde $x_i(t)$ označuje odchyly v rychlosti, či odchyly od požadované relativní vzdálenosti vozidla i v čase t .



Obrázek 11: Znázornění intuitivního popisu formulace řetězové stability, kde
a) řetězově stabilní a b) řetězově nestabilní kolona.

Velké množství prací navrhlo různé druhy definic řetězové stability, viz.[21], [24], [25], [11], [26]. I když v mnoha studiích vykazují simulace podobnou vlastnost jako na Obr.11a, přesto se v některých případech jejich nedefinované vlastnosti řetězové stability zásadně odlišují. Tyto odlišnosti potom komplikují vzájemné porovnávání různých přístupů a definic. Byly popsány různé definice řetězové stability pomocí různých oblastí (časové, frekvenční), různých norem (signálové, systémové) a různé síly stability (slabé, striktní). Odlišnost těchto zavedení blokuje někdy porovnání mezi jednotlivými studiemi. V práci [21] se autoři snaží o srovnání různých definic a dávají je do souvislostí. Pro další studium jsou důležité přesné analýzy jejich vztahů. Krom toho byla navržena spousta analytických metod a odvozeno mnoho alternativních vlastností, jejichž vztahy, klady, zápory a řešitelné problémy, nejsou zatím příliš diskutovány. Pro další studie problematických otázek je základem lepší pochopení těchto metod a vlastností, [21].

4.2.1 Definice řetězové stability

I. Původní definice řetězové stability ([21], [25])

Řetězec vozidel je stabilní, pokud pro jakýkoliv soubor omezených perturbací v počátečních podmínkách všech vozidel zůstávají relativní rychlost (odchylka od požadované rychlosti) a odchylka od požadované vzdálenosti omezeny a s časem $t \rightarrow \infty$ se tyto odchylky blíží k nule, [25].

Existuje-li omezená porucha počátečního stavu vedoucího vozidla nebo tatáž porucha pro všechna vozidla, tato definice nám určuje dvě vlastnosti:

- omezenost kolísání polohy a rychlostí všech vozidel
- ustálení kolísání odchylek od požadované vzdálenosti a rychlosti

Vlastnost omezení kolísání poloh a rychlostí by měla platit pro libovolný počet vozidel v řetězci (potom netriviální). Pojem řetězové stability se potom stává škálovatelný na obecně dlouhé řetězce vozidel a umožňuje nám libovolné přidávání a odebírání vozidel z řetězce bez ovlivnění stability, viz. [21].

Původní definice je velmi podobná intuitivnímu popisu řetězové stability s tou výjimkou, že kolísání polohy nemusí být nutně menší než počáteční poruchy. Kolísání polohy může být zobecněno na jiné fluktuace stavů soustavy, např. rychlost.

Řetězová stabilita ve frekvenční oblasti

Pro usnadnění teoretické analýzy byla navržena nutná podmínka pro řetězovou stabilitu ve frekvenční oblasti.

II. Silná frekvenční řetězová stabilita ([11], [21])

Mějme přenosové funkce stavů i soustavy vozidel při změně na j -tém vstupu vozidlu definované jako

$$G(i, j)(s) = c_i^T (sI - A_c)^{-1} b_j, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (16)$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je řád systému, $m \in \mathbb{N}$ je počet vstupů systému, vektor c_i^T označuje daný řádek výstupní matice, vektor b_j je daný sloupec vstupní matice a A_c je matice dynamiky uzavřeného systému definovaná rovnicí (31). Tento přenos lze také získat z celkové systémové matice pro kolonu $G(s)$ definované rovnicí (7) tak, že v této matici vybereme prvek $G(i, j)$.

Potom takto definovaný systém je podle [21] silně frekvenčně řetězově stabilní, pokud pro přenosovou funkci $G(i1, i)(s)$ platí, že

$$\|G_{i-1, i}(s)\|_{\infty} = \left\| \frac{G(i, i-1)}{G(i-1, i-1)} \right\|_{\infty} \leq 1, \forall i \in S_r, \quad (17)$$

kde $S_r = \{1, \dots, r\}$ a $r \in \mathbb{N}$ je počet následovníků lídra kolony. Jedná se o to, jak moc změna vozidla $(i-1)$ ovlivní i -té vozidlo.

Upravme tento zápis (17) pro naše účely testování řetězové stability, kde jedno vozidlo je reprezentováno dvěma stavy a kontrolujeme tuto normu pro případ, že změna nastane na jakémkoliv z vozidel.

Ze vztahů (18) a (19) získáme pomocnou matici, kterou označíme jako \hat{G} , což je matice podílů odpovídajících přenosů, tedy přenosu pro relativních rychlostí a odchylky od požadované

vzdálenosti ostatních vozidel a přenosu vozidla, na kterém nastala změna.

$$\forall i, j \in S_r : k = 2j + 1 \Rightarrow \hat{G}_{i,j} = \frac{G(k, i + 1)}{G(2i \pm 1, i + 1)}, \quad \forall k \in 2\mathbb{N} + 1 = \{1, 3, \dots, n\} \quad (18)$$

$$\forall i, j \in S_r : k = 2j + 2 \Rightarrow \hat{G}_{i,j} = \frac{G(k, i + 1)}{G(2i \pm 2, i + 1)}, \quad \forall k \in 2\mathbb{N} - \{0\} = \{2, 4, \dots, n - 1\}, \quad (19)$$

kde $S_r = \{0, 1, \dots, r\}$ a $r \in \mathbb{N}$ je počet následovníků lídra. Rovnice (18) nám dává podíl relativních rychlostí a rovnice (19) podíl odchylek od požadované vzdálenosti.

Potom takto definovaný systém je *silně frekvenčně řetězově stabilní*, pokud platí, že

$$\|\hat{G}_{i,j}(s)\|_\infty \leq 1, \quad \forall i, j \in S_r, \quad (20)$$

Tato norma nám říká, jak moc změna vozidla (i) ovlivní j -té vozidlo.

Definice II z výrazu (17) má však specifické omezení, a to, že u systému kolony předpokládá topologii PF. Nemá tedy význam pro ostatní IFT. Pro topologie k PF a k PLF byly navrženy tři následující modifikace.

III. Frekvenční řetězová stabilita ([11], [21])

Lineární systém kolony s topologií k PF nebo k PLF je *frekvenčně řetězově stabilní*, pokud pro přenosovou funkci mezi lídrem kolony s označením 0 a jakýmkoliv libovolným následujícím vozidlem i , získanou úpravou rovnice (16), kde místo předchůdce uvažujeme lídra, platí:

$$\|\hat{G}_{0,i}(j\omega)\|_\infty \leq 1, \quad \forall i \in S_r, r \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

IV. Případná řetězová stabilita ([21], [24])

O lineárním systému kolony s topologií k PF nebo k PLF řekneme, že je *případně řetězově stabilní*, pokud existuje $N < r + 1$ a pro přenosovou funkci výstupů mezi lídrem kolony s označením 0 a jakýmkoliv následujícím vozidlem $i > N$ a platí,

$$\|\hat{G}_{0,i}(j\omega)\|_\infty \leq 1, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Tedy pokud tato podmínka platí od určitého vozidla N do konce kolony, potom je tento systém případně řetězově stabilní. Znázornění Definice IV. jsme provedli na grafu pro intuitivní popis řetězové stability, viz. Obr.12. Zde můžeme vidět, že celý systém kolony není řetězově stabilní, jelikož dochází k zesílení poruch stavu. Nicméně pro $N \geq 2$ již systém kolony tyto poruchy nezesiluje a můžeme tedy říci, že je případně řetězově stabilní.

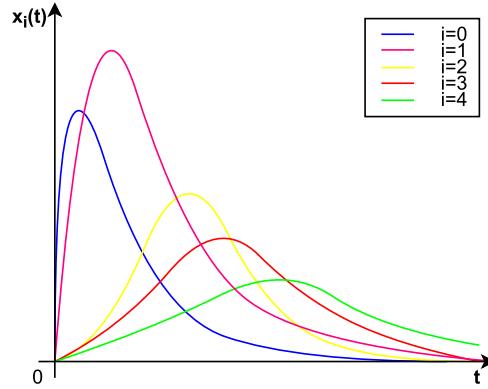
Tato definice je speciálním případem frekvenční řetězové stability, tj. systém je případně řetězově stabilní pokud je frekvenčně řetězově stabilní.[21]

V. Řetězová stabilita od lídra ke konci kolony ([9], [21])

Lineární systém kolony s topologií k PF nebo k PLF je řetězově stabilní, pokud pro přenosovou funkci výstupů mezi lídrem kolony s označením 0 a posledním vozidlem kolony m platí

$$\|\hat{G}_{0,r}(j\omega)\|_\infty \leq 1, \quad \forall r \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Tato definice byla původně navržena pro smíšený provoz, kde za konec řetězce bylo považováno propojené automatizované vozidlo, viz. [9].



Obrázek 12: Znázornění případné řetězové stability pomocí intuitivního popisu řetězové stability.

Definice III.,IV. a V. předpokládají existenci vedoucího vozidla v koloně, což je v praktických aplikacích velmi rozumné. Definice III. se někdy nazývá jako *slabá řetězová stabilita*, která je však flexibilnější co se týče IFT ve srovnání se *silnou frekvenční stabilitou* řetězce. Jedním z omezení těchto tří definic ve frekvenční oblasti je předpoklad lineárního systému kolony vozidel. V této práci se nicméně budeme soustředit na lineární systémy, obdobně jako jiní autoři například v pracích [9], [11], [21], [24].

Pro doplnění různých přístupů uvedme dále ještě řetězovou stabilitu definovanou v časové oblasti.

Řetězová stabilita v časové oblasti

Pro zobecnění pojmu řetězové stability na třídu propojených systémů

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-r}), \quad (24)$$

$\forall i \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x_{i-j} \equiv 0, \forall i \leq j$, a $f(0,0,\dots,0)=0$, byly navrženy následující definice.

VI. Časová řetězová stabilita([21], [27])

Počátek $x_i = 0$, pro $i \in \mathbb{N}$ systému (24) je řetězově stabilní v časové oblasti, jestliže je dáno $\epsilon > 0$, pro které existuje $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ takové, že

$$\sup_i |x_i(0)| < \delta \Rightarrow \sup_i \|x_i(t)\|_\infty < \epsilon. \quad (25)$$

VII. Asymptotická časová řetězová stabilita([21], [27])

Počátek $x_i = 0$, pro $i \in \mathbb{N}$ systému (24) je asymptoticky řetězově stabilní v časové oblasti, pokud je řetězově stabilní v časové oblasti a $\sup_i \|x_i(t)\|_\infty \rightarrow 0$.

