ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

# VÝPOČTY LIMIT POMOCÍ TAYLOROVA ROZVOJE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Sarah Mottlová**
*Přírodovědná studia, obor Matematická studia*

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

**Plzeň 2022**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 28. června 2022

.........................................................
vlastnoruční podpis

Chtěla bych poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za výbornou spolupráci, poskytnutí mnoha cenných připomínek a zejména také za čas a ochotu.

Zároveň bych ráda poděkovala i své rodině za podporu v průběhu celého studia.

# OBSAH


ÚVOD ... 2
1 DEFINICE LIMITY ... 3
1.1 OKOLÍ BODU ... 3
2 LIMITA FUNKCE ... 4
2.1 DEFINICE LIMITY FUNKCE ... 4
2.2 VLASTNOSTI LIMITY FUNKCE ... 7
2.2.1 Jednoznačnost limity funkce ... 7
2.2.2 Souvislost mezi limitou funkce a limitami funkce zprava a zleva ... 7
2.2.3 Algebra limit ... 7
2.2.4 Aritmetické operace s limitami ... 9
2.2.5 Věta o sevření ... 9
2.2.6 Součin omezené funkce a funkce s limitou rovnou nule ... 9
2.2.7 Limita složené funkce ... 9
2.3 LANDAUOVA NOTACE ... 10
2.3.1 Landauovy symboly ... 10
2.3.2 Algebra malého ó ... 11
2.4 VÝPOČET LIMITY FUNKCE ... 12
2.4.1 Mocninné funkce ... 12
2.4.2 Polynomická funkce ... 13
2.4.3 Racionální funkce ... 14
2.4.4 Iracionální funkce ... 17
2.4.5 Exponenciální a logaritmické funkce ... 18
2.4.6 Goniometrické, cyklometrické a hyperbolické funkce ... 19
2.4.7 L'Hospitalovo pravidlo ... 21
3 TAYLORŮV ROZVOJ ... 26
3.1 PRVNÍ A DRUHÝ VZOREC PRO KONEČNÉ PŘÍRŮSTKY ... 28
3.2 DEFINICE TAYLOROVÝCH ROZVOJŮ ... 29
3.2.1 Obecný Taylorův rozvoj s Peanovým zbytkem řádu n ... 31
3.2.2 Obecný Taylorův rozvoj s Lagrangeovým zbytkem řádu n ... 31
3.2.3 Maclaurinův rozvoj ... 31
3.3 TAYLOROVY ROZVOJE ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ ... 31
3.3.1 Exponenciální funkce ... 32
3.3.2 Logaritmické funkce ... 33
3.3.3 Goniometrické, cyklometrické a hyperbolické funkce ... 34
3.3.4 Mocninné funkce ... 37
3.4 POČÍTÁNÍ S TAYLOROVÝMI ROZVOJI ... 39
3.4.1 Součet a rozdíl Taylorových rozvojů ... 39
3.4.2 Součin Taylorových rozvojů ... 39
3.4.3 Podíl Taylorových rozvojů ... 41
3.4.4 Taylorův rozvoj složené funkce ... 42
3.4.5 Asymptotické rozvoje ... 43
4 VÝPOČET LIMIT POMOCÍ TAYLOROVA ROZVOJE ... 45
ZÁVĚR ... - 60 -
RESUMÉ ... - 61 -
SEZNAM LITERATURY ... - 62 -
SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ ... - 63 -

## ÚVOD

Limita funkce se řadí mezi jeden ze základních pojmů matematické analýzy. Jedná se totiž o koncept, který nachází mnoho aplikací v diferenciálním a integrálním počtu. Například definice spojitosti funkce je založena na pojmu limity funkce a stejně tak je na tomto konceptu vystavena i definice derivace funkce.

Tato bakalářská práce si klade za cíl shrnout problematiku limit funkcí, uvést různé způsoby jejich výpočtů a zejména poukázat na možnost řešení limit pomocí Taylorových rozvojů. Tento postup, při kterém se využívá aproximace funkce na okolí bodu Taylorovými polynomy, se totiž ukazuje jako efektivní nástroj k řešení limit funkcí. Značná část této práce se tedy zabývá teorií Taylorových rozvojů, pravidly pro operace s nimi a jejich aplikací do problematiky výpočtů limit. Celá jedna kapitola je věnována pouze řešeným příkladům s funkcemi různého typu, v některých z nich dochází i ke srovnání výpočtů limit pomocí Taylorových rozvojů s další významnou metodou v oblasti řešení limit – l'Hospitalovým pravidlem.

První kapitola této bakalářské práce se zabývá definicí limity jako obecného pojmu, a navíc také zavádí pojem okolí bodu. Druhá kapitola se postupně věnuje definování limity funkce, vlastnostem limity, dále definici a vlastnostem Landauových symbolů, a nakonec i výpočtům limity podle druhu funkce. V další části textu je pozornost věnována Taylorovým rozvojům. Tato kapitola nejprve zavádí pojem Taylorových rozvojů s různými tvary zbytků pomocí vzorců pro konečné přírůstky. Dále se zabývá i odvozením mnohých elementárních aproximací funkcí. Na konci této kapitoly se nachází shrnutí pravidel pro matematické operace s Taylorovými rozvoji. Závěrem celé této práce je sada příkladů zaměřujících se na výpočty limit funkcí různého charakteru, při jejichž řešení lze využít aproximace pomocí Taylorových rozvojů.

Výstupem této bakalářské práce by tedy měl být srozumitelný a ucelený výklad využití Taylorových rozvojů pro výpočet limit. Závěrem je nutné konstatovat, že od čtenáře této bakalářské práce se předpokládá předchozí znalost základů matematické analýzy.

# 1 DEFINICE LIMITY

Limita jakožto matematický pojem vyjadřuje, že se hodnoty dané posloupnosti či funkce blíží libovolně blízko ke konkrétnímu bodu. Tento bod je potom označován jako limita posloupnosti či funkce. Formálně se tato skutečnost zapisuje následovně

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

## 1.1 OKOLÍ BODU

Pro zavedení pojmu limity podle Cauchyho definice je zásadní definování jiného matematického pojmu – okolí bodu.

**Definice 1. Okolí bodu $x_0$**

Nechť $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0.$

Potom množinu $\{x \epsilon \mathbb{R}; \mathrm{x}_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$ nazýváme okolí bodu $x_0$. Bod $x_0$ nazýváme střed okolí a číslo δ je poloměrem okolí.

Matematické značení: $\mathrm{U}(\mathrm{x}_0, \delta)$.

(1 str. 107)

Dále je potřeba zaměřit se na funkce, které sice v bodě $x_0$ nejsou definovány, ale mají v něm limitu. V tomto případě se používá redukované okolí bodu místo přímo bodu samotného. Tento typ okolí bodu se formálně označuje jako prstencové okolí bodu $x_0$.

**Definice 2. Prstencové okolí bodu $x_0$**

Nechť $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0.$

Množinu $\{x \epsilon \mathbb{R}; \mathrm{x}_0 - \varepsilon < \mathrm{x} < \mathrm{x}_0 + \varepsilon \wedge \mathrm{x} \neq \mathrm{x}_0\}$ nazýváme prstencové okolí bodu $x_0$.

Matematické značení: $\mathrm{P}(\mathrm{x}_0, \varepsilon)$.

(1 stránky 170–171)

# 2 LIMITA FUNKCE

Tato kapitola se zaměřuje na jeden ze základních nástrojů matematické analýzy, který se využívá zejména v diferenciálním a integrálním počtu – limitu funkce. V této části se budeme věnovat vlastnostem limity funkce a také výpočtům limit v závislosti na typu konkrétní funkce. Nejdříve si ale uvedeme proces definování limity funkce podle Cauchyho a Heineho. Tyto dvě definice jsou si ekvivalentní. Zatímco Cauchyho definice se opírá o pojem okolí bodu, hlavní myšlenkou definice podle Heineho je převést problematiku limity funkce na již známý problém limity posloupnosti. Proto si pro úplnost uvedeme i definici limity posloupnosti.

## 2.1 DEFINICE LIMITY FUNKCE

**Definice 4. Limita posloupnosti**

Řekneme, že

a) posloupnost $(a_n)$ má vlastní limitu $a \in \mathbb{R}$, pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathrm{n}_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: \mathrm{n} > \mathrm{n}_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Matematické značení: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

b) posloupnost $(a_n)$ má nevlastní limitu $+\infty$, pokud platí:

$$\forall \mathrm{h} > 0\ \exists \mathrm{n}_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: \mathrm{n} > \mathrm{n}_0 \Rightarrow \mathrm{h} < a_n.$$

Matematické značení: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

c) posloupnost $(a_n)$ má nevlastní limitu $-\infty$, pokud platí:

$$\forall \mathrm{d} < 0\ \exists \mathrm{n}_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: \mathrm{n} > \mathrm{n}_0 \Rightarrow a_n < \mathrm{d}.$$

Matematické značení: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(2 str. 1)

Nyní je možné přejít k problematice limity funkce, která je hlavním tématem této kapitoly. Cauchyho a Heineho definici doplníme i o definování pojmu nevlastní limita funkce ve vlastním bodě, limita funkce v nevlastním bodě, nevlastní limita funkce v nevlastním bodě a limita funkce v bodě zleva či zprava.

**Definice 5. Funkce**

Nechť je $f$ reálnou funkcí jedné reálné proměnné. Reálnou funkcí reálné proměnné rozumíme každé zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Zapisujeme $y = f(x)$.

(3 str. 37)

**Definice 6. Hromadný bod**

Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazveme hromadným bodem množiny $A \subset \mathbb{R}$, pokud v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů z množiny $A$.

Množinu všech hromadných bodů množiny $A$ značíme $A'$.

(4)

**Definice 7. Cauchyho definice limity**

Říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$, právě tehdy když platí zároveň, že

1. bod $x_0$ je hromadným bodem množiny $A = D(f)$, tj. definičního oboru funkce $f$,
2. ke každému libovolně zvolenému okolí $U(b)$ bodu $b$ existuje redukované (prstencové) okolí $\mathrm{P}(x_0)$ bodu $x_0$ takové, že pro každé $x \in D(f)$ platí implikace $x \in \mathrm{P}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(b)$.

Matematické značení: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

(5 stránky 135–136)

**Definice 8. Heineho definice limity**

Nechť funkce $f$ je definována v jistém okolí bodu $x_0$ pro $x \neq x_0$. Říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ limitu b právě tehdy, když pro každou posloupnost $(x_n)$ platí:

$$(x_n \to x_0 \land x_n \neq x_0) \Rightarrow f(x_n) \to b.$$

Matematické značení: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

(6 str. 1)

Dle obecné Cauchyho definice může nastat devět speciálních případů limity funkce podle toho, zda $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = \pm\infty$, $b \in \mathbb{R}$, $b = \pm\infty$.

a) Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$, potom hovoříme o limitě ve vlastním bodě,

b) je-li $x_0 = \pm\infty$, potom hovoříme o limitě v nevlastním bodě,

c) je-li $b \in \mathbb{R}$, potom hovoříme o vlastní limitě funkce,

d) je-li $b = \pm\infty$, potom hovoříme o nevlastní limitě funkce.

**Definice 9. Vlastní limita ve vlastním bodě $x_0$**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \forall x \in D(f)\ (0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

(5 str. 137)

**Definice 10. Vlastní limita funkce v nevlastním bodě**

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists p > 0: \forall x \in D(f)\ (x > p\ \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon),$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists p > 0: \forall x \in D(f)\ (x < -p\ \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

(5 str. 137)

**Definice 11. Nevlastní limita funkce ve vlastním bodě $x_0$**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall q > 0\ \exists\delta > 0: \forall x \in D(f)\ (0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow f(x) > q),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall q > 0\ \exists\delta > 0: \forall x \in D(f)\ (0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow f(x) < -q).$$

(5 str. 138)

**Definice 12. Nevlastní limita funkce v nevlastním bodě**

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall q > 0\ \exists p > 0: \forall x \in D(f)\ (x > p\ \Rightarrow f(x) > q),$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall q > 0\ \exists p > 0: \forall x \in D(f)\ (x > p\ \Rightarrow f(x) < -q),$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall q > 0\ \exists p > 0: \forall x \in D(f)\ (x < -p\ \Rightarrow f(x) > q),$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall q > 0\ \exists p > 0: \forall x \in D(f)\ (x < -p\ \Rightarrow f(x) < -q).$$

(5 stránky 138–139)

Nyní si rozepíšeme zápis pro limitu funkce zprava a zleva v Heineho stylu.

**Definice 13. Limita funkce v bodě zprava či zleva**

Mějme dánu funkci $f: D \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$, který je hromadným bodem D. Řekneme, že

a) funkce $f$ má limitu zprava $b \in \mathbb{R}^*$ v bodě $x_0$, jestliže pro každou posloupnost $(x_n)$ platí $\left((\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in D \wedge x_n > x_0) \wedge \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b,$

a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = b.$

b) funkce $f$ má limitu zleva $b \in \mathbb{R}^*$ v bodě $x_0$, jestliže pro každou posloupnost $(x_n)$ platí $\left((\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in D \wedge x_n < x_0) \wedge \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b,$

a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = b.$

(6 str. 1)

## 2.2 VLASTNOSTI LIMITY FUNKCE

### 2.2.1 JEDNOZNAČNOST LIMITY FUNKCE

Každá funkce má v bodě nejvýše jednu limitu (limitu zprava, limitu zleva).

(6 str. 1)

### 2.2.2 SOUVISLOST MEZI LIMITOU FUNKCE A LIMITAMI FUNKCE ZPRAVA A ZLEVA

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}^*$ platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = b.$

(6 str. 1)

### 2.2.3 ALGEBRA LIMIT

Pro uvedení aritmetických operací do teorie limit funkcí musíme nejprve rozšířit tyto operace na symboly $\pm\infty$. Řekněme tedy, že platí následující

$+\infty + s = +\infty$ (pokud $s \in \mathbb{R}$ nebo $s = +\infty$),

$-\infty + s = -\infty$ (pokud $s \in \mathbb{R}$ nebo $s = -\infty$),

$\pm\infty \cdot s = \pm\infty$ (pokud $s > 0$ nebo $s = +\infty$),

$\pm\infty \cdot s = \mp\infty$ (pokud $s < 0$ nebo $s = -\infty$),

$\frac{\pm\infty}{s} = \pm\infty$ (pokud $s > 0$),

$\frac{\pm\infty}{s} = \mp\infty$ (pokud $s < 0$),

$\frac{s}{0} = \infty$ (pokud $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$),

$\frac{s}{\pm\infty} = 0$ (pokud $s \in \mathbb{R}$).

