

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Identifikace materiálových parametrů
pryžových segmentů tramvajových kol
se zohledněním viskoelastivity

Vypracoval:
Vedoucí diplomové práce:

Bc. Jan Hezko
Ing. Radek Kottner, PhD.

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou během studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a uvádím úplný seznam odborné literatury a pramenů, z nichž jsem čerpal.

Plzeň, 1. června 2012

.....

Abstrakt

Tato práce se zabývá popisem mechanických vlastností pryže, používané jako pružicí prvek v tramvajových kolech. Na trhacím stroji byly provedeny zkoušky jednoosým tahem, tlakem a prostým smykem. Pro výpočty byl vybrán materiálový model sestávající z Mooneyova-Rivlinova pětiparametrického modelu pro výpočet rovnovážné odezvy, modelu viskoelastivity pro velké deformace a modelu deformačního změkčení (Mullinsova efektu). V prostředí Matlab byly implementovány skripty pro identifikaci parametrů tohoto modelu. Využity byly optimalizační algoritmy a konečnoprvkové modely experimentů v systému MSC.Marc.

Abstract

This work deals with the description of mechanical properties of rubber that is used as a vibration-damping element in tram wheels. Tests in uniaxial tension, compression and simple shear have been made. The material model that was chosen consists of Mooney-Rivlin five-parameters material model for calculating the equilibrium response, of a viscoelasticity model for large deformations and of a model of strain-induced softening (Mullins' effect). Scripts for the identification of parameters of this model have been implemented in Matlab environment. Optimization algorithms and finite elements models in MSC.Marc were used.

Poděkování

V první řadě bych chtěl poděkovat vedoucímu práce, panu Ing. Radku Kottnerovi, PhD., za čas který mi věnoval, cenné rady a neustálou motivaci. Také děkuji panu Ing. Janu Krystkovi za provedení experimentů. Zvláštní dík patří slečně Ing. Lucii Musilové za pečlivou korekturu této diplomové práce a řadu podnětných připomínek.

Samozřejmě patří velký dík i mojí rodině a přátelům za vytrvalou materiální i duševní podporu při studiu.

Obsah

1	Úvod	1
2	Historický vývoj a současný stav problematiky	3
2.1	Složení pryže	3
2.2	Rozdělení pozorovaných jevů v mechanickém chování pryže	4
2.2.1	Nelineární elasticita	4
2.2.2	Viskoelasticita	5
2.2.3	Neelastické jevy nezávislé na čase	5
2.3	Identifikace parametrů materiálových modelů	6
3	Matematický model stavové úlohy	8
3.1	Kinematika	8
3.2	Konstitutivní vztahy	10
3.2.1	Hyperelastický materiál	11
3.2.2	Lineární viskoelasticita	13
3.2.3	Nelineární viskoelasticita	13
3.2.4	Porušení	15
3.3	Řešení stavové úlohy	17
3.3.1	Řešení metodou konečných prvků	17
4	Experimenty	20
4.1	Návrh a provedení experimentů	21
4.2	Zpracování naměřených dat	26
4.3	Teplotní závislost změřených dat	26
5	Identifikace	32
5.1	Cílová funkce	33
5.2	Jednorozměrná optimalizace C_{10}	34
5.3	Genetický algoritmus	35
5.4	Gradientní algoritmus	36
5.5	Výsledky identifikace	37
6	Závěr	42

Značení

Sloupcové matice - vektory - malými tučnými písmeny (např. \mathbf{x} , \mathbf{b}), matice velkými tučnými písmeny (např. \mathbf{A}). Neprolouženými malými písmeny s indexy jsou značeny složky vektorů. Horní index T značí transpozici.

T_g [K]	teplota skelného přechodu,
W [Jm ⁻³]	hustota deformační energie,
I_1, I_2, I_3 [-]	invarianty deformace,
S	druhý Piolův-Kirchhoffův tenzor napjatosti,
\mathbf{x} [m]	prostorové souřadnice,
\mathbf{y} [m]	materiálové souřadnice,
ρ [kgm ⁻³]	hustota,
f [Nm ⁻³]	objemová síla
\hat{u} [m]	předepsaný posuv,
$\hat{\sigma}$ [Pa]	předepsané napětí,
n_j [-]	složky vektoru vnější normály,
Ω	oblast, ve které se řeší okrajová úloha,
$\partial\Omega_1$	část hranice tělesa, na které jsou předepsány posuvy,
$\partial\Omega_2$	část hranice tělesa, na které jsou předepsána napětí,
\mathbf{u} [m]	vektor posunutí,
\mathbf{F} [-]	deformační gradient,
\mathbf{R} [-]	tenzor rotací,
\mathbf{U} [-]	pravý tenzor protažení,
\mathbf{V} [-]	levý tenzor protažení,
\mathbf{C} [-]	pravý Cauchyův-Greenův deformační tenzor,
\mathbf{E} [-]	Greenův deformační tenzor,
\mathbf{B} [-]	levý Cauchyův-Greenův deformační tenzor,
\mathbf{e} [-]	Almansiův deformační tenzor,
ε [-]	infinitesimální tenzor přetvoření,
λ [-]	poměrné protažení,
l [m]	délka elementu,
l_0 [m]	počáteční délka elementu,
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ [-]	hlavní poměrná protažení,
J	jakobián deformace,
E_{ijkl} [Pa]	složky elastického tenzoru,
C [Pa]	parametr neohookeovského modelu,
n [-]	počet polymerních řetězců na jednotku objemu,
T [K]	termodynamická teplota,
k	Boltzmannova konstanta,
ν	parametr neohookeovského modelu,
E [Pa]	Youngův modul pružnosti,
J_m [-]	druhý parametr Gentova modelu,
N [-]	počet segmentů molekulového řetězce,
p [Pa]	hydrostatický tlak,
$E(t)$	relaxační funkce (jádro),
$D(t)$	creepová funkce (jádro),
$D_1(t), D_2(t_1, t_2), \dots$	creepová jádra víceintegrálního modelu,

\mathbb{R}	množina všech reálných čísel,
$\delta^n [-]$	n -tý součinitel v Pronyho rozvoji hustoty deformační energie,
$\tau_{Cn} [s]$	n -tý relaxační čas v Pronyho rozvoji hustoty deformační energie,
$T_{ij}^n [Pa]$	vnitřní proměnná příslušná n -tému členu Pronyho řady,
$\Delta\sigma_{ij}(t_m) [Pa]$	přírůstek napětí v m -té časové vrstvě,
$\Delta T_{ij}^n(t_m) [Pa]$	přírůstek vnitřní proměnné příslušné n -tému členu Pronyho řady,
$\alpha [Jm^{-3}]$	parametr vývoje porušení materiálu,
$K(\alpha) [-]$	Kachanovův faktor,
$W_0(E) [Jm^{-3}]$	hustota deformační energie spočtená podle modelu bez porušení,
$d_\infty, d_1, d_2, [-]$	
$\eta_1, \eta_2 [Pa]$	parametry aditivního rozkladu Kachanovova faktoru,
$r [-], m [Jm^{-3}], \beta [-]$	parametry Ogdenova-Roxburghova modelu porušení,
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots [-]$	hodnoty deformací předepsaných při experimentu,
$\Delta t_1, \Delta t_2 [s]$	hodnoty časových prodlev předepsaných při experimentu,
$v [mm/min]$	rychlost zatěžování, tj. posuvu čelistí,
$\dot{\varepsilon}$ resp. $\dot{\gamma} [s^{-1}]$	časová změna (rychlost) deformace resp zkosu,
$C_{10}, C_{01} [Pa]$	parametry dvouparametrického Mooneyova-Rivlinova hyperelastického modelu,
$F [N]$	síla,
$A_0 [m^2]$	plocha nedeformovaného průřezu,
\mathbf{x}	vektor optimalizačních parametrů,
$f(\mathbf{x})$	cílová funkce při optimalizaci,
\mathcal{P}	přípustná množina,
$C_{10}, C_{01},$	
$C_{11}, C_{20}, C_{30} [Pa]$	parametry pětiparametrického Mooneyova-Rivlinova hyperelastického modelu,
C_0	startovací bod jednorozměrné optimalizace,
Δ	počáteční délka kroku jednorozměrné optimalizace,
$\langle a, b \rangle$	interval neurčitosti,
$\mathbf{x}_{R1}, \mathbf{x}_{R2}$	vektory rodičů v genetickém algoritmu,
$\bar{\mathbf{x}}$	vektor potomka,
$F(\mathbf{x}_{R1}, \mathbf{x}_{R2})$	operátor křížení,
$Ratio [-]$	parametr heuristického křížení,
$\mathbf{x}^{(j)}$	j -tá iterace gradientního algoritmu,
$\kappa [-]$	délka kroku gradientního algoritmu,
$\mathbf{d}^{(j)}$	směr postupu gradientního algoritmu v j -tém kroku,
$\nabla f(\mathbf{x}^{(j)})$	gradient cílové funkce f v bodě $\mathbf{x}^{(j)}$,
$h_j(\mathbf{x})$	funkce rovnostního omezení,
$g_k(\mathbf{x})$	funkce nerovnostního omezení,
R	počet rovnostních omezení,
S	počet nerovnostních omezení,

Seznam obrázků

1	Příklad ideální a reálné polymerní sítě.	4
2	Fyzikální modely elasticity pryže	11
3	Zobecněný Maxwellův model viskoelastického materiálu.	13
4	Závislost síly na čase, nová pryž při 20 °C	15
5	Závislost síly na posunutí, nová pryž při 20 °C	16
6	Síť použitá pro modelování tahu	18
7	Síť použitá pro modelování tlaku	19
8	Síť použitá pro modelování smyku	19
9	Druhy experimentů prováděných při studiu viskoelastických vlastností materiálů.	21
10	Tvary vzorků	22
11	Zkouška tahem. Posuv se měří pouze ve zúžené střední části, kde jsou deformace téměř homogenní.	23
12	Nehomogenní deformace při zkoušce tlakem	23
13	Ekvibiaxiální zkouška [24]. Vzorek ve tvaru tenkého plátu je natahován ve vodorovném směru. Je tak dosaženo stejného stavu deformace jako při stlačování ve svislém směru.	23
14	Předepsaný průběh zatěžování.	24
15	Vybočení vzorku při úplném odlehčení během tahové zkoušky, ke kterému dochází vlivem trvalých (nebo velmi pomalu relaxujících) deformací a vytažení materiálu z prostoru mezi čelistmi.	25
16	Zkouška prostým smykem	26
17	Zkouška tlakem, nová pryž. Změřená síla pro různé teploty.	28
18	Zkouška tlakem, použitá pryž. Změřená síla pro různé teploty.	29
19	Zkouška tahem, nová pryž. Změřená síla pro různé teploty.	30
20	Zkouška tahem, použitá pryž. Změřená síla pro různé teploty.	31
21	Typický tvar tzv. Mooneyova-Rivlinova grafu pro reálný materiál [37].	32
22	Znárodnění procesu identifikace	34
23	Porovnání identifikovaného modelu s experimentem – tlak.	38
24	Porovnání identifikovaného modelu s experimentem – tah.	39
25	Porovnání identifikovaného modelu s experimentem – smyk.	40

Seznam tabulek

1	Rozměry zkušebních vzorků.	21
2	Identifikované parametry modelu pro novou pryž při 20 °C.	37

1 Úvod

Elastomery jsou látky patřící mezi polymery, tedy látky tvořené dlouhými molekulovými řetězci. Do skupiny elastomerů bývá materiál obvykle řazen, má-li při běžných, nezvýšených, teplotách schopnost dosahovat velkých vratných (elastických) deformací již při působení malých napětí [25].

Elastomerní materiály nachází bezpočet aplikací. Dobrým příkladem jsou zejména různé tlumiče vibrací, těsnění a pneumatiky. Jde o aplikace, kde je využita přirozená schopnost elastomerů dosahovat velkých vratných deformací a dobré tlumicí schopnosti. Na druhou stranu dochází v elastomerech k rozličným jevům degradace a změnám mechanických vlastností, které je potřeba brát při návrhu v úvahu.

Mezi typické deformační vlastnosti elastomerů patří nelineární rovnovážná odezva, kterou je nutno brát v potaz má-li při provozu v součásti docházet k velkým deformacím. Dále je patrná výrazná závislost mechanických vlastností na teplotě, často se u pryže a podobných materiálů hovoří o tzv. *entropické elasticitě*, při které jsou vnitřní síly v materiálu důsledkem tepelného pohybu molekul. Dále má zejména v případě periodicky namáhaných součástí velký význam časově závislé chování – viskoelastická – disipace energie a s ní související deformační změkčení. V neposlední řadě je potřeba brát v úvahu i trvalé deformace a stárnutí materiálu v závislosti jak na historii zatěžování tak na vlivech prostředí.

Právě tyto vlastnosti a s nimi spojené jevy přinášejí i specifické požadavky na matematické modelování pryžových součástek. Neboť mají-li být uvedené vlastnosti patřičně využity a má-li být výsledná konstrukce spolehlivá, je nutné znát vlastnosti použitých materiálů a umět přesně předvídat podmínky ve fungujících součástkách.

Výše uvedené vlastnosti bývají vysvětlovány vnitřní stavbou elastomerů. Ta je diametrálně odlišná od kovových materiálů, převážně používaných při konstrukci strojních zařízení. Polymerní materiály, mezi které pryž patří, jsou tvořeny molekulami, jež mohou dosahovat makroskopických rozměrů. Jde o dlouhé molekulární řetězce nebo o celé sítě (např. v případě vulkanizovaných pryží nebo gelů). Mechanické vlastnosti takových materiálů výrazně závisí na mikroskopické stavbě, tj. na druhu vazeb mezi molekulovými řetězci, typické délce řetězců, apod.

Zahrnutí uvedených jevů do výpočtu skutečných konstrukcí je obrovskou výzvou. Je nutné mít k dispozici vhodné konstitutivní vztahy, metody diskretizace a metody k numerickému řešení vzniklých rovnic. Přibližně od čtyřicátých let minulého století bylo v tomto směru dosaženo nevídaného pokroku zejména poté, co rozmach výpočetní techniky umožnil snadnou implementaci numerických metod řešení okrajových úloh mechaniky kontinua, a tím také možnost testování matematických modelů i na složitých úlohách. V aplikacích jde při modelování pryžových dílů často o kontaktní úlohy, které jsou náročné samy o sobě. Ve vztahu k novým materiálovým modelům lze říci, že v současné době už i jejich odvozování probíhá s přihlédnutím k snadné algoritmizaci, případně lze na základě implementace upravit (sjednotit) pohled na již existující modely (př.: podobnost modelu viskoelastické a přírůstkové formulace plasticity).

Korektně formulovat okrajovou úlohu a nalézt její správné řešení může být

obtížný úkol. Ještě větším problémem však bývá dosažení dobré shody modelu se skutečně změřenými výsledky. Druhý z uvedených problémů zahrnuje volbu materiálového modelu a identifikaci jeho parametrů což je hlavním cílem této práce.

Přímoou motivací této práce je vývoj moderních tramvajových kol, která obsahují pryžové segmenty kvůli tlumení vibrací a hluku. Tyto segmenty jsou silně namáhány a závisí na nich funkčnost celku. Je proto kladen zvláštní důraz na jejich provedení, které je neustále předmětem výzkumu a inovací. Součástí celého procesu je samozřejmě numerické modelování kol, které předchází výrobě a zkoušení prototypů. Cílem této práce tedy bylo, v návaznosti na předchozí výzkum, vybrat vhodný materiálový model pro popis mechanických vlastností a identifikovat jeho parametry pro zadaný materiál. Sledovanými jevy byla především nelineární rovnovážná odezva a viskoelasticita. Později byl model rozšířen ještě o popis mikromechanického porušení (tzv. Mullinsův efekt).

V této práci sice byla zkoumána také závislost mechanických vlastností pryže na teplotě, nicméně zátím byl použit materiálový model bez teplotní závislosti. Výsledky pro různé teploty byly pouze kvalitativně porovnány mezi sebou.

Práce je organizována následujícím způsobem: V následující kapitole je stručně shrnut současný stav problematiky. Třetí kapitola podrobně rozebírá matematický model úlohy pružnosti, velká pozornost je věnována konstitutivním vztahům používaným při modelování pryže (kap. 3.2) a jsou uvedeny i metody, které byly použity k řešení těchto úloh (kap. 3.3). Ve čtvrté kapitole jsou popsány experimenty, potřebné pro identifikaci parametrů daného materiálu, jejich provedení a způsob zpracování naměřených dat. Čtvrtá kapitola popisuje samotné techniky identifikace pomocí optimalizačních algoritmů. V závěrečných dvou kapitolách jsou uvedeny dosažené výsledky a závěry pro jejich použití a připadnou další práci na tomto tématu.

2 Historický vývoj a současný stav problematiky

Vzhledem k širokému uplatnění pryže existují i různé nároky na její matematické modelování. Často jsou v praktické aplikaci dominantní jen některé z obvyklých vlastností elastomerů (nelineární elasticita, viskoelasticita, porušení materiálu, plastické deformace, teplotní závislost) a vliv ostatních lze zanedbat. Může to být způsobeno jak vlastnostmi konkrétního materiálu, tak způsobem namáhání. Analogickou situaci lze do jisté míry pozorovat i u matematických modelů. Často je konstitutivní vztah odvozen v takovém tvaru, aby dobře popisoval některý jev, ale jiné zcela ignoruje. Lze tedy nalézt i různá rozšíření předchozích modelů, nebo úplně nové modely, které jsou od začátku odvozeny tak, aby zahrnovaly i dříve zanedbávané vlivy.