Propojené systémy popsané rovnicí (24) specifikují systém kolony jako k PF. Nicméně definice lze okamžitě aplikovat na systémy kolon s obecnou IFT. Jednou z výhod těchto definic je, že není nutné předpokládat linearitu na systému kolony, viz.[21], [27].

5 Stavová zpětná vazba

Pro stavový popis systému (4) (resp. (5)) existuje několik způsobů, jak takto popsaný systém řídit. V této práci se budeme zabývat jedním ze základních, a to řízením stavovou zpětnou vazbou. Stavová zpětná vazba, jak název napovídá, slouží ke zpětnovazebnímu řízení stavů systému. Řídit

můžeme jen ty stavy, které je možné ovlivňovat pomocí vstupu, tedy uvažujeme, že celý systém (A, B) je říditelný.

O systému (4) (resp. (5)) řekneme, že je říditelný, jestli pro všechny stavy $x(t_0) \neq 0$ existuje řízení $u(t)$ na konečném časovém intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$, které způsobí změnu daného počátečního stavu $x(t_0)$ do koncového stavu $x(t_1) = 0$. Pro výpočet algebraického testu říditelnosti systému si definujeme matici říditelnosti Q_r následovně, [28],

$$Q_r = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad (26)$$

aby byl spojitý dynamický systém říditelný/dosažitelný, musí mít matice říditelnosti Q_r plnou řádkovou hodnotu, tedy její hodnot se rovná řádu systému n , tj.

$$\text{rank } Q_r = n. \quad (27)$$

Říditelnost znamená teoretickou možnost libovolné změny stavů systému v konečném čase, to však neznamená, že tyto stavy dokážeme udržet.

Stavová zpětná vazba zahrnuje použití stavového vektoru x k výpočtu řídicí akce pro zadanou dynamiku systému. Řízení má tedy tvar

$$u = Fx, \quad (28)$$

kde $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, je hledaná zpětnovazební matice. Tuto matici volíme tak, abychom dosáhli požadovaného chování systému, volíme ji na základě dále zmíněných návrhových metod. Nevýhodou stavové zpětné vazby je nutnost znát všechny stavy daného systému. Ty lze někdy zjistit měřením, nebo pokud je nelze přímo měřit, zavedením rekonstruktoru stavu, který však zvyšuje počet stavů výsledného systému a jeho výpočetní náročnost se tedy také zvyšuje. Oproti tomu výhodou však je, že stavová zpětná vazba je jednoduše realizovatelná a má nulovou dynamiku regulátoru, a tedy nezatěžuje dynamiku systému dalšími přechodovými ději regulátoru, [10], [28].

5.1 Návrhové metody zpětnovazební matice F

Abychom mohli měnit dynamiku systému (např. stabilizovat, zrychlovat jej), musíme navrhnout vhodnou zpětnovazební matici F , ovlivňující vlastní čísla matice dynamiky uzavřené smyčky. O některých návrhových metodách pojednávají například v pracích [5], [29]. Existuje několik metod, jak navrhnout stavovou zpětnou vazbu, například pomocí lineárního kvadratického regulátoru, také označeného jako LQR, zpětnou vazbu tímto způsobem určovali v pracích [10], [30]. V této práci však budeme návrh zpětné vazby provádět další z možných metod a to přiřazením Jordanovy formy stavovou zpětnou vazbou, o které pojednávají například v práci [4], [5], [10], [31].

Přiřazení Jordanovy formy stavovou zpětnou vazbou

V této práci se však zaměříme na řešení zpětné vazby pomocí přiřazení Jordanovy formy. Metoda vychází z podobnosti matic, kdy návrhář na základě požadavků navrhuje výsledné dynamické vlastnosti matice dynamiky uzavřeného systému, viz [4], [5], [10], [31].

Uvažujme tedy stavovou zpětnou vazbu (28) pro systém (4) (resp.(5)), po dosazení obdržíme rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BFx \\ \dot{x} &= (A + BF)x. \end{aligned} \quad (29)$$

Nyní si zavedeme výše zmíněnou podobnost matic. O dvou maticích S a L řekneme, že jsou podobné (označujeme $S \sim L$) právě tehdy, když mají stejné Jordanovy formy, tedy existuje regulární matice T , pro kterou platí

$$S = TLT^{-1}. \quad (30)$$

Dále zvolíme požadovanou matici dynamiky L (v podobě právě Jordanovy formy), kterou následně přiřadíme uzavřenému systému, tj. matici dynamiky uzavřeného systému

$$A_c = A + BF. \quad (31)$$

Požadujeme tedy, aby $A_c = A + BF \sim L$. Potom opět musí existovat regulární matice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že postupně platí

$$\begin{aligned} A + BF &= TLT^{-1}, \\ AT + BFT &= TL, \\ AT - TL + BFT &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Označme $H \triangleq FT$, kde $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je parametrická matice, obsahující volné parametry α , navržená v práci [4] a blíže diskutována také v pracích [31]. Rovnice (32) tak přejde na Sylvestrovu maticovou rovnici ve tvaru

$$AT - TL + BH = 0. \quad (33)$$

Řešení $T(H)$ Sylvestrové rovnice (33) závisí na prvcích matice H . Například v práci [4], [5], [31] je ukázáno, že bude-li dvojice (A, B) říditelná a $\Lambda(A) \cap \Lambda(L) = \emptyset$, pak matice $T(H)$ bude pro skoro každou matici H regulární. Stavovou zpětnou vazbu, přiřazující systému (4) určenou Jordanovu formu L , lze potom vyjádřit ve tvaru

$$F = HT^{-1}. \quad (34)$$

6 Návrh řízení soustavy homogenních vozidel

V této práci se budeme zabývat dynamickými vlastnostmi jedoucí soustavy homogenních vozidel. Dynamický popis jednotlivých vozidel obdržíme pomocí diferenciální rovnice získané pomocí druhého Newtonova pohybového zákona, tzn. $F = ma$, kde F je síla působící na vozidlo, m je jeho hmotnost a a zrychlení. Pro takovéto systémy se budeme snažit nalézt vhodné řízení, které bude schopné zajistit stabilitu kolony a zároveň shodu všech vozidel na požadované hodnotě stavu (poloha, rychlost, resp. odchylky od požadovaných hodnot).

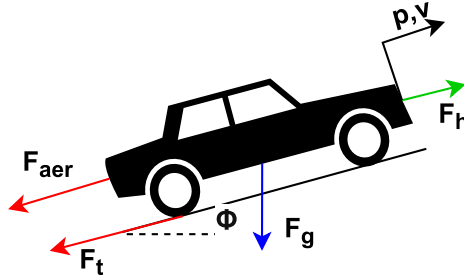
Nejprve se budeme soustředit na centralizované řízení a navrhovat stavovou zpětnou vazbu. Protože máme systém s více vstupy, existuje obecně nekonečně mnoho stavových zpětných vazeb. Volné návrhové parametry v matici stavové zpětné vazby můžeme využít k tomu, abychom zajistili další naše návrhové požadavky, jako například řetězovou stabilitu. Návrhové parametry také můžeme využít k tomu, abychom vynulovali některé prvky v matici stavové zpětné vazby. Tímto bychom relaxovali potřebu, aby každý člen soustavy musel znát informaci o všech ostatních stavech. Pokud by se nám povedlo vynulovat dostatek vhodných prvků, mohli bychom přejít až k distribuovanému řízení. Tomuto návrhu byla věnována zvláštní pozornost v souvislosti i s hledáním vhodné Jordanovy formy, kterou chceme přiřadit a která by vedla na řízení, v němž bychom mohli vynulovat dostatek jejích prvků.

Dále se budeme také vždy snažit, aby toto řízení bylo univerzální pro různé délky kolony a my tak zajistili škálovatelnost soustavy. Nejprve si uvedeme postup pro určení dynamiky soustavy, dále vyšetříme říditelnost celého systému, abychom zjistili, zda vůbec můžeme řízením ovlivňovat jeho chování. Poté provedeme návrh řízení pomocí přiřazení Jordanovy formy stavovou zpětnou vazbou, kde budeme přiřazovat požadované vlastnosti. Následně si ukážeme principy stability kolony popsané v 4.

6.1 Dynamika soustavy vozidel

Jak již bylo zmíněno celková dynamika soustavy se skládá z dynamiky jednotlivých vozidel a po zavedení odchylek poloh mezi vozidly i jejich propojeními. Jelikož se v našem případě budeme

zajímat o soustavu homogenních vozidel, bude nám stačit jednoduchý model pouze pro jedno vozidlo, který využijeme pro všechna vozidla v soustavě. Nejprve si tedy sestavíme model tohoto vozidla, pomocí kterého následně sestavíme model celé soustavy.



Obrázek 13: Znázornění sil působících na vozidlo.

Sestavení kompletního modelu vozidla je samo o sobě složitou záležitostí, jelikož se musí počítat s mnoha silami ovlivňující jeho jízdu. Síly, které působí na pohyb vozidla jsou

- gravitační síla F_g - ovlivňující jízdu vozidla při stoupání/klesání (znaménko se mění na základě úhlu Φ),
- třecí síla F_t - způsobena valivým odporem na pneumatikách,
- aerodynamickou síla F_{aer} - odpovídající odporu vzduchu působícího na vozidlo,
- hnací síla F_h - síla nutná k pohybu vozidla, musí překonat odporové síly.

