ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

NETRANZITIVNÍ KOSTKY A JEJICH VYUŽITÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Franc

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň 2022

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 30. června 2022

....

vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce, panu PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D., za skvělé vedení, ochotu a rady během vypracovávání práce. Dále bych rád poděkoval kolegovi Bc. Danielu Eretovi za to, že mě seznámil s tímto úžasným světem neobvyklých kostek. Poděkování patří i učitelkám ze ZŠ Ratibořická a kolegyni Zuzce Pinkrové za propůjčení kostek. V neposlední řadě děkuji celé své rodině za morální podporu při vypracovávání této práce.

OBSAH

SEZNAM SYMBOLŮ **2**

ÚVOD **3**

1 HISTORIE HRACÍCH KOSTEK **4**

1.1 ASTRAGAL 4
1.2 VYNÁLEZCE HRACÍCH KOSTEK 4
1.3 VÝVOJ KOSTKY 5
1.4 HYPOTÉZA O PŮVODU ETRUSKŮ 5
1.5 KOSTKY A ŘÍMANI 6
1.6 DNEŠNÍ PODOBA KOSTEK 6

2 RELACE **7**

2.1 ZÁKLADNÍ POJMY 7
2.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI BINÁRNÍCH RELACÍ NA MNOŽINĚ 9
2.3 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ BINÁRNÍCH RELACÍ 13

3 STANDARDNÍ HRACÍ KOSTKY V MATEMATICE **15**

3.1 BINÁRNÍ RELACE SE STANDARDNÍMI HRACÍMI KOSTKAMI 15
3.2 HOD KOSTKOU V TEORII PRAVDĚPODOBNOSTI 16

4 NETRANZITIVNÍ HRACÍ KOSTKY **19**

4.1 MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD 19
4.2 EFRONOVY KOSTKY 21
4.3 QUIMBYHO KOSTKY 22
4.4 GRIMOVY KOSTKY 23
4.5 DEVENTEROVY KOSTKY 26

5 VYUŽITÍ NEJEN NETRANZITIVNÍCH HRACÍCH KOSTEK **30**

5.1 V HAZARDNÍCH HRÁCH 30
5.2 VE ŠKOLSTVÍ 31
5.3 VE HŘE D&D 32
5.4 V DOMÁCÍM PROSTŘEDÍ 33

ZÁVĚR **34**

RESUMÉ **36**

SEZNAM LITERATURY **37**

SEZNAM OBRÁZKŮ **39**

SEZNAM TABULEK **41**

SEZNAM SYMBOLŮ

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\emptyset$, $\{\,\}$	prázdná množina, v množině se nenachází žádný prvek
$\mathbb{E}_2$	Euklidovský prostor dimenze 2, rovina
$\forall$	obecný kvantifikátor (*pro všechna*)
$\exists$	existenční kvantifikátor (*existuje*)
$\in$, $\notin$	vztah prvku k množině (*náleží*, *nenáleží*)
$=$, $\neq$	rovnost a nerovnost prvků
$\approx$	přibližná rovnost
$\subset$, $\subseteq$	ostrá, neostrá množinová inkluze (*je podmnožinou*, *je podmnožinou nebo rovna*)
$>$, $\geq$	ostrá, neostrá nerovnost (*je větší než*, *je větší nebo rovno*)
$<$	ostrá nerovnost (*je menší než*)
$A \wedge B$	konjunkce (*A a zároveň B*)
$A \Longrightarrow B$	implikace (*pokud platí výrok A, platí i výrok B*)
$A \Longleftrightarrow B$	ekvivalence (*výrok A platí, právě tehdy, když platí výrok B*)
$A \cap B$	průnik dvou množin (*všechny prvky, které patří do množiny A i množiny B*)
$A \setminus B$	rozdíl dvou množin (*množina A bez prvků z množiny B*)
$\{\,,\}$	množinové závorky pro výčet prvků z množiny
$\lvert A \rvert$	mohutnost (celkový počet prvků) množiny *A*
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo pro výpočet kombinací bez opakování (*n nad k*), $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

Úvod

Každý člověk snad někdy hrál společenskou hru, která využívala hrací kostky. Řada her jako *Člověče, nezlob se*, *Monopoly* nebo *Dostihy a sázky* kostku využívá jako pomocný nástroj pro určování o kolik políček se hráč posune na hrací ploše. Existují i hry jako *Vrhcáby* nebo *Sedmičky*, kde je kostka jako taková jejich hlavní součástí a bez ní by se tyto hry neobešly.

Ve všech výše uvedených příkladech se mluví o klasických 6stěnných kostkách očíslovaných od 1 do 6. Nejsou žádným způsobem cinknuté, a proto zajišťují férový průběh hry pro každého hráče. Avšak kostky, o kterých bude řeč v této práci, jsou speciální v tom, že férové nejsou, ale přitom se na první pohled chovají jako férové kostky, a tak i vypadají. Pokud by dva hráči hráli hru, kde si každý z nich vybere jednu z nabízených kostek ze stejné sady, vždy bude existovat kostka, která bude lepší volbou. Těmto kostkám se říká netranzitivní kostky.

Při čtení této práce by bylo vhodné, ale nikoli nutné, být seznámený se základními kvantifikátory a základy predikátové logiky, pomocí kterých se budou definovat jednotlivé pojmy a vyšetřovat některé vlastnosti. Ostatní prvky práce budou podrobně a srozumitelně rozepisovány.

První kapitola se bude věnovat vzniku a postupnému vývoji hracích kostek, respektive, jejich předchůdců. V druhé kapitole se čtenář bude seznamovat s několika základními pojmy v podobě definic, které budou následně demonstrovány na příkladech. Dále se seznámí se základními znalostmi v oblasti elementární algebry a pravděpodobnosti. Ve třetí kapitole bude kladen důraz na matematické vlastnosti standardních kostek s vysvětlením, proč se považují za férové kostky. Ve čtvrté kapitole budou představeny vybrané sady kostek, které se svými pozoruhodnými vlastnostmi vymykají klasickým kostkám. Speciální pozornost bude věnována sadě od Jamese Grima, která má několik nevídaných a velmi pozoruhodných vlastností. V poslední kapitole bude stručný popis využití všech kostek, spravedlivých i nespravedlivých, v různých odvětvích.

1 HISTORIE HRACÍCH KOSTEK

1.1 ASTRAGAL

Mezi nejstarší předchůdce dnešních kostek patří astragal (obr. 1). Jeho tvar vůbec dnešní kostku nepřipomíná, protože se vyráběl ručně z ovčích nebo kozích kostí[1] a jeho úpravy byly čistě kosmetické jako obrušování nebo vyhlazování. Pochopitelně, kvůli jeho nepravidelnému tvaru nebyla stejná šance na padnutí jednotlivých stěn. Sice měl celkem šest stěn, ale dvě protilehlé stěny byly velmi malé a oblé, a proto na nich astragal nemohl prakticky nikdy skončit. [1]

Obr. 1– Sbroušené hleznové kosti. Foto Miriam Nývltová Fišáková, David Parma

1.2 VYNÁLEZCE HRACÍCH KOSTEK

Vynálezce hracích kostek je historii neznámý. Sice se dochovalo několik tvrzení od slavných historických postav jako Sofoklés, který považoval za autora řeckého vynálezce Palamédese, nebo Hérodotos, jenž prohlašoval, že kostky vymysleli obyvatelé Lýdie, respektive tehdejší Maeonie[2], za krále Atyse. Obě tato tvrzení se pohybují kolem období Trojské války (cca 1200 př. n. l.), avšak důkazy o prvních hracích kostkách, respektive objektech, které plnily podobnou funkci jako dnešní hrací kostky, se datují už od 4. tisíciletí př. n. l., ale některé zdroje uvádí i mnohem dřívější letopočet. Ve všech případech se shodují na tom, že kostky pamatují dobu kamennou, a tím doprovází lidstvo prakticky už od jeho vzniku. Hlavní využití tehdejších kostek bylo převážně spojeno s rituálními obřady nebo rozřešením náročných rozhodnutí, kdy výsledek hodu kostkou představoval vůli boží. Další využití našli v hazardních hrách. ([2], s. 39–40)

[1] Odtud pravděpodobně pochází název kostka.
[2] Maeonie byla přejmenována na Lýdii po smrti syna krále Atyse, Lyduse, na jeho počest.

1.3 VÝVOJ KOSTKY

Kostka prošla mnoha změnami, takže postupně více a více připomínala dnešní kostku. Nejprve se přidalo značení jednotlivých stěn, poté se změnil tvar, a nakonec materiál, ze kterého se kostky vyráběly. Z nepravidelných kostěných kostek se někdy postupně staly očíslované tyčinky (obr. 2), které se při různých oslavách používají dodnes. Typický krychlový tvar se poprvé objevuje 900 let př. n. l. u Etrusků. Takové kostky byly vyráběny například ze dřeva, bronzu, olova, jantaru, a dokonce i z porcelánu a jejich výrobou byly pověřeni tzv. kostkaři. [3]

Obr. 2 – Kostka ve tvaru tyčinky se stranami 1-6 a 2-5. Foto Arjan Verweij

1.4 HYPOTÉZA O PŮVODU ETRUSKŮ

Velmi významnou roli hrály kostky v jedné z hypotéz o původu Etrusků. Jak už bylo zmíněno, Hérodotos se domníval, že kostky vymysleli obyvatelé Lýdie, a podle jeho dalších slov, měl k tomu i důvod. Sice se prokázalo, že princip kostek existoval už mnohem dříve, to ale neznamená, že je nemohli využívat, ba právě naopak.

Hérodotos řekl, že v Lýdii, dnešní západní části Turecka, propukl hladomor. Ten dokázali lidé snášet neuvěřitelných 18 let, díky striktnímu opatření krále Atyse. Ten uzákonil, že jídlo bude k dispozici pouze každý druhý den, a proto obyvatelé Lýdie vymýšleli různé způsoby, jak na hlad zapomenout. Díky této události vzniklo nespočet her s kostkami nebo míčem, což pravděpodobně vedlo i k mylné domněnce tehdejších badatelů o prvním výskytu kostky v Lýdii. Bohužel, i přes toto opatření se situace dál nezlepšovala, a proto Král Atys rozhodl, že sníží počet obyvatel tím, že jedna polovina zůstane v království a druhá odejde žít jinam. O každém muselo být rozhodnuto losem, jestli má zůstat nebo odejít, a to bez výjimek. Ti, co odešli, přepluli moře a usadili se v Umbrii v Itálii. Později se stali známými jako Etruskové. [4]

Tato hypotéza vysvětluje mnoho zvláštností, jako je například značná pokročilost Etrusků oproti ostatním civilizacím v Evropě, ale byla a stále je zpochybňována několika vědci a archeology, protože se nenašly žádné archeologické důkazy o této masivní migraci po moři. Kvůli neustálým sporů o jejich původu došlo k řadám nezávislých genetických výzkumů, jejichž výsledky ukázaly, že existuje větší genetická příbuznost s Turky než s okolním obyvatelstvem Itálie. [5]

1.5 KOSTKY A ŘÍMANI

Kostky se dostaly nejvíce do podvědomí lidí za vlády Římanů, a to díky Etruskům, od kterých kostky převzali. Různé hry s kostkami hráli nejen prostí občané, ale i samotní císaři jako Augustus nebo Claudius, který údajně napsal knihu o strategii, jak házet s kostkami. Dále vymysleli dřevěný přístroj na míchání kostek, tzv. *turricula*, který měl zaručit spravedlivost pro všechny hráče při hodu kostkou. ([2], s. 41)

Mezi další historické milníky patří slavný výrok císaře G. Juliuse Ceasera *Alea iacta est* (v překladu *Kostky jsou vrženy*), kterým se oznamuje, že dané rozhodnutí je definitivní. Údajně tento výrok pronesl, když v roce 49 př. n. l. přecházel řeku Rubikon se svou legií, čímž porušil zákon republiky a započal tak občanskou válku. ([6], s. 47–51)

1.6 DNEŠNÍ PODOBA KOSTEK

Pod slovem kostka si asi každý představí krychli se zaoblenými rohy očíslovanou od 1 do 6 tak, aby součet protějších stran byl roven sedmi a čísla 1, 2 a 3 spolu navzájem sousedila. Tento typ kostky je nejrozšířenější a nejhojněji používán, ale není jediným typem. Kostek v dnešní době je nespočet druhů. Navzájem se liší tvarem, počtem stěn nebo značením (viz obr. 3) a využívají se v mnoha společenských hrách, hazardních hrách, ale i například jako prvek náhody při zkoušení na vysoké škole. Mezi ty méně časté patří kostky vícestěnné, například 7stěn, 10stěn, 12stěn nebo až 120stěn. Existují jejich pravidelné, ale i nepravidelné varianty a jejich využití lze nalézt například v populární fantasy hře *Dungeons and Dragons* nebo u matematických nadšenců, kteří si hází pro radost.

