

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra mechaniky

Diplomová práce

**Stabilita a existence periodického řešení
systémů s časově proměnnými parametry**

Plzeň 2012

Anita Rathová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 31.5.2012

.....

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucímu své diplomové práce Prof. Dr. Ing. Janu Dupalovi za jeho obětavou pomoc a za veškerý čas, který mi věnoval.

Abstract

This thesis describes an approach to the analytical solution of the periodical vibrations of mechanical systems with any number of degrees of freedom with periodically time varying parameters (mass, damping, stiffness matrices and excitation vector). The model is described by a differential-integral equation with a degenerated kernel and a periodical Green's function. In each chapter, the solution obtained by this method is demonstrated on one or more examples. The second part is focused on a stability analysis. Using the fact, that the zero value of the determinant of a system matrix specifies the border of (un)stability, an area of (non)existence of the periodical analytical solution is obtained. The presented method is definitely more effective and accurate than the Floquet theory in this case.

Obsah

1	Úvod	3
2	Metody určení analytického periodického řešení	4
2.1	Systém s 1° volnosti s periodicky proměnnou tuhostí	4
2.1.1	Analytické řešení	4
2.1.2	Příklady	11
2.2	Systém s 1° volnosti s periodicky proměnnou hmotností, tlumením i tuhostí	14
2.2.1	Analytické řešení	14
2.2.2	Příklady	23
2.3	Systém s n° volnosti s periodicky proměnnou maticí tuhosti	30
2.3.1	Analytické řešení	30
2.3.2	Příklady	35
2.4	Systém s n° volnosti s periodicky proměnnými maticemi hmotnosti, tlumení i tuhosti	41
3	Stabilita řešení	50
3.1	Floquetova teorie	50
3.2	Metoda charakteristického determinantu	55
4	Závěr	61

1 Úvod

Předkládaná diplomová práce se zabývá existencí a stabilitou analytického řešení pohybové rovnice mechanických systémů s libovolným počtem stupňů volnosti s parametry periodicky proměnnými v čase.

Práce je strukturována do dvou tématických okruhů. V první části je uvedena metoda pro získání analytického periodického řešení na systémech s jedním a více stupni volnosti, obecný tvar tohoto analytického řešení a několik aplikačních příkladů. V druhé části je zpracována problematika hledání oblastí stability a nestability řešení a s tím související existence či neexistence analytického periodického řešení.

V literatuře se analytické řešení lineárních kmitavých soustav s parametry periodicky proměnnými v čase téměř vůbec neobjevuje, existuje jen několik málo článků, které s touto tematikou přímo souvisejí. Jejich výčet je uveden v seznamu literatury.

Cílem této práce je určit analytické periodické řešení mechanických soustav s jedním i více stupni volnosti s proměnným pouze jedním či více parametry a přinést ucelený přehled o oblastech stability a nestability tohoto řešení a jeho případné existence.

Praktické využití získaných výsledků je demonstrováno na několika jednoduchých příkladech. Širší možnosti aplikace výsledků, zejména pro více stupňů volnosti, lze nalézt například v oblasti kmitání kloubových a ozubených pohonů, v dynamice rotorů, atd.

2 Metody určení analytického periodického řešení

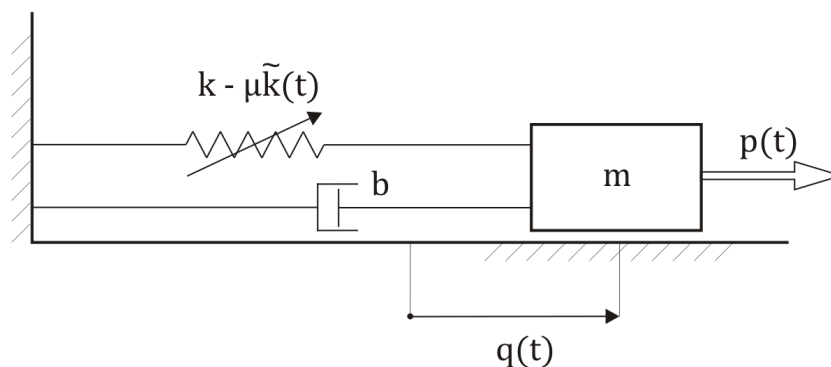
2.1 Systém s 1° volnosti s periodicky proměnnou tuhostí

2.1.1 Analytické řešení

Kmitající systém s jedním stupněm volnosti s časově proměnnou tuhostí, jehož schéma je na obr. 1, lze popsat pohybovou rovnicí podle [1]

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + [k - \mu\tilde{k}(t)]q(t) = p(t), \quad (2.1.1)$$

kde m značí hmotnost, b vyjadřuje koeficient tlumení, k je stacionární složka tuhosti, $\tilde{k}(t)$ je proměnná složka tuhosti, $p(t)$ značí budící sílu a μ je bezrozměrný parametr.



Obr. 1: Systém s 1° volnosti a proměnnou tuhostí

Proměnná složka tuhosti, budící síla, a proto i hledaná výchylka jsou periodické funkce s periodou T , tj.

$$p(t) = p(t + T), \tilde{k}(t) = \tilde{k}(t + T), q(t) = q(t + T).$$

Neznámé výchylky $q(t)$ jsou řešením diferenciální rovnice

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + kq(t) - \mu\tilde{k}(t)q(t) = p(t). \quad (2.1.2)$$

Vzhledem k požadavkům z praxe je třeba určit ustálenou odezvu systému, což je partiikulární řešení rovnice (2.1.1), tzn. homogenní část řešení a s ním spojená oblast přechodových kmitů se neuvažuje.

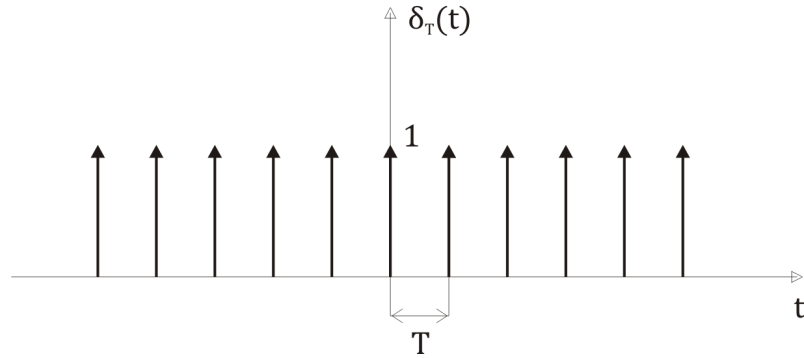
Pohybovou rovnicí (2.1.2) upravíme převedením členu s proměnnou tuhostí na pravou stranu k buzení

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + kq(t) = p(t) + \mu\tilde{k}(t)q(t). \quad (2.1.3)$$

Stejně jako v [2] je nejprve nutné získat Greenovu periodickou funkci $G(t)$ jako odezvu stacionárního systému popsaného levou stranou rovnice (2.1.3) na periodické jednotkové buzení Diracovým hřebenem, viz. obr 2, který lze zapsat ve tvaru

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{ij\omega t} = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\cos(j\omega t) + \underbrace{i \sin(j\omega t)}_{\Sigma=0} \right), \quad (2.1.4)$$

kde i vyjadřuje imaginární jednotku, j značí index členu řady a ω je úhlová rychlost, pro níž platí známý vztah $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$. Sinové členy v tomto případě vypadnou, neboť Diracův hřeben je sudá funkce.



Obr. 2: Diracův hřeben

Greenova periodická funkce bude tedy řešením rovnice

$$m\ddot{G}(t) + b\dot{G}(t) + kG(t) = \delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{ij\omega t}. \quad (2.1.5)$$

Vzhledem k tomu, že platí princip superpozice

$$G(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_j(t), \quad (2.1.6)$$

je možno řešení rozdělit na řešení systému nezávislých rovnic

$$m\ddot{G}_j(t) + b\dot{G}_j(t) + kG_j(t) = \frac{1}{T} e^{ij\omega t}. \quad (2.1.7)$$

Řešení odhadneme ve tvaru

$$G_j(t) = \hat{G}_j e^{ij\omega t} \quad (2.1.8)$$

a dosadíme příslušné derivace odhadu (2.1.8) do (2.1.7). Dostaneme

$$\hat{G}_j = \frac{1}{T} (-j^2\omega^2 m + ij\omega b + k)^{-1}, \quad (2.1.9)$$

odkud plyne po dosazení do (2.1.8)

$$G_j(t) = \frac{1}{T} (-j^2\omega^2m + ij\omega b + k)^{-1} e^{ij\omega t}. \quad (2.1.10)$$

Označíme

$$L_j = (-j^2\omega^2m + ij\omega b + k)^{-1}, \quad (2.1.11)$$

kde L_j má význam dynamické poddajnosti odpovídající j -té harmonické. Zavedeme zkrácené označení

$$e_j(t) = e^{ij\omega t}, \quad (2.1.12)$$

dosadíme do (2.1.10) a sečteme podle (2.1.6)

$$G(t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} L_j e_j(t). \quad (2.1.13)$$

Celková odezva systému (2.1.3) na buzení na pravé straně vyjde konvolucí pravé strany rovnice (2.1.3) s periodickou Greenovou funkcí z (2.1.13)

$$q(t) = \mu \int_0^T G(t-s) \tilde{k}(s) q(s) ds + \int_0^T G(t-s) p(s) ds. \quad (2.1.14)$$

Do rovnice (2.1.14) za Greenovu funkci G v čase $(t-s)$ dosazujeme

$$G(t-s) = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} L_j e_j(t-s) = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} L_j e_j(t) e_{-j}(s), \quad (2.1.15)$$

protože platí

$$e_j(t-s) = e^{ij\omega(t-s)} = e^{ij\omega t} e^{-ij\omega s} = e_j(t) e_{-j}(s). \quad (2.1.16)$$

Periodické funkce reprezentující proměnnou složku tuhosti a buzení lze zapsat pomocí komplexní Fourierovy řady ve tvaru

$$\tilde{k}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{k}_l e_l(t) = \tilde{\mathbf{k}}^T \mathbf{e}(t) \quad (2.1.17)$$

a

$$p(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} p_l e_l(t) = \mathbf{p}^T \mathbf{e}(t), \quad (2.1.18)$$

kde

$$\mathbf{e}(t) = [e_{-N}(t), e_{-N+1}(t), \dots, e_{N-1}(t), e_N(t)]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1} \quad (2.1.19)$$

a

$$\mathbf{p} = [p_{-N}, p_{-N+1}, \dots, p_{N-1}, p_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1}, \quad (2.1.20)$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = [\tilde{k}_{-N}, \tilde{k}_{-N+1}, \dots, \tilde{k}_{N-1}, \tilde{k}_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1} \quad (2.1.21)$$

jsou vektory Fourierových koeficientů buzení a proměnné složky tuhosti. Všimněme si, že se zde vyskytuje index N označující rozmezí počtu členů řady $\langle -N, N \rangle$, $N \in \mathbb{Z}$. Ve výpočtech totiž není možné prakticky uvažovat nekonečný počet členů, je třeba vybrat jen dostatečný ale omezený počet, abychom dostali dobrou aproximaci periodické funkce. Nekonečné sumy se tak v dalším postupu nahradí konečnými v intervalu $\langle -N, N \rangle$. V následujícím textu se budou všechny sumy uvažovat jako konečné, nebude-li uvedeno jinak, a jejich zápis bude zjednodušen pouze na označení sumačního indexu.

Rovnice (2.1.15), (2.1.17) a (2.1.18) dosadíme do (2.1.14)

$$\begin{aligned} q(t) &= \mu \int_0^T \frac{1}{T} \underbrace{\sum_j L_j e_j(t) e_{-j}(s)}_{G(t-s)} \underbrace{\sum_l \tilde{k}_l e_l(s)}_{\tilde{k}(s)} q(s) ds + \\ &+ \int_0^T \frac{1}{T} \underbrace{\sum_j L_j e_j(t) e_{-j}(s)}_{G(t-s)} \underbrace{\sum_l p_l e_l(s)}_{p(s)} ds. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} q(t) &= \mu \int_0^T \frac{1}{T} \underbrace{\sum_j \sum_l L_j \tilde{k}_l e_j(t) e_{l-j}(s)}_{J(t,s)} q(s) ds + \\ &+ \frac{1}{T} \sum_j \sum_l L_j p_l e_j(t) \underbrace{\int_0^T e_{l-j}(s) ds}_{T\delta_{lj}} = \\ &= \mu \int_0^T J(t,s) q(s) ds + \underbrace{\sum_j L_j p_j e_j(t)}_{g(t)}, \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

kde δ_{lj} je Kroneckerův symbol, který se zde vyskytuje díky ortogonalitě systému goniometrických funkcí sinus a cosinus. Rovnice (2.1.23) je Fredholmova nehomogenní integrální rovnice s degenerovaným jádrem $J(t, s)$

$$J(t, s) = \frac{1}{T} \sum_j \sum_l L_j \tilde{k}_l e_j(t) e_{l-j}(s) = \frac{1}{T} \sum_j \sum_l A_{jl} e_j(t) e_l(s) = \frac{1}{T} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{A} \mathbf{e}(s). \quad (2.1.24)$$

Struktura matice \mathbf{A} je proto

$$A_{jl} = \begin{cases} L_j \tilde{k}_{l+j} & l+j \wedge j \in \langle -N, N \rangle \\ 0 & l+j \vee j \notin \langle -N, N \rangle \end{cases}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}. \quad (2.1.25)$$

Fredholmovu nehomogenní integrální rovnici (2.1.23) je možno upravit do tvaru

$$q(t) = \mu \int_0^T \frac{1}{T} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{A} \mathbf{e}(s) q(s) ds + g(t). \quad (2.1.26)$$

Zavedeme další substituci

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \frac{1}{T} \mathbf{A} \mathbf{e}(t) \quad (2.1.27)$$

a upravíme druhý sčítanec v (2.1.23)

$$g(t) = \sum_j L_j p_j e_j(t) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{p}, \quad (2.1.28)$$

kde diagonální matice \mathbf{L} je podle (2.1.11)

$$\mathbf{L} = \text{diag}\{L_j\} \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}. \quad (2.1.29)$$

Dosadíme do (2.1.26) z (2.1.27) a (2.1.28) a vyjde

$$q(t) = \mu \mathbf{e}^T(t) \int_0^T \boldsymbol{\psi}(s) q(s) ds + \mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{p}. \quad (2.1.30)$$

Zavedeme substituci za integrál

$$\boldsymbol{\alpha} = \int_0^T \boldsymbol{\psi}(s) q(s) ds \quad (2.1.31)$$

a po úpravě

$$q(t) = \mu \mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{p}. \quad (2.1.32)$$

Rovnici (2.1.32) vynásobíme zleva $\boldsymbol{\psi}(t)$ a integrujeme přes periodu

$$\int_0^T \boldsymbol{\psi}(t) q(t) dt = \mu \int_0^T \boldsymbol{\psi}(t) \mathbf{e}^T(t) dt \boldsymbol{\alpha} + \int_0^T \boldsymbol{\psi}(t) \mathbf{e}^T(t) dt \mathbf{L} \mathbf{p}. \quad (2.1.33)$$

Na levé straně použijeme vztah (2.1.31) a na pravé straně provedeme další substituci

$$\mathbf{Q} = \int_0^T \boldsymbol{\psi}(t) \mathbf{e}^T(t) dt, \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}. \quad (2.1.34)$$

Po úpravě

$$\boldsymbol{\alpha} = \mu \mathbf{Q} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{Q} \mathbf{L} \mathbf{p}. \quad (2.1.35)$$

Neznámou α vyjádříme jako

$$\alpha = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{Lp} \quad (2.1.36)$$

a předpokládáme regularitu (a proto invertovatelnost) charakteristické matice $(\mathbf{I} - \mu\mathbf{Q})$. Pokud by tento předpoklad nebyl splněn a vlastní čísla matice \mathbf{Q} by byla rovna $\frac{1}{\mu}$, tj.

$$\frac{1}{\mu} \in \lambda\{\mathbf{Q}\}, \quad (2.1.37)$$

pak by parametr μ nabýval kritické hodnoty, která vymezuje hranici mezi oblastí stability a nestability. Za touto hranicí analytické periodické řešení rovnice (2.1.1) neexistuje.

Dosadíme zpět do (2.1.34) z (2.1.27)

$$\mathbf{Q} = \int_0^T \psi(t)\mathbf{e}^T(t)dt = \frac{1}{T}\mathbf{A} \underbrace{\int_0^T \mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)dt}_{T\hat{\mathbf{I}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}, \quad (2.1.38)$$

kde symbolem $\hat{\mathbf{I}}$ označíme matici s jednotkami na vedlejší diagonále

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}. \quad (2.1.39)$$

Součin matic $\mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}$ lze ale výhodněji zapsat jako součin jiných dvou matic \mathbf{LH} , kde \mathbf{L} je již známa podle (2.1.29) jako

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_{-N} & & & & \\ & L_{-N+1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & L_0 & \\ & & & & L_1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & L_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1} \Rightarrow \mathbf{L}^H = \hat{\mathbf{I}}\mathbf{L}\hat{\mathbf{I}}. \quad (2.1.40)$$

Druhá matice \mathbf{H} je pásová

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \tilde{k}_0 & \tilde{k}_{-1} & \tilde{k}_{-2} & \dots & \dots & \tilde{k}_{-N} & & & \\ \tilde{k}_1 & \tilde{k}_0 & \tilde{k}_{-1} & \tilde{k}_{-2} & \dots & \dots & \tilde{k}_{-N} & & \\ \tilde{k}_2 & \tilde{k}_1 & \tilde{k}_0 & \tilde{k}_{-1} & \ddots & & & & \tilde{k}_{-N} \\ \vdots & \tilde{k}_2 & \tilde{k}_1 & \ddots & \ddots & \tilde{k}_{-2} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \tilde{k}_N & \vdots & \vdots & \tilde{k}_2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \tilde{k}_{-2} \\ & \tilde{k}_N & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \tilde{k}_{-1} \\ & & \tilde{k}_N & \dots & \dots & \tilde{k}_2 & \tilde{k}_1 & & \tilde{k}_0 \end{pmatrix} = \mathbf{H}^H \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}. \quad (2.1.41)$$

\mathbf{H} je Hermiteovská matice, protože platí $\tilde{k}_{-j} = \overline{\tilde{k}_j}$ pro $j \neq 0$ a \tilde{k}_0 je reálné. Pruh nad písmenem označuje hodnotu komplexně sdruženou. Mohli bychom tedy pro matici \mathbf{L} psát $L_{-j} = \overline{L_j}$.

Tato substituce je výhodná, neboť při určování hranice oblastí (ne)stability vycházíme z faktu, že determinant charakteristické matice $(\mathbf{I} - \mu\mathbf{LH})$ je reálné číslo. Znaménko tohoto determinantu vymezuje oblasti (ne)stability. Je zřejmé, že charakteristický determinant je reálný, protože platí

$$\det \mathbf{LH} = \underbrace{\det \mathbf{L}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\det \mathbf{H}}_{\in \mathbb{R}}, \quad (2.1.42)$$

neboť \mathbf{L} má na diagonále čísla po dvojicích komplexně sdružená anebo reálná a \mathbf{H} je Hermiteovská. Hranice mezi oběma oblastmi se nachází právě v tom místě, kde je charakteristický determinant roven nule. Podrobnější výklad je uveden v druhé části diplomové práce.