Zatímco následující výrazy nejsou definovány

$\pm\infty + (\mp\infty)$,

$\pm\infty - (\pm\infty)$,

$\pm\infty \cdot 0$,

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$,

$\frac{0}{0}$.

(7 str. 96)

Tyto výrazy bývají v literatuře nejčastěji označovány jako neurčité. Existují ale i autoři, kteří toto dle nich historické označení zavrhují. Černý (2002) argumentuje, že tento termín byl zaveden již za doby života slavných matematiků, kterými byli například sir Isaac Newton, Guillaume François Antoine de l'Hospital či Gottfried Wilhelm von Leibniz. V té době se ale způsob uvažování od nynějšího zásadně odlišoval. Když se začaly limity funkcí počítat, převládala snaha nahradit počítání limity dosazením, což ale není obecně možné. Pokud limitu nahradíme zapsáním symbolu $\frac{0}{0}$ a nazveme jej neurčitým výrazem, příklad tím neřešíme, a naopak se spíše oddalujeme vyřešení problému. Černý (2002) dále také uvádí triviální protipříklad v podobě podílu $\frac{\sin(\alpha x)}{x}$, který má tabulkově v bodě 0 limitu $\alpha$, což může být jakékoli reálné číslo. Pokud bychom tento podíl označili jako neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, nic bychom tím nezískali. Neexistuje totiž žádná obecná věta, že limita podílu je rovná podílu jednotlivých limit. Černý (2002) proto tedy tyto výrazy neoznačuje jako neurčité, ale jako nesmyslné.

### 2.2.4 ARITMETICKÉ OPERACE S LIMITAMI

Mějme dány funkce $f$ a $g$, které mají stejný definiční obor $D$ a mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}^*.$$

Potom platí:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$, pokud je pravá strana definována,

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \,.\, g(x)) = a \cdot b$, pokud je pravá strana definována,

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, pokud $\forall x \in D$: $g(x) \neq 0$ a pokud je pravá strana definována.

(6 str. 1)

### 2.2.5 VĚTA O SEVŘENÍ

Mějme dány funkce $f, g$ a $h$ se stejným definičním oborem $D$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Dále předpokládejme, že platí

a) $\exists \delta > 0 \ \forall x \epsilon D \cap P(x_0, \delta)$: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

Potom sevřená funkce $g$ má také limitu v bodě $x_0$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$.

(6 str. 2)

### 2.2.6 SOUČIN OMEZENÉ FUNKCE A FUNKCE S LIMITOU ROVNOU NULE

Jestliže je funkce $g$ omezená a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \,.\, g(x) = 0$.

(6 str. 2)

### 2.2.7 LIMITA SLOŽENÉ FUNKCE

Mějme dány funkce $f$ a $g$ tak, že $H(g) \subset D(f)$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takový, že platí

a) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}^*$,

b) $\lim\limits_{y \to a} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$,

c) $f(a) = b$ nebo $\exists \delta > 0 \ \forall x \epsilon D(g) \cap P(x_0, \delta)$: $g(x) \neq a$.

Potom $\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = b$.

(6 str. 2)

## 2.3 LANDAUOVA NOTACE

Tato podkapitola se zabývá porovnáváním chování dvou funkcí v okolí téhož bodu. Pro tento účel je potřeba zavést Landauovy symboly, které usnadňují popis možných typů chování funkcí. Zejména důležité je porovnání mezi funkcemi jdoucími k $0$ nebo k $\infty$.

(7 str. 123)

### 2.3.1 LANDAUOVY SYMBOLY

Pomocí $c$ označujeme jakýkoliv ze symbolů $x_0$(reálné číslo), $x_0^+$, $x_0^-$, $+\infty$ nebo $-\infty$. Okolím $c$ myslíme okolí konkrétního již definovaného symbolu.

Nechť $f$ a $g$ jsou dvě funkce definované na okolí $c$, výjimkou může být pouze samotný bod $c$ (potom se jedná o prstencové okolí bodu $c$). Nechť také $g(x) \neq 0$ pro $x \neq c$. Předpokládejme, že limita

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

existuje, ať už je konečná či nikoliv. Za těchto podmínek uvedeme následující definici:

Pokud je $l$ konečné, říkáme, že $f$ je omezená ve srovnání s funkcí $g$ pro $x$ jdoucí k $c$, a budeme pro to používat zápis

$$f = O(g), \qquad x \to c.$$

Zápis čteme jako „f je velké ó ke g pro x jdoucí k c“.

(7 str. 123)

Tuto vlastnost lze upřesnit rozlišením tří možných variant:

a) Pokud je $f$ konečná a nenulová funkce, říkáme, že $f$ je stejného řádu jako $g$ pro $x$ jdoucí k $c$, a píšeme

$$f \asymp g, \qquad x \to c.$$

b) Pokud $l = 1$, nazýváme $f$ ekvivalentní ke $g$ pro $x$ jdoucí k $c$. V tomto případě píšeme

$$f \sim g, \qquad x \to c.$$

c) Pokud $l = 0$, říkáme, že $f$ je nekonečně malá vzhledem ke $g$ pro $x$ jdoucí k $c$. Pro tuto situaci používáme symbol

$$f = o(g), \qquad x \to c,$$

který čteme „f je malé ó ke g pro x jdoucí k c“.

Symboly $O$, $\asymp$, $\sim$ a $o$ se nazývají Landauovy symboly.

(7 str. 124)

**Příklad:**

Porovnejme mocniny $x^n$ pro $x \to 0$:

$$x^n = o(x^m), \qquad x \to 0, \qquad \Leftrightarrow \; n > m.$$

Skutečně $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim\limits_{x\to 0} x^{(n-m)} = 0$ pouze v případě, že $n - m > 0$. Z toho plyne, že pro $x$ jdoucí k 0 je větší ze dvou mocnin zanedbatelná.

Nyní se zaměříme na limity, kdy $x \to \pm\infty$

$$x^n = o(x^m), \qquad x \to \pm\infty, \qquad \Leftrightarrow \; n < m.$$

Tedy pro $x \to \pm\infty$ je menší ze dvou mocnin zanedbatelná.

(7 str. 126)

### 2.3.2 ALGEBRA MALÉHO Ó

a) $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$;

b) $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^p)$, kde $p = min(n, m)$;

c) $o(\lambda x^n) = o(x^n)$, pro každé $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

d) $\varphi(x) o(x^n) = o(x^n)$, pokud je $\varphi$ omezeno v okolí bodu $x = 0$;

e) $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$;

f) $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})$;

g) $[o(x^n)]^k = o(x^{kn})$;

(7 stránky 126–127)

h) $f(x) = o(h(x), g(x) = o\big(h(x)\big) \Rightarrow f(x) \pm g(x) = o\big(h(x)\big)$;

i) $f(x) = o(h(x), g(x) = o\big(k(x)\big) \Rightarrow f(x)g(x) = o(h(x)k(x))$;

j) $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ : f(x) = o\big(h(x)\big) \Rightarrow f(x^\alpha) = o\big(h(x^\alpha)\big)\, pro\ x \to 0_+\ a\ pro\ x \to +\infty.$

(3 str. 71)

Pro „malé ó“ platí i tyto následující vztahy, přičemž $\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{R}$

a) $x = o(e^x), \ln x = o(x)\ pro\ x \to +\infty$;

b) $x^\beta = o(e^{\alpha x})\ pro\ \ x \to +\infty$;

c) $\ln^\beta x = o(x^\alpha)\ pro\ \ x \to +\infty$;

d) $|\ln x|^\beta = o(x^{-\alpha})\ pro\ x \to 0_+$;

e) $\alpha < \beta \Rightarrow e^{\alpha x} = o\big(e^{\beta x}\big)\ pro\ x \to +\infty$;

f) $\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow e^{\alpha x} = o\big(e^{\beta x^2}\big)\ pro\ x \to +\infty.$

(3 stránky 71–72)

## 2.4 VÝPOČET LIMITY FUNKCE

Tato část bude zaměřená na výpočet limit funkcí podle jejich typu. Jedná se o rozdělení pro větší přehlednost, dané příklady jsou pouze ilustračního charakteru, a neposkytují tedy výčet všech možností výpočtů limit.

### 2.4.1 MOCNINNÉ FUNKCE

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom každá funkce tvaru $f(x) = x^\alpha$ se nazývá mocninná funkce.

(1 str. 189)

Pro limitu mocninné funkce platí:

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty, a < 0, \\ 1, a = 0, \\ 0, a > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0, a < 0, \\ 1, a = 0, \\ +\infty, a > 0. \end{cases}$$

(7 str. 101)

**Příklad 1:**

$$\lim_{x\to 0^+}(x^2 - 5)$$

Řešení: Pro výpočet využijeme výše uvedených vlastností limity funkce. Z tvrzeních o limitě mocninné funkce plyne

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$$

Od mocninné funkce $x^2$ se navíc odečítá konstantní funkce $5$. Na celý výraz můžeme aplikovat větu o limitě součtu, respektive rozdílu. Dostáváme tedy řešení

$$\lim_{x\to 0^+}(x^2 - 5) = 0 - 5 = -5.$$

**Příklad 2:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^5} + 3\right)$$

Nejprve si výraz $\frac{1}{x^5}$ upravíme do tvaru $x^\alpha$, získáváme tedy mocninnou funkci $x^{-5}$, kde mocnitel $\alpha = -5$. Dle výše uvedených tvrzení platí

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-5} = 0.$$

Nyní postupujeme jako v předchozím příkladě a za využití věty o limitě součtu získáváme následující řešení

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^5} + 3\right) = 0 + 3 = 3.$$

### 2.4.2 POLYNOMICKÁ FUNKCE

Nechť polynomická funkce je zadána ve tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0.$$

Z takto zadaných výrazů získáme pro $x \to \pm\infty$ po dosazení různé podoby „neurčitého výrazu“ $\pm\infty + (\mp\infty)$. Konkrétní podoba výrazu se řídí znaménky u koeficientů a mocninami $x$. Problém řešíme vytknutím nejvyšší mocniny $x$

$$P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Výraz v závorce konverguje k $a_n$ pro $x \to \pm\infty$, pro limitu potom platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n = \infty.$$

Při tomto postupu snadno nalezneme znaménko výsledku.

(7 str. 100)

**Příklad 1:**

$$\lim_{x\to-\infty}(-7x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 8x - 11)$$

Řešení: Nejvyšší mocninou $x$ v této polynomické funkci je $x^5$, tento výraz tedy vytkneme. Dále postupujeme podle výše uvedených tvrzení. Nakonec dostáváme řešení

$$\lim_{x\to-\infty} x^5 \left(-7 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^4} - \frac{11}{x^5}\right) = \lim_{x\to-\infty}(-7x^5) = +\infty.$$

### 2.4.3 RACIONÁLNÍ FUNKCE

Nechť $f(x) = \frac{P_{n(x)}}{Q_m(x)}$ je racionální funkce, kde $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně $n$ a $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ je polynom stupně $m$.

Pokud po dosazení vlastního bodu $x_0$ bude limita rovná „neurčitému výrazu“ $\frac{0}{0}$, je potřeba využít algebraických úprav a vytknout z obou polynomů kořenový činitel $(x - x_0)$. Tyto výrazy potom zkrátíme a přejdeme k výpočtu jiné limity

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)P_1(x)}{(x - x_0)Q_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

(8 str. 63)

Pro limitu v nevlastním bodě $x \to \pm\infty$ se v limitovaném výrazu objevuje „neurčitý výraz“ $\frac{\infty}{\infty}$. U racionálních funkcí využijeme stejné techniky jako u polynomických funkcí. Z obou polynomů tedy vytkneme nejvyšší mocninu $x$. Z toho plyne následující tvrzení

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \infty\ pokud\ n > m, \\ \dfrac{a_n}{b_m}\ \ pokud\ n = m, \\ 0\ pokud\ n < m. \end{cases}$$

(7 str. 100)

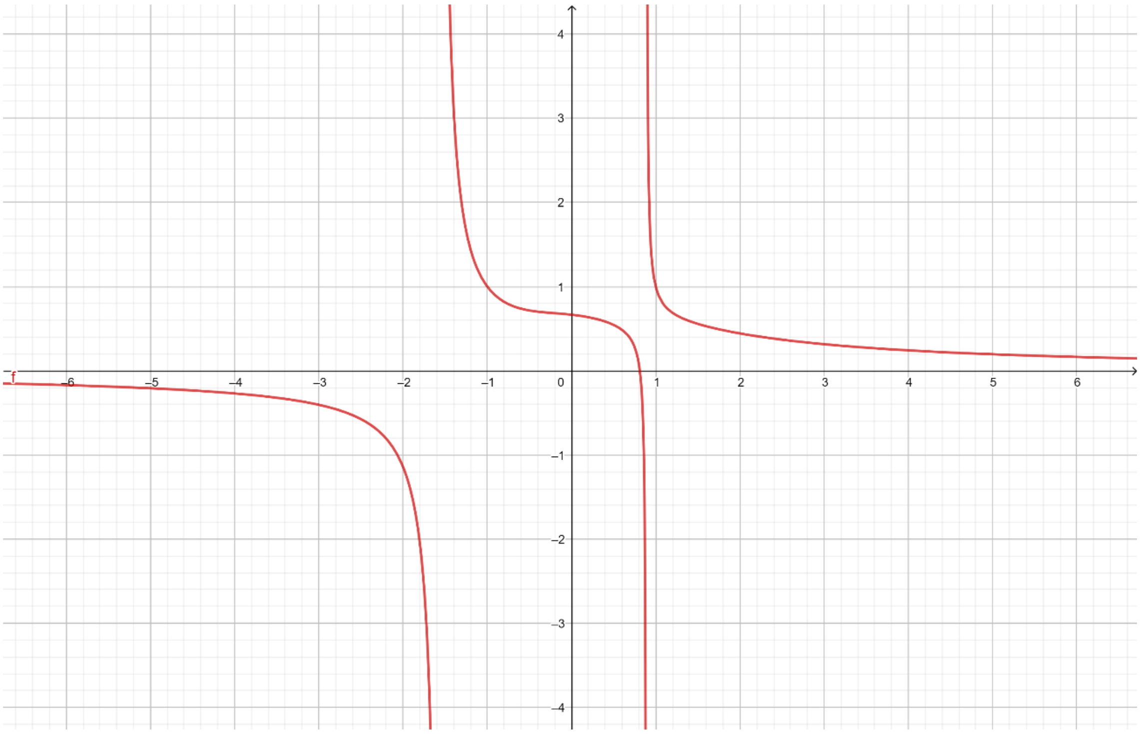
**[1]Příklad 1:**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$$

