ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

METODY ŘEŠENÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Barbora Mikešová

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: RNDr. Václav Kohout Ph.D.,
Mgr. et Mgr. Soňa Königsmarková

Plzeň 2023

Prohlašuji, že bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 27.dubna 2023

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Děkuji RNDr. Václavu Kohoutovi Ph.D. a Mgr. et Mgr. Soně Königsmarkové za vedení mé bakalářské práce, za pomoc při psaní, za cenné rady, toleranci a ochotu.

OBSAH

Úvod

V mé bakalářské práci se zabývám metodami řešení soustav lineárních rovnic, se kterými se setkáváme již od základní školy. Metody řešení soustavy rovnic rozdělujeme na přímé a nepřímé (iterační). Jednotlivé metody ve své práci vysvětluji a názorně ukazuji na jednodušších i složitějších příkladech.

Na začátku práce je přehled historických událostí a důležitých osob ovlivňujících vývoj matematiky. Poté se už věnuji soustavám rovnic a jejich řešení jednotlivými metodami. Zaměřila jsem se na vysvětlení jednotlivých metod, které názorně ukazuji při řešení různých soustav rovnic. Začínám metodami, které se učí žáci již na základní škole, mezi takové metody patří sčítací, dosazovací a srovnávací metoda. Žáci se učí soustavy rovnic řešit i graficky, kdy si rovnice upraví do směrnicového tvaru přímky a znázorňují vzájemnou polohu přímek. Dále se věnuji metodám jako Gaussova eliminační metoda, Cramerovo pravidlo, Frobeniova věta nebo metoda LU-rozkladu. Na tyto metody je potřeba napsat soustavy rovnic do matice a následně dle metod upravovat k získání patřičného řešení. Tyto metody patří mezi přímé metody.

Poté se věnuji Jacobiho metodě a Gauss-Seidelově metodě, které řadíme mezi metody nepřímé. Takové metody pracují s počáteční aproximací, kterou určitými kroky zlepšujeme, až se postupně přiblížíme k limitě řešení.

S vedoucím mé práce jsme se rozhodli vynechat z bakalářské práce metodu Monte Carlo, protože metoda patří mezi náročné a žáci základní ani střední školy se s touto metodou během studia nesetkají.

1 ZÁKLADNÍ METODY LINEÁRNÍ ALGEBRY

1.1 HISTORIE MATEMATIKY

Prvopočátek vývoje matematiky (do 6. stol. př. n. l.) je charakteristický tvorbou elementárních matematických pojmů. Dochází k rozvoji soustav používaných znaků společně se způsobem jejich zápisu a klasifikaci geometrických útvarů. Jsou definovány výpočty obsahů a objemů a utvářeny základy geodézie. Vznik matematiky jako vědy je spojován především se jménem Pythagoras. Dalším významným řeckým matematikem byl Thales (Halas, 2016). V 6. století př. n. l. došlo v antickém Řecku ke změně přístupu v konstrukci myšlenek. Dalo by se říct, že proběhla revoluce v myšlení a popisu stavů a jevů. Empirická evidence se tak stala cestou k deduktivně budované vědě.

Období 6. stol. př. n. l. až 16. stol. n. l. je obdobím matematiky konstantních veličin. V období antického Řecka se matematika vytvářela jako exaktní, deduktivní věda – systematické dokazování, vznik axiomatické metody. Objev nesouměřitelnosti, tzv. 1. krize matematiky. Základem pythagorejské matematiky byla aritmetika. Tato koncepce se zhroutila v momentě, kdy bylo zjištěno, že velikost úhlopříčky v jednotkovém čtverci nejde vyjádřit jako poměr přirozených čísel. 1. krize matematiky byla překonána její geometrizací. Zhroucení ovlivnil i postoj k nekonečnu a k jeho možným formám. Přesně zformované budování deduktivní matematiky, započaté pythagorejci, provedl Aristoteles ve 4. stol. př. n. l. Proces geometrizace završil Euklidés (přelom 3 a 4. stol. př. n. l.) v knize Euklidovy Základy, jejíž autorem je sám Euklides z Alexandrie (J. Bečvář, 1993). Do druhé poloviny 19. století se jednalo o druhé nejvíce rozšířené dílo světového písemnictví. V knize shrnul většinu tehdejších matematických znalostí. Tato kniha ovlivnila vývoj matematiky téměř do současnosti.

V evropském středověku se matematika a věda obecně rozvíjela pomaleji. Velkým matematikem tohoto období byl Leonardo Pisánský zvaný Fibonacci. Značnější rozmach zaznamenala matematika až v 16. století s řešením algebraických rovnic. V tomto století se pozvolna rodí moderní algebra. Významným rokem je rok 1591, kde Francois Viete jako první používá písmena ke značení konstant a proměnných a tím začíná vznik nové moderní matematické symboliky. Středověká matematika – západní Evropa se seznamuje s matematikou starověkého Řecka. Do Evropy přichází indická numerace (poziční desítková soustava). Dále se rozvíjela trigonometrie, řešení rovnic 3. a 4. stupně, logaritmy a začala se utvářet současná matematická symbolika (od 15. stol.).

V období od 17. století do počátku 19. století byla matematika zaměřená na proměnné veličiny. Isaac Newton a Gottfried Wilhelm von Leibniz v 17. století vytvořili diferenciální a integrální počet, který otevřel cestu k řadě aplikací v matematice i ve fyzice. Základy analytické geometrie (souřadnice) položili Pierre de Fermat a René Descartes. V roce 1654 Fermat a Blaise Pascal formují první zákony teorie pravděpodobnosti. V roce 1621 Fermat zformuloval Fermatovu větu, která se stala jedním z nejznámějších problémů moderní matematiky a byla dokázána až v červnu 1993 kanadským matematikem Andréwem Wilesem. V 18. století se o rozvoj nejvýznamněji zasloužili Lenhard Euler, Jacob Bernoulli a Johan Bernoulli. Louis Lagrange budoval základy variačního počtu nebo Gaspard Monge položil základy deskriptivní geometrii. Zásadní změny přicházejí i v 19. století. Niels Henrik Ábel a Évariste Galois přichází se základy teorie grup, což započalo zrod moderní matematiky. Carl Friedrich Gauss, Jánoš Bolyai a Nikolaj Ivanovič Lobačevskij objevují neeukleidovskou geometrii.

V první polovině 19. století Augustin Louis Cauchy zavedl nový matematický pojem limita funkce a zaměřil se na zpřesňování matematické analýzy. Druhá krize matematiky – nepřesně definovány základní pojmy matematické analýzy (L. Motl, 2002). Práce s nekonečně malými veličinami – překonáno až v 19. století aritmetizací matematické analýzy (korektní definice limity pomocí ε, δ). Od poloviny 19. století do současnosti je období matematiky zobecněných prostorových a kvantitativních vztahů, teorie grup, matice, vektory, neeukleidovské geometrie a topologie. Georg Cantor se v druhé polovině 19. století mezi prvními zabýval teorií množin. Vznik této teorie byl přelomový pro vznik aktuálního nekonečna.

Na přelomu 19. a 20. století, po přijetí teorie množin, se objevily indicie (antinomie), které naznačily, že je potřeba matematiku zcela předělat. Nápravný program Davida Hilberta se nezdařil, protože Kurt Gödel dokázal větu o neúplnosti. Poznání hranic axiomatické metody (Kurt Gödel) – Gödelovy věty o neúplnosti – 3. krize matematiky. Vznikají zcela nové disciplíny – teorie grup, topologie; teorie diferenciálních rovnic, teorie pravděpodobnosti, matematická statistika. Matematika se dnes dělí na téměř 900 disciplín a dále se začíná vyvíjet v souvislosti s vlastními problémy, které bylo třeba řešit (i bez přímých požadavků praxe, která již není hnací silou). Vznikají tak teorie, které nejsou modelem žádné známé situace v materiálním světě. Nejběžnějším nástrojem budování současné matematiky se stala axiomatická výstavba (Halas, 2016).

1.2 PŘÍMÉ METODY

Soustavy rovnic se vyučují již na základní škole. Zde se žáci na druhém stupni setkávají se dvěma rovnicemi o dvou neznámých. Příklady se vybírají za účelem naučit žáky, jak postupovat, jaké situace mohou nastat a co tato informace znamená. Dle rámcově vzdělávacího plánu pro základní školy vydané MŠMT ve výstupech M-9-1-07, M-9-1-08 a M-9-1-09 „Číslo a proměnná“ žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných, určí hodnotu výrazu, pracuje s mnohočleny, využívá vzorce, formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav využívá oboru celých a racionálních čísel (RVP MŠMT). Žáci se učí soustavy vyřešit graficky i početně. Grafické znázornění soustav dvou rovnic o dvou neznámých jsou dvě přímky, které žáci rýsují na papír do pravoúhlé soustavy souřadnic nebo mohou využívat moderní zobrazovací programy, jako je třeba GeoGebra. Při tom využívají již získané znalosti vyjádření předpisu funkce z rovnice, osvojené z jiného výstupu M-9-2-04 „Závislost, vztahy a práce s daty“ (RVP MŠMT). Procvičují si zobrazování bodů, výpočet průsečíků, monotónnost a vzájemnou polohu přímek. Při řešení soustav pomocí metod, které se vyučují na základních školách, si žáci trénují základní početní úkony a práci s rovnicemi. Nejčastější metody, se kterými se žáci na základních školách setkávají, jsou metoda dosazovací, metoda sčítací a metoda srovnávací. Základní školy, které mají třídy s různým zaměřením, zmiňují v matematických třídách i soustavy tří rovnic o třech neznámých. Tyto soustavy ovšem řeší jen početně. Grafické znázornění na papír je náročné, a ne každá základní škola vyučuje v potřebných programech.

Porovnala jsem školní vzdělávací plány tří základních škol. Základní školy bratří Fričů Ondřejov a Základní školy a mateřské školy Jesenice. Dále jsem si vybrala 4. Základní školu v Plzni, protože zde učím. Došla jsem k závěru, že probírání soustav rovnic a jejich řešení je vyučované v devátém ročníku, kdy už mají žáci osvojené potřebné znalosti jako jsou racionální čísla, celá čísla, rovnice, práce s množinami a výrazy. Učí se sčítací, dosazovací, srovnávací a grafickou metodu řešení, které aplikují na příkladech. Každá základní škola si časové rozložení určuje sama, ovšem nejčastěji se jedná o časový interval 3–4 týdny (ŠVP Ondřejov) (ŠVP Jesenice) (ŠVP 4. ZŠ).

Na středních školách, kde se vyučuje rozšířená matematika, se studenti setkávají se soustavami dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a třech lineárních rovnic o třech neznámých. Připomínají si metody řešení ze základních škol a seznamují se s dalšími metodami řešení, jako jsou Frobeniova věta, Cramerovo pravidlo a Gaussova eliminační metoda. Studenti se učí přepisovat soustavy rovnic do matice, aplikují naučené metody pro získání řešení. Dále se učí početní úkony a úpravy matic. Všechny naučené poznatky aplikují při řešení slovních úloh vedoucí k soustavě rovnic.

Porovnala jsem školní vzdělávací plány dvou středních škol a tří gymnázií. Střední průmyslová škola elektrotechnická v Plzni učí soustavy rovnic, matice a determinant v prvním ročníku na všech nabízených oborech. Střední odborná škola stavební Karlovy Vary vyučuje soustavy rovnic v druhém ročníku v oboru silnoproud. Mikulášské gymnázium v Plzni, Gymnázium Uničov, Biskupské gymnázium J. N. Neumanna z Českých Budějovic vyučují soustavy rovnic v prvním ročníku. Časové rozložení si opět určuje každá škola sama ovšem velmi záleží, kolik hodin výuky na jednotlivých školách je (ŠVP SPŠE) (ŠVP SOŠS) (ŠVP Mikulášské) (ŠVP Uničov) (ŠVP Biskupské).

1.3 METODY ŘEŠENÍ

Začneme metodami, které se učí žáci na základní škole. Budeme řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Ukážemeřešení soustav rovnicpomočí dosazovací metodu, sčítací metodu a srovnávací metodu. Dále se budeme věnovat metodám používaných u soustav rovnic o třech nebo více proměnných o třech nebo více neznámých. Metody jako jsou Gaussova eliminační metoda, Cramerovo pravidlo a Frobeniova věta patří mezi tzv. metody přímé. Druhou skupinou metod řešení soustav lineárních rovnic jsou metody iterační neboli nepřímé metody. Přímé metody vedou k řešení soustavy po konečném počtu kroků. Nalezené řešení by bylo přesné, nebýt zaokrouhlovacích chyb (Cramerovo pravidlo, Gaussova eliminační metoda). Metody přímé jsou založeny na eliminaci neznámých.

Výchozí myšlenka spočívá v tom, že z některé rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme ji do ostatních rovnic tak, aby soustava po eliminaci byla snáze řešitelná než soustava původní. Základní algoritmus tohoto typu je Gaussova eliminační metoda. V maticovém zápisu jí odpovídá LU-rozklad matice. Charakteristickým rysem přímých metod je výpočet (přesného) řešení po konečném počtu eliminací, tj. po konečném počtu aritmetických operací (R. Kučera, 2016).

U řešení soustav rovnic mohou nastat různé situace. Soustava rovnic má právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení anebo nemá řešení.

1.3.1 DOSAZOVACÍ METODA

Při výpočtu vyjádříme libovolnou neznámou z libovolné rovnice a poté dosadíme do druhé rovnice. Vznikne nám jedna rovnice o jedné neznámé, kterou vypočítáme a získanou neznámou dosadíme zpět do vyjádření a získáme druhou neznámou. Názorně si to ukážeme na následujícím příkladě.

$$7x - y = 11$$
$$2x + 4y = 16$$

Vyjádříme neznámou y z první rovnice, dosadíme do druhé rovnice a vyřešíme.

$$y = 7x - 11$$

$$2x + 4 \cdot (7x - 11) = 16$$

$$2x + 28x - 44 = 16$$

$$30x = 60$$

$$x = 2$$

Spočetli jsme neznámou x a nyní se vrátíme k vyjádření neznámé y a tu dopočítáme.

$$y = 7 \cdot 2 - 11$$

$$y = 14 - 11$$

$$y = 3$$

Dopočítali jsme i druhou neznámou a máme řešení rovnice $x = 2$ a $y = 3$.

Tento způsob se ale těžko zobecňuje pro větší soustavy lineárních rovnic. Pokud bychom měli 50 rovnic o 50 neznámých, tak si je sepíšeme do matice, upravíme na trojúhelníkovou matici a postupným výpočtem od nejjednodušší rovnice a dosazováním do rovnic předchozích získáme řešení soustavy. Totéž lze udělat obecně, pro soustavu s libovolným počtem (m) rovnic o libovolném počtu (n) neznámých (Halas, 2016).

1.3.2 SČÍTACÍ METODA

Jednotlivé rovnice soustavy vynásobím patřičným číslem tak, abychom měli stejný počet jedné neznáme v obou rovnicích, ale s opačnými znaménky. Rovnice sečteme a ve výsledné rovnici se nám vyskytne jen jedna neznámá, kterou dopočítáme. Poté vybereme jednu rovnici, do které neznámou dosadíme a dopočítáme druhou neznámou. Názorně to ukážeme na příkladě.

$$\begin{gathered} 4x - 3y = 15 \\ 3x + 2y = 7 \end{gathered}$$

Vhodně vybereme neznámou. V našem případě se vhodně jeví y. Vynásobíme obě rovnice tak, aby v obou byl stejný počet neznámé y.

$$\begin{array}{ll} 4x - 3y = 15 & /\cdot 2 \\ 3x + 2y = 7 & /\cdot 3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 8x - 6y = 30 \\ 9x + 6y = 21 \end{array}$$

Rovnice sečteme, tím se zbavíme naší neznámé y a rovnici dopočítáme.

$$17x + 0 = 51$$

$$x = \frac{51}{17} = 3$$

Vybereme si jednu ze zadaných rovnic, dosadíme neznámou x a dopočítáme neznámou y.

$$3 \cdot 3 + 2y = 7$$

$$9 + 2y = 7$$

$$2y = -2$$

$$y = -1$$

Řešení soustavy rovnic je $x = 3$ a $y = -1$.

1.3.3 SROVNÁVACÍ METODA

Při srovnávací metodě využíváme znalostí u rovnic, že se levá strana musí rovnat pravé. Obě rovnice soustavy upravíme tak, aby z obou byla vyjádřená stejná neznáma a poté je dosadíme do jedné rovnice a vyřešíme. Názorně to ukážeme na příkladě.

$$5x + 3y = 5$$
$$5x - 4y = -30$$

Vybereme jednu neznámou a vyjádříme jí z obou rovnic.

$$x = \frac{5 - 3y}{5}$$
$$x = \frac{-30 + 4y}{5}$$

Obě vyjádření dáme do jedné rovnice a pomocí úprav získáme výslednou hodnotu y.

$$\frac{5 - 3y}{5} = \frac{-30 + 4y}{5}$$

$$5 - 3y = -30 + 4y$$

$$5 + 30 = 4y + 3y$$

$$35 = 7y$$

$$5 = y$$

Opět vybereme jednu ze zadaných rovnic a dopočítáme druhou neznámou.

$$5x + 3 \cdot 5 = 5$$

$$5x + 15 = 5$$

$$5x = -10$$

$$x = -2$$

Řešením soustavy rovnic je $x = -2$ a $y = 5$.

1.3.4 GRAFICKÁ METODA

Soustavy rovnic můžeme řešit i grafickou metodou, a to buď na papír nebo pomocí programu umožňující grafické znázornění. Rovnice si upravíme na předpis funkce tak, abychom měli vyjádřenou neznámou y. Tím získáme směrnicový tvar přímky a následně řešíme jako vzájemnou polohu přímek. Mohou nastat následující situace. Přímky jsou rovnoběžné různé, a tak soustava nemá žádné řešení. Přímky jsou rovnoběžné splývající a soustava má nekonečné mnoho řešení. Přímky vyjdou různoběžné a soustava má právě jedno řešení. Názorně to ukážeme na příkladech.

Máme zadané dvě rovnice o dvou neznámých a graficky máme zjistit jejich řešení.

$$7x + 3y = 23$$
$$-4x - 5y = -23$$

Začneme úpravou rovnic, kdy si vyjádříme neznámou y. Získáme směrnicové tvary přímek.