Takto bylo odvozeno velké množství konstitutivních vztahů, schopných vždy s jistou mírou přesnosti popsat některé jevy v mechanickém chování elastomerů. Často je také shoda modelu se skutečností omezena na jistý rozsah deformací, rychlosti deformace, případně jen na některé módy namáhání. Modely lze podle způsobu odvození rozdělit do tří skupin [20]. Fyzikální modely nějakým způsobem reflektují vnitřní stavbu materiálu a fyzikální zákony. Jiné modely jsou odvozeny na základě termodynamických zákonů. Je to např. Schaperyho nelineární viskoelastický model v [42]. Třetí skupinou jsou modely fenomenologické, které mají takový tvar, aby s jejich pomocí bylo možno dobře popsat makroskopické chování materiálu a lépe se hodí k popisu materiálu jako kontinua.

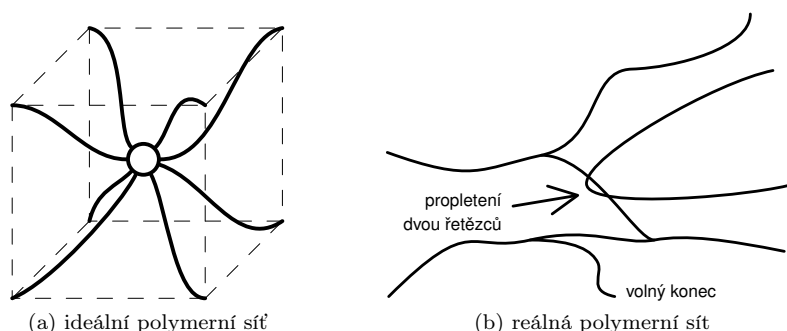
V neposlední řadě je jistě vhodné zmínit, že uváděné modely nejsou vázány jen na modelování pryže, ale používají se také například v biomechanice, neboť mnohé tkáně mají podobnou stavbu a následně vykazují i podobné vlastnosti jako průmyslově používané polymery. Viskoelastické modely se používají k modelování dynamického chování plastů a na nich založených kompozitů.

2.1 Složení pryže

Jak již bylo naznačeno v úvodu, skládá se pryž z polymerních řetězců. Aby byla vyloučena možnost nevratného toku molekul, je nutné dosáhnout při výrobě určitého stupně zesíťování, tj. propojení řetězců vazbami, především chemickými. Záleží na chemickém složení, jaký typ vazeb a pomocí jakého činidla lze v daném materiálu vytvořit. Míra zesíťování je jedna z vlastností, kterou se elastomery mohou lišit od ostatních polymerních materiálů [25]. Má také výrazný vliv na jejich tuhost, rozsah vratných deformací, míru disipace a tvar tahové křivky [22].

Vazby mezi molekulovými řetězci působí skutečně jako kinematické vazby při pohybu molekul a mají tedy přímý vliv na deformační vlastnosti materiálu. Změny v zesíťování se pak projevují jako změny tuhosti, trvalé deformace nebo naopak pomalé obnovení tuhosti během déletrvajcího odlehčení, zvláště za zvýšené teploty [21, 30]. Brownův pohyb molekul polymerní matrice zase vysvětluje časově závislé chování materiálu (relaxaci napětí, creep) a zčásti i výraznou teplotní závislost mechanických vlastností. Typický esovitý tvar tahové křivky slabě zesíťovaných elastomerů se mimo jiné vysvětluje tak, že materiál při velkých deformacích krystalizuje a zesíťování se zahušťuje vlivem zvýšení podílu pevné fáze [25, 39].

Kromě chemických vazeb mohou být mezi molekulami polymeru také tzv.



Obrázek 1: Příklad ideální a reálné polymerní sítě.

fyzikální vazby. Jsou to vazby prostřednictvím částic plniva (např. sazí) nebo kontaktu (zapletení) řetězců v reálné polymerní síti (viz obr. 1). Samotné polymerní řetězce jsou ohebné, neboť v jednoduchých chemických vazbách může docházet k rotacím. Molekula polymeru tak může v prostoru zaujímat různé polohy – tzv. *konformace* [22].

Aby byla patrná entropická elasticita, musí být polymerní matrice zesíťována řídkce. Díky tomu je umožněn dostatečně volný pohyb molekulových řetězců, ale díky zesíťování je stále zamezeno viskóznímu toku molekul polymeru [25]. S rostoucím stupněm zesíťování se ovšem zvyšuje i teplota skelného přechodu T_g pod níž materiál ztrácí schopnost velkých vratných deformací a v deformačním chování materiálu se již entropická elasticita neprojevuje [39].

2.2 Rozdělení pozorovaných jevů v mechanickém chování pryže

2.2.1 Nelineární elasticita

Deformační chování pryže je možné rozdělit na elastické a inelastické. Elastické chování lze pozorovat při velmi pomalém, tzv. kvazistatickém, zatěžování. Při dostatečně pomalém zatěžování je materiál ve stavu termodynamické rovnováhy (resp. velmi blízko). Je-li rovnovážná odezva materiálu – napětí – funkcí pouze deformace, materiál se nazývá hyperelastický. Matematické modely těchto materiálů jsou popsány v kap. 3.2.1.

Hyperelastické chování pryže bylo úspěšně modelováno už od čtyřicátých let dvacátého století. Nejdříve byly analyticky řešeny jednodušší úlohy. Lze nalézt i poměrně zajímavé výsledky odvozené z velmi obecných předpokladů. Například řešení nehomogenních deformací odvozené pouze za předpokladu, že deformační energie W je funkcí invariantů deformace I_1 a I_2 (viz [37], vysvětlení pojmů v kap. 3.2.1). S rozvojem numerického modelování na počítačích lze řešit i úlohy velmi složité co do geometrie, zatěžování a materiálových vlastností.

Mezi obvyklé modely hyperelastických materiálů patří (kromě Hookeova zákona): jednoparametrický neohookeovský model, který vychází z termodynamické teorie elasticity, dále dvouparametrický Mooneyho-Rivlinův model, později zobecněný pro vyšší počty parametrů, Ogdenův, Gentův nebo model Arruda-Boyce. U neohookeovského a dvouparametrického Mooneyova-Rivlinova

modelu se uvádí dobrá shoda s tahovými experimenty pro malé a střední hodnoty deformací. Modely s více parametry jsou schopny popsat dobře i velké tahové deformace. U novějšího Ogdenova to může být až do 700 % [26]. Na druhou stranu se u těchto modelů často stává, že při dobré shodě s experimentem v jednom módu namáhání není dobrá shoda v jiných módech.

Modely jsou obvykle formulovány pro nestlačitelný materiál, ale lze je rozšířit i o uvažování stlačitelnosti. Takové modely lze potom použít i pro modelování jiných druhů materiálů než pryže, např. pěn nebo plastů. Samotná pryž je většinou modelována jako izotropní materiál, přestože tento předpoklad nemusí být platný vzhledem k technologii výroby nebo změnám v materiálu vlivem historie zatěžování. Uvažování anizotropie ale zdaleka není výjimkou, zejména při výpočtech pneumatik a jiných vláknů vyztužených konstrukcí (viz např. [44]) nebo v biomechanice.

2.2.2 Viskoelasticita

Dalším výrazným jevem v deformačním chování pryže je časová závislost – viskoelasticita. V praxi se při modelování různých materiálů často pracuje s lineárním viskoelastickým modelem. Jeho výhodou je jednoduchost a množství analyticky odvozených vztahů mezi sledovanými veličinami. Také fyzikální význam veličin, se kterými lineární viskoelastický model pracuje, je většinou zřejmý. Vyčerpávající přehled lze najít např. v monografiích [5] nebo [18].

Při modelování elastomerů, stejně jako mnoha plastů, je kvůli velkým dosažovaným deformacím nutno používat nelineární varianty. Existují jedno- a víceintegrální modely, modely Schaperyho typu nebo např. model Bergstrom-Boyce [1, 2, 5]. Z uvedených jsou často používány modely Schaperyho typu pro svoji značnou variabilitu. Velmi podrobně se jim věnuje článek [20], kde je popsáno jak jejich odvození, tak identifikace parametrů modelu na základě experimentů s polypropylenovými vzorky. Původně byl model publikován v článku [40] pro výpočet napětí při zadané deformaci a ve zprávě [41] obráceně. Článek [9] nebo Rooijackers ve své dizertační práci [38] se zabývají způsoby numerické implementace Schaperyho modelu, což je u nelineárních modelů obecně problém. V systému MSC.Marc je implementován model viskoelasticity založený na práci Govindjee a Simo, kteří se v osmdesátých a devadesátých letech zabývali viskoelastickým chováním a porušením pryže (viz dále). Jejich postup a další odkazy lze nalézt např. v člancích [36] nebo [43]. Nevýhodou nelineárních modelů také často bývá, že obsahují funkce závislé na druhu materiálu či jeho stavbě, které se těžko zjišťují při jiné aplikaci, než pro kterou byly odvozeny.

2.2.3 Neelastické jevy nezávislé na čase

Kromě časově závislých vlivů na mechanické vlastnosti materiálu lze pozorovat ještě další jevy, například závislost na maximální dosažené deformaci (tzv. *Mullinsův efekt*) nebo plastické deformace. Deformační změkčení je u elastomerů často vysvětlováno jako porušení (angl. damage) na mikroskopické úrovni a souvisí s řadou dalších jevů, jako je např. opětovný nárůst tuhosti v odlehčeném materiálu, zvláště za zvýšených teplot. Mullinsův efekt byl zaznamenán již na počátku dvacátého století v článku [4] a ve třicátých letech Holtem v [15]. Název nese po Leonardu Mullinsovi, který realizoval v tomto směru velké množství měření na vulkanizovaných pryžích, viz [29, 30]. Teorie

vysvětlující mechanismus deformačního změkčení existují dvě. Mullins a Tobin [30, 31], Hardwood a Payne označují jako příčinu krystalizaci vyvolanou deformačním cyklem. Bueche, Dannenberg a Rigbi uvádí, že mechanismem deformačního změkčení je pohyb částic plniva vzhledem k polymerní matici. Nevýhodou první skupiny teorií je, že zahrnuje stavy daleko od termodynamické rovnováhy, a porozumění uvedenému mechanismu zatím není dostačující. Obecně lze říci, že neelastické jevy souvisí se změnami v zesíťování polymeru a při jejich modelování se tedy často uplatňuje mikromechanický přístup.

Vliv porušování materiálu na jeho mechanické vlastnosti lze na makroskopické úrovni uvažovat jednoduše pomocí tzv. Kachanovova faktoru [16, 27]. Jeho konkrétní předpisy pro použití při modelování pryže jsou např. aditivní rozklad implementovaný v systému MSC.Marc založený na mikromechanickém modelu Govindjee a Simo [11, 12], novější čistě fenomenologický model Ogden-Roxburgh [33], či Qi-Boyce [35]. Pro neizotropní materiály je tento přístup odvozen v [16].

2.3 Identifikace parametrů materiálových modelů

Pro jednodušší materiálové modely, jako je neohookeovský nebo dvouparametrický Mooneyův-Rivlinův model, lze pro jednoduché případy namáhání odvodit vztahy užitečné při identifikaci parametrů těchto modelů. Významným příkladem je tzv. Mooneyova-Rivlinova rovnice, pomocí níž lze zjistit hodnoty parametrů dvouparametrického Mooneyova-Rivlinova modelu z grafu tahové zkoušky. Více viz kap. 5. Jednoduchým způsobem zkoušení mechanických vlastností pryže je měření tvrdosti. Existují vzorce pro výpočet parametrů lineárního elastického modelu z obvykle udávaných hodnot tvrdosti (např. podle Shorea nebo Brinella). Není ale možné z nich určit nelineární odezvu ani viskoelastické chování.

V současnosti pro identifikaci parametrů materiálových modelů z experimentálních dat existují softwarové nástroje. Často jsou součástí komerčních konečnoprvkových softwarových balíků, ale existují i samostatné aplikace, např. program mCalibration. Obvykle je potřeba zadat data z několika zkoušek v různých modech namáhání (tah, tlak, smyk, víceosá zkouška). Naměřená data musí být přepočtena na napětí a poměrné deformace (přičemž měřené veličiny jsou síla a posunutí). Poté se ladí parametry modelu tak, aby byla minimální odchylka ve smyslu nejmenších čtverců. Výpočetně náročnější, ale zřejmě přesnější způsob identifikace spočívá v modelování celého experimentu, např. metodou konečných prvků, čímž se odstraní nutnost přepočtu měřených veličin na poměrné deformace a napětí. Tento postup bývá viděn v pracích, které se zabývají složitějšími modely elastomerů nebo plasticity (např. [34]).

Pro samotný proces identifikace parametrů (tj. minimalizace odchylky výsledků modelu od experimentu) se používají optimalizační algoritmy. Často postačí některý gradientní algoritmus (např. [8] – identifikace materiálových parametrů kompozitu sestávajícího z viskoelastických vláken a hyperelastické matrice), ale v případě nelineárních materiálových modelů, zvláště s dalšími (geometrickými) nelinearitami, je obvykle nutné použít některou z technik globální optimalizace. Tato oblast je v posledních letech velmi progresivní. Algoritmy schopné globální optimalizace jsou hojně používány, což dále motivuje jejich vývoj. Příklady takových algoritmů jsou: genetické algoritmy, trust-region algoritmus, metoda rojení částic (tzv. *swarm particle optimization*) nebo

metoda simulovaného žíhání (angl. *simulated annealing*). Tyto metody velmi často využívají heuristiku k odhalení potenciálních oblastí minima, neboť systematické prohledávání přípustné oblasti je, zejména s rostoucí dimenzí úlohy, neúnosně náročné. Přehledný výklad a seznam algoritmů a jejich charakteristik lze nalézt např. v [32]. Ve verzi Matlabu R2010a se už oficiálně nachází toolbox pro globální optimalizaci, kde je řada uvedených metod implementována, přičemž už dříve bylo možné najít řadu projektů, které globální optimalizaci nějakým způsobem řešily (např. *gatbx* – toolbox implementující genetický algoritmus).

3 Matematický model stavové úlohy

Matematický model úlohy mechaniky kontinua obvykle sestává z rovnic rovnováhy, z kinematických rovnic a z konstitutivních vztahů. Poslední uvedené vyjadřují vlastnosti materiálu. Pro řešení konkrétní úlohy je také třeba doplnit okrajové a počáteční podmínky.

V případě úlohy elasticity pro velké deformace lze uvedené vztahy zapsat v kartézských souřadnicích jako [17]:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(S^{ij} + S^{ip} \frac{\partial u^j}{\partial x^p} \right) = -\rho f^i, \quad x \in \Omega, \quad (1a)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^l}{\partial x^i} \frac{\partial u_l}{\partial x^j} \right), \quad x \in \Omega, \quad (1b)$$

$$S^{ij} = S^{ij}(E_{kl}(t), t), \quad x \in \Omega, \quad (1c)$$

$$u_i = \hat{u}_i, \quad x \in \partial\Omega_1, \quad (1d)$$

$$\left(S^{ij} + S^{ip} \frac{\partial u^j}{\partial x^p} \right) n_j = \hat{\sigma}^i, \quad x \in \partial\Omega_2. \quad (1e)$$

Uvedené vztahy jsou: rovnice rovnováhy (1a), kinematická rovnice (1b), konstitutivní vztah (1c) a okrajové podmínky (1d) a (1e). Veličiny vystupující v těchto rovnicích jsou: druhý Piolův-Kirchhoffův tenzor napjatosti S , prostorové souřadnice x , posuvy u , hustota ρ , objemová síla f , Greenův deformační tenzor E , posuvy \hat{u} předepsané na části hranice $\partial\Omega_1$, napětí $\hat{\sigma}$ předepsané na části hranice $\partial\Omega_2$ a vektor vnější normály n .

3.1 Kinematika

Při popisu pohybu tělesa v prostoru lze v různých časových okamžicích zaznamenat jeho polohu - konfiguraci. Přirozený význam mají počáteční (nedeformovaná) a aktuální (deformovaná) konfigurace. Každému bodu tělesa lze přiřadit souřadnice a to:

- Materiálové (Lagrangeovy) souřadnice y_i jsou přiřazené materiálovému bodu (částici), sledují jeho pohyb v čase.
- Prostorové (Eulerovy) souřadnice x_i jsou spojeny s bodem v nehybném prostoru.

Vztah mezi materiálovými a prostorovými souřadnicemi je popsán invertovatelnými funkcemi

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t), \quad (2a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t). \quad (2b)$$

Pro malé (infinitesimální) deformace oba přístupy (Eulerův a Lagrangeův) splývají. Eulerův přístup se využívá spíše v mechanice tekutin, zatímco při popisu kinematiky pevných těles je obvyklý Lagrangeův přístup a bude zde proto uvažován nadále. V numerických výpočtech lze při uvažování velkých deformací rozlišit ještě tzv. totální (*total*) nebo aktualizovanou (*updated*) lagrangeovskou formulaci. V první z nich se bere za referenční konfiguraci počáteční (nedeformovaná). Naproti tomu v aktualizované lagrangeovské formulaci se bere za referenční vždy konfigurace z předchozí časové hladiny.

Pole posuvů je [6]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{y}. \quad (3)$$

Deformace tělesa se vyjadřuje pomocí tzv. deformačního gradientu

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}. \quad (4)$$

Jeho polární rozklad

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (5)$$

definuje tenzor rotací \mathbf{R} (ortogonální) a pravý resp. levý tenzor protažení \mathbf{U} resp. \mathbf{V} (oba pozitivně definitní a symetrické) [3].

Tenzory přetvoření jsou potom [6, 17, 44]:

- Materiálové:

- pravý Cauchyův-Greenův deformační tenzor $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$,
- Greenův deformační tenzor $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$

- Prostorové:

- levý Cauchyův-Greenův deformační tenzor $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$,
- Almansiův deformační tenzor $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1})$.

- Infinitesimální tenzor přetvoření $\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \right)^T \right)$.