Řešení: Po dosazení vlastního bodu $x_0 = 1$ dostáváme „neurčitý výraz“ $\frac{0}{0}$. Bod $x_0 = 1$ tedy musí být kořenem obou polynomů, z toho plyne, že můžeme vytknout příslušný kořenový činitel $(x - 1)$ z obou polynomů. Po zkrácení těchto výrazů získáváme limitu, do které už můžeme dosadit a dopočítat výsledek limity

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x - 3)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^3 + x^2 + x - 2)}{(x^4 + x^3 + x^2 + x - 3)} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{1} = 1.$$

[1] Příklad 420 z (9)




Obrázek 1. Graf funkce $f(x) = \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$

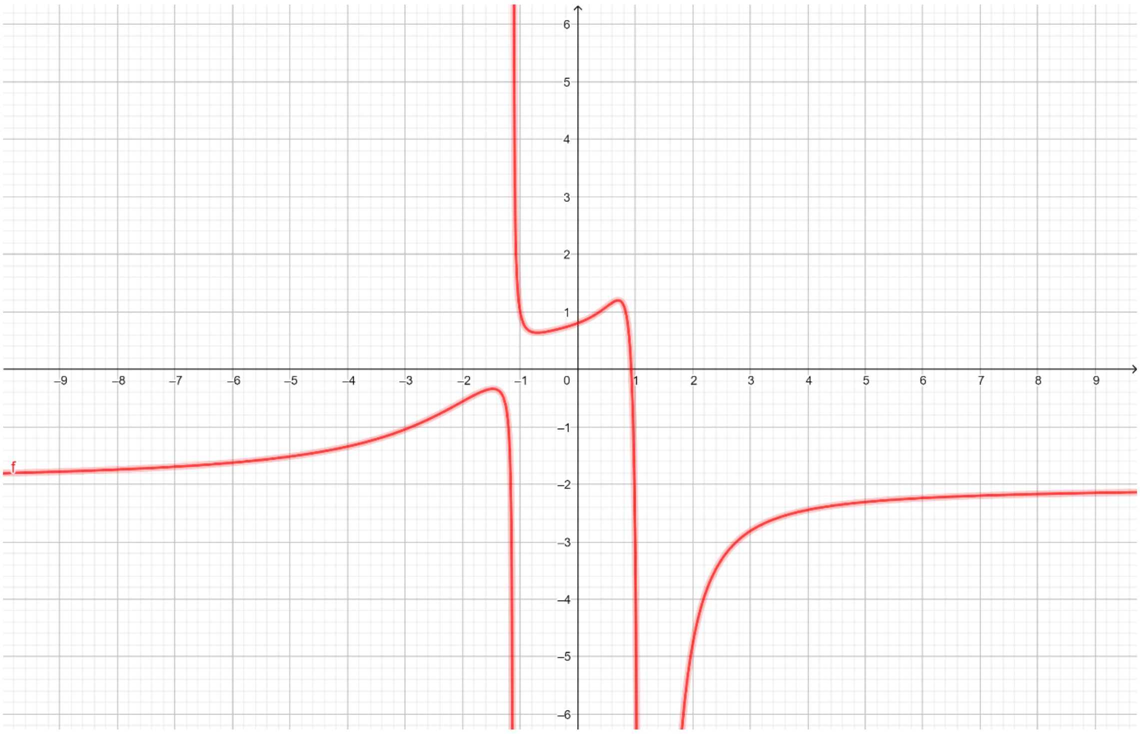
**Příklad 2:**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5+3x^4+8x^2-12}{-2x^5-3x^3+12x^2+7x-15}$$

Řešení: Tuto limitu tvaru „neurčitého výrazu“ $\frac{\infty}{\infty}$ řešíme vytknutím $x$ s největším exponentem z čitatele i jmenovatele. V obou případech se jedná o výraz $x^5$, ten se tedy zkrátí, a následně dostáváme limitu, kterou už je možné vyřešit dosazením

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5+3x^4+8x^2-12}{-2x^5-3x^3+12x^2+7x-15} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(4+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^3}-\frac{12}{x^5}\right)}{x^5\left(-2-\frac{3}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{7}{x^4}-\frac{15}{x^5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{-2} = -2.$$



Obrázek 2. Graf funkce $f(x) = \frac{4x^5+3x^4+8x^2-12}{-2x^5-3x^3+12x^2+7x-15}$

### 2.4.4 IRACIONÁLNÍ FUNKCE

Iracionální funkce jsou funkce, ve kterých se vyskytuje výraz pod odmocninou. Pokud se při řešení limity v bodě $x_0$ po dosazení objeví „neurčitý výraz“ $\frac{0}{0}$, je potřeba zlomek vhodně rozšířit výrazem, který zajistí krácení. Při počítání limit iracionálních funkcí se většinou využívá znalosti základních algebraických vzorců.

(8 str. 65)

**[2]Příklad 1:**

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

V čitateli i jmenovateli dostáváme po dosazení 0, jedná se tedy o „neurčitý výraz“ $\frac{0}{0}$. Nejdříve zlomek rozšíříme výrazem ze jmenovatele, pouze u něj změníme znaménko. Po roznásobení čitatele i jmenovatele výrazem $\left(\sqrt{x}+2\right)$ ve zlomku ale nelze krátit. Zlomek tedy rozšíříme i výrazem $\left(\sqrt{1+2x}+3\right)$, následně už dostáváme v čitateli i jmenovateli výraz $(x-4)$, který zkrátit lze. Příklad dořešíme dosazením bodu $x_0$

[2] Příklad 437 z (9)

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(2x-8)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)(x-4)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

### 2.4.5 EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ FUNKCE

Exponenciální funkce má předpis $f(x)=a^x$, kde $a>0$ a $a\in\mathbb{R}$.

Inverzní funkci k exponenciální funkci nazýváme logaritmická funkce, pro tu platí předpis $f(x)=\log_a x$, kde $a>0$, $a\neq 1$ a $a\in\mathbb{R}$.

(1 stránky 190–191)

Pro exponenciální a logaritmické funkce platí několik následujících základních limit:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ pro $a>1$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ pro $a<1$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x=-\infty$ pro $a>1$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x=+\infty$ pro $a<1$.

(7 str. 101)

S limitami exponenciálních a logaritmických funkcí souvisí ještě několik dalších vztahů. Platí následující

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Úpravami tohoto vzorce lze získat vztahy pro několik dalších fundamentálních limit. Substitucí $y=\frac{x}{a}$, kde $a\neq 0$, získáváme

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ay}=\left[\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^a=e^a.$$

V případě substituce $y=\frac{1}{x}$ dostáváme tento vztah

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e.$$

Spojitosti logaritmické funkce poskytuje další fundamentální limitu pro jakékoli $a > 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Speciální případem je limita pro $a = e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Dále platí, že $a^x - 1 = y$ je ekvivalentní s $x = \log_a(1+y)$ a $y \to 0$ pro $x \to 0$. Touto substitucí dostáváme vzorec

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{a} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \left[\lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}\right]^{-1} = \ln a.$$

Za podmínky, že $a = e$, získáme vztah

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e} = 1.$$

Nyní položíme $1 + x = e^y$. Vzhledem k tomu, že $y \to 0$, pokud $x \to 0$, platí pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y} - 1}{y}\cdot\frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y\to 0}\frac{(e^\alpha)^y - 1}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y - 1} =$$

$$= \ln e^\alpha = \alpha.$$

Poslední vztah vyplývá ze spojitosti exponenciální funkce

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c}[g(x)\ln f(x)]}.$$

(7 stránky 105–107)

**2.4.6 GONIOMETRICKÉ, CYKLOMETRICKÉ A HYPERBOLICKÉ FUNKCE**

Pro limity goniometrických a cyklometrických funkcí v bodě platí, že pokud v daném bodě jsou definované, potom se limita rovná funkční hodnotě v tomto bodě. Cyklometrické funkce $\arcsin x$ a $\arccos x$ mají v bodě $x_0 = -1$ pouze limitu zprava a v bodě $x_0 = 1$ pro ně existuje jen limita zleva. Platí také, že v nevlastním bodě goniometrické funkce limitu nemají.

(8 str. 68)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{tg} x$ neexistují;

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{\pm}} \operatorname{tg} x = \mp\infty, \forall k \in \mathbb{Z}$;

$\lim\limits_{x\to\pm 1} \arcsin x = \pm\frac{\pi}{2} = \arcsin(\pm 1)$;

$\lim\limits_{x\to +1} \arccos x = 0 = \arccos 1$, $\lim\limits_{x\to -1} \arccos x = \pi = \arccos(-1)$;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\dfrac{\pi}{2}.$

(7 str. 102)

Existuje ještě několik fundamentálních limit obsahujících goniometrické, hyperbolické či cyklometrické funkce

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{argsinh} x}{x} = 1;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(3 str. 42)

U goniometrických a cyklometrických funkcí může po dosazení bodu $x_0$ také dojít ke vzniku „neurčitého výrazu“ $\frac{0}{0}$. Funkci je potom potřeba upravit vhodným krácením nebo rozšířením zlomku či využít k úpravám goniometrické vzorce. Funkce ale musí zůstat v bodě $x_0$ definována.

(8 stránky 68–69)

**[3]Příklad 1:**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2(\sin x)^2 + \sin x - 1}{2(\sin x)^2 - 3\sin x + 1}$$

Řešení: Zkusíme-li dosadit bod $x_0$, získáme „neurčitý výraz“ $\frac{0}{0}$, výraz tedy potřebujeme vhodně upravit. Pro zjednodušení zavedeme substituci $a = \sin x$ a nalezneme faktory kvadratických trojčlenů. V čitateli tedy získáme trojčlen $(2a^2 + a - 1)$ a ve jmenovateli trojčlen $(2a^2 - 3a + 1)$. Určením diskriminantů se dopočteme k rozkladu obou

[3] Příklad 493 z (9)

kvadratických trojčlenů na kořenové činitele. V čitateli dostaneme součin $2\left(a-\frac{1}{2}\right)(a+1)$ a ve jmenovateli součin $2\left(a-\frac{1}{2}\right)(a-1)$. V celém zlomku tedy můžeme zkrátit výraz $2\left(a-\frac{1}{2}\right)$ a zůstane nám limita, u které již můžeme provést zpětnou substituci a dosadit

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2(\sin x)^2+\sin x-1}{2(\sin x)^2-3\sin x+1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2a^2+a-1}{2a^2-3a+1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\left(a-\frac{1}{2}\right)(a+1)}{2\left(a-\frac{1}{2}\right)(a-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(a+1)}{(a-1)}==\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+1}{\sin x-1}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}=-3.$$

**[4]Příklad 2:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$$

Řešení: Tato limita povede na fundamentální limitu $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Výraz stačí vhodně rozšířit v tomto případě číslem 5. Dostáváme řešení

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

### 2.4.7 L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

L'Hospitalovo pravidlo jako nástroj k limitování funkcí využívá derivací funkcí. Výpočet limit některých funkcí může tento aparát velmi usnadnit, použít l'Hospitalovo pravidlo je ale možné jen v jistých případech, o nichž hovoří následující věta.

**Věta. L'Hospitalovo pravidlo**

Nechť $f$ a $g$ jsou funkce definované na okolí bodu $x_0$, výjimkou může být pouze samotný bod $x_0$, a platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=L,$$

kde $L=0$, $+\infty$ nebo $-\infty$.

---

[4] Příklad 471 z (9)

Pokud platí, že

a) $f$ a $g$ jsou diferencovatelné na okolí bodu $x_0$ (výjimkou může být pouze samotný bod $x_0$),

b) $g' \neq 0$,

c) existuje limita (konečná nebo nevlastní)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potom existuje i limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

která se rovná předcházející limitě.

Platí tedy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(7 str. 198)

Analogická tvrzení platí i pro limitu zprava v bodech $x_0 < +\infty$ a zleva v bodech $x_0 > -\infty$.

(3 str. 65)

L'Hospitalovo pravidlo lze užít vícekrát, podmínkou je, aby předpoklady splňovaly nejen funkce $f$, $g$, ale i jejich další derivace $f'$, $g'$, $f''$, $g''$, $\cdots$ . Potom platí například

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)},$$

existuje-li poslední limita.

(3 str. 65)

Pokud se při pokusu o aplikaci l'Hospitalova stane, že limita podílu derivací zadaných funkcí neexistuje, l'Hospitalovo pravidlo nelze použít. Neznamená to ale, že limita zadaného podílu funkcí neexistuje.

