

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra kybernetiky



## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Automatická eliminace kmitů podvěšené  
zátěže u portálových jeřábů

Plzeň, 2022

Jan Tymel

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd  
Akademický rok: 2021/2022

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Jan TYML**  
Osobní číslo: **A19B0327P**  
Studijní program: **B0714A150005 Kybernetika a řídicí technika**  
Specializace: **Automatické řízení a robotika**  
Téma práce: **Automatická eliminace kmitů podvěšené zátěže u portálových jeřábů**  
Zadávající katedra: **Katedra kybernetiky**

## Zásady pro vypracování

1. Seznamte se s dynamikou portálových jeřábů. Sestavte vhodné matematické modely pro simulace a návrh řízení.
2. Navrhněte přímovazební a zpětnovazební strategii eliminace nežádoucích kmitů převáženého nákladu.
3. Otestujte navržené algoritmy na simulačních modelech.
4. Realizujte navrženou strategii řízení na fyzikálním modelu s využitím vhodných HW a SW prostředků.

Rozsah bakalářské práce: **30 – 40 stránek A4**  
Rozsah grafických prací:  
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

Melichar, Goubej: skripta Lineární systémy 1,2  
Schlegel: Systémy a modely, přednášky

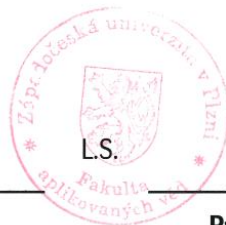
Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Martin Goubej, Ph.D.**  
Katedra kybernetiky

Datum zadání bakalářské práce: **15. října 2021**  
Termín odevzdání bakalářské práce: **23. května 2022**



---

**Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.**  
děkan



---

**Prof. Ing. Josef Psutka, CSc.**  
vedoucí katedry

V Plzni dne 15. října 2021

# Čestné prohlášení

Tímto prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně, pod dohledem vedoucího této bakalářské práce pana Ing. Martina Goubeje, Ph.D., a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni, dne 9. srpna 2022

.....

Jan Tymel

## Poděkování

Rád bych tímto poděkoval vedoucímu této bakalářské práce panu Ing. Martinu Goubejovi, Ph.D. za ochotu, trpělivost, užitečné rady a čas, který mi při konzultacích věnoval.

Poděkování také patří mé rodině, která mi umožnila studium na vysoké škole a vždy mě v mém studiu podporovala.

# Abstract

This bachelor's thesis deals with speed regulation and elimination of load oscillations of gantry cranes during transportation. The goal is to design reliable algorithms of feedforward and feedback control for automatic elimination of load oscillations and regulation of the speed of the transported load. In the first theoretical part, various models of gantry cranes are described. The achieved theoretical results are described in the sections devoted to feedforward and feedback control. The practical part is dedicated to testing the proposed algorithms on a real system.

## Key words:

Elimination of oscillations, gantry crane, feedforward control, feedback control

# Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá regulací rychlosti a eliminací kmitů nákladu portálových jeřábů při přepravě. Cílem je navrhnout spolehlivé algoritmy přímovazebního a zpětnovazebního řízení pro automatickou eliminaci kmitů nákladu a regulaci rychlosti převáženého nákladu. V první teoretické části jsou popsány různé modely portálových jeřábů. Dosažené teoretické výsledky jsou popsány v sekcích věnovaných přímovazebnímu a zpětnovazebnímu řízení. Praktická část se věnuje testování navržených algoritmů na reálném systému.

## Klíčová slova:

Eliminace kmitů, portálový jeřáb, přímovazební řízení, zpětnovazební řízení

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Matematické modely</b>	<b>10</b>
2.1	Jednoduchý 2DoF model . . . . .	10
2.2	Redukovaný jednoduchý 1DoF model . . . . .	12
2.2.1	Analýza chování . . . . .	13
2.2.2	Statická charakteristika . . . . .	14
2.3	Fyzikální kyvadlo, redukovaný 1DoF model . . . . .	15
2.3.1	Spojitosť mezi matematickým a fyzikální kyvadlem . . . . .	16
2.4	Kyvadlo s proměnnou délkou závěsu, redukovaný 2DoF model . . . . .	17
2.5	Kyvadlo s proměnnou délkou závěsu, redukovaný 1DoF model . . . . .	18
2.6	Dvojitě kyvadlo, redukovaný 2DoF model . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Eliminace kmitů</b>	<b>21</b>
3.1	Přímovazební kompenzace kmitů . . . . .	21
3.1.1	Model systému . . . . .	21
3.1.2	Návrh přímovazebního filtru . . . . .	22
3.1.3	Složitější přímovazební filtry . . . . .	25
3.2	Zpěťnovazební kompenzace kmitů . . . . .	27
3.2.1	Model systému . . . . .	27
3.2.2	Návrh regulátoru . . . . .	28
3.2.3	Test regulátoru na nelineárním systému . . . . .	35
3.2.4	Parametrizovaný regulátor pro systém s proměnnou délkou závěsu . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Testování na reálném systému</b>	<b>42</b>
4.1	Představení reálného systému . . . . .	42
4.2	Identifikace . . . . .	43
4.2.1	Motor . . . . .	43
4.2.2	Závěs . . . . .	43
4.3	Návrh regulátoru . . . . .	45
4.4	Simulace . . . . .	47
4.5	Test na reálném systému . . . . .	48
4.5.1	Odezva na požadovanou rychlost . . . . .	48
4.5.2	Odezva na počáteční výchylku . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>50</b>



# 1 Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá regulací rychlosti a eliminací kmitů nákladu portálových jeřábů při přepravě. V dnešní době jsou portálové jeřáby rozsáhle používány pro různé manipulace po celém světě. Portálové jeřáby jsou ovládány lidskými operátory. Problém těchto jeřábů vzniká při přepravě nákladu, kdy se náklad může nebezpečně rozkmitat, což jej může výrazně poškodit. Po operátorovi těchto jeřábů se vyžadují přesné a důkladné úkony. Je velmi důležité, aby byl pohyb zařízení jemný a ve větší míře nerozpohyboval přepravovanou zátěž. Náklad může být jakýkoliv a nesmí se značně rozhoupat, aby se za žádných okolností nemohl poškodit. Zároveň také musí být přeprava dostatečně rychlá, aby byl náklad na místě v určitém čase. Pracovníci, kteří jeřáb obsluhují, potřebují mnoho času a praxe, aby získali dostatek zkušeností ke splnění těchto požadavků.

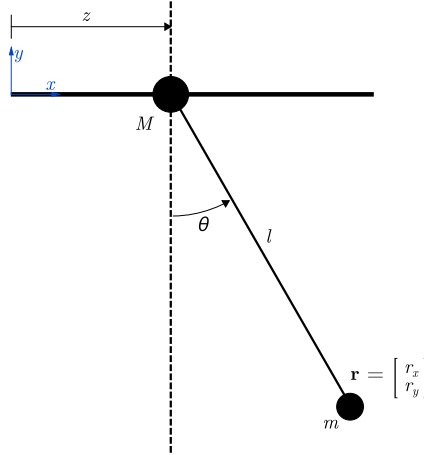
Hlavní cíl této práce je navrhnout spolehlivý algoritmus přímovazebního a zpětnovazebního řízení, který dokáže automaticky eliminovat nežádoucí kmity převáženého nákladu a zároveň regulovat rychlost převážení. Nejprve je potřeba popsat systém, který bude regulován. Pomocí Lagrangeovy metody bude popsáno několik různých matematických modelů pro seznámení s dynamikou portálových jeřábů. Následně bude rozebrán samotný návrh přímovazebního řízení a zpětnovazebního řízení. Přímovazební řízení spočívá v návržení tvarovacího filtru, který vytvaruje vstupní signál a tím ovlivní průběh přepravy nákladu. Zpětnovazební řízení se soustředí na použití senzorů polohy kočky jeřábu a úhlu kývání. Tyto informace se pak zužitkují k regulaci pomocí zpětné vazby zavedené do systému. Operátor jeřábu po aplikaci tohoto algoritmu bude zadávat pouze požadovanou rychlost, o samotný pohyb se postará navržené řízení. Nakonec budou navržené algoritmy otestovány na reálném systému.

## 2 Matematické modely

Pro seznámení s dynamikou portálových jeřábů je třeba vytvořit několik matematických modelů s různými vlastnostmi. Pro výpočet pohybových rovnic je využívána Lagrangeova metoda[1].

### 2.1 Jednoduchý 2DoF model

Jednoduché modely jsou modely matematického kyvadla. Podvěšená zátěž je uvažována jako hmotný bod zavěšená na nehmotném laně. Schéma systému:



Kinetická energie takového systému je:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}m(\dot{r}_x^2 + \dot{r}_y^2) + \frac{1}{2}M(\dot{z}_x^2 + \dot{z}_y^2) = \\
 &= \frac{1}{2}m(l^2 \cos^2(\theta)\dot{\theta}^2 + 2l \cos(\theta)\dot{\theta}\dot{z} + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}ml^2 \sin^2(\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{z}^2 = \\
 &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml \cos(\theta)\dot{\theta}\dot{z} + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}M\dot{z}^2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \sin(\theta) + z \\ -l \cos(\theta) \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{z} &= \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

kde  $m$  je hmotnost podvěšené zátěže,  $M$  je hmotnost jeřábu,  $\theta$  je úhlová výchylka závěsu,  $l$  je délka lana,  $\mathbf{z}$  je vektor pozice jeřábu a  $\mathbf{r}$  je vektor pozice nákladu.

Potenciální energie je:

$$V = mgl(1 - \cos(\theta)). \tag{2}$$

Lagrangián:

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml \cos(\theta)\dot{\theta}\dot{z} + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}M\dot{z}^2 - mgl(1 - \cos(\theta)). \quad (3)$$

Lagrangeovy rovnice pro tento systém jsou:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial z} \right) &= F, \end{aligned} \quad (4)$$

kde  $F$  je zobecněná síla působící na jeřáb ve směru  $\mathbf{z}$ .

Dosazením (3) do (4) dostaneme pohybové rovnice systému:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{\cos(\theta)}{l}\ddot{z} - \frac{g}{l}\sin(\theta), \\ \ddot{z} &= \frac{ml \sin(\theta)}{m+M}\dot{\theta}^2 - \frac{ml \cos(\theta)}{m+M}\ddot{\theta} + \frac{F}{m+M}. \end{aligned} \quad (5)$$

Tyto rovnice popisují netlumený, konzervativní systém. Každý reálný systém však obsahuje mechanické tření - tlumení. Aby do systému bylo přidáno mechanické tření, bude použita další zobecněná síla - disipativní funkce v Lagrangeových rovnicích pro úhlovou výchylku:

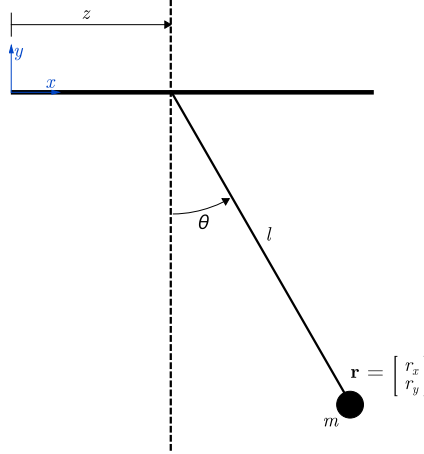
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} \right), \quad (6)$$

kde  $R = \frac{1}{2}b\dot{\theta}^2$ , je disipativní funkce tlumení. Pohybová rovnice pro úhlovou výchylku poté vypadá takto:

$$\ddot{\theta} = -\frac{\cos(\theta)}{l}\ddot{z} - \frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{b}{ml^2}\dot{\theta}. \quad (7)$$

## 2.2 Redukovaný jednoduchý 1DoF model

Systém je možné zjednodušiť pokud nebudeme brát v úvahu hmotnosť jeřábu a síly způsobené výchylkou úhlu  $\theta$  na jeřáb. Stále je uvažován náklad jako hmotný bod a nehmotné lano jeřábu. Schéma systému:



Kinetická energie takového systému je:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} m (\dot{r}_x^2 + \dot{r}_y^2) = \\ &= \frac{1}{2} m (l^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 + 2l \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{z} + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} m (l^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \sin(\theta) + z \\ -l \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

kde  $z$  je posun jeřábu.

Potenciální energie je:

$$V = mgl(1 - \cos(\theta)). \quad (9)$$

Lagrangian:

$$L = T - V = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + ml \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{z} + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgl(1 - \cos(\theta)). \quad (10)$$

Lagrangeovy rovnice pro tento systém jsou:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \left( \frac{\partial R}{\partial \theta} \right). \quad (11)$$

Dosazením (10) do (11) dostaneme pohybové rovnice systému:

$$\ddot{\theta} = - \frac{\cos(\theta)}{l} \ddot{z} - \frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{b}{ml^2} \dot{\theta}, \quad (12)$$

kde  $\ddot{z}$  označíme jako vstup systému.

