Oponentský posudek doktorské disertační práce

Bifurkace v reakčně–difuzních systémech

autora Mgr. Martina Fencla

V předložené disertační práci se Martin Fencl zabývá dvěma typy problémů: prvním typem jsou bifurkace v superlineárních neurčitých problémech (kapitola 2, rozdělená na sekce 2.1 a 2.2) a druhým typem jsou bifurkace v systámu dvou reakčně–difuzních rovnic, vykazujících tzv. Turingovu nestabilitu (kapitola 3, sekce 3.1–3.5). Obsah sekce 2.1 vychází ze společného článku [FLG21] Martina Fencla s J. Lópezem-Gómezem a obsah sekce 2.2 se v podstatě kryje s dalším společným článkem [FLG20] stejných autorů. Obsak kapitoly 3 převážně vychází z prací [FK19] (autorů M. Fencla a M. Kučery) a [Fen20] (autora M. Fencla). Všechny články jsou součástí disertační práce, viz Appendixy A–D.

V sekci 2.1 je předmětem studia globální struktura pozitivních řešení okrajového problému pro obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu

$$
\begin{aligned}
-u'' &= \lambda u + a(x)u^2, \qquad x \in (0,1),\\
u(0) &= u(1) = 0,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

kde $a(x)$ je spojitá funkce v intervalu $(0,1)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ je bifurkační parametr. Cílem je studium platnosti hypotézy (Conjecture 2.3, viz [GRnLG00]), která říká, že pokud je funkce $a(x)$ kladná na $n+1$ intervalech, oddělených od sebe n intervaly, kde tato funkce je záporná, pak existuje $\lambda_c < \pi^2$ takové, že problém (1.1) má alespoň $2^{n+1}-1$ kladných řešení. Hlavním výsledkem je Věta 2.7, která říká, že uvedená hypotéza platí, pokud řešení okrajového–počátečního parabolického problému (který formálně vznikne z (2.1) přidáním časové derivace u na levou stranu rovnice a přidáním počáteční podmínky) jsou jistým způsobem omezená. Platnost věty je ilustrována na numerickém řešení několika konkrétních příkladů, odpovídajících $n = 1, 2, 3$ a vhodně zvoleným funkcím $a(x)$.

V sekci 2.2 se autor zabývá okrajovým problémem

$$
\begin{aligned}
-u'' - \mu u &= \lambda m(x)u + a(x)u^2, \qquad x \in (0,1),\\
u(0) &= u(1) = 0,
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

kde funkce a, m jsou spojité v intervalu $(0,1)$ a λ, μ jsou bifurkační parametry. Hlavním výsledek ukazuje, že pro funkce m speciálního typu tzv. vlastní křivky, odpovídající bifurkačním bodům větví nodálních řešení (tj. řešení, která nabývají kladných i záporných hodnot), nejsou konkávní. Toto je rozdíl mezi vlastními křivkami bifurkačních bodů pouze kladných řešení, o kterých je známo, že jsou konkávní. Výsledek (Věta 2.11) je doplněn řadou konkrétních příkladů, ukazujících tvary vlastních křivek pro vybrané funkce m.

V sekci 3.1 je vysvětlen přístup k vyšetřování stability stacionárního řešení $(\overline{u}, \overline{v})$ systému rovnic

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \Delta u + f(u,v),\\
\frac{\partial v}{\partial t} &= d_2 \Delta v + g(u,v),
\end{aligned}
\qquad \text{pro } x \in \Omega,\ t \in [0,\infty),
\tag{3.1}
$$

kde Ω je omezená lipschitzovská oblast v $\mathbb{R}^N$ a d_1, d_2 jsou difuzní parametry. Funkce u a v vyhovují okrajovým podmínkám Dirichletova typu na části hranice Γ_D a homogenním okrajovým podmínkám Neumannova typu na části hranice Γ_N. Lemma 3.8 říká, že nutnou podmínkou pro to, aby (d_1, d_2) byl bifurkačním bodem je, aby (d_1, d_2) byl i kritickým bodem, tj. aby příslušný linearizovaný problém měl vlastní číslo 0. Autor též představuje systém hyperbol C_k (pro $k = 0, 1, 2, \ldots$, případně $k = 1, 2, \ldots$), které jsou tvořeny kritickými body. Obálka C_E tohoto systému odděluje oblast stability D_S od oblasti nestability D_U.

V sekci 3.2 je definován problém s prostorově periodickými okrajovými podmínkami, a pro funkce f a g speciálního typu jsou numericky nalezena stacionární řešení.