Obr. 3 – Diverzita hracích kostek. Foto autor

2 RELACE

2.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Pro potřeby této kvalifikační práce je nutné znát několik základních pojmů z matematiky, které jsou níže definovány. Základům predikátové logiky a logických funkcí se práce nevěnuje a doporučuje se jejich znalost.

Definice 2.1.1:

Pod pojmem *uspořádaná* n*-tice prvků* $a_1, a_2, \dots, a_n$, kde $n \geq 2$, se rozumí množina tvořená n prvky, kde záleží na pořadí jejich zápisu. Značí se budou $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Formálně: $(a_1, a_2, \dots, a_n) = \big(a_1, (a_2, \dots a_n)\big)$. Speciálně pro $n = 0$: $(\,)$ je to uspořádaná 0-tice a pro $n = 1$: (a_1) je to uspořádaná 1-tice.

Příklad 2.1.1:

Jsou dány příklady: bod $S = [1, 2]$, vektor $\vec{v} = (4, 3)$ a slovo *myš*. Které z nich jsou uspořádané n-tice?

Pokud se zakresluje bod do roviny, určitě záleží na tom, jestli se jedná o bod $[1, 2]$ nebo $[2, 1]$, pouze se značí jinými závorkami. Podobně je na tom i vektor $\vec{v} = (4, 3)$. Slovo *myš*, také nabývá svého významu jen tehdy, když se písmena zapíšou právě v tomto pořadí, a proto všechny tyto tři příklady jsou uspořádané n-tice.

Definice 2.1.2:

Pro n přirozené se kartézským součinem množin $A_1, A_2, \dots, A_n$ nazývá množina všech uspořádaných n-tic prvků a_1 z množiny A_1, a_2 z množiny A_2 až a_n z množiny A_n. Značí se $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Formálně: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \colon a_i \in A_i, i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$.

Příklad 2.1.2:

Je zadaná množina $A = \{3, 4, 5\}$ a množina $B = \{x, y\}$. Jaký je jejich kartézský součin?

Nyní se tvoří kartézský součin dvou množin, tedy $n = 2$. Pokud se definice 2.1.2 upraví na tento příklad, vypadala by takto: $A \times B = \{(a, b) \colon (a \in A) \land (b \in B)\}$. Tedy kartézský součin množin A, B tvoří všechny uspořádané dvojice prvků a, b.

V kartézském součinu jsou všechny dvojice a žádné se neopakují, proto je jednoduché si odvodit postup hledání. Vybere se jeden prvek z množiny A a postupně se k němu přidají do dvojice všechny prvky z množiny B. Například $(3, x)$ a $(3, y)$. Poté se vybere jiný prvek z množiny A, který ještě nebyl použit, a postup se opakuje, dokud nejsou využity všechny prvky množiny A.

Výsledek: $A \times B = \{(3, x), (3, y), (4, x), (4, y), (5, x), (5, y)\}$

Definice 2.1.3:

Nechť $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ je kartézský součin n množin, $n \in \mathbb{N}$. Libovolná podmnožina takového součinu se nazývá *relace* R. Formálně: $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Pokud se množina $A = A_1 = A_2 = \cdots = A_n$, jedná se o *relaci R na množině A*.

Relace se dále pojmenovávají podle počtu množin v kartézském součinu (hodnota n). Speciálně pro: $n = 1$ – *Unární relace*, $n = 2$ – *Binární relace*, $n = 3$ – *Ternární relace*.

Mezi tzv. extrémní případy relací patří *prázdná relace*, kdy všechny množiny kartézského součinu obsahují pouze prázdnou množinu, respektive celý kartézský součin je podmnožinou prázdné množiny, formálně: $R = \{\emptyset\}$, a *univerzální relace*, kdy do relace R patří celý kartézský součin, formálně: $R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Příklad 2.1.3:

Do kterého typu (unární, binární, ternární) patří následující relace? Je některá z nich extrémním případem?

a) Relace R: $a < b$ na množině $\mathbb{N}$.

   Jedná o relaci „být menší než“ (znaménko <). Aby se dalo rozhodnout o pravdivosti tohoto predikátu, je zapotřebí porovnávat dva prvky, tudíž se jedná o binární relaci.

   Aby se jednalo o extrémní případ, nesmí existovat dvojice prvků ze zadané množiny, která nepatří do relace nebo naopak. Například $3 < 5$, tedy uspořádaná dvojice $(3, 5)$ patří do relace R, ale $4 \nless 2$, tedy uspořádaná dvojice $(4, 2)$ do relace R nepatří, a proto tato relace není extrémním případem.

b) Relace S: „x je záporné číslo“ pro $x \in \mathbb{N}$.

Pro rozhodnutí o tom, zdali je číslo záporné nebo kladné, postačí právě jeden prvek z množiny, a proto se jedná o unární relaci. Množina přirozených čísel obsahuje čísla $\{1, 2, 3, \dots\}$, tedy výhradně čísla kladná. V některých případech se k přirozeným číslům přiřazuje i číslo 0, ale i s nulou, která není kladná ani záporná, neexistuje číslo, které by bylo v množině přirozených čísel záporné, z toho plyne, že je to prázdná relace.

c) Relace T:„bod S je středem úsečky AB“ v $\mathbb{E}_2$

Úsečka je jednoznačně určena dvěma body, body A, B, a aby bod S byl středem úsečky AB, musí platit, že vzdálenost $|AS| = |BS|$. Jelikož je zapotřebí porovnávat tři prvky, body A, B, S, jedná se o ternární relaci. Střed úsečky se sestrojí narýsováním dvou kružnic o stejném poloměru větším než polovina velikosti $|AB|$ jednou se středem v bodě A, poté v bodě B. Průsečíky těchto kružnic tvoří přímku, která protne úsečku AB právě v jednom bodě, bodě S. Jakýkoliv jiný bod není středem úsečky AB, tudíž se nejedná o extrémní případ relace.

2.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI BINÁRNÍCH RELACÍ NA MNOŽINĚ

Mezi nejzákladnější vlastnosti binárních relací patří reflexivnost, symetričnost, antisymetričnost a tranzitivnost. Pro zjednodušení se dále bude vždy uvažovat relace na množině, ale to neznamená, že dané vlastnosti nemají i relace na různých množinách. Jen se při jejich ověřování vyšetřují dvě různé množiny a postup vyšetřování vlastností se trochu zkomplikuje.

Definice 2.2.1:

Binární relace R definovaná na mn. M, kde každý prvek z množiny M je v relaci sám se sebou, se nazývá *reflexivní relace*. Formálně: $\forall x \in M: (x, x) \in R$.

Definice 2.2.2:

Binární relace R definovaná na mn. M, kde existuje alespoň jeden prvek z množiny M, který není v relaci sám se sebou, se nazývá *areflexivní relace*. Formálně: $\exists x \in M: (x, x) \notin R$.

Definice 2.2.3:

Binární relace R definovaná na mn. M, kde každý prvek z množiny M není v relaci sám se sebou, se nazývá *antireflexivní relace*. Formálně: $\forall x \in M: (x, x) \notin R$.

Tyto definice mají mezi sebou určitý vztah. Jednoduše lze nahlédnout, že definice areflexivní relace vznikla negací definice reflexivní relace. Dále platí, že každá antireflexivní relace je nutně i relací areflexivní, protože se jedná o její speciální případ, avšak tento fakt se během vyšetřování vlastností relací na množině vynechává.

Definice 2.2.4:

Bin. relace R definovaná na množině M, kde pro libovolné dva různé prvky x, y z množiny M platí, že pokud prvek x je v relaci s prvkem y, pak je v relaci i prvek y s prvkem x, se nazývá *symetrická relace*. Formálně: $(\forall x, y \in M): x \neq y \wedge (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$.

Definice 2.2.5:

Bin. relace R definovaná na množině M, kde pro libovolné dva prvky x, y z množiny M platí, že pokud prvek x je v relaci s prvkem y a zároveň prvek y je v relaci s prvkem x, potom se tyto prvky musí rovnat, se nazývá *slabě antisymetrická relace*. Formálně: $(\forall x, y \in M): [(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R] \Longrightarrow x = y$.

Definice 2.2.6:

Bin. relace R definovaná na mn. M, kde pro libovolné dva různé prvky x, y z mn. M platí, že pokud prvek x je v relaci s prvkem y, pak není prvek y v relaci s prvkem x, se nazývá *silně antisymetrická relace*. Formálně: $(\forall x, y \in M): x \neq y \wedge (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \notin R$.

Na první pohled by se mohlo zdát, že symetrická relace a (slabě/silně) antisymetrická relace jsou opaky jeden druhého, ale není tomu tak. Pokud by se vytvářela negace definice 2.2.4, určitě by se na první pozici nenacházel obecný kvantifikátor ∀, ale existenční ∃. Dokonce existuje několik případů, kdy je relace symetrická a slabě antisymetrická zároveň nebo symetrická a silně antisymetrická zároveň či nemá ani jednu z těchto vlastností. Speciálním případem je prázdná relace, respektive relace obsahující jediný prvek, a to prázdnou množinu, která je vyšetřována níže (příklad 2.2.1).

Definice 2.2.7:

Bin. relace R definovaná na množině M, kde pro libovolné tři prvky x, y, z z množiny M platí, že pokud x je v relaci s y a zároveň y je v relaci se z, pak je x v relaci se z, se nazývá *tranzitivní relace*. Formálně: $(\forall x, y, z \in M): (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$.

Následujícími dvěma příklady by se měly tyto vlastnosti více objasnit. Postup je podrobně rozepsán z důvodu správného pochopení.

Příklad 2.2.1:

Je dána relace: „být podmnožinou“ na množině $M = \{\emptyset\}$. Jaké jsou její základní vlastnosti?

a) Reflexivnost:

Z vlastností množin je známo, že množina vždy obsahuje jako podmnožinu sebe sama a prázdnou množinu. Tento případ je specifický v tom, že obě tyto podmnožiny jsou rovny, a to právě prázdné množině. S jistotu lze tvrdit, že $\emptyset \subseteq \emptyset$. Žádné další prvky nelze porovnávat, tedy platí to pro všechny prvky množiny a tím je vyřazena areflexivní a antireflexivní varianta, a proto je tato relace čistě reflexivní.

b) Symetričnost a antisymetričnost:

Pro vyšetření symetrie a antisymetrie je potřeba nalézt dva různé prvky z množiny M, které jsou v relaci. Zadaná množina M ale obsahuje pouze jeden prvek. Sice platí, že $\emptyset \subseteq \emptyset$, tedy $(\emptyset, \emptyset) \in R$, ale $\emptyset = \emptyset$. To znamená, že levá strana vztahu $A \Longrightarrow B$ je nepravda (log. 0) a z pravdivostní tabulky implikace vyplývá, že taková relace je vždy pravdivá bez ohledu na výrok B, proto je relace „být podmnožinou“ na zadané množině M symetrická a silně antisymetrická zároveň.