### 2.2.1 Analýza chování

Pro analýzu chování zlinearizujeme systém. Stavový popis systému:

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta \\x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{\theta} = f_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} &= -\frac{\cos(x_1)}{l} \dot{z} - \frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{b}{ml^2} x_2 = f_2\end{aligned}$$

Při použití  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = x_2 = \dot{z} = 0$  dostaneme rovnovážné stavy systému:

$$\begin{aligned}\sin(x_1) &= 0 \\x_1 &\in k\pi\end{aligned}$$

Výpočet matice A linearizovaného systému kolem bodů  $x_1 = 2k\pi$  a  $x_1 = \pi + 2k\pi$ :

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sin(x_1)}{l} \dot{z} - \frac{g \cos(x_1)}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1=2k\pi \\ \dot{z}=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-\frac{b}{ml^2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{ml^2}\right)^2 - \frac{4g}{l}}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sin(x_1)}{l} \dot{z} - \frac{g \cos(x_1)}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1=\pi+2k\pi \\ \dot{z}=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-\frac{b}{ml^2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{ml^2}\right)^2 + \frac{4g}{l}}}{2}\end{aligned}$$

Aby byl systém stabilní, reálná část vlastních čísel musí být vždy záporná. U linearizovaného systému kolem bodů  $x_1 = 2k\pi$  dostaneme následující podmínku:

$$\pm \sqrt{\left(\frac{b}{ml^2}\right)^2 - \frac{4g}{l}} < \frac{b}{ml^2}. \quad (13)$$

Parametry systému jsou uvažovány  $b > 0, m > 0, l > 0, g > 0$ . Tato podmínka platí vždy, kyvadlo je tedy stabilní v pozicích  $x_1 = 2k\pi$ . Podmínka pro druhý systém linearizovaný kolem bodů  $x_1 = \pi + 2k\pi$ :

$$\pm \sqrt{\left(\frac{b}{ml^2}\right)^2 + \frac{4g}{l}} < \frac{b}{ml^2}. \quad (14)$$

Tato podmínka už neplatí vždy, jedno vlastní číslo bude vždy kladné a druhé záporné. Kyvadlo je tedy nestabilní v pozicích  $x_1 = \pi + 2k\pi$ . Fázový portrét má tvar sedla.

## 2.2.2 Statická charakteristika

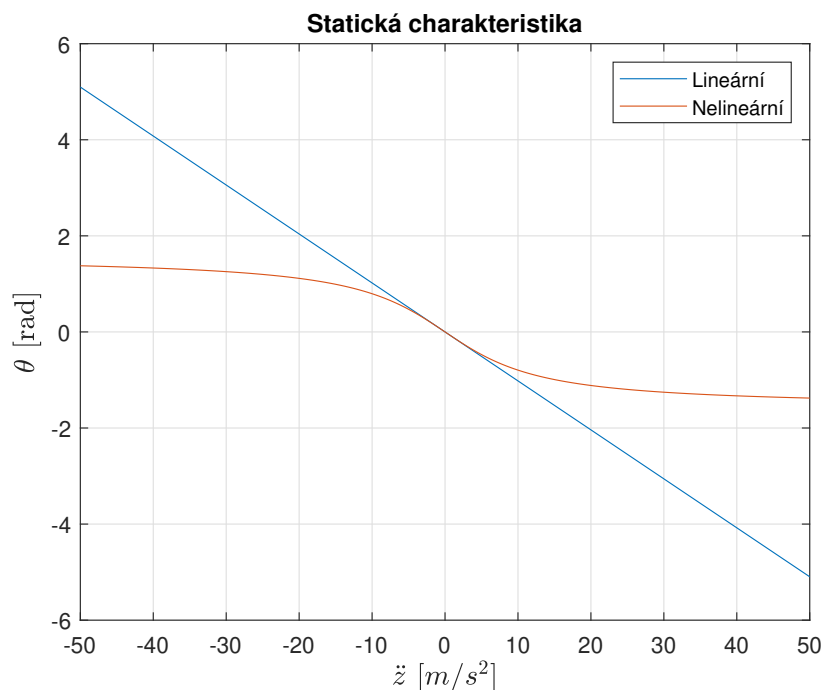
Abychom zjistili, jak efektivní je použití lineárního systému, vykreslíme statickou charakteristiku lineárního a nelineárního systému. Hodnotu ustáleného stavu pro nějaký vstup  $\ddot{z}$  dostaneme z pohybových rovnic, když dosadíme za všechny derivace stavů  $\dot{\theta}$  a  $\ddot{\theta}$  nulu. Lineární systém:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{l}\ddot{z} - \frac{g}{l}\theta \\ \theta &= -\frac{\ddot{z}}{g} \end{aligned} \quad (15)$$

Nelineární systém:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\cos(\theta)}{l}\ddot{z} - \frac{g}{l}\sin(\theta) \\ -\frac{\ddot{z}}{g} &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ \theta &= -\arctan\left(\frac{\ddot{z}}{g}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

Pomocí těchto rovnic vykreslíme statickou charakteristiku pro  $\ddot{z}$  v rozpětí -50 až 50.

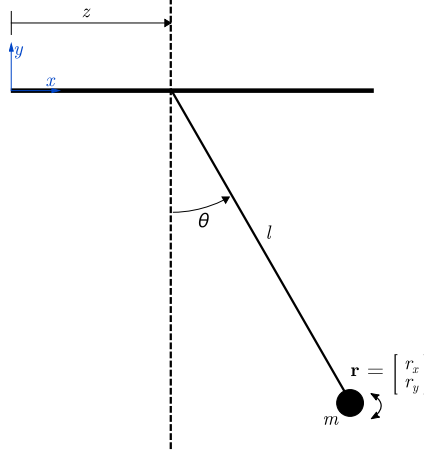


Obrázek 1: Statická charakteristika linearizovaného a nelineárního systému

Vidíme, že lineární model je velice podobný nelineárnímu modelu pro vstup  $\ddot{z} \approx \pm 7$ , v těchto hodnotách je lineární model dobře použitelný. Pro vyšší hodnotu vstupu se ale lineární model již výrazně odklání od nelineárního modelu.

## 2.3 Fyzikální kyvadlo, redukovaný 1DoF model

Fyzikální kyvadlo je kyvadlo, kde hmota není soustředěna do jediného bodu. Je tedy uvažováno, že náklad má vlastní setrvačnost  $J$ . Lano je stále nehmotné a opět není uvažována hmotnost jeřábu. Schéma systému:



Kinetická energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \\ &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(l^2 \cos^2(\theta)\dot{\theta}^2 + 2l \cos(\theta)\dot{\theta}\dot{z} + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m(l^2 \sin^2(\theta)\dot{\theta}^2). \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \sin(\theta) + z \\ -l \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Potenciální energie je:

$$V = mgl(1 - \cos(\theta)). \quad (18)$$

Lagrangián:

$$L = T - V = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml \cos(\theta)\dot{\theta}\dot{z} + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgl(1 - \cos(\theta)). \quad (19)$$

Lagrangeovy rovnice pro tento systém jsou:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \left( \frac{\partial R}{\partial \theta} \right). \quad (20)$$

Dosazením (19) do (20) dostaneme pohybové rovnice systému:

$$\ddot{\theta} = - \frac{ml \cos(\theta)}{J + ml^2} \ddot{z} - \frac{mgl}{J + ml^2} \sin(\theta) - \frac{b}{J + ml^2} \dot{\theta}, \quad (21)$$

kde  $\ddot{z}$  označíme jako vstup systému.

### 2.3.1 Spojitost mezi matematickým a fyzikální kyvadlem

Při porovnání výsledných pohybových rovnic matematického a fyzikálního kyvadla zjistíme, že změnou délky závěsu a tlumení u jednoho kyvadla dostaneme ekvivalentní kyvadla ve smyslu stejných frekvencí kmitání.

$$\begin{aligned}\frac{m_1 g l_1}{m_1 l_1^2} \sin(\theta) &= \frac{m_2 g l_2}{J + m_2 l_2^2} \sin(\theta) \\ l_1 &= \frac{J}{l_2 m_2} + l_2\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}\frac{b_1}{m_1 l_1^2} \dot{\theta} &= \frac{b_2}{J + m_2 l_2^2} \dot{\theta} \\ b_1 &= \frac{b_2 l_1^2 m_1}{m_2 l_2^2 + J}\end{aligned}\tag{23}$$

Z přenosových funkcí linearizovaných systémů matematického a fyzikálního kyvadla dostaneme stejné výrazy. Přenosové funkce, kde vstup je poloha jeřábu:

$$\begin{aligned}F_{mat}(s) &= \frac{\theta(s)}{z(s)} = -\frac{\frac{1}{l} s^2}{s^2 + \frac{b}{m l^2} s + \frac{g}{l}} \\ F_{fyz}(s) &= \frac{\theta(s)}{z(s)} = -\frac{\frac{m l}{J + m l^2} s^2}{s^2 + \frac{b}{J + m l^2} s + \frac{m g l}{J + m l^2}}\end{aligned}\tag{24}$$

Z těchto přenosů lze pomocí obecného vzorce kmitavého členu 2. řádu zjistit přirozenou (netlumenou) frekvenci  $\omega_n$  a relativní tlumení  $\xi$ .

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\tag{25}$$

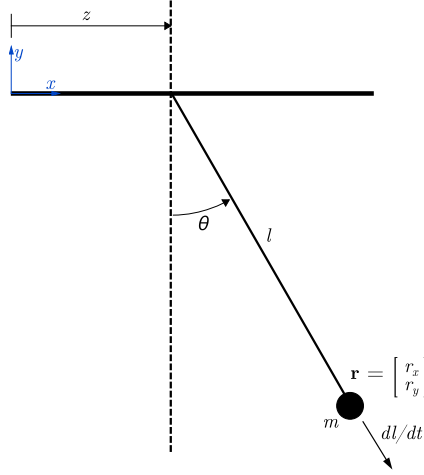
$$\begin{aligned}\omega_{n_{mat}} &= \sqrt{\frac{g}{l}} & \xi_{mat} &= \frac{b}{2m\sqrt{g l^3}} \\ \omega_{n_{fyz}} &= \sqrt{\frac{m g l}{J + m l^2}} & \xi_{fyz} &= \frac{b}{2(J + m l^2)\sqrt{\frac{m g l}{J + m l^2}}}\end{aligned}$$

Z těchto výrazů vidíme, že moment setrvačnosti ovlivňuje jak přirozenou frekvenci  $\omega_n$ , tak relativní tlumení  $\xi$ . K přepočítání na ekvivalentní kyvadla je tedy potřeba jiné délky závěsu, pomocí které lze přepočítat na ekvivalentní, přirozenou frekvenci  $\omega_n$ . Aby bylo možné přepočítat i relativní tlumení  $\xi$  je potřeba kromě jiné délky závěsu  $l$  i jinou hodnotu tlumení  $b$ .



## 2.4 Kyvadlo s proměnnou délkou závěsu, redukováný 2DoF model

Tento model reflektuje chování kyvadla, kde délka lana není konstantní a je tedy funkcí času. Je uvažováno nehmotné lano a je zanedbán moment setrvačnosti nákladu a hmotnost jeřábu. Schéma systému:



Kinetická energie:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{l}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + ml \cos(\theta)\dot{\theta}\dot{z} + m\dot{l} \sin(\theta)\dot{z}. \quad (26)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \sin(\theta) + z \\ -l \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cos(\theta)\dot{\theta} + \dot{l} \sin(\theta) + \dot{z} \\ l \sin(\theta)\dot{\theta} - \dot{l} \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Potenciální energie je:

$$V = mgl_0 - mgl \cos(\theta). \quad (27)$$

Lagrangián:

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml \cos(\theta)\dot{\theta}\dot{z} + m\dot{l} \sin(\theta)\dot{z} + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\dot{l}^2 - mgl_0 + mgl \cos(\theta). \quad (28)$$

Lagrangeovy rovnice pro tento systém jsou:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} \right),$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial l} \right) = v, \quad (29)$$

kde  $v$  je zobecněná síla ovlivňující délku lana  $l$ .

Dosazením (28) do (29) dostaneme pohybové rovnice systému:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{l}}{l}\dot{\theta} - \frac{\cos(\theta)}{l}\ddot{z} - \frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{b}{ml^2}\dot{\theta}, \\ \ddot{l} &= l\dot{\theta}^2 + g\cos(\theta) - \sin(\theta)\ddot{z} + \frac{v}{m},\end{aligned}\tag{30}$$

kde  $\ddot{z}$  označíme jako vstup systému.

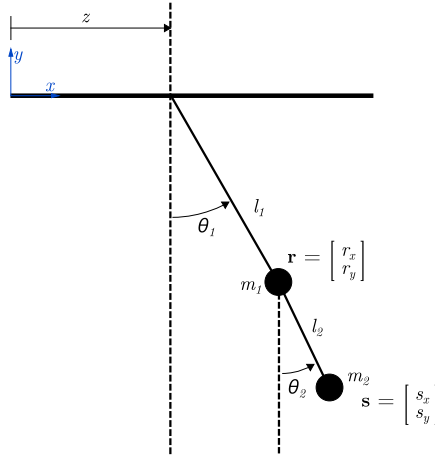
## 2.5 Kyvadlo s proměnnou délkou závěsu, redukovaný 1DoF model

System je možné zjednodušit na 1DoF pokud budeme uvažovat, že polohu lana můžeme přímo řídit. Pro další řešení je možné zanedbat dynamiku  $l$ . Budeme uvažovat pouze první rovnici z (30) a řízení ve tvaru:

$$\begin{aligned}l &= v, \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{l}}{l}\dot{\theta} - \frac{\cos(\theta)}{l}\ddot{z} - \frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{b}{ml^2}\dot{\theta}.\end{aligned}\tag{31}$$

## 2.6 Dvojité kyvadlo, redukovaný 2DoF model

Je uvažováno dvojité kyvadlo s různými délkami závěsu a různými hmotnostmi. Opět je zanedbán moment setrvačnosti, hmotnost lana a jeřábu. Schéma systému:



Kinetická energie:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}} = \\
 &= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 + m_1l_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{z} + \\
 &+ m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{z} + m_2l_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_2\dot{z}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta_1) + z \\ -l_1 \cos(\theta_1) \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{s} &= \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) + z \\ -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

kde  $\theta_1$  a  $\theta_2$  jsou úhlové výchylky jednotlivých závěsů,  $\mathbf{s}$  je vektor pozice nákladu a  $\mathbf{r}$  je vektor prvního kloubu závěsu.