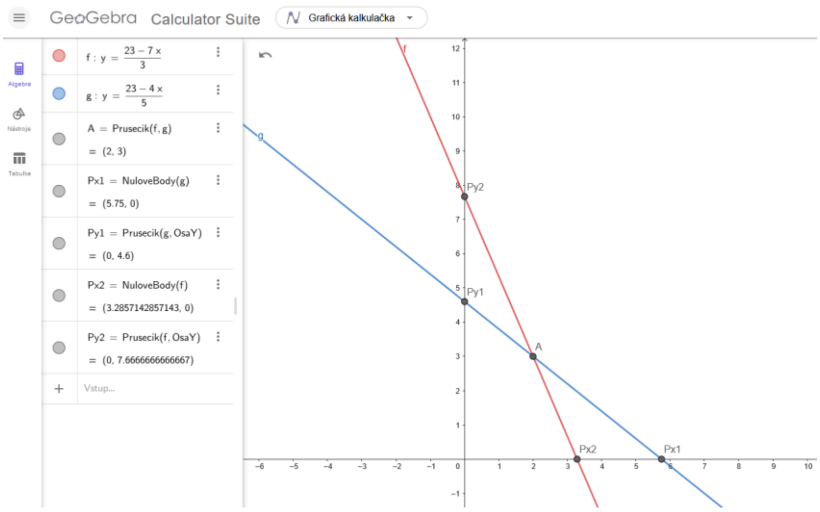
$$y = -\frac{7x}{3} + \frac{23}{3}$$
$$y = -\frac{4x}{5} + \frac{23}{5}$$

Pro znázornění přímky jsou potřeba dva body, nejvhodnější je spočítat průsečíky s osami x a y.

$$P_{x_1}: y = 0 \rightarrow 0 = \frac{23 - 7x}{3} \rightarrow x = \frac{23}{7}$$
$$P_{y_1}: x = 0 \rightarrow y = \frac{23 - 7 \cdot 0}{3} \rightarrow y = \frac{23}{3}$$

$$P_{x_2}: y = 0 \rightarrow 0 = \frac{23 - 4x}{5} \rightarrow x = \frac{23}{4}$$
$$P_{y_2}: x = 0 \rightarrow y = \frac{23 - 4 \cdot 0}{5} \rightarrow y = \frac{23}{5}$$

Máme průsečíky $P_{x_1}\left[\frac{23}{7}; 0\right], P_{y_1}\left[0; \frac{23}{3}\right], P_{x_2}\left[\frac{23}{4}; 0\right], P_{y_2}\left[0; \frac{23}{5}\right]$. Body zakreslíme do pravoúhlé soustavy souřadnic. Vyjdou nám dvě přímky protínající se v jednom bodě. Průsečík rovnic je řešením dané soustavy rovnic. Názorně si to ukážeme v grafickém programu, který dokáže průsečíky určit během chvilky. Pro naše účely využijeme program GeoGebra. Do programu zadáme směrnicové tvary přímek.



Obrázek č. 1 Grafické řešení soustavy rovnic – jedno řešení

Nyní ukážeme, jak vypadá soustava rovnic, která má nekonečně mnoho řešení. Takové rovnice jsou n-krát násobkem jiné. Třeba jako následující soustava rovnic.

$$2x + 2y = -4$$
$$-3x - 3y = 6$$

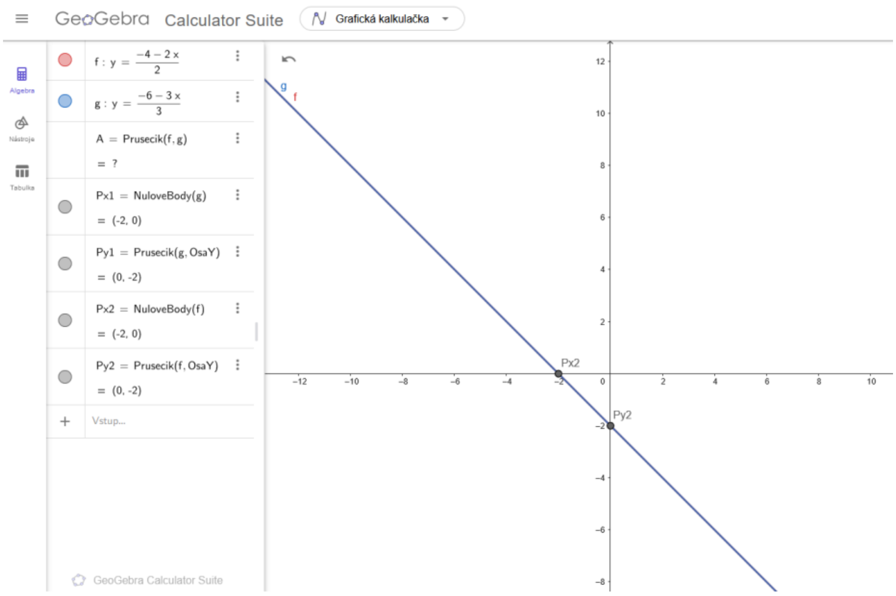
Opět obě rovnice přepíšeme do směrnicového tvaru a spočítáme průsečíky s osami.

$$y = \frac{-2x}{2} - \frac{4}{2} \rightarrow y = -x - 2$$
$$y = \frac{-3x}{3} - \frac{6}{3} \rightarrow y = -x - 2$$

$$P_{x_1}: y = 0 \rightarrow 0 = \frac{-2x}{2} - \frac{4}{2} \rightarrow x = -2$$
$$P_{y_1}: x = 0 \rightarrow y = \frac{-2 \cdot 0}{2} - \frac{4}{2} \rightarrow y = -2$$

$$P_{x_2}: y = 0 \rightarrow 0 = \frac{-3x}{3} - \frac{6}{3} \rightarrow x = -2$$
$$P_{y_2}: x = 0 \rightarrow y = \frac{-3 \cdot 0}{3} - \frac{6}{3} \rightarrow y = -2$$

Vidíme, že průsečíky vyšly stejně a to $P_{x_1} = P_{x_2}[-2; 0]\ a\ P_{y_1} = P_{y_2}[0; -2]$. Přímky jsou rovnoběžné splývající, takže mají nekonečně mnoho společných bodů, a proto i řešení soustavy rovnic je nekonečné mnoho.



Obrázek č. 2 Grafické řešení soustavy rovnic – nekonečně mnoho řešení

Teď ukážeme poslední možnost grafického řešení, kdy soustava rovnic nemá řešení. Na to bude vhodný tento příklad.

$$x - y = -11$$
$$x - y = 11$$

Postupujeme stejně jako u předchozího příkladu. Rovnice přepíšeme do směrnicového tvaru a spočítáme průsečíky s osami.

$$y = x + 11$$
$$y = x - 11$$

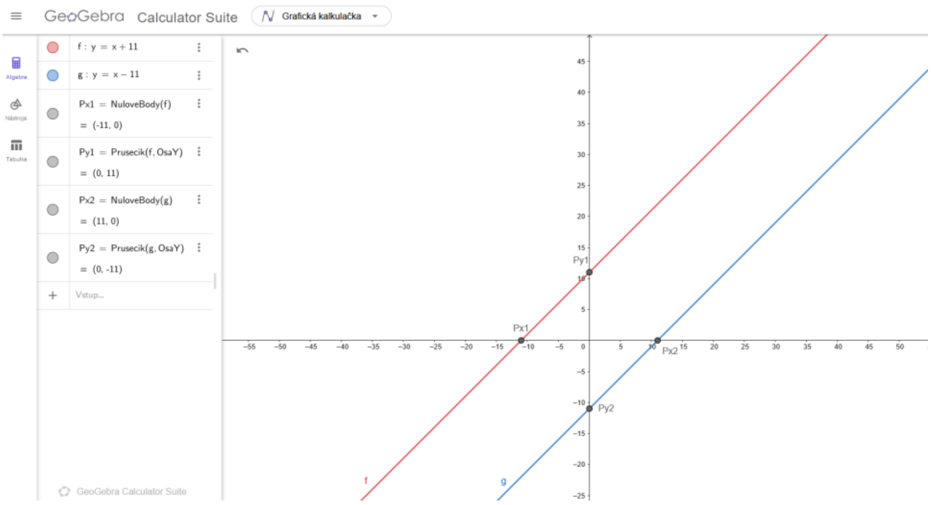
$$P_{x_1}: y = 0 \rightarrow 0 = x + 11 \rightarrow x = -11$$

$$P_{y_1}: x = 0 \rightarrow y = 0 + 11 \rightarrow y = 11$$

$$P_{x_2}: y = 0 \rightarrow 0 = x - 11 \rightarrow x = 11$$

$$P_{y_2}: x = 0 \rightarrow y = 0 - 11 \rightarrow y = -11$$

Vidíme, že průsečíky vyšly takto $P_{x_1}[-11; 0], P_{y_1}[0; 11], P_{x_2}[11; 0], P_{y_2}[0; -11]$. Přímky jsou rovnoběžné různé a nikdy se neprotnou. Soustava rovnic nemá žádné řešení.



Obrázek č. 3 Grafické řešení soustavy rovnic – žádné řešení

1.3.5 ÚVODNÍ POJMY K DALŠÍM METODÁM

Než začneme s metodami řešení je potřeba si říct základy k soustavám rovnic tedy, jak vypadají soustavy rovnic, jaké úpravy lze použít a které ne. Obecnou soustavou lineárních rovnic rozumíme soustavu rovnic zapsaných ve tvaru

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

Koeficienty v soustavě jsou množinou příslušných koeficientů

$$\mathbb{A} = (a_{ij}); i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

a sloupcem pravých stran b = $(b_1, \dots, b_m)$. Koeficienty soustavy mohou být reálná, nebo komplexní čísla.

Řešením soustavy jsou čísla x = $(x_1, \dots, x_n)$, která splňují všechny rovnice soustavy. V případě, že jsou některé koeficienty soustavy komplexní čísla, je řešení mezi komplexními čísly. Pro získání obecného řešení dané soustavy lineárních rovnic provádíme postupně úpravy a transformujeme dané soustavy rovnic na soustavu jinou. Při těchto úkonech nám množina všech řešení zůstane stejná jako množina všech řešení nové soustavy lineárních rovnic. Ovšem nová soustava je snadněji řešitelná (S. Míka, 2000).

Přestože soustavy lineárních rovnic mohou mít obecnější tvar, omezíme se pouze na soustavy lineárních rovnic s regulární čtvercovou maticí A řádu n

$$\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b},$$

kde $\vec{x}$ je n-členný sloupcový vektor řešení a $\vec{b}$ je n-dimenzionální sloupcový vektor absolutních členů (Mošová, 2003).

Pro začátek si řekneme, jaké elementární úpravy můžeme s maticemi provádět a jaké ne. Z definice víme, že s maticí $\mathbb{A}$ můžeme provádět následující elementární úpravy:

- přehození i-tého a j-tého řádku;
- vynásobení i-tého řádku nenulovým číslem;
- přičtení k-násobku i-tého řádku k j-tému řádku.

Vznikne nám matice $\mathbb{B}$ a říkáme, že matice $\mathbb{A}$ je ekvivalentní k matici $\mathbb{B}$. Značíme $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$. Proto lze stejné úpravy použít i na soustavu rovnic a řešení soustavy se nezmění. Vyškrtnutí nulového řádku, však mezi elementární úpravy nelze počítat, protože změní typ matice.

Dále platí, že matice $\mathbb{A}$ je ve sloupcovitém tvaru, je-li v některém řádku prvek na i-tém místě první nenulový, potom ve všech dalších řádcích jsou všechny prvky až do i-tého včetně rovny nule. (RNDr. Míková M.)

1.3.5.1 DETERMINANT

Z definice víme, že matice $\mathbb{A}$ je regulární, právě když determinant matice A je nenulový. V takovém případě soustava $A\vec{x} = \vec{b}$ má jediné řešení (Mošová, 2003).

Determinant je využívaný pro konkrétní metody řešení, proto je potřeba si vysvětlit, o co se jedná.

Je-li $\mathbb{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice nad tělesem T řádu n, pak definujeme determinant matice $\mathbb{A}$ předpisem

$$\det(A) = \sum_{\pi \epsilon S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n}$$

Determinant tedy přiřadí čtvercové matici nad T prvek tělesa T. Součet má $n!$ členů, jeden pro každou permutaci $\pi \in S_n$. Sčítanec odpovídající permutaci π je součinem n prvků matice, z každého sloupce i obsahuje součin prvek $a_{\pi(i),i}$, znaménko sčítance je rovné znaménku permutace π (Tůma, 2022).

U matic typu $2x2$ se používá následující předpis:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Výpočet si ukážeme na následujícím příkladě, kde máme matici 2. řádu a máme vypočítat determinant.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$$

U matic 3x3 se používá následující předpis

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

pojmenovaný Sarrusovo pravidlo. Prakticky se dá determinant vypočítat dvěma způsoby. První možností je, že si doprava připíšeme ještě jednou první a druhý sloupec. V druhém způsobu si pod matici připíšeme první a druhý řádek. Poté sečteme součiny hlavních diagonál a odečteme součiny vedlejších diagonál. Oba způsoby ukážeme na následujícím příkladě. Máme vypočítat determinant matice 3. řádu.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Nejprve jedním způsobem, kde si doprava dopíšeme první a druhý sloupec.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 1 \cdot (-4) \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) \cdot 4$$
$$- 1 \cdot 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = -12 + 30 + 4 + 32 - 5 - 9 = 40$$

Nyní vezmeme stejný příklad a vypočítáme determinant druhým způsobem, kdy si pod matici opíšeme první a druhý řádek.

$$\begin{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 5 \end{matrix} \end{matrix} = 1 \cdot (-4) \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-4) \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot 3$$
$$= -12 + 4 + 30 + 32 - 5 - 9 = 40$$

Vidíme, že použitím jednoho i druhého způsobu jsme se dostali ke stejnému výsledku. Dokonce v mezi kroku vidíme, že se jedná jen o přeházené hodnoty.

U matic vyššího řádu se pro získání determinantu používá rozvoje podle řádku (sloupce), kterému se říká Laplaceův rozvoj. Proto mějme čtvercovou matici $\mathbb{A} = (a_{ij})$ typu n. Algebraickým doplňkem prvku a_{ij} v matici $\mathbb{A}$ rozumíme

$$|A_{ij}| = (-1)^{i+j} \cdot |a_{ij}| \cdot |M_{ij}|,$$

kde a_{ij} nazýváme subdeterminant a jedná se o společný prvek řádku a sloupce. Matice M_{ij} je čtvercová matice typu $n - 1$, která vznikne z matice $\mathbb{A}$ vypuštěním i −tého řádku a j −tého sloupce. Této matici říkáme minor (Tůma, 2022).

Výpočet determinantu ukážeme na příkladu matice 4. řádu.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Postupujeme tak, že si vybereme řádek a sloupec, který obsahuje nejvíce nul. V našem případě vybereme poslední řádek a třetí sloupec tzn. $i = 4, j = 3$. Společným nenulovým číslem je pozice (4,3), kde se nachází číslice 1 a proto tuto číslici použijeme jako prvek a_{ij}. Na matici 3. řádu použijeme Sarrusovo pravidlo a tím získáme determinant původní zadané matice 4. řádu.

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^7 \cdot (2 + 6 - 1 - 2 - 3 + 2) = 1 \cdot (-1) \cdot 4$$
$$= -4$$

Podobným způsobem se počítá determinant vyšších řádů, kde se prvkem a_{ij} stane více než jeden prvek, a to matice, u které použijeme Sarrusovo pravidlo. Takovýto výpočet je už náročný a snadno se v něm chybuje.

Ukážeme si na příkladu výpočet determinantu matice 5. řádu.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nejprve zvolíme dva sloupce nebo řádky, podle kterých uděláme rozvoj. Zvolíme třeba 4. a 5. sloupec. Postupujeme obdobným způsobem jako u výpočtu determinantu 4. řádu. Subdeterminant se nám mění podle toho, na kterém řádku se budeme zrovna nacházet. Tentokrát subdeterminant tvoří matici 2x2 to znamená dva zvolené sloupce a k tomu kombinace dvou řádků.

$$\begin{aligned}\det(A) = &\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+4+5}\cdot\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\3 & 3 & 2\\0 & 3 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+3+4+5}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\3 & 3 & 2\\0 & 3 & 0\end{vmatrix}\\
&+\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+4+4+5}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\4 & 2 & 1\\0 & 3 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+5+4+5}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\4 & 2 & 1\\3 & 3 & 2\end{vmatrix}\\
&+\begin{vmatrix}5 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+3+4+5}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\3 & 3 & 2\\0 & 3 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+4+4+5}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\4 & 2 & 1\\0 & 3 & 0\end{vmatrix}\\
&+\begin{vmatrix}5 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+5+4+5}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\4 & 2 & 1\\3 & 3 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+4+4+5}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 3\\0 & 3 & 0\end{vmatrix}\\
&+\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+5+4+5}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 3\\3 & 3 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}\cdot(-1)^{4+5+4+5}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 3\\4 & 2 & 1\end{vmatrix}\end{aligned}$$

Na matice 3x3 i 2x2 používáme Sarrusovo pravidlo.

$$\begin{aligned}\det(A) = &(-7)\cdot(-1)^{12}\cdot(9-24)+1\cdot(-1)^{13}\cdot(27-0)+(-2)\cdot(-1)^{14}\cdot(36-0)\\
&+(-2)\cdot(-1)^{15}\cdot(3+36-18-8)+(4)\cdot(-1)^{14}\cdot(9-6)+(-1)\\
&\cdot(-1)^{15}\cdot(12-3)+(-1)\cdot(-1)^{16}\cdot(4+6+12-6-3-16)+(-1)\\
&\cdot(-1)^{16}\cdot(-9)+(-1)\cdot(-1)^{17}\cdot(2+18-3-9)+0\end{aligned}$$

Čísla sečteme a vynásobíme.

$$\det(A) = 105-27-72+26+12+9+3+9+8 = 73$$

1.3.6 GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA (GEM)

Proces Gaussovy eliminace budeme při řešení soustavy lineárních rovnic realizovat na prvky rozšířené matice soustavy. Uvedeme paralelně dva způsoby eliminováním neznámých, jednak přímo v soustavě, jednak s prvky rozšířené matice soustavy. Cílem úprav je získat rozšířenou matici soustavy ve stupňovitém tvaru.