Model systému pak můžeme sestavit na základě Newtonova druhého pohybového zákona následovně

$$m\ddot{p} = F_h - F_t - F_{aer} - F_g \cdot \sin(\Phi). \quad (35)$$

V této práci však budeme uvažovat případ, kdy jedeme po dokonale rovném povrchu, a tedy zanedbáme působení gravitační síly. Zároveň také budeme zanedbávat působení větru, tzn. vypustíme i aerodynamickou sílu. Dostaneme tedy zjednodušený popis ve tvaru

$$m\ddot{p} = F_h - F_t, \quad (36)$$

kde třecí sílu F_t uvažujeme při konstantní rychlosti v , a tedy dochází-li ke změně rychlosti můžeme psát $F_t = g(v_i)$. Hnací sílu vozidla i přeznačíme na f_i a dosazením do předchozích vztahů a úpravami pak získáme

$$m_i\ddot{p}_i = f_i - g_i(v_i), i = 1, \dots, r. \quad (37)$$

Nyní si zavedeme odchylkové míry, pro které dále sestavíme náš stavový model systému. Mějme tedy odchylku vzdálenosti a rychlosti vozidla i od požadované hodnoty z rovnic (2) a (3). Dále pak mějme odchylku hnací síly od síly třecí F_t danou následovně

$$\delta f_i = f_i - F_t. \quad (38)$$

Derivováním rovnice (2) a jejím dosazením do rovnice (37) obdržíme

$$m_i\delta\dot{v}_i = f_i - g_i(\delta v_i + v). \quad (39)$$

Do této rovnice dosadíme rovnice (38) a třetí sílu nahradíme viskozitou tření, díky čemuž obdržíme

$$\delta \dot{v}_i(t) = -\frac{\alpha_i}{m_i} \delta v_i(t) + \frac{1}{m_i} \delta f_i(t), \quad (40)$$

kde

$$\alpha_i = \left. \frac{\sigma g_i(v_i(t))}{\sigma v_i(t)} \right|_{v_i(t)=v}$$

Nyní, když jsme zjistili rovnici odchylky zrychlení, můžeme navrhnout stavový model vozidla. Zavedeme si stavové proměnné x_1 a x_2 , kterým přiřadíme námi požadované odchylky.

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \delta v_i & \dot{x}_1 = -\frac{\alpha_i}{m_i} x_1 + \frac{1}{m_i} \delta f_i(t) \triangleq h_1 \\ x_2 = \delta p_i & \dot{x}_2 = \delta p_i = \delta v_i = x_1 \triangleq h_2 \end{array} \quad (41)$$

Z takto určených stavových proměnných můžeme následně určit stavový popis systému i -tého vozidla.

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{\sigma h_1}{\sigma x_1} & \frac{\sigma h_1}{\sigma x_2} \\ \frac{\sigma h_2}{\sigma x_1} & \frac{\sigma h_2}{\sigma x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_i}{m_i} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} \frac{\sigma h_1}{\sigma \delta f_i} \\ \frac{\sigma h_2}{\sigma \delta f_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Po sestavení zjednodušeného modelu jednotlivých vozidel, můžeme sestavit model soustavy vozidel jedoucích v zástupu. Řád systému je přímo závislý na počtu vozidel obsažených v koloně. Veškeré výpočty si zde uvedeme pro počet následovníků $r = 3$, tzn. celkový počet vozidel v koloně $r + 1 = 4$. Matici dynamiky A , resp. vstupů B soustavy můžeme získat složením z matic dynamiky, resp. vstupů jednotlivých vozidel A_i, B_i , viz. (15) nebo vyjádřením z rovnic, které vzniknou podobným způsobem jako v (41) s využitím rovnic (3), kde délku vozidla i budeme považovat za nulovou, tzn. $\delta p_i = p_i - p_{i+1}$ a (40), tedy

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \delta v_0 & \dot{x}_1 = -\frac{\alpha}{m} x_1 + \frac{1}{m} \delta f_0(t) = h_1 \\ x_2 = \delta p_0 & \dot{x}_2 = \delta v_0 - \delta v_1 = x_0 - x_3 = h_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_7 = \delta v_3 & \dot{x}_7 = -\frac{\alpha}{m} x_7 + \frac{1}{m} \delta f_3(t) = h_7 \\ x_8 = \delta p_3 & \dot{x}_8 = \delta v_3 - \delta v_4 = x_3 - x_4 = h_8 \end{array} \quad (43)$$

kde u posledního stavu x_8 se využívá následující vozidlo, které však v soustavě neexistuje, budeme za něj dosazovat 0. Mějme tedy matici dynamiky, resp. vstupů vozidla (42), potom můžeme na základě (15) nebo (43), pro soustavu obsahující čtyři vozidla, sestavit matice soustavy (A, B)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta p_0 \\ \delta v_1 \\ \delta p_1 \\ \delta v_2 \\ \delta p_2 \\ \delta v_3 \\ \delta p_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta p_0 \\ \delta v_1 \\ \delta p_1 \\ \delta v_2 \\ \delta p_2 \\ \delta v_3 \\ \delta p_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} \delta f_0 \\ \delta f_1 \\ \delta f_2 \\ \delta f_3 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Jelikož řešíme soustavu homogenních vozidel, pak jednotlivá vozidla budou mít stejné hodnoty parametrů, tzn. $\alpha_i = \alpha$ a $m_i = m$, $\forall i$. Také můžeme vidět, že řád systému jedoucích vozidel n odpovídá řádu jednoho vozidla n_i vynásobeného počtem vozidel v soustavě, tedy $n = (r + 1) \cdot n_i$. Pokud tedy uvažujeme tři následovníky a lídra ($r = 3$), potom má soustava vozidel řád systému $n = 8$, jelikož $(3 + 1) \cdot 2 = n$.

Sestavili jsme si tedy stavový popis soustavy jedoucích vozidel. V této chvíli potřebujeme ověřit, zda je takto zavedený systém říditelný, tedy zda jednotlivé stavy můžeme ovlivňovat za pomoci vstupu. Využijeme zmiňovaného algebraického testu, určíme tedy matici říditelnosti soustavy Q_r pomocí vztahu (26). Výpočet tohoto vztahu provedeme v programu Maple. Dále určíme hodnotu této matice, která aby byl systém říditelný, musí mít plnou hodnotu, viz. (27). Tímto postupem získáme, že

$$\text{rank}(Q_r) = 7 \neq 8 = n$$

a můžeme tedy prohlásit, že takový systém **není** říditelný. Jelikož nám však poslední stav ($\frac{d}{dt}\delta p_3$) nepřináší žádnou novou dodatečnou informaci o posledním vozidlu, můžeme přepsat model do tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta p_0 \\ \delta v_1 \\ \delta p_1 \\ \delta v_2 \\ \delta p_2 \\ \delta v_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{m} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta p_0 \\ \delta v_1 \\ \delta p_1 \\ \delta v_2 \\ \delta p_2 \\ \delta v_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} \delta f_0 \\ \delta f_1 \\ \delta f_2 \\ \delta f_3 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Zde provedeme algebraický test říditelnosti stejným způsobem jako v předchozím případě, ze kterého získáme výsledek

$$\text{rank}(Q_r) = 7 = 7 = n,$$

a tak můžeme říct, že takovýto systém říditelný **je**. Tento systém tedy můžeme řídit za pomoci vstupů. Pro zjednodušení dalších výpočtů budeme považovat hmotnost vozidel m a koeficient tření α za jednotkové, tedy $m = \alpha = 1$. Dosazením do modelu soustavy získáme

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta p_0 \\ \delta v_1 \\ \delta p_1 \\ \delta v_2 \\ \delta p_2 \\ \delta v_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta p_0 \\ \delta v_1 \\ \delta p_1 \\ \delta v_2 \\ \delta p_2 \\ \delta v_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} \delta f_0 \\ \delta f_1 \\ \delta f_2 \\ \delta f_3 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

6.2 Návrh zpětnovazební matice F na základě přiřazené Jordanovy formy

Navrhované řízení bude realizováno pomocí stavové zpětné vazby, kdy zpětnovazební matici F budeme navrhovat na základě podobnosti matice uzavřeného systému se zvolenou Jordanovou formou L , která přiřazuje námi zvolené dynamické chování matici dynamiky uzavřeného systému soustavy vozidel A_c . K tomu využijeme podobnosti matic definovanou rovnicí (30), na základě které se sestrojí Sylvestрова rovnice (33). Řešením této rovnice obdržíme stavovou zpětnou vazbu F . Budeme testovat přiřazení různých Jordanových forem, abychom dostali vzhled do toho, které Jordanovy formy vedou na jaká řízení. Například, které Jordanovy formy umožní definovat v matici stavové zpětné vazby ještě další požadavky, například na vynulování některých prvků v F a tím získání speciální struktury. Jiným požadavkem může být zachování tzv. vstupní symetrie nedefinované v [32]. Pro vstupně symetrický systém (A, B) (46) můžeme vypočítat řízení, které zachová také tuto vstupní symetrii i pro uzavřený systém.

Některé Jordanovy formy lze tedy přiřadit symetrickou zpětnou vazbou, jiné Jordanovy formy naopak tuto symetrii poruší, ale mohou umožňovat například vynulování vhodných prvků matice F , které by vedlo na distribuované řízení. Představíme několik variant přiřazení Jordanovy formy,

kteřé vedly na zajímavé výsledky a demonstrujeme tyto výsledky a priori na koloně se čtyřmi vozidly. U některých případů ukážeme, že toto řízení by bylo možné stejným způsobem rozšiřovat i na více vozidel v řetězci, a demonstrujeme to pro šest vozidel.

Příklad 1.

V tomto příkladu budeme nejprve uvažovat Jordanovu formu L sestavenou z Jordanových bloků velikosti 1×1 . Matice L bude obsahovat bloky se dvěma různými vlastními čísly. Tedy nechť L pro 4 vozidla je ve tvaru

$$L_4 = \begin{bmatrix} [a] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [a] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [a] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [a] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [b] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [b] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [b] \end{bmatrix}, \quad (47)$$

Pro takovýto tvar matice L , obdržíme řešením Sylvestrovovy rovnice (33) pomocí knihovny *Jordan-FormAssignment*, stavovou zpětnou vazbu F se třemi volnými parametry α , tzn. $F_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, pomocí kterých můžeme upravovat informace předávané, centralizovaným řízením, jednotlivým vozidlům a definovat další požadavky na řízení.

Po několika různých návrzích jsme došli k prvnímu zajímavému výsledku, když jsme našli strukturu, ve které má každé vozidlo kompletní informaci o sobě, odchylkách od požadované vzdálenosti svých následovníků a o relativní rychlosti posledního vozidla, viz. (48)

$$F_4(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} a + b + 1 & -ab & 0 & -ab & 0 & -ab & -b \\ 0 & 0 & a + b + 1 & -ab & 0 & -ab & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a + b + 1 & -ab & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a + 1 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Takové struktury jsme docílili nulováním příslušných prvků ve zjištěné zpětnovazební matici F , ke kterému jsme použili její, již zmiňované, volné parametry α . Nulování probíhá tak, že se ze zpětnovazební matice F vyberou dané prvky, které se položí rovny nule. Tyto rovnice vytvoří soustavu rovnic, jejíž řešením buď obdržíme parametry α , řešící tuto soustavu, anebo zjistíme že taková soustava nemá řešení. Pokud soustava nemá řešení, nezle některé prvky soustavy vynulovat a musí se upravit požadavky na tvar zpětnovazební matice F .