Potenciální energie je:

$$V = -m_1l_1g \cos(\theta_1) - m_2l_1g \cos(\theta_1) - m_2l_2g \cos(\theta_2). \tag{33}$$

Lagrangián:

$$\begin{aligned}
 L = T - V &= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 + \\
 &+ m_1l_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{z} + m_2l_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{z} + m_2l_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_2\dot{z} + \\
 &+ m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_1l_1g \cos(\theta_1) + m_2l_1g \cos(\theta_1) + m_2l_2g \cos(\theta_2).
 \end{aligned} \tag{34}$$

Lagrangeovy rovnice pro tento systém jsou:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) &= - \left( \frac{\partial R_1}{\partial \dot{\theta}_1} \right), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) &= - \left( \frac{\partial R_2}{\partial \dot{\theta}_2} \right),\end{aligned}\tag{35}$$

kde disipativní funkce  $R_1 = \frac{1}{2}b_1\dot{\theta}_1$  a  $R_2 = \frac{1}{2}b_2\dot{\theta}_2$ .

Dosazením (34) do (35) dostaneme pohybové rovnice systému:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= - \frac{m_1 \cos(\theta_1)}{l_1(m_1 + m_2)} \ddot{z} - \frac{m_2 \cos(\theta_1)}{l_1(m_1 + m_2)} \ddot{z} - \frac{m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1(m_1 + m_2)} \ddot{\theta}_2 + \\ &+ \frac{m_2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1(m_1 + m_2)} \dot{\theta}_2^2 - \frac{g}{l_1} \sin(\theta_1) - \frac{b_1}{l_1^2(m_1 + m_2)} \dot{\theta}_1,\end{aligned}\tag{36}$$

$$\ddot{\theta}_2 = - \frac{\cos(\theta_2)}{l_2} \ddot{z} - \frac{l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_2} \ddot{\theta}_1 + \frac{l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_2} \dot{\theta}_1^2 - \frac{g}{l_2} \sin(\theta_2) - \frac{b_2}{m_2 l_2^2} \dot{\theta}_2,$$

kde  $\ddot{z}$  označíme jako vstup systému.

### 3 Eliminace kmitů

Tato část se věnuje eliminaci nežádoucích kmitů převáženého nákladu. Bude navrhována přímovazební a zpětnovazební kompenzace kmitů.

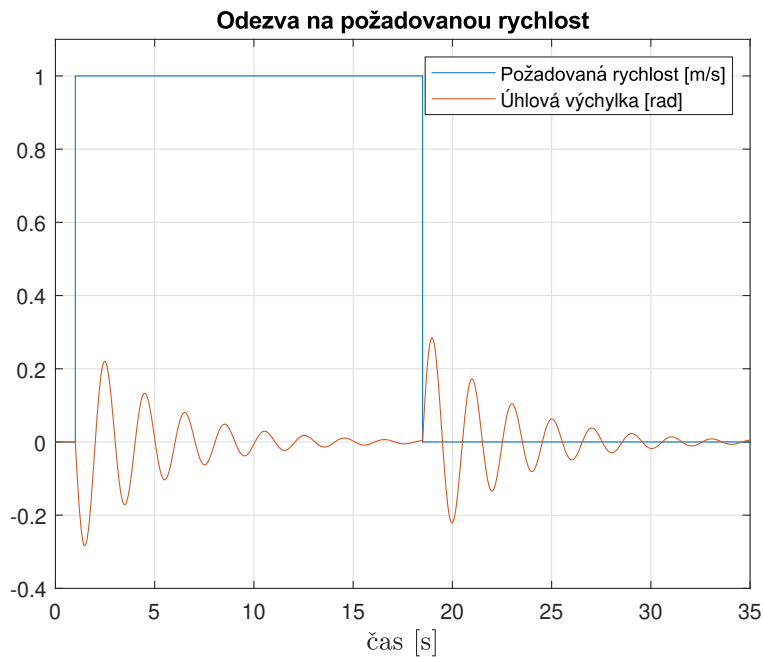
#### 3.1 Přímovazební kompenzace kmitů

##### 3.1.1 Model systému

Pro návrh je uvažován redukovaný jednoduchý 1DoF model, kde vstup je rychlost jeřábu. Přenosová funkce takového systému je:

$$F(s) = \frac{\theta(s)}{\dot{z}(s)} = -\frac{\frac{1}{l}s}{s^2 + \frac{b}{ml^2}s + \frac{g}{l}} \quad (37)$$

Parametry systému byly nastaveny tyto hodnoty:  $m = 1$  kg,  $l = 1$  m,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>,  $b = 0,5$ . Pro tyto parametry je přirozená frekvence  $\omega_n = 3,1321$  rad/s a relativní tlumení  $\xi = 0,0798$ .

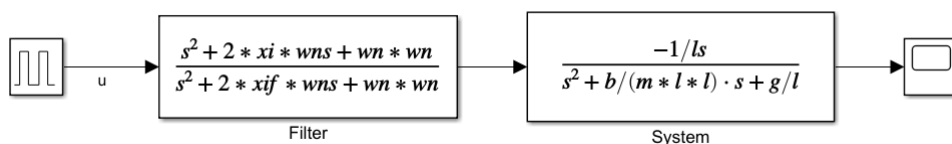


Obrázek 2: Simulace odezvy na obdélkový průběh požadované rychlosti

### 3.1.2 Návrh přímovazebního filtru

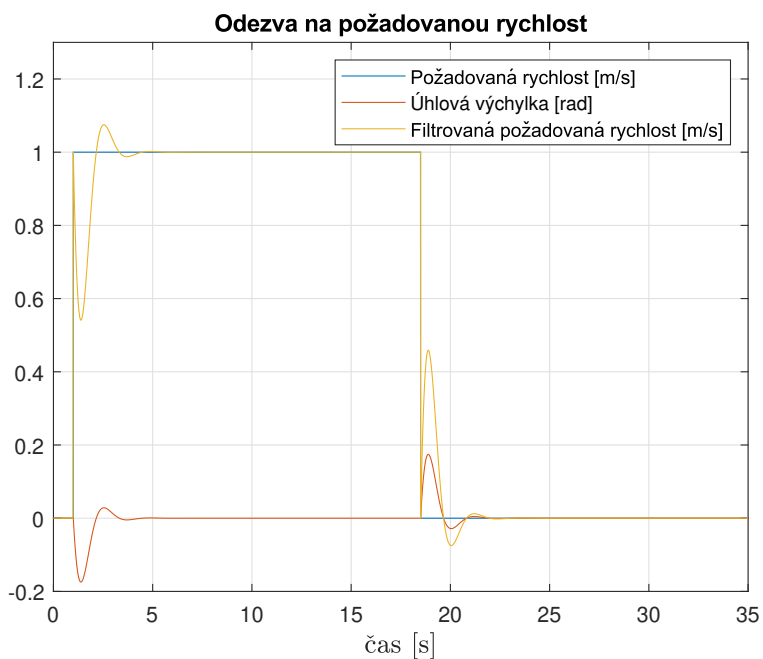
Kmitý lze eliminovat pomocí přímovazebního tvarovacího filtru, který upravuje vstupní signál. Tvarovací filtr je navržen tak, aby odstranil přirozené tlumení systému a zároveň zavedl nastavitelnou konstantu tlumení  $\xi_f$ . Přenos filtru:

$$F(s) = -\frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi_f\omega_n s + \omega_n^2} \quad (38)$$

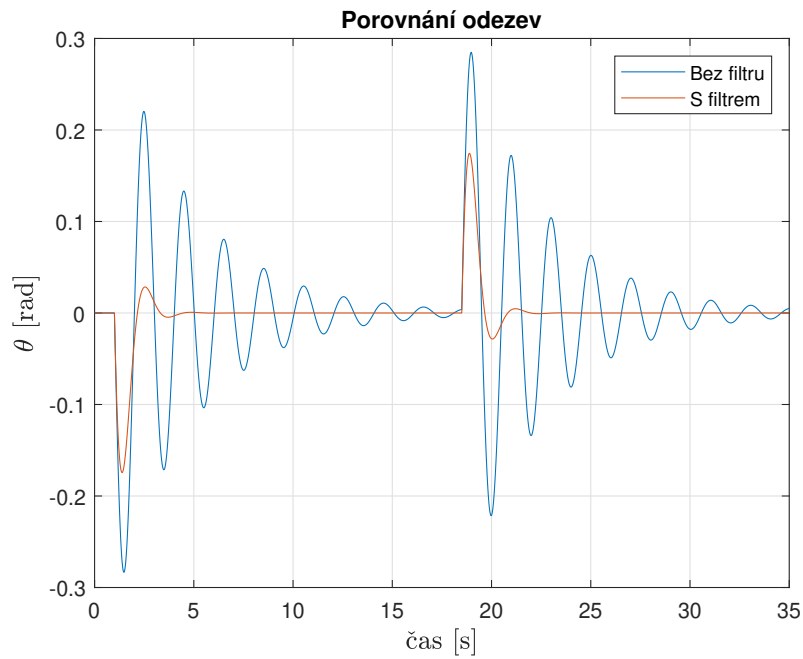


Obrázek 3: Schéma zapojení v simulinku

Pokud bude  $\xi$  a  $\omega_n$  zvoleno na stejnou hodnotu, jako v přenosu systému, tak systém s filtrem bude vlastně systém se stejnými vlastnostmi jako nefiltrovaný systém, jen bude mít nastavitelnou konstantu relativního tlumení  $\xi_f$ . V tomto případě je  $\xi_f = 0,5$ .

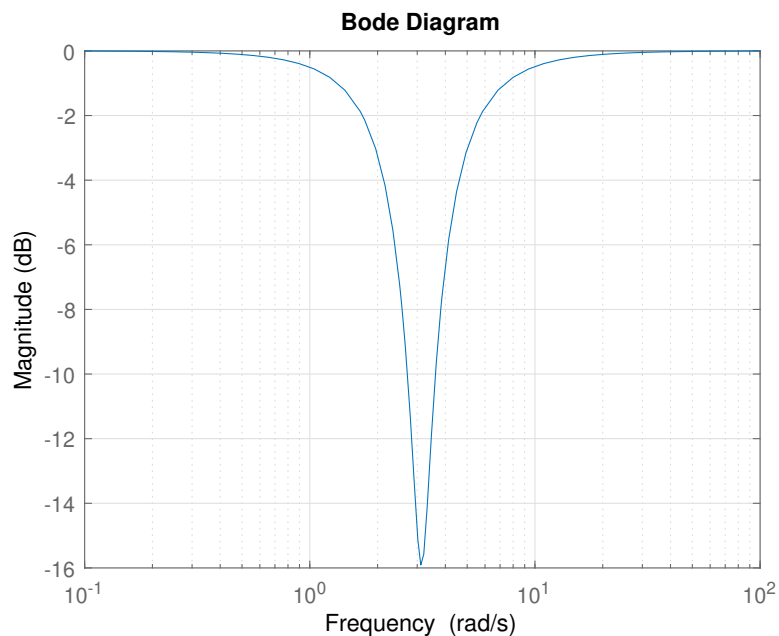


Obrázek 4: Simulace odezvy systému s tvarovacím filtrem



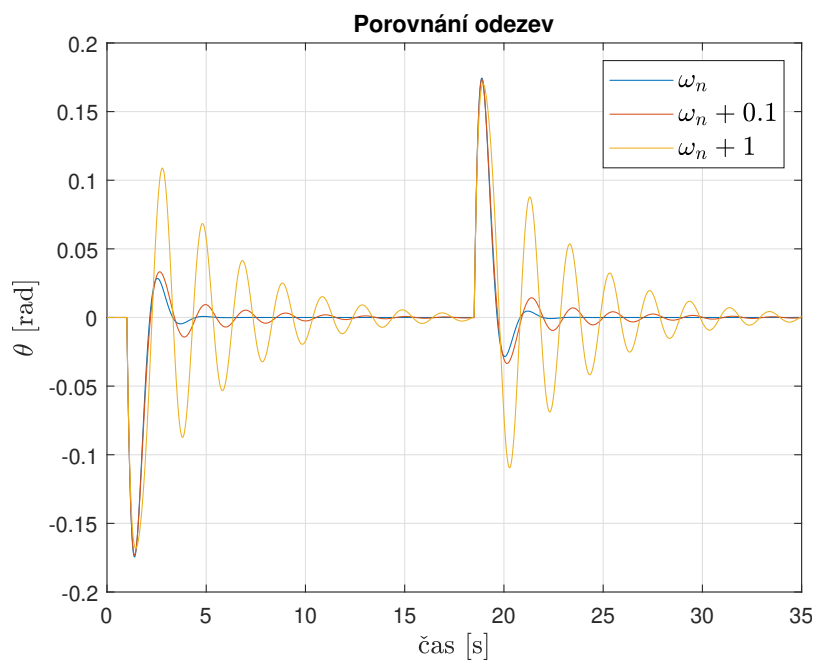
Obrázek 5: Porovnání mezi filtrovaným a nefiltrovaným systémem

Tento filtr má však dvě nevýhody - malá robustnost vůči chybné rezonanční frekvenci a nulový relativní řád. Nulový relativní řád způsobuje, že pro nespojitý vstup dostaneme také nespojitý výstup (viz obr. 4), což může být problém. Příliš velké změny požadované rychlosti jsou nežádoucí zejména pro praxi. Malou robustnost filtru můžeme vidět když si vykreslíme amplitudovou charakteristiku filtru:



Obrázek 6: Amplitudová charakteristika filtru

Vidíme, že pro malou chybu v rezonanční frekvenci je tlumení mnohem menší a odezva se opět stává kmitavou.