Vztah (2.1.38) přejde proto do tvaru

$$\mathbf{Q} = \mathbf{LH}. \quad (2.1.43)$$

Rovnost (2.1.35) přejde s přihlédnutím k (2.1.43) bude

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{LH})^{-1} \mathbf{LH}\mathbf{Lp}. \quad (2.1.44)$$

Výsledné periodické řešení vyjde dosazením (2.1.44) do (2.1.32)

$$\boxed{q(t) = \mathbf{e}^T(t) [\mu (\mathbf{I} - \mu\mathbf{LH})^{-1} \mathbf{LH} + \mathbf{I}] \mathbf{Lp}}. \quad (2.1.45)$$

Jeho přesnost závisí na velikosti hodnoty N označující počet uvažovaných členů Fourierovy řady. Toto řešení existuje pouze v případě, že systém je stabilní.

2.1.2 Příklady

V této části jsou uvedeny výsledky analyticko-numerického experimentu ve výpočtovém systému MATLAB. V prvním kroku byly pomocí postupu uvedeného v předchozí kapitole 2.1.1 vypočteny hodnoty výchylky systému charakterizovaného pohybovou rovnicí (2.1.1). Toto analyticky získané řešení bylo porovnáno s výstupem z MATLABu, který pro řešení používá metodu Runge-Kutta. Numerické simulace vykazují shodu s analytickým řešením.

Na obr. 4 a 5 jsou znázorněny výsledky simulací pro dvě skupiny vstupních parametrů uvedených v tabulce 1.

symbol	označení	1. případ	2. případ	jednotka
n	počet členů řady	25	25	–
ω	úhlová rychlost	60	80	rad/s
m	hmotnost	2	1	kg
b	tlumení	5	10	Ns/m
k	statická tuhost	10 000	16 000	N/m
μ	součinitel proměnlivosti	0.55	0.5	–
t_{max}	konečný čas	25 T	25 T	s

Tab. 1: Parametry experimentu 1 (viz obr.4) a 2 (viz obr.5)

Proměnná složka tuhosti a periodická funkce buzení jsou v případě prvního výpočtu popsány funkcemi

$$\tilde{k}^{(1)}(t) = \cos(2\pi\omega - 1) \sin(5\omega t), \quad (2.1.46)$$

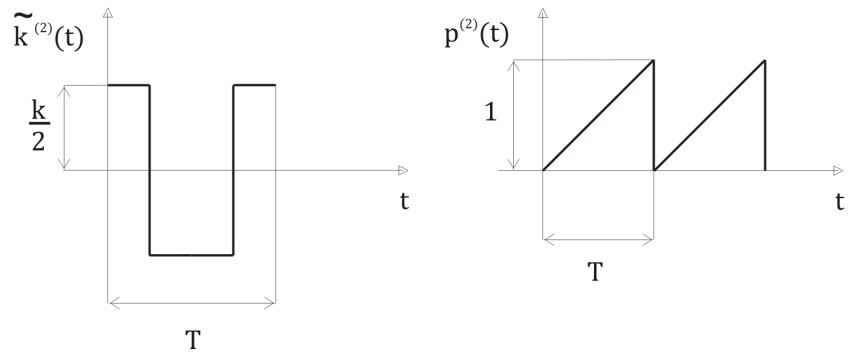
$$p^{(1)}(t) = \frac{1}{2} \cos \omega t. \quad (2.1.47)$$

V druhém případě

$$\tilde{k}^{(2)}(t) = \sum_{j=1}^{100} \frac{k}{j\pi} \left(\sin \frac{j\pi}{2} - \sin \frac{3j\pi}{2} \right) \cos j\omega t, \quad (2.1.48)$$

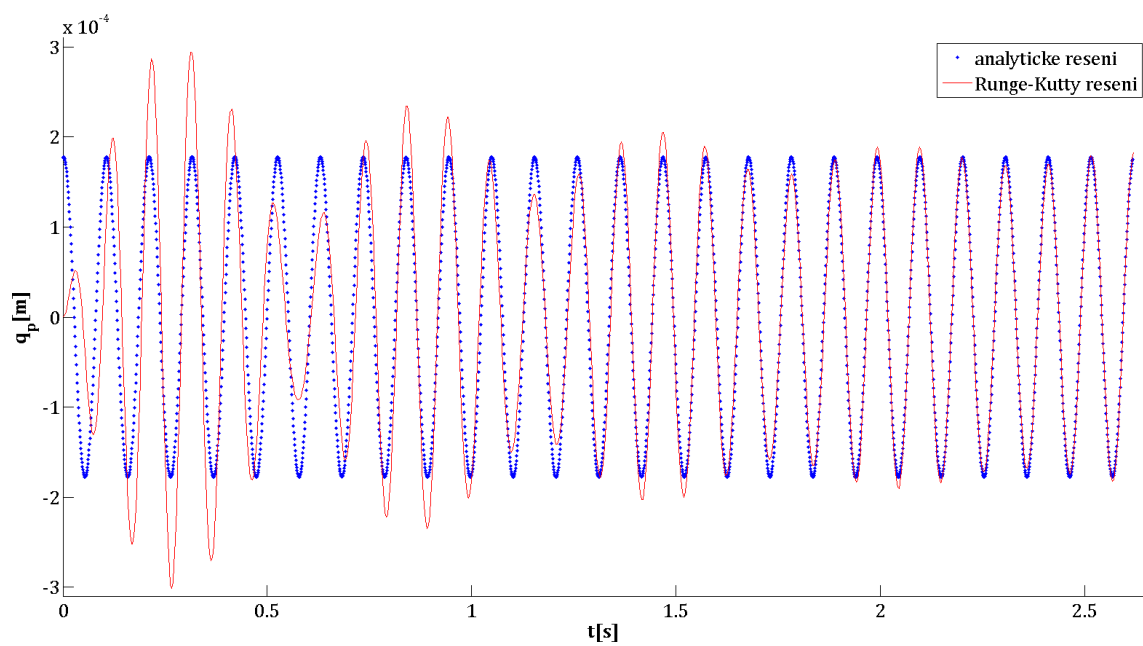
$$p^{(2)}(t) = \frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j\pi} \sin j\omega t, \quad (2.1.49)$$

jejichž průběh je na obr. 3.

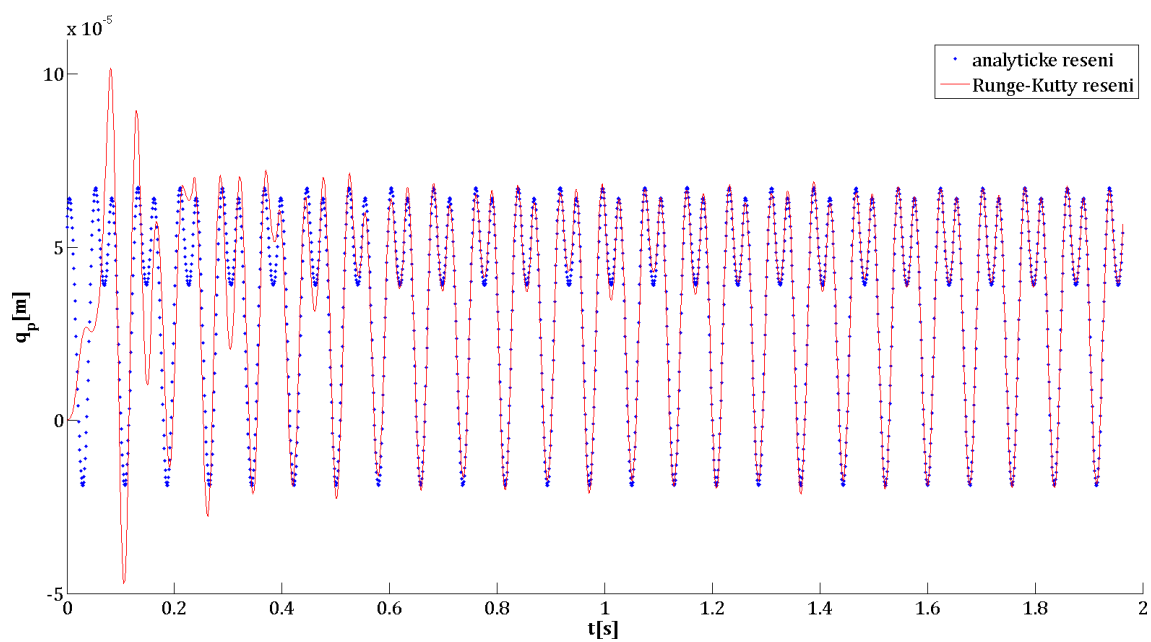


Obr. 3: Průběh funkcí periodicky proměnné tuhosti a buzení

Počáteční podmínky jsou voleny nulové. Jejich vliv je omezen pouze na homogenní část celkového řešení, která ale vlivem tlumení brzy vymizí a po této tzv. přechodové oblasti nastává ustálený stav, který je popsán výše uvedeným partikulárním řešením (2.1.45). Je zřejmé, že pokud se pohybujeme v oblastech stability, což je v případě těchto dvou simulací zajištěno, pak experiment dává totožné výsledky pro oba postupy řešení.



Obr. 4: Srovnání numer. a analyt. řešení pro 1° volnosti a proměnnou tuhost - 1. případ



Obr. 5: Srovnání numer. a analyt. řešení pro 1° volnosti a proměnnou tuhost - 2. případ

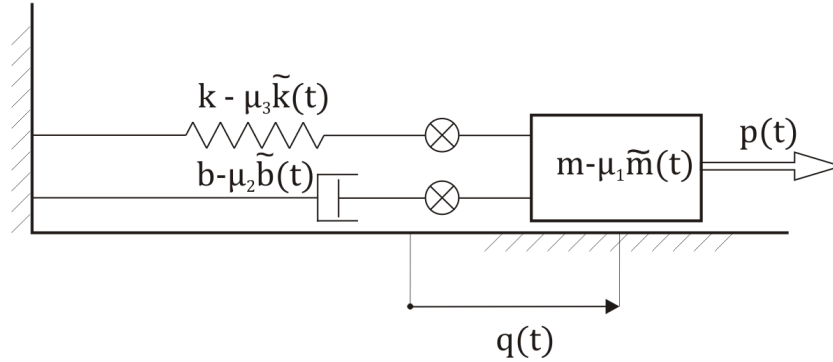
2.2 Systém s 1° volnosti s periodicky proměnnou hmotností, tlumením i tuhostí

2.2.1 Analytické řešení

V případě periodicky proměnné hmotnosti, tlumení i tuhosti má pohybová rovnice systému s jedním stupněm volnosti tvar, viz. [3]

$$\left[m - \mu_1 \tilde{m}(t) \right] \ddot{q}(t) + \left[b - \mu_2 \tilde{b}(t) \right] \dot{q}(t) + \left[k - \mu_3 \tilde{k}(t) \right] q(t) = p(t), \quad (2.2.1)$$

kde m , b , k jsou stacionární složky hmotnosti, tlumení, tuhosti a μ_1 , μ_2 , μ_3 jsou bezrozměrné parametry. Budící síla $p(t)$, proměnné složky hmotnosti $\tilde{m}(t)$, tlumení $\tilde{b}(t)$, tuhosti $\tilde{k}(t)$, a proto i neznámá výchylka $q(t)$, jsou opět periodické funkce s periodou T .



Obr. 6: Systém s 1° volnosti s proměnnou hmotností, tlumením, tuhostí

Proměnné členy převedeme na pravou stranu k budící síle.

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + kq(t) = p(t) + \mu_1 \tilde{m}(t)\ddot{q}(t) + \mu_2 \tilde{b}(t)\dot{q}(t) + \mu_3 \tilde{k}(t)q(t) \quad (2.2.2)$$

Praktický význam má opět pouze partikulární řešení. V prvním kroku je třeba podobně jako v minulé kapitole najít periodickou Greenovu funkci $G(t)$ jako odezvu stacionárního systému na levé straně rovnice (2.2.2) na jednotkové buzení Diracovým hřebenem $\delta_T(t)$.

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + kq(t) = \delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{ij\omega t} = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e_j(t). \quad (2.2.3)$$

Využijeme princip superpozice analogicky k (2.1.6) a Greenova periodická funkce vyjde totožně jako (2.1.13) v kapitole 2.1.1

$$G(t) = \frac{1}{T} \sum_j L_j e_j(t), \quad (2.2.4)$$

kde L_j jsou prvky diagonální matice \mathbf{L} , viz (2.1.11) a (2.1.40), s významem dynamických poddajností odpovídajícím vždy j -té harmonické.

Celková odezva systému popsaného rovnicí (2.2.2) je rovna konvolučnímu integrálu pravé strany rovnice (2.2.2) s periodickou Greenovou funkcí (2.1.15).

$$\begin{aligned} q(t) = & \mu_1 \int_0^T G(t-s)\tilde{m}(s)\ddot{q}(s)ds + \mu_2 \int_0^T G(t-s)\tilde{b}(s)\dot{q}(s)ds + \\ & + \mu_3 \int_0^T G(t-s)\tilde{k}(s)q(s)ds + \int_0^T G(t-s)p(s)ds. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Periodické funkce vyjadřující proměnné složky hmotnosti, tlumení, tuhosti a buzení je možno zapsat ve tvaru komplexní Fourierovy řady

$$\tilde{m}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{m}_l e_l(t) = \tilde{\mathbf{m}}^T \mathbf{e}(t), \quad (2.2.6)$$

$$\tilde{b}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{b}_l e_l(t) = \tilde{\mathbf{b}}^T \mathbf{e}(t), \quad (2.2.7)$$

$$\tilde{k}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{k}_l e_l(t) = \tilde{\mathbf{k}}^T \mathbf{e}(t), \quad (2.2.8)$$

$$p(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} p_l e_l(t) = \mathbf{p}^T \mathbf{e}(t). \quad (2.2.9)$$

Budeme opět uvažovat konečný počet členů, jejichž rozpětí bude v intervalu $\langle -N, N \rangle$, $N \in \mathbb{Z}$ a vektory Fourierových koeficientů budou zřejmě

$$\mathbf{m} = [\tilde{m}_{-N}, \tilde{m}_{-N+1}, \dots, \tilde{m}_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1}, \quad (2.2.10)$$

$$\mathbf{b} = [\tilde{b}_{-N}, \tilde{b}_{-N+1}, \dots, \tilde{b}_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1}, \quad (2.2.11)$$

$$\mathbf{k} = [\tilde{k}_{-N}, \tilde{k}_{-N+1}, \dots, \tilde{k}_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1}, \quad (2.2.12)$$

$$\mathbf{p} = [p_{-N}, p_{-N+1}, \dots, p_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1}. \quad (2.2.13)$$

Dosadíme z (2.1.15) a (2.2.6) - (2.2.9) do rovnice pro výchylku (2.2.5)

$$\begin{aligned}
q(t) &= \mu_1 \int_0^T \underbrace{\frac{1}{T} \sum_j L_j e_j(t) e_{-j}(s)}_{G(t-s)} \underbrace{\sum_l \tilde{m}_l e_l(s)}_{\tilde{m}(t)} \ddot{q}(s) ds + \\
&+ \mu_2 \int_0^T \underbrace{\frac{1}{T} \sum_j L_j e_j(t) e_{-j}(s)}_{G(t-s)} \underbrace{\sum_l \tilde{b}_l e_l(s)}_{\tilde{b}(t)} \dot{q}(s) ds + \\
&+ \mu_3 \int_0^T \underbrace{\frac{1}{T} \sum_j L_j e_j(t) e_{-j}(s)}_{G(t-s)} \underbrace{\sum_l \tilde{k}_l e_l(s)}_{\tilde{k}(t)} q(s) ds + \\
&+ \int_0^T \underbrace{\frac{1}{T} \sum_j L_j e_j(t) e_{-j}(s)}_{G(t-s)} \underbrace{\sum_l p_l e_l(s)}_{p(t)} ds
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

a po úpravě

$$\begin{aligned}
q(t) &= \mu_1 \int_0^T \underbrace{\frac{1}{T} \sum_j \sum_l L_j \tilde{m}_l e_j(t) e_{l-j}(s)}_{J_m(t,s)} \ddot{q}(s) ds + \\
&+ \mu_2 \int_0^T \underbrace{\frac{1}{T} \sum_j \sum_l L_j \tilde{b}_l e_j(t) e_{l-j}(s)}_{J_b(t,s)} \dot{q}(s) ds + \\
&+ \mu_3 \int_0^T \underbrace{\frac{1}{T} \sum_j \sum_l L_j \tilde{k}_l e_j(t) e_{l-j}(s)}_{J_k(t,s)} q(s) ds + \\
&+ \frac{1}{T} \sum_j \sum_l L_j p_l e_j(t) \underbrace{\int_0^T e_{l-j}(s) ds}_{T\delta_{lj}} = \\
&= \mu_1 \int_0^T J_m(t,s) \ddot{q}(s) ds + \mu_2 \int_0^T J_b(t,s) \dot{q}(s) ds + \\
&+ \mu_3 \int_0^T J_k(t,s) q(s) ds + \underbrace{\sum_j L_j p_j e_j(t)}_{g(t)}.
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Dostáváme se k nehomogenní integro-diferenciální rovnici s degenerovanými jádry

$$\begin{aligned} J_m(t, s) &= \frac{1}{T} \sum_j \sum_l L_j \tilde{m}_l e_j(t) e_{l-j}(s) = \frac{1}{T} \sum_j \sum_l E_{jl} e_j(t) e_l(s) = \\ &= \frac{1}{T} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{E} \mathbf{e}(s), \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{aligned} J_b(t, s) &= \frac{1}{T} \sum_j \sum_l L_j \tilde{b}_l e_j(t) e_{l-j}(s) = \frac{1}{T} \sum_j \sum_l C_{jl} e_j(t) e_l(s) = \\ &= \frac{1}{T} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{C} \mathbf{e}(s), \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

$$\begin{aligned} J_k(t, s) &= \frac{1}{T} \sum_j \sum_l L_j \tilde{k}_l e_j(t) e_{l-j}(s) = \frac{1}{T} \sum_j \sum_l A_{jl} e_j(t) e_l(s) = \\ &= \frac{1}{T} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{A} \mathbf{e}(s), \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

kteřé lze opět zapsat pomocí matic \mathbf{A} , \mathbf{C} a \mathbf{E} se strukturou jako v (2.1.25)

$$A_{jl} = \begin{cases} L_j \tilde{k}_{l+j} & l+j \wedge j \in \langle -N, N \rangle \\ 0 & l+j \vee j \notin \langle -N, N \rangle \end{cases}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}, \quad (2.2.19)$$

$$C_{jl} = \begin{cases} L_j \tilde{b}_{l+j} & l+j \wedge j \in \langle -N, N \rangle \\ 0 & l+j \vee j \notin \langle -N, N \rangle \end{cases}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}, \quad (2.2.20)$$

$$E_{jl} = \begin{cases} L_j \tilde{m}_{l+j} & l+j \wedge j \in \langle -N, N \rangle \\ 0 & l+j \vee j \notin \langle -N, N \rangle \end{cases}, \quad \mathbf{E} \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}. \quad (2.2.21)$$