Slabá antisymetrie hovoří o tom, že když se najde dvojice, kdy jeden prvek z množiny je v relaci s druhým prvkem z množiny i naopak, pak musí být rovny, a to je přesně tento případ. Pro přehled jsou prázdné množiny oindexovány $(\emptyset_1, \emptyset_2) \in R$ a zároveň $(\emptyset_2, \emptyset_1) \in R$, ale platí, že $\emptyset = \emptyset_1 = \emptyset_2$, proto je tato relace i slabě antisymetrická.

c) Tranzitivnost:

K vyšetření tranzitivita jsou potřeba tři prvky $\emptyset_1, \emptyset_2, \emptyset_3$. Opět pro lepší přehlednost jsou použity indexy. Už bylo vyšetřeno, že $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ a to samé platí i pro $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_3$, jelikož se jedná o stejný prvek. Není pochyb o tom, že $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_3$ je opět pravdivé tvrzení, a proto lze psát, že $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2 \subseteq \emptyset_3 \subseteq \emptyset_1$. Tato relace je tranzitivní.

Závěr:

Relace „být podmnožinou“ na množině $M = \{\emptyset\}$ je reflexivní, symetrická, slabě i silně antisymetrická a tranzitivní. Tato relace je speciální v tom, že je jedinou relací, která splňuje všechny tři definice pro symetrickou, slabě i silně antisymetrickou relaci.

Příklad 2.2.2:

Je dána relace: „být vlastní podmnožinou“ na systému podmnožin množiny $A = \{a, b\}$. Jaké jsou základní vlastnosti této relace?

U takovýchto typů zadání je důležité jejich pozorné čtení a následně důkladný rozbor. Ze zadání plyne, že se porovnávají dvě množiny, například X a Y. Množina X je vlastní podmnožinou Y právě tehdy, když jsou tyto množiny různé a zároveň pro každý prvek p z množiny X platí, že je prvkem i v množině Y. Pomocí kvantifikátorů a predikátové logiky se tento vztah zapíše takto: $X \subset Y \Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \Longrightarrow x \in Y) \wedge (X \neq Y)$. Například množina $X = \{1\}$ je vlastní podmnožinou množiny $Y = \{1, 2\}$, ale sama sobě je pouze podmnožinou.

Systém podmnožin mn. A, nebo také potenční systém mn. A, případně potenční množina mn. A, je množina všech podmnožin množiny A. To znamená, že je to opět množina, značit se bude $\mathcal{P}(A)$, která obsahuje všechny různé varianty podmnožin, které lze vytvořit z množiny A. V tomto případě je $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$. Kontrolou je, že počet různých prvků v libovolné potenční množině je roven číslu 2^n, kde n je počet prvků v množině, ke které se tento systém vytváří. Množina A má celkem 2 prvky, a proto $\mathcal{P}(A)$ musí obsahovat $2^2 = 4$ prvky. Po této úvaze lze konečně zadání zjednodušit a přepsat do tvaru: „být vlastní podmnožinou“ na množině $\mathcal{P}(A)$.

Pro vyšetření vlastností této relace je využit výpis všech uspořádaných dvojic, které vyhovují podmínce relace, a podle toho se dále určuje, zdali tato relace splňuje nebo nesplňuje požadavky na danou vlastnost. V této relaci se postupně berou dvojice množin $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, u kterých se posuzuje, zdali X je vlastní podmnožinou Y nebo není. Výpis uspořádaných dvojic dopadne takto: $R = \{(\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\}), (\emptyset, \{a, b\}), (\{a\}, \{a, b\}), (\{b\}, \{a, b\})\}$.

a) Reflexivnost:

Aby relace byla reflexivní, musela by obsahovat dvojice typu $(\emptyset, \emptyset), (\{a\}, \{a\}), \ldots$ Ty však neobsahuje žádné, a proto se jedná o antireflexivní relaci.

b) Symetričnost a antisymetričnost:

Pro symetrickou relaci platí, že pokud je v relaci například $(\emptyset, \{a\})$, musí být v relaci i $(\{a\}, \emptyset)$. Už tato uspořádaná dvojice v relaci chybí, a proto není symetrická. Obdobné dvojice chybí pro všechny uspořádané dvojice v relaci R, a proto je silně antisymetrická. Navíc, stejně jako u předchozího příkladu je i tato relace slabě antisymetrická, protože není splněn předpoklad (levá strana implikace).

c) Tranzitivnost:

V případě tranzitivnosti se snadno přehlédne trojice prvků, která to nesplňuje, a proto je lepší v tomto případě vlastnost vyšetřovat obecně. Aby tato relace byla tranzitivní, musí podle definice 2.2.7 platit: $\forall X, Y, Z: (X \subset Y) \wedge (Y \subset Z) \Longrightarrow (X \subset Z)$. Z levé strany implikace vyplývá, že platí $X \subset Y \subset Z$ a z tohoto plyne, že $X \subset Z$, a proto je tato relace tranzitivní.

Závěr:

Relace „být vlastní podmnožinou" na $\mathcal{P}(A)$ je antireflexivní, slabě i silně antisymetrická a tranzitivní.

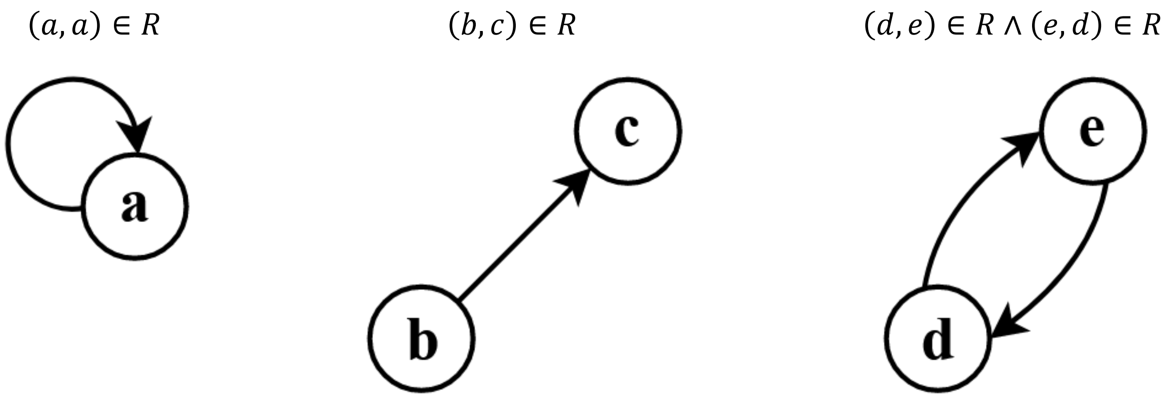
2.3 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ BINÁRNÍCH RELACÍ

Binární relace je v mnoha případech vhodné zakreslit. Lépe se pak orientuje ve slovních úlohách a někdy to i celou úlohu vyřeší. K takovému zakreslení se využívají tzv. orientované nebo neorientované grafy. Jeden z nejslavnějších příkladu, který lze interpretovat takovými grafy a pomocí teorie grafů se i snadno vyřeší, je Einsteinova hádanka, někdy známá jako Zebra nebo Einsteinova zebra, kde se pomocí slovních podmínek má dospět k jedinému správnému řešení.

Definice 2.3.1:

Nechť $V(G)$ je konečná množina. Grafem G se nazývá dvojice $\big(V(G), H(G)\big)$, kde $V(G)$ je množina vrcholů grafu G a $H(G)$ je množina hran grafu G. Pokud $H(G) \subseteq V(G) \times V(G)$, pak se tento graf nazývá *orientovaný graf* $\vec{G}$. Pokud $H(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$, kde $\binom{V(G)}{2}$ značí množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny $V(G)$, potom se graf G nazývá *neorientovaný graf* G. Množina $V(G)$ představuje kartézský součin $M{\times}M$ a množinu $H(G)$ tvoří uspořádané dvojice prvků z tohoto součinu.

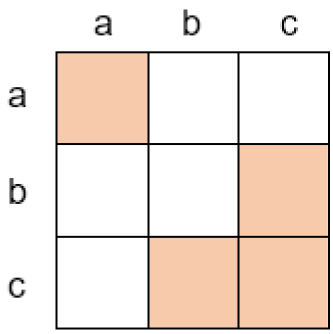
Nyní je možné prohlásit, že orientovaný graf $\vec{G}$ je znázorněním binární relace R na množině M. Jednotlivé vrcholy jsou prvky množiny M a hrany jsou spojnice mezi dvěma prvky a, b tvořící uspořádanou dvojici. Šipka znázorňující orientaci hrany bude charakterizovat pořadí prvků v této dvojici. Pro účely této práce postačí pouze orientované grafy a neorientovanými se dál nezabývá, ačkoli v praxi jsou velmi používané. Níže (obr. 4) jsou uvedeny příklady zakreslení uspořádaných dvojic $(a, a), (b, c), (d, e), (e, d)$, které patří do relace R. Takovému grafu se říká *uzlový (vrcholový) graf*.



Obr. 4 – *Způsoby zakreslení uspořádaných dvojic v orientovaném grafu. Vytvořil autor*

Binární relace se velmi často znázorňují právě pomocí uzlového grafu, ale existují i další velmi časté reprezentace. Například maticový zápis, který má vysoké uplatnění v teorii grafů, nebo šachovnicové (tabulkové) vyjádření (obr. 5). V obou případech jsou prvky z jedné množiny reprezentovány řádky a prvky z druhé množiny sloupci. Existující hranu mezi dvěma prvky reprezentuje v maticích logická 1 na pozici, kde se protíná řádek a sloupec těchto dvou prvků, všude jinde jsou logické 0. V šachovnicích (tabulkách) je to podobné, jen se jako značení využívá spíše vybarvení pozice, případně jiné symboly.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



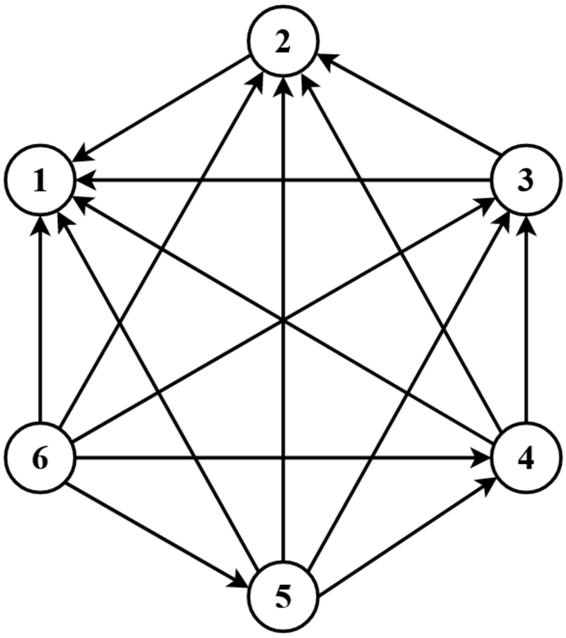
Obr. 5 – *Maticový a šachovnicový zápis binární relace. Vytvořil autor*

3 STANDARDNÍ HRACÍ KOSTKY V MATEMATICE

3.1 BINÁRNÍ RELACE SE STANDARDNÍMI HRACÍMI KOSTKAMI

Na množině $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, která symbolizuje bodové ohodnocení stěn standardní hrací kostky, je zavedena binární relace „na kostce K_1 padne větší číslo než na kostce K_2.“ Pro zjednodušení se bude dál tato binární relace na množině B nazývat $K_1 > K_2$.

Jelikož se jedná o vcelku malou, a hlavně konečnou množinu B, tentokrát k určení vlastností bude využit orientovaný graf, ze kterého se vlastnosti této relace jednoduše vyčtou. Takový graf se tvoří tak, že se postupně porovnávají všechny prvky mezi sebou (i samy se sebou) a přidávají se do relace, pokud dané podmínce vyhovují. Podle toho, zdali dvojice prvků vyhovuje relaci, resp. nevyhovuje, se zakreslí, resp. nezakreslí orientovaná hrana mezi těmito dvěma prvky.



Obr. 6 – Orientovaný graf binární relace $K_1 > K_2$. Vytvořil autor

a) Reflexivnost:

Tato vlastnost se pozná podle smyček v grafu. Pokud každý prvek má vlastní smyčku, pak je relace reflexivní. Jestli některé prvky smyčku mají a některé ne, je areflexivní, ale v tomto případě, kdy žádný prvek smyčku nemá, je tato relace antireflexivní.

b) Symetričnost a antisymetričnost

Pro symetrii by muselo platit, že existuje-li orientovaná hrana z prvku x do prvky y, musí existovat i hrana opačná, ale u této relace nejen, že mnoho dvojic toto kritérium nesplňuje, ona dokonce žádná taková dvojice neexistuje, a proto se jedná o silně antisymetrickou relaci, která není symetrická.