Pro odvození metody rozepišme soustavu rovnic do obecného tvaru.

$$
\begin{aligned}
a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + \cdots + a_{1n}^0 x_n &= b_{1,n+1}^0 \\
a_{21}^0 x_1 + a_{22}^0 x_2 + \cdots + a_{2n}^0 x_n &= b_{2,n+1}^0 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
a_{n1}^0 x_1 + a_{n2}^0 x_2 + \cdots + a_{nn}^0 x_n &= b_{n,n+1}^0
\end{aligned}
$$

Postupně eliminujeme prvky matice na horní trojúhelníkový tvar, takže prvky pod hlavní diagonálou. První rovnici využijeme k eliminaci první neznámé ze zbývajících $n-1$ rovnic. Postupujeme tak, že první řádek vynásobíme $m_{21}^0 = -\frac{a_{21}^0}{a_{11}^0}$ a přičteme k druhému řádku. Následně první řádek vynásobený $m_{31}^0 = -\frac{a_{31}^0}{a_{11}^0}$ a přičtený ke třetímu řádku a pokračujeme, dokud nezískáme soustavu

$$
\begin{aligned}
a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + \cdots + a_{1n}^0 x_n &= b_{1,n+1}^0 \\
a_{22}^1 x_2 + \cdots + a_{2n}^1 x_n &= b_{2,n+1}^1 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \\
a_{n2}^1 x_2 + \cdots + a_{nn}^1 x_n &= b_{n,n+1}^1
\end{aligned}
$$

Obecně v k-tém kroku $(\mathrm{k}-1,2,\ldots,n-1)$ vynulujeme prvky v k-tém sloupci vynásobeným multiplikátorem $m_{ik}^{k-1} = -\frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}$ přičteme k i-tému řádku $(\mathrm{i} = \mathrm{k}+1, \ldots \mathrm{n})$. Matici A převedeme na horní trojúhelníkovou matici. Získáme následující soustavu

$$
\begin{aligned}
a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + \quad \ldots + a_{1n}^0 x_n &= b_{1,n+1}^0 \\
a_{22}^1 x_2 + \quad \ldots + a_{2n}^1 x_n &= b_{2,n+1}^1 \\
a_{33}^2 x_3 + \cdots + a_{3n}^2 x_n &= b_{3,n+1}^2 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
a_{nn}^{n-1} x_n &= b_{n,n+1}^{n-1}
\end{aligned}
$$

ze které zpětně získáme hodnoty neznámých $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Gaussovu eliminační metodu ukážeme na příkladě, který vyřešíme nejprve eliminací neznámých a poté pomocí matice.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 3x_3 &= -3 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= -2 \\
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -3
\end{aligned}
$$

Začneme tím, že ze všech rovnic, kromě první, eliminujeme neznámou x_1. To uděláme metodou dosazovací. Z první rovnice si vyjádříme neznámou x_1 a dosadíme do zbylých rovnic a upravíme.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2 \cdot (-3 - x_2 - 3x_3) + x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 3 \cdot (-3 - x_2 - 3x_3) + 2x_2 + 5x_3 &= -3 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -3 - x_2 - 3x_3 \\ -x_2 - 3x_3 &= 4 \\ -x_2 - 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Dále budeme pokračovat eliminováním x_2 ze třetí rovnice. Z druhé rovnice vyjádříme neznámou x_2 , dosadíme do třetí rovnice a upravíme.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -x_2 - 3x_3 &= 4 \\ -(-4 - 3x_3) - 4x_3 &= 6 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -x_2 - 3x_3 &= 4 \\ -x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice již vidíme, že $x_3 = -2$, takže je Gaussova eliminace u konce a teď zpětným dosazováním dopočítáme zbylé neznámé. Začneme od konce, takže výpočtem x_2.

$$\begin{aligned} -x_2 - 3 \cdot (-2) &= 4 \\ -x_2 &= 4 - 6 \\ -x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že $x_2 = 2$. Nyní obě hodnoty dosadíme do první rovnice a dopočítáme poslední neznámou x_1.

$$\begin{aligned} x_1 + (2) + 3 \cdot (-2) &= -3 \\ x_1 &= -3 - 2 + 6 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic je $x_1 = -2, x_2 = 2$ a $x_3 = 1$.

Nyní na stejném příkladě ukážeme použití Gaussovy eliminační metody na rozšířené matici. Začneme tím, že soustavu rovnic přepíšeme do matice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Rozšířenou matici budeme upravovat elementárními úpravami, tak aby vznikla matice ve stupňovitém tvaru. To znamená, že chceme, aby v pozicích $(2, 1)$ a $(3, 1)$ byly nulové prvky. První řádek opíšeme a postupně jej násobíme číslem -2 a přičteme ke druhému řádku, poté první řádek vynásobíme číslem -3 a přičteme ke třetímu řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

Pokračujeme v upravování rozšířené matice na trojúhelníkový tvar a chceme na pozici $(3, 2)$ nulový prvek. Vynásobíme druhý řádek -1 a přičteme k poslednímu řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Rozšířená matice soustavy je již ve stupňovitém tvaru. Proces Gaussovy eliminace je u konce. Soustavu již snadno vyřešíme zpětným dosazením:

$$-x_3 = -1 \rightarrow\ x_3 = 1$$
$$-x_2 - 3x_3 = -5 \rightarrow\ x_2 = 2$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \rightarrow\ x_1 = -2$$

Řešením je trojice čísel $(1,2,-2)^T$. O správnosti řešení se můžeme přesvědčit dosazením trojice do dané soustavy.

1.3.7 METODA LU – ROZKLADU

Z definice víme, že horní trojúhelníkovou maticí nazveme matici, právě tehdy když platí $a_{ij} = 0\ \forall i > j$ a dolní trojúhelníkovou maticí, když platí $a_{ij} = 0\ \forall i < j$. (Baštinec J.)

Dolní trojúhelníková matice L s jednotkami v hlavní diagonále a nenulovými prvky nad hlavní diagonálou a horní trojúhelníková matice U s nenulovými prvky pod hlavní diagonálou tvoří LU – rozklad čtvercové matice A je-li

$$A = L \cdot U$$

(RNDr. Rudolf Schwarz).

Názorně metodu ukážeme na příkladě, kdy budeme mít zadanou matici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Začneme tím, že matici A rozepíšeme pomocí násobení dvou matic L' a U. Při násobení matic postupujeme tak, že řádek v první matici L vynásobíme s prvním sloupečkem druhé matice U a vznikne nám první prvek A. Matematicky to znamená, že $a_{11} = l'_{11} \cdot u_{11} + l'_{21} \cdot u_{12} + l'_{31} \cdot u_{13}$ a takto se postupuje u všech prvků matice A. V našem případě začneme rozepsáním prvního řádku matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

V první matici L' budeme mít nad hlavní diagonálou nulové prvky a snažíme se získat jednotky na hlavní diagonále. V dalším kroku vynásobíme první řádek 2 a sečteme s druhým řádkem stejně jako u Gaussovy eliminace a rovnou rozepíšeme do dvou matic.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Pokračujeme stejným postupem k vynulování prvního prvku v třetím řádku. Vynásobíme první řádek -3 a opět rozepíšeme do obou matic.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(-3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Teď už jen dopočítáme prvky z první matice L' pod hlavní diagonálou, k tomu využijeme znalosti pro násobení dvou matic.

$$a_{21} = -2 = (l'_{21} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow l'_{21} = -2$$

$$a_{31} = 3 = (l'_{31} \cdot 1) + (l'_{32} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \rightarrow l'_{31} = 3$$

$$a_{32} = 2 = \left(l'_{31} \cdot (-2)\right) + \left(l'_{32} \cdot (-7)\right) + (1 \cdot 8) \rightarrow$$
$$2 = (3 \cdot (-2)) + (l'_{32} \cdot (-7)) + (1 \cdot 8) \rightarrow -7l'_{32} = 0 \rightarrow l'_{32} = 0$$

Dopočítané prvky doplníme do matice L'. Teď nás čeká upravit matici U na horní trojúhelníkovou matici, tedy potřebujeme vynulovat prvek u_{32}. Toho docílíme tím, že matici U rozepíšeme na součin dvou matic $L'' \cdot U$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix}\right]$$

Pro vynulování u_{32} musíme druhý řádek vynásobit $\frac{8}{7}$ a sečíst s posledním řádkem.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Je potřeba dopočítat prvky pod hlavní diagonálou matice L''. Postupujeme stejně jako při výpočtu prvků u matice L'.

$$a_{21} = 0 = (l''_{21} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow l''_{21} = 0$$

$$a_{31} = 0 = (l''_{31} \cdot 1) + (l''_{32} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \rightarrow l''_{31} = 0$$

$$a_{32} = 8 = \left(l''_{31} \cdot (-2)\right) + \left(l''_{32} \cdot (-7)\right) + (1 \cdot 0) \rightarrow$$

$$8 = (0 \cdot (-2)) + (l''_{32} \cdot (-7)) + (1 \cdot 0) \rightarrow -7l''_{32} = 8 \rightarrow l''_{32} = -\frac{8}{7}$$

Dopočítané prvky dopíšeme do matice L''. Získáme tak součin tří matic $A = L' \cdot L'' \cdot U$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{7} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Nyní je potřeba vynásobit matice L' a L'', abychom získali výslednou matici L.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{7} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{8}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

Aby platil vztah $A = L \cdot U$, musí být matice L vynásobená maticí U rovna matici A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{8}{7} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Nyní metodu LU-rozkladu ukážeme na matici 4. řádu.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Začneme stejně, jako u předchozího příkladu. Rozepíšeme matici A pomocí násobení dvou matic L' a U. Rovnou rozepíšeme první řádek.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Sečteme první a druhý řádek a rozepíšeme do obou matic.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Vynásobíme první řádek -2 a sečteme se třetím řádkem matice. Poté vynásobíme první řádek 3 a sečteme s posledním řádkem. Následně rozepíšeme, jako v předchozím kroku.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Dopočítáme prvky pod hlavní diagonálou v matici L'.

$$a_{21} = -1 = (l'_{21} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow l'_{21} = -1$$

$$a_{31} = 2 = (l'_{31} \cdot 1) + (l'_{32} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \rightarrow l'_{31} = 2$$

$$a_{32} = -2 = \left(l'_{31} \cdot (-2)\right) + \left(l'_{32} \cdot (1)\right) + (1 \cdot 2) + (0 \cdot (-5)) \rightarrow$$
$$-2 = (2 \cdot (-2)) + (l'_{32} \cdot (1)) + (1 \cdot 2) \rightarrow l'_{32} = 0$$

$$a_{41} = -3 = (l'_{41} \cdot 1) + (l'_{42} \cdot 0) + (l'_{43} \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow l'_{41} = -3$$
$$a_{42} = 1 = \left(l'_{41} \cdot (-2)\right) + (l'_{42} \cdot 1) + (l'_{43} \cdot 2) + (0 \cdot (-5)) \rightarrow l'_{42} = 0$$

$$a_{43} = -2 = (l'_{41} \cdot 3) + (l'_{42} \cdot 3) + \left(l'_{43} \cdot (-5)\right) + (0 \cdot 7) \rightarrow l'_{43} = 0$$

Dopočítané prvky doplníme do matice L'. Potřebujeme upravit matici U na horní trojúhelníkovou matici, tedy musíme vynulovat prvky u_{32} a u_{42}. Toho docílíme tím, že matici U rozepíšeme na součin dvou matic $L'' \cdot U$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\right]$$

Pro vynulování prvků u_{32} a u_{42} vynásobíme druhý řádek -2 a sečteme s třetím řádkem. Poté vynásobíme druhý řádek 5 a sečteme s posledním řádkem a doplníme do matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & 15 \\ 0 & 0 & 22 & -27 \end{pmatrix}\right]$$

Opět je potřeba dopočítat prvky tentokrát matice L''. Postupujeme stejně jako v předchozím kroku.

$$a_{21} = 0 = (l''_{21} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow l''_{21} = 0$$

$$a_{31} = 0 = (l''_{31} \cdot 1) + (l''_{32} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \rightarrow l''_{31} = 0$$

$$a_{32} = 2 = \left(l''_{31} \cdot (-2)\right) + \left(l''_{32} \cdot (1)\right) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow$$

$$2 = (2 \cdot (-2)) + (l''_{32} \cdot (1)) + 0 + 0 \rightarrow l''_{32} = 6$$

$$a_{41} = 0 = (l''_{41} \cdot 1) + (l''_{42} \cdot 0) + (l''_{43} \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow \ l''_{41} = 0$$

$$a_{42} = -5 = \left(l''_{41} \cdot (-2)\right) + (l''_{42} \cdot 1) + (l''_{43} \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow$$

$$-5 = 0 + \left(l''_{42} \cdot (1)\right) + 0 + 0 \rightarrow \ l''_{42} = -5$$

$$a_{43} = 7 = (l''_{41} \cdot 3) + (l''_{42} \cdot 3) + \left(l''_{43} \cdot (-11)\right) + (0 \cdot 22) \rightarrow$$

$$7 = (0 \cdot 3) + ((-5) \cdot 3) + \left(l''_{43} \cdot (-11)\right) + (0 \cdot 22) \rightarrow -11l''_{43} = 22 \rightarrow l''_{43} = -2$$

Dopočítané prvky doplníme do matice L''. Stále je potřeba upravit matici U na horní trojúhelníkovou matici, tedy vynulovat prvky u_{43}. Toho docílíme opětovný rozepsáním na součin dvou matic $L''' \cdot U$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & 15 \\ 0 & 0 & 22 & -27 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & 15 \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}\right]$$

Pro vynulování prvku u_{43} je potřeba vynásobit třetí řádek 2 a sečíst s posledním řádkem.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & 15 \\ 0 & 0 & 22 & -27 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

Nyní naposledy dopočítáme chybějící prvky matice L'''.

$$a_{21} = 0 = (l'''_{21} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow l'''_{21} = 0$$

$$a_{31} = 0 = (l'''_{31} \cdot 1) + (l'''_{32} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \rightarrow l'''_{31} = \ 0$$

$$a_{32} = 0 = \left(l'''_{31} \cdot (-2)\right) + \left(l'''_{32} \cdot (1)\right) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow$$

$$0 = (0 \cdot (-2)) + (l''_{32} \cdot (1)) + 0 + 0 \rightarrow l'''_{32} = 0$$

$$a_{41} = 0 = (l'''_{41} \cdot 1) + (l'''_{42} \cdot 0) + (l'''_{43} \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow \ l'''_{41} = 0$$

$$a_{42} = 0 = \left(l'''_{41} \cdot (-2)\right) + (l'''_{42} \cdot 1) + (l''_{43} \cdot 0) + (0 \cdot 0) \rightarrow$$

$$0 = 0 + \left(l'''_{32} \cdot (1)\right) + 0 + 0 \rightarrow \ l'''_{42} = 0$$

$$a_{43} = 22 = (l'''_{41} \cdot 3) + (l''_{42} \cdot 3) + \left(l''_{43} \cdot (-11)\right) + (0 \cdot 0) \rightarrow$$

$$22 = (0 \cdot 3) + (0 \cdot 3) + \left(l''_{43} \cdot (-11)\right) + (0 \cdot 0) \rightarrow -11l''_{43} = 22 \rightarrow l''_{43} = -2$$

Nyní je potřeba vynásobit matice L', L'' a L''', abychom získali výslednou matici L.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aby platil vztah $A = L \cdot U$, musí být matice L vynásobená s maticí U rovna matici A. To platí, takže máme rozklad zadané matice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.3.8 FROBENIOVA VĚTA

Na použití Frobeniovy věty je potřeba určit hodnost matice. Hodnotu h nazýváme hodností matice $\mathbb{A}$ a zapisujeme $h(\mathbb{A}) = k$.

Z definice víme, že soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ je řešitelná právě, když $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$. Hodnost matice musí být stejná jako hodnost matice rozšířené. Nyní potřebujeme porovnat hodnost matice s počtem neznámých. Počet neznámých v tomto případě značíme jako n. Mohou nastat tři případy.

- Počet neznámých je stejný jako hodnost matice $\mathbb{A}$.

$$h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|b) \wedge h(\mathbb{A}) = n$$

Soustava má právě jedno řešení.

- Počet neznámých je větší než hodnost matice $\mathbb{A}$.

$$h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|b) \wedge h(\mathbb{A}) < n$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení s tím, že $n - h(\mathbb{A})$ neznámých lze libovolně zvolit a ostatní jednoznačně vyjádřit v závislosti na zvolených neznámých.

- Počet neznámých je menší než hodnost matice $\mathbb{A}$.

$$h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|b) \wedge h(\mathbb{A}) > n$$

Soustava rovnic nemá řešení (L. Motl, 2002).

Názorně ukážeme na soustavě rovnic, kterou vyřešíme Frobeniovou větou.

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 4x_3 &= 1,\\
2x_1 + x_2 + 11x_3 &= 2,\\
6x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2.
\end{aligned}
$$

Rovnice sepíšeme do rozšířené matice a za použití elementárních úprav získáme trojúhelníkový tvar matice. První řádek vynásobíme multiplikátorem $m_{21}^0 = 2$ a přičteme k druhému. Poté první řádek vynásobíme číslem $m_{31}^0 = 3$ a přičteme k třetímu řádku. Pokračujeme v úpravách. Druhý řádek sečteme s třetím řádkem. Dostaneme matici v trojúhelníkovém tvaru.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 6 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 19 & 4 \\ 0 & -1 & 29 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 19 & 4 \\ 0 & 0 & 48 & 12 \end{array}\right)
$$

Hodnost matice i hodnost rozšířené matice je stejná $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|b) = 3$. Počet neznámých $n = 3$. Nastává první případ, kdy je hodnost matice rovna počtu neznámých a soustava rovnic má právě jedno řešení.

$$
\begin{aligned}
48x_3 = 12 &\rightarrow x_3 = \frac{1}{4}\\
x_2 = 4 - 19x_3 &\rightarrow x_2 = \frac{-3}{4}\\
x_1 = -1 + 4x_3 &\rightarrow x_1 = 0
\end{aligned}
$$

Řešením soustavy je $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{-3}{4}$ a $x_3 = \frac{1}{4}$.