V literatuře se často objevuje vyjádření deformace pomocí tzv. *poměrných protažení* λ . Odpovídají tenzorům protažení a jsou obvykle zavedena následujícím způsobem:

$$\lambda = \frac{l}{l_0} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = 1 + \varepsilon, \quad (6)$$

kde l a l_0 značí skutečnou a počáteční délku elementu, $\Delta l = l - l_0$ je přírůstek délky a ε hodnota poměrné deformace. *Hlavní poměrná protažení* jsou poměrná protažení ve směrech hlavních os deformace, značí se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Pokud tedy myšlenkově vyjmeme element materiálu ve tvaru jednotkové krychle s hranami ve směrech hlavních os deformace, její hrany budou mít po deformaci délky $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Častým způsobem, jak vyjádřit míru deformace izotropního materiálu jsou tzv. invarianty deformace. Při popisu elastomerů se obvykle píší ve tvaru [39]:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (7)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2, \quad (8)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \quad (9)$$

Pomocí Cauchyova deformačního tenzoru $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ se invarianty vyjádří jako

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2), \quad I_3 = J^2 = \det \mathbf{C}, \quad (10)$$

kde J je tzv. jakobián deformace

$$J = \det \mathbf{F}. \quad (11)$$

3.2 Konstitutivní vztahy

Konstitutivní vztahy vyjadřují vlastnosti materiálu, např. vztah mezi napětím a deformací, případně teplotou nebo dalšími veličinami. Tato práce se zabývá pouze závislostí napětí na historii zatěžování. Teplotní ani jiná závislost mechanických vlastností nebyla v konstitutivních vztazích uvažována.

Jak již bylo naznačeno v úvodu, uplatňují se při výpočtech pryžových dílů především následující materiálové modely: hyperelastický model pro ustálenou odezvu, viskoelastický pro časově závislé chování a modely mikromechanického porušení pro deformační změkčení. Někdy bývá uvažováno i plastické chování pryže, ale v této práci nebylo do výpočtů zahrnuto.

V následujících podkapitolách jsou dílčí modely podrobně vysvětleny.

U modelů, které mají popisovat více jevů zároveň (např. nelineární ustálenou odezvu a zároveň viskoelasticitu), bývá obvyklé skládat model z několika větví (například tedy z elastické a viskoelastické). Přitom v každé větvi platí vztah popisující příslušný jev a celková deformační energie se skládá z dílčích podle zvolené topologie. Často bývají větve řazeny paralelně a výsledná deformační energie je tedy součtem dílčích.

Teoreticky odvozené konstitutivní vztahy by měly vyhovovat termodynamickým zákonům, obvykle vyjádřeným ve formě Clausiovy-Duhamovy nerovnosti, často – zejména v případě tzv. fyzikálních modelů, viz dále – se proto při odvozování vychází přímo z ní (viz např. [20, 38]).

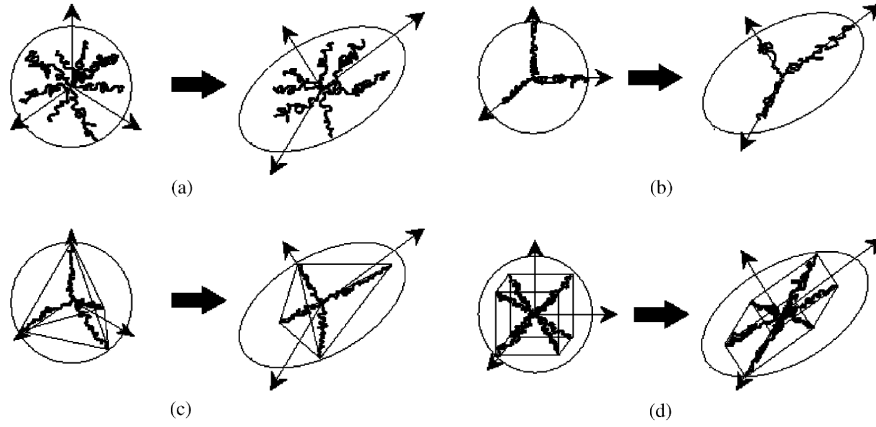
Podle filozofie odvození a významu materiálových modelů je možno rozlišit dvě skupiny modelů.

Tak zvané *fyzikální modely* jsou založeny na modelování vnitřní stavby elastomerů pomocí nástrojů statistické mechaniky. Názornou představu o modelech tohoto typu lze získat z obr. 2. Obvykle se předpokládá určité rozložení molekulových řetězců a vzdálenost konců molekulového řetězce je náhodná veličina. Zpočátku byla volena s normální hustotou pravděpodobnosti. Tyto modely ovšem nedosahují typického esovitého tvaru tahové křivky, což dalo vzniknout tzv. *negaussovským modelům*. Lze je chápat tak, že zohledňují konečnou délku molekulového řetězce. Častý je model používající inverzní Langevinovu funkci. Dalším typickým předpokladem je afinita deformací, to znamená, že deformace řetězců v mikroskopickém měřítku jsou stejné jako makroskopické deformace [22]. Také tento předpoklad je v poslední době předmětem zkoumání – viz např. [23].

Jiným typem konstitutivních vztahů jsou fenomenologické modely. Ty mají takový tvar, který odpovídá pozorovaným jevům v makroskopickém měřítku. Oproti fyzikálním modelům mohou být také vhodnější pro implementaci [12].

Modely závislé na historii zatěžování vychází obvykle ve formě integrální nebo diferenciální rovnice. Ta se pro potřeby numerických výpočtů vyjadřuje pomocí *vnitřních proměnných*. Těmi mohou být např. deformace nebo napětí v jednotlivých větvích modelu (elastické, viskoelastické, atd.). V případě lineárně viskoelastického modelu je volba vnitřních proměnných dána jednoznačně, tj. použití napětí a deformací je ekvivalentní díky linearitě modelu a faktu, že různé míry deformace resp. napětí pro malé deformace přechází v infinitesimální tenzory deformace resp. napětí. U nelineárních modelů tomu tak již není [36].

Disipativní jevy lze rozdělit do dvou skupin: na modely, které explicitně závisí na čase (*time dependent inelastic behavior*), tj. jsou popsány funkcí ve



Obrázek 2: Fyzikální modely elasticity pryže [21]: a) full chain, b) 3 chain, c) 4 chain, d) 8 chain model.

tvary $P(\varepsilon(t), \mu(t), t)$. Sem patří viskoelasticita. Druhá skupina jsou modely, které na čase explicitně nezávisí (*time independent inelastic behavior*), tj. jsou popsány funkcí ve tvaru $P(\varepsilon(t), \mu(t))$, sem patří např. plasticita nebo porušení.

3.2.1 Hyperelastický materiál

Definován je tak, že existuje potenciálová funkce W taková, že napětí závisí pouze na stavu deformace:

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}}. \quad (12)$$

Jednotlivé modely jsou potom udávány jako předpis pro funkci hustoty deformační energie W . Příklady:

- Lineárně elastický materiál (Hookeův zákon), W je kvadratická funkce:

$$W = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad (13)$$

kde E_{ijkl} jsou složky elastického tenzoru.

- Neohookeovský model:

$$W = C(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \quad (14)$$

jehož parametr C lze vyjádřit pomocí Youngova modulu pružnosti E jako $C = E/6$. Původně byl zaveden Treloarem ve tvaru [37]:

$$W = \nu n k T (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3). \quad (15)$$

Zde číslo n značí počet polymerních řetězců na jednotku objemu, T je absolutní teplota, $k = 1,3806503 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kgs}^{-2} \text{ K}^{-1}$ je Boltzmannova konstanta a ν konstanta, která závisí na zvoleném molekulovém modelu.

- Empirický Gentův model [10]:

$$W = -\frac{E}{6}J_m \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m}\right), \quad (16)$$

kde parametr J_m vyjadřuje vliv konečné délky molekulových řetězců a s ním související esovitě prohnutí tahové křivky. Tento model lze použít v libovolném rozsahu deformací $I_1 - 3 < J_m$ bez ztráty stability.

- Fyzikální model Arrudy-Boyce, tzv. *eight-chain model* (viz obr. 2):

$$W = NkT\sqrt{n}\left(\beta\lambda_{chain} - \sqrt{n}\ln\left(\frac{\sinh\beta}{\beta}\right)\right), \quad (17a)$$

kde N je počet segmentů řetězce, k Boltzmannova konstanta, T absolutní teplota, n počet řetězců v zesíťovaném polymeru a

$$\lambda_{chain} = \sqrt{\frac{I_1}{3}}, \quad \beta = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda_{chain}}{\sqrt{n}}\right), \quad (17b)$$

kde I_1 je první invariant levého Cauchyova tenzoru deformace a \mathcal{L}^{-1} je tzv. inverzní Langevinova funkce. Platí

$$\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}. \quad (17c)$$

- Obecný tvar Mooneyova-Rivlinova modelu:

$$W = \sum_{i,j} C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j, \quad (18)$$

kde C_{ij} jsou parametry modelu a i a j jsou celá (nezáporná) čísla. V této práci byl použit pětiparametrický Mooneyův-Rivlinův model (též zvaný Jamesův-Greenův-Simpsonův):

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3. \quad (19)$$

Jak již bylo zmíněno v kap. 3.1 lze deformační energii izotropního materiálu (za nějž se pryž obvykle považuje) vyjádřit v závislosti na invariantech deformace

$$W = W(I_1, I_2, I_3). \quad (20)$$

Předpokládá-li se navíc nestlačitelnost materiálu, což je další typická vlastnost pryže, je třetí invariant

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 \quad (21)$$

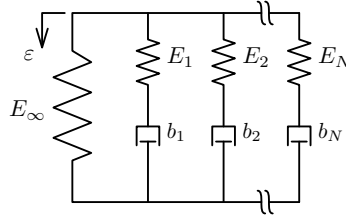
a deformační energie už je jen funkcí prvních dvou invariantů

$$W = W(I_1, I_2). \quad (22)$$

Napětí je v případě nestlačitelného materiálu

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} - p\delta_{ij}, \quad (23)$$

kde p je hydrostatický tlak a δ_{ij} Kroneckerovo delta. Hydrostatický tlak lze chápat také jako Lagrangeův multiplikátor příslušný podmínce nestlačitelnosti.



Obrázek 3: Zobecněný Maxwellův model viskoelastického materiálu.

3.2.2 Lineární viskoelastická

V případě lineární viskoelasticity je vztah mezi napětím a deformací dán tzv. *Boltzmannovým konvolučním integrálem* [18]:

$$\sigma(t, \varepsilon(t)) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (24)$$

nebo ekvivalentně

$$\varepsilon(t, \sigma(t)) = \int_0^t D(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (25)$$

Funkce $E(t)$ a $D(t)$ se nazývají relaxační resp. creepová funkce (nebo též jádro). Lze si je představit jako odezvu materiálu na buzení jednotkovým skokem. Z linearity uvedeného modelu plyne mnoho dalších jeho užitečných vlastností, například vztahy pro převod mezi časovou a frekvenční oblastí nebo možnost vyšetřovat ustálenou dynamickou odezvu jako statickou úlohu s komplexními hodnotami posuvů. Jsou také známy vztahy pro výpočet závislostí viskoelastických parametrů na teplotě.

Relaxační jádro $E(t)$ se obvykle volí ve tvaru součtu exponenciál – tzv. *Pronyho řady*:

$$E_{ijkl}(t) = E_{ijkl}^\infty + \sum_{n=1}^N E_{ijkl}^n \exp(-t/\lambda_n). \quad (26)$$

Tato volba odpovídá reprezentaci materiálu pomocí lineárních pružin a tlumičů sestavených do tzv. zobecněného Maxwellova modelu (viz obr. 3). V případě prostorové deformace se obvykle uvažuje rozvoj (26) pro smykové moduly.

Linearitou se v případě viskoelastického materiálu myslí linearita vzhledem k průběhu deformací, tj. pro libovolná zatížení $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ (jednou diferencovatelných a integrovatelných) a libovolná čísla α , $\beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\sigma_{ij} \left(\alpha \varepsilon_{ij}^{(1)} + \beta \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) = \alpha \sigma \left(\varepsilon_{ij}^{(1)} \right) + \beta \sigma \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} \right),$$

kde $\sigma_{ij}(\cdot)$ je napětí jako funkce deformace a $i, j = 1, 2, 3$.

3.2.3 Nelineární viskoelastická

Nelineárních modelů viskoelastického chování existuje více, ale nepoužívají se často. Jedna možnost jsou vztahy s více integrály a několika integrálními jádry,

kteřé jsou navíc funkcemi více proměnných [5]:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t D_1(t - \tau_1) d\sigma(\tau_1) + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t D_2(t - \tau_1, t - \tau_2) d\sigma(\tau_1, \tau_2) + \dots \quad (27)$$

Jiný přístup je zahrnout nelinearitu do funkce vyjadřující míru deformace $\phi(t, \varepsilon)$ nebo napětí $\psi(t, \sigma)$:

$$\varepsilon(t, \sigma) = \int_{-\infty}^t D(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \psi(\tau, \sigma) d\tau, \quad (28)$$

$$\phi(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t D(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (29)$$

Novější Schaperyho model je popsán vztahy [19, 38]

$$\sigma(t, \varepsilon) = h_\infty E_\infty \sigma(t) H(t) + h_1 \int_{0^-}^t \tilde{E}(\psi - \psi') \left(\frac{d(h_2 \cdot \varepsilon(\tau) H(\tau))}{d\tau} \right) d\tau, \quad (30)$$

$$\psi(t, \varepsilon) = \int_0^t \frac{dt}{a_\varepsilon(t)} \quad \text{a} \quad \psi'(\tau, \varepsilon) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{a_\varepsilon(\tau)}. \quad (31)$$

Protože byla hlavní motivací této práce potřeba modelovat celá tramvajová kola, včetně pryžových segmentů, v komerčním konečněprvkovém systému, bylo žádoucí, aby byl zvolený model již implementován ve stávající verzi tohoto softwaru. Byl proto zvolen model, v němž je hustota deformační energie vyjádřena formálně podobným vztahem jaký popisuje lineárně viskoelastický model, tj. pomocí Pronyho řady:

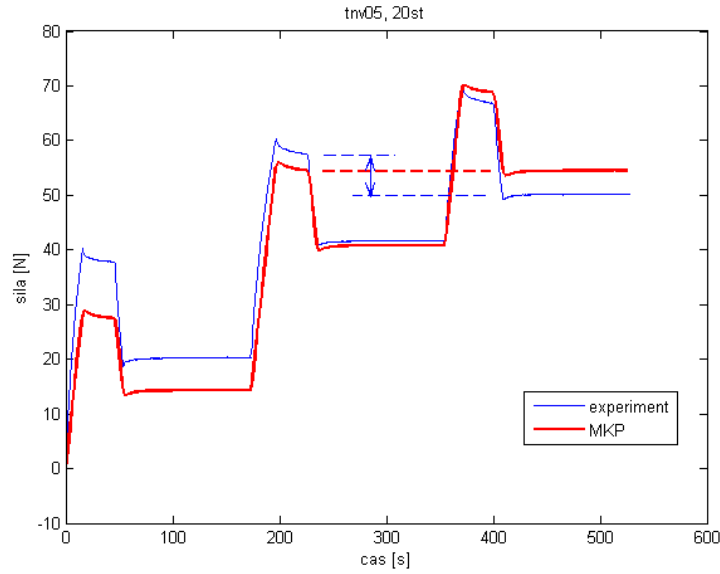
$$W = W^\infty + \sum_{n=1}^N \delta^n W^0 \exp(-t/\tau_{Cn}), \quad (32)$$

kde multiplikátory δ^n a relaxační časy τ_{Cn} jsou parametry modelu, W^0 je okamžitá hustota deformační energie a W^∞ je limita při $t \rightarrow \infty$ (při relaxaci). Pro napětí platí obdoba vztahu (12)

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = S_{ij}^\infty + \sum_{n=1}^N T_{ij}^n. \quad (33)$$

Členy T_{ij}^n jsou hodnoty vnitřních proměnných, které vyjadřují vliv předchozí historie zatěžování na současný stav materiálu. Jejich použití umožňuje převést úlohu definovanou integrálním vztahem (nebo diferenciální rovnicí) na rekurentní formulaci. Evoluční rovnice, která popisuje vývoj vnitřních proměnných v čase je

$$T_{ij}^n = \int_0^t \delta^n \sigma_{ij}^0(\tau) \exp(-(t - \tau)/\tau_{Cn}) d\tau \quad (34)$$



Obrázek 4: Závislost síly na čase, nová pryž při 20 °C. Porovnání změřených dat s výsledkem identifikovaného modelu bez porušení. Je znázorněna rovnovážná hodnota síly, ke které se model blíží, což ovšem neodpovídá experimentu.

kde $\sigma_{ij}^0(\cdot)$ jsou hodnoty napětí spočtené pomocí některého hyperelastického modelu.