S podobným tvrzením je na tom slabá antisymetrie. Ta se pozná podle toho, že se v grafu nenachází žádná dvojice různých prvků, kde by vedla orientovaná hrana na oba směry. Jedná se o podobnou situaci jako při vyšetřování relace „být podmnožinou“ na množině $M = \{\emptyset\}$ (viz příklad 2.2.1), kdy nebyl splněn předpoklad (levá strana implikace) a tudíž tato binární relace je slabě antisymetrická.

c) Tranzitivnost

Tahle vlastnost je při čtení z grafu pravděpodobně nejsložitější. Pro libovolné tři prvky x, y, z musí platit, že když existuje orientovaná hrana z $x \to y$ a zároveň z $y \to z$, pak musí existovat orientovaná hrana z $x \to z$. Při vyšetřování této vlastnosti je vhodné procházet prvky postupně. Od nejmenšího počtu orientovaných hran vycházejících z tohoto prvku až po prvek, kterých jich má nejvíce.

Z prvku 1 nevychází žádá hrana, a proto není co zkoumat. Z 2 vede orientovaná hrana pouze do 1, odkud žádná nevede. Opět není, co řešit. Zajímavým se stane až prvek 3, ze kterého vede orientovaná hrana do 2 a z ní do 1. Podle výše uvedeného tvrzení, musí existovat přímá spojnice z 3 do 1. Ta existuje, a proto se zatím nemůže tranzitivnost vyloučit. Obdobným způsobem by se vyšetřily i zbylé prvky $4, 5, 6$ a dospělo by se k závěru, že se jedná o tranzitivní relaci.

Závěr:

Binární relace $K_1 > K_2$ je antireflexivní, silně i slabě antisymetrická a tranzitivní.

3.2 HOD KOSTKOU V TEORII PRAVDĚPODOBNOSTI

Při zjišťování vlastností se převedla relace $K_1 > K_2$ na jednoduchou relaci „být větší než“ na zadané množině B, a přesto lze tvrdit, že vlastnosti obou relací jsou totožné. Důvodem je stanovený předpoklad, že se jedná o standardní hrací kostky, a k jeho objasnění je potřeba základní teorie pravděpodobnosti.

Definice 3.2.1:

Děj nebo proces, jehož výsledek není deterministický a lze ho libovolněkrát opakovat, se nazývá *náhodný pokus*.

Takovým náhodným pokusem je kupříkladu právě hod kostkou, losování výherce loterie, generátory náhodných čísel apod. Výsledek náhodného pokusu není obecně předem známý a rovněž není jednoznačně určen vstupními parametry. Proto například míchání barev nebo rovnice $a - b = c$, kde vstupní parametry jsou a, b, nejsou náhodným pokusem.

Definice 3.2.2:

Konečná množina $\Omega \neq \emptyset$, která obsahuje všechny možné výsledky náhodného pokusu, se nazývá *základní množina*.

Definice 3.2.3:

Nechť Ω je základní množina. Každá podmnožina A základní množiny Ω, se nazývá *náhodný jev*, zkráceně *jev*. Speciálně pokud se $A = \Omega$, pak se jedná o *jev jistý*, a je-li $A = \emptyset$, poté je to *jev nemožný*. Dále když náhodný jev A nelze rozložit na sjednocení dvou a více odlišných podmnožin $A_1, A_2, \dots A_n$, hovoří se o tzv. *elementárním jevu*.

Definice 3.2.4:

Náhodné jevy A_1, A_2, které nemohou nastat současně, se nazývají *neslučitelné náhodné jevy*. Formálně: $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Definice 3.2.5:

Nechť Ω je základní množina a A_i, kde $i = 1, 2, \dots, k$, jsou neslučitelné stejně možné náhodné jevy z množiny Ω. Číslo $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, kde $|A|$ značí počet výsledků náhodného pokusu, kdy nastává jev A a $|\Omega|$ počet všech možných výsledků náhodného pokusu, se nazývá *(klasická) pravděpodobnost jevu A*.

Definice 3.2.6:

Nechť A je náhodný jev ze základní množiny Ω a $P(A)$ je jeho pravděpodobnost. Pokud platí, že $\bar{A} = \Omega \setminus A$, pak se $\bar{A}$ nazývá *jevem opačným k jevu A* s $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Binární relace $K_1 > K_2$ se skládá z celkem až tří náhodných pokusů, a to hodem kostky K_1, K_2 a K_3. Základní množinou Ω je množina $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a jednoprvkové podmnožiny $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{3\}, A_4 = \{4\}, A_5 = \{5\}, A_6 = \{6\}$ jsou elementární jevy. Za nemožný jev lze považovat např. padnutí 7 na jedné z kostek, protože takový prvek se v Ω nenachází, a za jev jistý tvrzení, že na obou kostkách padne číslo z rozsahu 1 až 6.

Příklad 3.2.1:

Jaké jsou jednotlivé pravděpodobnosti všech náhodných jevů (porovnávání hodnot), které mohou nastat při hodu dvěma klasickými kostkami?

Standardní hrací kostka je pravidelná, má 6 stěn a každá je jinak obodovaná, tedy 6 různých možností, jak může hod kostkou dopadnout. Dále se ví, že nemohou padnout dvě různá čísla na jedné kostce zároveň, tudíž elementární jevy A_i, kde $i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jsou navzájem neslučitelné, a proto pravděpodobnost padnutí libovolného čísla na kostce je $P(A) = \frac{1}{6}$.

Protože záleží na tom, jestli číslo padlo na kostce K_1 nebo K_2, vybírá se na dvě pozice $(\_\ \_)$. Každá kostka může skončit na jednom z šesti různých čísel $(6\ 6)$ a zároveň platí, že musí nastat současně $(6 \cdot 6)$. Z tohoto vyplývá, že existuje celkem 36 různých dvojic. V binární relaci $K_1 > K_2$ může nastat jeden z těchto tří náhodných jevů: $K_1 > K_2, K_1 = K_2, K_1 < K_2$. V tabulce níže (tab. 1) jsou různě barevně označena políčka podle toho, který náhodný jev nastává. Na první pohled je vidět, že tabulka je symetrická podle hlavní diagonály, kterou tvoří úhlopříčně prvky z levého horního rohu do pravého dolního rohu.

Případu, kdy $K_1 > K_2$ (oranžově), vyhovuje celkem 15 dvojic $\Longrightarrow P(K_1 > K_2) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Pokud se má $K_1 = K_2$ (modře), je to pouze 6 dvojic $\Longrightarrow P(K_1 = K_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Pro poslední variantu, kdy $K_1 < K_2$ (zeleně), existuje 15 dvojic $\Longrightarrow P(K_1 < K_2) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Jelikož $P(K_1 > K_2) = P(K_1 < K_2) = \frac{5}{12}$, lze hovořit o férových kostkách. Ani jedna z nich nemá žádnou výhodu, a proto nezáleží, jestli se hází s K_1 nebo s K_2.

K_1 \ K_2	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Tab. 1 – Barevné znázornění výsledků hodů kostek. Vytvořil autor

4 NETRANZITIVNÍ HRACÍ KOSTKY

4.1 MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD

Původní binární relace $K_1 > K_2$ splňovala tranzitivnost, protože všechny kostky byly stejné a každé číslo mělo stejnou pravděpodobnost, že při hodu padne. Následujícím motivačním příkladem se nahlédne na to, co se stane, když se kostky očíslují trochu jinak.

Příklad 4.1.1:

Jsou zadány 6-stěnné kostky K_1, K_2, K_3, K_4, které mají následující rozložení: K_1: $[0, 0, 4, 4, 4, 4]$, K_2: $[3, 3, 3, 3, 3, 3]$, K_3: $[2, 2, 2, 2, 6, 6]$, K_4: $[1, 1, 1, 5, 5, 5]$. Jaké jsou pravděpodobnosti náhodných jevů $P(K_1 > K_2), P(K_2 > K_3), P(K_3 > K_4), P(K_4 > K_1)$?

Při výpočtu takových to pravděpodobností je dobré vědět, že v matematice se slova *a zároveň*, *současně*, *najednou* apod. při výpočtu objevují jako násobení. Obdobně jsou na tom slova *nebo*, *či* atd. které nahrazuje sčítání. Také díky vlastnosti opačného jevu (definice 3.2.6) se nemusí počítat všechny pravděpodobnosti. Je evidentní, že součet pravděpodobností $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, z čehož vyplývá, že pokud $P(A) > \frac{1}{2}$, pak musí být $P(\bar{A}) < \frac{1}{2}$. Tedy pokud se kupříkladu vypočítá, že kostka K_1 poráží kostku K_2 s $P(K_1 > K_2) > \frac{1}{2}$, plyne z toho, že kostka K_2 je horší volbou než kostka K_1, a proto není potřeba se zaobírat $P(K_2 > K_1)$. Pak už je to jen o správné formulaci náhodného jevu a počtu výskytů jednotlivých situací.

Aby nastal jev $K_1 > K_2$ musí padnou na K_1 číslo 4 (4 výskyty) a zároveň na K_2 padnout číslo 3 (6 výskytů), a proto $P(K_1 > K_2) = \frac{4 \cdot 6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

Pro náhodný jev $K_2 > K_3$ musí na K_2 padnout číslo 3 (6 výskytů), a současně na K_3 číslo 2 (4 výskyty), tudíž $P(K_2 > K_3) = \frac{6 \cdot 4}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

U jevu $K_3 > K_4$ je více variant a to konkrétně, když nastane jev $2 > 1$ nebo $6 > 1$ či $6 > 5$. Pro první variantu platí, že nastane právě tehdy, když na K_3 padne 2 (4 výskyty) a zároveň na K_4 padne 1 (3 výskyty). Druhá varianta nastane, když na K_3 bude 6 (2 výskyty), a současně na K_4 bude 1 (3 výskyty) a k poslední variantě dojde, jakmile na K_3 padne 6 (2 výskyty) a zároveň na K_4 padne 5 (3 výskyty) z toho plyne, že pravděpodobnost $P(K_3 > K_4) = \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

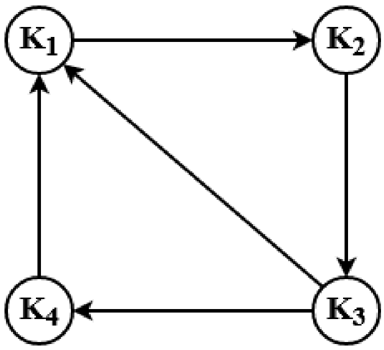
Jev $K_4 > K_1$ má opět více možností: $1 > 0$ nebo $5 > 0$ či $5 > 4$. Postup výpočtu je velmi podobný jako u náhodného jevu $K_3 > K_4$, a proto je rovnou vypočtena pravděpodobnost $P(K_4 > K_1) = \frac{3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

Závěr:

$P(K_1 > K_2) = P(K_2 > K_3) = P(K_3 > K_4) = P(K_4 > K_1) = \frac{2}{3}$. Nejen, že si jsou všechny pravděpodobnosti rovny, ale dokonce jsou větší než $\frac{1}{2}$.

Další zajímavá vlastnost je snáze vidět na grafu, a proto je odteď binární relace $K_1 > K_2$ zobecněna na $K_m > K_n$, kde $m, n \in \{1, 2, \ldots k\} \wedge (m \neq n)$, a současně $P(K_m > K_n) > \frac{1}{2}$. Slovně: prvky K_m a K_n jsou v relaci, pokud na kostce K_m padne větší číslo než na kostce K_n s pravděpodobností větší než $\frac{1}{2}$. Orientovaná hrana zde znamená, že kostka, ze které hrana vychází, má větší pravděpodobnost, že porazí v hodu kostku, do které hrana vchází. Pro úplnost grafu je potřeba porovnat ještě prvky K_1, K_3 a K_2, K_4. Postup výpočtu je stejný jako výše, a proto zde jsou jen uvedeny výsledky: $P(K_3 > K_1) = \frac{5}{9}$ a $P(K_2 > K_4) = \frac{1}{2}$. Z toho plyne, že navíc bude ještě orientovaná hrana z vrcholu K_3 do K_1.