(7 str. 199)

**[5]Příklad 1:**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$$

Řešení: L'Hospitalovo pravidlo nelze použít, protože limita podílu derivací $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje. Limita této funkce ale existuje. Pokud čitatel i jmenovatel rozšíříme výrazem $\frac{1}{x}$, získáme v čitateli výraz $\left(1-\frac{1}{x}\sin x\right)$ a ve jmenovateli výraz $\left(1+\frac{1}{x}\sin x\right)$. Tato úprava již zajišťuje možnost dopočtení limity. Výrazy $(\pm\frac{1}{x}\sin x)$ jsou totiž součinem funkce, jejíž limita je rovna nule, a omezené funkce. Dostáváme tedy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{1}{x}\sin x}=\frac{1}{1}=1.$$

Aplikací l'Hospitalova pravidla získáváme i několik fundamentálních limit

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}|x|^\alpha e^x=0, \forall\alpha\in\mathbb{R};$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,\ \lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=0, \forall\alpha>0.$

(7 str. 199)

Pomocí l'Hospitalova pravidla lze počítat nejen některé limity podílů, vhodnými úpravami lze totiž na tvar podílu uzpůsobit i některé limity součinů a rozdílů. Například označíme-li $F=\frac{1}{f}$ a $G=\frac{1}{g}$, jsou možné tyto úpravy

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{F(x)}-\frac{1}{G(x)}=\frac{G(x)-F(x)}{F(x)G(x)},$$

$$fg=\frac{f}{G}=\frac{g}{F}.$$

(3 str. 66)

**[6]Příklad 2:**

$$\lim_{x\to1^+}\ln x\ln(1-x)$$

[5] Příklad 1374 z (9)
[6] Příklad 1340 z (9)

Řešení: V zadané limitě vidíme součin dvou logaritmů. Podle výše uvedeného pravidla jej upravíme na podíl. Získáme výraz „ $\frac{0}{0}$ “. Následně tedy aplikujeme l'Hospitalovo pravidlo a provedeme derivaci čitatele i jmenovatele. Následnými drobnými úpravami nalezneme výsledek zadané limity

$$\lim_{x\to 1^+} \ln x \ln(1-x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1-x)}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{(1-x)(-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-1} = 0.$$

**[7]Příklad 3:**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Řešení: Pro výpočet této limity využijeme již uvedené tvrzení týkající se limity funkce ve tvaru $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$. Za pomocí vztahu $h(x) = g(x)\ln f(x)$ vytvoříme funkci $h(x)$, vypočteme její limitu v bodě $x_0$, a tím získáme i výsledek původní limity. Platí totiž následující tvrzení

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = A \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0\; pro\; A = -\infty, \\ e^A\; pro\; A \in \mathbb{R}, \\ +\infty\; pro\; A = +\infty. \end{cases}$$

Když do limity funkce $h(x)$ zkusíme dosadit, zjistíme, že se jedná o limitu tvaru „ $\frac{0}{0}$ “. Pokusíme se tedy na limitu aplikovat l'Hospitalovo pravidlo. Postupným krácením výrazu nakonec získáme limitu, do které je již možné dosadit bod $x_0$. Výsledkem limity funkce $h(x)$ je reálné číslo $A = 2$, pro původní limitu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$ platí, že jejím výsledkem je $e^A = e^2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{(1+x)} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

[7] Příklad 6.55 z (3)

**[8]Příklad 4:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^4}$$

Řešení: Při dosazení bodu $x_0$ do výrazu odpovídá limita tvaru „ $\frac{0}{0}$ “. K výpočtu tedy zvolíme opakovanou aplikaci l’Hospitalova pravidla. Ve jmenovateli vidíme člen $x^4$, abychom tedy odstranili problematické $x$ ze jmenovatele, musíme čtyřikrát snížit mocninu $x$. L’Hospitalovo pravidlo budeme muset použít čtyřikrát, protože k jinému krácení $x$ kvůli přítomnosti výrazu $\cos x$ v čitateli nedojde. Po čtyřnásobné aplikaci l’Hospitalova pravidla dostáváme limitu, do které je již možné dosadit a výsledkem limity funkce je následující

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + xe^{-\frac{1}{2}x^2}}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x + e^{-\frac{1}{2}x^2} - x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}}{12x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^{-\frac{1}{2}x^2} - 2xe^{-\frac{1}{2}x^2} + x^3e^{-\frac{1}{2}x^2}}{24x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - 3xe^{-\frac{1}{2}x^2} + x^3e^{-\frac{1}{2}x^2}}{24x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 3e^{-\frac{1}{2}x^2} + 3x^2e^{-\frac{1}{2}x^2} + 3x^2e^{-\frac{1}{2}x^2} - x^4e^{-\frac{1}{2}x^2}}{24} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}(x^4 - 6x^2 + 3)}{24} = \frac{1 - 1\cdot 3}{24} = \frac{-1}{12}.$$

L’Hospitalovo pravidlo se zdá být velmi užitečným nástrojem pro výpočet některých limit. Avšak jak ukazuje předcházející příklad, někdy je potřebná opakovaná aplikace a každým derivováním dostáváme složitější zlomek, než byl ten původní. Pro některé limity bychom tedy potřebovali rychlejší a méně náročný postup řešení, než který poskytuje l’Hospitalovo pravidlo.

[8] Příklad 6.03 z (3)

# 3 TAYLORŮV ROZVOJ

Problém za závěru předešlé kapitoly nám mohou pomoci vyřešit Taylorovy rozvoje funkcí v okolí reálného bodu $x_0$. V této části se budeme nejdříve věnovat definování aproximace funkcí pomocí Taylorových polynomů, dále si uvedeme Taylorovy rozvoje některých základních funkcí a pravidla algebraických operací s Taylorovými rozvoji. Nakonec se budeme soustředit na využití metody Taylorových rozvojů pro výpočet limit.

Taylorův rozvoj funkce v okolí reálného bodu $x_0$ je vyjádřením této funkce pomocí součtu polynomu stupně $n$ a funkcí nekonečně malou řádu vyššího než n-tého. Taylorovy polynomy slouží jako velmi efektivní nástroj z kvalitativního i kvantitativního hlediska. V dostatečně malém okolí bodu $x_0$ můžeme jakkoli složitou funkci aproximovat pomocí polynomů, které jsou mnohem výhodnější pro další matematické operace, mezi něž náleží i výpočet limity funkce. Dále je možné kombinovat Taylorovy rozvoje elementárních funkcí a vystavit z nich i mnohem složitější výrazy pomocí pravidel, která nejsou příliš rozdílná od pravidel pro operace s polynomy.

(7 str. 223)

Před samotným uvedením do problematiky Taylorových rozvojů by bylo vhodné uvést profil autora této teorie. Metoda Taylorových rozvojů nese jméno po anglickém matematikovi jménem Brook Taylor. Zároveň se v rámci této problematiky zasloužil i skotský matematik Colin Maclaurin, jenž se zaměřoval na speciální případ Taylorových rozvojů na okolí bodu $x_0 = 0$. Uvedeme si tedy životopisné shrnutí obou významných matematiků.

**Brook Taylor**

Brook Taylor (18. srpna 1685 – 29. prosince 1731) byl anglickým matematikem, který svým dílem z roku 1715 s titulem *Methodus incrementorum directa et inversa* obohatil současnou matematiku o nové odvětví – „kalkulu konečných diferencí“. Dále v této publikaci představil integraci po částech a pro tuto práci zásadní řady známe jako Taylorovy rozvoje. Taylor ovšem nebyl prvním, kdo tyto rozvoje objevil. James Gregory, Newton, Leibniz, Johann Bernoulli a de Moivre všichni objevili nezávisle na sobě nějakou variaci Taylorovy věty.

(9)

Dopisy mezi Taylorem a matematiky Machinem a Kiellem dávají možnost nahlédnout do Taylorových názorů na různé matematické problémy. Taylor byl dokonce v roce 1712 zvolen do Královské společnosti (*Royal Society for the Improvement of Natural Knowledge*) spíše na základě expertíz z těchto dopisů než v návaznosti na skutečně publikovaná díla. Například v roce 1712 obdržel Machin od Taylora dopis s řešením problematiky Keplerova druhého zákona.

(9)

**Colin Maclaurin**

Skotský matematik Colin Maclaurin, známý zejména publikací prvního systematického výkladu Newtonových metod, žil mezi lety 1698 a 1746. Maclaurin své dvousvazkové „pojednání o derivacích“ s originálním názvem *Treatise of Fluxions* uveřejnil v reakci na Berkeleyho kritiku diferenciálního a integrálního počtu. Irský filozof George Berkeley považoval základy, na kterých se staví teorie diferenciálního a integrálního počtu, za nedostatečné a nepřesné. Maclaurin se v zájmu vystavení pevných základů pro Newtonův kalkulus odkazoval na geometrické metody používané ve starověkém Řecku a také na Archimédovu eliminační metodu. Právě v *Treatise of Fluxions* používá Maclaurin speciální případ Taylorových řad na okolí bodu 0, které nyní známe pod pojmem Maclaurinovy řady.

(10)

Maclaurinovo jméno ale nesou i další objevy matematiky. Leonhard Euler a Colin Maclaurin okolo roku 1735 nezávisle na sobě objevili vzorec pro rozdíl integrálu a související řady. Euler–Maclaurinův vzorec lze využít k aproximaci integrálu konečnými součty či opačně k určení konečného součtu pomocí integrálního počtu. Colin Maclaurin je také spojovaný s objevem integrálního kritéria konvergence nekonečné řady s nezápornými členy. Někteří autoři toto kritérium nazývají Maclaurinovo-Cauchyho kritérium, protože jeho objev je připisován stejně tak i francouzskému matematikovi Augustinovi Louisi Cauchymu.

(10)

Colin Maclaurin se zabýval nejen četnými publikacemi v oblasti matematického výzkumu, byl totiž také velmi ceněným učitelem na Edinburské univerzitě.

(10)

## 3.1 PRVNÍ A DRUHÝ VZOREC PRO KONEČNÉ PŘÍRŮSTKY

Před samotným zavedením aproximace funkce $f$ na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ pomocí Taylorových polynomů je nutné uvést první a druhý vzorec pro konečné přírůstky (*first and second finite increment formulas*), které vyjadřují vztah mezi derivací funkce a Landauovými symboly.

Předpokládejme, že funkce $f$ je diferencovatelná v $x_0$. Dle definice derivace funkce platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0),$$

z čehož plyne

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right) = \lim_{x\to x\_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0.$$

S využitím Landauových symbolů lze tuto skutečnost zapsat jako

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0), \qquad x \to x_0.$$

Prvním vzorcem pro konečné přírůstky nazýváme tento vztah

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), \qquad x \to x_0.$$

Pokud označíme $\Delta x = x - x_0$ a $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, můžeme psát i

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0.$$

(7 str. 183)

Nyní uvažujme funkci $f$ spojitou na intervalu $I \in \mathbb{R}$ a diferencovatelnou ve vnitřních bodech tohoto intervalu. Nechť v intervalu $I$ je $x_1 < x_2$ a $f$ je spojitá na $\langle x_1, x_2\rangle$ a diferencovatelná na $(x_1, x_2)$. Potom $f$ na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ splňuje Langrangeovu větu o střední hodnotě, a tak existuje $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ takové, že

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\bar{x}).$$

Druhým vzorcem pro konečné přírůstky nazýváme tento vztah

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2-x_1).$$

(7 str. 184)

## 3.2 DEFINICE TAYLOROVÝCH ROZVOJŮ

Cílem je aproximovat funkci $f$ na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ polynomy postupně vyšších řádů. Nechť $f$ je spojitá v $x_0$. Konstantní polynom stupně nula je potom

$$Tf_{0,x_0}(x) = f(x_0), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

S využitím prvního vzorce pro konečné přírůstky můžeme psát pro funkci $f$ vyjádření

$$f(x) = Tf_{0,x_0}(x) + o(1), \qquad x \to x_0.$$

(7 str. 223)

Funkci $f$ tedy můžeme na okolí bodu $x_0$ aproximovat polynomem nultého stupně takovým způsobem, že rozdíl $f(x) - Tf_{0,x_0}(x)$ (nazývaný také zbytek či chyba aproximace) je nekonečně malý v $x_0$. Chybu aproximace nazýváme v tomto případě Peanův zbytek.

(7 str. 223)

Nyní předpokládejme, že $f$ je nejen spojitá v $x_0$, ale je v tomto bodě i diferencovatelná. Potom Taylorovým polynomem stupně jedna nazýváme následující polynom

$$Tf_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

jehož grafem je tečna k funkci $f$ v bodě $x_0$. S opětovným využitím prvního vzorce pro konečné přírůstky čteme

$$f(x) = Tf_{1,x_0}(x) + o(x - x_0), \qquad x \to x_0.$$

(7 str. 224)

Tento Taylorův vzorec říká, že funkci diferencovatelnou v bodě $x_0$ lze lokálně aproximovat lineární funkcí. Peanův zbytek jakožto chyba aproximace se nejen blíží k nule pro $x \to x_0$, ale je také nekonečně malý řádu vyššího než jedna.

(7 str. 224)

Pokud je $f$ diferencovatelná na okolí bodu $x_0$, výjimkou může být pouze samotný bod $x_0$, využijeme druhý vzorec pro konečné přírůstky. Označíme-li $x_1 = x_0$ a $x_2 = x$, píšeme tento vztah jako

$$f(x) = Tf_{0,x_0}(x) + f'(\bar{x})(x - x_0),$$

kde $\bar{x}$ je vhodně zvolený bod mezi $x_0$ a $x$. V tomto případě dostáváme přesnější vyjádření zbytku, které nám umožní číselně zhodnotit přesnost aproximace. Všechny tři výše uvedené vzorce pro $f(x)$ jsou vzorce Taylorova typu, v prvních dvou zbytek nazýváme Peanův zbytek a v posledním zmíněném se jedná o Lagrangeův zbytek.

(7 str. 225)

Nyní bychom potřebovali najít i vyjádření pomocí kvadratického polynomu s chybou $o((x-x_0)^2),\ \ x \to x_0$. Ekvivalentně tedy hledáme reálné číslo $a$ takové, že

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2), \qquad x \to x_0.$$

Z toho vyplývá, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0.$$

Dle l'Hospitalova pravidla tato limita platí, pokud

$$\lim_{x \to x\_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2a(x-x_0)}{2(x-x_0)} = 0,$$

$$\lim_{x \to x_0} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - a \right) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = a.$$

Vyjádření $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2), x \to x_0$ je tedy platné, pokud je $f$ dvakrát diferencovatelná v $x_0$. Koeficient $a$ je potom rovný výrazu $\frac{1}{2}f''(x_0)$. Získáváme Taylorův polynom druhého stupně funkce $f$ v bodě $x_0$ a tedy i Taylorův vzorec s Peanovým zbytek pro aproximaci kvadratickým polynomem.

$$Tf_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2,$$

$$f(x) = Tf_{2,x_0}(x) + o((x-x_0)^2), \qquad x \to x_0.$$

(7 str. 225)

### 3.2.1 OBECNÝ TAYLORŮV ROZVOJ S PEANOVÝM ZBYTKEM ŘÁDU N

Nechť $n \geq 0$ a $f$ je n-krát diferencovatelná v bodě $x_0$. Taylorův rozvoj funkce $f$ s Peanovým zbytkem řádu $n$ je potom

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + o((x - x_0)^n), \qquad x \to x_0,$$

kde

$$Tf_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Polynom $Tf_{n,x_0}(x)$ je Taylorovým polynomem funkce $f$ v bodě $x_0$ stupně $n$.