Obrázek 7: Porovnání odezev s různými chybami  $\omega_n$

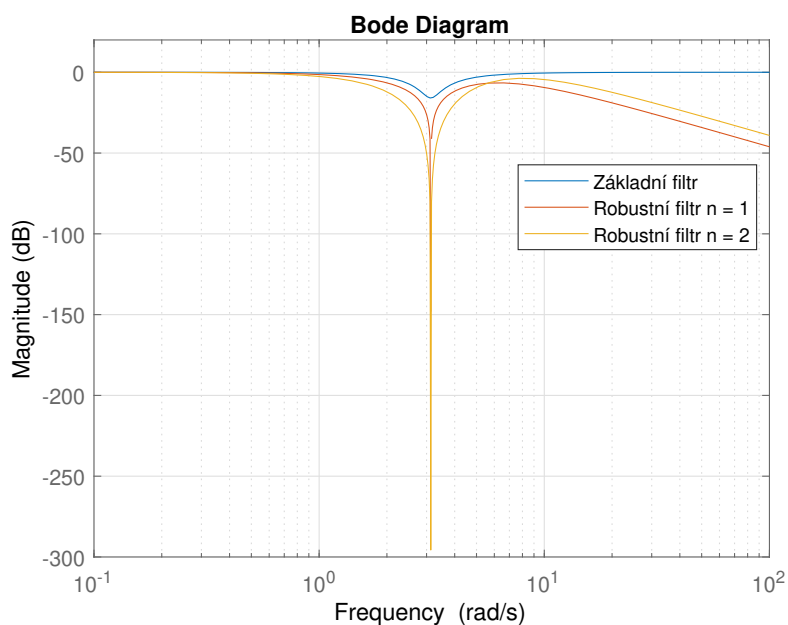


### 3.1.3 Složitější přímovazební filtry

Pro zlepšení robustnosti využijeme robustnější filtr v následujícím tvaru:

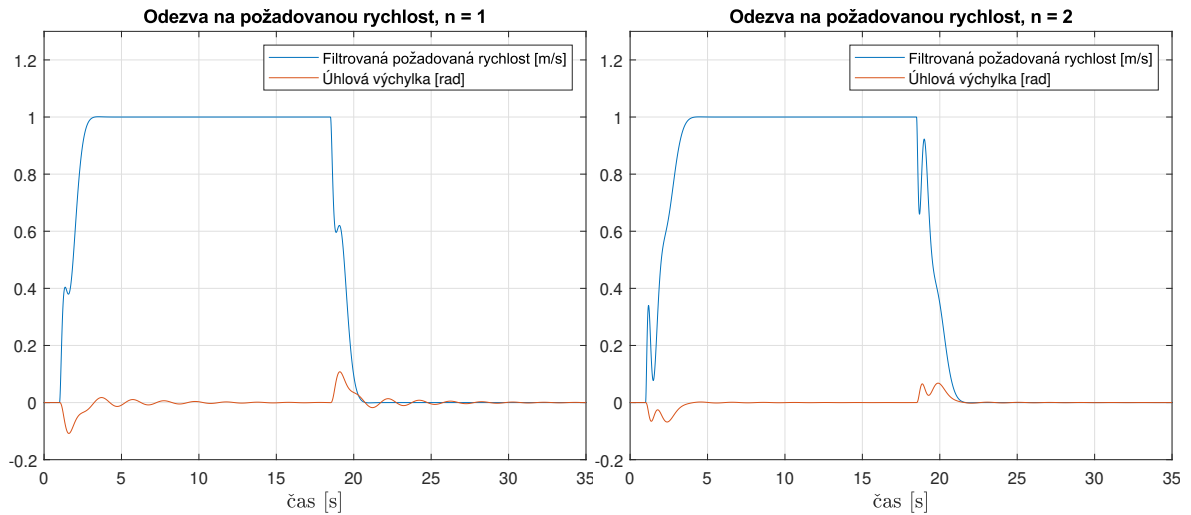
$$F(s) = \frac{\left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 1\right]^n}{\left[\left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 + 2\frac{\xi_p}{\omega_p}s + 1\right]^{n+1}}, \quad (39)$$

kde  $\omega_p = \alpha\omega_n$ ,  $\alpha$  ovlivňuje umístění pólů, které ovlivňují rychlost odezvy a kmitavost,  $\xi_p$  je relativní tlumení filtru a  $n$  je řád filtru. Pro zvýšení robustnosti lze použít vyšší řád filtru za cenu pomalejší odezvy. Tento filtr má vždy kladný relativní řád a disponuje také větší robustností, než předchozí filtr.



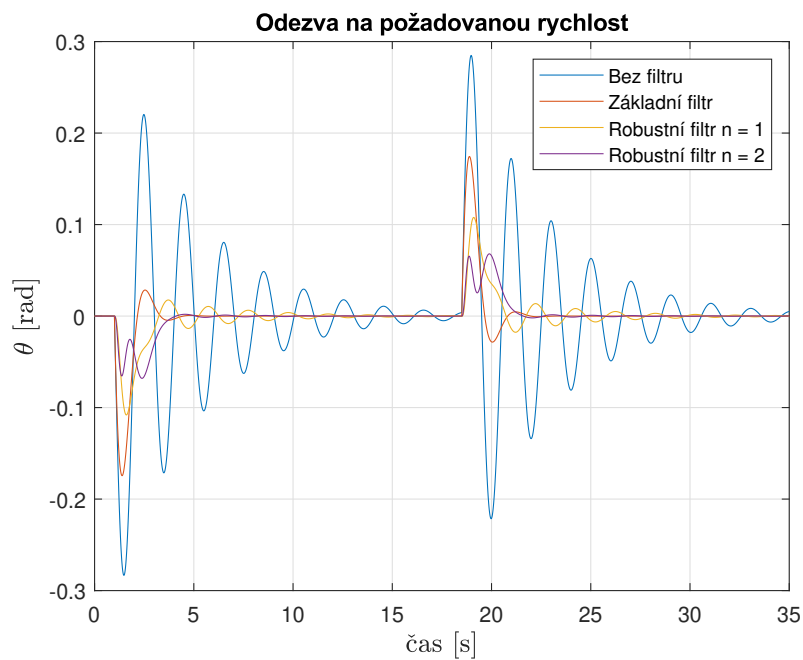
Obrázek 8: Porovnání amplitudových charakteristik

V tomto případě byly voleny parametry na následující hodnoty:  $\alpha = 1,5$ ,  $\xi_p = 0,9$ .



Obrázek 9: Porovnání simulací odezev s robustním filtrem

Vidíme, že filtrovaný vstup má přijatelnější tvar. Změny požadované rychlosti nejsou tak drastické, jako u prvního filtru. Toto se však podepsalo na výstupu, je více kmitavý než výstup se základním filtrem. Stále však dostáváme mnohem lepší výsledky než ve variantě bez filtru.



Obrázek 10: Porovnání odezev mezi různými filtry a odezvy bez filtru

## 3.2 Zpětnovazební kompenzace kmitů

U varianty se zpětnovazebním řízením se budeme spoléhat na senzory polohy kočky jeřábu a úhlové polohy kyvadla. Tyto informace využijeme k regulaci jak rychlosti kočky jeřábu, tak k eliminaci kmitů podvěšené zátěže. Budeme potřebovat rozšířit stavový model systému, abychom mohli řídit rychlost kočky jeřábu a eliminovat kmity zároveň.

### 3.2.1 Model systému

Je předpokládána dynamika uzavřené rychlostní smyčky v následujícím tvaru:

$$F_m(s) = \frac{v(s)}{\hat{v}(s)} = \frac{K_m}{Ts + 1} \quad (40)$$

kde  $T$  je známá časová konstanta,  $K_m$  je statické zesílení motoru,  $v$  je aktuální rychlost generována motorem a  $\hat{v}$  je požadovaná rychlost motoru.

Tento výraz lze upravit na diferenciální rovnici:

$$T\dot{v} + v = K_m\hat{v} \quad (41)$$

Pomocí těchto výrazů rozšíříme stavový popis o třetí stav - aktuální rychlost jeřábu  $x_3 = v$ . První dva stavy zůstanou stejné,  $x_1 = \theta$  a  $x_2 = \dot{\theta}$ . Vstup bude požadovaná rychlost  $\hat{v}$ .

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{\theta} = f_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} &= -\frac{\cos(x_1)}{l} \left( \frac{K_m}{T} \hat{v} - \frac{1}{T} x_3 \right) - \frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{b}{ml^2} x_2 = f_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{K_m}{T} \hat{v} - \frac{1}{T} x_3 = f_3 \end{aligned}$$

Při použití  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = x_2 = \hat{v} = \dot{x}_3 = 0$  dostaneme rovnovážné stavy systému:

$$\begin{aligned} \sin(x_1) &= 0 \\ x_1 &\in k\pi \end{aligned}$$

Výpočet matic A a B linearizovaného systému kolem stabilního pracovního bodu  $x_1 = 2k\pi$ :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_m \sin(x_1)}{Tl} \hat{v} - \frac{\sin(x_1)}{Tl} x_3 - \frac{g \cos(x_1)}{l} & -\frac{b}{ml^2} & \frac{\cos(x_1)}{Tl} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1=2k\pi \\ \hat{v}=0}} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} & \frac{1}{Tl} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{v}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \hat{v}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \hat{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_m \cos(x_1)}{Tl} \\ \frac{K_m}{T} \end{bmatrix} \Bigg|_{x_1=2k\pi} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_m}{Tl} \\ \frac{K_m}{T} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### 3.2.2 Návrh regulátoru

Pro tuto variantu bude použit stavový regulátor. Vstupy do stavového regulátoru budou stavy  $x_1, x_2$ , tedy úhlová poloha a úhlová rychlost. Řízení bude v následujícím tvaru:

$$u = -\mathbf{k}\mathbf{x} = -k_1\theta - k_2\dot{\theta} - k_3v, \quad (42)$$

kde  $\mathbf{k} = [k_1 \ k_2 \ k_3]$  je vektor parametrů stavového regulátoru,  $v$  je rychlost jeřábu a  $\hat{v}$  je požadovaná rychlost jeřábu.

Pro výpočet parametrů potřebujeme zjistit, jak bude vypadat matice A uzavřeného systému:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu = A\mathbf{x} - B\mathbf{k}\mathbf{x} = (A - B\mathbf{k})\mathbf{x} \\
 A_z &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_mk_1}{Tl} - \frac{g}{l} & \frac{K_mk_2}{Tl} - \frac{b}{ml^2} & \frac{1}{Tl} + \frac{K_mk_3}{Tl} \\ -\frac{K_mk_1}{T} & -\frac{K_mk_2}{T} & -\frac{K_mk_3}{T} - \frac{1}{T} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Charakteristický polynom:

$$\begin{aligned}
 a_z(s) = |sI - A_z| &= s^3 + \frac{Tb + ml^2 + K_mk_3ml^2 - K_mk_2ml}{Tml^2} s^2 + \\
 &+ \frac{b + K_mbk_3 - K_mk_1ml + Tmgl}{Tml^2} s + \frac{mgl + K_mk_3mgl}{Tml^2}
 \end{aligned} \quad (43)$$

Pro přiřazení pólů použijeme kritérium ITAE[2]. Optimální tvar charakteristického polynomu třetího řádu, aby bylo minimalizováno kritérium ITAE:

$$a_z^*(s) = s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3 \quad (44)$$

$\omega_n$  můžeme určit přes vzájemné vztahy s činitelem tlumení a dobou regulace[2], zvolíme  $\xi = 0,5$  a  $T_{reg} = 3$ :

$$\omega_n = \frac{4,8}{T_{reg}\xi} = \frac{4,8}{3 \cdot 0,5} = 3,2 \quad (45)$$

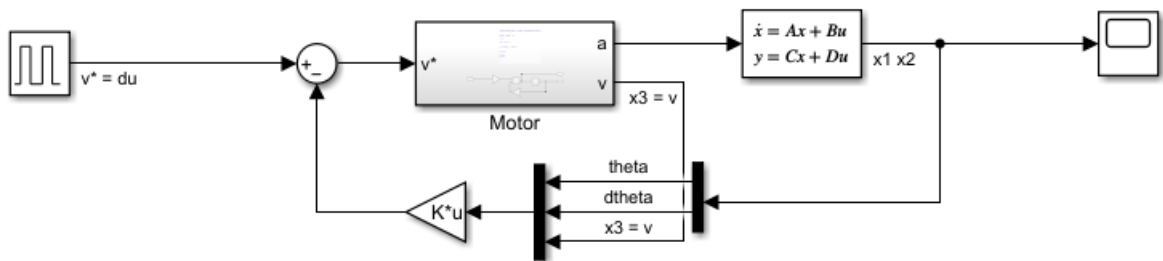
Prvky vektoru  $\mathbf{k}$  dostaneme z diofantické rovnice, ze které dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{Tb + ml^2 + k_3ml^2 - k_2ml}{Tml^2} &= 1,75\omega_n \\ \frac{b + bk_3 - k_1ml + Tmgl}{Tml^2} &= 2,15\omega_n^2 \\ \frac{mgl + k_3mgl}{Tml^2} &= \omega_n^3 \end{aligned} \quad (46)$$