Pokud se tranzitivita (definice 2.2.7) upraví pro 4 prvky, musela by v tomto případě existovat orientovaná hrana z K_1 do K_4, aby se mohlo mluvit o tranzitivní relaci. Tomu však není, a z tohoto důvodu je tato relace netranzitivní.



Obr. 7 – Graf binární relace (příklad 4.1.1). Vytvořil autor

Definice 4.1.1:

Nechť $m, n \in \{1, 2, \dots k\} \wedge (m \neq n)$. Série bin. relací $K_m > K_n$, kde $K_m \in D_m$ a zároveň $K_n \in D_n$, kde D_m a D_n jsou vždy 6-prvkové množiny čísel jednotlivých stěn příslušných kostek K_m a K_n pro které platí, že nesplňují definici tranzitivity, každá z relací je definovaná na kartézském součinu $D \times D$, kde $D = \{D_1, D_2, \dots D_k\}$ a pravděpodobnost náhodných jevů $P(K_m > K_n) > \frac{1}{2}$, se nazývá *netranzitivní sada kostek*. Speciálně, pokud platí, že $\forall m, n: P(K_m > K_n) \neq \frac{1}{2}$, hovoří se o *plně netranzitivní sadě kostek*.

Definice 4.1.2:

Nechť série binárních relací $K_m > K_n$ je netranzitivní sada kostek podle definice 4.1.1 a $\vec{G}$ je orientovaný graf této sady. Sekvence vrcholů v $\vec{G}$: $U = K_1, K_2, \dots, K_{k-1}, K_k = U$, u kterých platí, že pro každé $i = 1, 2, \dots, k-1, k$ se uspořádaná dvojice $(K_i\, , K_{i+1}) \in H(\vec{G})$, se nazývá *vítězný cyklus*. Speciálně, když se číslo $k - 1$ rovná počtu kostek v sadě, hovoří se o *maximálním vítězném cyklu*.

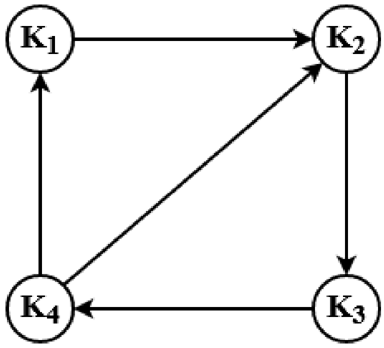
4.2 EFRONOVY KOSTKY

Příklad 4.1.1 byla I. sada tzv. Efronových kostek, které byly pojmenovávány na počest svého vynálezce Bradleyho Efrona, statistika ze Stanfordské univerzity. Je to sada 4 kostek, které mají různě očíslované stěny (žádné číslo se nenachází na dvou různých kostkách zároveň). Tímto je eliminována možnost případné remízy. Jejich zvláštnost spočívá v tom, že každá K_m poráží K_{m+1}, kde $m = 1, 2, \dots, k$, s pravděpodobností $P(K_m > K_{m+1}) = A > \frac{1}{2}$. Pravděpodobnosti jiných párů, například $K_1 > K_3$, jsou už různé od čísla A a také nemusí být nutně větší než $\frac{1}{2}$. ([7], s. 200)

II. sada také nemá možnost remízy a má taktéž $P(K_m > K_{m+1}) = \frac{2}{3}$, ale rozvolňuje interval čísel od 0–24 včetně. Umístění čísel na stěnách je následující: K_1: $[2, 3, 3, 9, 10, 11]$, K_2: $[0, 1, 7, 8, 8, 8]$, K_3: $[5, 5, 6, 6, 6, 6]$, K_4: $[4, 4, 4, 4, 12, 12]$. ([7], s. 200)

Jeho III. sada má oproti předchozím dvěma odlišnou $P(K_m > K_{m+1}) = \frac{11}{18}$ a rozložení čísel na kostkách je lehce obměněná II. sada. Vypadá takto: K_1: $[1, 2, 3, 9, 10, 11]$, K_2: $[0, 1, 7, 8, 8, 9]$, K_3: $[5, 5, 6, 6, 6, 6]$, K_4: $[4, 4, 4, 4, 12, 12]$. ([7], s. 200)

V II. i III. sadě jsou pravděpodobnosti $P(K_3 > K_1) = \frac{1}{2}$ a $P(K_4 > K_2) = \frac{5}{9}$, a proto graf obou sad vypadá stejně (obr. 8).



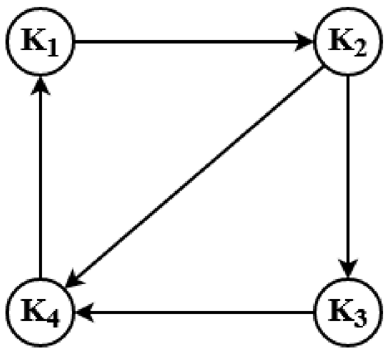
Obr. 8 – Graf netranzitivní II. a III. sady Efronových kostek. Vytvořil autor

Všechny tři Efronovy sady mají celkem dva vítězné cykly, z nichž je jeden maximální vítězný cyklus. V případě I. sady je jeden vítězný cyklus v podobě K_1, K_2, K_3, K_1, u II a III. sady má tvar K_2, K_3, K_4, K_2. Maximální vítězný cyklus mají všechny tři sady stejný a to K_1, K_2, K_3, K_4, K_1.

4.3 QUIMBYHO KOSTKY

Dalším autorem netranzitivní sady 4 kostek je fyzik Shirley Quimby z Kolumbijské univerzity, který představil sadu s principem stejným jako u II. sada Efronových kostek, ale tentokrát se každé číslo od 0–24 objevuje právě jedenkrát. I zde je $P(K_m > K_{m+1}) = \frac{2}{3}$. Kostky mají rozložení následující: K_1: $[3, 4, 5, 20, 21, 22]$, K_2: $[1, 2, 16, 17, 18, 19]$, K_3: $[10, 11, 12, 13, 14, 15]$, K_4: $[4, 4, 4, 4, 12, 12]$. ([7], s. 200)

Protože se zbylé dvě pravděpodobnosti $P(K_3 > K_1) = \frac{1}{2}$ a $P(K_2 > K_4) = \frac{2}{3}$, a proto se do relace $K_m > K_{m+1}$ přidá uspořádaná dvojice (K_2, K_4) a tím i orientovaná hrana mezi těmito dvěma kostkami. Výsledný graf Quimbyho netranzitivní sady (obr. 9) má také 2 vítězné cykly. Maximální vítězný cyklus je totožný s grafy sad Efronových kostek, tedy K_1, K_2, K_3, K_4, K_1 a další vítězný cyklus má podobu K_1, K_2, K_4, K_1.



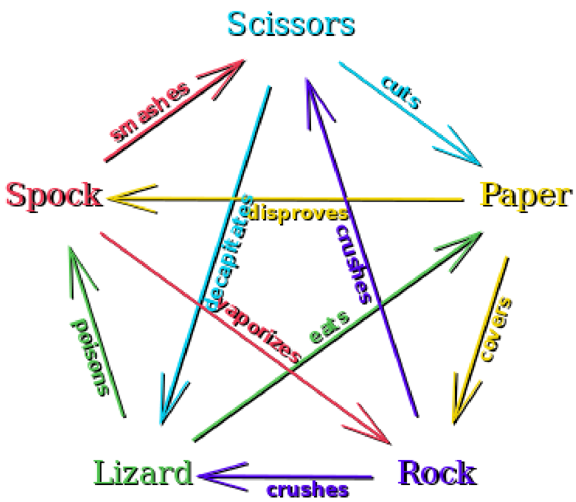
Obr. 9 – Graf netranzitivní sady Quimbyho kostek. Vytvořil autor

4.4 GRIMOVY KOSTKY

Naprosto odlišnou netranzitivní sadu kostek vytvořil James Grime, který se snažil vytvořit dokonalou sadu kostek, které budou mít mnoho unikátních vlastností. Hlavním cílem bylo vytvořit sadu, která bude netranzitivní, ale působit férově na první pohled. Jeho sada se skládá z celkem 5 kostek, které mají záměrně odlišné barvy a podle nich se také jmenují (obr. 10). Barvy a názvy barev, resp. kostek je potřebné ponechat v anglickém znění. [8]

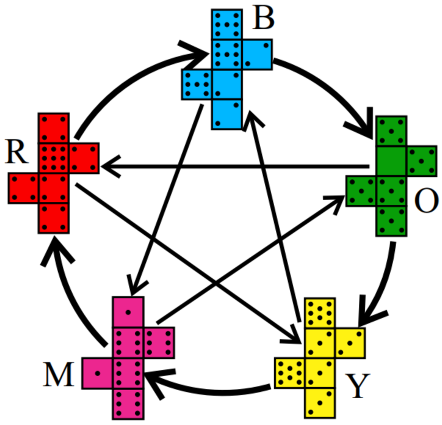
Obr. 10 – Grimova sada netranzitivních kostek. Vytvořil James Grime

Velkou inspirací mu byla pravděpodobně hra *Rock, Paper Scissors*, respektive její rozšířenější a trošku morbidnější verze *Rock*, *Paper*, *Scissors*, *Lizard*, *Spock*, která se mimo jiné objevila v 8. díle 2. série populárního seriálu *Teorie velkého třesku*. V Česku je známá pod názvem *Kámen, nůžky, papír, tapír, Spock*, byť slovíčko *lizard* v překladu znamená *ještěr*. Jméno *Spock* odkazuje na mužskou fiktivní postavu z univerza *Star Track*, s tím, že jeho typické gesto rukou znázorňuje tuto volbu ve hře. Tuto verzi klasické hry představili Sam Kass a Karen Bryla s dodatkem, že jejich verze nekončí až v 80 % případů remízou jako verze původní. Níže (obr. 11) je relační graf této hry. [9]



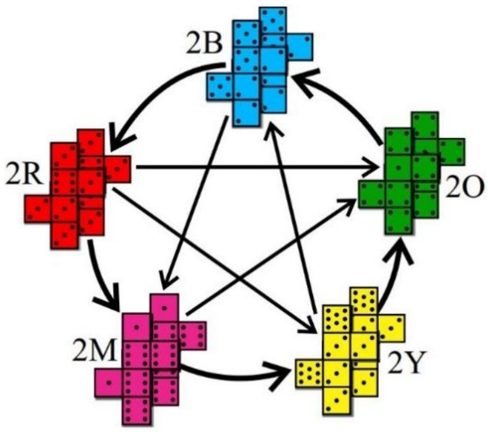
Obr. 11 – Relační graf hry "Rock, Paper, Scissors, Lizard, Spock". Vytvořil VidTheKid

Oproti všem dosud představeným netranzitivním sadám, kde existoval jen jeden maximální vítězný cyklus, kdy jedna kostka porážela tu druhou s pravděpodobností větší než $\frac{1}{2}$, se liší ta Grimova už tím, že má rovnou dva maximální vítězné cykly (obr. 12). První maximální vítězný cyklus se určuje podle délky názvu barvy, po které je kostka pojmenovaná. Začíná od kostky R (3 písmena), pokračuje přes kostky B (4 písmena), O (5 písmen), Y (6 písmen) a nakonec kostka M (7 písmen), která opět poráží kostku R. Druhý maximální vítězný cyklus je podle abecedního pořadí názvů barev $(B, M, O, R, Y, B, \dots)$, a proto je důležité zachovat jednotlivé barvy i s jejich názvy. Zajímavostí je, že druhý cyklus je jedna z možných variant, jak nakreslit na papír pentagram jedním tahem. [8]



Obr. 12 – Vítězné cykly s jednou kostkou. Vytvořil James Grime

Aby toho nebylo málo, tak Grime schoval do svých kostek ještě další překvapení. Pokud se hráči rozhodnou, že každý bude házet s dvěma kostkami stejné barvy, pak se maximální vítězný cyklus podle délky názvu barvy obrátí, zatímco podle abecedního pořadí zůstává skoro stejný (obr. 13). Jedinou výjimkou je hrana mezi $O \rightarrow R$, respektive $2R \rightarrow 2O$, kvůli které se nejedná o vítězný cyklus. Důvodem je podobnost obou kostek. Obě kostky totiž mají svých 5 stěn očíslovaných stejnou hodnotou, a také mají právě jedno extrémní číslo. Extrémním číslem je myšleno nejmenší číslo a největší číslo, které se v této netranzitivní sadě nachází. V případě kostky R je na pěti stěnách číslo 4 a na jedné stěně číslo 9 a u kostky O je to na pěti stěnách číslo 5 a na jedné číslo 0.