V sekci 3.3 autor prezentuje nové výsledky, týkající se problému s jednostrannými zdroji a nory. To znamená, že pravá strana první rovnice v systému (3.1) je doplněna o rozdíl $\tilde{f}_-(\mathrm{x}, u^-) - \tilde{f}_+(\mathrm{x}, u^+)$, kde u^+ (respektive u^-) je kladná (respektive záporná) část u a funkce $\tilde{f}_-$, $\tilde{f}_+$ mimo jiné splňují $\tilde{f}_+(\mathrm{x}, 0) = \tilde{f}_-(\mathrm{x}, 0) = 0$. Opět pracuje s pojmy oblast stability, kritický a bifurkační bod a ukazuje, že v oblasti stability nejsou žádné kritické ani bifurkační body. Věta 3.12 kromě toho obsahuje podmínky, za jakých v jistém okolí křivky C_E nejsou v rozmezí $r \leq d_2 \leq R$ žádné kritické, ani bifurkační body. V sérii dalších vět (Věty 3.14–3.19) pak autor uvádí postačující podmínky pro to, aby (d_1, d_2) byl kritickým bodem, případně nebyl ani kritickým, ani bifurkačním bodem. Z výsledků plyne, že množina difuzních parametrů, ve kterých může dojít k bifurkaci prostorově nehomogenních stacionárních řešení, je menší než v případě bez jednostranných členů. Autor ukazuje řadu numericky vypočítaných stacionárních řešení, odpovídajících konkrétním zvoleným funkcím v systému (3.1), okrajovým podmínkám a oblasti Ω. Podobné výsledky, týkající se ale systému s jednostrannými působícími členy, závislými na kladné nebo záporné části integrálních průměrů funkce u přes zvolené podoblasti K_i^-, K_j^+ oblasti Ω (pro $i = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, m$), jsou obsahem sekce 3.4. Sekce 3.5 je věnována rozboru numerických výsledků a pozorování, týkajících se zejména závislosti struktury obdržených stacionárních řešení na různých vstupních datech.

Důkazy uvedených vět lze nalézt v Appendixech A–D, tedy v článcích [FLG21], FLG20], [FK19] a [Fen20], jichž je M. Fencl autorem nebo spoluautorem. Používaným aparátem je moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic a řada pojmů a výsledků z funkcionální analýzy. Konkrétní výsledky disertační práce jsou nové a jsou rozšířením předchozích známých výsledků. Nepochybně budou zajímavé pro badatele, kteří se zabývají podobnou problematikou. Autor prokázal, že dobře zvládl moderní metody, používané v teorii parciálních diferenciálních rovnic, konkrétně v szstémech typu reakce–difuze.

Disertační práce je napsána přehledně a lze se v ní dobře orientovat. Nenašel jsem v ní žádné nedostatky, které by stály za zmínku v tomto posudku.

Publikační činnost autora, sestávající ze čtyř článků jichž je M. Fencl spoluautorem a z nichž tři již byly publikovány v impaktovaných časopisech, je dle mého názoru z hlediska udělení titulu PhD dostatečná.

Vzhledem ke všem uvedeným skutečnostem doporučuji předloženou dizertační práci k obhajobě a rovněž doporučuji, aby po úspěšné obhajobě byl autorovi udělen titul PhD.

K autorovi práce mám jen jednu otázku: formulí (3.13) jsou definovány křivky C_k ($k = 1, 2, \ldots$), takové, že pro $(d_1, d_2) \in C_k$ má problém (3.10) vlastní číslo $\lambda = 0$ a odpovídajícími vlastními funkcemi jsou v_k, $u_k = const. u_k$, přičemž κ_k je k–té vlastní číslo problému (3.12) a u_k je odpovídající vlastní funkce. Je toto jediná možnost? Jinými slovy: není možné, že vlastní problém (3.10) má vlastní číslo nula i pro jiné funkce u_k a v_k, kdy apříklad funkce u_k není vlastní funkcí problému (3.12)?

V Praze, 31. srpna 2021

Prof. RNDr. Jiří Neustupa, CSc.

Posudek oponenta disertační práce

MGR. MARTIN FENCL: BIFURKACE V REAKČNĚ-DIFUZNÍCH PROBLÉMECH

Studijní program: Aplikovaná matematika

Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky

Mgr. Martin Fencl předkládá svoji disertační práci jako soubor čtyř článků (třech publikovaných a jednoho zaslaného do tisku) během svého doktorského studia, jejichž obsah a výsledky obšírně a přehledně shrnuje postupně ve dvou samostatných kapitolách této práce. Po úvodní přehledové kapitole se Kapitola 2 a první dva články věnují superlineární indefinitní úloze druhého řádu a *hledání počtu kladných řešení* a *nodálním vlastnostem* řešení nabývajících jak kladných, tak záporných hodnot příslušné Dirichletovy okrajové úlohy v závislosti na bifurkačním parametru λ a koeficientech u lineárního a u kvadratického členu daných spojitými funkcemi měnícími patřičným způsobem znaménko na studované oblasti.