(7 str. 226)

### 3.2.2 OBECNÝ TAYLORŮV ROZVOJ S LAGRANGEOVÝM ZBYTKEM ŘÁDU N

Nechť $n \geq 0$ a $f$ je n-krát diferencovatelná v bodě $x_0$ a má spojitou n-tou derivaci. Uvažujme, že $f$ je diferencovatelná $(n+1)$krát v okolí bodu $x_0$ (výjimkou může být pouze bod $x_0$ samotný). Potom Taylorův rozvoj funkce $f$ s Lagrangeovým zbytkem pro vhodné $\bar{x}$ mezi body $x_0$ a $x$ je

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})(x - x_0)^{n+1}.$$

(7 str. 227)

### 3.2.3 MACLAURINŮV ROZVOJ

Taylorův rozvoj v bodě $x_0 = 0$ se někdy nazývá Maclaurinův rozvoj. Pro tento druh rozvoje existuje pravidlo pro usnadnění jeho výpočtu. Maclaurinův rozvoj sudé funkce (respektive liché) obsahuje pouze sudé (liché) mocniny nezávislé proměnné.

(7 str. 227)

## 3.3 TAYLOROVY ROZVOJE ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ

V následující části si odvodíme či jen uvedeme Taylorovy rozvoje některých elementárních funkcí. Tato podkapitola je rozdělena podle druhu funkcí a v závěru nechybí ani tabulka některých základních aproximací.

### 3.3.1 EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Pro exponenciální funkci $f(x) = e^x$ platí, že všechny její derivace jsou identické. Pro jakékoli $k \geq 0$ je tedy $f^{(k)}(0) = 1$. Maclaurinovým rozvojem exponenciální funkce s Peanovým zbytkem nazýváme

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Za použití Lagrangeova tvaru zbytku dostáváme vzorec

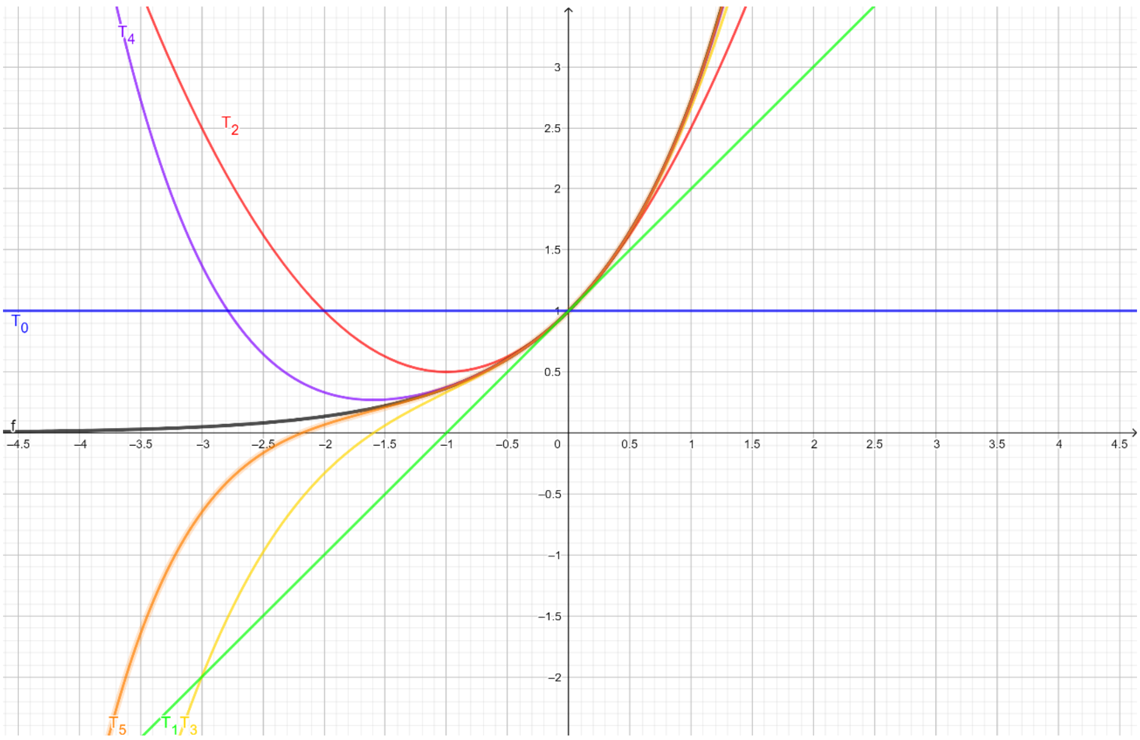
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!}.$$

(7 stránky 227–228)

Obecný Taylorův rozvoj funkce $f(x) = e^x$ v bodě $x_0$ vyplývá z myšlenky, že $f^{(k)}(x_0) = e^{x_0}$

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + e^{x_0}\frac{(x - x_0)^n}{n!} + o((x - x_0)^n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} e^{x_0}\frac{(x - x_0)^k}{k!} + o((x - x_0)^n).$$

(7 str. 229)




Obrázek 3. Graf aproximace $f(x) = e^x$ Taylorovými polynomy $T_0$ až $T_5$

### 3.3.2 LOGARITMICKÉ FUNKCE

Vyjádření logaritmické funkce pomocí Taylorova rozvoje odvodíme z jejích derivací. Derivace funkce $f(x) = \ln x$ jsou

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \qquad f''(x) = (-1)x^{-2}, \qquad f'''(x) = (-1)(-2)x^{-3},$$

pro obecně k-tou derivaci platí

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{(k-1)}(k-1)!\, x^{-k}.$$

A tedy pro $k \geq 1$

$$\frac{f^{(k)}(1)}{k!} = (-1)^{k-1}\frac{1}{k}.$$

Taylorův rozvoj n-tého řádu funkce $f(x) = \ln x$ v bodě $x_0 = 1$ zní následovně

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + o((x-1)^n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k} + o((x-1)^n).$$

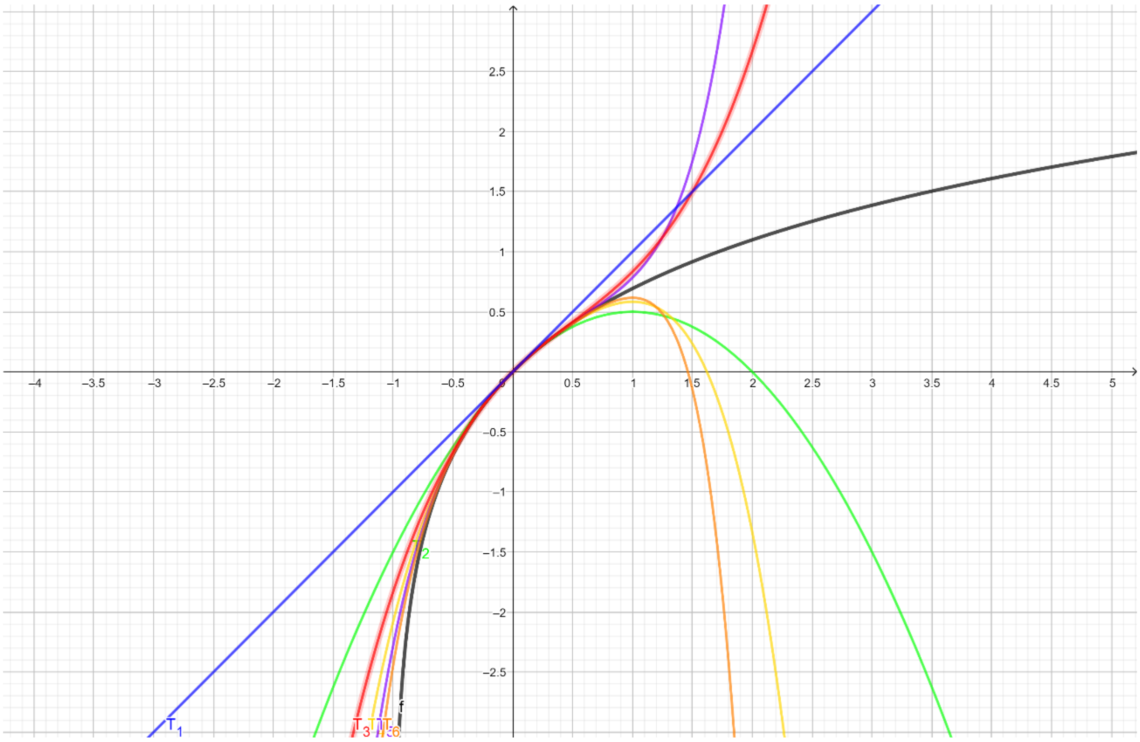
(7 str. 229)

Pro logaritmické funkce je vhodné uvést ještě dva důležité Maclaurinovy rozvoje, tedy rozvoje pro případ kdy $x \to 0$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n),$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

(3 str. 72)




Obrázek 4. Graf aproximace $f(x) = ln(1+x)$ Taylorovými polynomy $T_1$ až $T_6$

### 3.3.3 GONIOMETRICKÉ, CYKLOMETRICKÉ A HYPERBOLICKÉ FUNKCE

Funkce $f(x) = \sin x$ je lichá, a tudíž dle vlastností Maclaurinova rozvoje obsahuje rozvoj této funkce pouze liché mocniny $x$. Derivacemi funkce $f(x) = \sin x$ rozumíme

$$f'(x) = \cos x, \qquad f'''(x) = -\cos x,$$

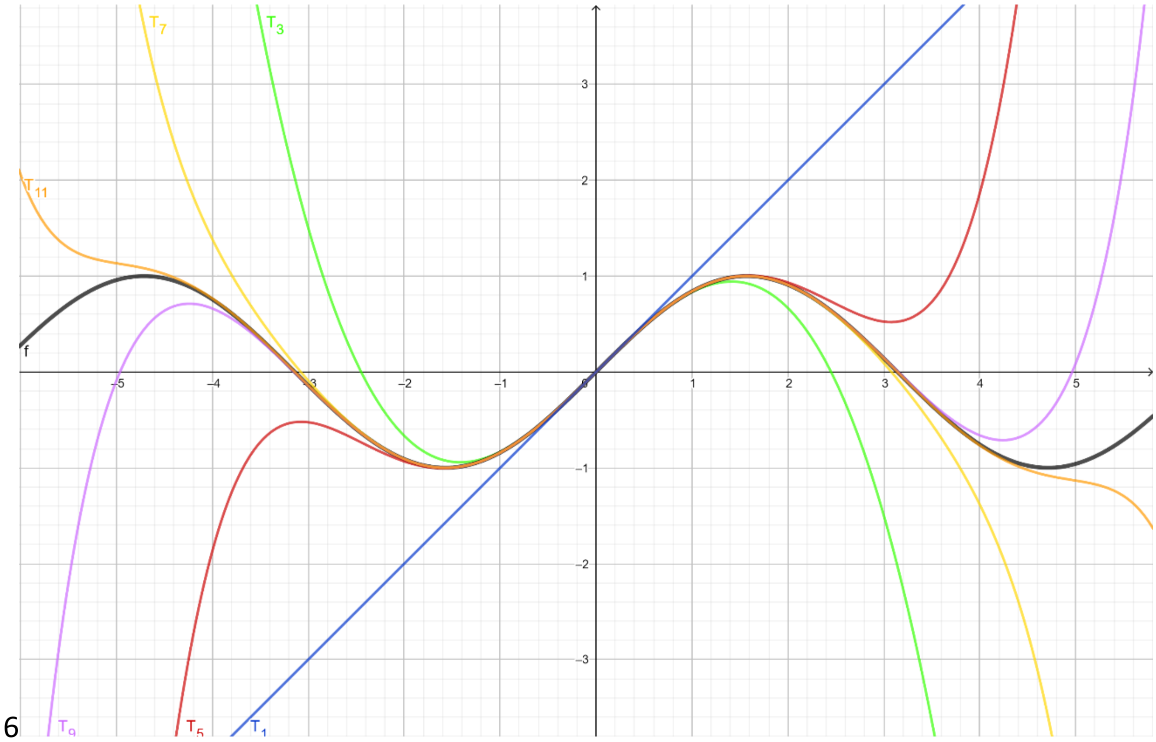
a obecná derivace $f(x) = \sin x$ je

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x.$$

V bodě $x_0 = 0$ tedy máme derivace $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ a Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \sin x$ řádu $n = 2m + 2$ je

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+2}).$$

(7 str. 230)




Obrázek 5. Graf aproximace $f(x) = sin\, x$ Taylorovými polynomy $T_1, T_3, T_5, T_7, T_9, T_{11}$

Funkce $f(x) = \cos x$ je naopak sudá, a tedy Maclaurinův rozvoj této funkce obsahuje pouze sudé mocniny $x$. Derivacemi funkce $f(x) = \cos x$ rozumíme

$$f''(x) = -\cos x\,, \qquad f^{(4)}(x) = \cos x,$$

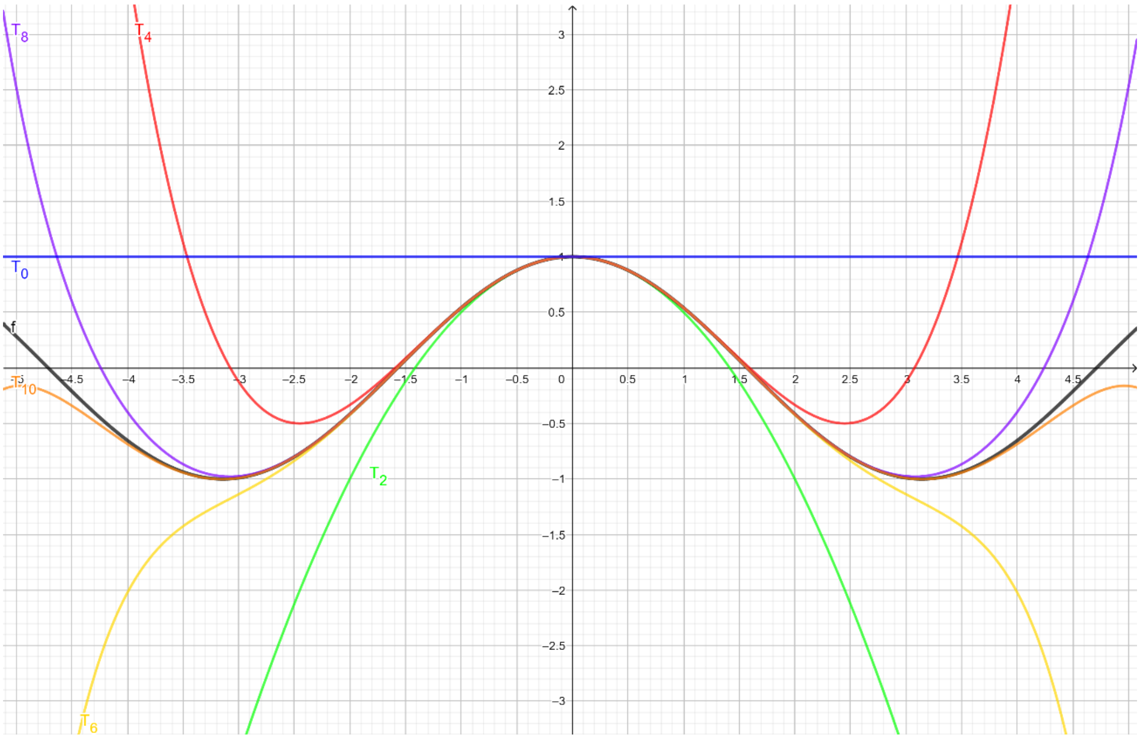
a obecná derivace $f(x) = \cos x$ je

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x.$$

V bodě $x_0 = 0$ tedy máme derivace $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$, takže Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \cos x$ řádu $n = 2m + 1$ je