Vyzkoušejme další soustavu rovnic a opět ji řešíme pomocí Frobeniovy věty.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 10,\\
-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -10,\\
x_1 + x_2 - 5x_3 &= 10.
\end{aligned}
$$

Rovnice sepíšeme do rozšířené matice a aplikujeme elementární úpravy k získání trojúhelníkového tvaru matice. V tomto případě nejprve prohodíme pořadí řádků a poté postupně násobíme řádky multiplikátory $m_{21}^0 = 2$, $m_{31}^0 = -3$.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 10 \\ -2 & -3 & 2 & -10 \\ 1 & 1 & -5 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 10 \\ -2 & -3 & 2 & -10 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & -8 & 10 \\ 0 & 2 & 16 & -20 \end{array}\right)
$$

Vidíme, že poslední řádek je dvojnásobek předchozího řádku a dle pravidel o lineárně závislých řádcích poslední řádek škrtneme.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & -8 & 10 \\ 0 & 2 & 16 & -20 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & -8 & 10 \end{array}\right)
$$

Hodnost matice i hodnost rozšířené matice je stejná $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|b) = 2$. Počet neznámých $n = 3$. Nastává druhý případ, kdy je hodnost matice menší, než počet neznámých a soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení. V takovém případě, si můžeme zvolit jednu neznámou jako parametr $t \in \mathbb{R}$ a pomocí parametru vyjádřit zbylé dvě neznámé.

$$
\begin{gathered}
x_3 = \mathrm{t} \\
x_2 = -10 - 8x_3 \rightarrow\ x_2 = -10 - 8\mathrm{t} \\
x_1 = 10 - x_2 + 5x_3 \rightarrow\ x_1 = 20 + 13\mathrm{t}
\end{gathered}
$$

Řešením soustavy rovnic je $x_1 = 20 + 13\mathrm{t}$, $x_2 = -10 - 8\mathrm{t}$ a $x_3 = \mathrm{t}$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Nyní pomocí Frobeniovy věty vyřešíme poslední soustavu rovnic, kde máme čtyři rovnice a pět neznámých.

$$
\begin{gathered}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = -2, \\
x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\
5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 10.
\end{gathered}
$$

Rovnice opět přepíšeme do rozšířené matice a použijeme elementární úpravy. V tomto případě násobíme řádky multiplikátory $m_{21}^0 = -3$, $m_{41}^0 = -5$ a sečteme s první rovnicí.

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\
3 & 2 & 1 & 1 & 3 & -2 \\
0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\
5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 10
\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\
0 & -1 & -2 & -2 & 0 & -23 \\
0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\
0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -25
\end{array}\right)
$$

Pokračujeme sečtením druhého a třetího řádku a následně vynásobíme multiplikátorem $m_{42}^1 = -1$.

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\
0 & -1 & -2 & -2 & 0 & -23 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -2
\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\
0 & -1 & -2 & -2 & 0 & -23 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2
\end{array}\right)
$$

Vidíme, že hodnost matice je $h(\mathbb{A}) = 3$ a hodnost rozšířené matice je $h(\mathbb{A}|b) = 4$. Nastává rozpor s podmínkou na užití Frobeniovy věty $h(\mathbb{A}) \neq h(\mathbb{A}|b)$ a proto soustava rovnic nemá řešení.

1.3.9 CRAMEROVO PRAVIDLO

Nechť $A = (a_1|\dots|a_n)$ je regulární matice řádu n a $j \in \{1,2,\dots,n\}$. Pak j-tá složka vektoru řešení $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ soustavy $Ax = b$ je

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

kde A_j je matice, která vznikne z A nahrazením j-tého sloupce vektorem b tj. (Tůma, 2022)

$$A_j = \left(a_1 | a_2 | \dots | a_{j-1} | b | a_{j+1} | \dots | a_n\right).$$

Pomocí Cramerova pravidla zjistíme řešení soustavy rovnic.

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 21 \end{gathered}$$

Soustavu rovnic přepíšeme na matici, spočítáme jednotlivé determinanty (A, A_1, A_2, A_3) a následně vypočítáme řešení soustavy rovnic.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 30 + 1 - 10 - 4 - 12 = 21$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 21 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 126 + 6 - 42 - 8 - 72 = 42$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 5 & 21 & 4 \end{vmatrix} = 48 + 21 + 40 - 30 - 84 - 16 = -21$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 21 \end{vmatrix} = 84 + 90 + 4 - 40 - 12 - 63 = 63$$

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{42}{21} = 2 \\ x_2 = \frac{-21}{21} = -1 \\ x_3 = \frac{63}{21} = 3 \end{gathered}$$

Cramerovo pravidlo využíváme i v příkladech, kdy chceme vypočítat jen konkrétní neznámou. Ukážeme to na příkladu, kdy budeme chtít vypočítat druhou složku řešení soustavy.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 22 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -10 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & 5 & 1 & 22 \\ -3 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

Spočítáme determinant matice A pomocí Sarrusovo pravidla.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot (-3) + (-3) \cdot 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 5 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot 5$$
$$- (-2) \cdot 2 \cdot 2 = -50 - 6 - 6 - 45 - 5 + 8 = -104$$

Ověřili jsme, že je matice regulární a můžeme použít Cramerovo pravidlo. Nyní spočítáme determinant matice A_2.

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & 22 & 1 \\ -3 & -10 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 5 \cdot 22 \cdot (-2) + 2 \cdot (-10) \cdot (-3) + (-3) \cdot (-4) \cdot 1 - (-3) \cdot 22 \cdot (-3)$$
$$- 1 \cdot (-10) \cdot 5 - (-2) \cdot (-4) \cdot 2 = -220 + 60 + 12 - 198 + 50 - 16$$
$$= -312$$

Druhá složka řešení je $x_2 = \frac{-312}{-104} = 3$.

1.3.10 ŘEŠENÍ SOUSTAV NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

Jelikož učím na základní škole v Plzni, naskytla se mi možnost zadat žákům devátého ročníku dvě soustavy rovnic o dvou neznámých. Jejich úkolem bylo soustavu vyřešit a následně obě rovnice znázornit do pravoúhlé soustavy souřadnic spolu s průsečíky os. Zadané soustavy byly tyto:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 12 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x - 3y &= -2 \\ 2x + 6y &= -4 \end{aligned}$$

Obě soustavy řešili žáci nejprve v ruce na papír a poté v programu GeoGebra. Výsledná práce několika žáků je k nahlédnutí v příloze. Jedná se o žáky, kteří jsou šikovní, mají dobrý prospěch a čitelné písmo.

Na obrázcích č. 4, 6, 8 a 12 vidíme, že zakreslovali grafické znázornění do jednoho grafu. To je ovšem skrývá nebezpečí, že někteří žáci se mohou zamotat do vyznačených bodů a tím získat chybné zobrazení. Vybraných žáků se to ovšem netýká. Na obrázku č. 10 udělal žák dva různé grafy, které se zdají být přehlednější.

Na obrázcích č. 5, 7 a 11 je znatelné, že žáci si více důvěřují ve sčítací metodě, kterou použili na vyřešení soustav. Naopak na obrázcích č. 9 a 13 si jsou žáci více jistí v metodě dosazovací, kterou uplatnili při řešení soustav rovnic. Ovšem výpočet průsečíků udělal jen jeden žák.

V dalších obrázcích máme možnost shlédnout práci žáků v programu GeoGebra. I zde se jednalo o šikovné žáky, kteří si nejprve upravili rovnici do směrnicového tvaru přímky.

1.4 NUMERICKÉ METODY ŘEŠENÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

V pedagogické praxi se můžeme setkáváme s náročnými úlohami na určení řešení soustavy rovnic. Převážně se jedná o soustavy velmi rozsáhlé, které výpočetní technika dokáže vyřešit v rozumně přijatelných časech i s několika milióny neznámých. Metody řešení dělíme na přímé a iterační. Přímé metody mají v konečném počtu kroků přesné řešení, a to jen v případě, kdy nedochází ve výpočtech k zaokrouhlování chyb. Iterační metody poskytují výsledek jen přibližně, což s dobrou aproximací je řešení přesné. Počet kroků iterační metody je závislý na požadované přesnosti (L. Čermák, 2016).

Obecně není snadné rozhodnout, jakou metodou řešit soustavy rovnic. Lze si tedy pomoci přepsáním rovnic do matice a následným výběrem vhodné metody pro jejich řešení. Soustavy rovnic tvořící matici řešíme převážně přímými metodami, a to jsou Gaussovo eliminační metoda, LU rozklad a další. Soustavy rovnic přepsané do řídké matice, zde převažují nulové prvky, řešíme iteračními metodami (Mošová, 2003).

1.5 ITERAČNÍ METODY (NEPŘÍMÉ)

Iterační metody, na rozdíl od přímých metod, nevedou k přesnému řešení po konečném, předem daném počtu kroků. U iteračních metod zvolíme počáteční aproximaci řešení a určitým postupem ji v každém kroku metody zlepšíme. K řešení se přibližujeme postupně a obecně ho dosáhneme až v limitě. Protože výpočet nelze provádět do nekonečna, po jisté době jej ukončíme. Výsledkem bude přibližné řešení soustavy. Iterační metody – Jacobiho a Gauss-Seidelova jsou z iteračních metod asi nejjednodušší. Vliv zaokrouhlovacích chyb u Gaussovy eliminace může být značný, zvlášť u některých typů matic. Proto se používá tzv. eliminace s výběrem hlavního prvku. Eliminační metoda je velmi náročná z časového i paměťového hlediska. Nejlépe se hodí pro nepříliš rozsáhlé soustavy s plnou maticí. U Cramerova pravidla jednotlivé neznámé počítáme jako podíly determinantů. Cramerovo pravidlo je vhodné pouze pro velmi malé soustavy rovnic. Pomocí iteračních metod obvykle najdeme pouze přibližně řešení soustavy. Na začátku zvolíme počáteční aproximaci řešení, a tu pak opakovaným dosazováním do iteračních vztahů zpřesňujeme. S výpočtem skončíme obvykle tehdy, je-li norma rozdílu po sobě jdoucích aproximací dostatečně malá. Iterační metody mohou divergovat (řešení pomocí nich nemusíme najít). Zda bude metoda konvergovat, či nikoli, závisí na vlastnostech matice soustavy. U Jacobiho metody zaručí konvergenci řádková nebo sloupcová diagonální dominance, u Gauss-Seidelovy metody řádková diagonální dominance nebo pozitivní definitnost matice. Iterační metody jsou vhodné pro řešení velkých soustav s řídkou maticí koeficientů. Pro řešení malého počtu rovnic vhodné nejsou, tam lépe poslouží eliminace (S. Míka, 2000).

1.5.1 JACOBIHO METODA

Pro odvození iterační metody potřebujeme obecnou soustavu rovnic a postupujeme tak, že z i-té rovnice soustavy

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

vyjádříme i-tou neznámou. Rozepíšeme si rovnice v $(k+1)$-ním kroku, kde $k = 0, 1, 2, \dots$, do následujících tvarů, kterým říkáme iterační rovnice

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right), \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right). \end{aligned}$$

Pokud sepíšeme koeficienty do matice a pravé strany do vektorů, vznikne nám

$$H_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad g_J = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix},$$

kde H_J nazýváme iterační maticí a g_J je vektor pravých stran. Pro zobecnění iteračních rovnic můžeme použít zápis

$$\vec{x}^{(k+1)} = H_J\vec{x}^{(k)} + \vec{g}_J,$$

který nazveme Jacobiovo iterační formulí.

Dále zmíníme $D = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z definice víme, že čtvercovou matici A řádu n, lze rozepsat na součet tří matic $A = M + D + N$. Když součet dosadíme do $A\vec{x} = \vec{b}$ a upravíme, získáme obecné vyjádření iterační rovnice Jacobiho metody

$$\vec{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(M+N)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dále vidíme, že pro iterační matici a vektor pravých stran platí následující vztahy.

$$H_J = -D^{-1}(M+N), \qquad g_J = D^{-1}\vec{b}$$

Ne vždy musíme najít řešení Jacobiho metody. Když řešení nenajdeme, metoda diverguje. Aby metoda konvergovala, musí platit dvě tvrzení.

- Nutná a postačující podmínka konvergence

Pro libovolné $\vec{g}$ a libovolnou počáteční aproximaci $\vec{x}^{(0)}$, konverguje iterace $\vec{x}^{(k+1)} = H\vec{x}^{(k)} + \vec{g}$ právě tehdy, když je splněna podmínka rovnosti maximálního počtu vlastních čísel iterační matice a spektrální poměr iterační matice $\rho(H) = \max_i \{\lambda_i(H)\} < 1$.

- Postačující podmínka konvergence

Když pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ a $\vec{g}$ konverguje posloupnost iterací $\vec{x}^{(k+1)} = H\vec{x}^{(k)} + \vec{g}$, musí být splněná nerovnost pro normu iterační matice $\|H\| \leq q < 1$.

Důkaz obou tvrzení je k nalezení v dokumentu Numerické metody od paní Mošové.

(Mošová, 2003).

Jacobiovu metodu ukážeme na následující soustavě.

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_3 = 5 \end{gathered}$$

Iterační formule pro konkrétní soustavu jsou

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(5 - x_2^{(k)}\right),$$
$$x_2^{(k+1)} = \left(2 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right),$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(x_1^{(k)} - 5\right).$$

Z iterační formule můžeme sestavit iterační matice a vektor pravých stran.

$$H_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_J = (2{,}2,-\frac{5}{3})^T$$

Zvolíme si počáteční aproximaci $\vec{x}^{(0)} = (0{,}0{,}0)$, kterou dosadíme do iterační formule a začneme zjišťovat, jaký je výsledek zadané soustavy.

$$\vec{x}^{(1)} = (\frac{5}{2}; 2; -\frac{5}{3})$$

$$\vec{x}^{(2)} = (1{,}5; 1{,}1667; -0{,}8333)$$

$$\vec{x}^{(3)} = (1{,}9166; 1{,}333; -1{,}1667)$$

$$\vec{x}^{(4)} = (1{,}8333; 1{,}25; -1{,}0278)$$

$$\vec{x}^{(5)} = (1{,}875; 1{,}1944; -1{,}0556)$$

$$\vec{x}^{(6)} = (1{,}9027; 1{,}1805; -1{,}0416)$$

$$\vec{x}^{(7)} = (1{,}9097; 1{,}1388; -1{,}0324)$$

$$\vec{x}^{(8)} = (1{,}9305; 1{,}1226; -1{,}0300)$$

už nyní můžeme pozorovat, že se hodnoty mění v rámci setin a tisícin. Trochu přeskočíme a ukážeme si, jak vypadá $\vec{x}^{(20)}$.

$$\vec{x}^{(20)} = (1{,}9929; 1{,}0140; -1{,}0033)$$

Další hodnoty se mění už v rámci tisícin a deseti tisícin, proto si můžeme dovolit hodnoty zaokrouhlit dle pravidel pro zaokrouhlování. Tím dostaneme výslednou hodnotu.

$$\vec{x} = (2; 1; -1)$$

Což je výsledkem naší soustavy rovnic. Celý postup můžeme vidět na obrázku č. 19 v příloze, kde je výpočet pomocí Excelu.

Jacobiovou metodou vyřešíme další soustavu rovnic.

$$2x_1 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$
$$x_1 - 4x_3 = 5$$

Zapíšeme si iterační formule, ze kterých opět vidíme iterační matici a vektor pravých stran

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - x_3^{(k)}\right),$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(2 + 3x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right), \qquad H_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_J = (\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{5}{4})^T$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(x_1^{(k)} - 5\right).$$

Zvolíme počáteční aproximaci $\vec{x}^{(0)} = (0,0,0)$ stejnou jako v předchozím příkladě a začneme zjišťovat, jaký je výsledek zadané soustavy.

$$\vec{x}^{(1)} = (0{,}5; 1; -1{,}25)$$

$$\vec{x}^{(2)} = (1{,}125; 1{,}125; -1{,}125)$$

$$\vec{x}^{(3)} = (1{,}0625; 2{,}125; -0{,}9687)$$

$$\vec{x}^{(4)} = (0{,}9843; 2{,}1093; -0{,}9843)$$

$$\vec{x}^{(5)} = (0{,}9921; 1{,}9843; -1{,}0039)$$

$$\vec{x}^{(6)} = (1{,}0019; 1{,}9863; -1{,}0019)$$

už nyní můžeme pozorovat, že se hodnoty mění v rámci setin a tisícin. Trochu přeskočíme a ukážeme, jak vypadá $\vec{x}^{(9)}$.

$$\vec{x}^{(9)} = (0{,}9997; 1{,}9997; -1{,}0000)$$

Další hodnoty se mění už v rámci tisícin a deseti tisícin, proto si můžeme dovolit hodnoty zaokrouhlit dle pravidel pro zaokrouhlování. Tím dostaneme výslednou hodnotu.

$$\vec{x} = (1; 2; -1)$$

Celý postup můžeme opět vidět na obrázku č. 20 v příloze. V obou příkladech jsme získali konvergující posloupnost.

1.5.2 GAUSS – SEIDELOVA METODA

Gauss-Seidelovu metodu lze považovat za vylepšení Jacobiovy metody. Všechny vypočítané hodnoty okamžitě používáme v dalším iteračním kroku. V $(k+1)$-ním kroku $(k = 0, 1, 2, \dots)$ obdržíme iterační formuli

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}),$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right),$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right).$$

Použijeme stejné značení jako u Jacobiovy metody, a tak řešíme soustavu

$$(M + D + N)\vec{x} = \vec{b}$$

Dostaneme novou iterační metodu

$$\vec{x}^{(k+1)} = H_{GS}\vec{x}^{(k)} + \vec{g}_{GS},$$

kde $H_{GS} = -(M + D)^{-1}\mathrm{N}$, $g_J = -(M + D)^{-1}\vec{b}$

Z definice víme, že čtvercovou matici A řádu n, lze opět rozepsat na součet $A = M + D + N$, pak je Gauss-Seidelova metoda řešení určena iteračními rovnicemi

$$\vec{x}^{(k+1)} = -(M + D)^{-1}N\vec{x}^{(k)} + (M + D)^{-1}\vec{b}, k = 0,1,2 \dots$$

Gaussova-Seidelova metoda je rychlejší než Jacobiho metoda, protože má menší nároky na paměť počítače (Mošová, 2003).