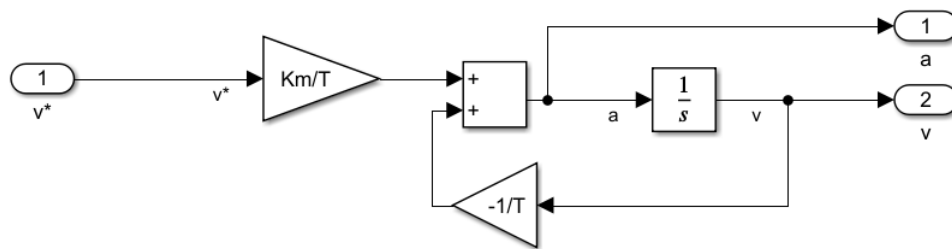
Pro parametry  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $b = 0,5$ ,  $T = 0,5$ ,  $K_m = 1$  a  $\omega_n = 3,2 \text{ rad/s}$  dostaneme:

$$\mathbf{k} = [-5,2679 \quad -0,8799 \quad 0,6701] \quad (47)$$

Schéma zapojení stavového regulátoru a motoru v simulinku:

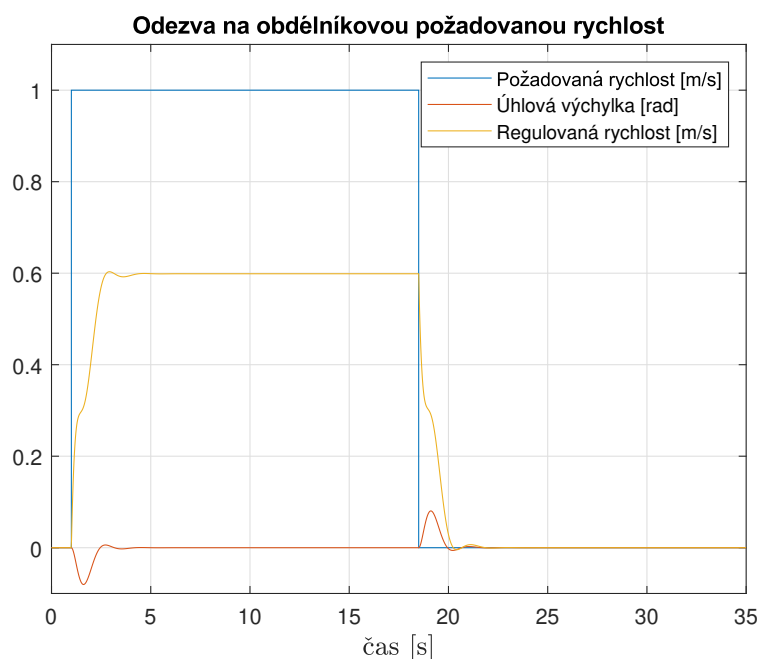


Obrázek 11: Schéma zapojení se stavovým regulátorem



Obrázek 12: Schéma motoru

Simulace odezvy na obdélníkovou požadovanou rychlost:



Obrázek 13: Odezva při použití stavového regulátoru

Vidíme, že kmity se úspěšně eliminují, ale rychlost nedosahuje požadované hodnoty. Děje se tak, protože stavový regulátor mění póly systému a nuly ponechává stejné. Vyjde tedy obecně nejednotkové zesílení. Toto se dá řešit pomocí dopředné vazby, která zesílí vstupní požadovanou rychlost tak, abychom se dostali na cílovou hodnotu. Toto zesílení je rovno obrácené hodnotě statického zesílení celého systému se zpětnou vazbou.

Požadované kompenzační zesílení vypočteme z přenosové funkce systému se zpětnou vazbou z požadované rychlosti na rychlost jeřábu:

$$\begin{aligned}
 F_z(s) &= \frac{\frac{K_m}{Ts+1}}{1 + \frac{K_m k_3}{Ts+1}} \\
 &= \frac{K_m}{Ts+1} \frac{Ts+1}{Ts+1 + K_m k_3} = \frac{K_m}{Ts+1 + K_m k_3} = \frac{\frac{K_m}{T}}{s + \frac{1+K_m k_3}{T}}
 \end{aligned} \tag{48}$$

Z tohoto výrazu dostaneme statické zesílení celého systému se zpětnou vazbou  $K_z$ :

$$\frac{\frac{K_m}{T}}{s + \frac{1+K_m k_3}{T}} = \frac{K_m}{T} \frac{1}{\frac{1+K_m k_3}{T}} \frac{1}{\frac{T}{1+K_m k_3} s + 1} = K_z \frac{1}{\frac{T}{1+K_m k_3} s + 1} \tag{49}$$

Kompenzační zesílení je rovno obrácené hodnotě statického zesílení celého systému se zpětnou vazbou:

$$\frac{1}{K_p} = K_z$$

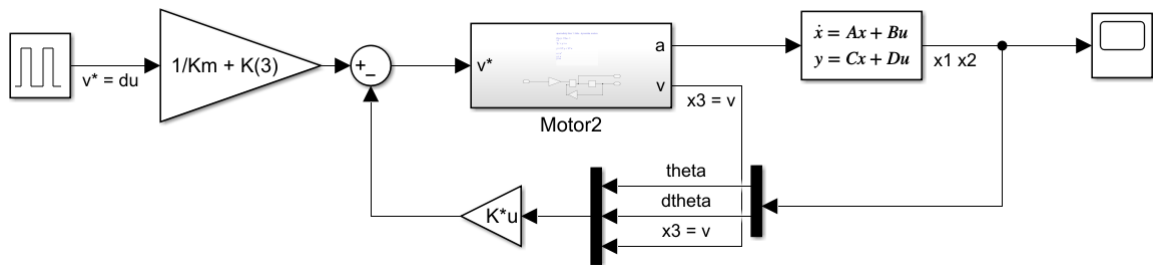
$$\frac{1}{K_p} = \frac{K_m}{T} \frac{T}{1 + K_m k_3} \quad (50)$$

$$K_p = \frac{1}{K_m} + k_3$$

Řízení upravíme do podoby s dopřednou vazbou:

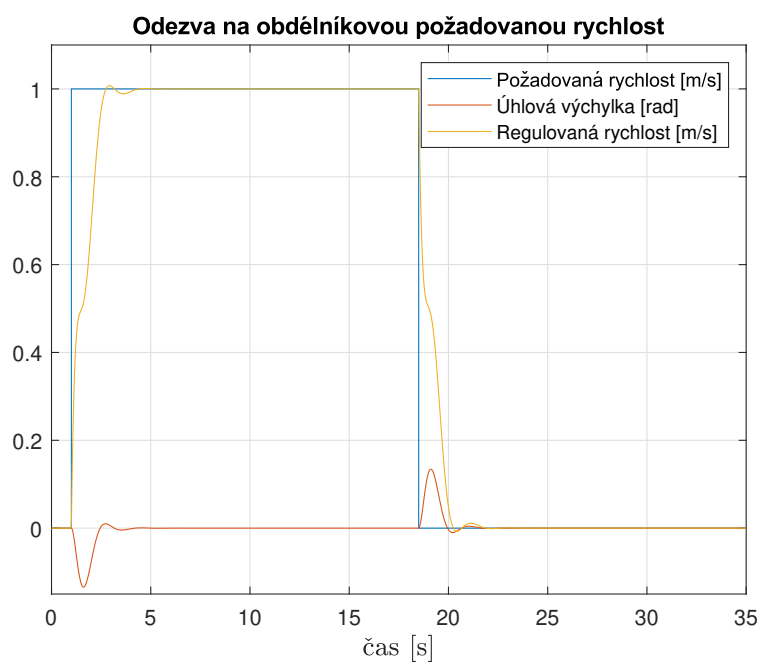
$$u = -\mathbf{k}\mathbf{x} = -k_1\theta - k_2\dot{\theta} - k_3v + \left(\frac{1}{K_m} + k_3\right)\hat{v} \quad (51)$$

Schéma s dopřednou vazbou:



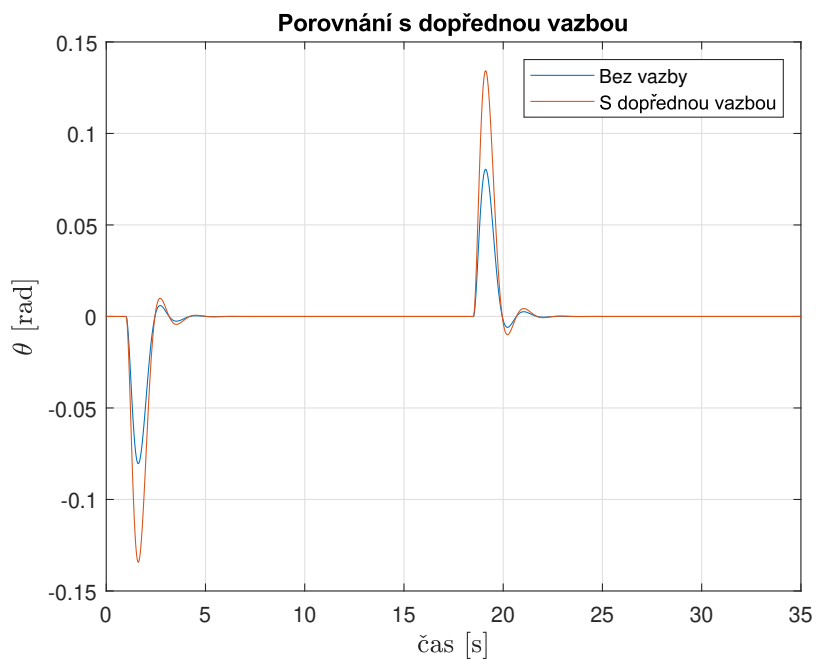
Obrázek 14: Simulink schéma stavového regulátoru s dopřednou vazbou

Simulace odezvy s dopřednou vazbou:



Obrázek 15: Odezva při použití dopředné vazby

Vidíme, že rychlost už se reguluje správně do požadované hodnoty. Zesílení s dopřednou vazbou však neovlivňuje pouze rychlost jeřábu, ale i ostatní stavy. Dostáváme tedy horší, zesílený výstup systému, porovnání:



Obrázek 16: Porovnání s dopřednou vazbou



Porovnání mezi přímovazebním a zpětnovazebním kompenzačním řízením. Přímovazební řízení je reprezentováno dvěma filtry. Základní filtr nultého relativního řádu a robustní notch filtrem prvního řádu. Zpětnovazební řízení je reprezentováno odezvou se stavovým regulátorem s dopřednou vazbou:



Obrázek 17: Porovnání přímovazebního a zpětnovazebního kompenzačního řízení

Vidíme, že oproti robustnímu filtru má zpětnovazební řízení větší výchylku při prvním kmitu, ale jinak je odezva mnohem méně kmitavá. Základní filtr má velmi podobný tvar odezvy jako řízení zpětnovazební, ale kmity mají větší amplitudu. Přímovazební řízení má tedy celkově horší odezvu a oproti zpětnovazebnímu řízení má navíc velkou nevýhodu. Kdyby na systém působily jakékoli vnější poruchy, přímovazební řízení na tyto poruchy nijak nebude reagovat, narozdíl od zpětnovazebního řízení. Přímovazební řízení je tedy použitelné pouze pro případy, kdy víme, že na systém nebudou působit, buď žádné poruchy, nebo jen minimální poruchy, které neovlivní odezvu nijak výrazně. V ostatních případech je potřeba použít řízení zpětnovazební, které má možnost reagovat na vnější poruchy zanesené do systému.

Vnější chyba může být například špatně změřená přirozená frekvence. Porovnání přímovazebního a zpětnovazebního řízení s chybou v přirozené frekvenci  $\omega_n = \omega_n + 0,5$  rad:

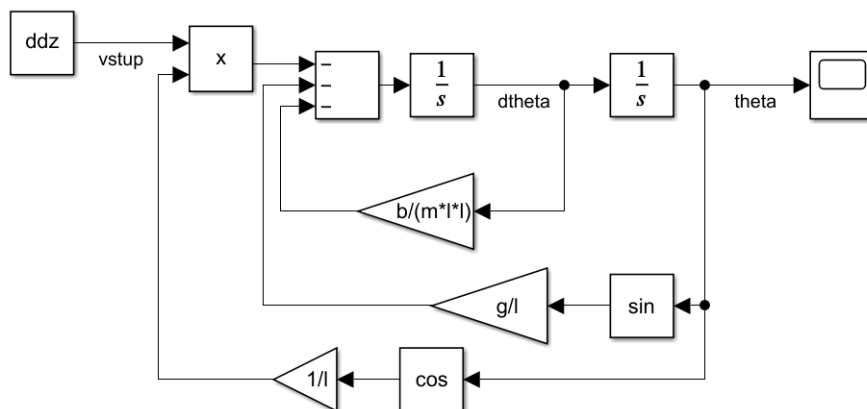


Obrázek 18: Porovnání přímovazebního a zpětnovazebního kompenzačního řízení

Vidíme, že tato chyba v přirozené frekvenci výrazně zhoršila amplitudu kmitů a kmitavost obou variant s přímovazebním filtrem. Zpětnovazební řízení tato chyba nijak neovlivňuje a má stále stejný průběh.