Kapitola 3 nás seznamuje s obsahem druhých dvou článků, ve kterých je studován *systém reakce-difuze* vykazující Turingovu nestabilitu. Pozornost je zaměřena na *vliv jednostranných členů* v rovnici a/nebo v okrajových podmínkách *na vznik prostorových vzorků.*

Každá z výše zmíněných kapitol vystupuje jako samostatný celek, ve kterém je čtenář nejprve seznámen se studovanou problematikou a následně s dosaženými výsledky v podobě hlavních vět a poznámek s odkazy na důkazy v jednotlivých článcích, které jsou vloženy na konci práce v podobě čtyř apendixů.

V Kapitole 2 autor navazuje na sérii článků Lópeze-Gómeze a dalších autorů o Dirichletově okrajové úloze pro rovnici druhého řádu

$$-u'' = \lambda u + a(x)u^2$$

na intervalu $(0,1)$, kde spojitá funkce a mění kontrolovaným způsobem znaménko, a to n-krát. Ukazuje zde, že za jistých předpokladů pro všechna λ menší než jisté kritické $\lambda_c < \pi^2$ má okrajová úloha alespoň $2^{n+1} - 1$ kladných řešení. Ukazuje dále, jak se chovají tato kladná řešení na oblastech, kde je funkce a záporná, pokud parametr $\lambda \to -\infty$. Současně ukazuje, pokud máme u_0 nezáporné netriviální subřešení této stacionární Dichletovy okrajové úlohy, potom existuje jednoznačné řešení příslušné evoluční úlohy s touto počáteční podmínkou u_0 a vykazuje stejné chování, tj. konverguje pro $\lambda \to -\infty$ k nule tam, kde je funkce a záporná.

Pro následnou numerickou analýzu a konkrétní *globální* bifurkační diagramy vzhledem k parametru λ volí autor dva typy řídících funkcí $a(x)$, a to

$$a(x) = \sin((n+1)\pi x)$$

pro $n = 1, 2, 3$, a pro $n = 2$ modifikovanou funkci, kde na prostředním záporném podintervalu přidává multiplikativně další reálný parametr μ sloužící jako sekundarní bifurkační parametr. Pro každou tuto volbu analyticky spočítá pivotní koeficient rozvoje zobrazení $\lambda = \lambda(s)$, který rozhoduje o bifurkačním směru. Dále získá globální bifurkační větve kladných řešení včetně profilů těchto řešení a jejich Morseho indexů, čímž potvrdí hypotézu o počtu kladných řešení.

V případě funkce a s dodatečným parametrem μ ukazuje, jak se se změnou μ mění jednotlivé globální bifurkační diagramy získané vzhledem k λ a jak tím dochází k sekundárním bifurkacím, resp. jak jednotlivé bifurkační větve přecházejí jedna v druhou.

V druhé části Kapitoly 2, resp. v příloze C autor studuje podobnou Dirchletovu okrajovou úlohu pro rovnici

$$-u'' - \mu u = \lambda m(x)u + a(x)u^2$$

na intervalu $(0,1)$, kde funkce a je modifikovaný sinus z přílohy D a $m(x) = \sin(j\pi x)$, $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$. Zde jsou předmětem zájmu *nodální vlastnosti řešení* této úlohy a *tvar křivek vlastních čísel* přidružené Dirichletovy okrajové úlohy

$$-\varphi'' - \lambda m(x)\varphi = \sigma\varphi \quad \text{na } (0,1).$$

Ukazuje ve Větě 2.11 s drobným překlepem, resp. ve Větě 2.1 v příloze C, kde je formulace korektní, že pro funkce m s j sudým jsou křivky n-tých vlastních čísel pro všechna $n \geq k+1$ na okolí bodu $\lambda = 0$ konvexní. Lokální konvexita křivek vyšších vlastních čísel pro $n > 1$ dává vzniknout většímu počtu bifurkačních větví, podél kterých bifurkují netriviální řešení nelineární okrajové úlohy z řešení triviálního. Tato řešení mají příslušný počet vnitřních nodálních bodů, konkrétně $n - 1 > 0$.

Tento analytický výsledek je podpořen řadou numericky získaných globálních bifurkačních diagramů vzhledem k parametru λ, a to včetně závislosti těchto diagramů na sekundárním bifurkačním parametru μ. Speciální pozornost je věnována globálním bifurkačním diagramům pro kladná řešení a pro řešení s jedním a dvěma vnitřními nulovými body. Všechny tyto diagramy jsou spočítány (zřejmě pro porovnání výsledků) pro konkrétní funkci a se dvěma zápornými a jednou kladnou půlvlnou, použitou Lópezem-Gómezem. Na druhou stranu jsou v tomto článku poprvé zkoumány existence a struktura řešení měnící znaménko pro úlohu s nekonstatním koeficientem u lineárního členu λu daným funkcí $m(x)$, která navíc rovněž mění znaménko.