Zajímavostí zpětné vazby z (48) je to, že se jedná pouze o horní trojúhelníkovou matici, tedy obsahuje spoustu nulových prvků. Což, pokud pro tuto F budou splněné podmínky stability, by umožnilo řídit systém s využitím menšího množství předávaných informací.

Ze zjištěné zpětnovazební matice F můžeme spočítat matici dynamiky A_c uzavřeného systému z rovnice (31). Pomocí této matice dynamiky následně můžeme sestavit přenosové funkce jednotlivých stavů systému, ze vztahu (16), resp. matici přenosových funkcí G z rovnice (7).

$$G_4 = \begin{bmatrix} \frac{s}{(b-s)(-s+a)} & 0 & 0 & -\frac{b}{(-s+a)(b-s)} \\ \frac{1}{(b-s)(-s+a)} & -\frac{1}{(b-s)(-s+a)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s}{(b-s)(-s+a)} & 0 & -\frac{b}{(-s+a)(b-s)} \\ 0 & \frac{1}{(b-s)(-s+a)} & -\frac{1}{(b-s)(-s+a)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{(b-s)(-s+a)} & -\frac{b}{(-s+a)(b-s)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(b-s)(-s+a)} & -\frac{1}{(b-s)(-s+a)} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{-s+a} \end{bmatrix} \quad (49)$$

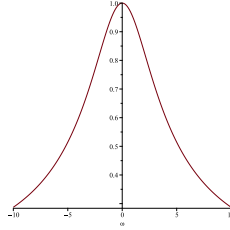
Pomocí vlastních čísel obsažených v přenosových funkcích matice systému G můžeme měnit dynamiku soustavy (jak moc změna ovlivní polohu mezi vozidly, jak rychle se po změně systém ustálí),

či pomocí nich můžeme také v některých případech zajistit řetězovou stabilitu soustavy. Řetězovou stabilitu určíme podle [21] pomocí ∞ normy z podílu přenosových funkcí mezi libovolným i -tým vozidlem a vozidlem, na kterém nastala změna. Ze vztahů (18) a (19), tak obdržíme pomocnou matici podílů přenosů, viz. (50). Normu následně budeme určovat z jednotlivých prvků této matice. ∞ norma nám poté udává, jak a jak moc změna na daném vozidlu ovlivní ostatní vozidla v koloně, tzn. jak moc se porucha postupem v koloně zesiluje, či zeslabuje.

$$\hat{G}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{b}{-s+b} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b}{-s+b} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{-s+b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Výpočet této normy si předvedeme při změně na posledním vozidlu, jelikož pouze zde změna ovlivňuje všechna ostatní vozidla, navíc, jak vidíme pro každé stejným způsobem. Z nerovnice pro silnou frekvenční stabilitu (20) můžeme psát

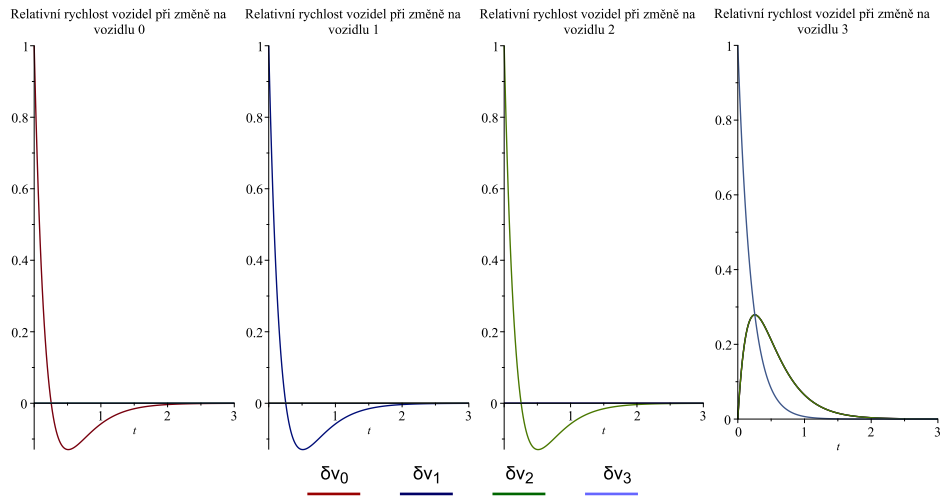
$$\begin{aligned} \|\hat{G}_4(1,4)\|_\infty &= \left\| \frac{b}{-s+b} \right\|_\infty = \sup_s \left| -\frac{b}{s-b} \right| = \sup_{j\omega} \left| -\frac{b}{j\omega-b} \right| = \sup_\omega \frac{|-b|}{\underbrace{\sqrt{(-b)^2 + \omega^2}}_{f(\omega)}} = \\ &= \sup_\omega \frac{|b|}{\underbrace{\sqrt{b^2 + \omega^2}}_{f(\omega)}} = 1 \leq 1 \end{aligned} \quad (51)$$



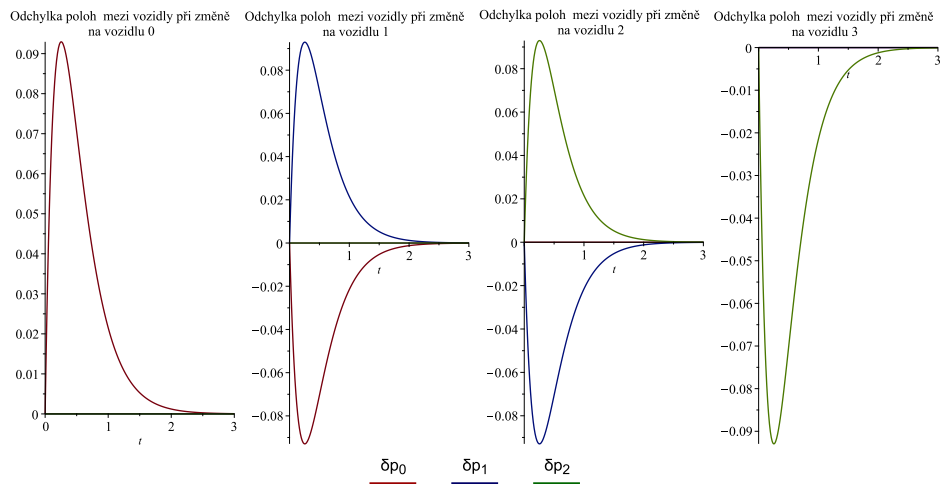
Obrázek 14: Průběh funkce $f(\omega)$ z (51) pro $a = -5, b = -3$, vykreslený na $\omega = \langle -10, 10 \rangle$.

Derivováním funkce $f(\omega)$ dostaneme $\frac{d}{d\omega} f(\omega) = -b\omega (b^2 + \omega^2)^{-\frac{3}{2}}$. Derivaci položíme rovnu 0 a obdržíme body podezřelé z extrému, tj. suprema se nabývá v bodě $\omega = 0$. Z výše uvedeného výpočtu můžeme vidět, že volba vlastních čísel nám v tomto případě řetězovou stabilitu neovlivňuje, jelikož suprema se zde bude vždy nabývat v $\omega = 0$. Následně, kvůli podílu stejných čísel bude ∞ norma rovná 1, viz. 14. Stejným způsobem zjistíme podmínky řetězové stability i pro ostatní stavy (odchylky vzdáleností, rychlostí při změnách na ostatních vozidlech), a vidíme, že podmínka řetězové stability je splněna ve všech případech. Můžeme tak říct, že systém je řetězově stabilní.

Vlastní čísla je možné tedy volit na základě rychlosti ustálení a velikosti odchylek poloh δp_i při změně působící na určité vozidlo. Jelikož však uvažujeme vozidla jako hmotný bod, tak to nemá zcela takovou vypovídající hodnotu. Vlastní čísla jsme zvolili $a = -5, b = -3$ a po jejich dosazení provedli simulaci, jejíž výsledky můžeme vidět na 15 a 16.



Obrázek 15: Relativní rychlost vozidel δv_i pro změny vyskytující se na různých vozidlech, pro řízení, kde vozidla mají informaci o sobě a polohách svých následovníků.



Obrázek 16: Odchylka od požadované vzdálenosti (δp_i), při změnách vyskytující se na jednotlivých vozidlech, pro řízení, kde vozidla mají informaci o sobě a polohách svých následovníků.

Nyní si ukážeme, jak se v tomto případě změní řízení, pokud systém rozšíříme o několik vozidel. To si předvedeme pro přidání 2 vozidel do soustavy, tzn. soustava bude obsahovat 6 vozidel. Pro

takovou soustavu musíme také upravit přiřazovanou matici L , obdržíme tak tvar

$$L_6 = \begin{bmatrix} [a] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [a] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [a] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [a] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [a] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [a] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [b] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [b] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [b] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [b] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [b] \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Pro tento tvar matice L opět obdržíme stavovou zpětnou vazbu F , která však nyní bude obsahovat pět volných parametrů α , tzn. $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$. Nyní se pokusíme navrhnout řízení, které by bylo univerzální pro různé velikosti kolony. Budeme tedy znovu požadovat, aby mělo každé vozidlo informaci o sobě a svých následovnicích, resp. nebyla potřeba znalost rychlostí (kromě posledního člena). Z čehož obdržíme zpětnou vazbu ve tvaru

$$F_6(0, 0, 0, 0, 0) = \begin{bmatrix} a+b+1 & -ab & 0 & -ab & 0 & -ab & 0 & -ab & 0 & -ab & -b \\ 0 & 0 & a+b+1 & -ab & 0 & -ab & 0 & -ab & 0 & -ab & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+1 & -ab & 0 & -ab & 0 & -ab & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+1 & -ab & 0 & -ab & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+1 & -ab & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Ze vztahu (48) a (53) můžeme vidět, že v tomto případě při změně počtů vozidel v koloně, nedojde ke změně řízení. Ve stavové zpětné vazbě F stačí při rozšíření opět nulovat jen prvky rychlosti následujících vozidel, tzn. volné parametry α dát rovny nule. Hypoteticky by tak mohlo být možné takovéto řízení zobecnit pro libovolný počet vozidel.