Obr. 13 – Vítězné cykly se dvěma kostkami. Vytvořil James Grime

Příklad 4.4.1:

Jaké jsou pravděpodobnosti $P(O > R)$ a $P(2R > 2O)$?

Nejprve se spočítá $P(O > R)$. To by nemělo být obtížné, protože podobných výpočtu bylo provedených už několik. $P(O > R) = \frac{5 \cdot 5}{36} = \frac{25}{36}$. Teď se vypočítá $P(2R > 2O)$. Z tabulek součtů (tab. 2) se na první pohled zdá, že dvě kostky R, by měly opět prohrát, protože nejčastěji se zde vyskytuje součet 8, kdyžto u dvojice kostek O je nejčastější součet 10, ale není tomu tak. V následujícím postupu se zodpoví otázka: proč je tomu tak.

Pro výpočet je nejdříve důležité si uvědomit, že se nadále nehází pouze se dvěma kostkami, ale se čtyřmi kostkami a na každé z nich může padnou jedno z šesti čísel nezávisle na sobě. Tím se zvětší i celkový počet na $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ možností hodnot, které mohou padnout, byť se v některých případech jedná o stejná čísla. Odsud je výpočet už stejný, a tudíž pravděpodobnost $P(2R > 2O) = \frac{25 \cdot 11 + 10 * 36 + 1 * 36}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}51775$. Jak je vidět, dvojice kostek R má o něco málo větší šanci na vítězství než dvojice kostek O.

R	4	4	4	4	4	9
4	8	8	8	8	8	13
4	8	8	8	8	8	13
4	8	8	8	8	8	13
4	8	8	8	8	8	13
4	8	8	8	8	8	13
9	13	13	13	13	13	18

O	0	5	5	5	5	5
0	0	5	5	5	5	5
5	5	10	10	10	10	10
5	5	10	10	10	10	10
5	5	10	10	10	10	10
5	5	10	10	10	10	10
5	5	10	10	10	10	10

Tab. 2 – Číselné součty kostek R a kostek O. Vytvořil autor

Aby se čtenář nemusel zaobírat sčítáním, má k dispozici všechny tabulky součtů jednotlivých kostek (tab. 2, tab. 3 a tab. 4). Pomocí nich lze dopočítat zbylé pravděpodobnosti v maximálních vítězných cyklech a skoro maximálním vítězném cyklu. Všechny výsledky jsou uvedeny níže už bez postupu výpočtu.

B	2	2	2	7	7	7
2	4	4	4	9	9	9
2	4	4	4	9	9	9
2	4	4	4	9	9	9
7	9	9	9	14	14	14
7	9	9	9	14	14	14
7	9	9	9	14	14	14

Y	3	3	3	3	8	8
3	6	6	6	6	11	11
3	6	6	6	6	11	11
3	6	6	6	6	11	11
3	6	6	6	6	11	11
8	11	11	11	11	16	16
8	11	11	11	11	16	16

Tab. 3 – Číselné součty kostek B a kostek Y. Vytvořil autor

M	1	1	6	6	6	6
1	2	2	7	7	7	7
1	2	2	7	7	7	7
6	7	7	12	12	12	12
6	7	7	12	12	12	12
6	7	7	12	12	12	12
6	7	7	12	12	12	12

Tab. 4 – Číselné součty kostek M. Vytvořil autor

Podle délky názvu barvy:

$P(R > B) = \frac{7}{12}$, $P(2M > 2Y) = \frac{16}{27}$,

$P(B > O) = \frac{7}{12}$, $P(2Y > 2O) = \frac{56}{81}$,

$P(O > Y) = \frac{5}{9}$, $P(2O > 2B) = \frac{85}{144}$,

$P(Y > M) = \frac{5}{9}$, $P(2B > 2R) = \frac{85}{144}$,

$P(M > R) = \frac{5}{9}$. $P(2R > 2M) = \frac{56}{81}$.

Podle abecedního pořadí názvů barev:

$P(B > M) = \frac{2}{3}$, $P(2B > 2M) = \frac{5}{9}$,

$P(M > O) = \frac{13}{18}$, $P(2M > 2O) = \frac{7}{12}$,

$P(O > R) = \frac{25}{36}$, $P(2O < 2R) = \frac{671}{1296}$,

$P(R > Y) = \frac{13}{18}$, $P(2R > 2Y) = \frac{7}{12}$,

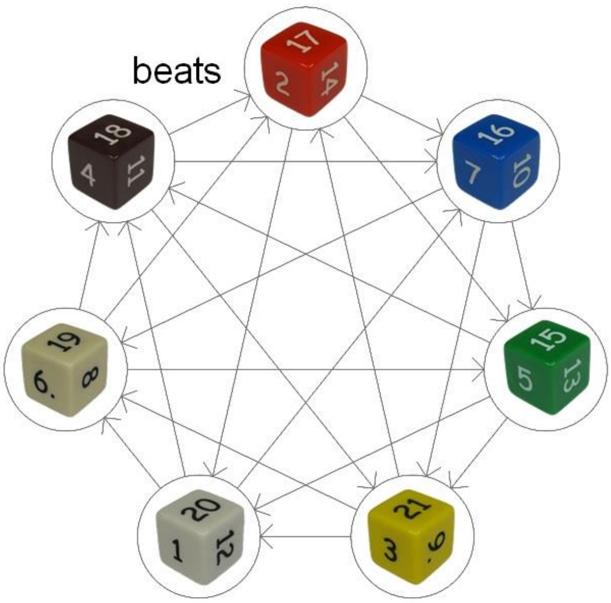
$P(Y > B) = \frac{2}{3}$. $P(2Y > 2B) = \frac{5}{9}$.

4.5 DEVENTEROVY KOSTKY

Poledním autorem netranzitivní sady kostek, který bude zmíněn v této práci, je Oskar van Deventer. Tento nizozemský tvůrce hlavolamů vytvořil sadu celkem o 7 kostkách, která je spíše známá pod jeho křestním jménem, Oskarovy kostky, a představil ji už v roce 1992. ([7], s. 200)

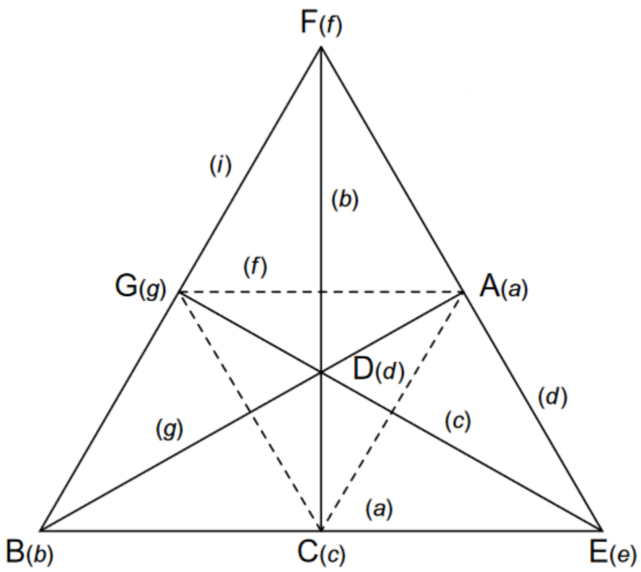
Jejich rozložení je specifické v tom, že každé číslo, které se na kostce nachází, se zde vyskytuje právě dvakrát, tedy každá kostka má přesně tři různá čísla. Dále v případě jeho sady platí, že pro libovolnou dvojici kostek vždy existuje třetí kostka, která má větší pravděpodobnost, že hodí větší číslo než zbylé dvě kostky najednou.

Jeho sada, stejně jako všechny zmíněné sady výše, neobsahuje žádné číslo, které by se objevovalo na více kostkách najednou. Společně s podmínkou, že každý hráč si vybírá jinak číslovanou kostku, se vyřazují všechny případy remízy. Jeho sada má následující rozložení: červená kostka K_1: $[2, 2, 14, 14, 17, 17]$, modrá kostka K_2: $[7, 7, 10, 10, 16, 16]$, zelená kostka K_3: $[5, 5, 13, 13, 15, 15]$, žlutá kostka K_4: $[3, 3, 9, 9, 21, 21]$, bílá kostka K_5: $[1, 1, 12, 12, 20, 20]$, šedá kostka K_6: $[6, 6, 8, 8, 19, 19]$ a poslední je hnědá kostka K_7: $[4, 4, 11, 11, 18, 18]$. Jednoduchými výpočty pravděpodobnosti se přijde na to, že pro každou uspořádanou dvojici (K_m, K_n) platí, že $P(K_m > K_n) = \frac{5}{9}$. [10]



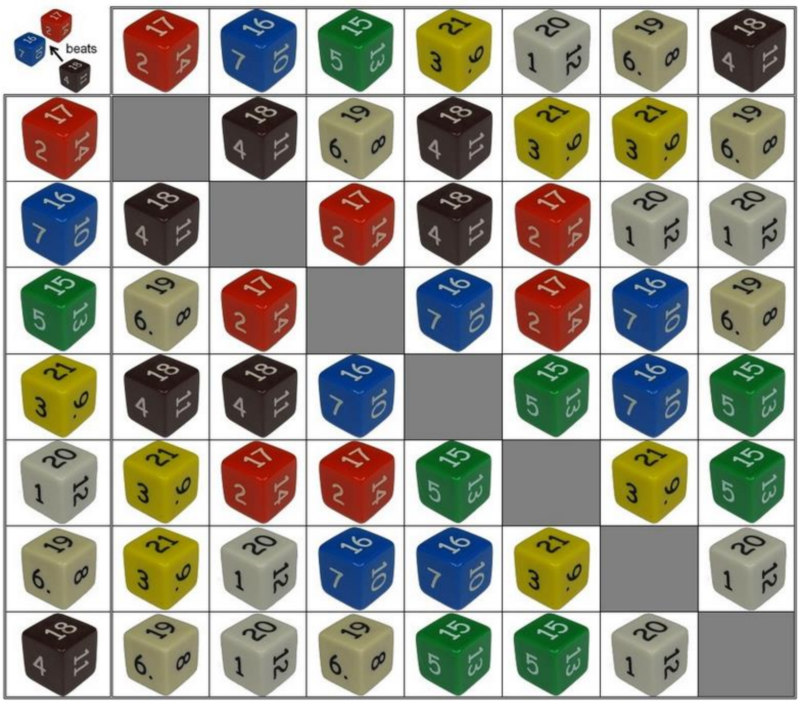
Obr. 14 – Graf Oskarovy netranzitivní sady kostek. Vytvořil Oskar van Deventer

Graf této sady je vidět na obrázku výše (obr. 14), ale ten nic neříká o tom, která kostka je lepší volbou v dané trojici, a proto vznikla i jiná zakreslení. Jedním z těchto zakreslení je tzv. Letadlo Fano (obr. 15). Jednotlivá velká písmena značí kostky ve smyslu, že $K_1 = A$, $K_2 = B$, … Malá písmena poté značí linie, respektive rovnostranný trojúhelník v případě f, kde kostka příslušného písmena poráží libovolnou kombinaci dvou kostek na daném objektu. Například kostka G na linii g má celkově větší pravděpodobnost, že porazí všechny dvojice kostek B-D, B-A a D-A. ([7], s. 201)



Obr. 15 – Letadlo Fano pro Oskarovu sadu kostek. Vytvořil Richard A. Epstein

Další, ale méně elegantní formou, jak znázornit Oskarovu sadu, je pomocí jednoduché tabulky (tab. 5). Každá společná pozice dvou libovolných různých kostek obsahuje právě jednu kostku, která má větší pravděpodobnost, že porazí obě kostky najednou. Hází se třemi 6stěnnými kostkami, tedy $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ kombinací, kterými může hod skončit. Poté je to už opět o hledání těch trojic čísel, kde požadovaná kostka má největší číslo. Taková pravděpodobnost se zapíše jako $P(A > B, C)$. Například pro kostky A, B, C je pravděpodobnost $P(A > B, C) = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 6}{216} = \frac{104}{216} = \frac{13}{27}$.