Rekurentní formulace pro diskrétní časové hladiny je

$$\Delta\sigma_{ij}(t_m) = \left(1 - \sum_{n=1}^N (1 - \beta^n(\Delta t)) \delta^n\right) (\sigma_{ij}^0(t_m) - \sigma_{ij}^0(t_m - \Delta t)) \quad (35)$$

$$- \sum_{n=1}^N \alpha^n(\Delta t) T_{ij}^n(t_m - \Delta t),$$

$$\Delta T_{ij}^n(t_m) = \beta^n(\Delta t) \delta^n (\sigma_{ij}^0(t_m) - \sigma_{ij}^0(t_m - \Delta t)) \quad (36)$$

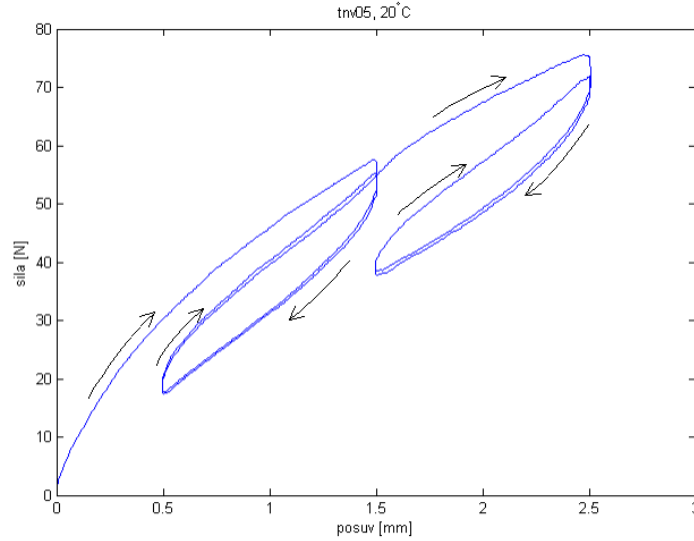
$$- \alpha^n(\Delta t) T_{ij}^n(t_m - \Delta t),$$

ve kterých $\Delta\sigma_{ij}(t_m)$ a $\Delta T_{ij}^n(t_m)$ značí přírůstky veličin mezi m -tou a $(m+1)$ -ní časovou vrstvou a byla zavedena substitute

$$\alpha^n = 1 - \exp(-\Delta t/\tau_{Cn}) \quad \text{a} \quad \beta^n = \alpha^n \frac{\tau_{Cn}}{\Delta t}. \quad (37)$$

3.2.4 Porušení

Porušením se v této práci myslí porušení na mikroskopické úrovni. V makroskopickém měřítku se projevuje jako pokles tuhosti materiálu (viz obr. 4 a 5). Jako mechanismus tohoto jevu se obvykle označuje změna v zesíťování polymeru.



Obrázek 5: Závislost síly na posunutí, nová pryž při 20 °C. Je patrný pokles tuhosti při odlehčení pod maximální dosaženou deformaci. Při dalším zatížení navazuje průběh na původní křivku.

Zmíněný pokles tuhosti lze pro isotropní materiál vyjádřit jednoduchým vztahem [16]

$$W = K(\alpha) \cdot W_0(\varepsilon). \quad (38)$$

Deformační energie W_0 se počítá podle některého modelu bez porušení. Proměnná α vyjadřuje míru poškození materiálu a pro model použitý v této práci je definována jako

$$\alpha(t) = \max_{\tau \in (0,t)} W_0(\varepsilon(\tau)). \quad (39)$$

Součinitel K lze předsat různými způsoby. V této práci byl použit aditivní rozklad, implementovaný v systému Marc:

$$K(\alpha) = d^\infty + \sum_{n=1}^2 d_n \exp\left(-\frac{\alpha}{\eta_n}\right), \quad (40)$$

kde d_∞ , d_1 , d_2 , η_1 , η_2 jsou parametry modelu [27]. Z podobných modelů je možné zmínit například novější Ogdenův-Roxburghův model:

$$K = 1 - \frac{1}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{W_{max} - W}{m - \beta W_{max}}\right). \quad (41)$$

Parametry modelu jsou: r , m , β . Tzv. chybová funkce (*error function*) je definována jako

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (42)$$

Kromě těchto modelů existuje řada dalších, často založených na popisu vnitřní stavby materiálu. Jsou to například modely Qi-Boyce, Simo-Govindjee, Bergstrom-Boyce.

V uvedeném modelu se porušení díky použití vztahu (39) projevuje stejně pro všechny módy deformace. Například lze tedy po zatížení v tahu pozorovat pokles tuhosti i při následném zatížení v tlaku.

3.3 Řešení stavové úlohy

V prvních fázích této práce byla stavová úloha (1) řešena za předpokladu homogenní deformace v měřené části zkušebních vzorků. Za tohoto předpokladu je $\varepsilon = konst.$ pro $\forall x \in \Omega$ a původní soustava parciálních diferenciálních rovnic přejde na obyčejnou diferenciální rovnici. Tu lze ekvivalentně vyjádřit pomocí integrálního vztahu a následně v přírůstkové formulaci, která je výhodná pro numerické řešení odezvy v čase (např. napětí $\sigma = \sigma(t)$) při zadaném buzení (zde průběh deformace $\varepsilon = \varepsilon(t)$).

Uvedený předpoklad homogenních deformací umožňuje provést přepočít změřených dat (posuvu a síly) na poměrné veličiny (deformace a napětí). Vlivem nehomogenních deformací (viz kap. 4), dosahovaných při experimentech, se ovšem tímto postupem vnášela do výpočtu velká chyba. Zmenšení tohoto druhu chyb bylo dosaženo modelováním experimentů pomocí metody konečných prvků s uvažováním pokud možno všech relevantních aspektů, např. kontaktu a tření podstav vzorku o čelisti trhacího stroje v případě tlakové zkoušky.

3.3.1 Řešení metodou konečných prvků

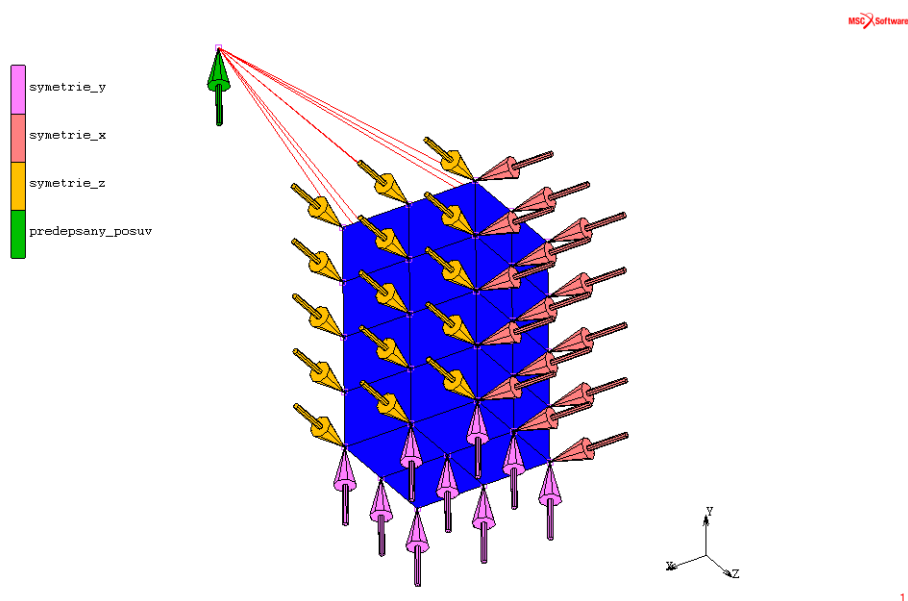
Vzhledem k použití konečněprvkových modelů k vyčíslení cílové funkce při optimalizaci bylo nutné snížit výpočtový čas na minimum, samozřejmě při zachování potřebné přesnosti výsledků.

Prvním krokem bylo proto uvažování všech symetrií. V případě modelu zkoušky tahem byla uvažována symetrie podle rovin xy , yz a xz . Tlaková zkouška byla modelována jako osově symetrická úloha. Zkouška prostým smykem nebyla použita pro identifikaci, ale pouze pro ověření výsledků. Smyková zkouška byla modelována symetricky podle roviny xz .

V případě zkoušky tlakem a smykem byly experimenty modelovány jako kontaktní úlohy. Tlaková zkouška obsahovala kontakt se třením s koeficientem tření mezi vzorkem a čelistí trhacího stroje $f = 0,4$. Smyková zkouška obsahovala kontakt typu *glue*, tj. uzlům v kontaktu s kontaktní plochou je zakázán pohyb vzhledem k této ploše. V obou modelech byla vždy jedna kontaktní plocha v klidu a druhé byl předepsán takový časový průběh posuvu, jaký byl změřen při odpovídajícím experimentu. U tlakové zkoušky to byl posuv

Následovala volba hustoty sítě. Na začátku byly vybrány zkušební parametry materiálového modelu, identifikované dříve, a pro každý model byla zvolena síť s nejmenší možnou hustotou danou geometrií úlohy. Síť byla postupně zahušťována a sledoval se rozdíl ve výsledcích po sobě jdoucích simulacích (s různou hustotou sítě). Když už nebyl patrný výrazný rozdíl, byla příslušná síť prohlášena za dostatečně jemnou a použita při optimalizaci.

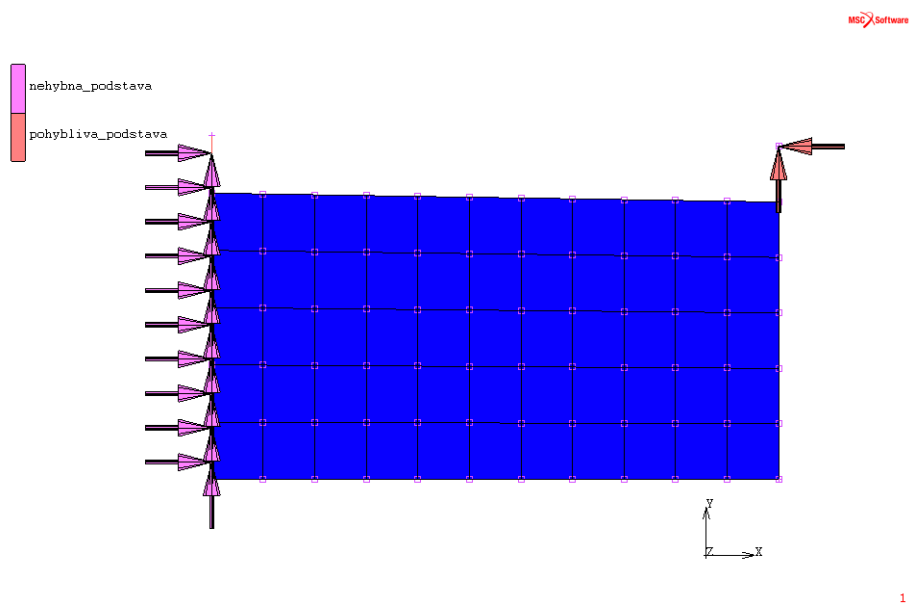
Pro modelování nestlačitelných materiálů je (v systému MSC.Marc) vyžadován typ prvků, který kromě posuvů aproximuje i hydrostatický tlak



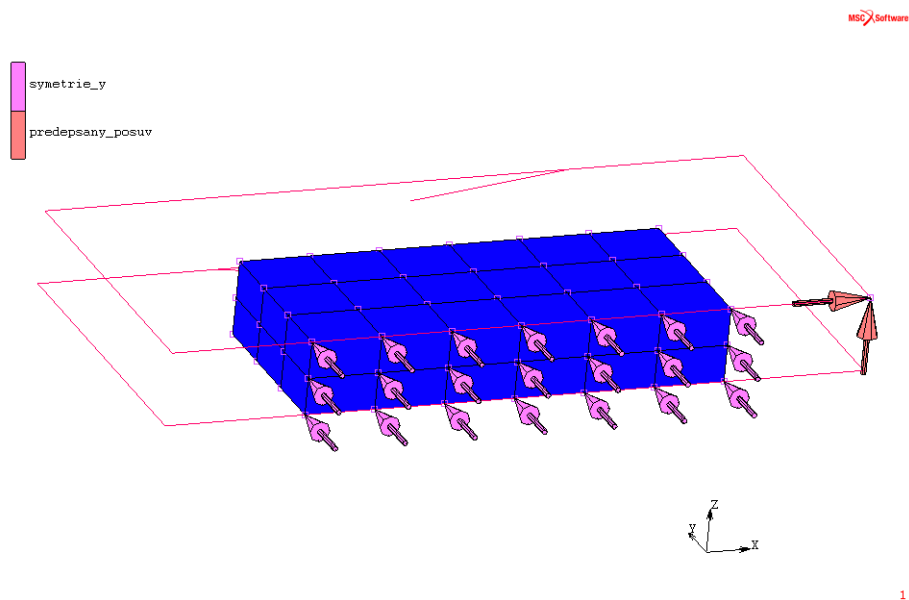
Obrázek 6: Síť použitá pro modelování tahu. Šipky znázorňují okrajové podmínky – symetrie podle tří rovin a zatížení předepsaným posunutím. Červené spojnice uzlů jsou tzv. *linky*. Jejich prostřednictvím se přenáší síly ve směru osy y mezi uzly na horní podstavě a uzlem, v němž byla předepsána deformace.

a používá smíšený variační princip (tzv. *Hermannova formulace*). V kontaktních úlohách se doporučuje používat prvky nižšího řádu [28]. Pro simulaci tlakové zkoušky byly použity čtyřuzlové rovinné prvky. Modely tahové a smykové zkoušky byly vytvořeny z osmiuzlových prostorových prvků. Uvedené typy prvků uchovávají hodnotu hydrostatického tlaku v jednom uzlu, který je umístěn uprostřed prvku. Hodnota tlaku je na prvku aproximována konstantní hodnotou. Tyto vnitřní uzly se používají pouze při výpočtu matice tuhosti prvku, při sestavování globální matice tuhosti se již neuvažují.

Na obrázcích 6, 7 a 8 jsou zobrazeny použité sítě s okrajovými podmínkami. V případě tahové zkoušky byla modelována pouze zúžená střední část vzorku, na které byl měřen posuv extenzometrem.



Obrázek 7: Síť použitá pro modelování tlaku. Šipky znázorňují nepohyblivou podstavu a předepsané posunutí pohyblivé podstavy.



Obrázek 8: Síť použitá pro modelování smyku. Červené obdélníky, rovnoběžné s rovinou xy , jsou kontaktní plochy, šipky znázorňují okrajové podmínky (symetrii ve směru osy y a předepsaný posuv pohyblivé kontaktní plochy, který zároveň obsahuje i zakázaný posuv ve směru osy z).

4 Experimenty

Při experimentálním zkoumání vlastností materiálu je nutno uspokojivě vyřešit dvě skupiny problémů:

- Jak navrhnout zkoušku, aby z ní bylo možné zjistit ty vlastnosti materiálu, které jsou cílem výzkumu.

V případě této práce, kdy stojí v popředí zájmu nelineární elasticita a viskoelasticita, to znamená především zvolit vhodně mody namáhání, rozsah deformací, kterých se má dosáhnout, a rychlost zatěžování.

- Jak dosáhnout navrženého průběhu zkoušky.

Sem spadají například následující problémy: jaký zvolit tvar vzorků, jejich upnutí do trhačích stroje, jak měřit deformace vzorků nebo jak se vypořádat s případnými nežádoucími jevy.

Při zjišťování odezvy materiálu v rovnovážném stavu je nutná co možná nejnižší rychlost zatěžování, aby se omezily dynamické jevy. Při identifikaci hyperelastického modelu se obvykle materiál několikrát předzatíží v předepsaném rozsahu deformací, aby nebyl patrný Mullinsův efekt [7].

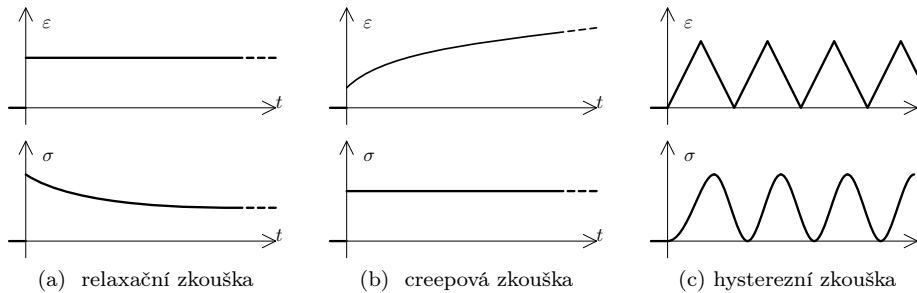
Má-li být současně zkoumán i vliv historie zatěžování na odezvu materiálu (tj. např. porušení pryže jak je popsáno v kap. 3.2.4) je nutné zvolit takovou historii zatěžování, která není prostou funkcí v čase.

Experimenty prováděné při zjišťování viskoelastických vlastností materiálů lze podle časového průběhu zatížení rozdělit na následující (případně mohou být jejich kombinací):

- **Relaxační nebo creepová zkouška:** V případě relaxační zkoušky je vzorek zatížen předepsanou skokovou deformací a zaznamenává se síla, viz obr. 9a. U creepové zkoušky je předepsáno zatížení skokovou silou a zaznamenává se deformace, viz obr. 9b. Je-li předpokládána lineární viskoelasticita, dává síla změřená při relaxační zkoušce po přepočtu na napětí přímo relaxační jádro $E(t)$ integrálu v (24). Podobně poměrná deformace zjištěná při creepové zkoušce je creepová funkce $D(t)$ v (25).
- **Hysterezní zkouška:** Na rozdíl od výše uvedených předpokládá konečnou rychlost zatěžování (vyjádřenou např. pomocí rychlosti deformace $\dot{\epsilon}$) a průběh zatížení je tedy funkce spojitá v čase. Viz obr. 9c.

Pro dobrý popis materiálové nelinearity se doporučuje identifikovat parametry materiálového modelu ze zkoušek ve více modech namáhání (tah, tlak, smyk) [26, 27]. Zejména u fenomenologických modelů není nijak zaručeno, že při dobré shodě v jednom modu (tah) nastane shoda i u jiných typů namáhání (tlak) [22].

Při obvyklém způsobu identifikace je snaha dosáhnout při experimentech co možná nejvíce homogenní deformace, aby bylo možné provést přepočet změřených veličin – síly a posuvu – na napětí a poměrné deformace a chyba přitom nebyla příliš velká.