Výpočet Gauss – Seidelovou metodou ukážeme na následující soustavě rovnic.

$$3x_1 - 2x_2 = 10$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$
$$4x_2 + 4x_3 = -4$$

Sepíšeme iterační formule

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(10 + 2x_2^{(k)}\right),$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(-x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right),$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(-4 - 4x_2^{(k+1)}\right) = \frac{1}{4}\left(-4 - 4 \cdot (-\frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_2^{(k)} - x_3^{(k)})\right) = \frac{1}{4}(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x_2^{(k)} + 4x_3^{(k)}).$$

Iterační matice a vektor pravých stran opět vidíme z iterační formule a mají následující tvar

$$H_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{g}_J = (\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3})^T$$

Zvolíme si počáteční aproximaci $\vec{x}^{(0)} = (1,1,1)$ a začneme zjišťovat, jaký je výsledek zadané soustavy.

$$\vec{x}^{(1)} = (4; -3; 2)$$

$$\vec{x}^{(2)} = (1{,}333; -2{,}6666; 1{,}6666)$$

$$\vec{x}^{(3)} = (1{,}5555; -2{,}4444; 1{,}4444)$$

$$\vec{x}^{(4)} = (1{,}7037; -2{,}2963; 1{,}2963)$$

$$\vec{x}^{(5)} = (1{,}8024; -2{,}1975; 1{,}1975)$$

$$\vec{x}^{(6)} = (1{,}8683; -2{,}1316; 1{,}1316)$$

$$\vec{x}^{(7)} = (1{,}9122; -2{,}0877; 1{,}0877)$$

$$\vec{x}^{(8)} = (1{,}9414; -2{,}0585; 1{,}0585)$$

už nyní můžeme pozorovat, že se hodnoty mění v rámci setin. Trochu přeskočíme a ukážeme si, jak vypadá $\vec{x}^{(19)}$.

$$\vec{x}^{(19)} = (1{,}9993; -2{,}0006; 1{,}0006)$$

Další hodnoty se mění už v rámci deseti tisícin, proto si můžeme dovolit hodnoty zaokrouhlit. Tím dostaneme výsledný vektor

$$\vec{x} = (2; -2; 1).$$

Kdybychom algoritmus nezastavili dříve, tak $\vec{x}^{(32)}$ by odpovídalo přesně našemu výsledku, ke kterému jsme došli zaokrouhlením. To vidíme na obrázku č. 21 v příloze.

2 DALŠÍ MOŽNOSTI ŘEŠENÍ

Je-li matice A regulární, pak existuje její inverzní matice A^{-1}. Inverzní maticí ke čtvercové matici A nazýváme matici stejného typu, pro kterou platí, že po vynásobení s maticí A vznikne jednotková matice E.

Transponovaná matice A^T k matici A, je taková matice, kde platí $a_{ij} = a_{ji}^T$ .Prvek na pozici i-tého řádku a j-tého sloupečku v transponované matici bude mít pozici j-tého řádku a i-tého sloupečku.

Pro každou regulární matici A existuje právě jedna její matice inverzní. Pro nalezení inverzní matice, lze použít dva způsoby – pomocí adjungované matice nebo přes eliminační postup.

- Pomocí adjungované matice

Pro libovolnou čtvercovou matici alespoň 2.řádu A=(a_{ij}) označme dopl A matici tvořenou algebraickými doplňky jednotlivých prvků a_{ij} v matici A.

$$\text{dopl A} = (A_{ij})$$

Maticí adjungovanou k matici A (značíme $adj\ A$) nazýváme transponovanou maticí doplňků. Je-li A regulární matice, pak

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (adj\ A).$$

- Pomocí eliminačního postupu

K zadané matici A hledáme matici X, aby platilo $A \cdot X = E$. Matice E je jednotková matice, která má na hlavní diagonále jedničky a mimo hlavní diagonálu má samé nuly. Pro každou regulární matici A vedou eliminační úpravy (A|E) k získání matice inverzní A^{-1}. Z toho vyplývá, že součin matice a její inverzní matice je roven jednotkové matici

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

(Klufová, 2011).

Na následující matici si ukážeme obě metody pro získání inverzní matice.

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Začneme pomocí adjungované matice. Potřebujeme si určit determinant matice A, který vypočítáme z matice, a dále potřebujeme transponovanou matici algebraických doplňků. Po vynásobení získáváme inverzní matici k matici A.

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{de\,t(A)}} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Nyní použijeme metodu eliminačního postupu na stejnou matici. Postupujeme tak, že si za zadanou matici připíšeme matici jednotkovou. Začneme úpravou první matice na horní trojúhelníkovou matici a pokračujeme úpravami, tak aby první matice měla tvar jednotkové matice. Získáme tím inverzní matici.

$$(\mathrm{A}|\mathrm{E}) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

Uvažujme soustavu lineárních rovnic $Ax^T = b^T$. Pro získání hledaného řešení, lze celou rovnici vynásobit zleva a získáme $x^T = A^{-1} \cdot b^T$. Pokud nechceme ověřovat regulárnost matice A před výpočtem řešení, lze se pokusit nalézt inverzní matici. Pokud během výpočtu bude některý řádek nulový, je matice singulární a neexistuje k ní matice inverzní.

Zkoušíme najít řešení soustavy rovnic na následujícím příkladě.

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 8 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 13 \end{gathered}$$

Soustavu si přepíšeme do matice a určíme inverzní matici A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dosadíme do rovnice pro výpočet vektoru řešení s inverzní maticí a vektorem pravých hodnot. Vynásobíme a získáme řešení soustavy.

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5} \cdot (-1)\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot 8\right) + (0 \cdot 13) \\ \left(\frac{1}{10} \cdot (-1)\right) + \left(\frac{7}{10} \cdot 8\right) + \left(-\frac{1}{5} \cdot 13\right) \\ \left(\frac{3}{10} \cdot (-1)\right) + \left(-\frac{9}{10} \cdot 8\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 13\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavy rovnic je vektor $\vec{x} = (3; -1; -1)$.

Postup vyzkoušíme na dalším příkladě soustavy rovnic, kde se po nás chce vypočítat řešení.

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \end{gathered}$$

Přepíšeme rovnice do matice A a určíme k ní inverzní matici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{11} & \frac{25}{33} & -\frac{1}{33} & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{11} & \frac{8}{33} & \frac{1}{33} & \frac{1}{3} \\ -\frac{6}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{4}{11} & 0 \\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{7}{11} & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítáme řešení soustavy rovnic pomocí vynásobení inverzní matice a vektoru pravých stran.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{11} & \frac{25}{33} & -\frac{1}{33} & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{11} & \frac{8}{33} & \frac{1}{33} & \frac{1}{3} \\ -\frac{6}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{4}{11} & 0 \\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{7}{11} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Řešení soustavy rovnic je $\vec{x} = (4; 2; 1; -1)$.

ZÁVĚR

V mé bakalářské práci jsem se věnovala metodám řešení soustav rovnic. Sepsala jsem metody podle rozdělení, a to na přímé a nepřímé. Mezi přímé metody patří sčítací, dosazovací, srovnávací a grafická metoda, které se učí žáci již na základní škole. Dále mezi přímé metody patří Gaussova eliminační metoda, Cramerovo pravidlo a Frobeniova věta, se kterými se seznámí žáci na středních školách a gymnáziích. Do stejné skupiny patří i metoda LU-rozkladu, se kterou se žáci setkávají jen v matematicky zaměřených středních školách.

Mezi nepřímé metody patří Jacobiho metoda a Gauss – Seidelova metoda, které pracují s aproximací a postupným upřesňováním řešení. S těmito metodami se žáci základních ani středních škol nesetkají. Jde o metody, které při počítání na papír jsou velmi zdlouhavé. Naopak při využití programů, jako třeba Excel, je zjištění řešení velmi rychlé.

Mezi metody řešení soustav lineárních rovnic je potřeba zmínit i metodu Monte Carlo, která využívá teorii pravděpodobnosti a matematické statistiky. Tuto metodu ve své práci nemám. Je to z toho důvodu, že metoda je velice komplexní a nejvhodnější by bylo věnovat jí celou práci, což bohužel nebylo možné. Další důvod je, že s metodou Monte Carlo se žáci základních ani středních škol nesetkají.

Dále v práci zmiňuji zkušenosti žáků základní školy s metodami řešení soustav. Nejpoužívanějšími metodami jsou sčítací a dosazovací metoda. Během mé praxe se mi nejvíce osvědčilo, že každý žák využívá metodu, ve které se cítí jistě a rozumí jí.

RESUMÉ

Práce se věnuje jednotlivým metodám řešení soustav lineárních rovnic. Vysvětluje rozdělení metod, každá metoda je popsána a ukázána na jednodušších i složitějších příkladech. Na základních školách se vyučuje sčítací, dosazovací, srovnávací, grafická metoda. S dalšími metodami se studenti setkávají na střední škole, kde se naučí Gaussovo eliminační metodu, Frobeniovu větu a Cramerovo pravidlo. S nepřímými metodami se žáci na základní a střední škole nesetkají. V práci jsou i ukázky z testu, který psali žáci základní školy. Z výsledků je patrné, že žáci využívají převážně metodu sčítací a dosazovací. Metodu grafickou využívají jen, když to učitel vyžaduje.

Resume

The work is devoted to individual methods of solving systems of linear equations. It explains the division of methods, each method is described and shown on simpler and more complex examples. In elementary schools, addition, substitution, comparison, and graphic methods are taught. Students encounter other methods in high school, where they learn the Gaussian elimination method, Frobenian theorem, and Cramer's rule. Students do not encounter indirect methods in primary and secondary school. The work also includes samples from a test written by elementary school students. The results show that the students mainly use the addition and substitution method. They use the graphic method only when the teacher requires it.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

Baštinec J., Novák M. *Moderní numerické metody.*Brno: Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT. [Online] http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/materialy/skripta/mmnm.pdf.

Bečvář J., Fuchs E. 1993. *Historie matematiky*. I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 19.8.-22.8.1993, Sborník. (Czech). Brno: Jednota českých matematiků a fyziků.

Čermák L., Hlavička R. 2016. *Numerické metody.* Brno : Akademické nakladatelství CERM s.r.o., 2016. ISBN 978-80-214-5437-8.

Halas, Z. 2016. Historie matematiky I. Praha. Dějiny 1 přehled Řecko

Klufová Renata. 2011. Inverzní matice. [Online] 2011. http://www2.ef.jcu.cz/~klufova/vyukaMAT2011_12/ZS/pred5_ZS.pdf.

Kučera R., Morávková Z.. 2016. *Numerická matematika.* Ostrava : VŠB-TU Ostrava, 2016. 978-80-248-3893-9.

Míka S., Brandner M. 2000. *Numerické metody 1.* Plzeň: ZČU, 2000.

RNDr. Míková M., Ing. Roman Kužel Ph.D. *Soustavy lineárních rovnic - výukový materiál. FAV ZČU.* [Online] http://dimatia.fav.zcu.cz/2005/vyuka/zm1/soustavy.pdf.

Mošová V. 2003. *Numerické metody.* Olomouc: Univerzita Palackého. Skripta/Univerzita Palackého. Přírodovědecká fakulta, 2003. ISBN 80-244-0620-9.

Motl L., Zahradník M. 2002. *Pěstujeme lineární algebru.* Praha: Univerzita Karlova v Praze : nakladatelství Karolinum, 2002. ISBN 8024604213.

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc. Fakulta stavební. *Rudolf Schwarz.* [Online] https://rschwarz.wz.cz/fast/Mat1/LU-rozklad.pdf.

Tůma L., Barto J. 2022. *Numerické metody***.** Praha: Univerzita Karlova, 2022

RVP MŠMT. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. *MŠMT.* [Online] https://www.msmt.cz/file/56005/.

ŠVP 4. ZŠ, Plzeň. *4.ZŠ Plzeň.* Plzeň. Dokument je dostupný na vyžádání v kanceláři 4.ZŠ Plzeň.

ŠVP Biskupské, Biskupské gymnázium. Biskupské gymnázium J. N. Neumanna České Budějovice. [Online] https://bigycb.cz/bigy/wp-content/uploads/SVP_4L_22.pdf.

ŠVP Jesenice, ZŠ Jesenice. *Základní škola a mateřská škola Jesenice.* [Online] https://zsjesenice.cz/129-svp.

ŠVP Mikulášské, Mikulášské gymnázium. *Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23.* [Online] https://www.mikulasske.cz/wp-content/uploads/2021/10/SVP2122v_mpr.pdf.

ŠVP Ondřejov, ZŠ Ondřejov. *Základní škola bratří Fičů Ondřejov.* [Online] https://www.zsondrejov.cz/dokumenty?action=detail&id=23.

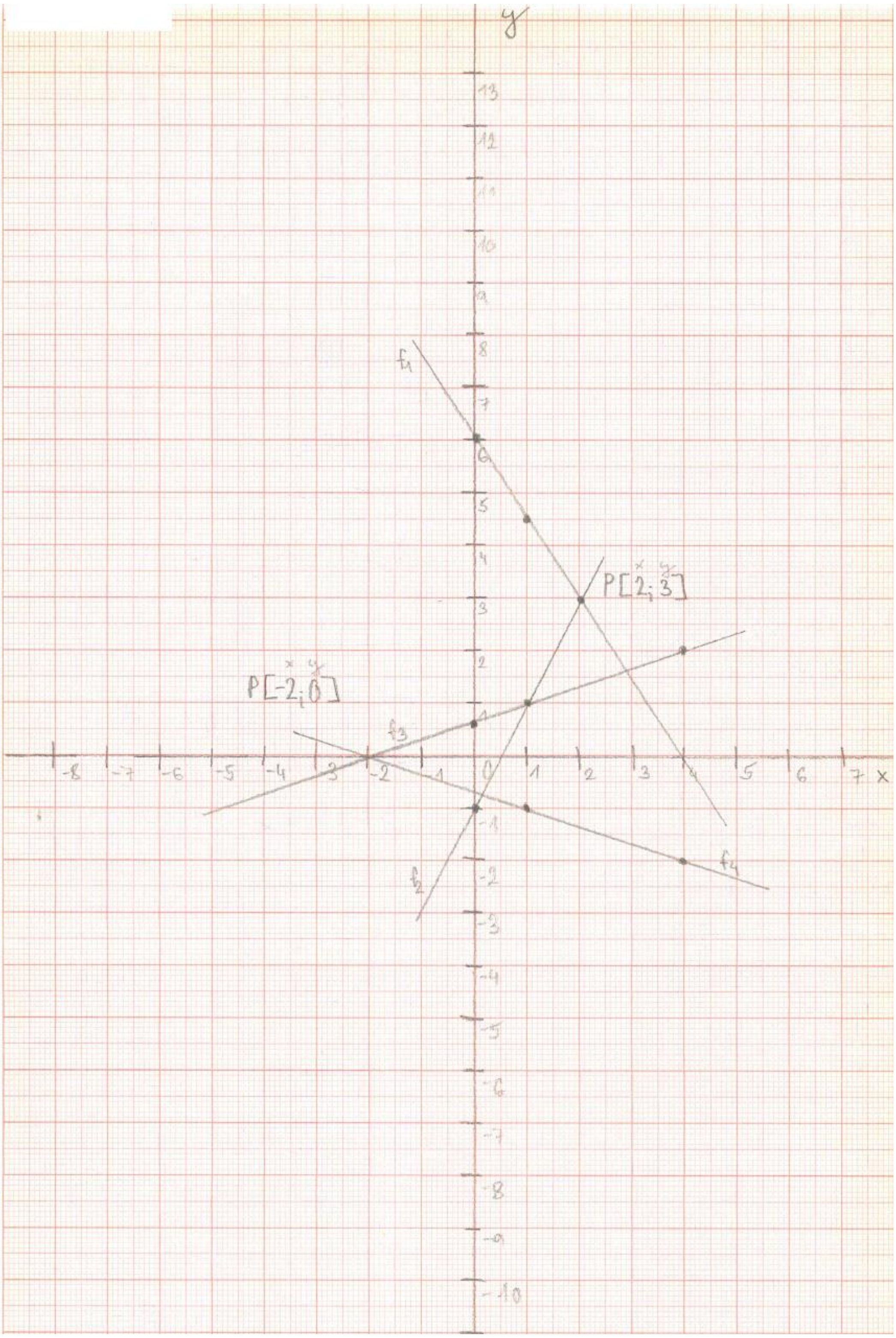
ŠVP SOŠS, SOŠS Karlovy Vary. *SOŠS Karlovy Vary.* Karlovy Vary. Dokument je dostupný na vyžádání v kanceláři SOŠS Karlovy Vary.

ŠVP SPŠE, SPŠE Plzeň. SPŠE. *Střední odborná škola elektrotechnická.* [Online] https://www.spse.cz/download/skola/Skolni%20vzdelavaci%20plany/SVP_26-41-M01_Elektrotechnika_2018.pdf.

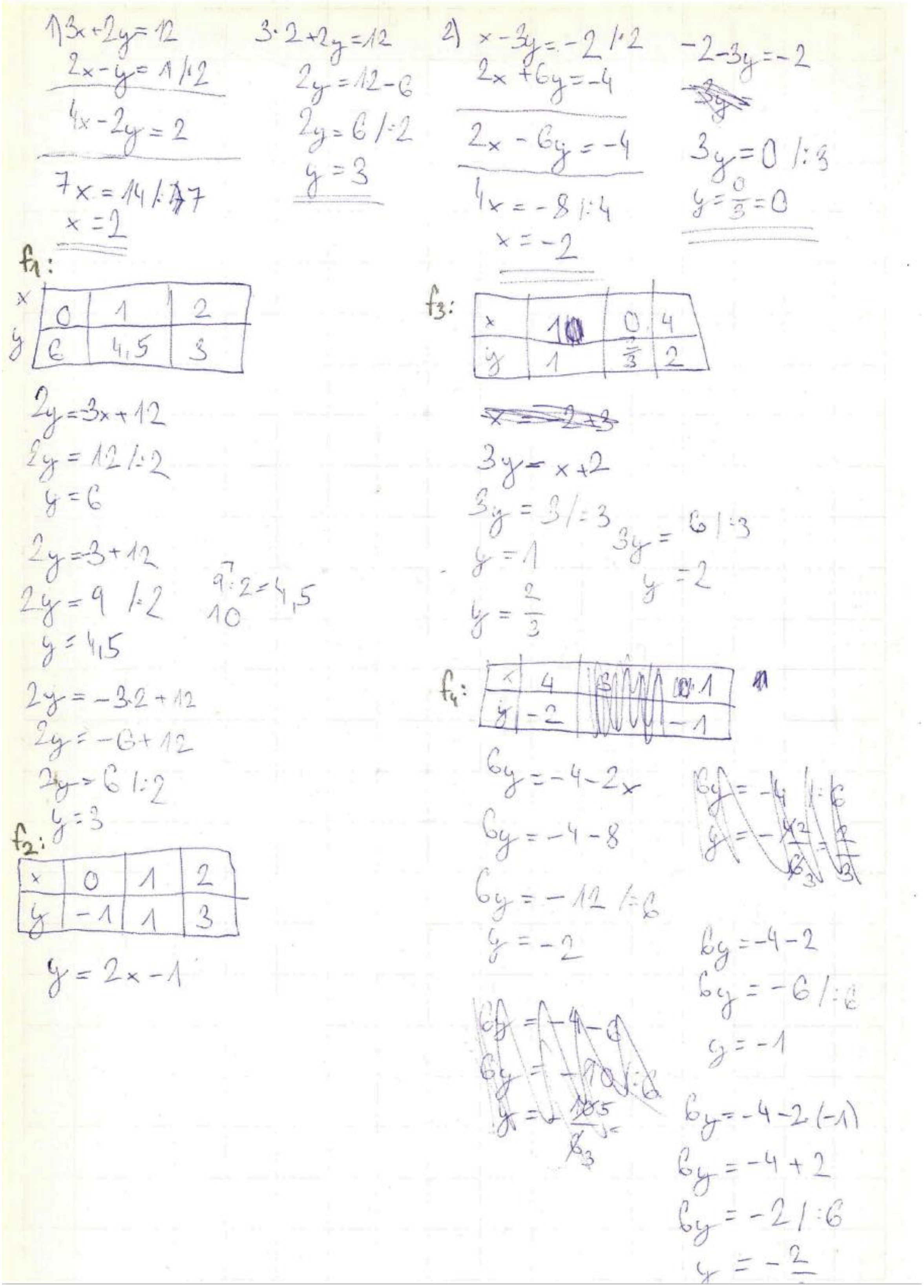
ŠVP Uničov, Gymnázium Uničov. Gymnázium Uničov. *Gymnázium Uničov.* [Online] https://www.gymun.cz/images/dokumenty_ke_stazeni/svpvg/Matematika.pdf.