Před dosazením upravíme poslední sčítanec $g(t)$ v (2.2.15) podle (2.1.28)

$$g(t) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{p}. \quad (2.2.22)$$

Užitím vztahů (2.2.16) - (2.2.18) a (2.2.22) vyjde řešení

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{\mu_1}{T} \int_0^T \mathbf{e}^T(t) \mathbf{E} \mathbf{e}(s) \ddot{q}(s) ds + \frac{\mu_2}{T} \int_0^T \mathbf{e}^T(t) \mathbf{C} \mathbf{e}(s) \dot{q}(s) ds + \\ &+ \frac{\mu_3}{T} \int_0^T \mathbf{e}^T(t) \mathbf{A} \mathbf{e}(s) q(s) ds + \mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Pro zjednodušení zavedeme následující označení

$$\boldsymbol{\psi}^k(t) = \frac{1}{T} \mathbf{A} \mathbf{e}(t), \quad (2.2.24)$$

$$\boldsymbol{\psi}^b(t) = \frac{1}{T} \mathbf{C} \mathbf{e}(t), \quad (2.2.25)$$

$$\boldsymbol{\psi}^m(t) = \frac{1}{T} \mathbf{E} \mathbf{e}(t). \quad (2.2.26)$$

Lze proto psát

$$\dot{\mathbf{e}}^T(t) = \mathbf{e}^T(t)\mathbf{R}, \quad (2.2.36)$$

$$\ddot{\mathbf{e}}^T(t) = \mathbf{e}^T(t)\mathbf{S}. \quad (2.2.37)$$

Nyní se budeme snažit na levé straně rovnice (2.2.31) vyjádřit $\boldsymbol{\alpha}$, viz. (2.2.30). Vynásobíme tuto rovnici zleva $\boldsymbol{\psi}^k(t)$ a integrujeme přes periodu

$$\underbrace{\int_0^T \boldsymbol{\psi}^k(t)q(t)dt}_{\boldsymbol{\alpha}} = \mu_1 \int_0^T \boldsymbol{\psi}^k(t)\mathbf{e}^T(t)dt \boldsymbol{\gamma} + \mu_2 \int_0^T \boldsymbol{\psi}^k(t)\mathbf{e}^T(t)dt \boldsymbol{\beta} + \quad (2.2.38)$$

$$+ \mu_3 \int_0^T \boldsymbol{\psi}^k(t)\mathbf{e}^T(t)dt \boldsymbol{\alpha} + \int_0^T \boldsymbol{\psi}^k(t)\mathbf{e}^T(t)dt \mathbf{Lp}.$$

Za integrály dosadíme zpětně z (2.2.24) a dostaneme

$$\int_0^T \boldsymbol{\psi}^k(t)\mathbf{e}^T(t)dt = \int_0^T \frac{1}{T} \mathbf{A}\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)dt = \quad (2.2.39)$$

$$= \frac{1}{T} \mathbf{A} \underbrace{\int_0^T \mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)dt}_{T\hat{\mathbf{I}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}.$$

Zápis rovnice (2.2.38) se tímto velmi zjednoduší

$$\boldsymbol{\alpha} = \mu_1 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\gamma} + \mu_2 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\beta} + \mu_3 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{Lp}. \quad (2.2.40)$$

Obdobný postup, tentokrát pro získání $\boldsymbol{\beta}$ na levé straně, aplikujeme na rovnici (2.2.32). Tuto rovnici zleva vynásobíme $\boldsymbol{\psi}^b(t)$ a integrujeme přes periodu

$$\underbrace{\int_0^T \boldsymbol{\psi}^b(t)\dot{q}(t)dt}_{\boldsymbol{\beta}} = \mu_1 \int_0^T \boldsymbol{\psi}^b(t)\dot{\mathbf{e}}^T(t)dt \boldsymbol{\gamma} + \mu_2 \int_0^T \boldsymbol{\psi}^b(t)\dot{\mathbf{e}}^T(t)dt \boldsymbol{\beta} + \quad (2.2.41)$$

$$+ \mu_3 \int_0^T \boldsymbol{\psi}^b(t)\dot{\mathbf{e}}^T(t)dt \boldsymbol{\alpha} + \int_0^T \boldsymbol{\psi}^b(t)\dot{\mathbf{e}}^T(t)dt \mathbf{Lp}.$$

Do předchozí rovnice dosadíme zpátky z (2.2.25) a (2.2.36)

$$\boldsymbol{\beta} = \mu_1 \int_0^T \frac{1}{T} \mathbf{C}\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)dt \mathbf{R}\boldsymbol{\gamma} + \mu_2 \int_0^T \frac{1}{T} \mathbf{C}\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)dt \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \quad (2.2.42)$$

$$+ \mu_3 \int_0^T \frac{1}{T} \mathbf{C}\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)dt \mathbf{R}\boldsymbol{\alpha} + \int_0^T \frac{1}{T} \mathbf{C}\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)dt \mathbf{RLp}$$

a využijeme rovnosti

$$\int_0^T \mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)dt = T\hat{\mathbf{I}}, \quad (2.2.43)$$

čímž se zápis opět velmi zjednoduší

$$\boldsymbol{\beta} = \mu_1 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\gamma} + \mu_2 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\beta} + \mu_3 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\alpha} + \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{Lp}. \quad (2.2.44)$$

Analogický postup zopakujeme pro druhou časovou derivaci (2.2.33), kterou vynásobíme zleva $\boldsymbol{\psi}^m(t)$ a integrujeme přes periodu

$$\underbrace{\int_0^T \boldsymbol{\psi}^m(t) \ddot{q}(t) dt}_{\boldsymbol{\gamma}} = \mu_1 \int_0^T \boldsymbol{\psi}^m(t) \ddot{\mathbf{e}}^T(t) dt \boldsymbol{\gamma} + \mu_2 \int_0^T \boldsymbol{\psi}^m(t) \ddot{\mathbf{e}}^T(t) dt \boldsymbol{\beta} + \mu_3 \int_0^T \boldsymbol{\psi}^m(t) \ddot{\mathbf{e}}^T(t) dt \boldsymbol{\alpha} + \int_0^T \boldsymbol{\psi}^m(t) \ddot{\mathbf{e}}^T(t) dt \mathbf{Lp}. \quad (2.2.45)$$

Po dosazení z (2.2.26), (2.2.37) a po úpravě

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= \mu_1 \int_0^T \frac{1}{T} \mathbf{E}\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t) dt \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma} + \mu_2 \int_0^T \frac{1}{T} \mathbf{E}\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t) dt \mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \\ &+ \mu_3 \int_0^T \frac{1}{T} \mathbf{E}\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t) dt \mathbf{S}\boldsymbol{\alpha} + \int_0^T \frac{1}{T} \mathbf{E}\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t) dt \mathbf{S}\mathbf{Lp}. \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

Rovnice pro $\boldsymbol{\gamma}$ je potom

$$\boldsymbol{\gamma} = \mu_1 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\boldsymbol{\gamma} + \mu_2 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \mu_3 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\mathbf{Lp}. \quad (2.2.47)$$

Přistoupíme k řešení soustavy tří rovnic pro neznámé $\boldsymbol{\alpha}$ (2.2.40), $\boldsymbol{\beta}$ (2.2.44) a $\boldsymbol{\gamma}$ (2.2.47)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \mu_1 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\gamma} + \mu_2 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\beta} + \mu_3 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{Lp}, \\ \boldsymbol{\beta} &= \mu_1 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\gamma} + \mu_2 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\beta} + \mu_3 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\alpha} + \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{Lp}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= \mu_1 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\boldsymbol{\gamma} + \mu_2 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \mu_3 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\mathbf{Lp}. \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

Systém rovnic (2.2.48) upravíme převedením členů reprezentujících buzení na pravou stranu

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{I} - \mu_3 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}} \right) - \mu_2 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\beta} - \mu_1 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{Lp}, \\ -\mu_3 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\alpha} - \left(\mathbf{I} - \mu_2 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}} \right) - \mu_1 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\gamma} &= \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{Lp}, \\ -\mu_3 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\boldsymbol{\alpha} - \mu_2 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\boldsymbol{\beta} - \left(\mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S} \right) &= \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\mathbf{Lp} \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

a zapíšeme maticově

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mu_3 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}} & -\mu_2 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}} & -\mu_1 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}} \\ -\mu_3 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}} & \mathbf{I} - \mu_2 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}} & -\mu_1 \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}} \\ -\mu_3 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S} & -\mu_2 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S} & \mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{Lp} \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{Lp} \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\mathbf{Lp} \end{pmatrix}. \quad (2.2.50)$$

Z hlediska určování stability je výhodné provést následující substituci

$$\mu_1 = \mu z_1, \quad (2.2.51)$$

$$\mu_2 = \mu z_2, \quad (2.2.52)$$

$$\mu_3 = \mu z_3 \quad (2.2.53)$$

a po dosazení do (2.2.50)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mu z_3 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}} & -\mu z_2 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}} & -\mu z_1 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}} \\ -\mu z_3 \mathbf{C}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{R} & \mathbf{I} - \mu z_2 \mathbf{C}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{R} & -\mu z_1 \mathbf{C}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{R} \\ -\mu z_3 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S} & -\mu z_2 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S} & \mathbf{I} - \mu z_1 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{I}} - \mu \mathbf{Q}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{Lp} \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{R}\mathbf{Lp} \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\mathbf{Lp} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}}. \quad (2.2.54)$$

Čtvercovou matici na levé straně můžeme rozložit na rozdíl $(\bar{\mathbf{I}} - \mu \mathbf{Q})$, kde

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & & \\ & \mathbf{I} & \\ & & \mathbf{I} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3(2N+1), 3(2N+1)}, \quad (2.2.55)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} z_3 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}} & z_2 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}} & z_1 \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}} \\ z_3 \mathbf{C}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{R} & z_2 \mathbf{C}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{R} & z_1 \mathbf{C}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{R} \\ z_3 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S} & z_2 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S} & z_1 \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3(2N+1), 3(2N+1)}, \quad (2.2.56)$$

vektor hledaných neznámých označíme

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3(2N+1), 1} \quad (2.2.57)$$

a vektor na pravé straně

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{Lp} \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{R}\mathbf{Lp} \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{S}\mathbf{Lp} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3(2N+1), 1}, \quad (2.2.58)$$

takže rovnice (2.2.54) bude

$$(\bar{\mathbf{I}} - \mu \mathbf{Q}) \mathbf{u} = \mathbf{v}. \quad (2.2.59)$$

Za předpokladu invertovatelnosti charakteristické matice $(\bar{\mathbf{I}} - \mu \mathbf{Q})$ vyjádříme neznámé \mathbf{u} jako

$$\mathbf{u} = (\bar{\mathbf{I}} - \mu \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{v}. \quad (2.2.60)$$

Matice $(\bar{\mathbf{I}} - \mu \mathbf{Q})$ musí být regulární, tedy invertovatelná. Tento předpoklad není splněn tehdy, je-li determinant této charakteristické matice roven nule, což nastává v případě, že vlastní čísla matice \mathbf{Q} jsou rovna $\frac{1}{\mu}$, tj.

$$\frac{1}{\mu} \in \lambda \{ \mathbf{Q} \}. \quad (2.2.61)$$

Po dosazení z (2.2.60) zpátky do rovnice (2.2.31) je výsledné periodické řešení systému s jedním stupněm volnosti s proměnnými parametry hmotnosti, tlumení a tuhosti

$$\boxed{q(t) = \mathbf{e}^T(t) \left[(\bar{\mathbf{I}} - \mu \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{v} + \mathbf{Lp} \right]}. \quad (2.2.62)$$

Toto řešení existuje pouze tehdy, je-li systém stabilní.

2.2.2 Příklady

V této části jsou stejně jako v první kapitole uvedeny výsledky analyticko-numerické simulace v programu MATLAB. Nejprve bylo podle metodiky popsané v kapitole 2.2.1 vypočteno analytické řešení systému, který je popsán matematickým modelem (2.2.1). Toto přesné řešení bylo porovnáno s numerickým řešením vypočteným v MATLABu pomocí metody Runge-Kutta.

Na obr. 8 jsou zobrazeny výsledky pro vstupní parametry uvedené v tabulce 2.

symbol	označení	hodnota	jednotka
n	počet členů řady	25	–
ω	úhlová rychlost	0.6	rad/s
m	statická hmotnost	1.1	kg
b	statické tlumení	0.05	Ns/m
k	statická tuhost	1	N/m
μ_1	součinitel proměnlivosti m	0.25	–
μ_2	součinitel proměnlivosti b	0.8	–
μ_3	součinitel proměnlivosti k	0.05	–
t_{max}	konečný čas	30 T	s

Tab. 2: Parametry experimentu pro 1° volnosti a všechny proměnné parametry (viz obr.8)

Proměnná složka hmotnosti je v tomto případě popsána funkcí

$$\tilde{m}(t) = m \cos 3\omega t, \quad (2.2.63)$$

proměnná složka tlumení má tvar

$$\tilde{b}(t) = \begin{cases} 0 & t \in \langle 0, \frac{T}{2} \rangle \\ b & t \in \langle \frac{T}{2}, T \rangle \end{cases} \text{ na každé periodě } T, \text{ viz obr. 7,} \quad (2.2.64)$$

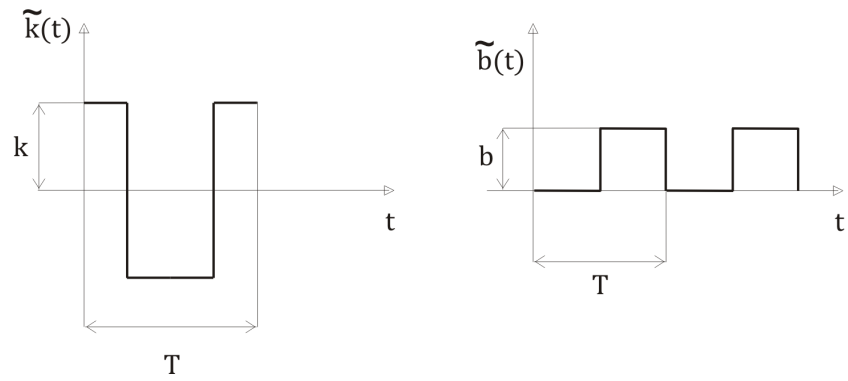
proměnná složka tuhosti je vyjádřena

$$\tilde{k}(t) = \sum_{j=1}^{100} \frac{2k}{j\pi} \left(\sin \frac{j\pi}{2} - \sin \frac{3j\pi}{2} \right) \cos j\omega t, \text{ viz obr. 7,} \quad (2.2.65)$$

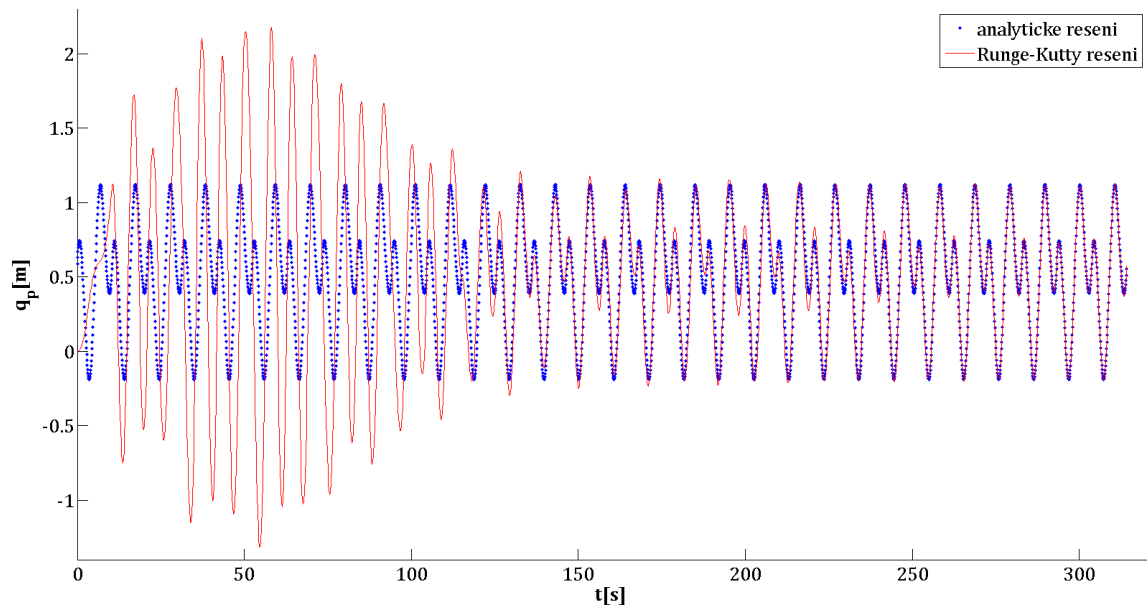
a periodická funkce buzení je

$$p(t) = \frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j\pi} \sin j\omega t, \text{ viz dříve na obr. 3.} \quad (2.2.66)$$

Vliv nulových počátečních podmínek po čase vymizí a partikulární řešení, které se nachází v oblasti stability, vykazuje opět shodu s analytickým řešením.



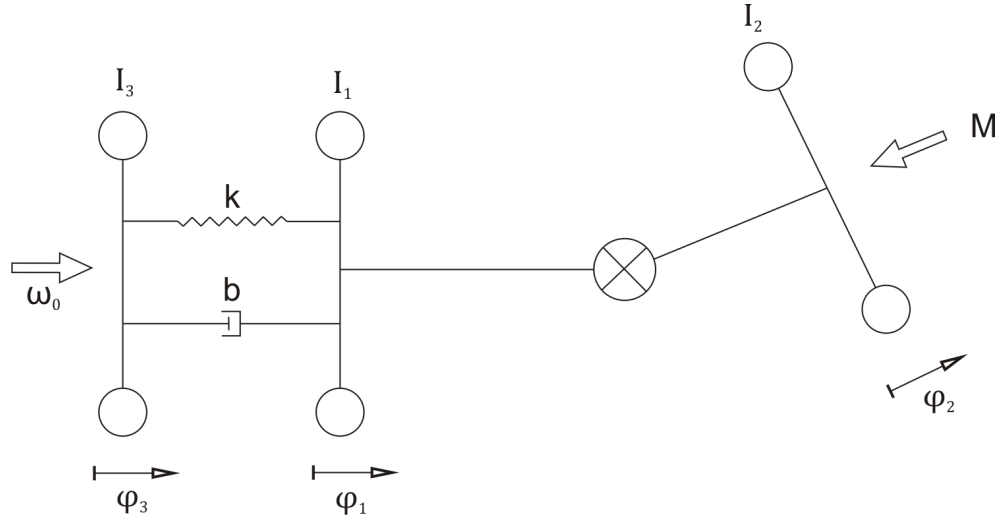
Obr. 7: Průběh funkcí periodicky proměnného tlumení a tuhosti



Obr. 8: Srovnání numer. a analyt. řešení pro 1° volnosti s proměnnými všemi parametry

Příklad - Hookeův kloub

Jedna z možných aplikací předkládaného řešení pro soustavy s jedním stupněm volnosti je zpracována na příkladu torzně kmitající soustavy s Hookeovým kloubem, viz. obr 9.