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2m+1}).$$

(7 str. 231)




Obrázek 6. Graf aproximace $f(x) = cos\, x$ Taylorovými polynomy $T_0, T_2, T_4, T_6, T_8, T_{10}$

Mezi základní aproximace lze zařadit i Maclaurinovy rozvoje hyperbolických funkcí $\sinh x$ a $\cosh x$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

(3 str. 72)

Pro úplnost si uvedeme i Maclaurinovy rozvoje cyklometrických funkcí $\arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

(3 str. 73)

### 3.3.4 MOCNINNÉ FUNKCE

Mocninnou funkcí rozumíme funkci ve tvaru $f(x) = (1+x)^\alpha$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom derivace této funkce jsou

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}.$$

Z obecného vyjádření derivace této funkce $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ dostaneme pro $f(0) = 1$ vyjádření

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \qquad pro\ k \geq 1.$$

Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = (1+x)^\alpha$ řádu $n$ je tedy

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n).$$

(7 stránky 231–232)

Uvedeme si podrobněji i speciální případ mocninné funkce pro $\alpha = -1$. Pro tento parametr vychází

$$\binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2} = 1, \qquad \binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1, \cdots,$$

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k.$$

Dostáváme tedy následující vyjádření pro Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n).$$

(7 stránky 232–233)

Obdobně pro $\alpha = \frac{1}{2}$ dostáváme

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} = -\frac{1}{8}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16}.$$

Maclaurinův rozvoj třetího řádu funkce $f(x) = \sqrt{1+x}$ je potom

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

(7 str. 233)

Závěrem pro snadnější výpočet příkladů přikládám tabulku s prvními členy Maclaurinových rozvojů do stupně $\leq 5$ několika elementárních funkcí:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ | $\frac{1}{1}$ | $+\frac{1}{1}x$ | $+\frac{1}{2}x^2$ | $+\frac{1}{6}x^3$ | $+\frac{1}{24}x^4$ | $+\frac{1}{120}x^5$ |
| $\sin x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+2})$ | | $\frac{1}{1}x$ | | $-\frac{1}{6}x^3$ | | $+\frac{1}{120}x^5$ |
| $\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2m+1})$ | $\frac{1}{1}$ | | $-\frac{1}{2}x^2$ | | $+\frac{1}{24}x^4$ | |
| $\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$ | | $\frac{1}{1}x$ | | $+\frac{1}{6}x^3$ | | $+\frac{1}{120}x^5$ |
| $\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$ | $\frac{1}{1}$ | | $+\frac{1}{2}x^2$ | | $+\frac{1}{24}x^4$ | |
| $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ | | $\frac{1}{1}x$ | $-\frac{1}{2}x^2$ | $+\frac{1}{3}x^3$ | $-\frac{1}{4}x^4$ | $+\frac{1}{5}x^5$ |
| $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ | | $-\frac{1}{1}x$ | $-\frac{1}{2}x^2$ | $-\frac{1}{3}x^3$ | $-\frac{1}{4}x^4$ | $-\frac{1}{5}x^5$ |

## 3.4 POČÍTÁNÍ S TAYLOROVÝMI ROZVOJI

Při výpočtu limit se setkáme nejen s elementárními funkcemi ale hlavně se složitými výrazy, které obsahují různé elementární funkce. Sestavovat Taylorovy rozvoje pro takové výrazy podle definice by mohlo být velmi složitým problémem kvůli počítání derivací. Avšak se základními aproximacemi některých funkcí z minulé části a různými technikami, o kterých hovoří tato podkapitola, získáváme mnohem pohodlnější aparát k řešení limit funkcí pomocí Taylorových rozvojů.

**Tvrzení:** Nechť $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je n-krát diferencovatelná v $x_0 \in (a,b)$. Pokud existuje polynom $P_n$ stupně $\leq n$ takový, že

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \qquad pro\ x \to x_0,$$

potom $P_n$ je Taylorovým polynomem $T_n = Tf_{n,x_0}$ řádu $n$ pro funkci $f$ v bodě $x_0$.

(7 str. 234)

### 3.4.1 SOUČET A ROZDÍL TAYLOROVÝCH ROZVOJŮ

Taylorův rozvoj součtu/rozdílu je součtem/rozdílem dílčích Taylorových rozvojů

$$\begin{aligned} f(x) \pm g(x) &= [p_n(x) + o(x^n)] \pm [q_n(x) + o(x^n)] = \\ &= [p_n(x) \pm q_n(x)] + [o(x^n) \pm o(x^n)] = p_n(x) \pm q_n(x) + o(x^n). \end{aligned}$$

(7 str. 236)

Pokud mají rozvoje funkcí $f$ a $g$ stejné členy až do exponentu $n$, potom se v rozdílu $f - g$ všechny jednotlivé členy vyruší. Je potřeba najít první nenulový koeficient rozvoje $f - g$, musíme se tedy dívat na rozvoje obou funkcí $f$ a $g$ až do koeficientu $n' > n$. Obecně nelze odhadnout, do jakého minimálního koeficientu $n'$ budeme muset obě funkce rozvinout. Využití rozvoje vyššího stupně než potřebného není chybou, ale zahrnuje nadbytečné počítání. Naopak ukončení rozvoje „příliš brzy“ vede k nesmyslným či chybným výsledkům.

(7 str. 236)

### 3.4.2 SOUČIN TAYLOROVÝCH ROZVOJŮ

S využitím vlastností symbolu „malé ó“ dostáváme

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= [p_n(x) + o(x^n)][q_n(x) + o(x^n)] = \\ &= p_n(x)q_n(x) + p_n(x)o(x^n) + q_n(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n) = \\ &= p_n(x)q_n(x) + o(x^n) + o(x^n) + o(x^{2n}) = p_n(x)q_n(x) + o(x^n). \end{aligned}$$

Součin $p_n(x)q_n(x)$ obsahuje mocniny $x$ větší než $n$, každá z nich je $o(x^n)$, nemusíme součin tedy počítat explicitně. Píšeme

$$p_n(x)q_n(x) = r_n(x) + o(x^n),$$

přičemž $r_n(x)$ obsahuje všechny mocniny řádu $\leq n$. Závěrem tedy můžeme říct, že platí

$$f(x)g(x) = r_n(x) + o(x^n).$$

(7 str. 237)

Součin Taylorových rozvojů tedy funguje podobně jako tzv. zkrácené násobení čísel. Násobíme totiž jen ty dvojice členů, u kterých je výsledný exponent roven nejvýše $n$. Všechny dílčí součiny potom sečteme.

(3 str. 73)

**[9]Příklad 1:**

$$f(x) = e^{x^2} \sin 2x, \;\; n = 5$$

Řešení: Cílem je najít Maclaurinův rozvoj funkce $f$ řádu $n = 5$. Využijeme znalosti elementárních aproximací a rozvineme obě dílčí funkce do řádu $n = 5$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5),$$

$$\sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5).$$

Nyní provedeme součin těchto funkcí, přičemž si všímáme jen součinů, u kterých výsledný exponent u $x$ bude $\leq n$

$$f(x) = e^{x^2} \sin 2x = \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right)\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)\right) =$$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + 2x^3 - \frac{4}{3}x^5 + x^5 + o(x^5) =$$

$$= 2x + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5).$$

[9] Příklad 7.5 3c z (7)

### 3.4.3 PODÍL TAYLOROVÝCH ROZVOJŮ

Předpokládejme, že $g(0) \neq 0$ a nechť $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Pro $h(x)$ hledáme rozvoj $h(x) = r_n(x) + o(x^n)$, kde $r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. Z vyjádření pro součin $h(x)g(x) = f(x)$ dostáváme

$$r_n(x)q_n(x) + o(x^n) = p_n(x) + o(x^n).$$

To znamená, že část součinu $r_n(x)q_n(x)$ stupně $\leq n$ se musí ve stupni shodovat s $p_n(x)$. Díky tomuto postřehu můžeme určit koeficienty $c_k$ podobným způsobem jako při dělení polynomů.

$$\begin{array}{lllllll|llllll}
a_0 & +a_1x & +a_2x^2 & +\cdots & +a_nx^n & +o(x^n) & & b_0 & +b_1x & +b_2x^2 & +\cdots & +b_nx^n & +o(x^n) \\ \cline{8-13}
a_0 & +a'_1x & +a'_2x^2 & +\cdots & +a'_nx^n & +o(x^n) & & c_0 & +c_1x & +\cdots & +c_nx^n & +o(x^n) & \\ \cline{1-7}
 & +\tilde{a}_1x & +\tilde{a}_2x^2 & +\cdots & +\tilde{a}_nx^n & +o(x^n) & & & & & & & \\
 & +\tilde{a}_1x & +\tilde{a}'_2x^2 & +\cdots & +\tilde{a}'_nx^n & +o(x^n) & & & & & & & \\ \cline{2-7}
 & & & & \vdots & & & & & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & +o(x^n) & & & & & & & &
\end{array}$$

(7 str. 238)

**Příklad 1:**

Nalezněte Maclaurinův rozvoj šestého stupně funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Řešení: Funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$ je lichá, takže stačí najít pouze Maclaurinův rozvoj pátého stupně, protože právě díky lichosti funkce je totožný s rozvojem šestého stupně. Nejprve si vypíšeme Maclaurinovy rozvoje obou dílčích funkcí $\sin x$ a $\cos x$ až do pátého stupně

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$

Následně můžeme provést algoritmus dělení Taylorových rozvojů, dostáváme tedy

$$\operatorname{tg} x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) \div \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) =$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).$$

### 3.4.4 TAYLORŮV ROZVOJ SLOŽENÉ FUNKCE

Nechť

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

je Maclaurinovým rozvojem nekonečně malé funkce pro $x \to 0$ (proto $a_0 = 0$). Dále nechť funkce $g(y)$ je

$$g(y) = b_0 + b_1y + \cdots + b_ny^n + o(y^n).$$

Připomeňme si, že symbol $o(y^n)$ vyjadřuje nekonečně malou funkci vyššího řádu než $y^n$, když $y \to 0$.

Tuto skutečnost můžeme zapsat i jako $o(y^n) = y^n o(1)$, kde $o(1) \to 0$ pro $y \to 0$.

Nyní uvažujme složenou funkci $h(x) = g\big(f(x)\big)$ a substituujme $y = f(x)$ v rozvoji $g(y)$:

$$g(f(x)) = b_0 + b_1f(x) + b_2[f(x)]^2 + \cdots + b_n[f(x)]^n + [f(x)]^n o(1).$$

Jelikož je $f(x)$ spojitá v 0 a $y = f(x) \to 0$ pro $x \to 0$, tak platí i $o(1) \to 0$ pro $x \to 0$.

Dále z rozvoje $[f(x)]^n = a_1^n x^n + o(x^n)$ plyne $[f(x)]^n o(1) = o(x^n)$ pro $x \to 0$.

Mocniny $[f(x)]^k$ $(1 \le k \le n)$ rozvité vzhledem k $x$ až do řádu $n$ poskytují vyjádření $g(f(x))$.

(7 str. 239)

**Příklad 1:**

Nalezněte Maclaurinův rozvoj řádu 3 funkce

$$h(x) = \frac{1}{1 + \sin x}.$$

Řešení: Na funkci $h(x)$ se díváme jako na složenou funkci, rozepíšeme si tedy Maclaurinovy rozvoje dílčích funkcí až do třetího řádu:

$$f(x) = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$g(y) = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + o(x^3).$$

Následně můžeme provést dosazení $y = f(x)$ a najít Maclaurinův rozvoj funkce $h(x)$. Při počítání nezapomínáme na pravidla počítání s Taylorovými rozvoji

$$h(x) = 1 - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3$$
$$+ o(x^3) = 1 - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + \left(x^2 + o(x^3)\right) - \left(x^3 + o(x^3)\right) =$$
$$= 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

### 3.4.5 ASYMPTOTICKÉ ROZVOJE

V mnohých případech, kdy funkce $f(x)$ je nekonečná pro $x \to 0$ (nebo $x \to x_0$), je možné najít „asymptotický rozvoj" funkce $f(x)$ se zápornými mocninami

$$f(x) = \frac{a_{-m}}{x^m} + \frac{a_{-m+1}}{x^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Tento tvar nám pomáhá lépe porozumět, jakým způsobem jde $f$ k nekonečnu. Pokud totiž $a_{-m} \neq 0$, $f$ bude nekonečná řádu $m$ vzhledem k funkci $x^{-1}$.