SEZNAM OBRÁZKŮ

PŘÍLOHY



Obrázek č. 4 Grafické znázornění prvního žáka



1) $3x+2y=12$
$2x-y=1 \;/\cdot 2$
$4x-2y=2$
$7x=14 \;/:7$
$x=2$

$3\cdot 2+2y=12$
$2y=12-6$
$2y=6 \;/:2$
$y=3$

2) $x-3y=-2 \;/\cdot 2$
$2x+6y=-4$
$2x-6y=-4$
$4x=-8 \;/:4$
$x=-2$

$-2-3y=-2$
$3y=0 \;/:3$
$y=\frac{0}{3}=0$

f_1:

x	0	1	2
y	6	4,5	3

$2y=-3x+12$
$2y=12 \;/:2$
$y=6$
$2y=-3+12$
$2y=9 \;/:2$ $\quad 9:2=4,5$
$y=4,5$
$2y=-3\cdot 2+12$
$2y=-6+12$
$2y=6 \;/:2$
$y=3$

f_2:

x	0	1	2
y	−1	1	3

$y=2x-1$

f_3:

x	1	0	4
y	1	$\frac{2}{3}$	2

$3y=x+2$
$3y=3 \;/:3$ $\quad 3y=6 \;/:3$
$y=1$ $\quad y=2$
$y=\frac{2}{3}$

f_4:

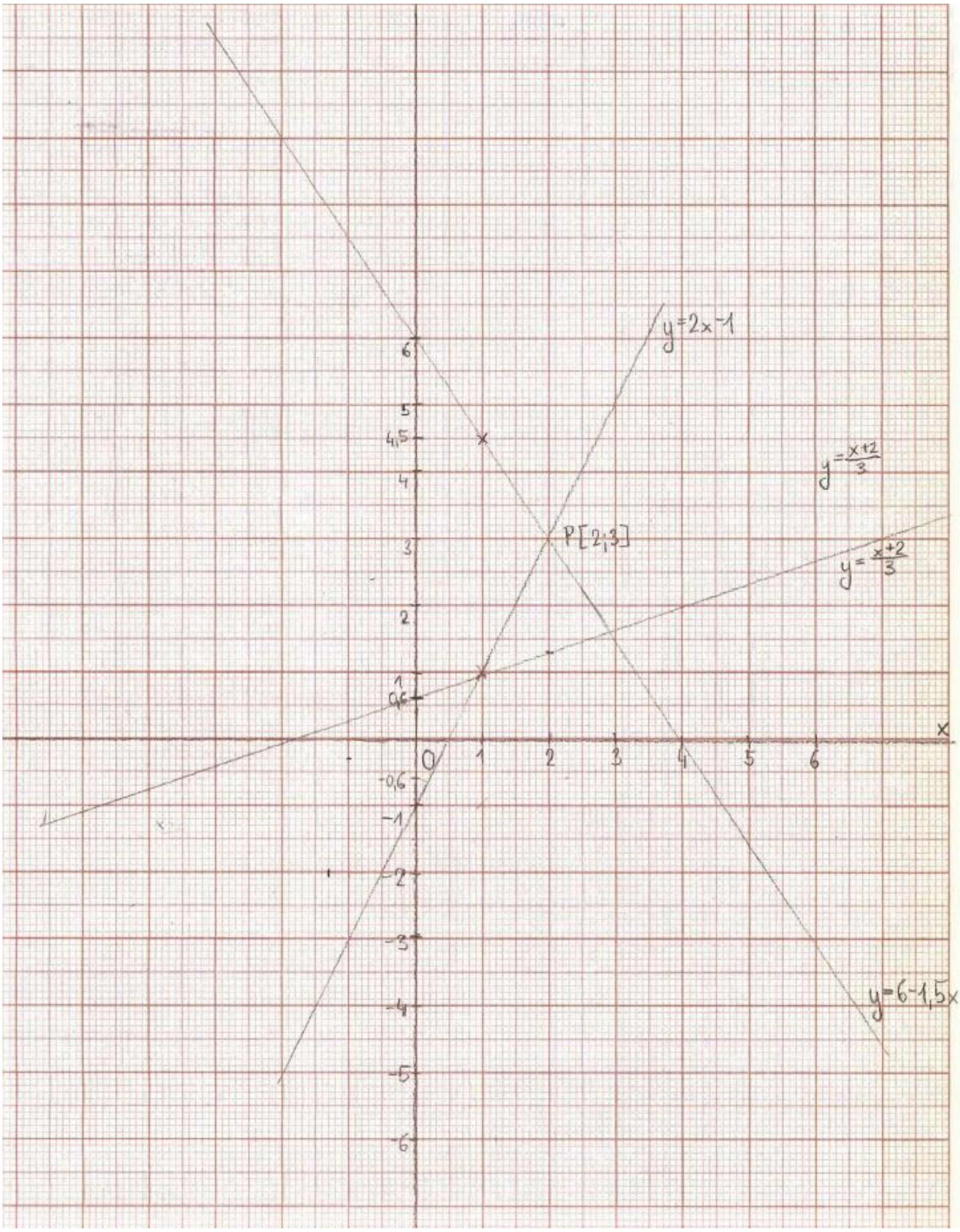
x	4		1
y	−2		−1

$6y=-4-2x$
$6y=-4-8$
$6y=-12 \;/:6$
$y=-2$

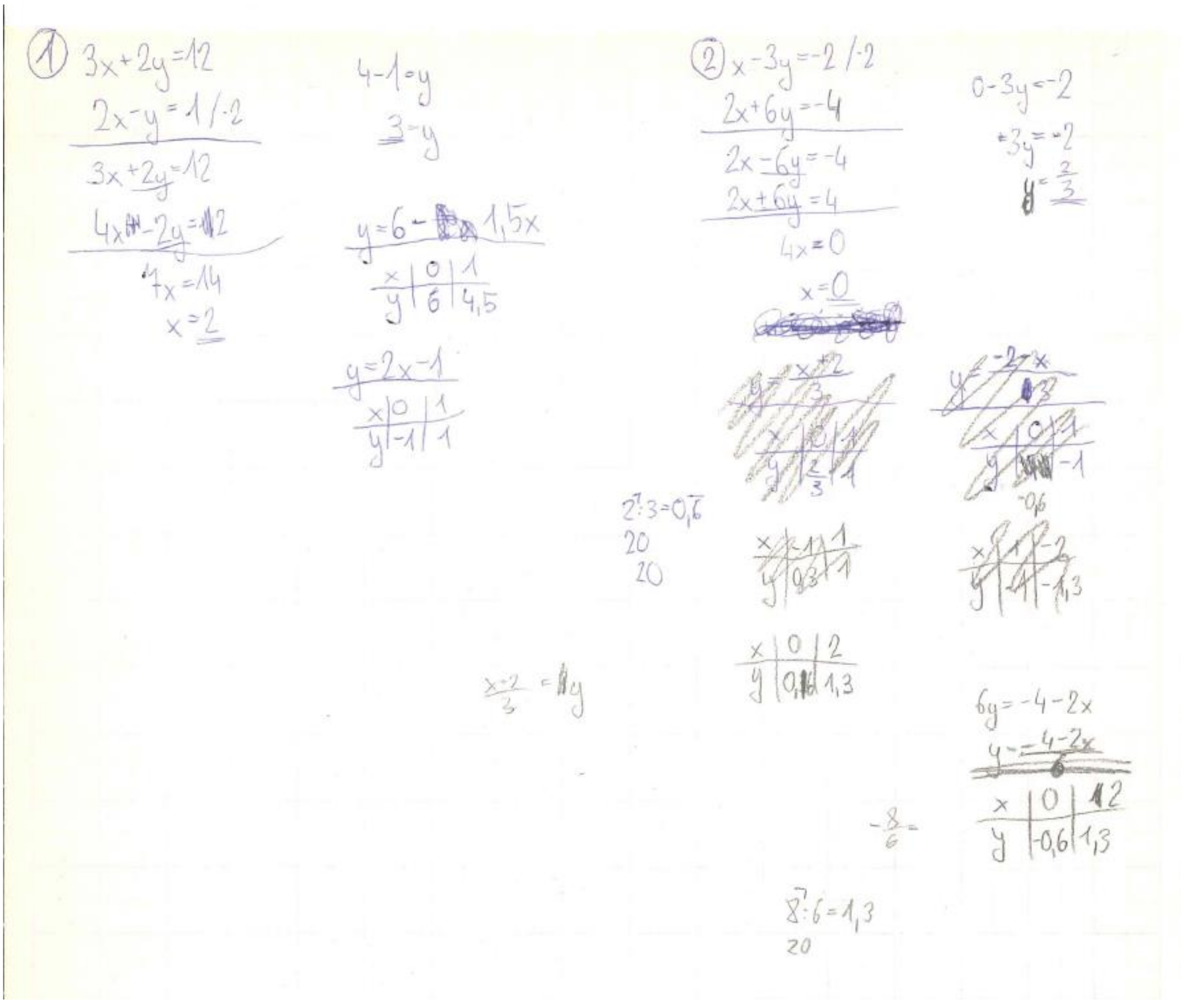
$6y=-4-2$
$6y=-6 \;/:6$
$y=-1$

$6y=-4-2\cdot(-1)$
$6y=-4+2$
$6y=-2 \;/:6$
$y=-\frac{2}{\ }$

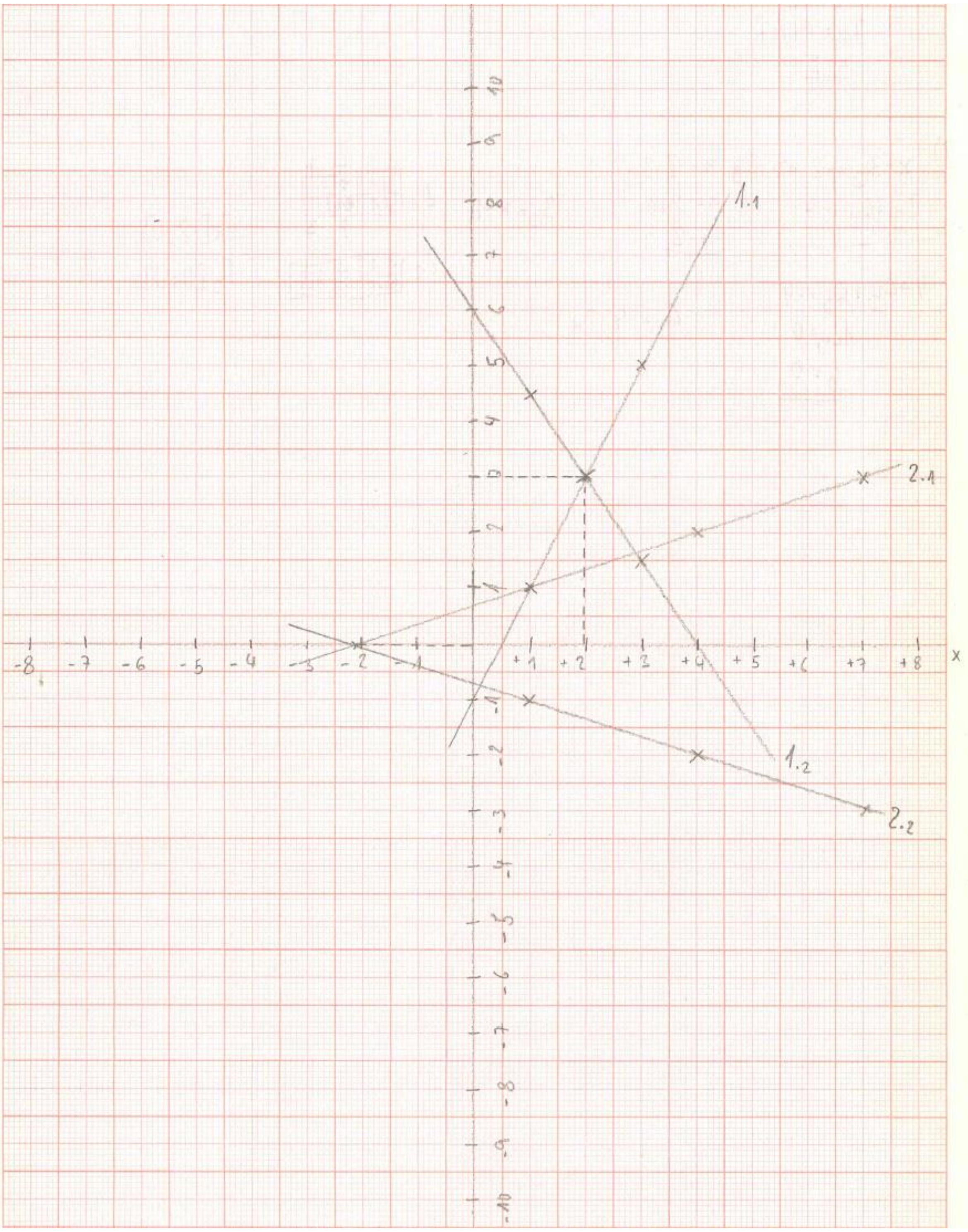
Obrázek č. 5 Výpočty prvního žáka



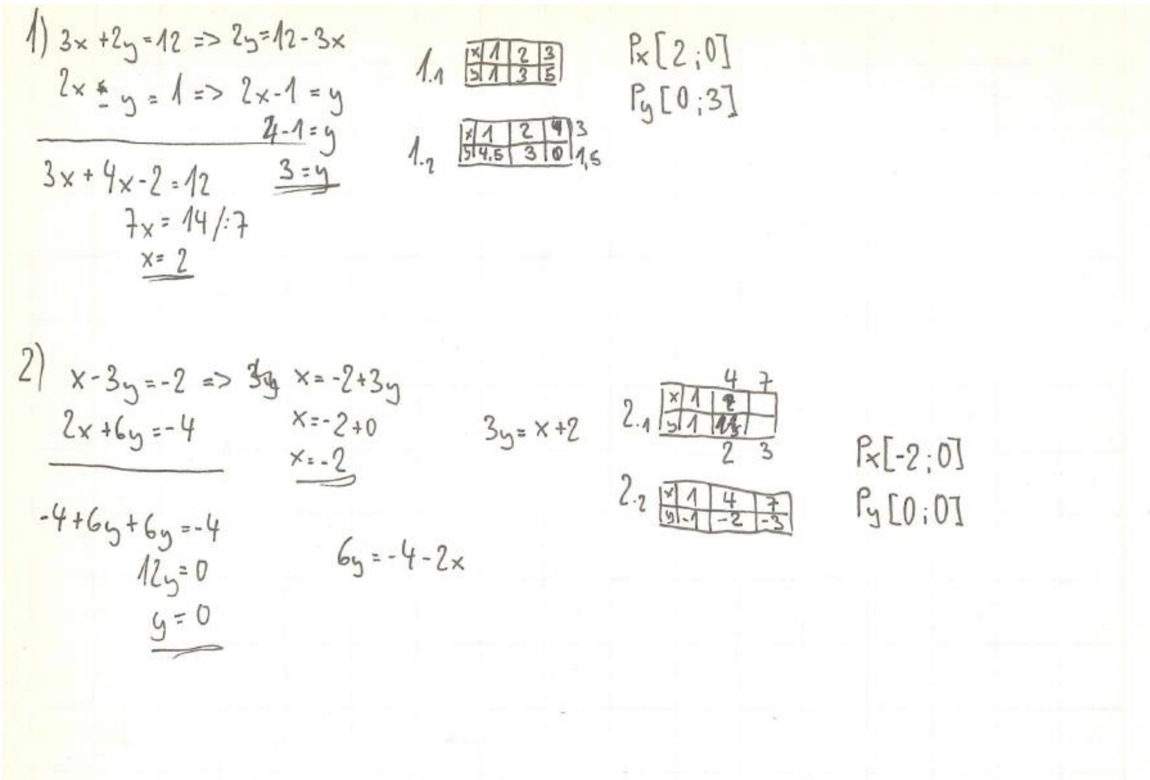
Obrázek č. 6 Grafické znázornění druhý žák