Tab. 5 – Tabulka Oskarových kostek. Vytvořil Oskar van Deventer

Je zřejmé, že $P(A > B, C)$ není větší než $\frac{1}{2}$ a je tomu tak, protože je důležité si uvědomit, že tentokrát bylo házeno třemi kostkami, a proto není pouze jeden, ale jsou dva opačné jevy. Jeden je $B > A, C$ a druhý je $C > A, B$. Pokud se definice 3.2.6 upraví pro tento konkrétní případ, bude platit, že $P(A > B, C) + P(B > A, C) + P(C > A, B) = 1$, a proto se může stát, že kostka bude lepší volbou v dané trojici, ale nebude mít pravděpodobnost větší než $\frac{1}{2}$. V tomto případě jsou pravděpodobnosti $P(B > A, C) = \frac{8}{27}$ a $P(C > A, B) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$. Nicméně, stále se jedná o netranzitivní sadu kostek ve smyslu definice 4.1.1, protože pravděpodobnosti jednotlivých uspořádaných dvojic tuto mez překročily.

5 VYUŽITÍ NEJEN NETRANZITIVNÍCH HRACÍCH KOSTEK

5.1 V HAZARDNÍCH HRÁCH

Nejhojnější zastoupení mají tranzitivní i netranzitivní kostky v hazardních hrách. Už od nepaměti se mezi lidmi našli jedinci, kteří chtěli jednoduše získat něco, co má ten druhý. Ať už se jedná o peníze, majetek nebo jídlo, vždy byl cíl zřejmý. Přesvědčit někoho o tom, že může něco získat, ve většině případů něco velmi cenného nebo potřebného pro daného jedince, ale přitom má velmi malou šanci, aby k tomu došlo, nebo dokonce nemá šanci na vítězství žádnou. Hodně takovýchto podvodných her, kde hráč nemá šanci vyhrát, se objevuje na ulicích, protože akce jako jsou poutě nebo karnevaly, je zakazují. Častokrát si autoři těchto her hrají s přírodními zákony a vymyslí hru tak, aby ji nebylo možné vyhrát. V daný moment však běžného jedince nenapadanou.

Mezi nejznámější podvody patří cinknuté kostky. To jsou na první pohled klasické kostky, ale při výrobě se nechala zatížit malým tělískem jedna vnitřní stěna, čímž se zajistilo to, že kostka bude při hodu dopadat většinou právě na zatíženou stěnu. Pokud se například zatížila stěna s bodovým ohodnocením 6, měla kostka mnohem větší pravděpodobnost, že při hodu bude navrchu číslo 1 (opačná stěna) a to se vyplatilo například ve hře *Jedničky a pětky,* kde hod tří jedniček najednou je jeden z nejlépe obodovaných jevů.

Samozřejmě to nezůstalo jen u jedné kostky, ale začaly se vyrábět celé sady cinknutých kostek. Některá měla mnohem větší pravděpodobnost, že padne postupka, jiná, že padají skoro samá vysoká čísla. Tyto kostky jsou ve své podstatě netranzitivní, když se budou porovnávat s klasickou férovou kostkou, ale nejedná se o netranzitivní sadu kostek ve smyslu definice 4.1.1.

Netranzitivní sady představené v této práci lze využít v hazardu podobným způsobem, avšak cinknuté kostky se hodně spoléhají na to, že hráč nepozná, že soupeřovy kostky jsou zmanipulované. Problém je ten, že po více a více hodech začíná prakticky neustále prohrávající hráč nabývat podezření, že hra není férová. U Grimeovy sady je proti tomuto velmi velká a efektivní obrana. Pokud hráč skutečně netuší, jak Grimeovy kostky fungují, lze ho jednoduše obelstít tím, že se v průběhu hry zaměňují vítězné cykly a počet kostek. Například začne se hrát s jednou kostkou a maximálním vítězným cyklem podle abecedy a jako první si vybírá kostku oponent. Jakmile po delší době, kdy prohrává, namítne, že hra je podvod, role se obrátí a kostky se zdvojnásobí. Tímto způsobem jde vytvořit iluzi férové hry, kdy častější prohry oponenta má opravdu na svědomí obyčejná smůla.

5.2 VE ŠKOLSTVÍ

Klasické hrací kostky se ve školství objevují napříč všemi vyučovacími předměty. Už na 1. stupni na základní škole se kostky využívají jako alternativní forma výuky. Pomáhají zpestřit vyučovací hodinu a probíranou látku lépe přiblížit všem žákům. Kromě toho se s využitím kostek ve výuce pojí i klíčové kompetence jako sociální či komunikační a průřezová témata. ([2], s. 44)

Pravděpodobně nejčastější a nejjednodušší využití je v matematice. Jeden z nejzákladnějších způsobů je, že si žák hodí dvěma kostkami a tyto dvě čísla má sečíst. Žáci z vyšších ročníků poté mohou využívat kostky s více stěnami například pro násobení pod sebou. Ve výuce českého jazyka se kostky mohou využít při procvičování sloves, kde by čísla od 1 do 6 znázorňovaly jednotlivé osoby. Pokud by žákovi na kostce padlo číslo 4, znamenalo by to, že musí vytvořit větu se slovesem v 1. osobě čísla množného.

Netranzitivní sady by na 1. a 2. stupni sloužily hlavně jako demonstrace výše zmíněných hazardních her. Žáci si budou moct sami vyzkoušet, že co na první pohled vypadá jako férová hra, nemusí být úplně pravda. Pedagog je tímto může varovat před pouličními podvodníky, kteří přesně na tomto konceptu vydělávají peníze.

Další možnost, jak netranzitivní kostky využít, je čistě založena na jejich vzhledu. Konkrétní číslování některých kostek se může hodit při procvičování násobilky, se kterou mají žáci větší problémy. Například by se vzala kostka R a 10stěnná kostka očíslovaná od 1 od 10. Žák by hodil oběma kostkami a vypočítal součin padnutých čísel.

Hlavní potenciál netranzitivních kostek se ukáže až na střední škole, kde se na nich dá vysvětlit základní teorie pravděpodobnosti a ukázat jejich neobvyklé vlastnosti. Jedná se totiž o velmi zajímavý koncept, který by žáky mohl zaujmout, a dokonce motivovat v samostudiu daného tématu, případně ke studiu matematiky jako takové na vysoké škole, kde by o těchto kostkách mohli psát kvalifikační práci.

5.3 VE HŘE D&D

Další využití kostek je ve hře Dungeons and Dragons, zkráceně *D&D*. Jedná se o velmi populární a komplexní fantasy hru, která má svůj základ v postupném vymýšlení, respektive tvoření herního světa. Na cestě v tomto dobrodružství, kterému se říká *tažení*, se hráči střetávají s různými překážkami, od nebezpečných monster přes logické hádanky až po obyčejné neshody, kterým směrem se družina (všichni hráči) vydají. Základní princip spočívá v tom, že jeden ze skupiny je tzv. *Pán jeskyně*, který zastává roli vypravěče a tažení se přímo neúčastní. Je Pánem jeskyně, protože jeskyně symbolizuje místo, kam se většinou všichni hrdinové (postavy hráčů) vydávají, aby pokračovali v již rozjetém dobrodružství nebo začali nové, ale není podmínkou, že to musí být jeskyně.

Každý z hráčů má svou vlastní postavu, kterou si podle určitých pravidel vymyslel a přizpůsobil. V jednotlivých taženích za tuto postavu hraje a rozhoduje, čímž určuje její osud. Není to tedy jako ve většině počítačových her, kde je už předem dáno, za kterou postavu musí hráč hrát, nebo je vytvořeno menu postav, ze kterého si hráč pouze vybírá či lehce přizpůsobuje vzhled.

Všechny kostky potřebné pro *D&D* lze nalézt online, například při vyhledání výrazu *Roll a die* ve vyhledávači Google, ale každý správný hráč *D&D* by měl mít svou vlastní sadu pravidelných kostek, která se skládá ze 4stěnu, 6stěnu, 8stěnu, dvou 10stěnů, 12stěnu a 20stěnu. Tyto kostky se poté používají, když hrdinové bojují s monstry, přecházejí ztrouchnivělé mosty, lezou po skalách, při rozhodování, smlouvání nebo přesvědčování. Jelikož každý hráč nechce, aby se jeho postavě stalo něco špatného, tak to, jestli danou situaci úspěšně zvládne bez problémů, nebo s různými obtížemi či vůbec, určuje náhoda, a to právě hod kostkou.

To, jak obtížné bude danou situaci zvládnout, určuje mnoho faktorů. Jedním z nich je samotná postava. Pokud se bude jednat o mohutného rytíře ve zbroji, který chce přejít například již zmíněný zchátralý most, určitě nebude mít stejné šance, jako hubený mág bez zbroje. Roli můžou hrát i různé povahy, strach, aktuální výbava apod. Dalším faktorem je i chování družiny, protože může dojít ke střetu dvou hrdinů, kteří se budou například prát o to, kdo půjde první. Nejčastějším faktorem je vysoká odolnost znepřátelené bytosti, která může být skoro imunní vůči ohnivým zraněním, a proto mág, který má silná kouzla pouze s elementem ohně, moc poškození neudělí.

V těchto nevyrovnaných situacích se v originální verzi využívají nejčastěji binární relace „hoď na kostce větší číslo než číslo x“, kde x je nutná podmínka toho, aby se hrdina vyhnul nechtěným efektům nebo poškození. Čím větší je číslo x, tím složitější je danou situaci úspěšně zvládnout. V případě, kdy by bylo potřeba ztížit podmínky úspěchu, nebo zvýhodnit nějakou stranu, využily by se například kostky z netranzitivní Grimeovy sady.

Například souboj dvou hrdinů, kde jeden má nějakou určitou slabinu a druhý ji zná a využívá ji proti němu, by mohl využívat netranzitivní kostky. Pán jeskyně by určil, který vítězný cyklus se využije, pochopitelně podle toho, jak velkou výhodu by měl jeden hrdina nad druhým mít. Alternativní využití by bylo při zmíněném ztížení, kde by hráč házel kostkou, která má nerovnoměrně rozdělené bodové ohodnocení, kupříkladu kostka M (obr. 12). Pokud by padla 1, hrdina by utržil poškození, pokud by padla 6, hrdina by naopak poškození udělil. Výše poškození se poté může určit hodem jiné kostky.

5.4 V DOMÁCÍM PROSTŘEDÍ

Poslední využití netranzitivních kostek je čistě jako koníček. Tyto kostky jsou svými vlastnostmi natolik zvláštní, že přímo vybízí ke zkoumání v domácích podmínkách, kde s nimi lze provádět řadu pokusů. Od klasického hodu jednou kostkou, respektive dvěma kostkami, kdy se zkoumá četnost jednotlivých padnutých čísel, až po zpestření velmi dobře známých her využívající kostky jako *Osadníci z Katanu*, *Risk*, nebo již zmíněné *Vrhcáby*. U těchto her by se mohli hráči postupně střídat ve výběru kostek, se kterými chtějí aktuální kolo házet, nebo určovat pořadí s hrou *Kámen, nůžky, papír, tapír, Spock*, a tím určovat, kdo bude házet jakou kostkou. Touto jednoduchou úpravou by hry nabraly úplně jiný rozměr zábavy.

Pro případ, že si někdo chce hrát raději sám, lze s těmito kostkami strávit spoustu zajímavých chvil. Daná osoba by mohla vymýšlet další vlastní sady, respektive podsady, z představených kostek a sama si vypočítávat jednotlivé pravděpodobnosti, vytvářet grafy a závěry. Další možností je zkoumat sady o větším počtu kostek, které by splňovaly podmínky netranzitivity, případně jít cestou opačnou a hledat sady i se zápornými čísly.