Obr. 9: Soustava s Hookeovým kloubem

Řešení

Jedná se o soustavu s převodem, lze proto psát

$$\varphi_2 = f(\varphi_1), \quad (2.2.67)$$

kde f vyjadřuje funkční závislost mezi φ_2 a φ_1 , tj. φ_2 je funkcí φ_1 . Pro časovou derivaci platí

$$\dot{\varphi}_2 = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}}_{g(\varphi_1)} \frac{d\varphi_1}{dt} = g(\varphi_1) \dot{\varphi}_1, \quad (2.2.68)$$

kde $g(\varphi_1)$ je převodová funkce. Její konkrétní tvar je uveden později v rovnici (2.2.86). Pro získání pohybové rovnice využijeme Lagrangeových rovnic obyčejného typu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}} = \mathbf{Q}. \quad (2.2.69)$$

Kinetická energie systému

$$E_k = \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} [I_1 + I_2 g^2(\varphi_1)] \dot{\varphi}_1^2, \quad (2.2.70)$$

potenciální energie

$$E_p = \frac{1}{2} k (\varphi_1 - \varphi_3)^2, \quad (2.2.71)$$

disipační funkce

$$R = \frac{1}{2}b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3)^2 \quad (2.2.72)$$

a zobecněné síly

$$Q_1\delta\varphi_1 = -M\delta\varphi_2 = -Mg(\varphi_1)\delta\varphi_1 \Rightarrow Q_1 = -Mg(\varphi_1), \quad (2.2.73)$$

$$Q_3 = 0. \quad (2.2.74)$$

Po dosazení příslušných derivací do Lagrangeových rovnic (2.2.69) dostaneme dvě pohybové rovnice pro dvě zobecněné souřadnice φ_1 a φ_3

$$\begin{aligned} [I_1 + I_2g^2(\varphi_1)] \ddot{\varphi}_1 + [I_2g(\varphi_1)g'(\varphi_1)] \dot{\varphi}_1^2 + k(\varphi_1 - \varphi_3) + \\ + b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) = -Mg(\varphi_1), \end{aligned} \quad (2.2.75)$$

$$I_3\ddot{\varphi}_3 - k(\varphi_1 - \varphi_3) - b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) = 0. \quad (2.2.76)$$

První rovnici vydělíme výrazem $[I_1 + I_2g^2(\varphi_1)]$ a druhou I_3

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{I_2g(\varphi_1)g'(\varphi_1)}{[I_1 + I_2g^2(\varphi_1)]} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{k}{[I_1 + I_2g^2(\varphi_1)]}(\varphi_1 - \varphi_3) + \\ + \frac{b}{[I_1 + I_2g^2(\varphi_1)]}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) = \frac{-Mg(\varphi_1)}{[I_1 + I_2g^2(\varphi_1)]}, \end{aligned} \quad (2.2.77)$$

$$\ddot{\varphi}_3 - \frac{k}{I_3}(\varphi_1 - \varphi_3) - \frac{b}{I_3}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) = 0. \quad (2.2.78)$$

Od (2.2.77) odečteme (2.2.78) a zavedeme relativní výchylku $\varphi = \varphi_1 - \varphi_3$. Pohybová rovnice bude mít tvar

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \left(\frac{b}{I_1 + I_2g^2(\varphi_1)} + \frac{b}{I_3} \right) \dot{\varphi} + \left(\frac{k}{I_1 + I_2g^2(\varphi_1)} + \frac{k}{I_3} \right) \varphi = \\ = - \frac{Mg(\varphi_1) + I_2g(\varphi_1)g'(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2}{I_1 + I_2g^2(\varphi_1)}. \end{aligned} \quad (2.2.79)$$

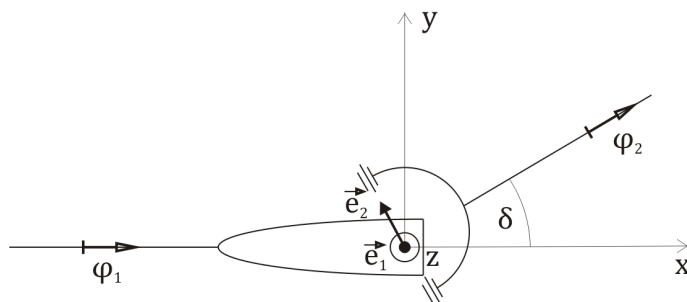
Přejdeme ke konkrétnímu vyjádření převodové funkce $g(\varphi_1)$ a její derivace $g'(\varphi_1)$. Na obr. 10 je provedena vizualizace geometrie Hookeova kloubu.

Vazební podmínka v tomto kloubu plyne z kolmosti vektorů \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 , tj.

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \quad (2.2.80)$$

Vyjádření těchto vektorů v souřadnicovém systému xyz je zřejmé z obr. 10

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \delta \cos \varphi_2 \\ \cos \delta \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.81)$$



Obr. 10: Geometrie Hookeova kloubu

Po dosazení vektorů \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 do (2.2.80)

$$\tan \varphi_2 = \tan \varphi_1 \cos \delta. \quad (2.2.82)$$

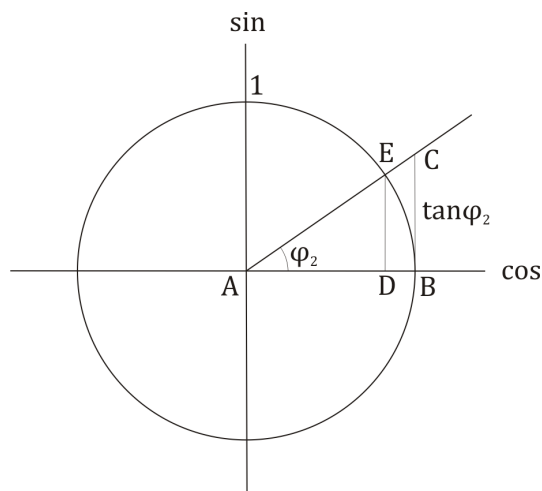
Naším cílem je určit $g(\varphi_1)$ z rovnice (2.2.68), musíme proto z vazební podmínky vyjádřit $\dot{\varphi}_2$. Rovnici (2.2.82) zderivujeme podle času

$$\frac{1}{\cos^2(\varphi_2)} \dot{\varphi}_2 = \cos \delta \frac{1}{\cos^2 \varphi_1} \dot{\varphi}_1. \quad (2.2.83)$$

Z podobnosti trojúhelníků ABC a ADE na obr. 11 plyne vztah mezi $\cos \varphi_2$ a $\tan \varphi_2$

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi_2}, \quad (2.2.84)$$

který dosadíme do (2.2.83) a vyjádříme $\dot{\varphi}_2$ jako



Obr. 11: Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\cos \delta}{\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \delta \sin^2 \varphi_1} \dot{\varphi}_1. \quad (2.2.85)$$

Získali jsme převodovou funkci

$$g(\varphi_1) = \frac{\cos \delta}{\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \delta \sin^2 \varphi_1} \quad (2.2.86)$$

a její derivace $g'(\varphi_1)$ je zřejmě

$$g'(\varphi_1) = \frac{\cos \delta \sin 2\varphi_1 \sin^2 \delta}{(\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \delta \sin^2 \varphi_1)^2}. \quad (2.2.87)$$

V převodu vystupuje proměnná φ_1 . Ta je stejně jako φ_3 funkcí času, tj. $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ a $\varphi_3 = \varphi_3(t)$. Z toho lze usoudit, že i převodová funkce bude funkcí času, tj. $g(\varphi_1) = p(t)$. Pohybová rovnice (2.2.79) bude po úpravě

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) + \left(\frac{b}{I_1 + I_2 g^2(t)} + \frac{b}{I_3} \right) \dot{\varphi}(t) + \left(\frac{k}{I_1 + I_2 g^2(t)} + \frac{k}{I_3} \right) \varphi(t) = \\ = - \frac{Mg(t) + I_2 g(t) g'(t) \dot{\varphi}_1^2}{I_1 + I_2 g^2(t)}. \end{aligned} \quad (2.2.88)$$

Abychom mohli převodovou funkci $g(\varphi_1)$ uvažovat jako funkci času $g(t)$, je nutné určit hodnotu $\varphi_1(t)$. Víme, že na členu ③ je předepsána úhlová rychlost $\omega_0 = konst.$, proto $\varphi_3(t) \doteq \omega_0 t$. Pro účely určení převodu je možno uvažovat stejně tak i $\varphi_1(t) \doteq \omega_0 t$. Tuto hodnotu dosadíme do (2.2.86) a (2.2.87)

$$g(t) = \frac{\cos \delta}{\cos^2 \omega_0 t + \cos^2 \delta \sin^2 \omega_0 t}, \quad (2.2.89)$$

$$g'(t) = \frac{\cos \delta \sin 2\omega_0 t \sin^2 \delta}{(\cos^2 \omega_0 t + \cos^2 \delta \sin^2 \omega_0 t)^2}. \quad (2.2.90)$$

Rovnice (2.2.89) a (2.2.90) tvoří vstupní hodnoty do pohybové rovnice (2.2.88).

Analogicky k modelu (2.2.1) přepíšeme pohybovou rovnici (2.2.88)

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) + \left[\underbrace{\frac{b}{I_3}}_b - \underbrace{\left(-\frac{b}{I_1 + I_2 g^2(t)} \right)}_{\tilde{b}(t)} \right] \dot{\varphi}(t) + \left[\underbrace{\frac{k}{I_3}}_k - \underbrace{\left(-\frac{k}{I_1 + I_2 g^2(t)} \right)}_{\tilde{k}(t)} \right] \varphi(t) = \\ = - \underbrace{\frac{[M + I_2 g'(t) \omega_0^2] g(t)}{I_1 + I_2 g^2(t)}}_{p(t)}, \end{aligned} \quad (2.2.91)$$

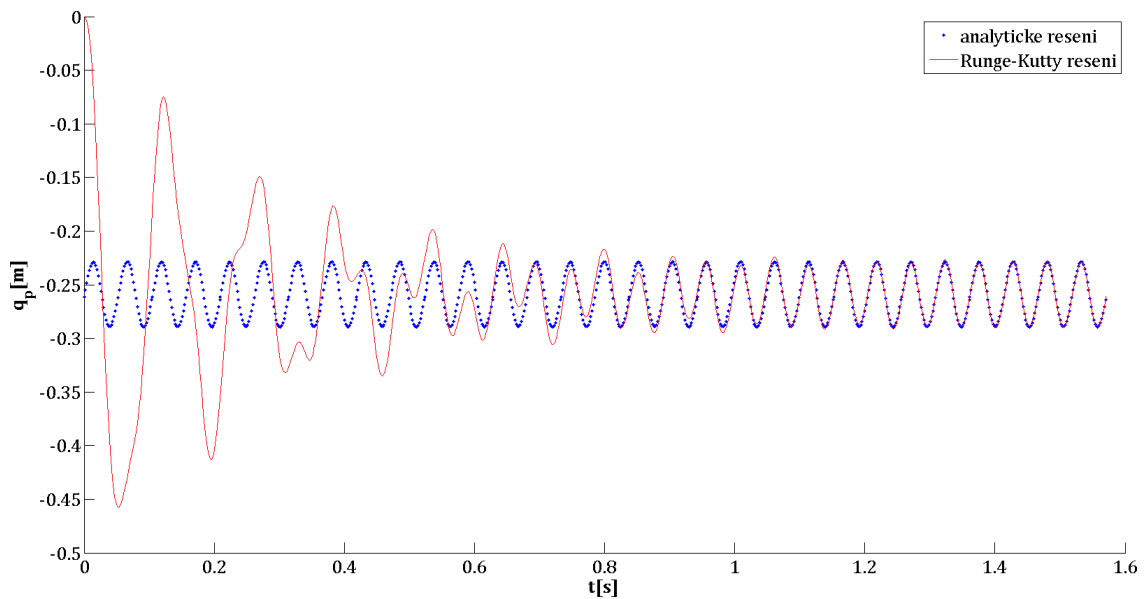
tj.

$$\ddot{\varphi}(t) + [b - \tilde{b}(t)] \dot{\varphi}(t) + [k - \tilde{k}(t)] \varphi(t) = p(t). \quad (2.2.92)$$

Výpočet byl proveden pro konkrétní hodnoty parametrů, které jsou souhrnně uvedeny v tab. 3. Na obr. 12 je znázorněn průběh relativní výchylky $\varphi(t)$ v ustáleném stavu, který je popsán přesným analytickým řešením popisovaným v kapitole 2.2.1. Pro srovnání bylo provedeno i numerické řešení pomocí funkce *ode45* v MATLABu. Je nepochybné, že oba postupy musejí dávat shodné výsledky.

symbol	označení	hodnota	jednotka
n	počet členů řady	25	—
ω_0	úhlová rychlost	60	rad/s
M	zátěžný moment	500	Nm
b	koefficient tlumení	3	Ns/m
k	torzní tuhost	900	N/m
I_1	moment setrvačnosti	0.55	Nm^2
I_2	moment setrvačnosti	0.30	Nm^2
I_3	moment setrvačnosti	0.75	Nm^2
δ	úhel kloubu	$\pi/6$	rad
t_{max}	konečný čas	15 T	s
$\varphi(0)$	počáteční podmínka	0	rad
$\dot{\varphi}(0)$	počáteční podmínka	0	rad/s

Tab. 3: Vstupní parametry pro výpočet systému s Hookeovým kloubem



Obr. 12: Výsledná relativní výchylka $\varphi(t)$ soustavy s Hookeovým kloubem

2.3 Systém s n° volnosti s periodicky proměnnou maticí tuhosti

2.3.1 Analytické řešení

Systém s n stupni volnosti s proměnnou maticí tuhosti lze popsat pohybovou rovnicí podobně jako v [4]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{K} - \mu\tilde{\mathbf{K}}(t)]\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t), \quad (2.3.1)$$

kde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je matice hmotnosti, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je matice tlumení, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je stacionární matice tuhosti, $\tilde{\mathbf{K}}(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ je matice vyjadřující časově proměnnou tuhost, $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^{n,1}$ reprezentuje časově závislý vektor buzení, μ je bezrozměrný parametr a $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n,1}$ je hledaný vektor zobecněných souřadnic (výchylek). Matice proměnné tuhosti i vektor budících sil jsou periodicky proměnné v čase s periodou T

$$\tilde{\mathbf{K}}(t) = \tilde{\mathbf{K}}(t + T), \quad (2.3.2)$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t + T). \quad (2.3.3)$$

Po roznásobení pohybové rovnice (2.3.1) a převedení členu s proměnnou tuhostí na pravou stranu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \mu\tilde{\mathbf{K}}(t)\mathbf{q}(t). \quad (2.3.4)$$

Ustálené kmity popisuje partikulární řešení, k jehož nalezení je nutná znalost matice periodické Greenovy funkce $\mathbf{G}(t)$ jako odezvy stacionárního systému, tzn. levé strany (2.3.4), na jednotkové buzení Diracovým hřebenem. Tuto matici budeme hledat po sloupcích. Označení $\mathbf{g}^{(m)}(t)$ vyjadřuje m -tý sloupec matice $\mathbf{G}(t)$.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{g}}^{(m)}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{g}}^{(m)}(t) + \mathbf{K}\mathbf{g}^{(m)}(t) = \mathbf{i}_m\delta_T(t) = \mathbf{i}_m \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e_j(t), \quad (2.3.5)$$

kde \mathbf{i}_m označuje m -tý sloupec jednotkové matice \mathbf{I} , který má význam jednotkového buzení v m -tém místě.

Řešením rovnice (2.3.5) je m -tý sloupec matice periodické Greenovy funkce - analogie k (2.1.13)

$$\mathbf{g}^{(m)}(t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_j \mathbf{i}_m e_j(t), \quad (2.3.6)$$

kde \mathbf{L}_j je analogicky k (2.1.11) matice dynamických poddajností

$$\mathbf{L}_j = (-j^2\omega^2\mathbf{M} + ij\omega\mathbf{B} + \mathbf{K})^{-1} \in \mathbb{C}^{n,n}. \quad (2.3.7)$$

Maticový tvar periodické Greenovy funkce je

$$\mathbf{G}(t) = [\mathbf{g}^{(1)}(t), \mathbf{g}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{g}^{(n)}(t)] = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_j e_j(t). \quad (2.3.8)$$

Hledané analytické řešení vznikne opět konvolucí periodické Greenovy funkce s pravou stranou pohybové rovnice (2.3.4)

$$\mathbf{q}(t) = \mu \int_0^T \mathbf{G}(t-s) \tilde{\mathbf{K}}(s) \mathbf{q}(s) ds + \int_0^T \mathbf{G}(t-s) \mathbf{p}(s) ds \quad (2.3.9)$$

a po dosazení za $\mathbf{G}(t-s)$ podle (2.3.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \mu \int_0^T \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_j e_j(t-s) \tilde{\mathbf{K}}(s) \mathbf{q}(s) ds + \\ &+ \int_0^T \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_j e_j(t-s) \mathbf{p}(s) ds. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Periodicky proměnné veličiny lze zapsat ve tvaru nekonečné komplexní Fourierovy řady

$$\tilde{\mathbf{K}}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{K}}_l e_{il}(t), \quad (2.3.11)$$

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{p}_l e_{il}(t), \quad (2.3.12)$$

kde $\tilde{\mathbf{K}}_l$ je matice a \mathbf{p}_l je vektor obsahující Fourierovy koeficienty, které odpovídají funkcím v proměnné matici tuhosti a ve vektoru budících sil, konkrétně pak l -té harmonické.

Ze stejných důvodů jako dříve budeme uvažovat opět pouze omezený počet členů řady v intervalu $\langle -N, N \rangle$, $N \in \mathbb{Z}$. Nekonečné sumy se změní na konečné a jejich zápis bude zjednodušen pouze na označení sumačního indexu.