Obrázek č. 7 Výpočty druhého žáka



Obrázek č. 8 Grafické znázornění třetího žáka


1) $3x + 2y = 12 \Rightarrow 2y = 12 - 3x$

$2x - y = 1 \Rightarrow 2x - 1 = y$

$4 - 1 = y$

$\underline{3 = y}$

$3x + 4x - 2 = 12$

$7x = 14 /:7$

$\underline{x = 2}$

1.1

x	1	2	3
y	1	3	5

1.2

x	1	2	4	3
y	4,5	3	0	1,5

$P_x[2;0]$

$P_y[0;3]$

2) $x - 3y = -2 \Rightarrow x = -2 + 3y$

$2x + 6y = -4$

$x = -2 + 0$

$\underline{x = -2}$

$3y = x + 2$

$-4 + 6y + 6y = -4$

$12y = 0$

$\underline{y = 0}$

$6y = -4 - 2x$

2.1

x	1	4	7
y	1	2	3

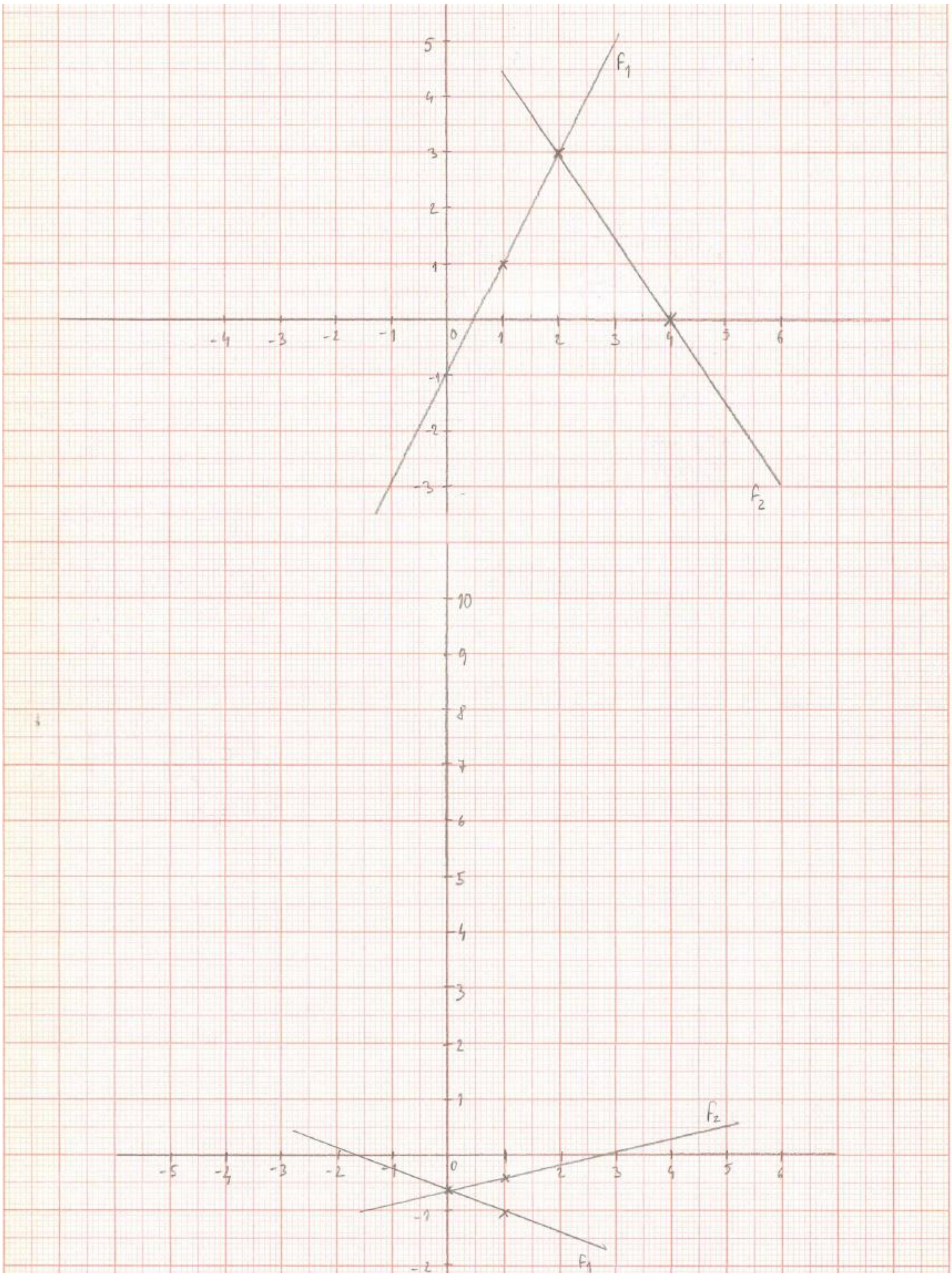
2.2

x	1	4	7
y	-1	-2	-3

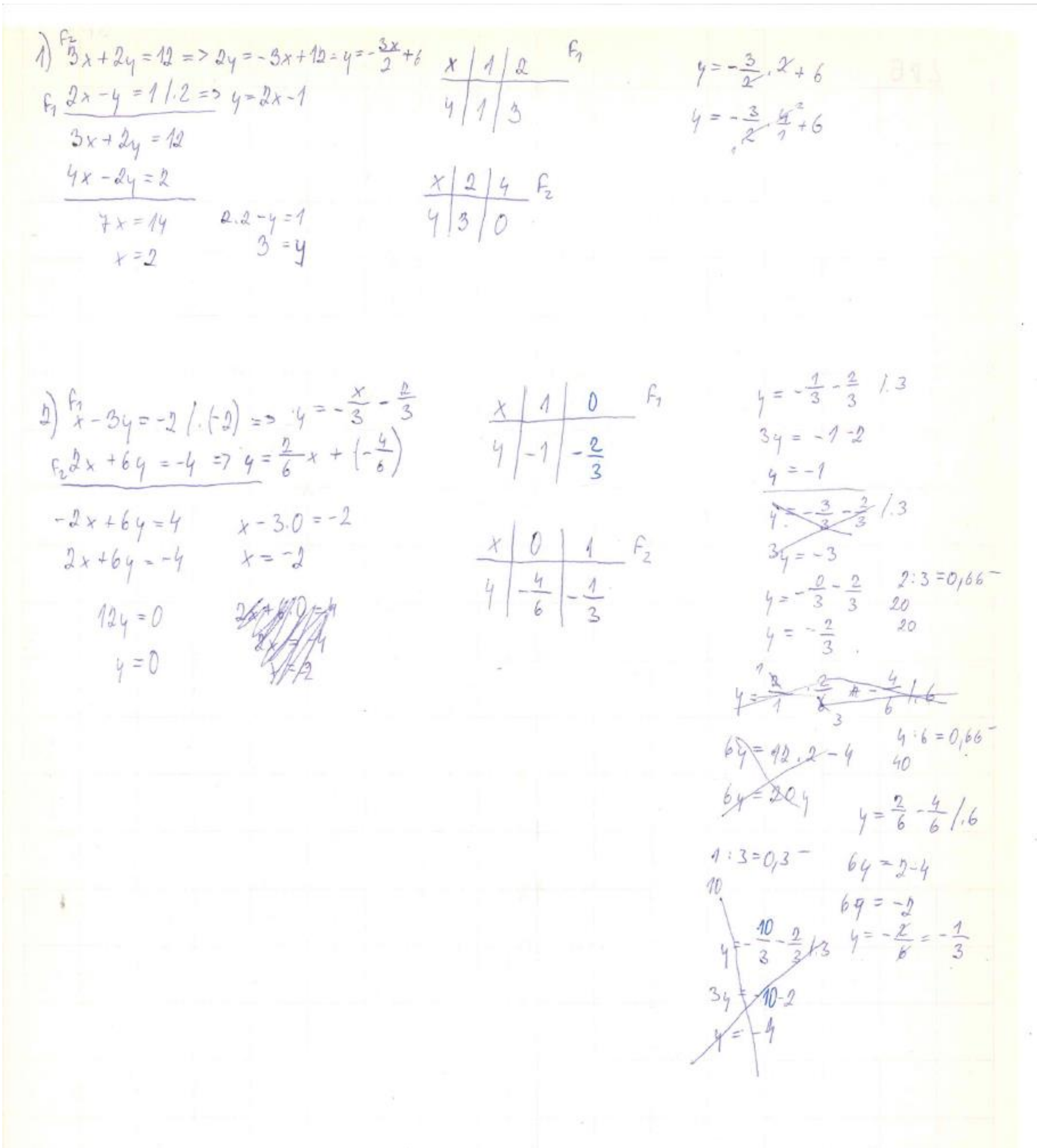
$P_x[-2;0]$

$P_y[0;0]$

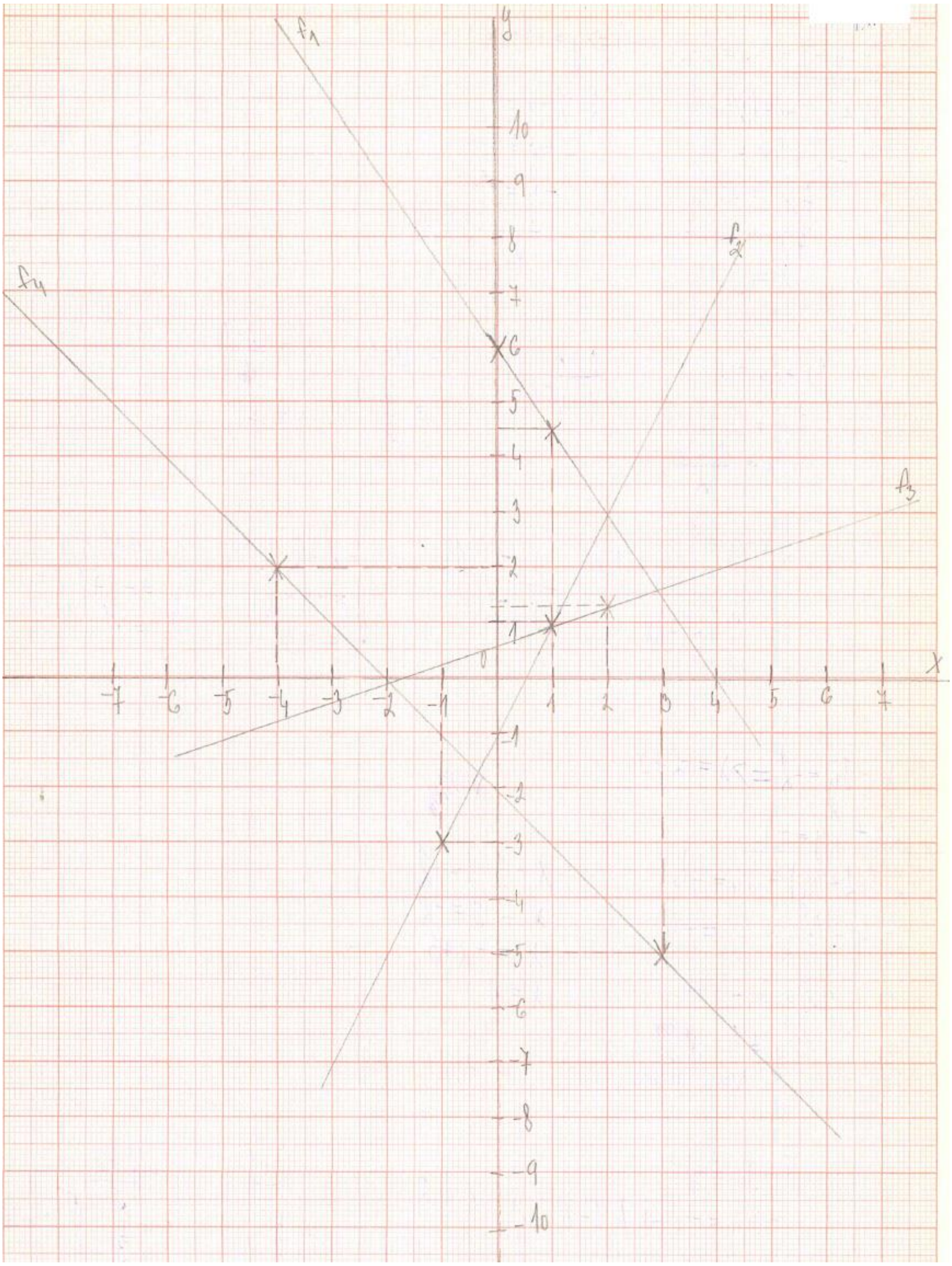
Obrázek č. 9 Výpočty třetího žáka



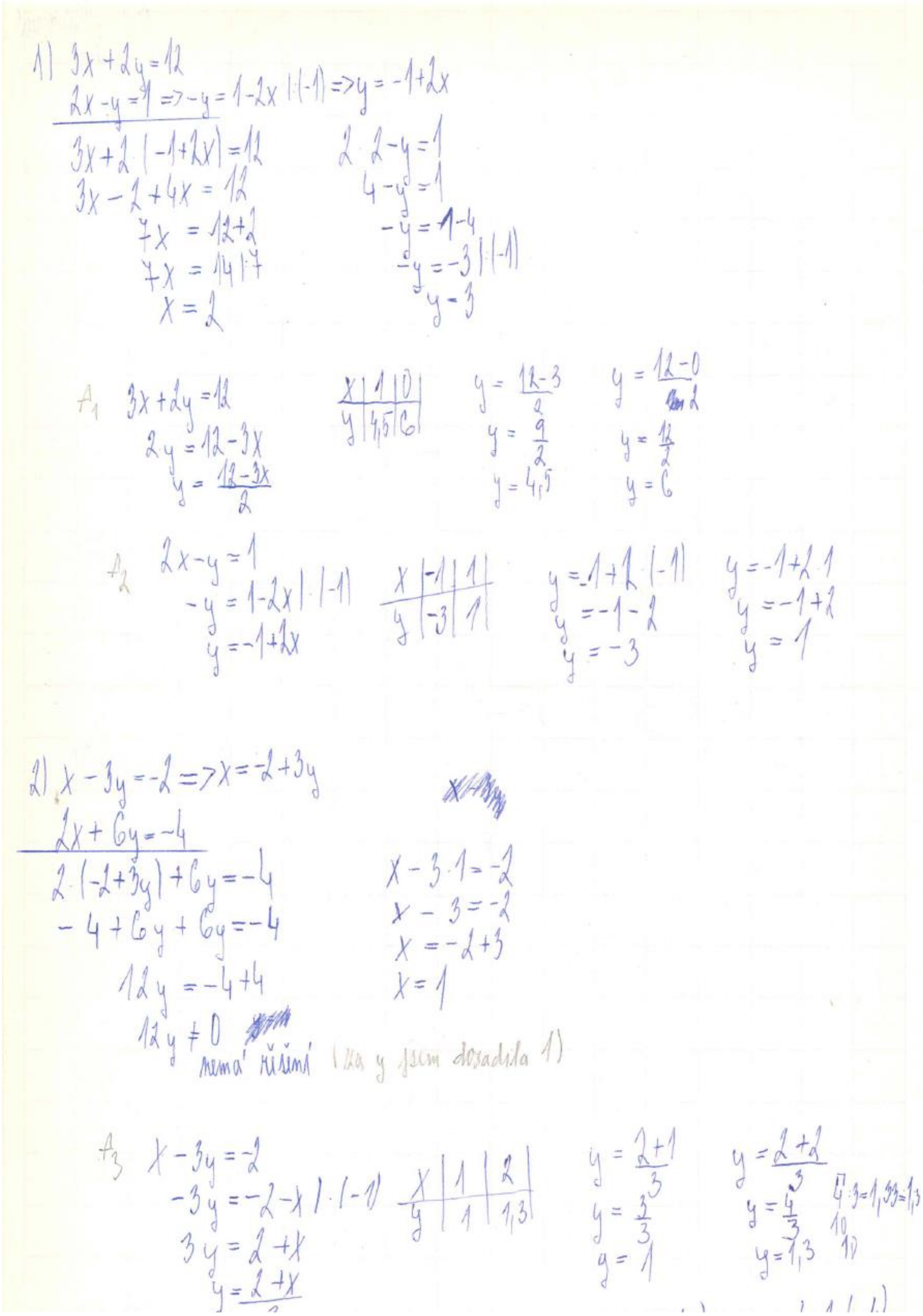
Obrázek č. 10 Grafické znázornění čtvrtého žáka