Obrázek 9: Druhy experimentů prováděných při studiu viskoelastických vlastností materiálů.

označení vzorku	d_1 [mm]	d_2 [mm]	c [mm]
knv26	25,66	26,47	26,27
kpv25	25,27	26,09	24,93

(a) vzorky pro tlak

označení vzorku	t [mm]	b [mm]
tnv05	5,08	6,03
tpv05	4,74	6,02

(b) vzorky pro tah

označení vzorku	t [mm]	b [mm]	c [mm]
snnv05	5,30	26,26	30,05
spv05	4,92	25,20	30,04

(c) vzorky pro smyk

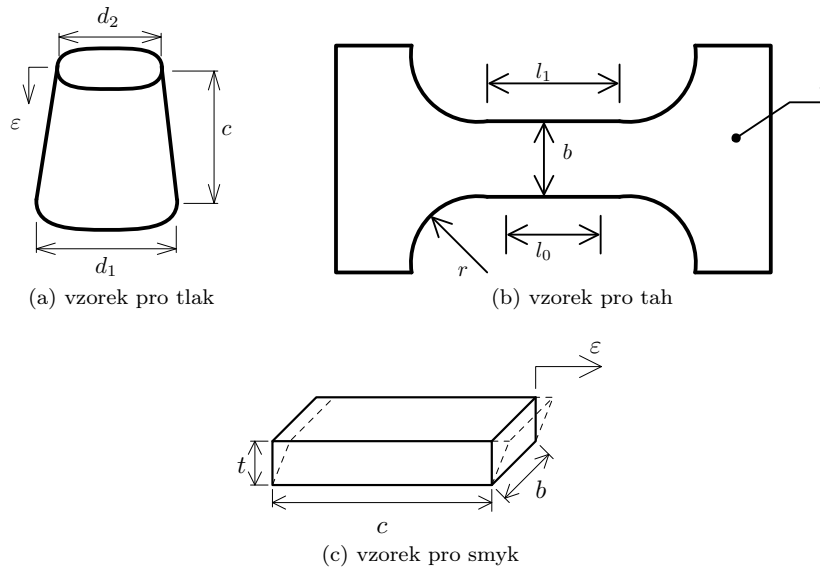
Tabulka 1: Rozměry zkušebních vzorků.

4.1 Návrh a provedení experimentů

Výrobcem tramvajových kol byly dodány segmenty z pryže, jejíž materiálový model měl být identifikován. Velikostí těchto segmentů byly omezeny i rozměry zkušebních vzorků. Tvar vzorků je znázorněn na obr. 10, rozměry (podstatné pro experiment) jsou uvedeny v tab. 1). U tahové zkoušky byla raménka extenzometru nastavena na měřenou délku $l_0 = 10$ mm.

V laboratoři Katedry mechaniky Západočeské univerzity v Plzni je k dispozici trhací stroj Zwick/Roell Z050 s ručkovým extenzometrem a teplotní komorou. Na tomto stroji byly provedeny zkoušky tahem, tlakem a prostým smykem při teplotách 20°C , 50°C a 100°C a to jak s novou pryží, tak s materiálem, který už byl předtím rok v pracovních podmínkách. Každý experiment (tj. každý druh namáhání, teplota i druh pryže) byl proveden se třemi vzorky. Vzorky byly označeny následujícím způsobem:

- podle typu zatížení písmeny: k tlak, t tah, s smyk,
- podle typu pryže: n nová, p použitá (která byla předtím již rok v provozních podmínkách),



Obrázek 10: Tvar vzorků pro tlakovou, tahovou a smykovou zkoušku. Nestejná velikost podstav vzorku pro tlakovou zkoušku je způsobena technologií řezání vodním paprskem. U vzorku pro smykovou zkoušku je přerušovanou čarou naznačen tvar deformovaného vzorku.

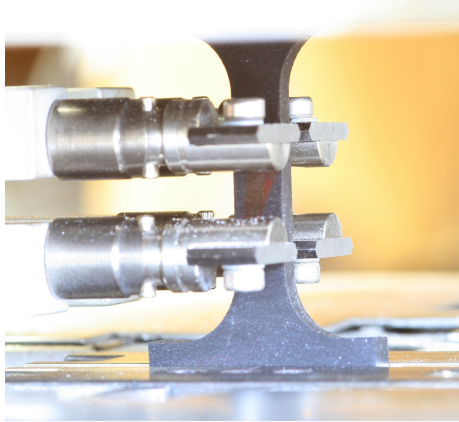
následuje písmeno v , značící viskoelastickou zkoušku, charakteristický rozměr vzorku (např. 26 značí výšku vzorku pro tlak z nové pryže, nebo 05 u vzorků pro tah či smyk) a nakonec pořadové číslo vzorku daného typu. Příklad: `knv26_3` je v pořadí třetí vzorek pro zkoušku tlakem z nové pryže.

Pro dosažení homogenních deformací se používají různé postupy. V případě tahových vzorků (obr. 11) je jich dosaženo vhodným tvarem zkušebních vzorků – ve zúžené střední části. Při jednoosém tlaku (vzorky mají nejčastěji tvar válce) dochází k vyboulení pláště vzorku vlivem tření mezi podstavami vzorku a čelistmi trhačího stroje (obr. 12). Tento problém lze řešit mazáním podstav vzorku, nicméně v praxi se boulení pláště tímto postupem zabránit nepodařilo. Jednoosou tlakovou zkoušku je možné nahradit víceosou (tzv. ekvibiaxiální) zkouškou, při které je stav deformace ve vzorku stejný (viz obr. 13). K té je ovšem potřeba speciální měřicí přístroj a polotovary pro zhotovení vzorků musí mít dostatečnou velikost.

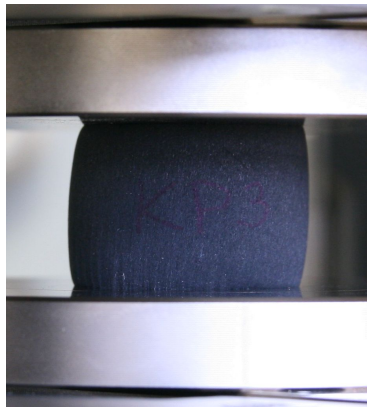
Na základě [20] byl zvolen časový průběh zatěžování kombinující hysterezní a relaxační zkoušku, je znázorněn na obr. 14. Konkrétní hodnoty deformací a časových prodlev byly:

- Pro zkoušky při různých teplotách: $\varepsilon_1 = 10\%$, $\varepsilon_2 = 5\%$, $\varepsilon_3 = 20\%$, $\varepsilon_4 = 15\%$, $\varepsilon_5 = 25\%$, $\Delta t_1 = 30\text{ s}$ a $\Delta t_2 = 120\text{ s}$.
- Pro zkoušky při 20°C , z nichž se prováděla identifikace: $\varepsilon_1 = 15\%$, $\varepsilon_2 = 5\%$, $\varepsilon_3 = 25\%$ a $\Delta t_1 = 60\text{ s}$.

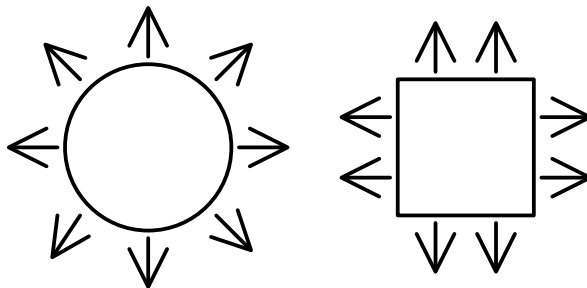
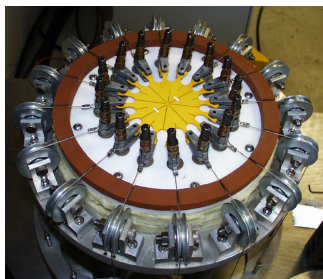
Vzhledem k významu složek tenzoru deformace jsou v případě prostého smyku předepsané hodnoty zkosů dvojnásobné.



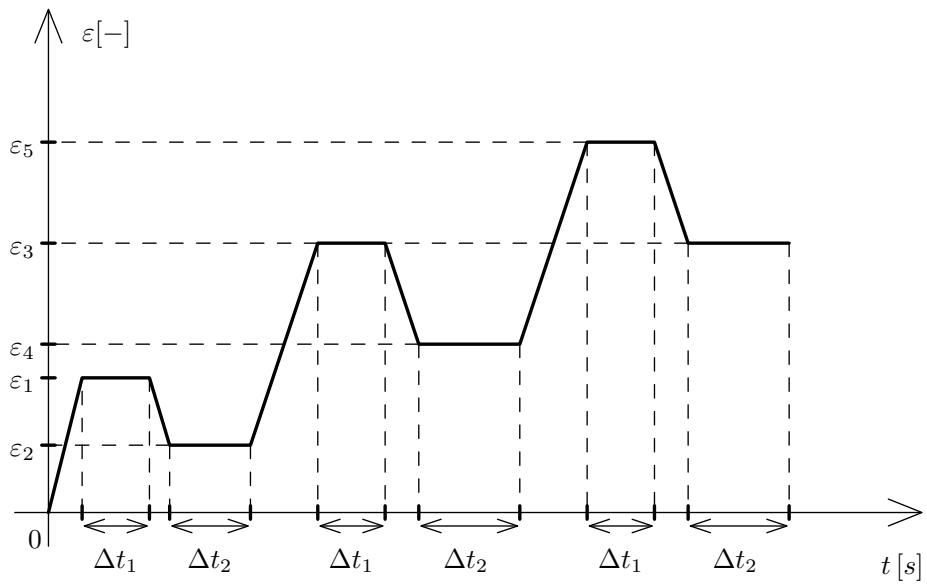
Obrázek 11: Zkouška tahem. Posuv se měří pouze ve zúžené střední části, kde jsou deformace téměř homogenní.



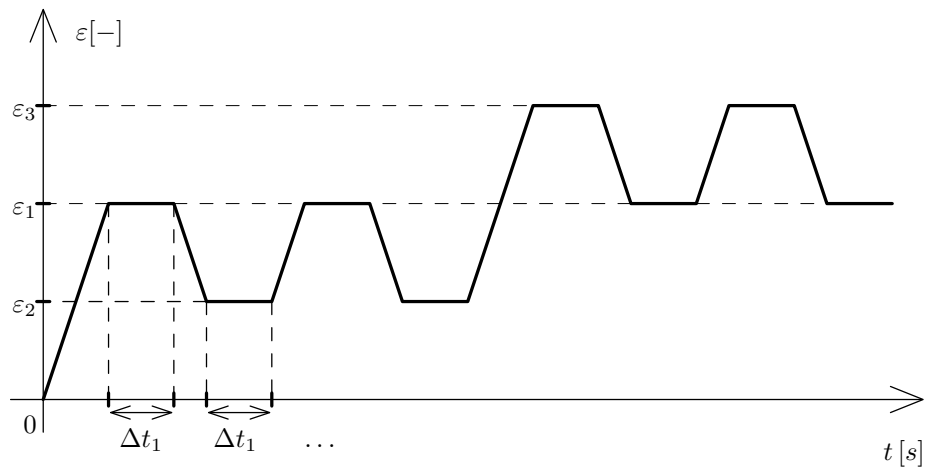
Obrázek 12: Nehomogenní deformace při zkoušce tlakem. Vyboulení stěn je způsobeno třením mezi podstavami a čelistmi trhačického stroje.



Obrázek 13: Ekvibiaxiální zkouška [24]. Vzorek ve tvaru tenkého plátu je natahován ve vodorovném směru. Je tak dosaženo stejného stavu deformace jako při stlačování ve svislém směru.

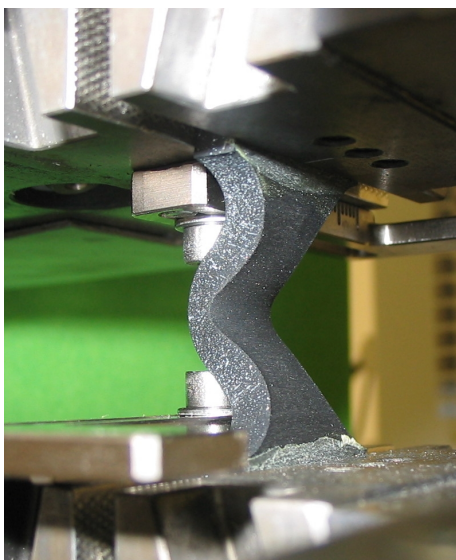


(a) Zkoušky při různých teplotách



(b) Zkoušky, při 20 °C, z nichž byla provedena identifikace.

Obrázek 14: Předepsaný průběh zatěžování.



Obrázek 15: Vybočení vzorku při úplném odlehčení během tahové zkoušky, ke kterému dochází vlivem trvalých (nebo velmi pomalu relaxujících) deformací a vytažení materiálu z prostoru mezi čelistmi.

U zde zkoumaného materiálu nebylo možné vzorek při zkoušce odlehčit až na nulovou deformaci, neboť se objevovaly trvalé deformace. U tahových vzorků docházelo vlivem těchto deformací k vybočení vzorků (obr. 15) a tlakové vzorky naopak zůstávaly v kontaktu s čelisti jen jednou podstavou.

Dalším praktickým problémem je vytahování vzorků z čelisti při tahové zkoušce. Nejčastěji je způsobeno nekonstantní tloušťkou vzorku. Nekonstantní tloušťka tahových vzorků je stejně jako kuželovitost tlakových vzorků způsobena technologií řezání vodním paprskem, jež byla použita k přípravě vzorků z dodaných pryžových segmentů.

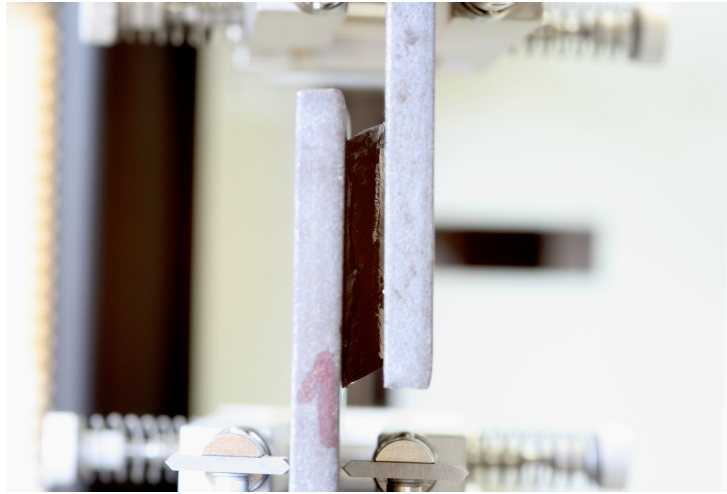
Zvláštní kapitolou jsou smykové vzorky. Ty jsou tvořeny pryžovým kvádrem nalepeným dvěma protilehlými podstavami ke kovovým plátům, které slouží k upnutí do čelistí trhačího stroje (obr. 16). V první řadě použité lepidlo zvyšuje tuhost vrstvy pryže v blízkosti lepeného povrchu. Druhým problémem při smykových zkouškách je odlepování pryže od plechů, ke kterému dochází už při teplotě 50 °C.

Dohodou s výrobcem tramvajových kol byla stanovena rychlost zatěžování $v = 10 \text{ mm/min}$ pro tlakové vzorky, pro ostatní vzorky byl proveden následující přepočet, aby byla zachována *poměrná rychlost zatěžování*.

Vzorek pro tlak má přibližně tvar válce, jehož počáteční výška je 25 mm (platí pro vzorek z použité pryže – vzorky z nového materiálu měly výšku 26 mm, ale tento rozdíl při výpočtu rychlosti zatěžování nebyl uvažován). Poměrná rychlost deformace je tedy

$$\dot{\epsilon} = \frac{v}{l_0} = \frac{10 \text{ mm/min}}{25 \text{ mm}} = \frac{2}{5} \text{ min}^{-1}. \quad (43)$$

Při tahové zkoušce byla počáteční měřená délka vzorků (tj. vzdálenost ramének



Obrázek 16: Zkouška prostým smykem. Kvádrové vzorky jsou nalepeny na ocelových plátech, které jsou upnuty do čelistí trhačím stroje nastavených pro tahovou zkoušku. Extenzometr snímá posuv kovového plátu.

extenzometru) $l_0 = 10$ mm. Rychlost posuvu potom vychází

$$v = l_0 \cdot \dot{\epsilon} = 10 \text{ mm} \cdot \frac{2}{5} \text{ min}^{-1} = 4 \text{ mm/min.} \quad (44)$$

Vzorky na prostý smyk měly tloušťku $t = 5$ mm a rychlost posuvu podstavy tedy vychází

$$v = t \cdot \dot{\gamma} = 2 \cdot t \cdot \dot{\epsilon} = 2 \cdot 5 \text{ mm} \cdot \frac{2}{5} \text{ min}^{-1} = 4 \text{ mm/min.} \quad (45)$$

4.2 Zpracování naměřených dat

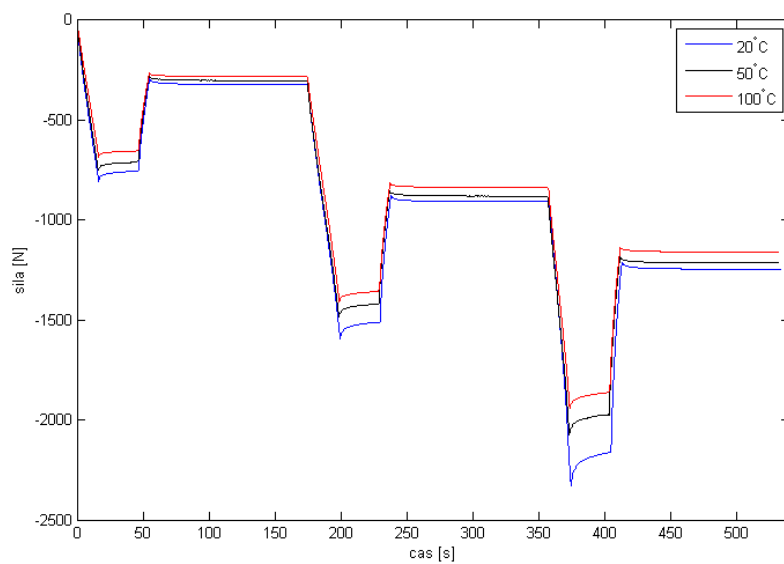
Při každém experimentu (tj. pro každý mód namáhání, každou teplotu a druh pryže) byly získány tři sady dat (pro každý zkušební vzorek jedna). Zaznamenávané veličiny byly čas, síla, posunutí příčnicku a posunutí měřené extenzometrem. Všechny tři sady dat byly převzorkovány tak, že byl uvažován časový interval od počátku zkoušky do konce nejkratší z nich a na tomto intervalu bylo rovnoměrně rozmístěno 5000 bodů – časových hladin. Pro každou časovou hladinu byl vypočítán aritmetický průměr sledovaných veličin (síla a posunutí) na každé časové hladině. Tato data potom sloužila jako základ pro konečněprvkové simulace zkoušek (do modelů byly dosazeny hodnoty posunutí v závislosti na čase jako předepsané zatížení) a pro porovnávání vypočtené a změřené síly. Protože bylo cílem popsat i jevy související s trvalými deformacemi, nebylo prováděno posunutí změřených křivek do počátku, což je postup doporučovaný při identifikaci hyperelastických vlastností materiálu [21, 24].