Z grafů 15 a 16 můžeme, že kromě posledního vozidla nám změna na jednotlivých vozidlech nijak neovlivňuje relativní rychlosti ostatních vozidel, a jelikož rozšířením soustavy obdržíme stavovou zpětnou vazbu o stejném tvaru, víme i dle následného otestování že tomu tak bude i pro více vozidel. Rychlosti jednotlivých vozidel, v tomto příkladu, bude ovlivňovat jen změna provedená na posledním vozidle. Dále lze z 16 vypořádat, že změna na daném vozidle ovlivní odchylku od požadované hodnoty. To vlastně znamená, že došlo k vychýlení odchylky poloh δ_i mezi vozidly. Není-li změna na vedoucím a koncovém vozidle, ale někde mezi, pak tato změna na takovém vozidle ovlivní odchylku poloh od jeho předchůdce i následovníka (u každého v opačném smyslu). To nastane, jelikož dojde k posunu polohy vozidla mezi předchozím a následujícím vozidlem, ke každému jiným směrem.

Příklad 2.

Dalším zajímavým řízením, kterého jsme pro tuto přiřazovanou Jordanovu formu L v (47) dosáhli, je řízení pomocí symetrické stavové zpětné vazby. Podle [32] jsme navrhli F , která zachová původní symetrii systému. Opět jsme tedy přiřazením Jordanovy formy (47) a následným řešením Sylvestrových rovnic (33) obdrželi zpětnovazební matici F . Protože přiřazujeme stejnou Jordanovu formu jako v předchozím případě, bude mít tato matice stejný tvar, tedy $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Symetrická stavová zpětná vazba vychází pro tento vstupně symetrický říditelný systém pro parametry o

hodnotách -1 . Tím jsme získali stavovou zpětnou vazbu ve tvaru

$$F_4(-1, -1, -1) = \begin{bmatrix} a + \frac{3b}{4} + 1 & -\frac{3ab}{4} & -\frac{b}{4} & -\frac{ab}{2} & -\frac{b}{4} & -\frac{ab}{4} & -\frac{b}{4} \\ -\frac{b}{4} & \frac{ab}{4} & a + \frac{3b}{4} + 1 & -\frac{ab}{2} & -\frac{b}{4} & -\frac{ab}{4} & -\frac{b}{4} \\ -\frac{b}{4} & \frac{ab}{4} & -\frac{b}{4} & \frac{ab}{2} & a + \frac{3b}{4} + 1 & -\frac{ab}{4} & -\frac{b}{4} \\ -\frac{b}{4} & \frac{ab}{4} & -\frac{b}{4} & \frac{ab}{2} & -\frac{b}{4} & \frac{3ab}{4} & a + \frac{3b}{4} + 1 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Jak můžeme ze zpětné vazby (54) vypočítat, informace o odchylkách vzdáleností δp_i se postupem v koloně mění, oproti tomu odchylky rychlostí δv_i jsou, jak lze vidět, stejné. Pro tuto matici ze vztahů (31), (7) obdržíme matici přenosových funkcí systému ve tvaru

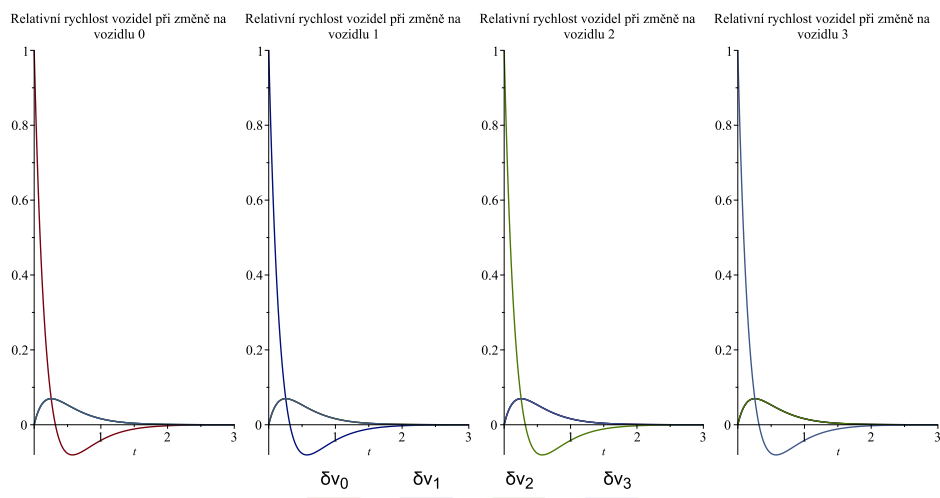
$$G_4 = \begin{bmatrix} \frac{4s-b}{4(b-s)(-s+a)} & -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} & -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} & -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} \\ \frac{1}{(-s+a)(b-s)} & -\frac{1}{(-s+a)(b-s)} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} & \frac{4s-b}{4(b-s)(-s+a)} & -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} & -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} \\ 0 & \frac{1}{(-s+a)(b-s)} & -\frac{1}{(-s+a)(b-s)} & 0 \\ -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} & -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} & \frac{4s-b}{4(b-s)(-s+a)} & -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(-s+a)(b-s)} & -\frac{1}{(-s+a)(b-s)} \\ -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} & -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} & -\frac{b}{4(-s+a)(b-s)} & \frac{4s-b}{4(b-s)(-s+a)} \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Z této systémové matice opět z (18) a (19) určíme pomocnou matici podílů

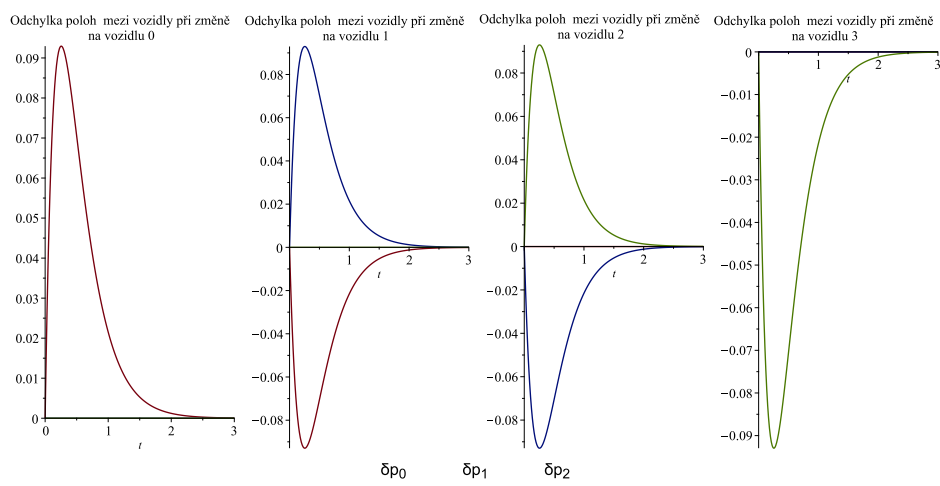
$$\hat{G}_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{-4s+b} & \frac{b}{-4s+b} & \frac{b}{-4s+b} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{b}{-4s+b} & 1 & \frac{b}{-4s+b} & \frac{b}{-4s+b} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{b}{-4s+b} & \frac{b}{-4s+b} & 1 & \frac{b}{-4s+b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{b}{-4s+b} & \frac{b}{-4s+b} & \frac{b}{-4s+b} & 1 \end{bmatrix}. \quad (56)$$

ze které opět pomocí vztahu pro silnou řetězovou stabilitu (20) určíme podmínku řetězové stability. Jelikož jsou podíly přenosů v matici (56) stejné, opět by nám stačilo provést výpočet normy pro jeden z nich, podobně jako v (51). Po vypočtení této normy můžeme tvrdit, že i tato stavová zpětná vazba F , viz. (54), nám dává řízení, pro které je systém řetězově stabilní. V tomto případě nám vlastní čísla také neovlivní řetězovou stabilitu, zvolíme je tedy stejné jako předtím ($a = -5, b = -3$).

Ze systémové matice uvedené pro symetrické řízení, tzn. pro (55), získáme simulací grafy 17, 18. Z těch můžeme vidět, že změny na jednotlivých vozidlech již ovlivňují i ostatní vozidla. Vozidlo, na kterém je změna, ovlivňuje určitým způsobem relativní rychlosti ostatních vozidel. To jsme předpokládali, jelikož změní-li se rychlost některého vozidla, ostatní na to musí zareagovat. Na 18 opět vidíme, že při změně na daném vozidle je ovlivněna odchylka od požadované vzdálenosti mezi tímto vozidlem a jeho předchůdcem a následovníkem, není-li vozidlo počátečním nebo koncovým vozidlem soustavy. Tyto odchylky jsou ovlivněny v opačném smyslu, jelikož polohou se vozidlo k jednomu vozidlu přiblíží, zatím co od druhého o stejnou vzdálenost oddálí. Z grafů můžeme také vypočítat, že porucha se postupem v koloně nezesiluje, ale je pro všechna vozidla stejná, tedy i intuitivně by měl být systém stabilní.



Obrázek 17: Relativní rychlost vozidel δv_i pro změny vyskytující se na různých vozidlech, pro symetrické řízení (54).



Obrázek 18: Odchylka od požadované vzdáleností δp_i , při změnách vyskytujících se na jednotlivých vozidlech., pro symetrické řízení (54).