Provedeme vyjádření (2.3.10) pomocí komplexních Fourierových řad (2.3.11) a (2.3.12)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \frac{\mu}{T} \int_0^T \sum_j \mathbf{L}_j e_j(t) e_{-j}(s) \sum_l \tilde{\mathbf{K}}_l e_{il}(s) \mathbf{q}(s) ds + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_j \mathbf{L}_j e_j(t) e_{-j}(s) \sum_l \mathbf{p}_l e_{il}(s) ds \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

a dojdeme jako v předchozích kapitolách k Fredholmově nehomogenní integrální rovnici

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(t) &= \mu \int_0^T \underbrace{\frac{1}{T} \sum_j \sum_l \mathbf{L}_j \tilde{\mathbf{K}}_l e_j(t) e_{l-j}(s)}_{\mathbf{J}(t,s)} \mathbf{q}(s) ds + \\
&+ \frac{1}{T} \sum_j \sum_l \mathbf{L}_j e_j(t) \mathbf{p}_l \underbrace{\int_0^T e_{l-j}(s) ds}_{T\delta_{lj}} = \\
&= \mu \int_0^T \mathbf{J}(t,s) \mathbf{q}(s) ds + \sum_j \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j e_j(t),
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

která má degenerované jádro

$$\mathbf{J}(t,s) = \frac{1}{T} \sum_j \sum_l \mathbf{L}_j \tilde{\mathbf{K}}_l e_j(t) e_{l-j}(s). \tag{2.3.15}$$

Zavedeme substituci

$$\Phi_j(t) = \frac{1}{T} \mathbf{L}_j e_j(t) \in \mathbb{C}^{n,n}, \tag{2.3.16}$$

$$\Psi_j(t) = \sum_l \tilde{\mathbf{K}}_l e_{l-j}(t) \in \mathbb{C}^{n,n} \tag{2.3.17}$$

a po dosazení substitucí do (2.3.14)

$$\mathbf{q}(t) = \mu \sum_j \Phi_j(t) \int_0^T \Psi_j(s) \mathbf{q}(s) ds + \sum_j \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j e_j(t). \tag{2.3.18}$$

Zavedeme α_j následujícím způsobem

$$\alpha_j = \int_0^T \Psi_j(s) \mathbf{q}(s) ds \in \mathbb{C}^{n,1} \tag{2.3.19}$$

a dosadíme do (2.3.18)

$$\mathbf{q}(t) = \mu \sum_j \Phi_j(t) \alpha_j + \sum_j \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j e_j(t). \tag{2.3.20}$$

Rovnici (2.3.20) vynásobíme zleva $\Psi_l(t)$ a integrujeme přes periodu

$$\int_0^T \Psi_l(t) \mathbf{q}(t) dt = \mu \sum_j \int_0^T \Psi_l(t) \Phi_j(t) \alpha_j dt + \sum_j \int_0^T \Psi_l(t) \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j e_j(t) dt, \tag{2.3.21}$$

takže na levé straně vznikne α_l

$$\alpha_l = \mu \sum_j \int_0^T \Psi_l(t) \Phi_j(t) dt \alpha_j + \sum_j \int_0^T \Psi_l(t) e_j(t) dt \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j. \tag{2.3.22}$$

Přistoupíme k označení

$$\mathbf{A}_{lj} = \int_0^T \boldsymbol{\Psi}_l(t) \boldsymbol{\Phi}_j(t) dt, \quad (2.3.23)$$

$$\mathbf{B}_{lj} = \int_0^T \boldsymbol{\Psi}_l(t) e_j(t) dt \mathbf{L}_j \quad (2.3.24)$$

a po úpravě

$$\boldsymbol{\alpha}_l = \mu \sum_j \mathbf{A}_{lj} \boldsymbol{\alpha}_j + \sum_j \mathbf{B}_{lj} \mathbf{p}_j. \quad (2.3.25)$$

Nyní vyčíslíme integrál (2.3.23):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{lj} &= \int_0^T \boldsymbol{\Psi}_l(t) \boldsymbol{\Phi}_j(t) dt = \int_0^T \sum_m \tilde{\mathbf{K}}_m e_m(t) e_{-l}(t) \frac{1}{T} \mathbf{L}_j e_j(t) dt = \\ &= \sum_m \tilde{\mathbf{K}}_m \mathbf{L}_j \frac{1}{T} \int_0^T e_{m-l+j}(t) dt. \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Integrál je nenulový pouze pro

$$m - l + j = 0 \Rightarrow m = l - j \quad (2.3.27)$$

a je roven

$$\int_0^T e_{m-l+j}(t) dt = \int_0^T e^0 dt = T. \quad (2.3.28)$$

Z toho plyne

$$\mathbf{A}_{lj} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}_{l-j} \mathbf{L}_j & l - j \wedge j \in \langle -N, N \rangle \\ \mathbf{0} & l - j \vee j \notin \langle -N, N \rangle \end{cases}, \quad \mathbf{A}_{lj} \in \mathbb{C}^{n,n}. \quad (2.3.29)$$

Obdobně pro integrál (2.3.24):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{lj} &= \int_0^T \boldsymbol{\Psi}_l(t) e_j(t) dt \mathbf{L}_j = \int_0^T \sum_m \tilde{\mathbf{K}}_m e_m(t) e_{-l}(t) e_j(t) dt \mathbf{L}_j = \\ &= \sum_m \tilde{\mathbf{K}}_m \int_0^T e_{m-l+j}(t) dt \mathbf{L}_j = T \tilde{\mathbf{K}}_{l-j} \mathbf{L}_j = T \mathbf{A}_{lj} \in \mathbb{C}^{n,n}. \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Rovnici (2.3.25) lze proto upravit

$$\boldsymbol{\alpha}_l = \mu \sum_j \mathbf{A}_{lj} \boldsymbol{\alpha}_j + T \sum_j \mathbf{A}_{lj} \mathbf{p}_j \quad (2.3.31)$$

a přepsat do souhrnného maticového tvaru

$$\hat{\alpha} = \mu \mathbf{Q} \hat{\alpha} + T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{p}}, \quad (2.3.32)$$

kde

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{-N,-N} & \mathbf{A}_{-N,-N+1} & \cdots & \mathbf{A}_{-N,N} \\ \mathbf{A}_{-N+1,-N} & \mathbf{A}_{-N+1,-N+1} & \cdots & \mathbf{A}_{-N+1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N,-N} & \mathbf{A}_{N,-N+1} & \cdots & \mathbf{A}_{N,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n(2N+1), n(2N+1)} \quad (2.3.33)$$

a

$$\hat{\alpha} = [\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_N]^T \in \mathbb{C}^{n(2N+1), 1}, \quad (2.3.34)$$

$$\hat{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}_{-N}, \mathbf{p}_{-N+1}, \dots, \mathbf{p}_N]^T \in \mathbb{C}^{n(2N+1), 1}. \quad (2.3.35)$$

Za předpokladu regularity a z ní plynoucí invertovatelnosti charakteristické matice $(\mathbf{I} - \mu \mathbf{Q})$ je z (2.3.32) zřejmé, že

$$\hat{\alpha} = T (\mathbf{I} - \mu \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{p}} \quad (2.3.36)$$

Pokud by ale determinant této charakteristické matice nabýval nulové hodnoty, pak by nebylo možné provést inverzi a analytické periodické řešení by neexistovalo. Tato situace nastane v případě, kdy vlastní čísla matice \mathbf{Q} jsou rovna $\frac{1}{\mu}$, tj.

$$\frac{1}{\mu} \in \lambda \{ \mathbf{Q} \}. \quad (2.3.37)$$

Nyní lze dosadit z (2.3.16) zpět do rovnice pro řešení (2.3.20). Výsledné analytické řešení bude mít tvar

$$\boxed{\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{L}}(t) [(\mathbf{I} - \mu \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{I}] \hat{\mathbf{p}}} \in \mathbb{C}^{n, 1}, \quad (2.3.38)$$

kde

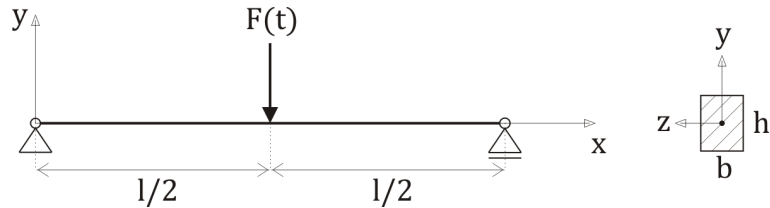
$$\hat{\mathbf{L}}(t) = [\mathbf{L}_{-N} e_{-N}(t), \mathbf{L}_{-N+1} e_{-N+1}(t), \dots, \mathbf{L}_N e_N(t)] \in \mathbb{C}^{n, n(2N+1)}. \quad (2.3.39)$$

Toto periodické řešení opět existuje pouze tehdy, je-li systém stabilní.

2.3.2 Příklady

Příklad - Nosník na dvou podporách

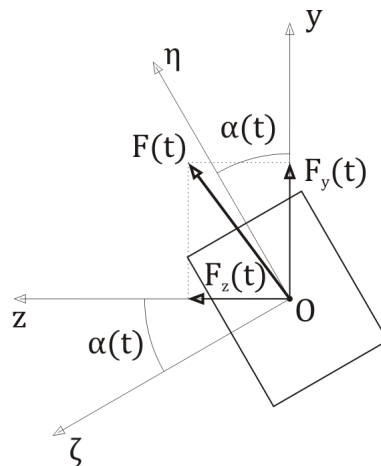
Postup řešení uvedený v kapitole 2.3.1 demonstrujeme na příkladu nosníku obdélníkového průřezu na dvou podporách, který je ve středu mezi podpěrami zatížen silou obecného směru s časově periodickým průběhem, jejíž nositelka leží v rovině kolmé na osu nosníku, viz. obr 13.



Obr. 13: Nosník na dvou podporách zatížený silou $\mathbf{F}(t)$

Řešení

Uvažujme dva souřadnicové systémy, oba s počátkem v těžišti průřezu nosníku. Systém souřadnic $O(x, y, z)$ je pevný v prostoru a systém $O(\xi, \eta, \zeta)$ je pevně spojen s tělesem. Vzájemné natočení těchto dvou souřadnicových systémů je popsáno úhlem α , který se mění v čase. Na obr. 14 je řez nosníkem v rovině působení zatěžující síly $\mathbf{F}(t)$.



Obr. 14: Řez nosníkem v místě působení síly $\mathbf{F}(t)$

Pro průhyb jednodimenzionálního nosníku na dvou podporách, který je uprostřed zatížen silou platí

$$v = \frac{Fl^3}{48EI}. \quad (2.3.40)$$

Z toho můžeme snadno určit průhyby ve směrech η a ζ

$$v_\eta(t) = \frac{F_\eta(t)l^3}{48EI_\zeta}, \quad (2.3.41)$$

$$v_\zeta(t) = \frac{F_\zeta(t)l^3}{48EI_\eta}, \quad (2.3.42)$$

kde

$$F_\eta(t) = F_y(t) \cos \alpha(t) + F_z(t) \sin \alpha(t), \quad (2.3.43)$$

$$F_\zeta(t) = -F_y(t) \sin \alpha(t) + F_z(t) \cos \alpha(t) \quad (2.3.44)$$

a

$$I_\eta = \frac{1}{12}hb^3, \quad (2.3.45)$$

$$I_\zeta = \frac{1}{12}bh^3. \quad (2.3.46)$$

Dosadíme za složky sil (2.3.43) a (2.3.44) do rovnic (2.3.41) a (2.3.42) pro složky průhybu

$$v_\eta(t) = \frac{[F_y(t) \cos \alpha(t) + F_z(t) \sin \alpha(t)] l^3}{48EI_\zeta}, \quad (2.3.47)$$

$$v_\zeta(t) = \frac{[-F_y(t) \sin \alpha(t) + F_z(t) \cos \alpha(t)] l^3}{48EI_\eta}. \quad (2.3.48)$$

Za pomoci transformačních vztahů (2.3.49) a (2.3.50) vyjádříme průhyb $v(t)$, resp. $w(t)$ ve směru osy y , resp. osy z

$$v(t) = v_\eta(t) \cos \alpha(t) - v_\zeta(t) \sin \alpha(t), \quad (2.3.49)$$

$$w(t) = v_\eta(t) \sin \alpha(t) + v_\zeta(t) \cos \alpha(t). \quad (2.3.50)$$

Po dosazení a úpravě v souhrnném maticovém zápise

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \frac{l^3}{48E} \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \alpha(t)}{I_\zeta} + \frac{\sin^2 \alpha(t)}{I_\eta} & \frac{\sin 2\alpha(t)}{2I_\zeta} + \frac{\sin 2\alpha(t)}{2I_\eta} \\ \frac{\sin 2\alpha(t)}{2I_\zeta} + \frac{\sin 2\alpha(t)}{2I_\eta} & \frac{\sin^2 \alpha(t)}{I_\zeta} + \frac{\cos^2 \alpha(t)}{I_\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_y(t) \\ F_z(t) \end{pmatrix}, \quad (2.3.51)$$

z něhož vyjádříme složky síly $\mathbf{F}(t)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} F_y(t) \\ F_z(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}(t)} = \frac{48E}{l^3} \underbrace{\begin{pmatrix} I_\zeta \cos^2 \alpha(t) + I_\eta \sin^2 \alpha(t) & (I_\zeta - I_\eta) \sin 2\alpha(t) \\ (I_\zeta - I_\eta) \sin 2\alpha(t) & I_\zeta \sin^2 \alpha(t) + I_\eta \cos^2 \alpha(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}_{yz}(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}(t)}. \quad (2.3.52)$$

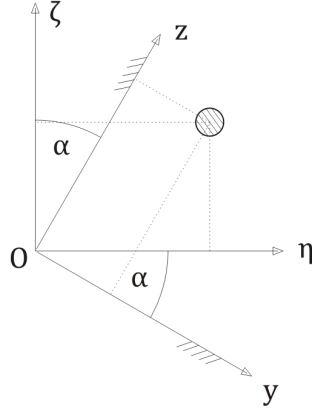
Prvky matice $\mathbf{I}_{yz}(t)$ jsou momenty setrvačnosti a deviační momenty, což podkládá následující implikace - maticová analogie k (2.3.40)

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}l^3}{48E\mathbf{I}_{yz}} \Rightarrow \mathbf{F} = \frac{48E}{l^3}\mathbf{I}_{yz}\mathbf{u}. \quad (2.3.53)$$

Výpočet prvků matice setrvačnosti \mathbf{I}_{yz} lze také provést přímo z definice. Transformační vztahy jsou (viz obr. 15)

$$y = \eta \cos \alpha - \zeta \sin \alpha, \quad (2.3.54)$$

$$z = \eta \sin \alpha + \zeta \cos \alpha. \quad (2.3.55)$$



Obr. 15: Transformace ze systému $O(\xi, \eta, \zeta)$ do $O(x, y, z)$

A podle definice kvadratického a deviačního momentu setrvačnosti vyjde

$$\begin{aligned} I_y &= \int z^2 dA = \int (\eta^2 \sin^2 \alpha + 2\eta\zeta \sin \alpha \cos \alpha + \zeta^2 \cos^2 \alpha) dA = \\ &= I_\zeta \sin^2 \alpha + I_\eta \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (2.3.56)$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int y^2 dA = \int (\eta^2 \cos^2 \alpha - 2\eta\zeta \sin \alpha \cos \alpha + \zeta^2 \sin^2 \alpha) dA = \\ &= I_\zeta \cos^2 \alpha + I_\eta \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (2.3.57)$$

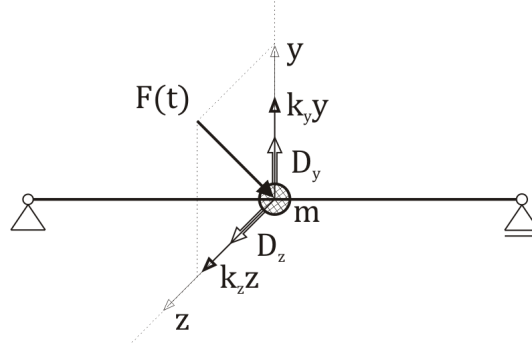
$$\begin{aligned} D_{yz} &= \int yz dA = \int ((\eta^2 - \zeta^2) \sin \alpha \cos \alpha - \eta\zeta \sin^2 \alpha + \eta\zeta \cos^2 \alpha) dA = \\ &= (I_\zeta - I_\eta) \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.3.58)$$

což potvrzuje, že prvky matice \mathbf{I}_{yz} jsou momenty setrvačnosti vyjádřené v systému souřadnic $O(x, y, z)$.

Pro určení pohybové rovnice soustředíme hmotnost tělesa do osy nosníku. Na těleso působí podle D'Alembertova principu setrvačné účinky D_y, D_z , které jsou znázorněny na obr. 16.

S pomocí Lagrangeových rovnic získáme pohybovou rovnici nosníku ve tvaru

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{v}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{pmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\frac{48E}{l^3} \begin{pmatrix} I_z(t) & D_{yz}(t) \\ D_{yz}(t) & I_y(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_y(t) \\ F_z(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}(t)}, \quad (2.3.59)$$



Obr. 16: Setrvačné účinky na hmotu nosníku

resp.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (2.3.60)$$

kde \mathbf{M} značí stacionární matici hmotnosti nezávislou na čase, $\mathbf{K}(t)$ je celková periodická matice tuhosti, $\mathbf{q}(t)$ značí hledaný vektor zobecněných souřadnic a na pravé straně vystupuje periodicky proměnná budící síla $\mathbf{F}(t)$.

Tvar matice $\mathbf{K}(t)$ je po dosazení z (2.3.56) - (2.3.58) a (2.3.45) - (2.3.46)

$$\mathbf{K}(t) = \frac{4Ebh}{l^3} \begin{pmatrix} h^2 \cos^2 \alpha(t) + b^2 \sin^2 \alpha(t) & (h^2 - b^2) \sin \alpha(t) \cos \alpha(t) \\ (h^2 - b^2) \sin \alpha(t) \cos \alpha(t) & h^2 \sin^2 \alpha(t) + b^2 \cos^2 \alpha(t) \end{pmatrix}. \quad (2.3.61)$$

Ve výpočtu bylo nutno rozdělit celkovou matici tuhosti na stacionární a proměnnou část. Stacionární část je tvořena střední hodnotou tuhosti, kolem které osciluje proměnná část a dohromady dávají celkovou tuhost.

Ve výpočtu byly implementovány hodnoty parametrů uvedené v tab. 4. Byla uvažována periodická budící síla působící kolmo dolů, tj. proti kladné orientaci osy y . Její složky jsou

$$F_y(t) = F_0 \sin(\omega t), \quad (2.3.62)$$

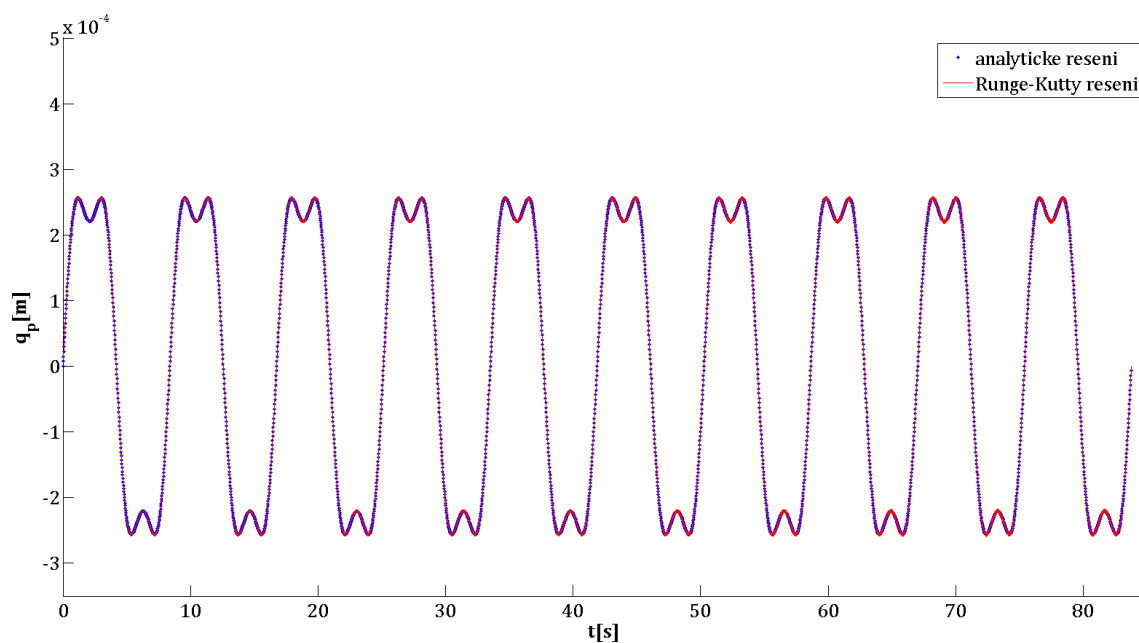
$$F_z(t) = 0. \quad (2.3.63)$$

Výpočet byl proveden v systému MATLAB. Hodnoty analytického řešení byly pro představu porovnány s výstupem numerického řešiče *ode45* založeného na Runge-Kuttově metodě. Na obr. 17 je graf závislosti amplitudy y -ové složky výchylky na čase, na obr. 18 je tatáž závislost pro z -ovou složku výchylky.