4.3 Teplotní závislost změřených dat

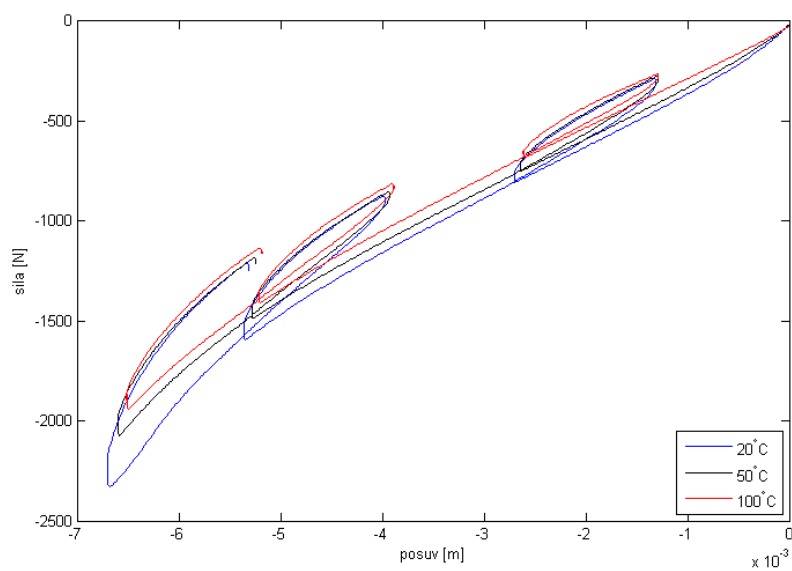
Pro sledování závislosti vlastností materiálu na teplotě byly provedeny tahové a tlakové zkoušky při teplotách 20 °C, 50 °C a 100 °C. V obou případech byla

rychlost zatěžování 10 mm/min. Porovnání změřené síly v tahu a tlaku je vyneseno v obrázcích 17–20.

Z grafů je patrné, že s vyšší teplotou je tuhost nižší. Výjimkou je nová pryž v tahu, kde byla opakovaně zjištěna při 100 °C při větších deformacích nepatrně větší tuhost než při 50 °C. Při zkouškách smykem docházelo k odlepování vzorků již při teplotě 50 °C a porovnání tedy nebylo provedeno.

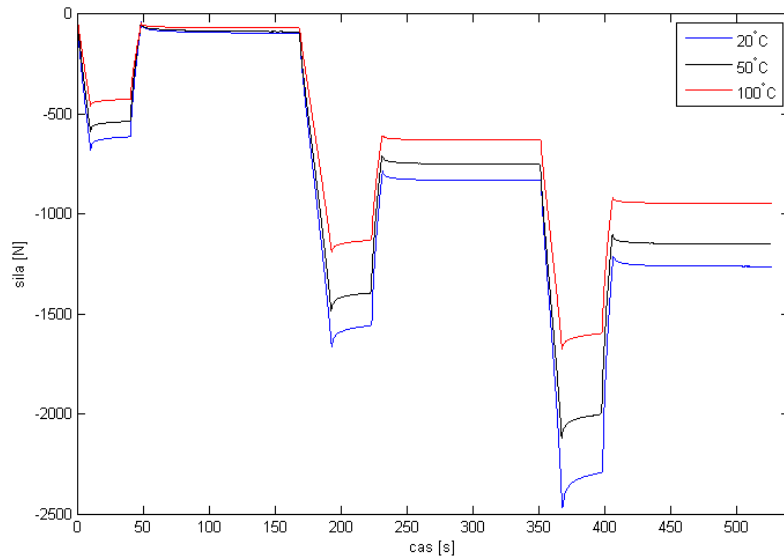


(a) Síla v závislosti na čase.

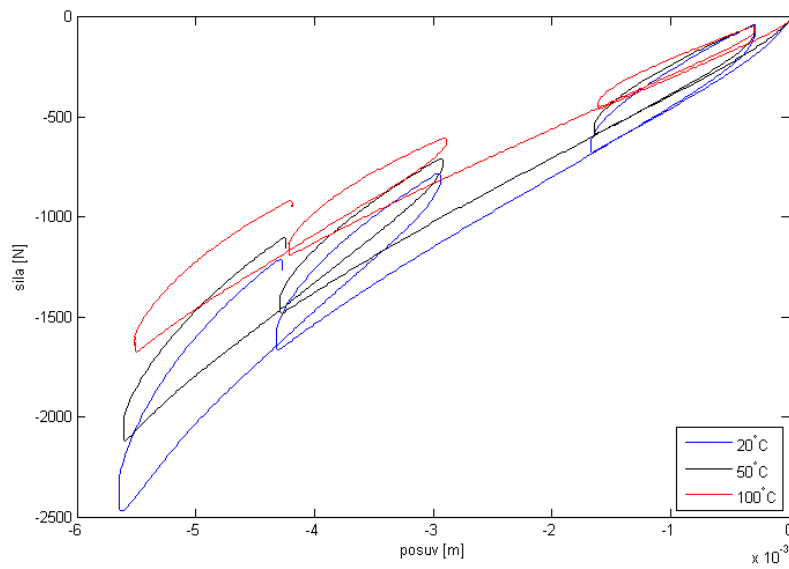


(b) Síla v závislosti na posunutí.

Obrázek 17: Zkouška tlakem, nová pryž. Změřená síla pro různé teploty.

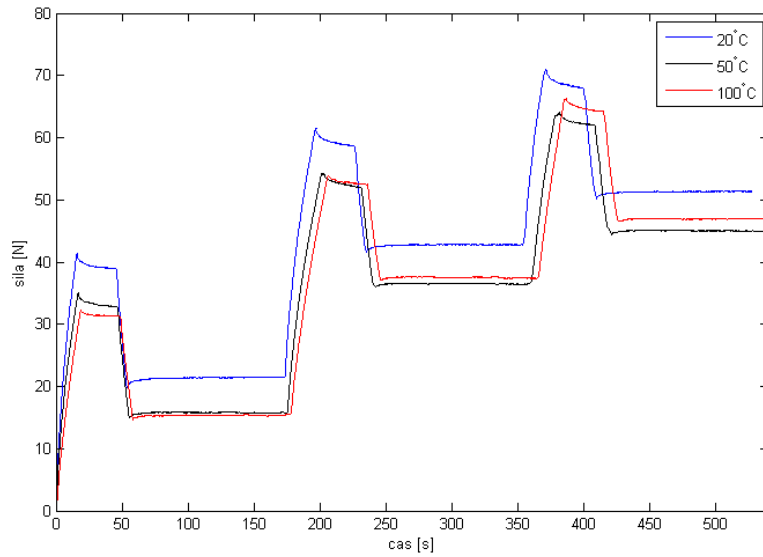


(a) Síla v závislosti na čase.

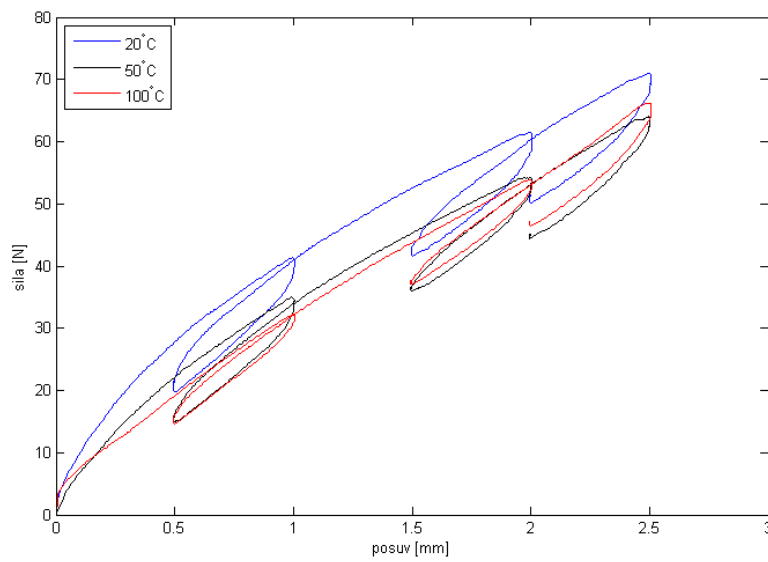


(b) Síla v závislosti na posunutí.

Obrázek 18: Zkouška tlakem, použitá pryž. Změřená síla pro různé teploty.

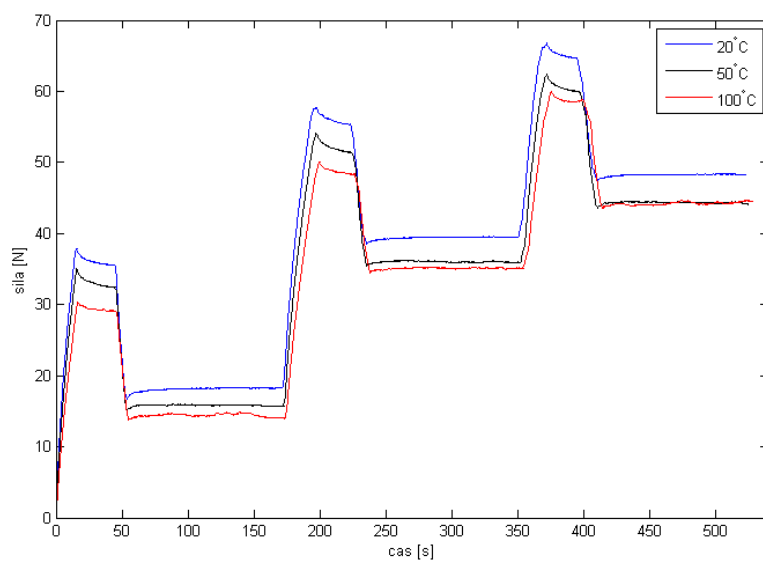


(a) Síla v závislosti na čase.

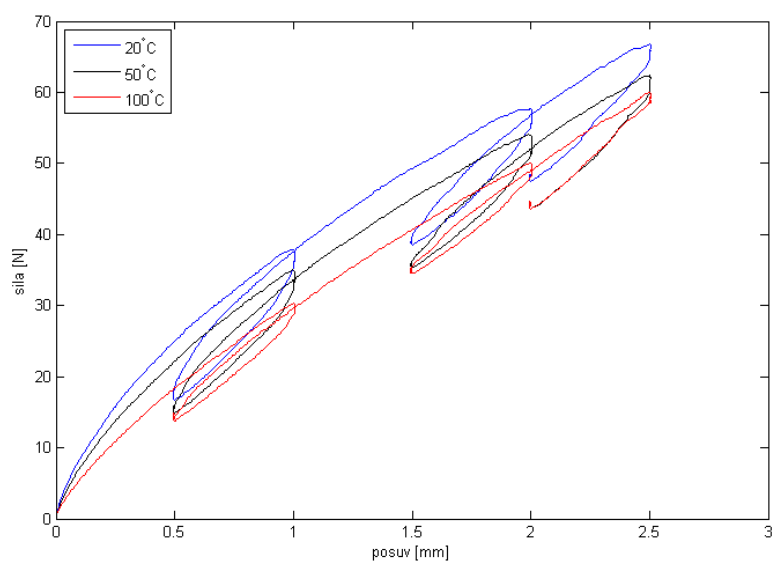


(b) Síla v závislosti na posunutí.

Obrázek 19: Zkouška tahem, nová pryž. Změřená síla pro různé teploty.

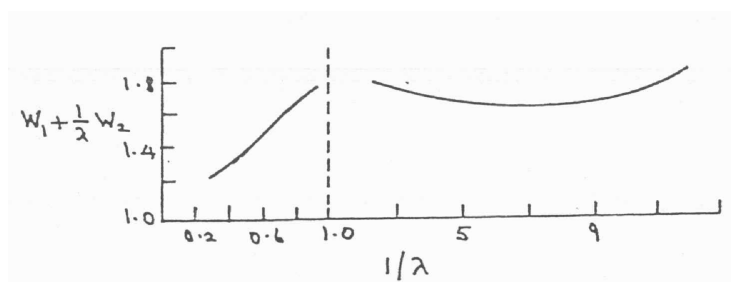


(a) Síla v závislosti na čase.



(b) Síla v závislosti na posunutí.

Obrázek 20: Zkouška tahem, použitá pryž. Změřená síla pro různé teploty.



Obrázek 21: Typický tvar tzv. Mooneyova-Rivlinova grafu pro reálný materiál [37].

5 Identifikace

Cílem práce bylo identifikovat parametry nelineárního materiálového modelu, který zahrnuje závislost na čase a porušení materiálu vlivem dosažené deformace. V případě jednoduchých modelů, jako je například Hookeův zákon nebo lineárně viskoelastický materiál, obvykle stačí provést některou z dobře známých zkoušek a parametry modelu určit přímo ze změřených dat (např. směrnice tahové křivky apod.).

Parametry dvouparametrického Mooneyho-Rivlinova modelu lze identifikovat ze zkoušky jednoosým tahem pomocí tzv. Mooneyho-Rivlinovy rovnice. Odvodí se z předpokladu nestlačitelnosti materiálu, kdy platí

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 \quad (46)$$

a pro jednoosou deformaci jsou potom hlavní poměrná prodloužení

$$\lambda_1 = \lambda, \quad (47)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (48)$$

Konstitutivní vztah je dán předpisem deformační energie

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3). \quad (49)$$

Dosazením předchozích vztahů vychází

$$\frac{F}{2A_0(\lambda - \lambda^{-2})} = C_{10} + C_{01} \frac{1}{\lambda}, \quad (50)$$

kde A_0 je počáteční plocha průřezu vzorku. Při vykreslení závislosti $F/(2A_0(\lambda - \lambda^{-2}))$ na $1/\lambda$ je tedy C_{10} průsečík se svislou osou a C_{01} směrnice přímky (obr. 21).

Oproti právě uvedeným příkladům je model použitý v této práci nesrovnatelně složitější a nelze jeho parametry určit přímo ze změřených hodnot. Byl proto implementován postup, který s využitím optimalizačních algoritmů minimalizuje odchylku výsledků konečněprvkových modelů od experimentálních dat.

Byla tedy řešena optimalizační úloha

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}} f(\mathbf{x}), \quad (51)$$

kde vektor optimalizačních parametrů je

$$\mathbf{x} = [C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{30}, \delta, \tau_C, d^\infty, d_1, d_2, \eta_1, \eta_2]^T.$$

C_{ij} jsou parametry Mooneyova-Rivlinova hyperelastického modelu, δ a τ_C jsou viskoelastické parametry (byl uvažován pouze jeden člen řady (32)) a $d^\infty, d_1, d_2, \eta_1$ a η_2 jsou parametry modelu porušení. Cílová funkce f je popsána v kap. 5.1 a přípustná množina \mathcal{P} je různá podle použité metody a bude tedy uvedena vždy v příslušné podkapitole.

Samotný gradientní algoritmus se ukázal jako nepříliš vhodný vzhledem k nekonvexnosti cílové funkce. Proto byl k nalezení startovacího bodu pro gradientní algoritmus použit genetický algoritmus. Nepříjemnou vlastností tohoto postupu je vysoký počet vyčíslení cílové funkce, který je nutný k uspokojivému běhu genetického algoritmu.

Snížení náročnosti genetického algoritmu bylo dosaženo provedením jednorozměrné minimalizace jako prvního kroku. Cílem je najít hodnotu parametru \hat{C}_{10} takového, aby se modely shodovaly s experimenty v okolí nezátíženého stavu. V následující optimalizaci genetickým algoritmem je tato informace využita jako vazba. Tento krok je podrobněji popsán v kap. 5.2.

Byl také učiněn pokus převést úlohu (51) na úlohu nepodmíněné optimalizace. Tento krok byl relativně snadný díky jednoduchému tvaru omezení, z nichž většina měla tvar

$$x_{iD} \leq x_i \quad \text{nebo} \quad x_i \leq x_{iH}, \quad i = 1, \dots, 12, \quad (52)$$

kde x_{iD} resp. x_{iH} jsou dolní resp. horní přípustná hodnota i -tého optimalizačního parametru x_i . Následovala optimalizace metodou prostého simplexu, která však pravděpodobně byla příliš jednoduchá a ve spojení s nelineární transformací optimalizačních parametrů nedávala dobré výsledky. Bylo proto od tohoto kroku zakrátko upuštěno.