Dále jsme se opět zajímali, jak dopadne rozšíření soustavy pro tento typ symetrického řízení. Soustavu jsme tedy znovu rozšířili na více vozidel (5, 6), a pro 6 vozidel (52) ukážeme výsledek. Pomocí Sylvestrový rovnice (33) jsme obdrželi zpětnovazební matici $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ o pěti volných parametrech. Pokud je dáme všechny rovny hodnotě -1 , získáme opět symetrické řízení,

které je ve tvaru

$$F_6(-1, -1, -1, -1, -1) = \begin{bmatrix} a + \frac{5b}{6} + 1 & -\frac{5ab}{6} & -\frac{b}{6} & -\frac{2ab}{3} & -\frac{b}{6} & -\frac{ab}{2} & -\frac{b}{6} & -\frac{ab}{3} & \dots \\ -\frac{b}{6} & \frac{ab}{6} & a + \frac{5b}{6} + 1 & -\frac{2ab}{3} & -\frac{b}{6} & -\frac{ab}{2} & -\frac{b}{6} & -\frac{ab}{3} & \dots \\ -\frac{b}{6} & \frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \frac{ab}{3} & a + \frac{5b}{6} + 1 & -\frac{ab}{2} & -\frac{b}{6} & -\frac{ab}{3} & \dots \\ -\frac{b}{6} & \frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \frac{ab}{3} & -\frac{b}{6} & \frac{ab}{2} & a + \frac{5b}{6} + 1 & -\frac{ab}{3} & \dots \\ -\frac{b}{6} & \frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \frac{ab}{3} & -\frac{b}{6} & \frac{ab}{2} & -\frac{b}{6} & \frac{2ab}{3} & \dots \\ -\frac{b}{6} & \frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \frac{ab}{3} & -\frac{b}{6} & \frac{ab}{2} & -\frac{b}{6} & \frac{2ab}{3} & \dots \\ \dots & -\frac{b}{6} & -\frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \dots & -\frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \dots & \dots \\ \dots & -\frac{b}{6} & -\frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \dots & -\frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \dots & \dots \\ \dots & -\frac{b}{6} & -\frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \dots & -\frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \dots & \dots \\ \dots & -\frac{b}{6} & -\frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \dots & -\frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \dots & \dots \\ \dots & a + \frac{5b}{6} + 1 & -\frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \dots & -\frac{ab}{6} & -\frac{b}{6} & \dots & \dots \\ \dots & -\frac{b}{6} & \frac{5ab}{6} & a + \frac{5b}{6} + 1 & \dots & \frac{5ab}{6} & a + \frac{5b}{6} + 1 & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (57)$$

Porovnáním stavových zpětných vazeb původního a rozšířeného systému (54) a (57) můžeme říci, že i v tomto případě by hypoteticky mělo být možné takovéto řízení rozšířit pro libovolný počet vozidel. Můžeme totiž pozorovat, že jednotlivé relativní rychlosti jsou v obou případech stále a mění se jen v závislosti na počtu vozidel v soustavě. Naproti tomu informace odchylky od požadované vzdálenosti jednotlivých vozidel stále nejsou, ale závisejí také opět na počtu vozidel soustavy. Je dokonce vidět že horní trojúhelník odpovídá parametry převrácenému spodnímu trojúhelníku této zpětnovazební matice. Z toho můžeme usuzovat, že jde o zajímavý druh symetrického řízení.

Příklad 3.

V předchozích dvou příkladech jsme navrhovali řízení pro přiřazení stejné Jordanovy formy L a vybírali vhodnou konkrétní matici stavové zpětné vazby na základě volných parametrů α , které jsme obdrželi po výpočtu parametrické stavové zpětné vazby F pomocí knihovny *JordanFormAssignment*. Nyní si předvedeme návrh řízení pro novou strukturu Jordanovy formy L , složené obecně ze dvou Jordanových bloků dimenze $r \times r$ se stejným vlastním číslem a jednoho doplňujícího Jordanova bloku 1×1 s různým vlastním číslem, který doplní Jordanovu formu L do příslušného řádu. Konkrétně, Jordanova forma přiřazovaná uzavřenému systému o 4 vozidlech bude vypadat takto

$$L_4 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [b] \end{bmatrix}, \quad (58)$$

Přiřazením této Jordanovy formy, získáme Sylvestrovu rovnici, jejíž řešením, nám vyšla stavová zpětná vazba o 15 volných parametrech α , tedy $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{15})$. Tedy přiřazení této Jordanovy formy nám, oproti předchozím příkladům, poskytne více volných parametrů, kterými můžeme měnit informace potřebné k řízení systému. To by nám mělo umožnit lépe tvarovat prvky zpětnovazební matice F , a tedy dosáhnout více požadovaných typů struktur této matice, co se předávané informace týče.

V tomto příkladu jsme navrhovali stavovou zpětnou vazbu ve formě dvoudiagonální matice, tzn. zpětnovazební matice F bude obsahovat hlavní diagonálu a její naddiagonálu. Jelikož v tomto příkladě již volba vlastních čísel mění i výsledný tvar stavové zpětné vazby F budeme veškeré výpočty provádět opět pro vlastní čísla $a = -5$ a $b = -3$. Máme-li tedy tato vlastní čísla a požadujeme, aby zpětnovazební matice obsahovala pouze prvky na hlavní diagonále a její naddiagonále, tzn. aby vozidlo mělo informaci o sobě a svém následovníkovi, pak získáme parametry

α , viz. (59), jejichž dosazením do stavové zpětné vazby $F_4(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{15})$ získáme tuto matici ve tvaru (60).

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{10} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = 0 \\ \alpha_5 = \alpha_5, \quad \alpha_6 = \frac{1}{25}, \quad \alpha_{11} = \alpha_{11}, \quad \alpha_{14} = \frac{4}{25}, \quad \alpha_{15} = -\frac{75\alpha_5 - 50\alpha_{11} + 2}{125\alpha_{11}} \end{aligned} \quad (59)$$

$$F_4(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{15}) = \begin{bmatrix} -9 & -25 & 0 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -25 & \frac{-1+25\alpha_5+25\alpha_{11}}{5\alpha_{11}} & -\frac{1}{\alpha_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Zde už jsme nulováním příslušných prvků byli schopni dosáhnout stavové zpětné vazby F obsahující nenulové prvky na diagonále a naddiagonále. Zpětnovazební matice F obsahuje spoustu nulových prvků. Splní-li se podmínka řetězové stability pro takový tvar této matice, získáme řízení, které bude potřebovat jen informaci o daném vozidlu a jeho následovníka.

Z této matice určíme matici dynamiky uzavřeného systému A_c podle rovnice (31). Z té následně spočteme systémovou matici G (61) obsahující přenosové funkce relativních rychlostí a odchylek od požadované vzdálenosti.

$$G_4 = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+5)^2} & 0 & \frac{25s}{(s+3)(s+5)^3} & \frac{75}{(s+3)(s+5)^3} \\ \frac{1}{(s+5)^2} & -\frac{1}{(s+5)^2} & \frac{(1-25\alpha_5-25\alpha_{11})s+5}{5\alpha_{11}(s+3)(s+5)^3} & \frac{-75\alpha_5-75\alpha_{11}-2}{5\alpha_{11}(s+3)(s+5)^3} \\ 0 & \frac{s}{(s+5)^2} & \frac{5s((\alpha_5+\alpha_{11}-\frac{1}{25})s+5\alpha_{11}-\frac{1}{5})}{\alpha_{11}(s+3)(s+5)^3} & \frac{(75\alpha_5+75\alpha_{11}+2)s+375\alpha_{11}}{5\alpha_{11}(s+3)(s+5)^3} \\ 0 & \frac{1}{(s+5)^2} & \frac{-5\alpha_{11}s^2+(25\alpha_5-25\alpha_{11}-1)s-5}{5\alpha_{11}(s+3)(s+5)^3} & \frac{-15\alpha_{11}s+75\alpha_5-75\alpha_{11}+2}{5\alpha_{11}(s+3)(s+5)^3} \\ 0 & 0 & \frac{s}{s^2+8s+15} & \frac{3}{s^2+8s+15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^2+8s+15} & -\frac{1}{s^2+8s+15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \quad (61)$$

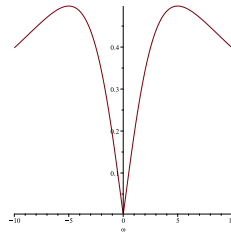
Abychom pro takto popsaný systém dosáhli splnění podmínek silné frekvenční řetězové stability (20), provedli jsme několik možných přiřazení zbývajících volných parametrů α_5 , α_{11} , kde podmínka byla splněna pro případ, že $\alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 9$, tento případ však nebyl jediný. Dosazením těchto volných parametrů jsme obdrželi neparametrickou systémovou matici

$$G_4 = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+5)^2} & 0 & \frac{25s}{(s+3)(s+5)^3} & \frac{75}{(s+3)(s+5)^3} \\ \frac{1}{(s+5)^2} & -\frac{1}{(s+5)^2} & \frac{45(s+3)(s+5)^3}{-224s+5} & -\frac{(s+3)(s+5)^3}{677} \\ 0 & \frac{s}{(s+5)^2} & \frac{5s(\frac{224s}{25} + \frac{224}{5})}{9(s+3)(s+5)^3} & \frac{677s+3375}{45(s+3)(s+5)^3} \\ 0 & \frac{1}{(s+5)^2} & \frac{-45s^2-226s-5}{45(s+3)(s+5)^3} & \frac{-135s-673}{45(s+3)(s+5)^3} \\ 0 & 0 & \frac{s}{s^2+8s+15} & \frac{3}{s^2+8s+15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^2+8s+15} & -\frac{1}{s^2+8s+15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Pomocí té jsme určili podíly tvořící prvky matice \hat{G} , na jejíž základě následně ověřujeme podmínky řetězové stability. K určení prvků této matice využijeme vztahů (18) a (19), které udávají podíl odchylek rychlostí a vzdáleností od těchto odchylek vozidla zasaženého změnou.

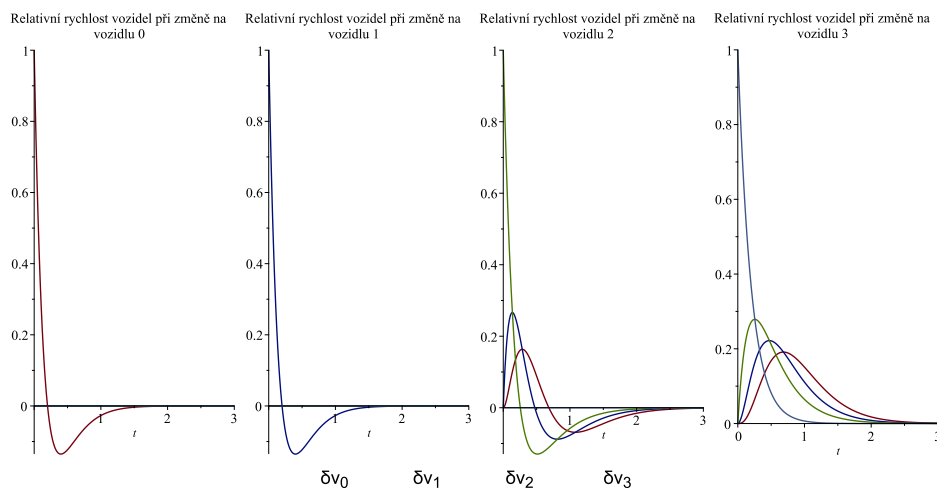
$$\hat{G}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{25}{(s+5)^2} & \frac{75}{(s+3)(s+5)^2} \\ 1 & -1 & \frac{-224s+5}{45(s+5)^2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{224}{45s+225} & \frac{677s+3375}{45(s+3)(s+5)^2} \\ 0 & 1 & \frac{-45s-1}{45s+225} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{s+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\begin{aligned}
\|\hat{G}_4(2, 3)\|_\infty &= \left\| \frac{-224s + 5}{45(s + 5)^2} \right\|_\infty = \sup_s \left| \frac{-224s + 5}{45(s + 5)^2} \right| = \sup_\omega \frac{|-224j\omega + 5|}{45|(j\omega + 5)^2|} = \sup_\omega \frac{|-224j\omega + 5|}{45|j^2\omega^2 + 10j\omega + 25|} \\
&= \sup_\omega \frac{|-224j\omega + 5|}{45|10j\omega + (25 - \omega^2)|} = \sup_\omega \frac{\sqrt{50176\omega^2 + 25}}{45\sqrt{\omega^4 - 49\omega^2 + 625}} = 0.497783235875483 \leq 1
\end{aligned} \tag{64}$$