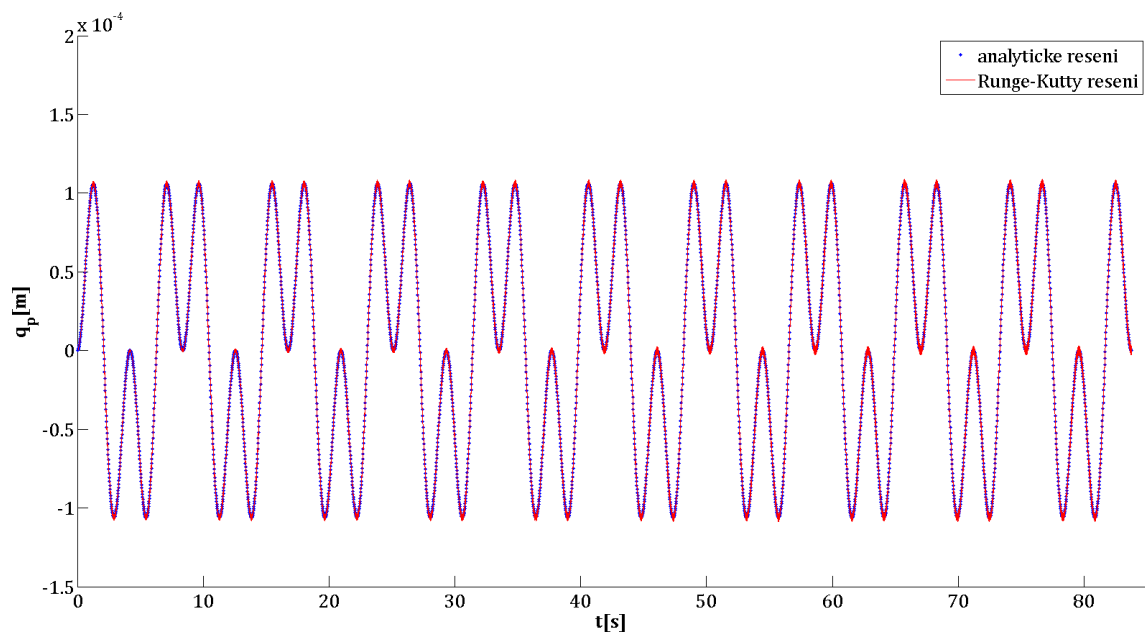
Počáteční podmínky byly voleny nulové. Z toho plyne, že se zde vůbec nevyskytne oblast přechodových kmitů, takže kmitající systém je od počátku ustálen. Analytické periodické řešení popisuje výchylku tohoto systému zcela přesně. Z obrázků 17 a 18 je zřejmé, že analytická i numerická metoda dávají opět shodné výsledky.

symbol	označení	hodnota	jednotka
l	délka	1	m
b	šířka	0.02	m
h	výška	0.03	m
ρ	hustota	7800	kg/m^3
E	Youngův modul pružnosti	210	GPa
F_0	amplituda zatěžující síly	100	N
ω	budící frekvence	0.75	rad/s

Tab. 4: Vstupní parametry pro výpočet periodických kmitů nosníku



Obr. 17: Výsledná y -ová složka vektoru zobecněných souřadnic $q_y(t)$



Obr. 18: Výsledná z -ová složka vektoru zobecněných souřadnic $q_z(t)$

2.4 Systém s n° volnosti s periodicky proměnnými maticemi hmotnosti, tlumení i tuhosti

Pohybová rovnice systému s n stupni volnosti má v případě proměnných všech parametrů tvar

$$\left[\mathbf{M} - \mu_1 \widetilde{\mathbf{M}}(t) \right] \ddot{\mathbf{q}}(t) + \left[\mathbf{B} - \mu_2 \widetilde{\mathbf{B}}(t) \right] \dot{\mathbf{q}}(t) + \left[\mathbf{K} - \mu_3 \widetilde{\mathbf{K}}(t) \right] \mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t), \quad (2.4.1)$$

kde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$ jsou stacionární a $\widetilde{\mathbf{M}}(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\widetilde{\mathbf{B}}(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\widetilde{\mathbf{K}}(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ jsou proměnné matice hmotnosti, tlumení a tuhosti, $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^{n,1}$ je vektor budících sil, μ_1 , μ_2 a μ_3 jsou bezrozměrné parametry a $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n,1}$ je hledaný vektor zobecněných souřadnic.

Všechny proměnné matice jsou periodické v čase s periodou T . Totéž platí i pro vektor budících sil.

$$\widetilde{\mathbf{M}}(t) = \widetilde{\mathbf{M}}(t + T), \quad (2.4.2)$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}(t) = \widetilde{\mathbf{B}}(t + T), \quad (2.4.3)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}(t) = \widetilde{\mathbf{K}}(t + T), \quad (2.4.4)$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t + T), \quad (2.4.5)$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t + T). \quad (2.4.6)$$

Roznásobíme pohybovou rovnici (2.4.1) a proměnné složky převedeme na pravou stranu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \mu_1 \widetilde{\mathbf{M}}(t)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mu_2 \widetilde{\mathbf{B}}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mu_3 \widetilde{\mathbf{K}}(t)\mathbf{q}(t). \quad (2.4.7)$$

Při hledání ustálených kmitů, které popisuje partikulární řešení, opět využijeme maticovou periodickou Greenovu funkci $\mathbf{G}(t)$. Najdeme ji jako odezvu stacionárního systému na levé straně rovnice (2.4.7) na jednotkové buzení Diracovým hřebenem. Tento výpočet je proveden v kapitole 2.3.1 v (2.3.5) - (2.3.8).

Hledané analytické řešení bude konvoluce matice periodické Greenovy funkce (2.3.8) s pravou stranou pohybové rovnice (2.4.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) = & \mu_1 \int_0^T \mathbf{G}(t-s) \widetilde{\mathbf{M}}(s) \ddot{\mathbf{q}}(s) ds + \mu_2 \int_0^T \mathbf{G}(t-s) \widetilde{\mathbf{B}}(s) \dot{\mathbf{q}}(s) ds + \\ & + \mu_3 \int_0^T \mathbf{G}(t-s) \widetilde{\mathbf{K}}(s) \mathbf{q}(s) ds + \int_0^T \mathbf{G}(t-s) \mathbf{p}(s) ds. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Dosadíme za zpožděnou Greenovu periodickou funkci $\mathbf{G}(t-s)$ podle (2.3.8)

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(t) &= \mu_1 \int_0^T \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_j e_j(t-s) \widetilde{\mathbf{M}}(s) \ddot{\mathbf{q}}(s) ds + \\
&+ \mu_2 \int_0^T \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_j e_j(t-s) \widetilde{\mathbf{B}}(s) \dot{\mathbf{q}}(s) ds + \\
&+ \mu_3 \int_0^T \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_j e_j(t-s) \widetilde{\mathbf{K}}(s) \mathbf{q}(s) ds + \\
&+ \int_0^T \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_j e_j(t-s) \mathbf{p}(s) ds.
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Periodické maticové funkce vyjádříme ve tvaru nekonečné komplexní Fourierovy řady

$$\widetilde{\mathbf{M}}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{M}}_l e_l(t), \tag{2.4.10}$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{B}}_l e_l(t), \tag{2.4.11}$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{K}}_l e_l(t), \tag{2.4.12}$$

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{p}_l e_l(t). \tag{2.4.13}$$

Matice

$$\widetilde{\mathbf{M}}_l \in \mathbb{C}^{n,n}, \tag{2.4.14}$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}_l \in \mathbb{C}^{n,n}, \tag{2.4.15}$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_l \in \mathbb{C}^{n,n}, \tag{2.4.16}$$

jsou matice obsahující Fourierovy koeficienty proměnných složek hmotnosti, tlumení, tuhosti odpovídající l -té harmonické. Stejně tak i vektor

$$\mathbf{p}_l \in \mathbb{C}^{n,1} \tag{2.4.17}$$

je vektor Fourierových koeficientů budící síly pro l -tou harmonickou.

Dále budeme stejně jako v předešlých kapitolách uvažovat pouze omezený počet členů řady v intervalu $\langle -N, N \rangle$, $N \in \mathbb{Z}$ a nekonečné sumy nahradíme konečnými se zjedodušeným zápisem označujícím sumační index.

Dosadíme z (2.4.10) - (2.4.13) do (2.4.9) a dostaneme se opět k nehomogenní integro-diferenciální rovnici

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(t) &= \mu_1 \int_0^T \underbrace{\frac{1}{T} \sum_j \sum_l \mathbf{L}_j \widetilde{\mathbf{M}}_l e_j(t) e_{l-j}(s)}_{\mathbf{J}_M(t,s)} \ddot{\mathbf{q}}(s) ds + \\
&+ \mu_2 \int_0^T \underbrace{\frac{1}{T} \sum_j \sum_l \mathbf{L}_j \widetilde{\mathbf{B}}_l e_j(t) e_{l-j}(s)}_{\mathbf{J}_B(t,s)} \dot{\mathbf{q}}(s) ds + \\
&+ \mu_3 \int_0^T \underbrace{\frac{1}{T} \sum_j \sum_l \mathbf{L}_j \widetilde{\mathbf{K}}_l e_j(t) e_{l-j}(s)}_{\mathbf{J}_K(t,s)} \mathbf{q}(s) ds + \\
&+ \frac{1}{T} \sum_j \sum_l \mathbf{L}_j \mathbf{p}_l e_j(t) \underbrace{\int_0^T e_{l-j}(s) ds}_{T\delta_{lj}} = \\
&= \mu_1 \int_0^T \mathbf{J}_M(t,s) \ddot{\mathbf{q}}(s) ds + \mu_2 \int_0^T \mathbf{J}_B(t,s) \dot{\mathbf{q}}(s) ds + \\
&+ \mu_3 \int_0^T \mathbf{J}_K(t,s) \mathbf{q}(s) ds + \sum_j \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j e_j(t),
\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

kteřá má degenerovaná jádra

$$\mathbf{J}_M(t,s) = \frac{1}{T} \sum_j \sum_l \mathbf{L}_j \widetilde{\mathbf{M}}_l e_j(t) e_{l-j}(s), \tag{2.4.19}$$

$$\mathbf{J}_B(t,s) = \frac{1}{T} \sum_j \sum_l \mathbf{L}_j \widetilde{\mathbf{B}}_l e_j(t) e_{l-j}(s), \tag{2.4.20}$$

$$\mathbf{J}_K(t,s) = \frac{1}{T} \sum_j \sum_l \mathbf{L}_j \widetilde{\mathbf{K}}_l e_j(t) e_{l-j}(s). \tag{2.4.21}$$

Zavedeme substituce

$$\Phi_j(t) = \frac{1}{T} \mathbf{L}_j e_j(t), \tag{2.4.22}$$

$$\Psi_j^M(t) = \sum_l \widetilde{\mathbf{M}}_l e_{l-j}(t), \tag{2.4.23}$$

$$\Psi_j^B(t) = \sum_l \widetilde{\mathbf{B}}_l e_{l-j}(t), \tag{2.4.24}$$

$$\Psi_j^K(t) = \sum_l \widetilde{\mathbf{K}}_l e_{l-j}(t) \tag{2.4.25}$$

a po jejich dosazení do (2.4.18)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) = & \mu_1 \sum_j \Phi_j(t) \int_0^T \Psi_j^{\mathbf{M}}(s) \ddot{\mathbf{q}}(s) ds + \mu_2 \sum_j \Phi_j(t) \int_0^T \Psi_j^{\mathbf{B}}(s) \dot{\mathbf{q}}(s) ds + \\ & + \mu_3 \sum_j \Phi_j(t) \int_0^T \Psi_j^{\mathbf{K}}(s) \mathbf{q}(s) ds + \sum_j \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j e_j(t). \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Označíme

$$\gamma_j = \int_0^T \Psi_j^{\mathbf{M}}(s) \ddot{\mathbf{q}}(s) ds, \quad (2.4.27)$$

$$\beta_j = \int_0^T \Psi_j^{\mathbf{B}}(s) \dot{\mathbf{q}}(s) ds, \quad (2.4.28)$$

$$\alpha_j = \int_0^T \Psi_j^{\mathbf{K}}(s) \mathbf{q}(s) ds. \quad (2.4.29)$$

Zápis rovnice (2.4.26) se zjednoduší

$$\mathbf{q}(t) = \mu_1 \sum_j \Phi_j(t) \gamma_j + \mu_2 \sum_j \Phi_j(t) \beta_j + \mu_3 \sum_j \Phi_j(t) \alpha_j + \sum_j \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j e_j(t). \quad (2.4.30)$$

V dalším postupu využijeme první a druhou časovou derivaci rovnice (2.4.30)

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mu_1 \sum_j \dot{\Phi}_j(t) \gamma_j + \mu_2 \sum_j \dot{\Phi}_j(t) \beta_j + \mu_3 \sum_j \dot{\Phi}_j(t) \alpha_j + \sum_j \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j \dot{e}_j(t), \quad (2.4.31)$$

po úpravě

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) = & \mu_1 \sum_j ij\omega \Phi_j(t) \gamma_j + \mu_2 \sum_j ij\omega \Phi_j(t) \beta_j + \\ & + \mu_3 \sum_j ij\omega \Phi_j(t) \alpha_j + \sum_j ij\omega \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j e_j(t), \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}(t) = & \mu_1 \sum_j -j^2 \omega^2 \Phi_j(t) \gamma_j + \mu_2 \sum_j -j^2 \omega^2 \Phi_j(t) \beta_j + \\ & + \mu_3 \sum_j -j^2 \omega^2 \Phi_j(t) \alpha_k + \sum_j -j^2 \omega^2 \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j e_j(t). \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

Rovnici (2.4.30) vynásobíme zleva $\Psi_l^{\mathbf{K}}(t)$ a integrujeme přes periodu

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^T \Psi_l^{\mathbf{K}}(t) \mathbf{q}(t) dt}_{\alpha_l} = & \mu_1 \sum_j \int_0^T \Psi_l^{\mathbf{K}}(t) \Phi_j(t) dt \gamma_j + \mu_2 \sum_j \int_0^T \Psi_l^{\mathbf{K}}(t) \Phi_j(t) dt \beta_j + \\ & + \mu_3 \sum_j \int_0^T \Psi_l^{\mathbf{K}}(t) \Phi_j(t) dt \alpha_j + \sum_j \int_0^T \Psi_l^{\mathbf{K}}(t) e_j(t) dt \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

a přistoupíme k označení

$$\mathbf{A}_{lj} = \int_0^T \Psi_l^K(t) \Phi_j(t) dt, \quad (2.4.35)$$

$$\mathbf{B}_{lj} = \int_0^T \Psi_l^K(t) e_j(t) dt. \quad (2.4.36)$$

Vyčíslení těchto integrálů je již provedeno v kapitole 2.3.1, a sice v (2.3.26) - (2.3.30). Lze proto rovnou psát

$$\mathbf{A}_{lj} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}_{l-j} \mathbf{L}_j & l-j \wedge j \in \langle -N, N \rangle \\ \mathbf{0} & l-j \vee j \notin \langle -N, N \rangle \end{cases}, \quad \mathbf{A}_{lj} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (2.4.37)$$

$$\mathbf{B}_{lj} = T \mathbf{A}_{lj}, \quad \mathbf{B}_{lj} \in \mathbb{C}^{n,n}. \quad (2.4.38)$$

Zápis rovnice (2.4.34) se zjednoduší

$$\alpha_l = \mu_1 \sum_j \mathbf{A}_{lj} \gamma_j + \mu_2 \sum_j \mathbf{A}_{lj} \beta_j + \mu_3 \sum_j \mathbf{A}_{lj} \alpha_j + T \sum_j \mathbf{A}_{lj} \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j. \quad (2.4.39)$$

Rovnici (2.4.32) vynásobíme zleva $\Psi_l^B(t)$ a integrujeme přes periodu

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^T \Psi_l^B(t) \dot{\mathbf{q}}(t) dt}_{\beta_l} &= \mu_1 \sum_j ij\omega \int_0^T \Psi_l^B(t) \Phi_j(t) dt \gamma_j + \\ &+ \mu_2 \sum_j ij\omega \int_0^T \Psi_l^B(t) \Phi_j(t) dt \beta_j + \\ &+ \mu_3 \sum_j ij\omega \int_0^T \Psi_l^B(t) \Phi_j(t) dt \alpha_j + \\ &+ \sum_j ij\omega \int_0^T \Psi_l^B(t) e_j(t) dt \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

a označíme

$$\mathbf{C}_{lj} = ij\omega \int_0^T \Psi_l^B(t) \Phi_j(t) dt, \quad (2.4.41)$$

$$\mathbf{D}_{lj} = ij\omega \int_0^T \Psi_l^B(t) e_j(t) dt. \quad (2.4.42)$$

Analogicky k (2.4.37) a (2.4.38)

$$\mathbf{C}_{lj} = \begin{cases} ij\omega \tilde{\mathbf{B}}_{l-j} \mathbf{L}_j & l-j \wedge j \in \langle -N, N \rangle \\ \mathbf{0} & l-j \vee j \notin \langle -N, N \rangle \end{cases}, \quad \mathbf{C}_{lj} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (2.4.43)$$

$$\mathbf{D}_{lj} = T\mathbf{C}_{lj}, \quad \mathbf{D}_{lj} \in \mathbb{C}^{n,n}. \quad (2.4.44)$$

Zápis rovnice (2.4.38) se opět zjednoduší

$$\boldsymbol{\beta}_l = \mu_1 \sum_j \mathbf{C}_{lj} \boldsymbol{\gamma}_j + \mu_2 \sum_j \mathbf{C}_{lj} \boldsymbol{\beta}_j + \mu_3 \sum_j \mathbf{C}_{lj} \boldsymbol{\alpha}_j + T \sum_j \mathbf{C}_{lj} \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j. \quad (2.4.45)$$

Rovnici (2.4.33) vynásobíme zleva $\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathbf{M}}(t)$ a integrujeme přes periodu