V obou článcích Martin Fencl implementoval kód pro kontinuaci vzhledem ke zvolenému parametru v Matlabu pro studované úlohy, protože použití hotových balíčků pro numerickou bifurkační, resp. kontinuační analýzu se ukázalo jako nedostatečné, resp. málo přesné k nalezení všech bifurkačních větví a globálních diagramů.

V druhé polovině předkládané práce, tj. v Kapitole 3, resp. v přílohách A a B, autor rozšiřuje dosavadní znalosti o stabilizačním vlivu jednostranných podmínek předepsaných pro aktivátor a ukazuje, za jakých podmínek neexistují kritické a tím padem ani bifurkační body nejen v oblasti stability kladných koeficientů difuze, ale i v části oblasti nestability.

Martin Fencl tak rozšiřuje předchozí výsledky svého školitele Milana Kučery a dalších autorů pro další typy jednostranných podmínek jak uvnitř oblasti, tak na její hranici. Ukazuje nadále i jednotlivé vzorky dané netriviálními řešeními jednostranných okrajových úloh, což ve zmiňovaných článcích je uvedeno poprvé pro periodické okrajové podmínky a také pro nelokální jednostranné podmínky předepsané pro aktivátor a dané integrály přes vybrané oblasti (opět jak uvnitř, tak na hranici oblasti). Tímto je rozšířena třída úloh vykazující vznik prostorových vzorků, a to společně s vybranými typy vzorků, které jsou získány numerickými simulacemi úloh na dvourozměrné oblasti. Pomocí těchto simulací jsou ukázány také odhady lokaliace kritických bodů pro daný systém se Schnakenbergovou kinetikou na vybraných hladinách s konstantní difuzí inhibitoru.

Celkově je práce čtivá a dobře postavená, téma je zajímavé a aktuální. Autor vždy nejprve analyticky dokáže požadovaná tvrzení, které následně podpoří numerickou bifurkační analýzou, resp. nalezením oblastí parametrů difuze, ve kterých existují a/nebo neexistují prostorové vzorky. Navazuje tak ve všech částech na dříve dokázaná tvrzení a rozšiřuje třídu úloh, pro kterou tato tvrzení platí, případně ukazuje, jak se výsledky změní, pokud místo konstatního koeficientu budeme uvažovat funkci měnící znaménko. K analytickým výsledkům používá metody diferenciálních rovnic a funkcionální nanlýzy, lokální i globální bifurkační věty. Pro numerickou analýzu a zisk bifurkačních diagramů používá jednak prostředky numerické matematiky, tak i vlastní implementaci kontinuačních technik a řešení systému dvou parabolických parciálních rovnic reakce-difuze s jednostrannými nelinearizovatelnými členy jak unvitř zvolené oblasti, tak na její hranici.

V textu jsem nenašel žádnou závažnou chybu, jen některé nepřesnosti a na několika místech překlepy.

Student prokázal své znalosti dané problematiky, předkládanou práci přes drobné nedostatky hodnotím kladně, navrhuji uznat ji jako disertační práci a doporučuji ji k obhajobě.

V Českých Budějovicích, 19. 7. 2021, Jan Eisner

Otázky pro studenta:

1. Jak se mění profily jednotlivých řešení na okolí průsečíků různých bifurkačních větví, pokud se větve pro nějaké μ protnou? Co se děje v průsečíku? Například jak je ukázáno na Obr. 2.1, 2.4c, na Obr. 2.5 oproti Obr. 2.6 pro kladná řešení a na Obr. 2.12b a 2.13b pro řešení měnící znaménko.

2. Kde se nacházejí jednotlivé vybrané hladiny $d_2 = 600$ pro kritické intervaly v Table 3.1 až 3.4 (resp. $d_2 = 500$ pro T.3.5 a 3.6) vzhledem k hyperbolám kritických bodů bez jednostranných členů (pro $\tau = 0$)? Přesněji, s kterou hyperbolou (pro které n) je $C_n \cap C_E \cap \{d_2 = 600\}$? (resp. $\{d_2 = 500\}$)? Jak vypadají odhady kritických intervalů vzhledem k druhé hyperbole v pořadí zprava od společné obálky C_E? Jak je to pro řez $\{d_2 = 100\}$ pro obrázky vzorků Fig.3.4 a 3.5?

3. Jak správně rozumět poslední větě prvního odstavce na str. 44 o jednostranných členech typu ψ^- a ψ^+?