(7 str. 241)

Při dělení Taylorových polynomů občas dostaneme funkci, která sice není polynomem, ale přesto jí lze využít k aproximaci podílu. Takovým příkladem může být například dělení Taylorových polynomů pátého stupně funkcí $\cos x$ a $\sin x$. Pro funkci $\operatorname{cotg} x$ tedy dostaneme vyjádření:

$$\operatorname{cotg} x = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) \div \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) =$$
$$= x^{-1} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + o(x^4).$$

Z tohoto zjištění například plyne, že

$$\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{45}x^3 + o(x^4).$$

(3 str. 74)

# 4 VÝPOČET LIMIT POMOCÍ TAYLOROVA ROZVOJE

Následující kapitola bude věnována sérii příkladů týkajících se výpočtu limity funkce pomocí Taylorových rozvojů. Využijeme tedy všech předcházejících pravidel a nástrojů pro počítání limity funkce i Taylorových rozvojů. V některých příkladech využijeme kromě Taylorových rozvojů i jiné metody pro počítání s limitami. Zároveň u části úloh dojde ke srovnání využití Taylorových rozvojů k aproximaci funkcí s aplikací l'Hospitalova pravidla. V následujících příkladech jsou zahrnuté nejen elementární funkce, pro něž existují tabulkové Taylorovy rozvoje, ale i problematika složených funkcí či asymptotických rozvojů. Pro úvodní motivaci se tedy vraťme k příkladu číslo 4 z podkapitoly o l'Hospitalově pravidle.

**[10]Příklad 1:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^4}$$

Řešení: Tento příklad bylo možné relativně pohodlně vyřešit opakovanou aplikací l'Hospitalova pravidla. Problém by mohla činit pouze nutnost několikanásobné derivace, která značně komplikuje výraz v čitateli tohoto zlomku. Při výpočtu pomocí Taylorových polynomů využijeme vzorce pro základní aproximace funkcí a k výsledku se dopracujeme mnohem rychleji. Označíme si dílčí funkce $f(x) = \cos x$ a $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$, pro které budeme hledat Taylorovy rozvoje. Ve jmenovateli se nachází polynom ve čtvrté mocnině $x^4$, funkce $f(x)$ a $g(x)$ tedy potřebujeme aproximovat Taylorovými rozvoji čtvrtého stupně. Dle elementárních Taylorových rozvojů, respektive Maclaurinových rozvojů, píšeme

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).$$

Nyní rozvoje funkcí $f(x)$ a $g(x)$ dosadíme do počítané limity. V čitateli se část členů odečte a zůstanou nám pouze výrazy obsahující $x^4$. Vytkneme tedy $x^4$ z čitatele i jmenovatele, tímto výrazem zkrátíme a získáme pouze součet čísla $-\frac{1}{12}$ a symbolu $o(1)$, který znamená jakoukoli funkci konvergující k nule. Výsledkem zadané limity je tedy

[10] Příklad 6.03 z (3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{x^4+o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}+o(1)\right)}{x^4(1+o(1))} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}+o(1)}{1+o(1)} = -\frac{1}{12}.$$

[11]**Příklad 2:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(sinx)-\cos x}{x^4}$$

Řešení: V této úloze se budeme opět zabývat limitou, jež po dosazení bodu $x_0 = 0$ dává výraz $\frac{0}{0}$. Nejprve tedy příklad vyřešíme opakovanou aplikací l'Hospitalova pravidla. Ve jmenovateli se nachází čtvrtá mocnina $x$, kterou navíc nebude možné zkrátit s žádným výrazem v čitateli, proto musíme metodu zopakovat čtyřikrát. Výraz v čitateli se ale každým derivováním více komplikuje kvůli přítomnosti složené funkce $\cos(\sin x)$ v zadané limitě. Nakonec po čtvrté aplikaci l'Hospitalova pravidla můžeme postupně povytýkat složené funkce $\cos(\sin x)$ a $\sin(\sin x)$ vzniklé derivacemi. Do tohoto zlomku je již možné dosadit bod $x_0 = 0$ a dopočíst se k výsledku $\frac{1}{6}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos x+\sin x}{4x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x)\cos^2 x+\sin(\sin x)\sin x+\cos x}{12x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos^3 x+3\cos(\sin x)\sin x\cos x+\sin(\sin x)\cos x-\sin x}{24x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\left(\cos^4 x-3\sin^2 x+4\cos^2 x\right)+\sin(\sin x)\left(-6\sin x\cos^2 x-\sin x\right)-\cos x}{24} =$$

$$= \frac{1(1+4)-1}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

Výpočet této limity pomocí l'Hospitalova pravidla sice vedl ke správnému výsledku, postup byl ale velmi zdlouhavý a náročný kvůli mnohočetné derivaci součinů. Navíc se při poslední derivaci vyskytl i problém derivace součinu tří funkcí, z nichž jedna byla složená.

[11] Příklad 1333 z (11)

Z těchto důvodů se nyní pokusíme o výpočet použitím Taylorových rozvojů. Vnější funkci cosinus označíme jako $f(y)$ a pro vnitřní použijeme značení $g(x) = \sin x$. Pro všechny dílčí funkce včetně $h(x) = \cos x$ si vypíšeme podle tabulky aproximace Maclaurinovým rozvojem čtvrtého stupně, protože ve jmenovateli zlomku máme výraz ve čtvrté mocnině

$$f(y) = \cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4),$$

$$g(x) = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4),$$

$$h(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

Nyní dosadíme aproximaci vnitřní funkce $g(x)$ do vnější $f(y)$, abychom v počítané limitě mohli nahradit rovnou celou složenou funkci jejím Taylorovým rozvojem čtvrtého stupně

$$f(g(x)) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 + o(x^4)\right) + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

Všechny dílčí funkce nahradíme aproximacemi a dále počítáme s Taylorovými rozvoji. V čitateli při úpravách držíme čtvrtý stupeň Taylorova rozvoje, postupným sčítáním/odčítáním se většina členů v čitateli zkrátí a zůstane tam jen výraz $\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$. Následně je již možné celý zlomek zkrátit $x^4$, a tak dostaneme hodnotu zadané limity v bodě $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(sinx) - \cos x}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}.$$

Náročnost matematických operací při řešení pomocí Taylorových rozvojů se zdá výrazně menší, navíc se v zadání této úlohy vyskytují pouze elementární funkce, pro něž existují tabulkové aproximace.

**[12]Příklad 3:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$$

Řešení: Po dosazení bodu $x_0 = 0$ do této limity dostaneme „neurčitý výraz“ $\frac{0}{0}$, aplikujeme tedy l'Hospitalovo pravidlo. Po derivacích se všechny dílčí funkce $\sin \alpha x$ $(\alpha = 1, 3, 5)$ změní na funkce $\cos \alpha x$, následně je tedy možné do limity dosadit a vyřešit ji

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x-3\cos 3x}{\cos x}=\frac{5-3}{1}=2.$$

Aparát l'Hospitalova pravidla nám tedy poskytl rychlou metodu k vyřešení této úlohy. Tento příklad lze řešit i pomocí Taylorových rozvojů, jak ale nahlédneme, nejedná se o příliš výhodný postup v porovnání s l'Hospitalovým pravidlem. Nejdříve tedy nalezneme aproximace dílčích funkcí $f(x), g(x)$ a $h(x)$

$$f(x)=\sin 5x=5x-\frac{125}{6}x^3+o(x^3),$$

$$g(x)=\sin 3x=3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^3),$$

$$h(x)=\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3).$$

Získané aproximace $f(x), g(x)$ a $h(x)$ dosadíme do počítané limity. Po algebraických úpravách se v celém zlomku zkrátí výraz $x$, následně je již možné dosadit bod $x_0 = 0$ a limitu dopočíst

[12] Příklad 476 z (11)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(5x-\frac{125}{6}x^3+o(x^3)\right)-\left(3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)\right)}{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{49}{3}x^3+o(x^3)}{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2-\frac{49}{3}x^2+o(x^2)\right)}{x\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{49}{3}x^2+o(x^2)}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}=\frac{2}{1}=2.$$

Tento příklad tedy poukazuje na to, že je vždy potřebné zvážit, která z nabízených metod povede k výsledku rychleji a jednodušeji. Výpočet použitím Taylorových rozvojů v této úloze sice vede k vyřešení limity, obnáší ale nutnost nalezení aproximací funkcí $\sin 5x$ a $\sin 3x$, které nepatří mezi základní aproximace. Proto lze konstatovat, že v tomto příkladě je vhodnější využít aplikaci l'Hospitalova pravidla.

**[13]Příklad 4:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin(ax)-\sin(bx)}$$

Řešení: V této úloze se po dosazení bodu $x_0=0$ do limity objeví výraz tvaru $\frac{0}{0}$. Nejdříve se limitu pokusíme vypočítat pomocí aplikace l'Hospitalova pravidla a následně pro porovnání využijeme i postup s aproximací pomocí Taylorových rozvojů. Dle l'Hospitalova pravidla píšeme

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin(ax)-\sin(bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}-be^{bx}}{a\cos(ax)-b\cos(bx)}=\frac{a-b}{a-b}=1.$$

Tento postup lze považovat za docela rychlý a snadný, jelikož zahrnoval pouze jednoduché derivace složených funkcí. Nyní pro porovnání rozvineme dílčí funkce do Maclaurinových rozvojů, jejich stupeň tentokrát není ničím dán, vypíšeme tedy například rozvoje třetího stupně

$$f(x)=e^{ax}=1+ax+\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^3x^3}{6}+o(x^3),$$

[13] Příklad 6.01 z (3)

$$g(x) = e^{bx} = 1 + bx + \frac{b^2x^2}{2} + \frac{b^3x^3}{6} + o(x^3),$$

$$h(x) = \sin(ax) = ax - \frac{a^3x^3}{6} + o(x^3),$$

$$i(x) = \sin(bx) = bx - \frac{b^3x^3}{6} + o(x^3).$$

Vypočítanými rozvoji nahradíme původní funkce a následným sčítáním/odečítáním se dopracujeme v čitateli i jmenovateli k výrazům, ze kterých je možné vytknout $x$. Po jeho zkrácení do limity dosadíme a získáme stejný výsledek jako při řešení l'Hospitalovým pravidlem. Navíc když nahlédneme, bylo postačující jednotlivé funkce aproximovat pomocí pouze lineárních rozvojů, ostatní členy se totiž dosazením vynulují.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin(ax) - \sin(bx)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + ax + \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(1 + bx + \frac{b^2x^2}{2} + \frac{b^3x^3}{6} + o(x^3)\right)}{\left(ax - \frac{a^3x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(bx - \frac{b^3x^3}{6} + o(x^3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{ax - bx + \frac{a^2x^2}{2} - \frac{b^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{6} - \frac{b^3x^3}{6} + o(x^3)}{ax - bx - \frac{a^3x^3}{6} + \frac{b^3x^3}{6} + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a - b + \frac{a^2x}{2} - \frac{b^2x}{2} + \frac{a^3x^2}{6} - \frac{b^3x^2}{6} + o(x^2)}{a - b - \frac{a^3x^2}{6} + \frac{b^3x^2}{6} + o(x^2)} = \frac{a-b}{a-b} = 1.$$

I v tomto příkladě se metoda Taylorových rozvojů ukázala jako poněkud zdlouhavá, použitím l'Hospitalova pravidla se k výsledku dopočítáme snadněji.

**[14]Příklad 5:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(e^x - 1)\left(e^{-x^2} - 1\right)^2}$$

Řešení: V tomto příkladě vidíme hned několik dílčích funkcí, které lze aproximovat Taylorovými rozvoji na okolí bodu $x_0 = 0$. V čitateli se nachází proměnná $x$ ve třetí mocnině, mohlo by se tedy zdát, že bude postačující jednotlivé funkce aproximovat

[14] Příklad 6.15 z (3)

Taylorovými rozvoji třetího stupně. Snadno ale nahlédneme, že při vyjádření pomocí třetího stupně by se všechny členy v čitateli odečetly, a tak bychom ztratili informace o původním výrazu. Použijeme tedy aproximaci Taylorovými rozvoji pátého stupně

$$f(x) = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5),$$

$$g(x) = \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5),$$

$$h(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5),$$

$$i(x) = e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5).$$

Nyní si ještě zvlášť zjistíme aproximace složitějších výrazů z čitatele i jmenovatele pro usnadnění dalších výpočtů, hledáme tedy Taylorovy rozvoje výrazu $(\sin x - \operatorname{tg} x)$ a součinu $(e^x - 1)\left(e^{-x^2} - 1\right)^2$. Při jednotlivých operací využíváme pravidel pro počítání s Taylorovými rozvoji

$$j(x) = (\sin x - \operatorname{tg} x) = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) - \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 + o(x^5),$$

$$k(x) = (e^x - 1)\left(e^{-x^2} - 1\right)^2 =$$
$$= \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)\left(-x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right)^2$$
$$= \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)\left(x^4 + o(x^5)\right) =$$
$$= x^5 + o(x^5).$$

Po nahrazení výrazů aproximacemi se zlomek výrazně zjednoduší, a tak můžeme vytknout ze všech členů výraz $x^5$. Po jeho zkrácení již dostaneme limitu obsahující pouze číselný výraz a symbol $o(1)$. Dostáváme tedy řešení

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin x-\operatorname{tg}x)+x^3}{(e^x-1)\left(e^{-x^2}-1\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^5+o(x^5)\right)+x^3+o(x^5)}{(x^5+o(x^5))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^5+o(x^5)}{x^5+o(x^5)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5(-\frac{1}{4}+o(1))}{x^5(1+o(1))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}+o(1)}{1+o(1)}=\frac{-\frac{1}{4}}{1}-\frac{1}{4}.$$

**[15]Příklad 6:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{cotg}x-1}{x^2}$$

Řešení: V této úloze sice nemůžeme přímo aplikovat aproximaci pomocí Taylorových rozvojů, můžeme ale využít odvozeného asymptotického rozvoje funkce $\operatorname{cotg} x$. Tuto funkci označíme jako $f(x)=\operatorname{cotg}x$ a píšeme

$$f(x)=\operatorname{cotg}x=\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x+o(x).$$

Když dosadíme vyjádření funkce $f(x)$ do limity a roznásobíme tento výraz $x$, získáme v čitateli stejně tak jako ve jmenovateli symbol $o(x^2)$. Ve zlomku tedy můžeme krátit výrazem $x^2$ a následně získáme limitu obsahující pouze číselný zlomek $-\frac{1}{3}$ a symbol $o(1)$. Řešením zadané limity je tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{cotg}x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x+o(x)\right)-1}{x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(-\frac{1}{3}+o(1)\right)}{x^2\left(1+o(1)\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+o(1)}{1+o(1)}=\frac{-\frac{1}{3}}{1}-\frac{1}{3}.$$

[15] Příklad 1323 z (11)