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^T \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathbf{M}}(t) \ddot{\mathbf{q}}(t) dt}_{\boldsymbol{\gamma}_l} &= \mu_1 \sum_j -j^2 \omega^2 \int_0^T \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathbf{M}}(t) \boldsymbol{\Phi}_j(t) dt \boldsymbol{\gamma}_j + \\ &+ \mu_2 \sum_j -j^2 \omega^2 \int_0^T \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathbf{M}}(t) \boldsymbol{\Phi}_j(t) dt \boldsymbol{\beta}_j + \\ &+ \mu_3 \sum_j -j^2 \omega^2 \int_0^T \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathbf{M}}(t) \boldsymbol{\Phi}_j(t) dt \boldsymbol{\alpha}_j + \\ &+ \sum_j -j^2 \omega^2 \int_0^T \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathbf{M}}(t) e_j(t) dt \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j \end{aligned} \quad (2.4.46)$$

a označíme

$$\mathbf{E}_{lj} = -j^2 \omega^2 \int_0^T \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathbf{B}}(t) \boldsymbol{\Phi}_j(t) dt, \quad (2.4.47)$$

$$\mathbf{F}_{lj} = -j^2 \omega^2 \int_0^T \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathbf{B}}(t) e_j(t) dt. \quad (2.4.48)$$

Obdobně jako v (2.4.37) a (2.4.38) bude platit

$$\mathbf{E}_{lj} = \begin{cases} -j^2 \omega^2 \widetilde{\mathbf{M}}_{l-j} \mathbf{L}_j & l-j \wedge j \in \langle -N, N \rangle \\ \mathbf{0} & l-j \vee j \notin \langle -N, N \rangle \end{cases}, \quad \mathbf{E}_{lj} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (2.4.49)$$

$$\mathbf{F}_{lj} = T\mathbf{E}_{lj}, \quad \mathbf{F}_{lj} \in \mathbb{C}^{n,n}. \quad (2.4.50)$$

Zápis rovnice (2.4.46) se opět zjednoduší

$$\boldsymbol{\gamma}_l = \mu_1 \sum_j \mathbf{E}_{lj} \boldsymbol{\gamma}_j + \mu_2 \sum_j \mathbf{E}_{lj} \boldsymbol{\beta}_j + \mu_3 \sum_j \mathbf{E}_{lj} \boldsymbol{\alpha}_j + T \sum_j \mathbf{E}_{lj} \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j. \quad (2.4.51)$$

Přistoupíme k řešení soustavy tří rovnic pro neznámé $\boldsymbol{\alpha}_l$ (2.4.37), $\boldsymbol{\beta}_l$ (2.4.45) a $\boldsymbol{\gamma}_l$ (2.4.51)

$$\boldsymbol{\alpha}_l = \mu_1 \sum_j \mathbf{A}_{lj} \boldsymbol{\gamma}_j + \mu_2 \sum_j \mathbf{A}_{lj} \boldsymbol{\beta}_j + \mu_3 \sum_j \mathbf{A}_{lj} \boldsymbol{\alpha}_j + T \sum_j \mathbf{A}_{lj} \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j, \quad (2.4.52)$$

$$\boldsymbol{\beta}_l = \mu_1 \sum_j \mathbf{C}_{lj} \boldsymbol{\gamma}_j + \mu_2 \sum_j \mathbf{C}_{lj} \boldsymbol{\beta}_j + \mu_3 \sum_j \mathbf{C}_{lj} \boldsymbol{\alpha}_j + T \sum_j \mathbf{C}_{lj} \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j, \quad (2.4.53)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_l = \mu_1 \sum_j \mathbf{E}_{lj} \boldsymbol{\gamma}_j + \mu_2 \sum_j \mathbf{E}_{lj} \boldsymbol{\beta}_j + \mu_3 \sum_j \mathbf{E}_{lj} \boldsymbol{\alpha}_j + T \sum_j \mathbf{E}_{lj} \mathbf{L}_j \mathbf{p}_j. \quad (2.4.54)$$

Zavedeme následující substituci

$$\mu_1 = \mu z_1, \quad (2.4.55)$$

$$\mu_2 = \mu z_2, \quad (2.4.56)$$

$$\mu_3 = \mu z_3. \quad (2.4.57)$$

Dosadíme do (2.4.52) - (2.4.54) z (2.4.55) - (2.4.57) a zapíšeme maticově

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \hline \beta \\ \hline \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \mu \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_1 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ \hat{\mathbf{Q}} & \hat{\mathbf{Q}} & \hat{\mathbf{Q}} \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \hline \beta \\ \hline \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + \quad (2.4.58)$$

$$+ T \hat{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{L}_{-N} & & & \\ & \mathbf{L}_{-N+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{L}_N \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{p}_{-N} \\ \mathbf{p}_{-N+1} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}},$$

resp.

$$\mathbf{u} = \mu \mathbf{Q} \mathbf{u} + T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{L} \mathbf{p}, \quad (2.4.59)$$

kde

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_{-N}, \boldsymbol{\alpha}_{-N+1}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N]^T \in \mathbb{C}^{n(2N+1),1}, \quad (2.4.60)$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_{-N}, \boldsymbol{\beta}_{-N+1}, \dots, \boldsymbol{\beta}_N]^T \in \mathbb{C}^{n(2N+1),1}, \quad (2.4.61)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}_{-N}, \boldsymbol{\gamma}_{-N+1}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_N]^T \in \mathbb{C}^{n(2N+1),1}, \quad (2.4.62)$$

$$\mathbf{p} = [\mathbf{p}_{-N}, \mathbf{p}_{-N+1}, \dots, \mathbf{p}_N]^T \in \mathbb{C}^{n(2N+1),1}, \quad (2.4.63)$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} z_1 & z_1 & \dots & z_1 \\ z_1 & \dots & \dots & z_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1 & \dots & \dots & z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3n(2N+1),n(2N+1)}, \quad (2.4.64)$$

$$\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} z_2 & z_2 & \dots & z_2 \\ z_2 & \dots & \dots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_2 & \dots & \dots & z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3n(2N+1), n(2N+1)}, \quad (2.4.65)$$

$$\mathbf{z}_3 = \begin{pmatrix} z_3 & z_3 & \dots & z_3 \\ z_3 & \dots & \dots & z_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_3 & \dots & \dots & z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3n(2N+1), n(2N+1)}, \quad (2.4.66)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{-N} & & & \\ & \mathbf{L}_{-N+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{L}_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n(2N+1), n(2N+1)}, \quad (2.4.67)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{-N,-N} & \mathbf{A}_{-N,-N+1} & \dots & \mathbf{A}_{-N,N} \\ \mathbf{A}_{-N+1,-N} & \mathbf{A}_{-N+1,-N+1} & \dots & \mathbf{A}_{-N+1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N,-N} & \mathbf{A}_{N,-N+1} & \dots & \mathbf{A}_{N,N} \\ \hline \mathbf{C}_{-N,-N} & \mathbf{C}_{-N,-N+1} & \dots & \mathbf{C}_{-N,N} \\ \mathbf{C}_{-N+1,-N} & \mathbf{C}_{-N+1,-N+1} & \dots & \mathbf{C}_{-N+1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{N,-N} & \mathbf{C}_{N,-N+1} & \dots & \mathbf{C}_{N,N} \\ \hline \mathbf{E}_{-N,-N} & \mathbf{E}_{-N,-N+1} & \dots & \mathbf{E}_{-N,N} \\ \mathbf{A}_{-N+1,-N} & \mathbf{E}_{-N+1,-N+1} & \dots & \mathbf{E}_{-N+1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}_{N,-N} & \mathbf{E}_{N,-N+1} & \dots & \mathbf{E}_{N,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3n(2N+1), n(2N+1)}. \quad (2.4.68)$$

Předpokládejme, že existuje matice $(\mathbf{I} - \mu\mathbf{Q})^{-1}$, tzn. že charakteristická matice $(\mathbf{I} - \mu\mathbf{Q})$ je regulární. Tato podmínka není splněna, pokud vlastní čísla matice \mathbf{Q} jsou rovna $\frac{1}{\mu}$, tj.

$$\frac{1}{\mu} \in \lambda\{\mathbf{Q}\}. \quad (2.4.69)$$

V tomto případě neexistuje periodické analytické řešení. V opačném případě lze vyjádřit vektor neznámých \mathbf{u} jako

$$\mathbf{u} = T(\mathbf{I} - \mu\mathbf{Q})^{-1} \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{Lp}. \quad (2.4.70)$$

Tyto neznámé tvoří vstupní hodnoty do rovnice (2.4.30). Nejprve ale ještě označíme

$$\bar{\mathbf{L}}(t) = [\hat{\mathbf{L}}(t), \hat{\mathbf{L}}(t), \hat{\mathbf{L}}(t)], \quad (2.4.71)$$

kde $\hat{\mathbf{L}}(t)$ je z rovnice (2.3.39)

$$\hat{\mathbf{L}}(t) = [\mathbf{L}_{-N}e_{-N}(t), \mathbf{L}_{-N+1}e_{-N+1}(t), \dots, \mathbf{L}_N e_N(t)] \in \mathbb{C}^{n, n(2N+1)}. \quad (2.4.72)$$

Výsledné analytické řešení je po dosazení do (2.4.30)

$$\mathbf{q}(t) = \left[\bar{\mathbf{L}}(t) (\mathbf{I} - \mu\mathbf{Q})^{-1} \hat{\mathbf{Q}} + \mathbf{e}^T(t) \right] \mathbf{Lp} \quad (2.4.73)$$

a existuje pouze v případě, že je systém stabilní.

3 Stabilita řešení

3.1 Floquetova teorie

Pro vyšetřování stability periodických řešení lineárních obyčejných diferenciálních rovnic se hojně využívá Floquetova teorie. Její princip spočívá v nalezení fundamentálního řešení, následné transformaci souřadnic a určení tzv. matice monodromie, jejíž vlastní čísla rozhodují o stabilitě systému. Podrobnější vysvětlení k následujícím odvozením a důkaz těchto tvrzení je uveden v [5].

V obecném případě je systém s n stupni volnosti popsán pohybovou rovnicí

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t), \quad (3.1.1)$$

kde $\mathbf{M}(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ je časově proměnná matice hmotnosti s periodou T , $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ je periodická matice tlumení a $\mathbf{K}(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ je periodická matice tuhosti. Na pravé straně vystupuje časově periodicky proměnný vektor budících sil $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^{n,1}$ a hledaný periodický vektor zobecněných souřadnic je $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n,1}$.

K pohybové rovnici (3.1.1) přidáme identitu

$$\mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.1.2)$$

a provedeme přechod do tzv. stavového prostoru

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}(t) & \mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t) & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{N}(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{y}}(t)} - \underbrace{\begin{pmatrix} -\mathbf{K}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}(t)}, \quad (3.1.3)$$

resp.

$$\mathbf{N}(t)\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(t). \quad (3.1.4)$$

Ve stavovém prostoru se řád matic a délka vektorů zdvojnásobí, tj. $\mathbf{N}(t) \in \mathbb{R}^{2n,2n}$, $\mathbf{P}(t) \in \mathbb{R}^{2n,2n}$, $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^{2n,1}$ a $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{2n,1}$.

Za předpokladu regularity matice $\mathbf{N}(t)$ můžeme psát

$$\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{b}(t), \quad (3.1.5)$$

kde $\mathbf{A}(t)$ je systémová matice

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{N}^{-1}(t)\mathbf{P}(t) \in \mathbb{R}^{2n,2n} \quad (3.1.6)$$

a $\mathbf{b}(t)$ je vektor budících sil

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{N}^{-1}(t)\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^{2n,1}. \quad (3.1.7)$$

Protože všechny matice v (3.1.1) jsou periodické, pak i systémová matice $\mathbf{A}(t)$ je periodická

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T). \quad (3.1.8)$$

O stabilitě můžeme rozhodnout z řešení homogenní rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (3.1.9)$$

s nezávislými počátečními podmínkami, které zvolíme jako sloupce jednotkové matice $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2n,2n}$. Pro každou počáteční podmínku (s jednotkou na i -tém místě) dostaneme jedno řešení $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 2n$. Tato nezávislá řešení zapíšeme do fundamentální matice

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_{2n}(t)], \quad (3.1.10)$$

která splňuje rovnici

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}. \quad (3.1.11)$$

Provedeme transformaci času z t do $\tau = t + T$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(\tau - T)\mathbf{X} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{X}. \quad (3.1.12)$$

Pokud

$$\mathbf{X}(t + T) = [\mathbf{x}_1(t + T), \mathbf{x}_2(t + T), \dots, \mathbf{x}_{2n}(t + T)], \quad (3.1.13)$$

pak z (3.1.12) je zřejmé, že každý vektor $\mathbf{x}_i(t + T)$ musí být lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_{2n}(t)$. Vztah (3.1.13) můžeme proto přepsat do tvaru

$$\mathbf{X}(t + T) = \mathbf{X}(t)\mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{2n,2n}. \quad (3.1.14)$$

Písmenem \mathbf{Z} označujeme tzv. matici monodromie.

Do rovnice (3.1.14) dosadíme počáteční podmínku pro řešení rovnice (3.1.11)

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}, \quad (3.1.15)$$

a vyjde

$$\mathbf{X}(0 + T) = \mathbf{X}(0)\mathbf{Z} \Rightarrow \mathbf{X}(T) = \mathbf{I}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}. \quad (3.1.16)$$

Vlastní čísla matice monodromie jsou komplexní a nazývají se Floquetovy nebo také charakteristické multiplikátory. Tato čísla rozhodují o stabilitě systému. Pokud v Gaussově rovině leží všechny Floquetovy multiplikátory uvnitř anebo na jednotkové kružnici, pak je systém stabilní anebo na mezi stability. Překračuje-li alespoň jeden Floquetův multiplikátor jednotkovou kružnici, pak je systém nestabilní. Praktický význam Floquetových multiplikátorů je takový, že určují poměr dvou po sobě jdoucích amplitud, a pokud je tento poměr větší než jedna, pak amplitudy postupně narůstají a systém je proto nestabilní.

Příklad - aplikace Floquetovy teorie

Pro systém s jedním stupněm volnosti s proměnnou tuhostí budeme pomocí Floquetovy teorie určovat oblasti (ne)stability.

Vyděme z pohybové rovnice takového systému (2.2.1), která bude s konkrétními parametry mít tvar

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + [k - \tilde{k}(t)]q(t) = p(t). \quad (3.1.17)$$

Proměnnou složku tuhosti zvolíme

$$\tilde{k}(t) = \tilde{k} \cos 2\omega t. \quad (3.1.18)$$

Dosadíme ji do pohybové rovnice

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + [k - \tilde{k} \cos 2\omega t]q(t) = p(t). \quad (3.1.19)$$

Z důvodu větší přehlednosti převedeme pohybovou rovnici (3.1.17) do bezrozměrného tvaru. Nejprve celou rovnici vydělíme m

$$\ddot{q}(t) + \frac{b}{m}\dot{q}(t) + \left[\frac{k}{m} - \frac{\tilde{k}}{m} \cos 2\omega t \right] q(t) = \frac{p(t)}{m} \quad (3.1.20)$$

a využijeme standardní substituci

$$2D\Omega = \frac{b}{m} \quad \text{a} \quad \Omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (3.1.21)$$

Po dosazení

$$\ddot{q}(t) + 2D\Omega\dot{q}(t) + \left[\Omega^2 - \frac{\tilde{k}}{m} \cos 2\omega t \right] q(t) = \frac{p(t, \omega)}{m}. \quad (3.1.22)$$

Zavedeme další bezrozměrné parametry

$$\tau = \Omega t, \quad \eta = \frac{\omega}{\Omega} \Rightarrow \ddot{q}(t) = \Omega^2 q''(\tau), \quad \dot{q}(t) = \Omega q'(\tau) \quad (3.1.23)$$

a po úpravě

$$\Omega^2 q''(\tau) + 2D\Omega^2 q'(\tau) + \left[\Omega^2 - \Omega^2 \frac{\tilde{k}}{k} \cos 2\eta\tau \right] q(\tau) = \frac{p(\tau, \Omega)}{m}. \quad (3.1.24)$$

Vydělíme Ω^2 a označíme $\mu = \frac{\tilde{k}}{k}$

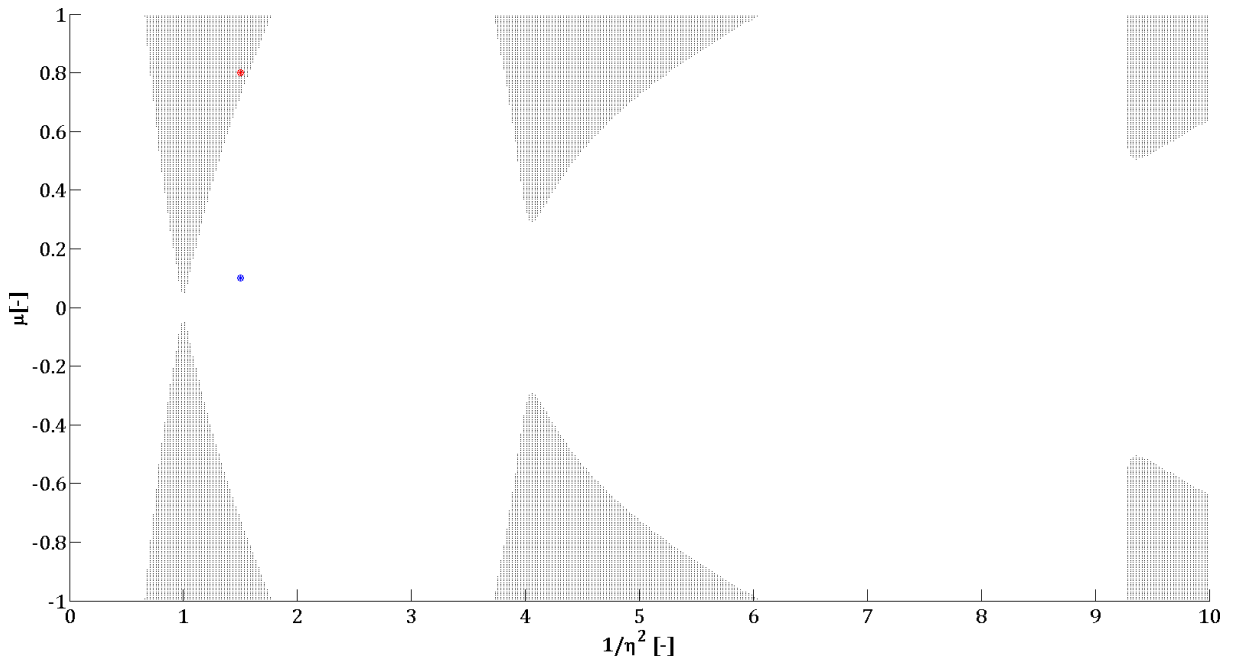
$$q''(\tau) + 2Dq'(\tau) + [1 - \mu \cos 2\eta\tau] q(\tau) = \frac{p(\tau, \Omega)}{k}. \quad (3.1.25)$$

Pro účely určování stability systému postačuje homogenní rovnice

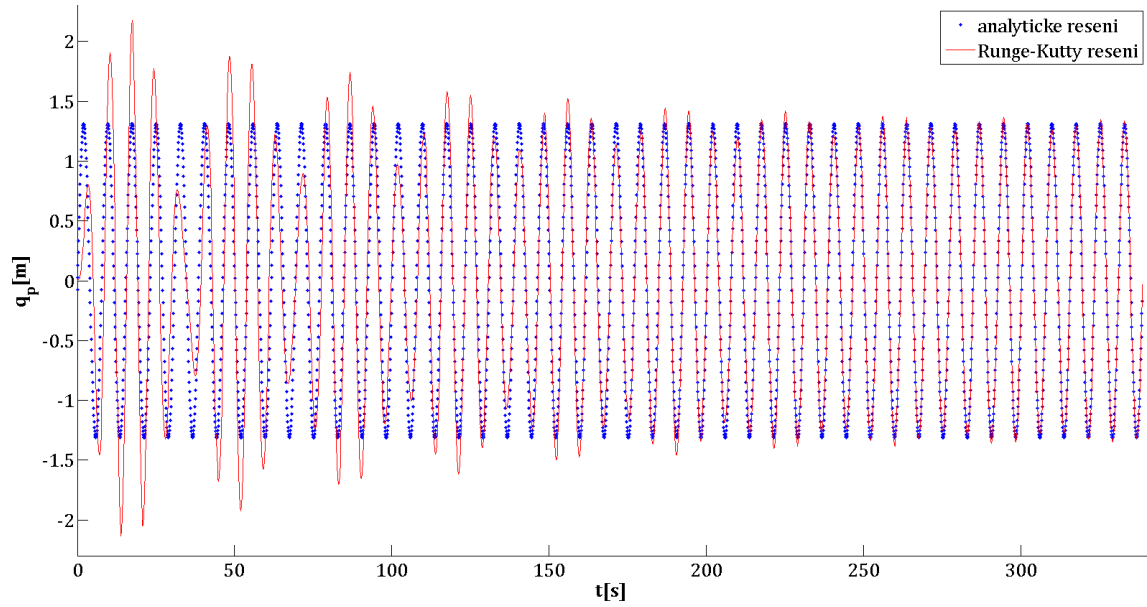
$$q''(\tau) + 2Dq'(\tau) + [1 - \mu \cos 2\eta\tau]q(\tau) = 0. \quad (3.1.26)$$

Využijeme teorii uvedenou v kapitole 3.1 a analyzujeme vlastní čísla matice monodromie. Na obr. 19 jsou pro hodnotu poměrného útlumu $D = 0.01$ znázorněny tmavě oblasti nestability.