ZÁVĚR

Práce postupně budovala základy pro pochopení hlavního tématu – netranzitivních kostek. Nejprve se stručně věnovala historii kostek, ve které se probraly domněnky o tom, kdo je doopravdy jejich autorem, a také kde hrací kostky vůbec vznikly. Dále se tato část věnovala postupnému vývoji hracích kostek od jednoduchých kostí (astragalů) až po dnešní kostky, které každý zná.

Ve druhé části byly představeny základní teoretické pojmy z elementární algebry. Pro jejich snazší pochopení byly jednotlivé pojmy demonstrovány na konkrétních příkladech s podrobnými postupy výpočtu a logického uvažování, nicméně stále byl kladen důraz na formální a věcnou správnost.

Třetí kapitola se zabývala standardními kostkami s aplikací teorie z předchozí kapitoly a také doplnila několik základních znalostí z teorie pravděpodobnosti. Jejím cílem bylo vysvětlit, proč jsou klasické kostky z matematického pohledu férové. Proto byl zde i podrobně rozepsán příklad na výpočty pravděpodobností všech náhodných jevů, které mohou při hodu dvou kostek nastat.

Ve čtvrté části bylo představeno hlavní téma této práce. Kapitola se zaobírala celkem čtyřmi netranzitivními sadami kostek, a to konkrétně Efronovou, Quimbyovou, Deventerovou, ale především Grimeovou sadou kostek, která se vymyká svými maximálními vítěznými cykly. U jednotlivých sad byly zmíněny a popsány jejich speciální vlastnosti s jejich odůvodněním. Práci by šlo případně rozšířit o několik dalších netranzitivních sad nebo o podrobnější rozbor sad již zmíněných. Ten by však vyžadoval rozšířenější teoretické znalosti z matematiky. Mezi další velmi zajímavé sady, které nebyly v této práci dosud zmíněny, patří Sichermanova sada nebo sada od autorů Moraledyho a Storka.

V poslední kapitole se práce zaobírá reálným využitím netranzitivních kostek jako takových. Nastiňuje několik situací, kdy se tyto kostky mohou uplatnit. Jejich největší potenciál spočívá ve využití jako motivačního prostředku při studiu matematiky, respektive jako způsob přiblížení matematického světa každému žákovi.

Hlavní cíl této práce, přiblížení tématu netranzitivních kostek a navrhnutí několika možných využití, lze považovat za splněný. Práce může také sloužit jako inspirace jiným studentům při hledání tématu, o kterém by chtěli psát, nebo jako prostředek při tvoření osnovy jejich případné budoucí práce. Vzhledem k tomu, že při zpracovávání tohoto námětu bylo problematické dohledat odbornou literaturu v českém jazyce, lze tuto práci využít i jako eventuální zdroj základních informací.

RESUMÉ

Tato práce se věnuje vybraným sadám netranzitivních kostek, jejich unikátním vlastnostem jako jsou vítězné cykly a návrhům, kde tyto kostky využít.

První dvě kapitoly jsou věnovány obecným znalostem potřebných pro kapitoly další. První pojednává o historii hracích kostek a druhá o relacích a jejich vlastnostech. Ve třetí kapitole je teorie z druhé kapitoly obohacena o základy z pravděpodobnosti s klasickými 6stěnnými hracími kostkami s normálním číslováním. Ve čtvrté kapitole jsou představeny jednotlivé netranzitivní sady kostek s vysvětlením, proč nejsou férové. Poslední kapitola je věnována návrhům, kde je možné tyto atypické kostky použít.

RESUME

This bachelor thesis is dedicated to selected sets of non-transitive dice, their unique properties such as winning cycles and designs on where to use these dice.

The first two chapters are devoted to the general knowledge required for the next chapters. The first is devoted to the history of playing dice and the second to relations and their properties. In the third chapter, the theory of the second chapter, enriched with foundations of probability, is intertwined with classic 6-sided dice with normal numbering. The fourth chapter presents individual non-transitive sets of dice, explaining why they are not fair. The final chapter deals with suggestions where these atypical dice can be used.

SEZNAM LITERATURY

[1] GLIMME, Dan. Dice. In: *Encyclopedia Britannica* [online]. Chicago: The Britannica Group, c2022 [cit. 2022-05-21]. Dostupné z: https://www.britannica.com/topic/dice

[2] FIALA, Jan. Hrací kostka, její historie a využití ve výuce. *Komenský: odborný časopis pro učitele základní školy* [online]. Brno: Academie Jana Amose Komenského, 2020, **145**(1), 39–45 [cit. 2022-01-19]. ISSN 0323-0449. Dostupné z: https://webcentrum.muni.cz/media/3288460/komensky_145_01_tisk.pdf

[3] BERGEROVÁ, Alžběta. Hry v průběhu věků (2): Kostky. Cesty archeologie [online]. Praha: Ústav archeologické památkové péče středních Čech, c2015–2020, 18. 8. 2021 [cit. 2022-05-26]. Dostupné z: https://www.cestyarcheologie.cz/single-post /serial-o-dochovanych-hrach-z-prubehu-veku-2-kostky

[4] HERODOTUS. Herodotus on Lydia. *World History Encyclopedia* [online]. London: World History, 2009–2022, 18 January 2012 [cit. 2022-01-24]. Dostupné z: https://www.worldhistory.org/article/81/herodotus-on-lydia/

[5] H. MAUGH II, Thomas. Genetic tests: Italians were from Turkey. *Los Angeles Times* [online]. Los Angeles: California Times, c2022, June 18, 2007 [cit. 2022-01-24]. ISSN 2165-1736. Dostupné z: https://www.latimes.com/archives /la-xpm-2007-jun-18-sci-etruscans18-story.html

[6] ABBOTT, Jacob. CROSSING THE RUBICON. *HISTORY OF JULIUS CAESAR* [online databáze]. H. Panhwar, 2018, s. 47–51 [cit. 2022-05-28]. Dostupné z: http://www.sanipanhwar.com. Kniha se nachází pod číslem 68 v sekci General books.

[7] EPSTEIN, Richard A. *The Theory of Gambling and Statistical Logic* [online]. 2nd ed. Waltham: Academic Press, 2012 [cit. 2022-06-18]. ISBN 978-0-12-397870-7. Dostupné z: https://international.scholarvox.com/reader/docid/88811774/page/1

[8] GRIME, James. The Bizarre World of Nontransitive Dice: Games for Two or More Players. *The College Mathematics Journal* [online]. 2017, **48**(1), 2-9 [cit. 2021-04-04]. ISSN 1931-1346. Dostupné z: doi:10.4169/college.math.j.48.1.2. Pro zpřístupnění článku je potřeba být přihlášený například přes školní instituci.

[9] KASS, Sam a Karen BRYLA. Rock Paper Scissors Spock Lizard. The Big Bang Theory Wiki [online]. Zürich: Sam Kass, c1995–2021, [1998] Poslední změna proběhla v roce 2021 [cit. 2022-06-25]. Dostupné z: http://www.samkass.com /theories/RPSSL.html

[10] GRIME, James. Non-transitive Dice. Singingbanana [online]. Scott Brown, c2014-2019 [cit. 2022-06-23]. Dostupné z: https://singingbanana.com/dice /article.htm#FN12

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1– Sbroušené hleznové kosti. Foto Miriam Nývltová Fišáková, David Parma 4
Obr. 2 – Kostka ve tvaru tyčinky se stranami 1-6 a 2-5. Foto Arjan Verweij.................................. 5
Obr. 3 – Diverzita hracích kostek. Foto autor 6
Obr. 4 – Způsoby zakreslení uspořádaných dvojic v orientovaném grafu. Vytvořil autor 14
Obr. 5 – Maticový a šachovnicový zápis binární relace. Vytvořil autor 14
Obr. 6 – Orientovaný graf binární relace $K1 > K2$. Vytvořil autor... 15
Obr. 7 – Graf binární relace (příklad 4.1.1). Vytvořil autor 20
Obr. 8 – Graf netranzitivní II. a III. sady Efronových kostek. Vytvořil autor................................ 22
Obr. 9 – Graf netranzitivní sady Quimbyho kostek. Vytvořil autor.. 22
Obr. 10 – Grimova sada netranzitivních kostek. Vytvořil James Grime.. 23
Obr. 11 – Relační graf hry "Rock, Paper, Scissors, Lizard, Spock". Vytvořil VidTheKid............. 23
Obr. 12 – Vítězné cykly s jednou kostkou. Vytvořil James Grime 24
Obr. 13 – Vítězné cykly se dvěma kostkami. Vytvořil James Grime 25
Obr. 14 – Graf Oskarovy netranzitivní sady kostek. Vytvořil Oskar van Deventer........................ 27
Obr. 15 – Letadlo Fano pro Oskarovu sadu kostek. Vytvořil Richard A. Epstein 28

Obr. 1 NÝVLTOVÁ FIŠÁKOVÁ, Miriam a David PARMA. Sbroušené hleznové kosti tura [Astragaly][fotografie]. In: *Studia archaeologica Brunensia* [online]. Brno: Masarykova univerzita, Filozofická fakulta, 2014, 19(1), s. 116 [cit. 2022-05-28]. ISSN 2336-4505. Dostupné z: doi:11222.digilib/129974

Obr. 2 VERWEIJ, Arjan. Bone [Kostka ve tvaru tyčinky][fotografie]. In: *DICE COLLECTION* [online]. [1990–2022], 10 Jan 2022 [cit. 2022-05-28]. Dostupné z: https://averweij.web.cern.ch/an_rec_ivory.htm

Obr. 10 GRIME, James. [Grime dice][digitální ilustrace]. 2017. *The College Mathematics Journal* [online]. **48**(1), 6. [cit. 2021-04-04]. ISSN 1931-1346. Dostupné z: doi:10.4169/college.math.j.48.1.2. Pro zpřístupnění článku je potřeba být přihlášený například přes školní instituci.

Obr. 11 (VidTheKid). Rock, Paper, Scissors, Lizard, Spock diagram. In: W*ikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 17 April 2009 [cit. 2022-06-22]. Dostupné z: https://upload.wikimedia.org/ wikipedia/commons/f/fe/Rock_Paper_Scissors_Lizard_Spock_en.svg

Obr. 12 GRIME, James. One die[digitální ilustrace]. 2017. *The College Mathematics Journal* [online]. **48**(1), 6. [cit. 2021-04-04]. ISSN 1931-1346. Dostupné z: doi:10.4169/college.math.j.48.1.2. Pro zpřístupnění článku je potřeba být přihlášený například přes školní instituci.

Obr. 13 GRIME, James. Two dice[digitální ilustrace]. 2017. *The College Mathematics Journal* [online]. **48**(1), 6. [cit. 2021-04-04]. ISSN 1931-1346. Dostupné z: doi:10.4169/college.math.j.48.1.2. Pro zpřístupnění článku je potřeba být přihlášený například přes školní instituci.

Obr. 14 DEVENTER, Oskar van. [Oskar dice][digitální ilustrace]. In: Shapeways [online]. New York: Shapeways, c2008–2022, Jan 16, 2016 [cit. 2022-06-27]. Dostupné z: https://www.shapeways.com/forum/t/seven-non-transitive-dice-by-oskar.35719/

Obr. 15 EPSTEIN, Richard A. The Fano plane[digitální ilustrace][online]. 2nd ed. Waltham: Academic Press, 2012 [cit. 2022-06-18]. ISBN 978-0-12-397870-7. Dostupné z: https://international.scholarvox.com/reader/docid/88811774/page/1

SEZNAM TABULEK

Tab. 1 – Barevné znázornění výsledků hodů kostek. Vytvořil autor 18
Tab. 2 – Číselné součty kostek R a kostek O. Vytvořil autor 25
Tab. 3 – Číselné součty kostek B a kostek Y. Vytvořil autor.. 26
Tab. 4 – Číselné součty kostek M. Vytvořil autor.. 26
Tab. 5 – Tabulka Oskarových kostek. Vytvořil Oskar van Deventer 28

Tab. 5 DEVENTER, Oskar van. [Tabulka Oskarových kostek][digitální tabulka]. In: Shapeways [online]. New York: Shapeways, c2008–2022, January 16, 2016 [cit.2022-06-27]. Dostupné z: https://www.shapeways.com/forum/t/seven-non-transitive-dice-by-oskar.35719/