**[16]Příklad 7:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$$

Řešení: Při řešení této limity opět využijeme elementárních aproximací Taylorovým polynomem. Ve jmenovateli se nachází polynom třetího stupně, takže i obě funkce $\arcsin 2x$ a $\arcsin x$ rozvineme do třetího stupně Maclaurinova rozvoje

$$f(x) = \arcsin 2x = 2x + \frac{1}{6}8x^3 + o(x^3) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$g(x) = \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Získané funkce $f(x)$ a $g(x)$ dosadíme do počítané limity. Algebraickými úpravami se dostaneme ke shodným výrazům v čitateli i jmenovateli, hodnota této limity pro $x \to 0$ je tedy 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) - 2\left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)}{x^3 + o(x^3)} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x + \frac{4}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1.$$

**[17]Příklad 8:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{cotg}(\sin x) - 1}{x^2}$$

Řešení: V této úloze je potřeba využít Taylorova rozvoje složené funkce $f(g(x))$. Vnější funkci kotangens označíme jako $f(y)$ a pro vnitřní použijeme značení $g(x) = \sin x$. Pro funkci $g(x)$ si vypíšeme aproximaci Maclaurinovým rozvojem třetího stupně podle tabulky elementárních aproximací a $f(y)$ rozvineme podle odvozeného vzorce pro asymptotický rozvoj funkce kotangens

$$f(y) = \operatorname{cotg} y = \frac{1}{y} - \frac{1}{3}y - \frac{1}{45}y^3 + o(y^3),$$

$$g(x) = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

[16] Příklad 1327 z (11)
[17] Příklad 1323 z (11)

Nalezené aproximace dosadíme do limity pomocí vztahu $f(g(x))$. Následuje série roznásobování podle pravidel násobení Taylorových polynomů a dalších úprav, při kterých navíc v čitateli postupně snížíme mocninu v symbolu $o(x^n)$ ze třetí na druhou. Ve zlomku dojde k významnému krácení, a nakonec je hodnota této limity v bodě $x_0 = 0$ rovna $-\frac{1}{6}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{cotg}(\sin x)-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{1}{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-\frac{1}{45}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^3\right)-1}{x^2+o(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}+x\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{18}x^3+o(x^3)\right)+x\left(-\frac{1}{45}x^3+o(x^3)\right)-1}{x^2+o(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)+o(x^3)-1}{x^2+o(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}-\frac{1}{3}x^2-1+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+o(x^2)}\cdot\frac{1-\frac{1}{3}x^2-1+\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right)}{x^2\big(1+o(1)\big)}==\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}+o(1)}{1+o(1)}=\frac{-\frac{1}{6}}{1}=-\frac{1}{6}.$$

**Příklad 9:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

Řešení: Tato úloha představuje problém hned dvou složených funkcí. Vzhledem ke třetí mocnině $x^3$ ve jmenovateli budeme hledat aproximaci čitatele rozvojem třetího stupně. Použijeme pravidlo pro Taylorův rozvoj složené funkce $f(g(x))$, respektive $f(h(x))$. Všechny dílčí funkce mají tabulkové Maclaurinovy rozvoje, píšeme tedy

$$f(y)=\sqrt{1+y}=1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3),$$

$$g(x) = \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$h(x) = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Nyní dosadíme aproximace vnitřních funkcí $g(x), h(x)$ do vnější $f(y)$, abychom v počítané limitě mohli nahradit rovnou celé odmocniny jejich Taylorovými rozvoji

$$\begin{aligned} f\big(g(x)\big) = \sqrt{1+\operatorname{tg} x} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\ &+ \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{11}{48}x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\big(h(x)\big) = \sqrt{1+\sin x} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\ &+ \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Vypočítané aproximace dosadíme do zadané limity. Jak je zřejmé, většina členů se odečte a v čitateli zůstane pouze výraz $\frac{1}{4}x^3 + o(x^3)$. V celém zlomku tedy můžeme zkrátit $x^3$ a dostaneme limitu podílu součtu číselných výrazů a symbolu $o(1)$. Výsledkem tohoto příkladu je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{11}{48}x^3+o(x^3)\right)-\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+o(x^3)\right)}{x^3+o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}+o(1)}{1+o(1)} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}.$$

**[18]Příklad 10:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+5x^4}-e^{x^2-3x^4}}{(\cos x-1)(\cosh x-1)}$$

Řešení: Tato limita obsahuje v čitateli taktéž dvě složené funkce s totožnou vnější funkcí – exponenciálou, přičemž vnitřní funkce jsou v obou případech již ve tvaru polynomu čtvrtého stupně. Dále se ve zlomku nacházejí další dvě dílčí funkce $\cos x$ a $\cosh x$, jejichž aproximace Taylorovým rozvojem se řadí mezi tabulkové. Píšeme tedy aproximace Maclaurinovým rozvojem čtvrtého stupně

$$f(y) = e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + o(x^4),$$

$$g(x) = x^2 + 5x^4 + o(x^4),$$

$$h(x) = x^2 - 3x^4 + o(x^4),$$

$$i(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$j(x) = \cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

Pro větší přehlednost při výpočtu limity si rovnou dosadíme vnitřní funkce do aproximace vnější exponenciály. Dostáváme tedy aproximace složených funkcí $f\big(g(x)\big) = e^{x^2+5x^4}$ a $f\big(h(x)\big) = e^{x^2-3x^4}$ Maclaurinovými rozvoji čtvrtého stupně

[18] Příklad 6.27 z (3)

$$f\big(g(x)\big) = e^{x^2+5x^4} =$$
$$= 1 + \big(x^2 + 5x^4 + o(x^4)\big) + \frac{1}{2}\big(x^2 + 5x^4 + o(x^4)\big)^2$$
$$+ \frac{1}{6}\big(x^2 + 5x^4 + o(x^4)\big)^3 + \frac{1}{24}\big(x^2 + 5x^4 + o(x^4)\big)^4 + o(x^4) =$$
$$= 1 + x^2 + 5x^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{11}{2}x^4 + o(x^4),$$

$$f\big(h(x)\big) = e^{x^2-3x^4} =$$
$$= 1 + \big(x^2 - 3x^4 + o(x^4)\big) + \frac{1}{2}\big(x^2 - 3x^4 + o(x^4)\big)^2$$
$$+ \frac{1}{6}\big(x^2 - 3x^4 + o(x^4)\big)^3 + \frac{1}{24}\big(x^2 - 3x^4 + o(x^4)\big)^4 + o(x^4) =$$
$$= 1 + x^2 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = 1 + x^2 - \frac{5}{2}x^4 + o(x^4).$$

Vypočtenými rozvoji můžeme rovnou nahradit původní dílčí funkce v zadané limitě. V čitateli se odečte absolutní člen i mocnina $x^2$, stejně tak ve jmenovateli po roznásobení zůstane jen člen s $x^4$. Vytknutím a zkrácením této mocniny v celém zlomku dostaneme limitu obsahující pouze číselné výrazy a symbol $o(1)$. Výsledná hodnota této limity v bodě 0 je $-32$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x^2 + \frac{11}{2}x^4 + o(x^4)\right) - \left(1 + x^2 - \frac{5}{2}x^4 + o(x^4)\right)}{\left(\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - 1\right)\left(\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - 1\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{8x^4 + o(x^4)}{\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{8 + o(1)}{-\frac{1}{4} + o(1)} = \frac{8}{-\frac{1}{4}} = -32.$$

**[19]Příklad 11:**

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Řešení: Pro výpočet této limity nejprve využijeme pravidla pro výpočet limit funkcí tvaru $f(x)^{g(x)}$, tím ji převedeme na tvar, ve kterém je možné využít Taylorovy rozvoje.

$$\lim_{x \to 0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to 0} [g(x) \ln f(x)]},$$

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \to 0} [\frac{1}{x^2} \ln \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)]}.$$

Úkolem je nyní tedy vypočítat následující limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)}{x^2}.$$

Pro nalezení hodnoty této limity využijeme opět aproximaci Taylorovými rozvoji. V celém zlomku potřebujeme získat aproximace druhým stupněm vzhledem k výrazu $x^2$ ve jmenovateli, přesto ale funkci $g(x) = \operatorname{arctg} x$ rozvineme až do stupně třetího, protože jí v dalším kroku budeme dělit výrazem $x$, a tím snížíme mocninu o ten požadovaný jeden stupeň. Také si vypíšeme Maclaurinův rozvoj vnější funkce $f(y) = \ln y$

$$f(y) = \ln y = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + o(y^2),$$

$$g(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$h(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2).$$

V dalším kroku dosadíme vnitřní funkci $h(x)$ do $f\big(h(x)\big)$ pro větší přehlednost při počítání hledané limity

[19] Příklad 6.49 z (3)

$$f\big(h(x)\big) = \ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) =$$

$$= \left(\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) - 1\right)^2 + o(x^2) =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}\big(o(x^2)\big) = -\frac{1}{3}x^2 + o(x^2).$$

Nyní již stačí pouze nahradit složenou funkci Maclaurinovým rozvojem a po vytknutí $x^2$ z celého zlomku získáme limitu podílu číselných výrazů a symbolu $o(1)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{1 + o(1)} = -\frac{1}{3}.$$

Nakonec se vrátíme k prvnímu kroku a dostaneme hodnotu původně zadané limity

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

# ZÁVĚR

Pro svou bakalářskou práci jsem si jako cíl zvolila podat ucelený a srozumitelný výklad výpočtů limit se speciálním zaměřením na využití Taylorových rozvojů při těchto výpočtech. Toto téma jsem postupně vystavila na dílčích pojmech od základních až ke komplexnějším, což by mělo dopomoci k přehlednosti popisované problematiky. Ve své práci jsem mimo klíčových příkladů na výpočet limit pomocí Taylorových rozvojů uvedla také mnoho ilustračních příkladů k jiným tématům, které mají za úkol čtenáře přiblížit k různým druhům limity funkce a způsobům jejich výpočtu. V několika úlohách jsem se věnovala i srovnání použití metody Taylorových rozvojů s aplikací jiných postupů, což mělo poukázat na efektivitu ale i možná úskalí tohoto aparátu. Nicméně dané příklady nejsou kompletním výčtem možných řešení limit funkcí, ale slouží pouze k uvedení do této problematiky.

Při zpracovávání tohoto tématu jsem pracovala se zdroji různého typu. Využívala jsem nejen odbornou literaturu ale i elektronicky dostupné zápisy k přednáškám či oceňovaný webový archiv MacTutor. Během studování odborné literatury jsem se seznámila i s cizojazyčnou publikací, jež mi dala možnost nahlédnout do odlišných zvyklostí matematických zápisů. Mimo odbornou literaturu jsem využila také matematický software GeoGebra, v němž jsem vytvořila několik obrázků grafů sloužících k ilustraci některých příkladů.

Domnívám se, že využití Taylorových rozvojů pro výpočet limity funkce se ukázalo jako účinný nástroj, který v některých úlohách může velmi usnadnit řešení či pro něj být přímo zásadní. Samotné aproximace funkcí, které nenalezneme mezi elementárními, lze navíc snadno získat pomocí matematických programů.

## RESUMÉ

For my bachelor's thesis, I have set an objective to provide a clear and comprehensive overview focused on calculations of limits with special attention to the use of the Taylor series in these calculations. I gradually built this topic from fundamental to more complex concepts, which should help explain the described issues. This work also includes many illustrative examples of related topics. In several instances, I also compared the use of the Taylor series method with the application of other methods like the l'Hospital rule. Those comparisons are supposed to point out the effectiveness of this technique. However, they also demonstrate possible challenges of this method. Nevertheless, the given examples are not a complete list of possible solutions to the limits of functions, but they only serve to introduce this topic.

# SEZNAM LITERATURY


1. **JIRÁSEK, František.** *Matematika I. pro dálkové studium.* Praha : ČVUT, 1981.

2. **NEČESAL, Petr.** 2 - Posloupnosti. *Přednášky z MA1.* [Online] 16. 10 2020. [Citace: 4. 6 2022.] http://home.zcu.cz/~pnecesal/M1/PDF/M1-prednasky-2-posloupnosti.pdf.

3. **ČERNÝ, Ilja.** *Úvod do inteligentního kalkulu.* Praha : Academia, 2002. ISBN 80-200-1017-3.

4. Limita funkce. *Přednášky MA z ČVUT.* [Online] 2. 5 2022. [Citace: 15. 6 2022.] http://km.fjfi.cvut.cz/ma/data/uploads/24_predn.pdf.

5. **POLÁK, Josef.** *Matematická analýza I - II. část.* Plzeň : Ediční středisko ZČU, 1992.

6. **NEČESAL, Petr.** 5 - Limita funkce a spojitost. *Přednášky z MA1.* [Online] 2. 11 2020. [Citace: 7. 6 2022.] http://home.zcu.cz/~pnecesal/M1/PDF/M1-prednasky-5-spojitost.pdf.

7. **CANUTO, Claudio a TABACCO, Anita.** *Mathematical Analysis I.* Milan : Springer, 2008. ISBN 978-88-470-0875-5.

8. **BROŽKOVÁ, Alena.** *Cvičení z matematické analýzy I.* Ostrava : Pedagogická fakulta v Ostravě, 1984.

9. **O'CONNOR, J J a ROBERTSON, E F.** Brook Taylor. *MacTutor.* [Online] 5 2000. [Citace: 14. 5 2022.] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taylor/.

10. —. Colin Maclaurin. *MacTutor.* [Online] 5 2017. [Citace: 15. 5 2022.] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Maclaurin/.

11. **DĚMIDOVIČ, Boris Pavlovič.** *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Havlíčkův Brod : Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1.

## SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ

Obrázek 1. Graf funkce $f(x) = \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$ ... 16
Obrázek 2. Graf funkce $f(x) = \frac{4x^5+3x^4+8x^2-12}{-2x^5-3x^3+12x^2+7x-15}$ ... 17
Obrázek 3. Graf aproximace $f(x) = e^x$ Taylorovými polynomy $T_0$ až $T_5$ ... 32
Obrázek 4. Graf aproximace $f(x) = ln(1+x)$ Taylorovými polynomy $T_1$ až $T_6$ ... 34
Obrázek 5. Graf aproximace $f(x) = sinx$ Taylorovými polynomy $T_1, T_3, T_5, T_7, T_9, T_{11}$ .. 35
Obrázek 6. Graf aproximace $f(x) = cosx$ Taylorovými polynomy $T_0, T_2, T_4, T_6, T_8, T_{10}$ .. 36