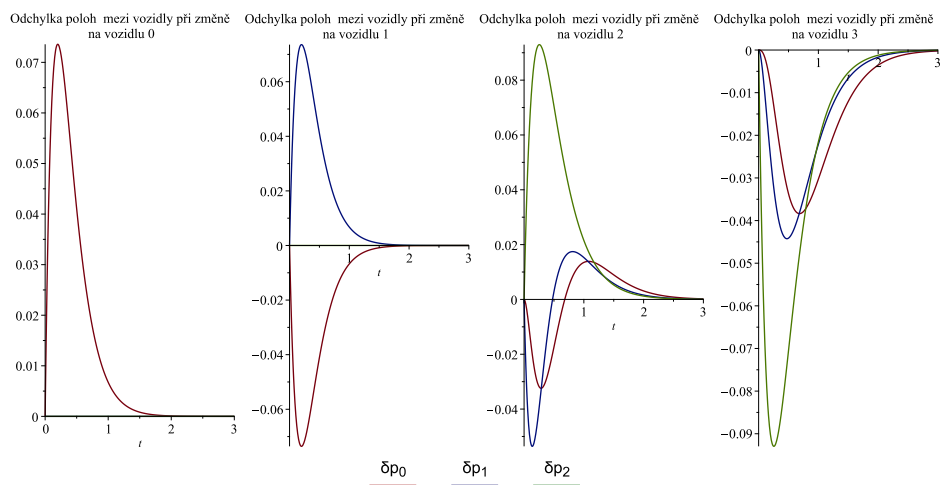


Obrázek 19: Průběh funkce $f(\omega)$ z (64), vykreslený na $\omega = \langle -10, 10 \rangle$.

Podobným způsobem jako v (64) vypočteme ∞ normy jednotlivých prvků matice \hat{G}_4 , z čehož získáme výsledky těchto norem ve formě matice Derivaci funkce $F(\omega)$ získáme v podobě $\frac{d}{d\omega} f(\omega) = \frac{-50176\omega^5 - 50\omega^3 + 31361225\omega}{45\sqrt{50176\omega^2 + 25}(\omega^4 - 49\omega^2 + 625)^{\frac{3}{2}}}$. Položíme-li tuto derivaci rovnu nule, zjistíme body podezřelé z extrému. V tomto případě to budou body $\omega = \{-5, 0, 5\}$. Tyto body nám osu rozdělí na 4 intervaly, tj. $(-\infty, -5)$, $(-5, 0)$, $(0, 5)$, $(5, \infty)$. Hodnotu z každého intervalu dosadíme do derivace funkce $f(\omega)$, tak určíme, jestli na něm funkce klesá nebo roste. Z čehož následně určíme globální extrémy. Tímto postupem zjistíme, že suprema se nabývá v bodech $\omega = \{-5, 5\}$, a jeho hodnota je 0.49778. Tato hodnota nám říká, že změna (porucha) na daném vozidle se postupem v koloně nejen že nezesiluje, ale dokonce zeslabuje. ∞ normy ostatních stavů pak zjistíme stejným způsobem jako v (64), z čehož obdržíme, že následující normy přenosů, $\|\hat{G}_4(1, 3)\|_\infty = 1$, $\|\hat{G}_4(1, 4)\|_\infty = 1$, $\|\hat{G}_4(2, 3)\|_\infty \approx 0.4978$, $\|\hat{G}_4(3, 3)\|_\infty \approx 0.9956$, $\|\hat{G}_4(3, 4)\|_\infty = 1$, $\|\hat{G}_4(4, 3)\|_\infty = 1$, $\|\hat{G}_4(5, 4)\|_\infty = 1$. Z tohoto vidíme, že podmínka řetězové stability je splněna ve všech případech. O systému tedy můžeme říct, že je řetězově stabilní.



Obrázek 20: Relativní rychlost vozidel δv_i pro změny vyskytující se na různých vozidlech, pro řízení kdy vozidla mají informaci o sobě a svém následovníkovi (60).



Obrázek 21: Odchylna od požadované vzdálenosti δp_i , při změnách vyskytujících se na jednotlivých vozidlech, pro řízení kdy vozidla mají informaci o sobě a svém následovníkovi (60).

Simulaci jsme opět provedli pro změny na všech vozidlech a obdrželi tak grafy 20, pro relativní rychlosti a 21, pro odchylky od požadované vzdálenosti. Z těchto grafů vidíme, jak změny ovlivňují průběhy stavů jednotlivých vozidel, a tedy i celého systému. Na grafech 20 můžeme vidět že změna na prvních dvou vozidlech nám nijak nezmění relativních rychlost těch ostatních. U zbylých dvou vozidel však můžeme pozorovat zatím nejzajímavější chování ze všech příkladů, kdy změna na těchto vozidlech ovlivní chování těch zbylých různým způsobem. Vidíme že změna relativních rychlostí vozidel je přizpůsobena průběhu relativní rychlosti změnou zasaženého vozidla. Při změně na třetím vozidle pozorujeme při snaze vyrovnání se požadované hodnotě podkmit, který vzniká na základě snahy stavové zpětné vazby rychle se přiblížit zpět k požadované hodnotě. Tento podkmit předchází dvě vozidla následující, ve snaze zachovat mezi sebou požadovanou vzdálenost. Oproti tomu řízení pro změnu na čtvrtém vozidle nezpůsobí podkmit, tedy relativní rychlost bude delší dobu vzdálená od nuly, tzn. rychlost vozidla bude delší dobu vzdálená od požadované rychlosti, avšak ve výsledku změna odezní rychleji. Co se týče odchylek od požadované hodnoty z 21, ty vždy vycházejí ze změn rychlostí daného vozidla. Změny na prvních dvou vozidlech nám odchylky od požadované vzdálenosti změní stejně, jako tomu bylo v předchozích příkladech. Jiného chování dosáhneme opět u dalších dvou vozidel, ze kterých pozorujeme že jejich změna již ovlivní odchylku od požadované vzdálenosti všem vozidlům v soustavě obsahující tuto informaci. Tato odchylka se tedy mění na základě průběhu rychlosti, tedy při změně na třetím vozidle můžeme vidět překmit, který způsobí podkmit u relativních rychlostí, opět to nastává, aby se vzdálenost co nejrychleji přiblížila požadované hodnotě. Změní-li se relativní rychlost vozidla do záporu, tzn. zpomalí z požadované hodnoty, pak se vozidla místo přiblížení k sobě oddálí, tzn. odchylka od požadované hodnoty se zvětší v kladném smyslu. Z obou průběhů, jak pro odchylky rychlostí, tak vzdálenosti 20, 21, je zcela jasně vidět, že postupem v koloně nedochází k zesílení změny, přesněji se změna s výskytem na dalších vozidle i zeslabuje. To jsme potvrdili i u výpočtu podmínky řetězové stability (64). Snahou bylo systém opět rozšířit, abychom mohli pozorovat, jak se změní řízení. Nicméně systém rozšířený pro 6 vozidel již obsahoval tolik parametrů, že se nám jej nepovedlo dopočítat.

7 Závěr

V této bakalářské práci jsme se věnovali problematice centralizovaného řízení multi-agentních kooperativních systémů. Přesněji jsme toto řízení aplikovali na soustavu homogenních vozidel, kde jednotlivá vozidla (agenti) tvořily subsystemy, z nichž byla soustava složena. Řízení jsme prováděli pro dodržení požadované rychlosti kolony a požadované vzdálenosti mezi vozidly. Toto řízení je v dnešních dobách zkoumáno jak za účelem využití v pozemních komunikacích (při snaze o vytvoření inteligentních dálnic), tak ve vzdušné komunikaci (při řízení skupin UAV jednotek, mimo jiné, na dodržování požadované vzdálenosti mezi drony a rychlosti této skupiny).

Seznámili jsme se s vlastností řetězové stability, která je důležitá právě v takovýchto systémech, aby nedocházelo ke vzniku kolizí či dopravních komplikací a aby nebyla narušena plynulost a bezpečnost dopravy. Seznámili jsme se s různými definicemi a přístupy k testování řetězové stability a zvolený přístup jsme zkoumali na několika demonstračních příkladech. Řetězová stabilita nám říká, zda vozidlo nezesiluje poruchy postupem v koloně. Kolonu nám reprezentoval systém složený z vozidel s jednoduchým dynamickým popisem, k jehož reprezentaci se využívalo dvou stavů, odchylku rychlosti a vzdálenosti od požadované hodnoty mezi vozidly. Testování řetězové stability jsme prováděli ve frekvenční oblasti a kontrola se prováděla na základě podmínek definovaných ∞ normou, a prováděli jsme pro změny postihující jakékoliv vozidlo.

V této bakalářské práci jsme se měli nejvíce soustředit na návrh stavové zpětné vazby metodou přiřazení Jordanovy formy. Abychom mohli systém pomocí stavové zpětné vazby ($u = Fx$) řídit, musí být říditelný. Po rozboru říditelnosti jsme se soustředili na návrh vhodné stavové zpětné vazby F , kterou jsme počítali pro různé struktury Jordanových forem. Díky této metodě jsme byli schopni přiřadit celému systému námi zvolenou dynamiku. Protože matice stavové zpětné vazby má v těchto případech většinou mnoho dalších volných parametrů, mohli jsme je volit pro splnění dalších požadavků. Jedním z těchto požadavků bylo samozřejmě splnění řetězové stability. Dalším požadavkem potom bylo, zda pomocí vynulování některých prvků matice stavové zpětné vazby jsme schopni eliminovat znalost některých stavů systému pro jiné. V několika příkladech se nám podařilo převést matici stavové zpětné vazby do zajímavé struktury, například takové, že jednotlivým vozidlům stačila pouze informace o svých následovnících (dokonce jen jejich polohách) nebo takové, že každému vozidlu stačila informace pouze o svém přímém následovníkovi.