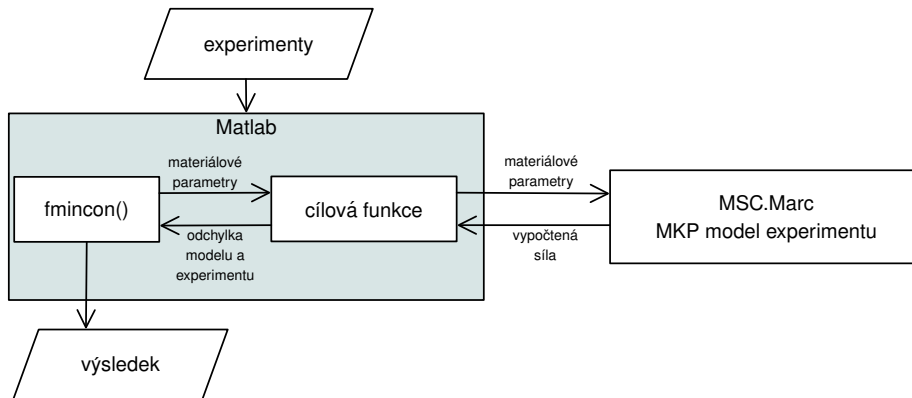
5.1 Cílová funkce

Obvykle se odchylka experimentu a modelu definuje pomocí součtu čtverců odchylek v jednotlivých hladinách (v tomto případě časových). Bylo zjištěno, že při dobré shodě experimentů a modelů v tahu a v tlaku lze čekat dobrou shodu i u smyku. Identifikace proto byla provedena pouze na základě tahu a tlaku a smykové experimenty byly použity pouze pro ověření.

Cílová funkce byla tedy definována následujícím způsobem:

$$f(C_{ij}; \delta_n, \tau_{Cn}; d^\infty, d_{1,2}, \eta_{1,2}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_{tah}} (\hat{F}_i^{tah})^2} \sum_{i=1}^{n_{tah}} w_i^{tah} (F_i^{tah} - \hat{F}_i^{tah})^2 + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_{tlak}} (\hat{F}_i^{tlak})^2} \sum_{i=1}^{n_{tlak}} w_i^{tlak} (F_i^{tlak} - \hat{F}_i^{tlak})^2. \quad (53)$$

Zde n_{tah} , resp. n_{tlak} , značí počet časových hladin uvažovaných v tahu, resp. tlaku. Síly v i -té časové hladině konečněprvkových modelů, resp. v odpovídajícím časovém okamžiku experimentů, jsou označeny \hat{F}_i^{tah} a \hat{F}_i^{tlak} , resp. F_i^{tah}



Obrázek 22: Znázornění procesu identifikace. Optimalizační algoritmus běží v prostředí Matlab a k vyčíslování cílové funkce využívá konečněprvkový systém MSC.Marc.

a F_i^{tlak} , a podobně váhové koeficienty w_i^{tah} a w_i^{tlak} . Pomocí váhových koeficientů lze snadno měnit cílovou funkci, například uvažovat pouze některé části (zatěžování, prodlevy, oblast blízko nezatíženého stavu). Oba členy na pravé straně jsou normovány tak, aby byla citlivost cílové funkce přibližně stejná vzhledem k oběma experimentům. Běh identifikace s takto definovanou cílovou funkcí je znázorněn na obr. 22.

5.2 Jednorozměrná optimalizace C_{10}

Limitním přechodem k malým deformacím lze ukázat, že moduly pružnosti v různých módech (tahu, tlaku, smyku) jsou v případě Mooneyho-Rivlinova modelu dány součtem prvních dvou jeho konstant, C_{10} a C_{01} (viz např. [13]). Cílem tohoto kroku optimalizace bylo proto nastavit hodnotu parametru C_{10} tak, aby model odpovídal experimentu co nejlépe v okolí nezatíženého stavu. Při ostatních Mooneyho-Rivlinových parametrech rovných nule vlastně použitý model přechází v neo-Hookeovský model.

Samotný proces identifikace byl realizován pomocí Fibbonacciovy metody jednorozměrné minimalizace. Jediný rozdíl oproti obvykle uváděnému výkladu metody (viz např. [14]) byl v tom, že nebyl předem znám interval, na kterém se minimum nachází. Před započítím vlastní optimalizace bylo proto nutné tento interval najít. Dělo se tak následujícím způsobem: Byl dán startovací bod C_0 (např. odhadem z naměřených dat). Dále byla dána počáteční délka kroku Δ . Startovací interval byl zvolen jako $\langle C_0 - \Delta, C_0 + \Delta \rangle$. Z krajních bodů se podle funkčních hodnot určil směr postupu a v tomto směru se interval rozšiřoval, dokud nebyl nalezen takový krajní bod, že by funkční hodnota v něm byla větší než funkční hodnota v předchozím krajním bodě. Na takto vzniklém intervalu byla poté provedena minimalizace Fibbonacciovou metodou:

1. Je dán počáteční interval neurčitosti $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$.
2. Při první iteraci se zvolí dva body $\hat{a} < \hat{b}$ tak, že dělí interval neurčitosti v poměru po sobě jdoucích Fibbonacciových čísel.

3. V každém dalším kroku se spočtou funkční hodnoty v krajních bodech i bodech uvnitř intervalu.
4. Nový interval se zvolí takto:

$$\begin{aligned} \langle a, \hat{b} \rangle & \text{ pro } \hat{b} > \hat{a}, \\ \langle \hat{a}, b \rangle & \text{ pokud } \hat{b} < \hat{a}. \end{aligned}$$

5. Při zkracování intervalu stačí v dalších krocích vybrat už jen jeden vnitřní bod. Druhý je ten z bodů \hat{a} , \hat{b} , který leží uvnitř nového intervalu neurčitosti.
6. Zastavovací podmínka je $|a - b| < \delta$, kde $\delta > 0$ je zvolená délka intervalu neurčitosti.

Přípustnou oblastí byla v tomto případě celá reálná osa a předpokládalo se, že díky povaze úlohy a díky volbě startovacího bodu bude výsledek přijatelný jako startovací hodnota pro další krok optimalizace.

Délka kroku byla volena jako $\Delta = 10^{-2}$ a zastavovací délka intervalu neurčitosti $\delta = 10^{-2}$.

5.3 Genetický algoritmus

Předlohou této třídy algoritmů je představa společenství, ve kterém se na základě kvality genetické informace rozhoduje o přežití jedince. Takový algoritmus udržuje v paměti množinu hodnot optimalizačních parametrů \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, N$. Číslo N je velikost populace a vektory $\mathbf{x}_i \in \mathcal{P}$ jsou tzv. jedinci a množina \mathcal{P} je přípustná oblast (ve které musí ležet řešení optimalizační úlohy). Obvykle má v případě heuristických metod (kam lze zařadit i genetické algoritmy) tvar n -rozměrného intervalu. Hlavní kroky běhu genetického algoritmu jsou (předpokládá se již nějak zvolená počáteční populace):

1. Ohodnocení jedinců na základě cílové funkce.
2. Výběr rodičů (*selection*), tj. jedinců na základě jejichž genetické informace vznikne množina potomků.
3. Křížení (*crossover*) – aplikace operátoru $F : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$.
4. Mutace (*mutation*) – náhodná změna výsledků křížení jako zdroj různorodosti v populaci.
5. Výběr nové populace z prvků populace stávající a množiny potomků.

Počáteční populace se obvykle volí náhodně uvnitř přípustné množiny \mathcal{P} . Hojně uplatnění zde mají metody vzorkování jako *Monte Carlo* nebo *Latin Hypercube*, známé ze statistiky. Algoritmus lze chápat jako iterační – iteracemi jsou zde celé populace.

V této práci byla použita varianta genetického algoritmu, která udržuje v paměti několik oddělených populací současně. Potom se zavádí ještě operátor migrace, jehož význam je přechod jedinců z jedné populace do jiné. Tento přístup je vhodný, pokud lze čekat více lokálních minim. Výše uvedené operace výběru rodičů a křížení se provádějí pouze v rámci jedné populace.

Parametry genetického algoritmu použité v této práci byly:

- Velikost populace: čtyři oddělené populace, každá o deseti jedincích.
- Metoda výběru rodičů: tzv. *tournament selection*, velikost turnaje 4.

Tato metoda spočívá v náhodném výběru n jedinců (tzv. hráčů, zde byli čtyři), ze kterých se potom vybere nejlepší podle ohodnocení pomocí cílové funkce (první krok algoritmu).

- Křížení: tzv. *heuristické*, s parametrem $Ratio = 1, 2$.

Probíhá tak, že potomek leží na spojnici rodičů, blíže k rodiči s lepším ohodnocením. Jsou-li rodiče dáni vektory \mathbf{x}_{R1} a \mathbf{x}_{R2} a potomek má být $\bar{\mathbf{x}}$, potom:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{R2} + Ratio \cdot (\mathbf{x}_{R1} - \mathbf{x}_{R2}),$$

kde \mathbf{x}_{R1} je rodič s lepším ohodnocením.

- Migrace nebyla využita.
- Zastavovací podmínka byla nastavena tak, že algoritmus vždy skončil po patnácti generacích.

5.4 Gradientní algoritmus

Optimalizační metody prvního řádu využívají výpočet gradientu cílové funkce, obvykle se tedy nazývají gradientními algoritmy. Obecný předpis jednoho kroku takové metody je

$$\mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{x}^{(j)} + \kappa \cdot \mathbf{d}^{(j)}, \quad (54)$$

kde $\mathbf{x}^{(j)}$ a $\mathbf{x}^{(j+1)}$ jsou vektory optimalizačních parametrů v j -tém a $j + 1$ -ním kroku, κ je délka kroku a $\mathbf{d}^{(j)}$ je směr postupu.

Směr postupu se obvykle volí ve směru největšího spádu, tj $\mathbf{d}^{(j)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(j)})$.

Pro optimalizaci s nerovnostními vazbami byla zde použita metoda vnitřního bodu (*interior-point*), která je součástí optimalizačního toolboxu Matlabu (funkce `fmincon`). V ní se původní úloha

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad (55a)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, R \quad (55b)$$

$$g_k(\mathbf{x}) \leq 0, \quad k = 1, \dots, S, \quad (55c)$$

nahradí posloupností jejích aproximací

$$\min_{\mathbf{x}} f_{\mu}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} f(\mathbf{x}) - \mu \sum_i \ln(s_i), \quad (56a)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, R \quad (56b)$$

$$g_k(\mathbf{x}) + s_k = 0, \quad k = 1, \dots, S. \quad (56c)$$

Tyto aproximativní úlohy je snadnější numericky řešit. V každé iteraci se provádí buď tzv. přímý (Newtonův) krok, nebo krok pomocí sdružených gradientů, ve kterém se přibližná úloha řeší na nějaké malé oblasti (tzv. *trust region*).

V nastavení gradientního algoritmu bylo nutné zohlednit fakt, že konečněprvkový systém MSC.Marc, který byl používán pro vyčíslení hodnot

parametr		hodnota
Mooney- Rivlin	C_{10} [Pa]	$3,9026 \cdot 10^6$
	C_{01} [Pa]	$-8,8904 \cdot 10^5$
	C_{11} [Pa]	$8,9045 \cdot 10^5$
	C_{20} [Pa]	$6,5991 \cdot 10^5$
	C_{30} [Pa]	$8,8184 \cdot 10^5$
viskoel- lasticita	δ [-]	0,1994
	τ_C [s]	10,1863
porušení	d^∞ [-]	0,5016
	d_1 [-]	0,0063
	d_2 [-]	0,4921
	η_1 [Pa]	$1,1232 \cdot 10^6$
	η_2 [Pa]	$4,2692 \cdot 10^5$

Tabulka 2: Identifikované parametry modelu pro novou pryž při 20 °C.

cílové funkce, pracuje u vstupních materiálových parametrů pouze s přesností na čtyři platné číslice. Protože se v gradientním algoritmu počítaly derivace pomocí konečných diferencí, byla nastavena minimální velikost změny vektoru optimalizačních parametrů na 10^{-4} .

Při prvních pokusech o identifikaci vycházely příliš vysoké hodnoty viskoelastického součinitele δ a algoritmus většinou vůbec nekonstruoval minimalizující posloupnost. Byly proto předepsány následující vazby:

$$C_{10} \geq 0, \quad (57a)$$

$$\delta = 0,2, \quad (57b)$$

$$\tau_C = 10 \text{ s}, \quad (57c)$$

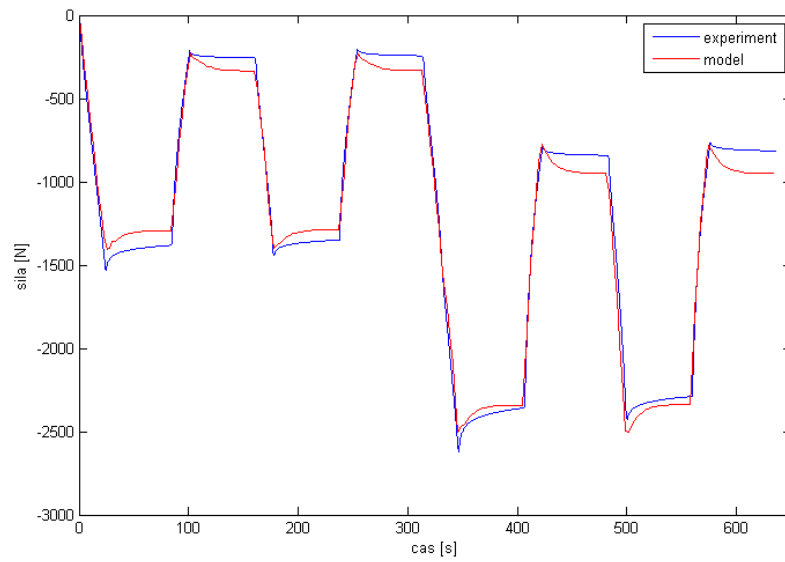
$$d^\infty + d_1 + d_2 = 1, \quad (57d)$$

tedy kladnost prvního Mooneyho-Rivlinova parametru C_{10} , konstantní hodnota viskoelastického součinitele δ , konstantní relaxační čas τ_C a konstantní součet parametrů porušení. Pomocí uvedeného algoritmu se tedy identifikovaly pouze parametry Mooneyova-Rivlinova hyperelastického modelu a parametry porušení. Viskoelastické parametry byly dodatečně identifikovány pomocí algoritmu pro jednorozměrnou identifikaci. Iteračním postupem, kdy byly střídavě optimalizovány viskoelastické parametry a parametry ostatní, byly nakonec nalezeny přijatelné hodnoty všech parametrů zvoleného materiálového modelu.

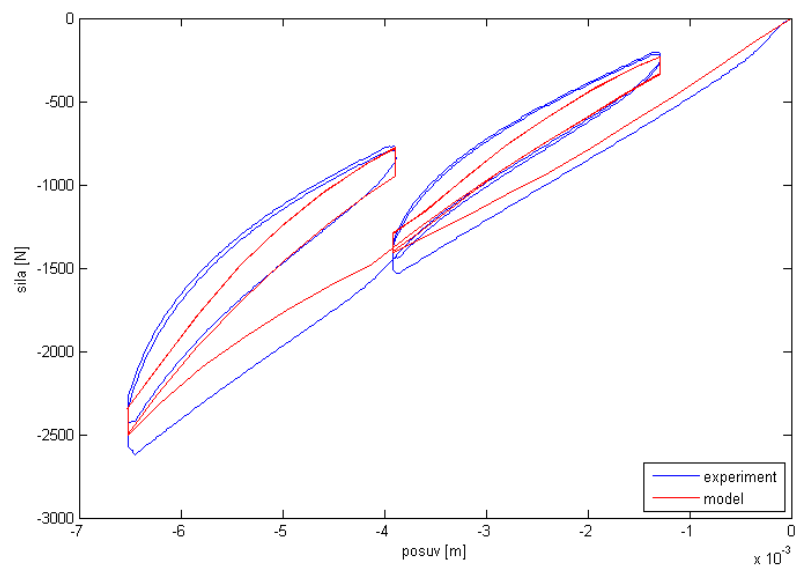
5.5 Výsledky identifikace

Postupem uvedeným v předchozích kapitolách byly identifikovány parametry popsaného materiálového modelu. Výsledná kombinace parametrů je uvedena v tab. 2. Grafické porovnání identifikovaných modelů s experimentálními daty je na obrázcích 23-25. U smykových zkoušek došlo k předčasnému odlepení vzorků od kovových plátů. Byla proto vybrána zkouška s nejdelším trváním a ta je zde porovnána s identifikovaným modelem.

Z vykreslených závislostí síly na čase je zřejmé, že použitý viskoelastický model nepostihuje správně závislost viskoelastického součinitele δ na deformaci,

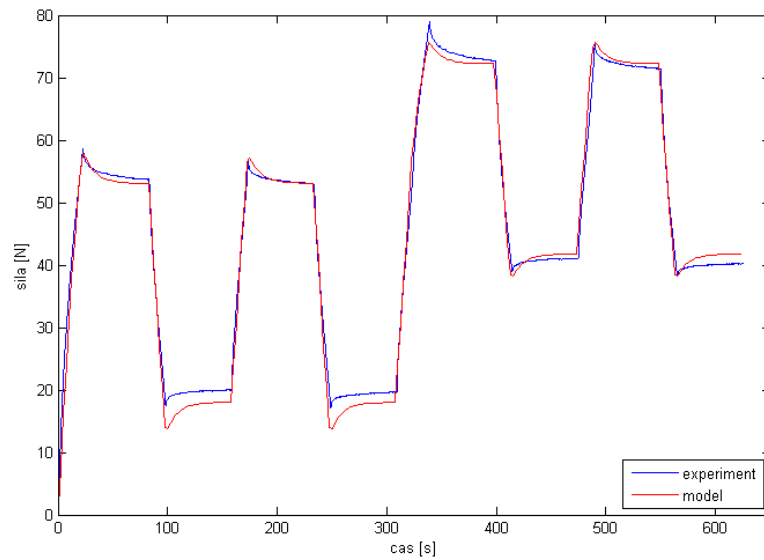


(a) Závislost síly na čase.