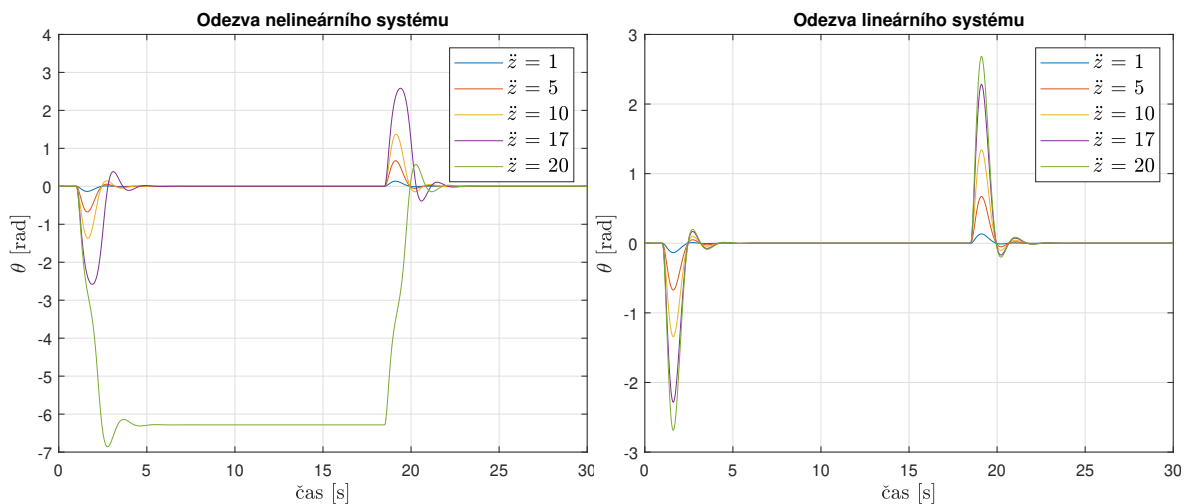
### 3.2.3 Test regulátoru na nelineárním systému

Navržený regulátor byl pro jednoduchost navržen s pomocí linearizovaného systému. Aby mohl být regulátor použit na reálném systému musí regulátor fungovat správně také s nelineárním modelem. Ze statické charakteristiky (viz obr. 1) vidíme, že výraznější odchylky uvidíme pro vstup  $|\ddot{z}| > 7$ . Parametry systému zůstávají stále stejné jako v předchozích simulacích. Schéma nelineárního systému v simulinku:

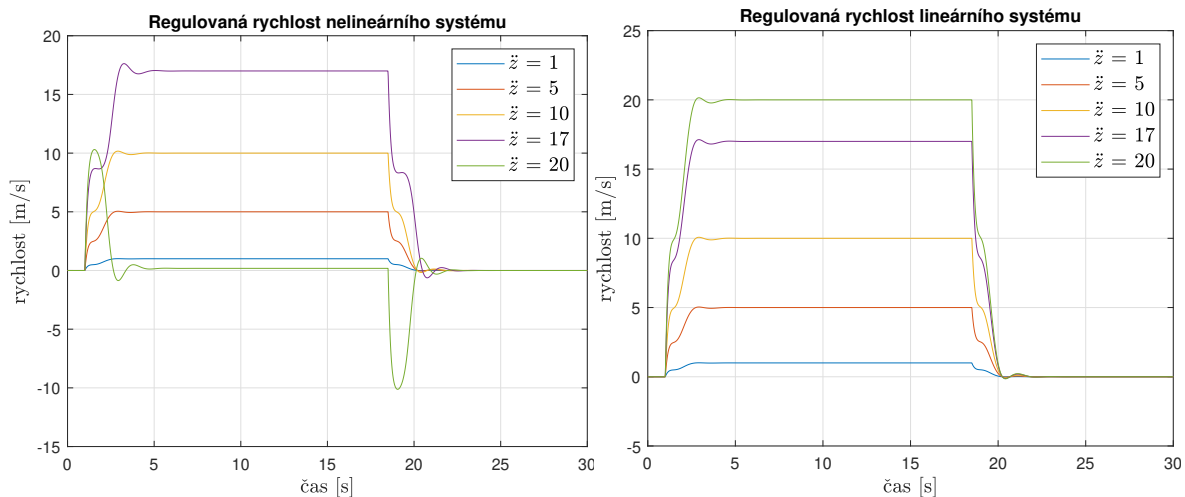


Obrázek 19: Simulink schéma nelineárního systému

Porovnání odezev:



Obrázek 20: Porovnání výstupů mezi nelineárním a lineárním modelem se stejným regulátorem



Obrázek 21: Porovnání regulovaných rychlostí mezi nelineárním a lineárním modelem se stejným regulátorem

Vidíme, že regulátor funguje správně dokud nedojdeme do takové hodnoty vstupu, která jeřáb protočí. Kmity se stále eliminují i pro tyto hodnoty vstupu, ale regulovaná rychlost nedosahuje správné hodnoty (viz obr. 21). Experimentálně bylo zjištěno, že se jeřáb protočí přibližně pro hodnotu vstupu  $\dot{z} > 17,8$ . Regulátor je tedy použitelný i pro nelineární systém, pokud zůstaneme v hodnotách vstupu  $|\dot{z}| \leq 17,8$ .

### 3.2.4 Parametrizovaný regulátor pro systém s proměnnou délkou závěsu

Pokud bychom chtěli řídit systém s proměnnou délkou závěsu, kde délku lana můžeme přímo řídit (sekce 2.5), můžeme použít stejný postup návrhu regulátoru jako v sekci 3.2.2. Matice uzavřeného systému a charakteristický polynom (viz 43) budou totožné. Výpočet prvků  $\mathbf{k}$  je závislý na délce závěsu a délka závěsu je funkcí času. Vektor  $\mathbf{k}$  bude mít pro různou délku závěsu  $l(t)$  různé hodnoty.

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(l(t))$$

Pohyb délky závěsu je předem daný. Počáteční délka závěsu  $l(0) = 1$  m. Při první nenulové požadované rychlosti jeřábu se závěs začne prodlužovat po dobu 10 s rychlostí 0,3 m/s. Po uplynutí 10 s bude držet stejnou délku. Jakmile bude požadovaná rychlost nulová, závěs se začne smršťovat opět po dobu 10 s rychlostí 0,3 m/s. Poté již bude délka stále stejná. Vývoj délky závěsu a požadované rychlosti:

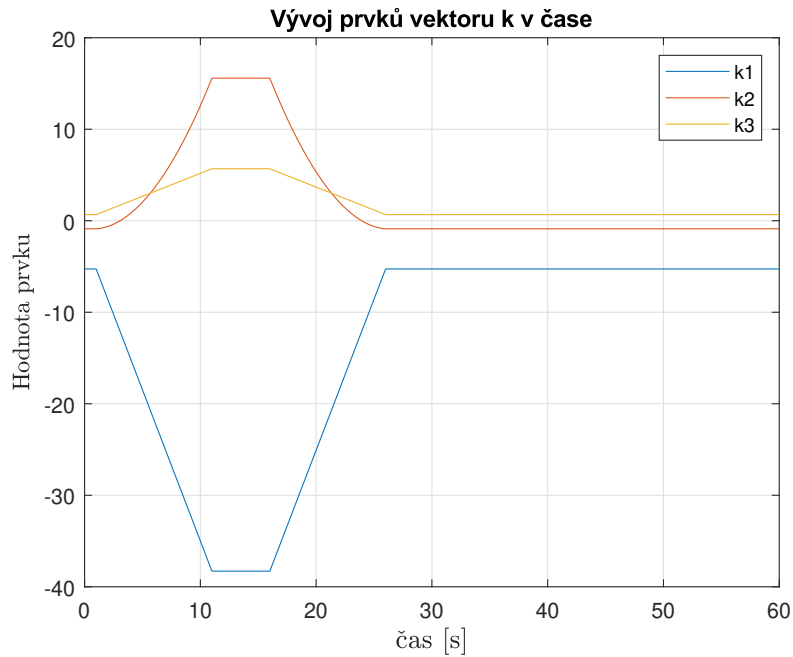


Obrázek 22: Vývoj délky závěsu v závislosti na požadované rychlosti

Prvky vektoru  $\mathbf{k}(l(t))$  byly vypočítány metodou přiřazení pólů pomocí kritéria ITAE[2]. Parametr  $\omega_n$  byl zvolen stejně jako v sekci 3.2.2. Soustava rovnic pro vypočtení prvků vektoru  $\mathbf{k}(l(t))$ :

$$\begin{aligned} \frac{Tb + ml(t)^2 + k_3(l(t))ml(t)^2 - k_2(l(t))ml(t)}{Tml(t)^2} &= 1,75\omega_n \\ \frac{b + bk_3(l(t)) - k_1(l(t))ml(t) + Tmgl(t)}{Tml(t)^2} &= 2,15\omega_n^2 \\ \frac{mgl(t) + k_3(l(t))mgl(t)}{Tml(t)^2} &= \omega_n^3 \end{aligned} \quad (52)$$

Pro parametry  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $b = 0,5$ ,  $T = 0,5$ ,  $K_m = 1$  a  $\omega_n = 3,2$  dostaneme následující průběh prvků vektoru  $\mathbf{k}(l(t))$



Obrázek 23: Vývoj prvků vektoru  $\mathbf{k}(l(t))$  v čase

Simulace odezvy s parametrizovaným regulátorem:



Obrázek 24: Odezva při použití parametrizovaného stavového regulátoru

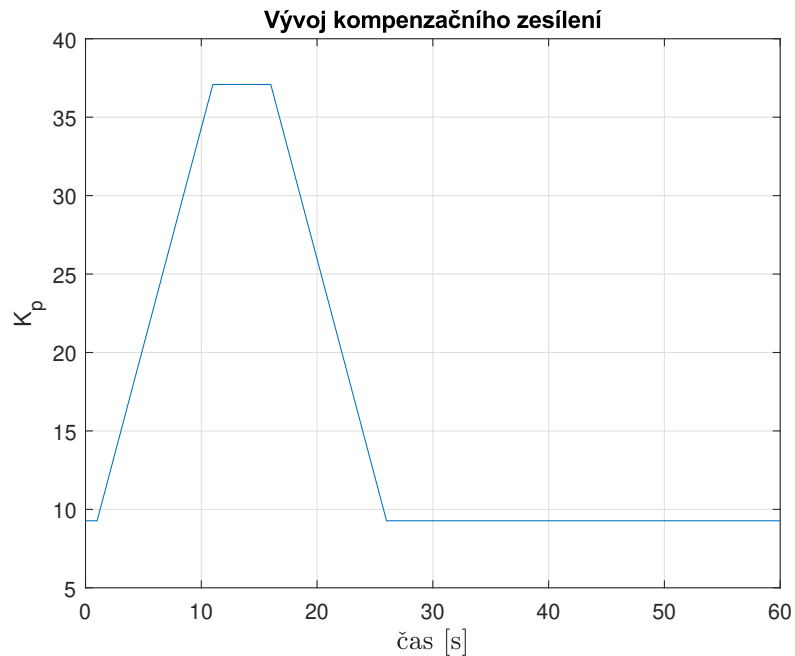


Obrázek 25: Odezva při použití parametrizovaného stavového regulátoru

Z obr. 24 je patrné, že kmity se eliminují a odezva je mnohem lepší, než odezva neregulovaného systému. Pokud se ale podíváme na obr. 25, zjistíme, že rychlost se nereguluje do správné hodnoty, kvůli nejednotkovému zesílení celého, uzavřeného systému. Abychom dostali regulovanou rychlost do správných hodnot, tak do systému zavedeme dopřednou vazbu, která systém zesílí. Tímto kompenzačním zesílením bude rychlost dosahovat správných hodnot, ale také se bohužel zhorší amplituda regulovaných kmitů, protože zesílujeme celý systém. Výpočet požadovaného kompenzačního zesílení  $K_p$  je stejný jako v sekci 3.2.2, dostaneme:

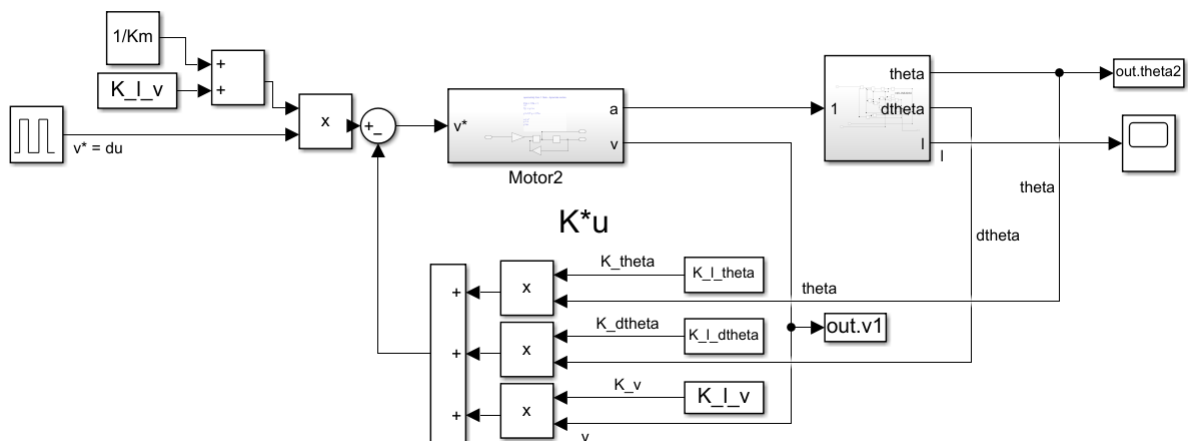
$$K_p(l(t)) = \frac{1}{K_m} + k_3(l(t)). \quad (53)$$

V tomto případě, kdy je systém s proměnnou délkou závěsu ovládán parametrizovaným regulátorem, který má jiné hodnoty pro každou specifickou délku závěsu je kompenzační zesílení také závislé na délce závěsu. Pro vývoj délky závěsu z obr. 22 a stejnými parametry dostaneme následující vývoj kompenzačního zesílení  $K_p(l(t))$ :



Obrázek 26: Vývoj délky závěsu v závislosti na požadované rychlosti

Schéma celého systému s dopřednou vazbou v simulinku:



Obrázek 27: Vývoj délky závěsu v závislosti na požadované rychlosti

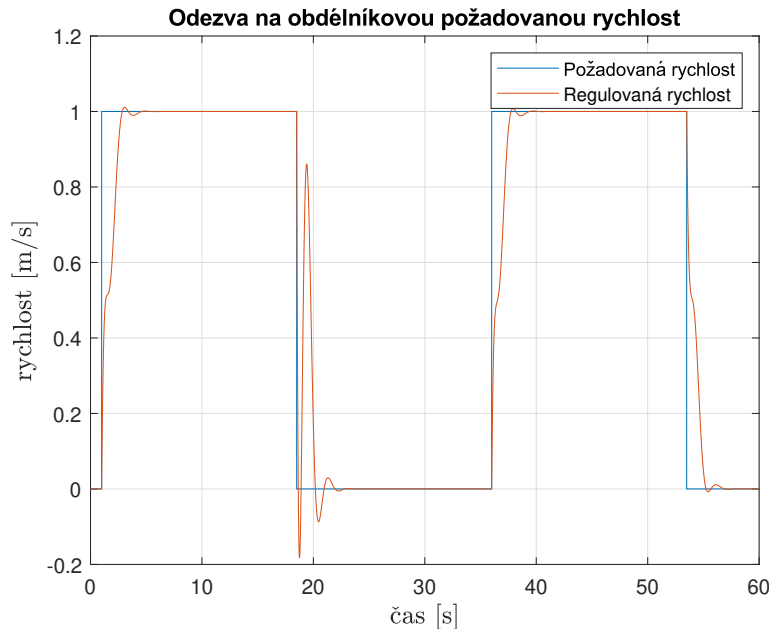


Simulace odezvy systému s dopřednou vazbou:



Obrázek 28: Odezva systému s dopřednou vazbou

Amplituda kmitů se podle očekávání zhoršila, dokonce je při smršťování závěsu amplituda prvního kmitu regulovaného výstupu větší než u neregulovaného. Kmitů regulovaného systému se však eliminují mnohem rychleji a regulátor tedy funguje správně.