Dosažené výsledky jsme prezentovali v poslední kapitole, která je věnována praktické části. Z několika provedených příkladů jsme zde předvedli nejzajímavější tři, kterých jsme dosáhli. Pro tyto příklady byly celkově přiřazeny dvě různé Jordanovy formy. Nejprve jsme v 1. příkladu přiřadili Jordanovu formu sestavenou z 1×1 Jordanových bloků o dvou různých vlastních číslech. Pro tu jsme navrhli řízení ve formě, že vozidlo má informaci o sobě, odchylkách vzdáleností pouze následujících vozidel a relativní rychlosti posledního vozidla. Pro toto řízení jsme obdrželi výsledek, že pouze změna na posledním vozidle ovlivní průběh relativních rychlostí ostatních vozidel. Změna daného vozidla také ovlivní odchylku od požadované vzdálenosti vždy mezi dvěma vozidly (předchozím a následujícím) v opačném smyslu, jelikož vzdálí-li se od jednoho, k druhému se přiblíží. Rozšířením systému jsme zjistili, že předchozí řízení po příslušném rozšíření dovede systém ke stejnému výsledku. Tedy jsme usoudili, že by hypoteticky bylo možné takový systém řídit stejným, pouze rozšiřujícím se řízením, pro libovolný počet vozidel v soustavě. Toto bychom chtěli dále prozkoumat a odvodit obecnější výsledky.

Druhý příklad jsme provedli pro přiřazení stejné Jordanovy formy. Pro volbu volných parametrů jsme kladli požadavek na zachování symetrie a našli jsme tak symetrickou stavovou zpětnou vazbu. Jedná se o takovou zpětnovazební matici F , která zachovává původní symetrii systému. Z výsledků získaných díky tomuto řízení můžeme pozorovat, že symetrie opravdu zachována byla. To znamená pokud prohodíme jednotlivá vozidla soustavy systém dojde stejného výsledného chování. Rozšířením soustavy jsme pak obdrželi také opět symetrické řízení, tedy i v tomto případě by soustava o libovolném počtu vozidel mohla být hypoteticky řízena stejným rozšiřujícím se symetrickým

řízením.

V posledním demonstračním příkladu jsme soustavě vozidel přiřadili dynamiku definovanou Jordanovou formou, která obsahovala dva Jordanovy bloky 3×3 , o stejných vlastních číslech a další 1×1 o různém vlastním čísle. Měli jsme tak Jordanovu formu obsahující opět dvě různá vlastní čísla, jelikož při snaze dosáhnout požadovaného řízení (zvolené struktury matice stavové zpětné vazby) při všech vlastních číslech stejných, nebylo možné tohoto řízení dosáhnout. Nalezli jsme zajímavou strukturu stavové zpětné vazby, která je v podobě blokově dvoudiagonální matice. To odpovídá tomu, že každé vozidlo musí mít informaci pouze o sobě a svém následovníkovi. Pomocí centralizovaného řízení jsme přešli k topologicky distribuovanému řízení a obdrželi jsme topologii PF. U tohoto příkladu jsme při zjišťování podmínky řetězové stability pomocí ∞ norm získali hodnoty buď 1 nebo ostře menší než jedna (vybuzená změna se pro některé stavy bude i zeslabovat). Následná snaha o rozšíření systému, kterou jsme prováděli u všech příkladů, zde narazila na problém příliš velkého počtu parametrů, pro které nebylo řízení možno spočítat. Nemohli jsme zde tedy podpořit hypotézu o stejném rozšiřujícím se řízením pro libovolný počet vozidel.

Odkazy

- [1] F. Zhao, Y. Liu, J. Wang a L. Wang, „Distributed Model Predictive Longitudinal Control for a Connected Autonomous Vehicle Platoon with Dynamic Information Flow Topology,“ *Actuators*, roč. 10, č. 9, 2021, ISSN: 2076-0825. DOI: 10.3390/act10090204. URL: <https://www.mdpi.com/2076-0825/10/9/204>.
- [2] Y. Zheng, S. Eben Li, J. Wang, D. Cao a K. Li, „Stability and Scalability of Homogeneous Vehicular Platoon: Study on the Influence of Information Flow Topologies,“ *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, roč. 17, č. 1, s. 14–26, 2016. DOI: 10.1109/TITS.2015.2402153.
- [3] U. M. J.A. Bondy, *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2008.
- [4] M. Schlegel, *Modální řízení konečněrozměrných lineárních systémů*. Disertační práce, VŠSE Plzeň – fakulta elektrotechnická, 1984.
- [5] J. KÖNIGSMARKOVÁ, *Přiřazení pólů lineárnímu dynamickému systému výstupní zpětnou vazbou*, Bakalářská práce, 2010.
- [6] A. Redjaimia, „Multi-Agent Robot System and Events Executing Using GPS Cloud,“ rigo-rosthesis, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 2015.
- [7] G. Berthelsen, „CALIFORNIA PATH : PARTNERS FOR ADVANCED TRANSIT AND HIGHWAYS,“ 2002.
- [8] C. W. Reynolds, „Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model,“ *Computer Graphics*, 1987.
- [9] J. I. Ge a G. Orosz, „Optimal Control of Connected Vehicle Systems With Communication Delay and Driver Reaction Time,“ *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, roč. 18, č. 8, s. 2056–2070, 2017. DOI: 10.1109/TITS.2016.2633164.
- [10] J. WOLF, „Řízení kolaborativních multi-agentních dynamických systémů [online],“ Diplomová práce, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd Plzeň, 2019 [cit. 2022-06-30]. URL: <https://theses.cz/id/bci5id/>.
- [11] G. J. L. Naus, R. P. A. Vugts, J. Ploeg, M. J. G. van de Molengraft a M. Steinbuch, „String-Stable CACC Design and Experimental Validation: A Frequency-Domain Approach,“ *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, roč. 59, č. 9, s. 4268–4279, 2010. DOI: 10.1109/TVT.2010.2076320.
- [12] M. R. Hidayatullah a J.-C. Juang, „Centralized and Distributed Control Framework Under Homogeneous and Heterogeneous Platoon,“ *IEEE Access*, roč. 9, s. 49 629–49 648, 2021. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3068968.
- [13] doc. Ing. Jiří Koziorek Ph.D. Ing. Jiří Kocián Ing. Libor Chromčák Ing. Tomáš Láryš, *Distribuované systémy řízení*. VŠB Ostrava, 2011. URL: <http://www.person.vsb.cz/archivcd/FEI/DSR/Distribuovane%20systemy.pdf>.
- [14] GeeksforGeeks. „Difference between GPS and DGPS.“ (), URL: <https://www.geeksforgeeks.org/difference-between-gps-and-dgps/>.
- [15] V. Explained. „Visually Explained: Kalman Filters.“ (), URL: <https://www.youtube.com/watch?v=IFeCIbljreY>.
- [16] A. M. BOHLOOLI, „RADAR vs. LiDAR: What’s the Difference?,“ 2022. URL: <https://www.makeuseof.com/radar-vs-lidar-differences/>.
- [17] L. Y. Wang, A. Syed, G. Yin, A. Pandya a H. Zhang, „Coordinated vehicle platoon control: Weighted and constrained consensus and communication network topologies,“ in *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2012, s. 4057–4062. DOI: 10.1109/CDC.2012.6427034.
- [18] E. Coach. „Stability of Control System.“ (), URL: <https://electronicscoach.com/stability-of-control-system.html>.

- [19] M. Šebek. „Vlastnosti systému:Stabilita, převrácená odezva, říditelnost a pozorovatelnost.“ (2020), URL: http://www.polyx.com/_ari/slajdy/Bas-ARI-04-Properties.pdf.
- [20] E. Club. „Concept of Stability—Control System.“ (), URL: <https://electronics-club.com/concept-of-stability-control-system/>.
- [21] S. Feng, Y. Zhang, S. E. Li, Z. Cao, H. X. Liu a L. Li, „String stability for vehicular platoon control: Definitions and analysis methods,“ *Annual Reviews in Control*, roč. 47, s. 81–97, 2019, ISSN: 1367-5788. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2019.03.001>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1367578819300240>.
- [22] Ā. Akademi. „Chapter 2 Signal and System Norms.“ (), URL: <http://users.abo.fi/htoivone/courses/robust/rob2.pdf>.
- [23] P. D. Gáspár, Z. D. Szalay a S. Aradi, *Highly Automated Vehicle Systems*. BME MOGI, 2014. URL: https://mogi.bme.hu/TAMOP/jarmurendszerek_iranyitasa_angol/index.html.
- [24] M. Khatir a E. Davidson, „Bounded stability and eventual string stability of a large platoon of vehicles using non-identical controllers,“ in *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601)*, sv. 1, 2004, 1111–1116 Vol.1. DOI: 10.1109/CDC.2004.1428841.
- [25] K.-c. Chu, „Decentralized Control of High-Speed Vehicular Strings,“ *Transportation Science*, roč. 8, č. 4, s. 361–384, 1974, ISSN: 00411655, 15265447. URL: <http://www.jstor.org/stable/25767760> (cit. 03.05.2022).
- [26] C. N. Mokogwu a K. Hashtrudi-Zaad, „Energy-Based Analysis of String Stability in Heterogeneous Platoons,“ in *2021 IEEE 94th Vehicular Technology Conference (VTC2021-Fall)*, 2021, s. 01–06. DOI: 10.1109/VTC2021-Fall152928.2021.9625178.
- [27] D. Swaroop a J. Hedrick, „String stability of interconnected systems,“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, roč. 41, č. 3, s. 349–357, 1996. DOI: 10.1109/9.486636.
- [28] F. Gene, J. D. Powell, A. Emami-Naeini, R. Braun a J. Flatley, „FEEDBACK CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS (7TH GLOBAL EDITION),“ 2015.
- [29] R. Tedrake, *Underactuated Robotics, Algorithms for Walking, Running, Swimming, Flying, and Manipulation*. 2022. URL: <http://underactuated.mit.edu>.
- [30] Frank. „LQR-linear quadratic regulator.“ (), URL: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/139145957>.
- [31] M. Schlegel a J. Königsmarková, „Parametric Jordan form assignment revisited,“ *Asian Journal of Control*, roč. 16, č. 2, s. 409–420, 2014.
- [32] J. Königsmarková a M. Schlegel, „Input and Output Symmetric Dynamical Systems: Features and Control Design,“ in *15th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis*, Springer, 2022, s. 187–201.