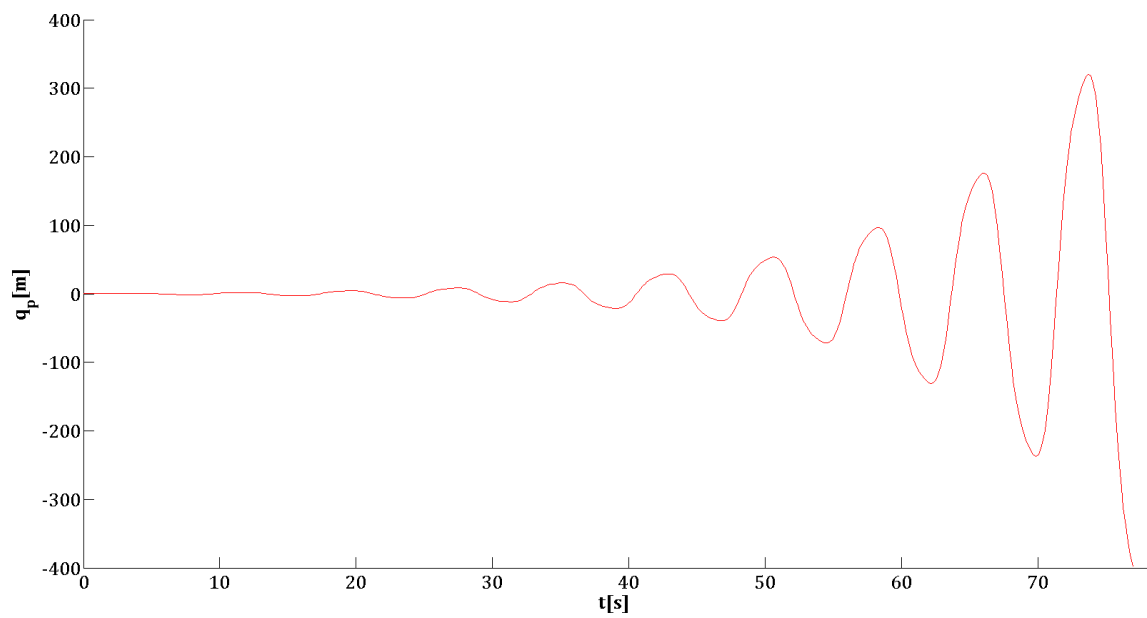
Z obr. 19 vybereme dva body, jeden ve stabilní a jeden v nestabilní oblasti. V případě stability systému existuje periodické řešení a pro konkrétní volbu parametrů je ukázáno na obr. 20, v opačném případě periodické řešení neexistuje, jak je patrné z obr. 21.



Obr. 19: Oblasti (ne)stability pro $D = 0.01$



Obr. 20: Periodické řešení stabilního systému s $D = 0.01$, $\mu = 0.1$ a $\frac{1}{\eta^2} = 1.5$



Obr. 21: Periodické řešení stabilního systému s $D = 0.01$, $\mu = 0.8$ a $\frac{1}{\eta^2} = 1.5$

kde

$$\mathbf{U} = [\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4, \dots, \mathbf{i}_{2N}] \in \mathbb{R}^{4N+1, 2N}, \quad (3.2.15)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_J = \begin{bmatrix} \alpha_{-N} \\ \alpha_{-N+1} \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2N+1}, \quad (3.2.16)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_U = \begin{bmatrix} \alpha_{-N+\frac{1}{2}} \\ \alpha_{-N+\frac{3}{2}} \\ \vdots \\ \alpha_{N-\frac{3}{2}} \\ \alpha_{N-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}. \quad (3.2.17)$$

Zavedeme permutační matici \mathbf{P} pomocí matic \mathbf{J} a \mathbf{U}

$$\mathbf{P} = [\mathbf{J} \ \mathbf{U}] \in \mathbb{R}^{4N+1, 4N+1} \quad (3.2.18)$$

a z její ortogonalitě dále plyne

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4N+1, 4N+1}, \quad (3.2.19)$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2N, 2N}, \quad (3.2.20)$$

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2N+1, 2N+1}, \quad (3.2.21)$$

$$\mathbf{J}^T \mathbf{U} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2N+1, 2N}. \quad (3.2.22)$$

Rovnici (3.2.14) lze zapsat pomocí permutační matice

$$\boldsymbol{\alpha}^\# = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\alpha}^* \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}^\#. \quad (3.2.23)$$

Tuto rovnici (3.2.23) vynásobíme zleva \mathbf{P}^T a z analogie k (2.1.35) dostaneme

$$\boldsymbol{\alpha}^\# = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\alpha}^* = \mu \underbrace{\mathbf{P}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*}_{\mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}^\#} \boldsymbol{\alpha}^* + \mathbf{P}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{L}^* \mathbf{p}^* \quad (3.2.24)$$

a v maticovém zápise s uvažováním (3.2.8), (3.2.10) a (3.2.12)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_J \\ \boldsymbol{\alpha}_U \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{J}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{J}}^{\mathbf{LH}} & \overbrace{\mathbf{J}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U}}^{\mathbf{0}} \\ \overbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{J}}^{\mathbf{0}} & \overbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U}}^{\neq \mathbf{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_J \\ \boldsymbol{\alpha}_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{J}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{L}^* \mathbf{J} \mathbf{p}}^{\mathbf{LHL}} \\ \overbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{L}^* \mathbf{J} \mathbf{p}}^{\mathbf{0}} \end{bmatrix}. \quad (3.2.25)$$

Rovnici (3.2.25) můžeme přepsat jako soustavu dvou maticových rovnic

$$\boldsymbol{\alpha}_J = \mu \mathbf{LH} \boldsymbol{\alpha}_J + \mathbf{LHL} \mathbf{p}, \quad (3.2.26)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_U = \mu \mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U} \boldsymbol{\alpha}_U. \quad (3.2.27)$$

Srovnáním (3.2.26) a (3.2.27) s (2.1.35)

$$\boldsymbol{\alpha}_J = \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^{2N+1}, \quad (3.2.28)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_U = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2N} \quad \vee \quad \det(\mathbf{I} - \mu \mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U}) = 0. \quad (3.2.29)$$

Druhý případ v rovnici (3.2.29) nastane v případě, že vlastní čísla matice $\mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U}$ jsou rovna $\frac{1}{\mu}$. Uvědomme si, že z ortogonality matice \mathbf{P} plyne, že vlastní čísla matice $\mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ jsou totožná s vlastními čísly matice $\mathbf{P}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{P}$, a jejich podmnožinou jsou vlastní čísla matice $\mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U}$

$$\tilde{\lambda} \{ \mathbf{U}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{U} \} \subset \lambda \{ \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \} \equiv \lambda \{ \mathbf{P}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{P} \}. \quad (3.2.30)$$

Hodnoty těchto vlastních čísel vymezují oblasti stability, jak bude ukázáno dále.

Vezměme nyní v úvahu (3.2.28) a první případ z (3.2.29), kdy

$$\boldsymbol{\alpha}_J = \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha}_U = \mathbf{0}. \quad (3.2.31)$$

S uvažováním (3.2.8) - (3.2.10) a (3.2.12) bude

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_J = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\alpha}^* \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{J} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.2.32)$$

a z (3.2.9) a (3.2.10) plyne po dosazení do (3.2.2)

$$q^*(t) = \mu \mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{p} = q(t). \quad (3.2.33)$$

Identita obou řešení je tedy dokázána.

Oblasti stability ale nejsou pro jednoperiodické a dvouperiodické řešení totožné, protože pro množiny vlastních čísel platí

$$\widehat{\lambda} \{ \mathbf{L} \mathbf{H} \} \equiv \widehat{\lambda} \{ \mathbf{J}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{J} \} \subset \lambda \{ \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \} \equiv \lambda \{ \mathbf{P}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{P} \}. \quad (3.2.34)$$

Obecnější případ zřejmě nastane pro dvouperiodické řešení

$$q^*(t) = \mu \mathbf{e}^{*T}(t) \boldsymbol{\alpha}^* + \mathbf{e}^{*T}(t) \mathbf{L}^* \mathbf{p}^*, \quad (3.2.35)$$

kde vzhledem k (2.1.44)

$$\boldsymbol{\alpha}^* = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*)^{-1} \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* \mathbf{L}^* \mathbf{p}^*. \quad (3.2.36)$$

Výsledné dvouperiodické řešení lze zapsat analogicky k (3.2.1)

$$q^*(t) = \mathbf{e}^{*T}(t) [\mu (\mathbf{I} - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*)^{-1} \mathbf{L}^* \mathbf{H}^* + \mathbf{I}] \mathbf{L}^* \mathbf{p}^*. \quad (3.2.37)$$

Vyvstává opět otázka, kdy je charakteristická matice $(\mathbf{I} - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*)$ invertovatelná. Víme, že regulární matice je invertovatelná, a to právě tehdy, když je její determinant nenulový. Nás ale při určování stability zajímá opačný případ, tj. když má determinant roven nule

$$\det(\mathbf{I} - \mu \mathbf{L}^* \mathbf{H}^*) = 0. \quad (3.2.38)$$

Samozřejmě platí, že determinant charakteristické matice je reálný, neboť \mathbf{L}^* je diagonální s prvky reálnými či komplexně sdruženými a \mathbf{H}^* je Hermiteovská.

Rovnici (3.2.38) vynásobíme číslem (-1) a vydělíme μ a dostaneme

$$\det\left(\mathbf{L}^* \mathbf{H}^* - \frac{1}{\mu} \mathbf{I}\right) = 0. \quad (3.2.39)$$

Charakteristický determinant tedy nabývá nulové hodnoty, když vlastní čísla matice $\mathbf{L}^* \mathbf{H}^*$ jsou rovna $\frac{1}{\mu}$.

Stabilita systému přímo závisí na otáčkové frekvenci ω . Je třeba si uvědomit, že právě diagonální matice \mathbf{L}^* je funkcí otáčkové frekvence ω , viz (2.1.11). Lze proto psát

$$\det\left(\mathbf{L}^*(\omega) \mathbf{H}^* - \frac{1}{\mu} \mathbf{I}\right) = 0. \quad (3.2.40)$$

Je zřejmé, že s měnícím se ω se bude měnit i odpovídající hodnota vlastního čísla $\frac{1}{\mu}$, a právě tyto hodnoty (μ, ω) budou určovat kritické body, které vymezují hranici mezi oblastmi stability a nestability systému.

Mohou nastat tři případy

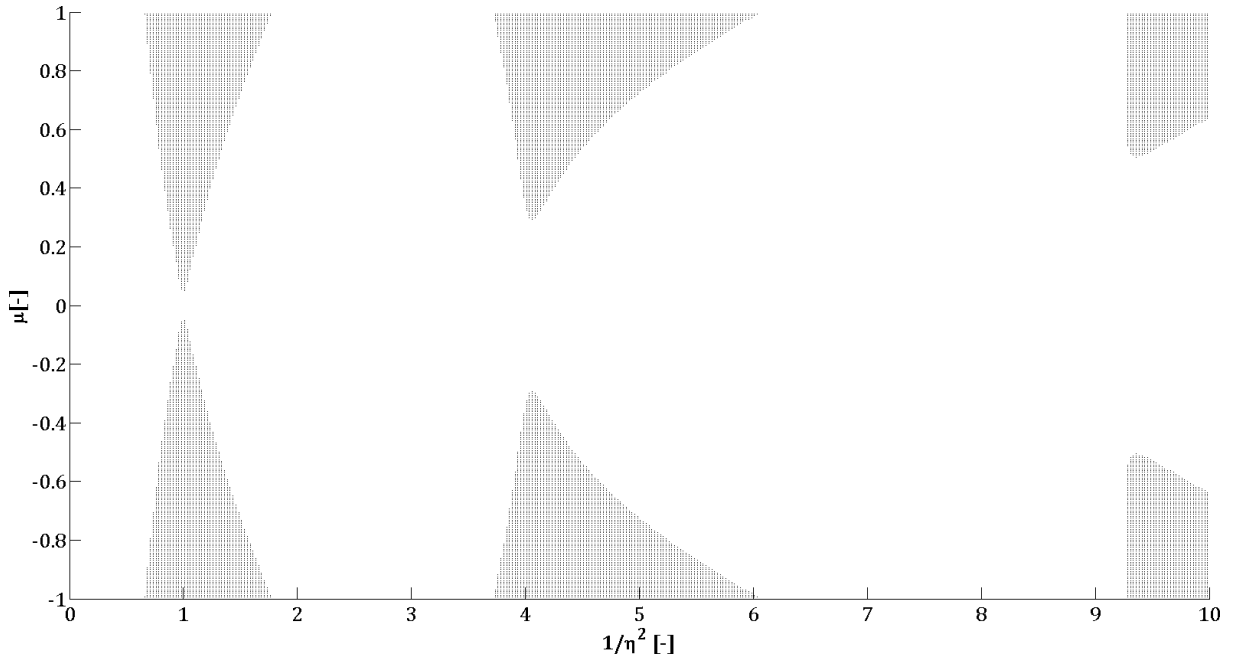
$$\det\left(\mathbf{L}^*(\omega) \mathbf{H}^* - \frac{1}{\mu} \mathbf{I}\right) \quad \left. \begin{array}{l} > 0 \Rightarrow \text{systém je stabilní,} \\ = 0 \Rightarrow \text{systém je na hranici stability,} \\ < 0 \Rightarrow \text{systém je nestabilní a periodické řešení neexistuje.} \end{array} \right\}$$

Příklad - aplikace metody charakteristického determinantu

Pro srovnání s výsledky Floquetovy teorie byly určeny oblasti (ne)stability pro stejný systém jako v kapitole 3.1, tj.

$$q''(\tau) + 2Dq'(\tau) + [1 - \mu \cos 2\eta\tau]q(\tau) = 0. \quad (3.2.41)$$

Na obr. 22 jsou pro stejnou hodnotu poměrného útlumu $D = 0.01$ znázorněny tmavě oblasti nestability.



Obr. 22: Oblasti (ne)stability pro $D = 0.01$

Na první pohled je zřejmé, že se jedná o stejné oblasti. Nesporná výhoda při posuzování stability pomocí charakteristického determinantu spočívá v tom, že tato metoda nevyžaduje složité řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic s časově proměnnými parametry jako Floquetova teorie, je proto mnohem jednodušší a navíc zcela přesná.

4 Závěr

Cílem této diplomové práce bylo určit tvar analytického periodického řešení a přinést ucelený přehled o stabilitě a existenci řešení soustav s časově periodicky proměnnými parametry.

V první části práce jsou uvedeny čtyři základní typy periodicky kmitajících systémů, od nejjednoduššího systému s jedním stupněm volnosti s periodicky proměnnou tuhostí po nejobecnější případ systému s libovolným počtem stupňů volnosti s periodicky proměnnými všemi parametry. Pro každý případ je uvedena metoda pro určení přesného analytického řešení a jeho finální podoba. Uvedený postup byl demonstrován na několika vybraných příkladech a byl porovnán s výsledky aplikace numerické metody Runge-Kutta. Ve výpočtech se prokázala shodnost výstupu obou metod, ovšem znalost analytického vyjádření periodického řešení je nepochybnou výhodou oproti jakékoli numerické metodě.

V druhé části práce jsou uvedeny metody pro rozhodování o stabilitě či nestabilitě systému. Pro posuzování stability periodických systémů je mocným nástrojem Floquetova teorie. Její využití je samozřejmě možné i zde, ale mnohem efektivnější a jednodušší metodou je určování stability a nestability systému přímo z determinantu charakteristické matice, která se vyskytuje v analytickém vyjádření periodického řešení. Hranice mezi oblastí stability a nestability se nachází právě v tom místě, kde systémový determinant mění své znaménko, resp. tam, kde je jeho hodnota rovna nule.

Snad největším přínosem této práce je kromě tvaru přesného analytického periodického řešení i fakt, že o stabilitě systému, a s tím spojené existenci periodického řešení, lze rozhodnout téměř okamžitě pouze na základě znalosti hodnoty charakteristického determinantu, a to bez dalších složitých numerických výpočtů.

Reference

- [1] Babitsky, V.I., Krupenin, V.L.: *Vibration of strongly nonlinear discontinuous systems*. Springer 2001, Berlin.
- [2] Dupal, J., Zajíček, M.: Periodical solution of parametric systems with 1 DOF. *Proceedings of the Computational Mechanics 2010*. Nečtiny.
- [3] Dupal, J., Zajíček, M.: Analytical solution and stability assesment of the vibrating systems with 1 DOF having time-periodical parameters. *Proceedings of the Computational Mechanics 2011*. Plzeň.
- [4] Dupal, J., Zajíček, M.: Analytical solution of the drive vibration with time varying parameters. *Proceedings of the ASME 2011 IDETC/CIE conference*. August 29-31, 2011, Washington, DC, USA.
- [5] Kuruc, T.: *Modelování vibrací automobilové převodovky buzené vnitřními zdroji*. Diplomová práce, 2001, Západočeská univerzita v Plzni.
- [6] Newland, D.E.: *Mechanical vibration analysis and computation*. Longman Scientific and Technical, 1989, Essex.