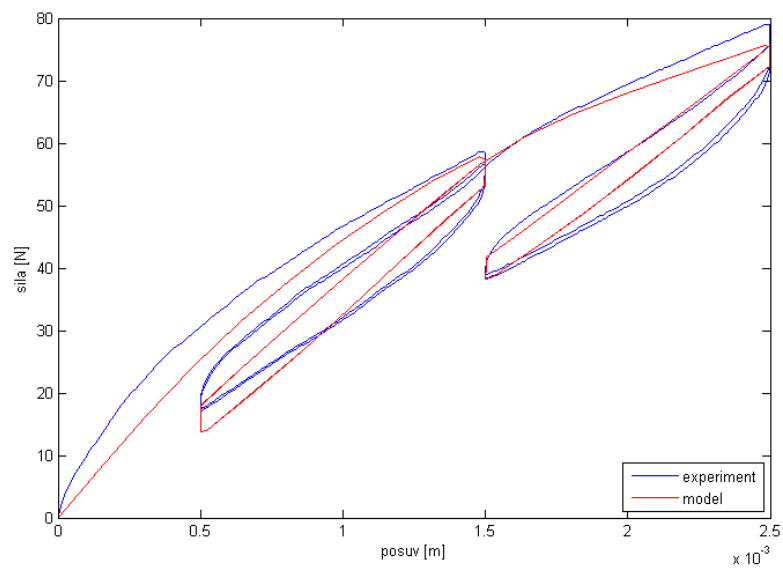


(b) Závislost síly na posunutí

Obrázek 23: Porovnání identifikovaného modelu s experimentem – tlak.

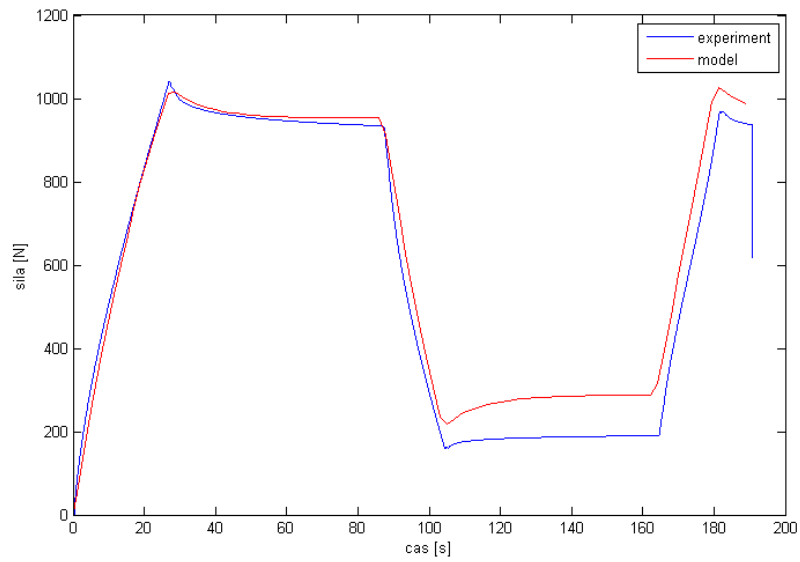


(a) Závislost síly na čase.

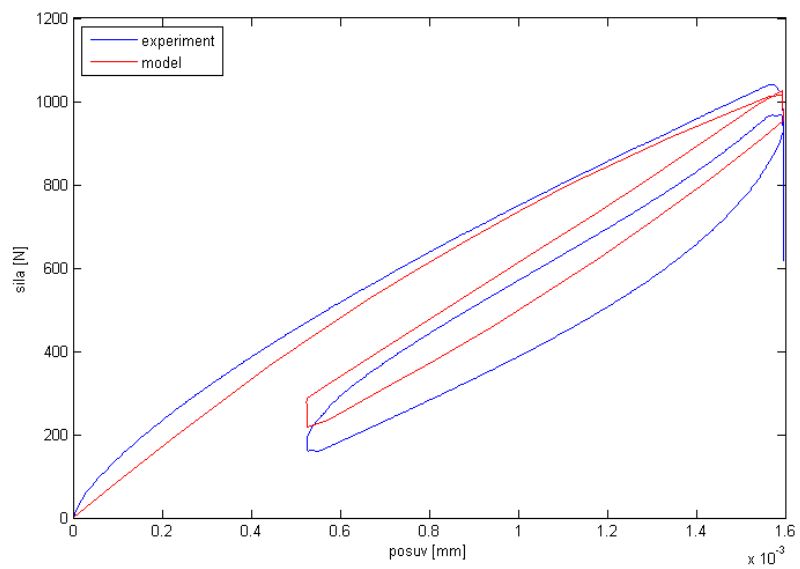


(b) Závislost síly na posunutí

Obrázek 24: Porovnání identifikovaného modelu s experimentem – tah.



(a) Závislost síly na čase.



(b) Závislost síly na posunutí

Obrázek 25: Porovnání identifikovaného modelu s experimentem – smyk.

neboť při prodlevách na nižší hodnotě zatížení vypočtená síla relaxuje více, než jak je tomu u experimentu, přestože při prodlevách na vyšší hodnotě deformace je shoda velmi dobrá.

V závislosti síly na posunutí je patrné, že při druhém a dalším zatěžovacím cyklu je změřená síla menší než při prvním cyklu. U použitého modelu tomu tak není. Tento typ odchylky modelu od experimentu pravděpodobně bude možné vyřešit zavedením plastického elementu nebo jiným modelem porušení. Použitý model se nicméně velmi dobře shoduje s experimentem v následných zatěžovacích křivkách, zejména v oblasti větších deformací.

6 Závěr

V rámci této diplomové práce bylo provedena rešerše materiálových modelů vhodných k popisu mechanického chování pryže se zaměřením na nelineární rovnovážnou odezvu, viskoelasticitu a mikromechanické porušení (Mullinsův efekt).

Hlavním cílem práce bylo vybrat model vhodný k numerickým výpočtům pryžových segmentů používaných jako pružící element v tramvajových kolech a identifikovat jeho parametry pro dodaný materiál. Byl zvolen konstitutivní vztah sestávající z pětiparametrického Mooneyova-Rivlinova modelu pro výpočet rovnovážné odezvy, viskoelastického modelu založeného na rozvoji deformační energie do Pronyho řady a modelu mikromechanického porušení. Uvedené modely jsou implementovány v komerčním konečnoprvkovém systému MSC.Marc, což umožňuje jeho snadné použití ve firmě, která se výrobou zmíněných tramvajových kol zabývá.

Pro experimentální část byly dodány pryžové segmenty jednak z úplně nového materiálu a jednak segmenty, které už byly přibližně rok v provozu. Nejprve byla sledována závislost mechanických vlastností na teplotě. Byly provedeny zkoušky jednoosým tahem, tlakem a prostým smykem při teplotách 20 °C, 50 °C a 100 °C. Vzorky byly zatěžovány předepsanou deformací ve tvaru, který kombinuje relaxační a hysterezní zkoušku s konečnou rychlostí zatěžování. Ukázalo se, že tuhost materiálu je ve většině případů nižší při vyšších teplotách. Jedinou výjimkou byla tahová zkouška s novým materiálem, kde byla opakovaně při 100 °C naměřena vyšší tuhost než při 50 °C. Tento jev naznačuje, že se na teplotní závislosti mechanických vlastností podílí více různých mechanismů. U smykových zkoušek docházelo k odlepování vzorků od kovových plátů, které sloužily k upnutí do čelistí trhačích stroje. Výsledky smykových zkoušek proto nebylo možné pro různé teploty porovnat.

Vliv předchozího použití pryže v pracovních podmínkách se ukazuje jako dosti podstatný. Již podle rozměrů dodaných segmentů jsou patrné trvalé deformace. Z experimentů potom plyne, že předchozí zatížení má nestejný vliv na chování materiálu v různých módech namáhání, tj. u tlakových vzorků je oproti nové pryži patrný větší pokles tuhosti než u tahových. Tento jev by v budoucí práci mohlo pomoci dobře zachytit zavedení plastického elementu do materiálového modelu.

Pro identifikaci parametrů zvoleného materiálového modelu byly s novou pryží provedeny zkoušky tahem, tlakem a smykem při 20 °C. Narozdíl od předchozích zkoušek byla u všech zkoušek zachována rychlost poměrné deformace. U smykových vzorků došlo k odlepení už při 20 °C. Při dřívější identifikaci se nicméně ukázalo, že při dobré shodě v tahu a v tlaku lze čekat dobrou shodu i ve smyku. Pro identifikaci byly proto použity pouze data z tahu a tlaku a výsledky smykových zkoušek byly použity pro ověření výsledků identifikace. Pro vyjádření odchylky modelů od naměřených dat byly použity konečnoprvkové simulace zkoušek v systému MSC.Marc. V prostředí Matlab byla realizována minimalizace této odchylky pomocí optimalizačních algoritmů. Pro zjištění počátečního odhadu byl použit genetický algoritmus v kombinaci s Fibonacciovou metodou pro jednorozměrnou optimalizaci a pro konečné zpřesnění gradientní algoritmus.

Model s takto identifikovanými parametry vykazuje dobrou shodu ve zde uvedených hlavních aspektech deformačního chování pryže. Postihuje nelineární

rovnovážnou odezvu ve zkoumaných módech namáhání a díky použití modelu porušení dobře zachycuje deformační změkčení materiálu při cyklickém zatěžování. Shoda časově závislého chování materiálu je dobrá jen v určitém rozsahu deformací. Pro lepší výsledky by zřejmě bylo nutné implementovat některý obecnější model viskoelasticity. Stejně tak současný model nepostihuje trvalé (plastické) deformace, což je jistě dobrý námět na další výzkum v oblasti materiálových modelů pryže.

Reference

- [1] Bergström, J. S.: Constitutive Modeling of Elastomers – Accuracy of Predictions and Numerical Efficiency.
- [2] Bergström, J. S.; Boyce, M. C.: Constitutive Modeling of the Large Strain Time-Dependent Behavior of Elastomers. *J. Mech. Phys. Solids.*, ročník 46, 1998: s. 931–954.
- [3] Bertram, A.: *Elasticity and plasticity of large deformations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, ISBN 978-3-540-69399-4.
- [4] Bouasse, H.; Carrière, Z.: Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, ročník 5, č. 3, 1903: s. 257–283, dostupný na <http://www.numdam.org/item?id=AFST_1903_2_5_3_257_0>.
- [5] Brinson, H. F.; Brinson, L. C.: *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity*. Springer Science + Business Media, 2008, ISBN 978-0-387-73860-4.
- [6] Brodersen, B.: Ogden type materials in non-linear continuum mechanics, 2004, technische Universität Braunschweig, Institut für Angewandte Mechanik.
- [7] Brown, R.: *Physical testing of rubber*. Springer Science + Business Media, Inc., 2006, ISBN 10 0-387-28286-6.
- [8] Cimirman, R.; E., R.: On identification of the arterial model parameters from experiments applicable "in vivo". *Mathematics and Computers in Simulation*, ročník 80, 2010, ISSN 0378-4754.
- [9] Crochon, T.; Schönherr, T.; Li, C.; aj.: On finite-element implementation strategies of Schapery-type constitutive theories. *Mech Time-Depend Mater*, 2010: s. 359–387.
- [10] Gent, A. N.: A New Constitutive Relation for Rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, ročník 69, č. 1, 1996: s. 59–61, dostupné na <<http://dx.doi.org/10.5254/1.3538357>>.
- [11] Govindjee, S.; Simo, J.: A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating Mullins' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, ročník 39, č. I, 1991: s. 87–112.
- [12] Govindjee, S.; Simo, J.: Transition from micro-mechanics to computationally efficient phenomenology: Carbon black filled rubbers incorporating Mullins' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, ročník 40, č. I., 1992: s. 213–233.
- [13] Heczko, J.: Identifikace materiálových parametrů hyperelastického materiálu s využitím optimalizačních algoritmů. 2009.
- [14] Hlaváč, Z.: *Dynamická syntéza a optimalizace*. Západočeská univerzita v Plzni, 1995.
- [15] Holt, W. L.: Behavior of Rubber under Repeated Stresses. *Rubber Chemistry and Technology*, ročník 5, č. 1, 1932: s. 79–89, dostupný na <<http://dx.doi.org/10.5254/1.3539319>>.

- [16] Kachanov, M.: Continuum Model of Medium with Cracks. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ročník 106, č. EM5, 1980: s. 1039–1051.
- [17] Křen, J.; Rosenberg, J.: *Mechanika kontinua*. Západočeská univerzita v Plzni, 2002.
- [18] Lakes, R.: *Viscoelastic solids*. CRC Press, 1999, ISBN 0-8493-9658-1.
- [19] Lou, C., Y.; Schapery, A., R.: Viscoelastic behavior of a non-linear, fiber reinforced plastic. Technická zpráva, Purdue university, 1969.
- [20] Lévesque, M.; Derrien, K.; Baptiste, D.; aj.: On the development and parameter identification of Schapery-type constitutive theories. *Mech Time-Depend Matter*, 2008.
- [21] Marckmann, G.; Verron, E.; Gornet, L.; aj.: A theory of network alteration for the Mullins effect. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, ročník 50, 2002: s. 2011–2028.
- [22] Meissner, B.; Zilvar, V.: *Fyzika polymerů*. SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1987, dostupné též z <http://www.vscht.cz/pol/Fyzika%20polymeru/Fyzika%20polymeru.htm>.
- [23] Miehe, C.; Göktepe, S.; Lulei, F.: A micro-macro approach to rubber-like materials — Part I: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, ročník 52, 2004: s. 2617–2660.
- [24] Miller, K.: *Testing Elastomers for Hyperelastic Material Models in Finite Element Analysis*. Axel Products, Inc., dostupné z <http://www.axelproducts.com/downloads/TestingForHyperelastic.pdf>.
- [25] Mleziva, J.; Šňupálek, J.: *Polymery - výroba, struktura, vlastnosti a použití*. Sabotáles, druhé vydání, 2000, ISBN 80-85920-72-7.
- [26] MSC.Software Corporation: *Nonlinear finite element analysis of elastomers*. 2000.
- [27] MSC.Software Corporation: *Marc Volume A: Theory and User Information*. 2010.
- [28] MSC.Software Corporation: *Marc Volume B: Element Library*. 2010.
- [29] Mullins, L.: Effect of Stretching on the Properties of Rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 1948.
- [30] Mullins, L.: Softening of Rubber by Deformation. *Rubber Chemistry and Technology*, ročník 42, č. 1, 1969: s. 339–362, dostupný na <http://dx.doi.org/10.5254/1.3539210>.
- [31] Mullins, L.; Tobin, N. R.: Theoretical Model for the Elastic Behavior of Filler-Reinforced Vulcanized Rubbers. *Rubber Chemistry and Technology*, ročník 30, č. 2, 1957: s. 555–571, dostupný na <http://dx.doi.org/10.5254/1.3542705>.

- [32] Neumaier, A.: *Acta Numerica 2004*, ročník 13, kapitola Complete Search in Continuous Global Optimization and Constraint Satisfaction. Cambridge University Press, 2004, ISBN 9780521838115, s. 271–369.
- [33] Ogden, R. W.; Roxburgh, D. G.: A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber. *Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, ročník 455, č. 1988, 1999: s. 2861–2877, ISSN 13645021, dostupný na <<http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1999.0431>>.
- [34] Španiel, M.; Růžička, J.; Moravec, M.; aj.: Identifikace fenomenologických modelů tvárného porušování v programu Abaqus. In *Výpočty konstrukcí metodou konečných prvků 2011*, Západočeská univerzita, 2011, ISBN 978-80-261-0059-1.
- [35] Qi, H.; Boyce, M.: Constitutive model for stretch-induced softening of the stress–stretch behavior of elastomeric materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, ročník 52, 2004: s. 2187–2205, dostupný na <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2004.04.008>>.
- [36] Reese, S.; Govindjee, S.: A Theory of Finite Viscoelasticity and Numerical Aspects. *Int. J. Solids Structures*, ročník 35, č. 26–27, 1998: s. 3455–3482.
- [37] Rivlin, R. S.: Forty years of non-linear continuum mechanics. In *Proc. IX. Intl. Congress on Rheology*, 1984, s. 2783–2811.
- [38] Rooijackers, H. F. L.: *A Numerical Implementation of the Schapery Model for Nonlinear Visco-Elasticity*. Dizertační práce, Technical University Eindhoven, 1988.
- [39] Saccomandi, G.; Ogden, W., Raymond (editoři): *Mechanics and thermomechanics of rubberlike solids*. Springer-Verlag Wien New York, 2004, ISBN 3-211-21251-5.
- [40] Schapery, R.: A theory of nonlinear thermoviscoelasticity based on irreversible thermodynamics. In *Proceedings of the 5th U.S. National Congress on Applied Mechanics*, ASME, 1966.
- [41] Schapery, R.: Further Development of a Thermodynamic Constitutive Theory: Stress Formulation. Technická zpráva, Purdue University, 1969.
- [42] Schapery, R. A.: Nonlinear Viscoelastic and Viscoplastic Constitutive Equations Based on Thermodynamics. *Mech. Time-Depend. Mater.*, ročník 1, č. 2, 1997: s. 209–240.
- [43] Simo, J.: On A Fully Three-Dimensional Finite-Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ročník 60, 1987: s. 153–173.
- [44] Urban, R.: *Modelování konstrukčních prvků z pryže vyztužené nitěmi*. Dizertační práce, Technická univerzita v Liberci, Fakulta strojní, 2004.