Obrázek 29: Odezva systému s dopřednou vazbou

Rychlost už dosahuje správných hodnot, dopředná vazba funguje dle očekávání.

## 4 Testování na reálném systému

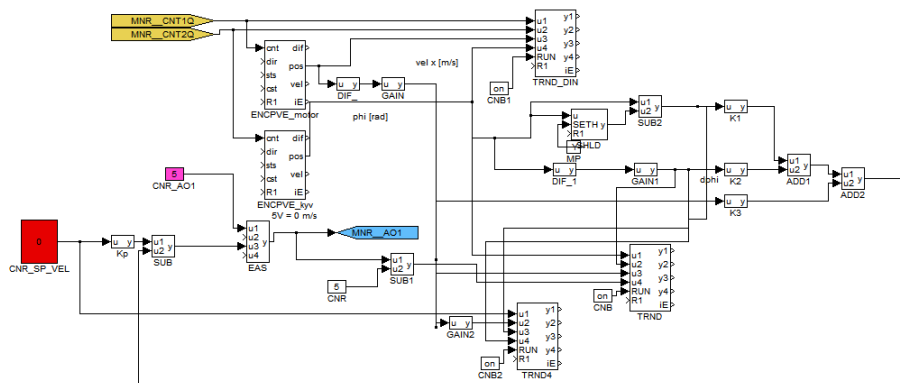
### 4.1 Představení reálného systému

Experimenty budou probíhat na reálném modelu systému. Model se skládá z mikropočítače Raspberry Pi s Monarco HAT, který zpracovává veškeré vstupy a výstupy. Tyto vstupy se odesílají do frekvenčního měniče. Frekvenční měnič je připojen k asynchronnímu motoru, který je spojen s kočkou kyvadla, pohyb kočky je zprostředkován pomocí pásu. Motor je ovládán vstupním napětím 0 - 10 V. 5 V odpovídá nulové rychlosti. Na kočce jeřábu je přichyceno samotné kyvadlo. Reálný model je vybaven dvěma senzory polohy. První senzor snímá polohu kočky a druhý snímá polohu kyvadla. Z těchto informací pak pomocí programu REXYGEN dostaneme rychlost kočky a úhlovou rychlost, které potřebujeme ke správné regulaci systému.



Obrázek 30: Reálný systém v laboratoři. 1. obrázek zleva - Asynchronní motor, Raspberry Pi s Monarco HAT a frekvenční měnič. 2. obrázek - reálný model kočky jeřábu s kyvadlem na pojezdu

Výstupy jsou zapisovány a vstupy jsou generovány pomocí programu REXYGEN, kde je vytvořena zpětná vazba se stavovým regulátorem. Schéma v REXYGENU:



Obrázek 31: Schéma zapojení stavového regulátoru v programu REXYGEN

## 4.2 Identifikace

### 4.2.1 Motor

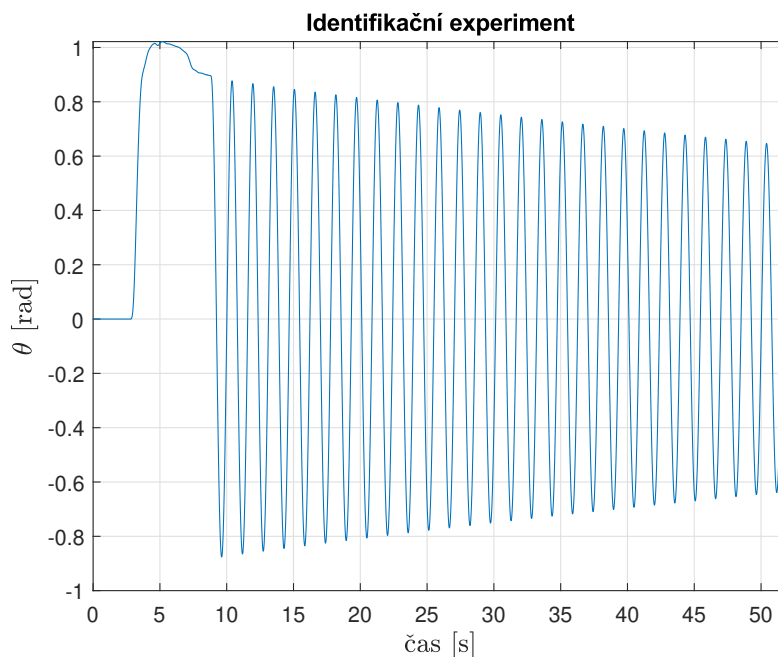
Pomocí Rxygeny byl vytvořen identifikační experiment pro motor. Ze soustavy bylo odebráno kyvadlo, aby zůstala pouze samotná kočka jeřábu a pojezd. Pomocí programu Matlab a nástroje System Identification Toolbox byl motor identifikován přenosovou funkcí prvního řádu. V závorce je uvedena shoda modelu s výchozím výstupem. Výsledná přenosová funkce:

$$F_1(s) = \frac{2,003}{s + 7,277} (26,83\%)$$

Tato přenosová funkce bude použita pro simulace a návrh regulátoru.

### 4.2.2 Závěs

Reálná soustava odpovídá nejvíce modelu fyzikálního kyvadla, ale ze sekce 2.3.1 víme, že můžeme použít model matematického kyvadla, respektive jednoduchý model pouze s jinou délkou závěsu a modely budou ekvivalentní. Ze vztahu  $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$  víme, že abychom určili efektivní délku závěsu potřebujeme pouze znát přirozenou frekvenci, kterou získáme, když rozhoupeme kyvadlo a následně frekvenci odměříme.

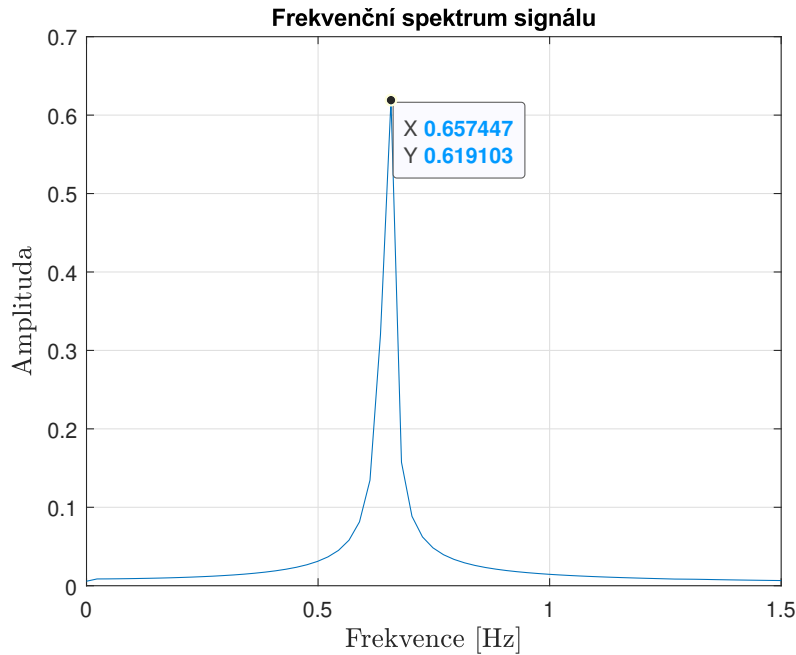


Obrázek 32: Identifikační experiment pro zjištění přirozené frekvence

Z obrázku 32 vidíme, že počet opakování periodického děje mezi časy 9,59 a 51,22 je 28. Z těchto dat určíme průměrnou frekvenci na tomto časovém úseku:  $\frac{28}{51,17-9,62} \approx 0,6739$  Hz.  $\omega_n$  však udáváme v rad/s. Po převedení dostaneme  $\omega_n = 2\pi \cdot 0,6739 = 4,2342$  rad/s. Když známe přirozenou frekvenci  $\omega_n$ , jednoduše určíme i efektivní délku závěsu:

$l = \frac{g}{\omega_n^2} = \frac{9,81}{4,2342^2} \approx 0,5472$  m. Toto měření z grafu však může být dost nepřesné, použijeme tedy jinou metodu pro určení frekvence.

Frekvenci signálu můžeme určit pomocí Fourierovy transformace. Fourierova transformace byla použita na data od času 8,9 s do 53 s (viz obr. 32).



Obrázek 33: Frekvenční spektrum signálu z identifikačního experimentu

Z grafu vidíme, že nejdominantnější frekvence je 0,657 447 Hz. Přirozená frekvence  $\omega_n = 4,1309$  rad/s. Efektivní délka  $l = \frac{g}{\omega_n^2} = \frac{9,81}{4,1309^2} \approx 0,5749$  m. Pro návrh regulátoru a další simulace bude použita efektivní délka  $l = 0,5749$  m.

Z grafu identifikačního experimentu (viz obr. 32) také vidíme, že systém obsahuje tlumení, toto tlumení je ale velmi malé a pro jednoduchost bude v dalších krocích zanedbáno.

### 4.3 Návrh regulátoru

Nyní máme všechny potřebné parametry systému identifikovány, můžeme tedy navrhnout samotný regulátor. K návrhu budeme opět potřebovat matici uzavřeného systému  $A_z$ . Pro návrh použijeme identifikovanou přenosovou funkci  $F_1$ :

$$F_1(s) = \frac{2,003}{s + 7,277} = \frac{0,2752}{0,1374s + 1} \quad (54)$$

Tento výraz lze upravit na diferenciální rovnici:

$$\dot{v} = 2,003\hat{v} - 7,277v \quad (55)$$

K určení matice uzavřeného systému  $A_z$  potřebujeme získat matici  $A$  a  $B$ . Tyto matice získáme stejným postupem jako v sekci 3.2.1 s použitím identifikovaných parametrů. Všechny následující hodnoty jsou v této sekci zaokrouhleny na 3 desetinná místa. Výpočty však probíhaly s nezaokrouhlenými hodnotami. Dostaneme následující matice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -17,064 & 0 & 12,658 \\ 0 & 0 & -7,277 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3,484 \\ 2,003 \end{bmatrix}$$

Matice  $A_z$  uzavřeného systému bude vypadá následovně:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu = A\mathbf{x} - B\mathbf{k}\mathbf{x} = (A - B\mathbf{k})\mathbf{x}$$

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3,484k_1 - 17,064 & 3,484k_2 & 3,484k_3 + 12,658 \\ -2,003k_1 & -2,003k_2 & -2,003k_3 - 7,277 \end{bmatrix}$$

Charakteristický polynom:

$$a_z(s) = |sI - A_z| =$$

$$= s^3 + (2,003k_3 - 3,484k_2 + 7,277)s^2 + (-3,484k_1 + 17,064)s + 34,175k_3 + 124,173$$

Pro výpočet vektoru  $\mathbf{k}$  použijeme metodu přiřazení pólů. Aktuální póly systému jsou  $-7,277$ , což je pól motoru a zbylé dva póly jeřábu jsou  $\pm 4,1309i$ . Tím, že je zanedbáno tření, tak jeřáb je nyní systém na hranici stability, proto póly jeřábu mají reálnou složku rovnou nule. Všechny 3 kořeny charakteristického polynomu jsou závislé na  $\mathbf{k}$ , takže můžeme libovolně měnit póly systému se zpětnou vazbou. V našem případě budeme chtít nechat pól motoru stejný, změníme pouze póly jeřábu. Když chceme, aby systém byl méně kmitavý, potřebujeme póly dostat blíže k reálné ose. Zvolíme například dvojný pól  $-5$  jako kompromis mezi rychlostí a doby regulace. Tomuto zvolení pólů odpovídá následující charakteristický polynom:

$$a_z^*(s) = (s + 5)(s + 5)(s + 7,277) = s^3 + 17,277s^2 + 97,767s + 181,923 \quad (56)$$

Prvky vektoru  $\mathbf{k}$  dostaneme z diofantické rovnice, ze které dostaneme soustavu rovnic:

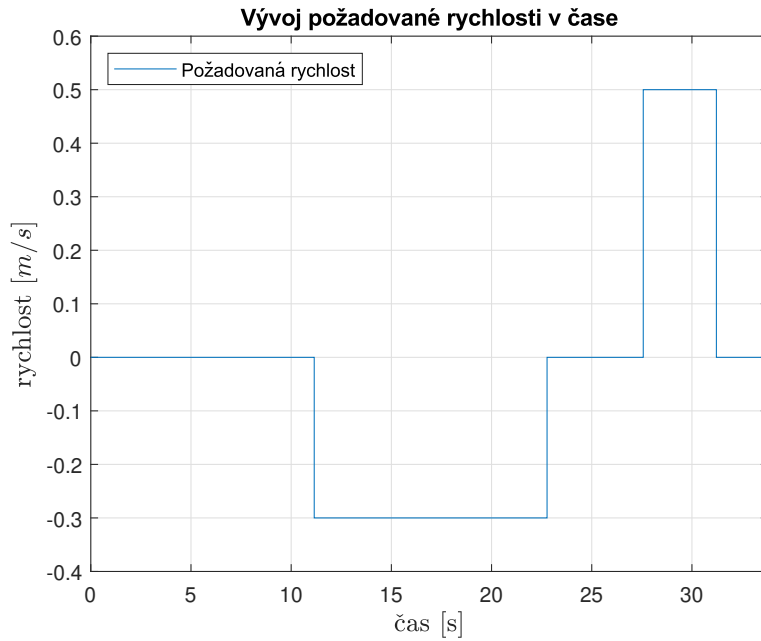
$$\begin{aligned} 2,003k_3 - 3,484k_2 + 7,277 &= 17,277 \\ -3,484k_1 + 17,064 &= 97,767 \\ 34,175k_3 + 124,173 &= 181,923 \end{aligned} \quad (57)$$

Po vyřešení soustavy dostaneme:

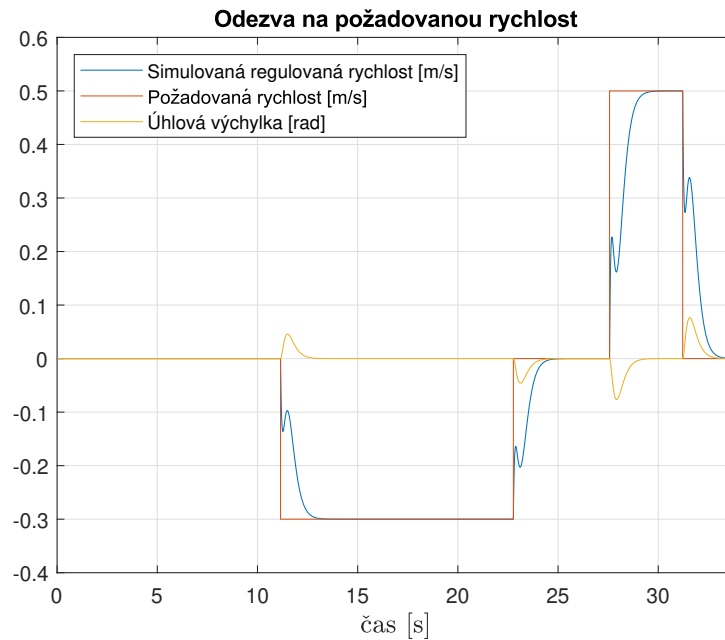
$$\mathbf{k} = [-23,166 \quad -1,899 \quad 1,690] \quad (58)$$

## 4.4 Simulace

Pro simulace bude použit model motoru  $F_1$ . Jako model jeřábu bude použit stejný nelineární model jako v sekci 3.2.3. Parametry modelu:  $m = 1$  kg,  $b = 0,03$ ,  $K_m = 0,2752$ ,  $T = 0,1374$ ,  $l = 0,5749$  m. Kompenzační zesílení  $K_p = \frac{1}{K_m} + k_3 = 5,3232$ . Průběh požadované rychlosti použité při experimentu:



Obrázek 34: Průběh požadované rychlosti pro experiment

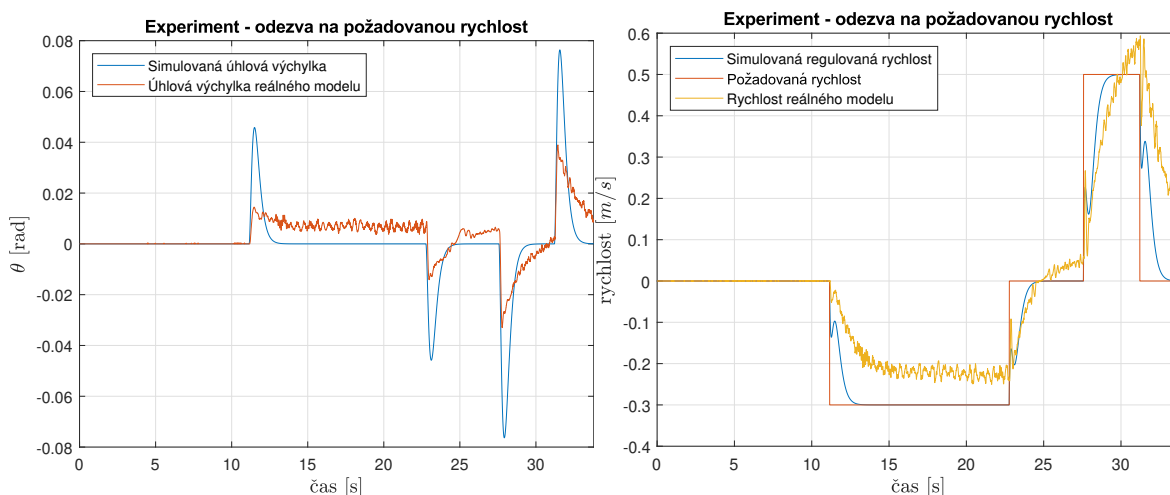


Obrázek 35: Simulovaná odezva na požadovanou rychlost

## 4.5 Test na reálném systému

### 4.5.1 Odezva na požadovanou rychlost

Na reálném modelu v laboratoři proběhl experiment na odezvu na požadovanou rychlost. Do reálného systému bylo zavedeno odpovídající kompenzační zesílení. Průběh požadované rychlosti je stejný jako na obr. 34. Porovnání odezvy reálného systému se simulací:



Obrázek 36: Porovnání mezi simulací a experimentem

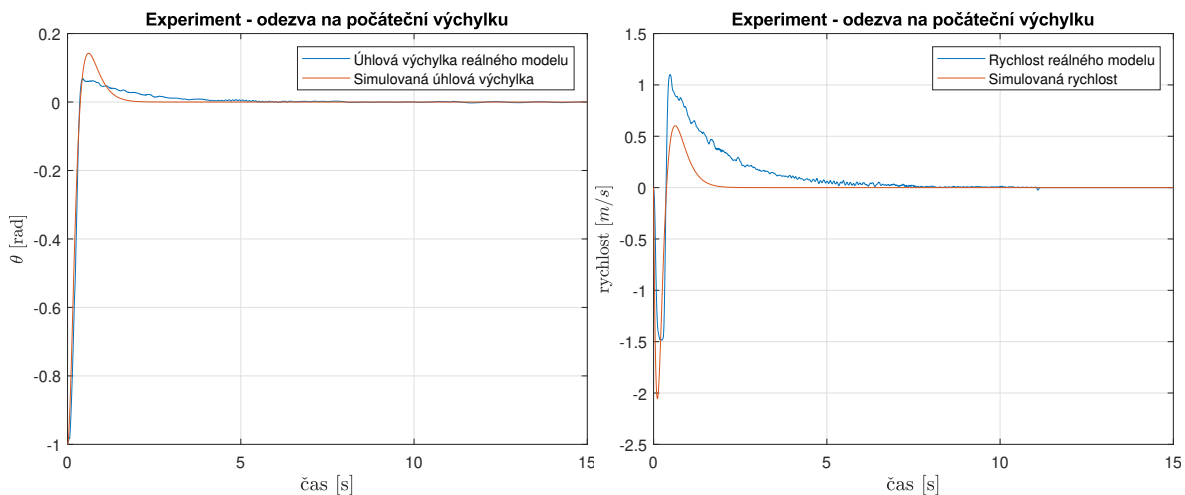
Z levého grafu vidíme, že reálný systém nemá tak velkou výchylku, jako simulace a doba regulace je vyšší. Děje se tak kvůli nepřesnosti modelu v tlumení a malé rychlosti kočky jeřábu. Reálný model se navíc po prvním rozjezdu ustaluje v nenulové hodnotě. Nejspíše se tak děje kvůli chybě senzoru, která se projeví ihned po rozjezdu. Požadovaná rychlost kočky jeřábu nemohla být nastavena větší kvůli limitované délce pojezdu. Regulace kmitavosti pro větší úhlovou výchylku bude demonstrována v následující sekci. Přes to, že se simulace mírně liší od průběhu reálného systému, vidíme, že regulátor funguje správně. Kmity se výrazně tlumí a postupně ustávají.

Z pravého grafu vidíme, že rychlost reálného modelu se přibližně reguluje do správných hodnot. Při požadované rychlosti  $-0,3$  m/s se regulovaná rychlost sice nedostala až na hodnotu  $-0,3$ , ale ustálila se na kolem hodnoty  $-0,22$ . Toto by se normálně dalo vyřešit vyšším kompenzačním zesílením. Když se ale podíváme úsek grafu s požadovanou rychlostí  $0,5$  m/s, tak zjistíme, že rychlost reálného modelu se ustálí na vyšší hodnotě. Zde tedy není na vině špatné kompenzační zesílení, ale nejspíše nepřesnost modelu samotného motoru. Pokud přehlédneme tyto malé nedostatky, tak regulátor funguje správně.



## 4.5.2 Odezva na počáteční výchylku

Na reálném modelu v laboratoři proběhl experiment na odezvu na počáteční úhlovou výchylku  $\approx -1$  rad. Kompenzační zesílení zůstalo stejné. Požadovaná rychlost je rovna nule po celou délku experimentu. Porovnání odezvy reálného systému se simulací:



Obrázek 37: Porovnání mezi simulací a experimentem

Z levého grafu vidíme, že úhlová výchylka reálného systému má kvůli nepřesnosti modelu v tlumení opět menší amplitudu a mírně delší dobu regulace, než simulace. Regulace kmitavosti však probíhá na reálném systému dobře. Z pravého grafu opět vidíme menší nepřesnosti modelu, ale odezva reálného systému je jinak v pořádku. Regulator funguje na reálném systému správně.

## 5 Závěr

Cílem této práce bylo navrhnout spolehlivý algoritmus přímovazebního a zpětnovazebního řízení, který eliminuje nežádoucí kmity převáženého nákladu a zároveň reguluje rychlost převozu. V první teoretické sekci byly odvozeny matematické modely matematického kyvadla, fyzikálního kyvadla, kyvadla s proměnnou délkou závěsu a dvojitého kyvadla. U vybraných modelů bylo rozebráno chování v různých pozicích, rozsah pro efektivní použití a spojitost mezi fyzikálním a matematickým kyvadlem.

Následující sekce byla věnována samotnému návrhu řízení pro kompenzaci kmitů. Nejdříve proběhlo seznámení s řízeným systémem a určení jeho parametrů. Následně bylo pro tento systém navrženo několik variant přímovazebního řízení pomocí různých přímovazebních filtrů, které eliminovaly kmity převáženého nákladu za předpokladu nulových nebo mírných vnějších poruch. Druhá polovina této části byla věnována zpětnovazební kompenzaci kmitů. V této části byl použit nový, složitější model systému, který disponuje dynamikou samotného pohonu kočky jeřábu. Model systému byl tímto rozšířen na třetí řád. Následoval návrh stavového regulátoru pro tento systém s použitím metody přiřazení pólu pomocí kritéria ITAE. Po úspěšném návrhu regulátoru bylo vypočteno potřebné kompenzační zesílení, aby uzavřený systém dosahoval správných hodnot. Dále bylo nasimulováno několik situací pro demonstraci navrženého regulátoru a pro porovnání přímovazební a zpětnovazební varianty. Regulátor byl nadále otestován na nelineárním systému, kde byl zjištěn bezpečný rozsah vstupu pro správné fungování. Následně byl navržen parametrizovaný regulátor pro model jeřábu s proměnnou délkou závěsu a opět proběhly simulace pro demonstraci správné funkčnosti regulátoru.

Poslední sekce se věnuje testování navrženého zpětnovazebního řízení na reálném systému v laboratoři. Nejprve proběhlo seznámení s reálným systémem. Byla popsána struktura a hlavní vlastnosti. Následně proběhla identifikace motoru pomocí programu Matlab a nástroje System Identification Toolbox. Při identifikaci závěsu byly využity znalosti z první teoretické části ke zjednodušení. Díky těmto znalostem byla potřeba zjistit pouze přirozená frekvence systému, abychom měli všechny potřebné parametry. Regulátor byl navrhnout s identifikovanými parametry a následně byl použit na reálném systému. V závěru této sekce proběhlo srovnání reálného systému a simulací a zhodnocení dosažených výsledků.

Při zpracování této bakalářské práce jsem čerpal zejména z vědomostí, které jsem nabył při studiu na fakultě kybernetiky na Západočeské univerzitě v Plzni. Veškeré grafy a diagramy byly vytvořeny pomocí programu Matlab a Simulink. Řízení reálného systému probíhalo s pomocí programu Rexygen.

## Reference

- [1] Schlegel, Miloš, Přednášky Systémy a modely. Plzeň, 2019.
- [2] Melichar, Jiří a Gouběj, Martin, Skripta Lineární systémy 1 a 2. Plzeň, 2011.