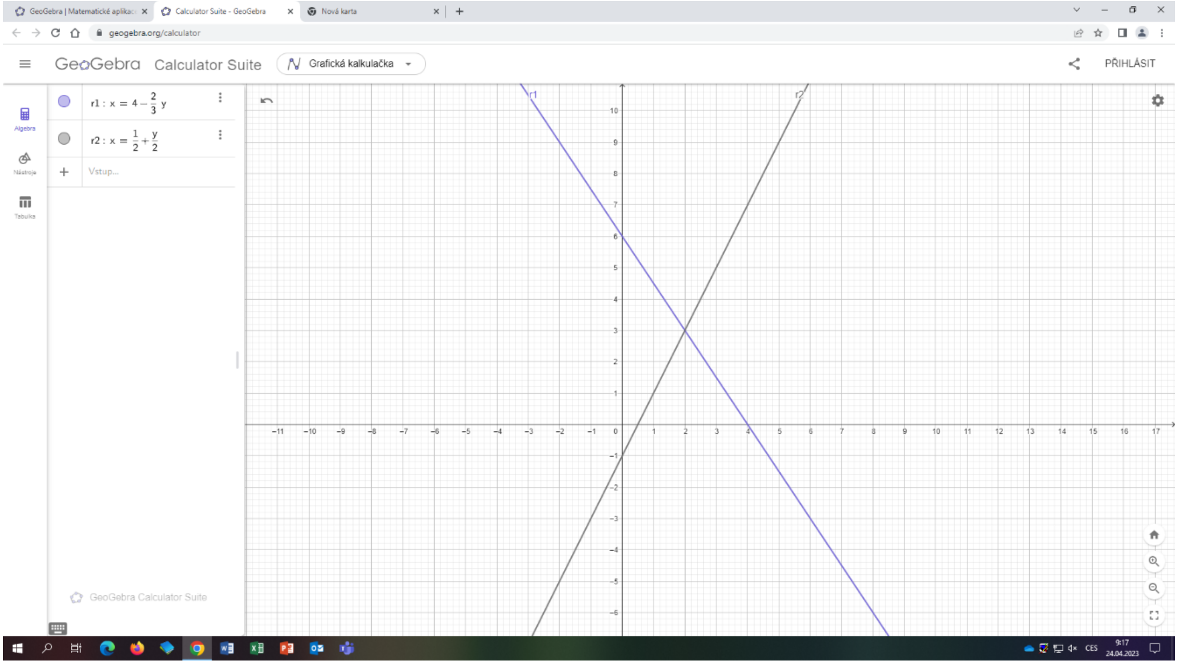
Obrázek č. 11 Výpočty čtvrtého žáka



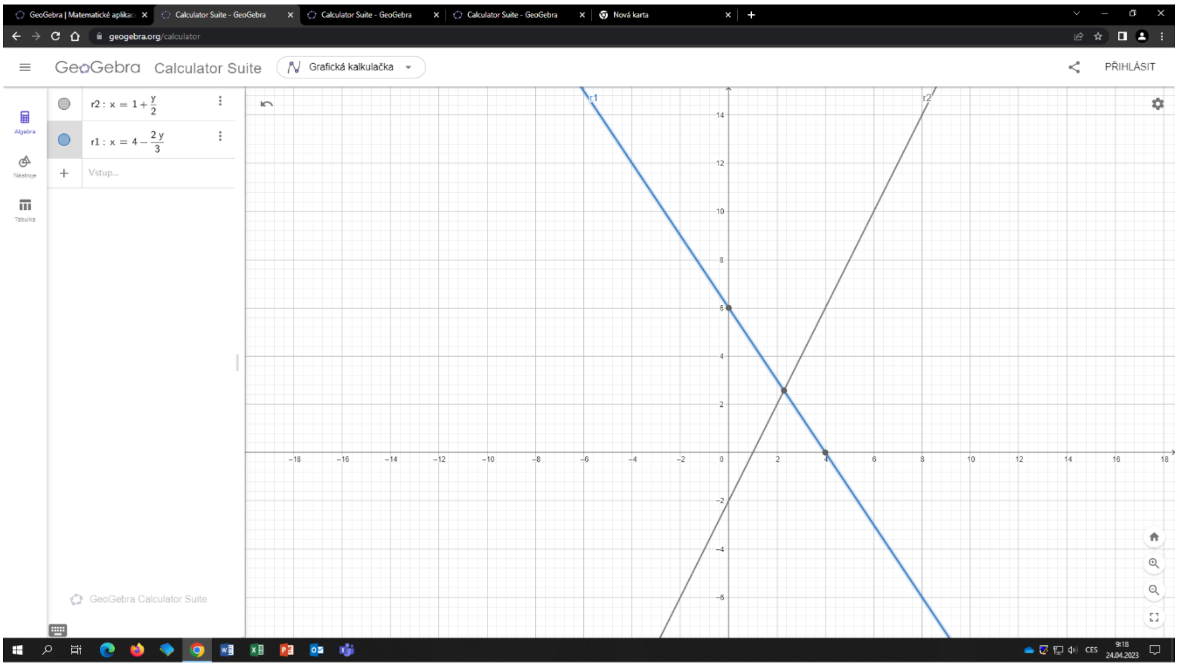
Obrázek č. 12 Grafické znázornění pátého žáka



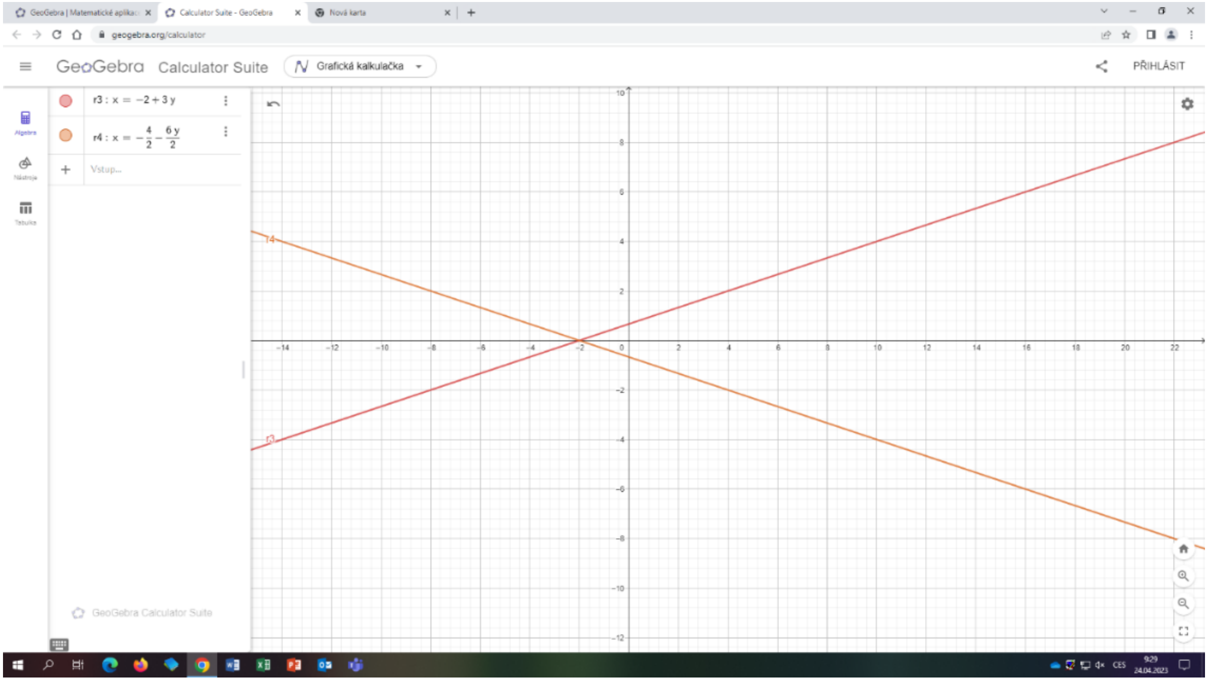
Obrázek č. 13 Výpočty pátého žáka



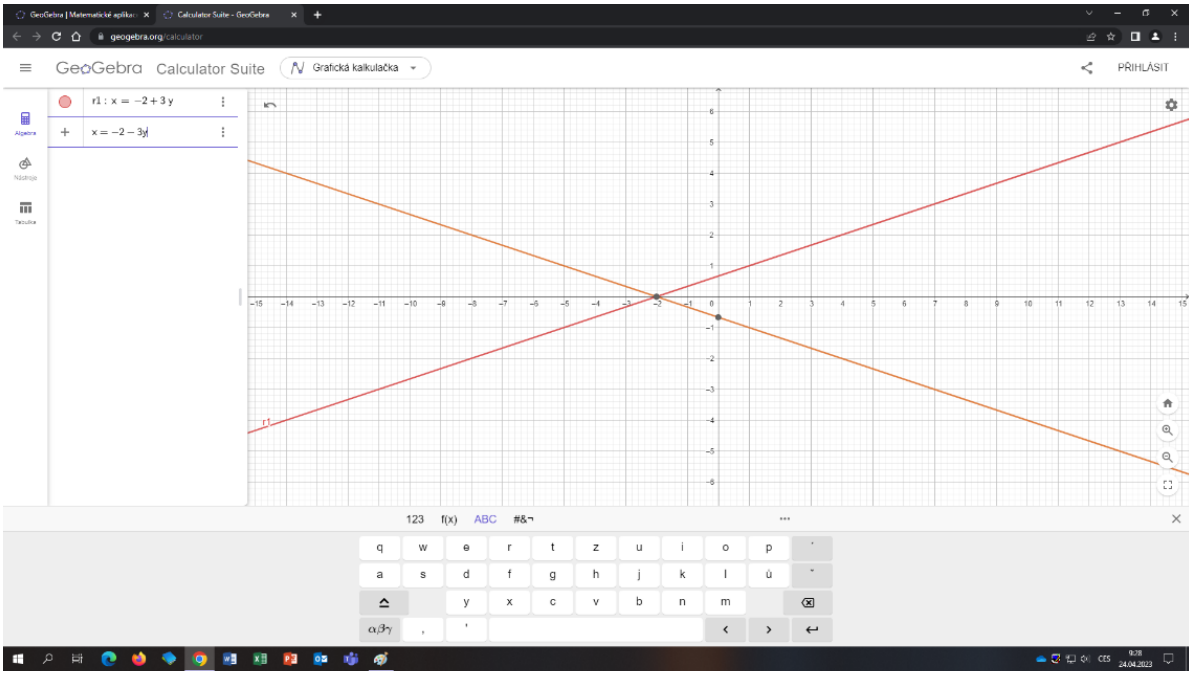
Obrázek č. 14 První soustava prvního žáka



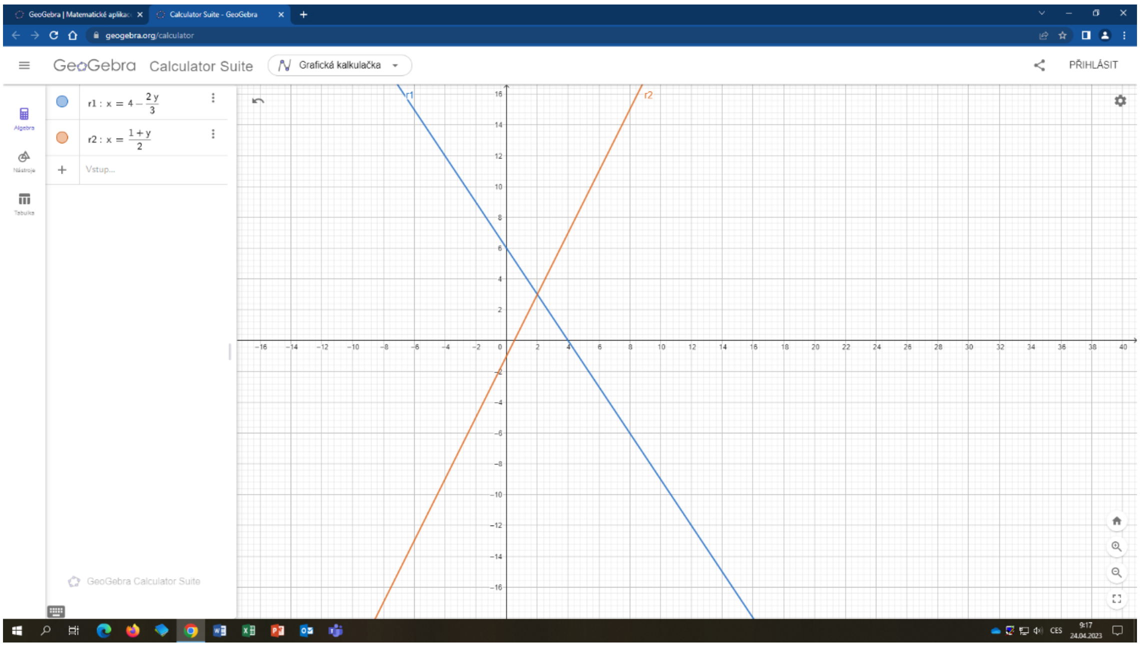
Obrázek č. 15 První soustava druhého žáka



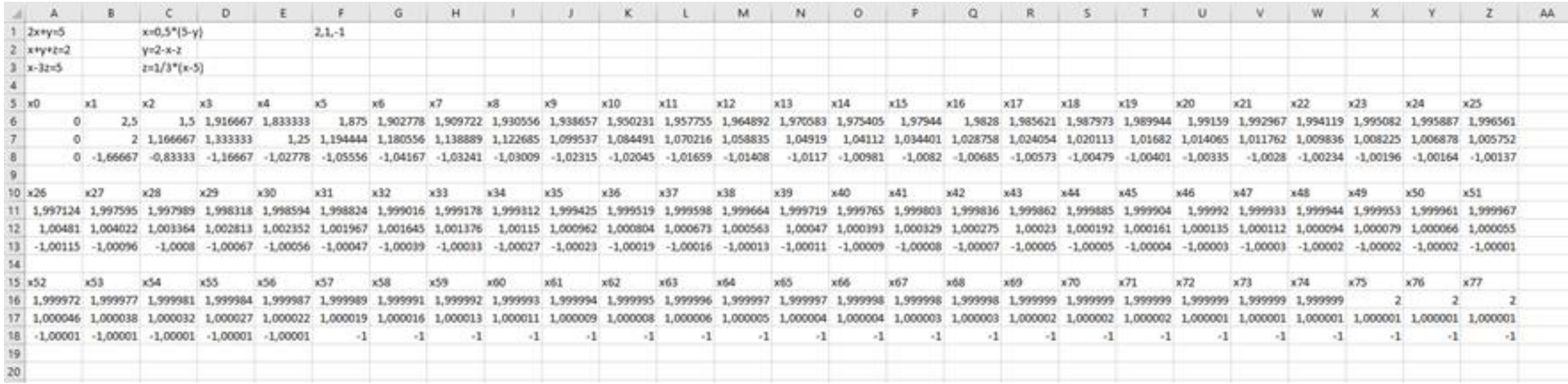
Obrázek č. 16 Druhá soustava prvního žáka



Obrázek č. 17 Druhá soustava druhého žáka



Obrázek č. 18 Druhá soustava třetího žáka



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2x+y=5		x=0,5*(5-y)			2,1,-1								
2	x+y+z=2		y=2-x-z											
3	x-3z=5		z=1/3*(x-5)											
4														
5	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13
6	0	2,5	1,5	1,916667	1,833333	1,875	1,902778	1,909722	1,930556	1,938657	1,950231	1,957755	1,964892	1,970583
7	0	2	1,166667	1,333333	1,25	1,194444	1,180556	1,138889	1,122685	1,099537	1,084491	1,070216	1,058835	1,04919
8	0	-1,66667	-0,83333	-1,16667	-1,02778	-1,05556	-1,04167	-1,03241	-1,03009	-1,02315	-1,02045	-1,01659	-1,01408	-1,0117
9														
10	x26	x27	x28	x29	x30	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39
11	1,997124	1,997595	1,997989	1,998318	1,998594	1,998824	1,999016	1,999178	1,999312	1,999425	1,999519	1,999598	1,999664	1,999719
12	1,00481	1,004022	1,003364	1,002813	1,002352	1,001967	1,001645	1,001376	1,00115	1,000962	1,000804	1,000673	1,000563	1,00047
13	-1,00115	-1,00096	-1,0008	-1,00067	-1,00056	-1,00047	-1,00039	-1,00033	-1,00027	-1,00023	-1,00019	-1,00016	-1,00013	-1,00011
14														
15	x52	x53	x54	x55	x56	x57	x58	x59	x60	x61	x62	x63	x64	x65
16	1,999972	1,999977	1,999981	1,999984	1,999987	1,999989	1,999991	1,999992	1,999993	1,999994	1,999995	1,999996	1,999997	1,999997
17	1,000046	1,000038	1,000032	1,000027	1,000022	1,000019	1,000016	1,000013	1,000011	1,000009	1,000008	1,000006	1,000005	1,000004
18	-1,00001	-1,00001	-1,00001	-1,00001	-1,00001	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
19														
20														

	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
1													
2													
3													
4													
5	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20	x21	x22	x23	x24	x25	
6	1,975405	1,97944	1,9828	1,985621	1,987973	1,989944	1,99159	1,992967	1,994119	1,995082	1,995887	1,996561	
7	1,04112	1,034401	1,028758	1,024054	1,020113	1,01682	1,014065	1,011762	1,009836	1,008225	1,006878	1,005752	
8	-1,00981	-1,0082	-1,00685	-1,00573	-1,00479	-1,00401	-1,00335	-1,0028	-1,00234	-1,00196	-1,00164	-1,00137	
9													
10	x40	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49	x50	x51	
11	1,999765	1,999803	1,999836	1,999862	1,999885	1,999904	1,99992	1,999933	1,999944	1,999953	1,999961	1,999967	
12	1,000393	1,000329	1,000275	1,00023	1,000192	1,000161	1,000135	1,000112	1,000094	1,000079	1,000066	1,000055	
13	-1,00009	-1,00008	-1,00007	-1,00005	-1,00005	-1,00004	-1,00003	-1,00003	-1,00002	-1,00002	-1,00002	-1,00001	
14													
15	x66	x67	x68	x69	x70	x71	x72	x73	x74	x75	x76	x77	
16	1,999998	1,999998	1,999998	1,999999	1,999999	1,999999	1,999999	1,999999	1,999999	2	2	2	
17	1,000004	1,000003	1,000003	1,000002	1,000002	1,000002	1,000001	1,000001	1,000001	1,000001	1,000001	1,000001	
18	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
19													
20													

Obrázek č. 19 Výpočet příkladu Jacobiho metodou

2x+z=1		x=0,5*(1-z)			1,2,-1																	
3x-2y+z=-2		y=0,5*(3x+z+2)																				
x-4z=5		z=1/4*(x-5)																				
x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20	x21	x22
0	0,5	1,125	1,0625	0,984375	0,992188	1,001953	1,000977	0,999756	0,999878	1,000031	1,000015	0,999996	0,999998	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1,125	2,125	2,109375	1,984375	1,986328	2,001953	2,001709	1,999756	1,999786	2,000031	2,000027	1,999996	1,999997	2	2	2	2	2	2	2	2
0	-1,25	-1,125	-0,96875	-0,98438	-1,00391	-1,00195	-0,99951	-0,99976	-1,00006	-1,00003	-0,99999	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Obrázek č. 20 Výpočet druhého příkladu Jacobiho metodou

GS																				
3x-2y=10		x=1/3*(10+2*y)																		
x+2y+2z=0		y=1/2*((-10/3)-((2/3)*y)-(2*z))																		
4y+4z=-4		z=1/4*((8/3)+(4/3)*y+4*z)																		
x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20
1	4	1,33333	1,55556	1,7037	1,80247	1,86831	1,91221	1,94147	1,96098	1,97399	1,98266	1,98844	1,99229	1,99486	1,99657	1,99772	1,99848	1,99899	1,99932	1,99955
1	-3	-2,66667	-2,44444	-2,2963	-2,19753	-2,13169	-2,08779	-2,05853	-2,03902	-2,02601	-2,01734	-2,01156	-2,00771	-2,00514	-2,00343	-2,00228	-2,00152	-2,00101	-2,00068	-2,00045
1	2	1,66667	1,44444	1,2963	1,19753	1,13169	1,08779	1,05853	1,03902	1,02601	1,01734	1,01156	1,00771	1,00514	1,00343	1,00228	1,00152	1,00101	1,00068	1,00045
x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28	x29	x30	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39	x40	x41
1,9997	1,9998	1,99987	1,99991	1,99994	1,99996	1,99997	1,99998	1,99999	1,99999	1,99999	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
-2,0003	-2,0002	-2,00013	-2,00009	-2,00006	-2,00004	-2,00003	-2,00002	-2,00001	-2,00001	-2,00001	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
1,0003	1,0002	1,00013	1,00009	1,00006	1,00004	1,00003	1,00002	1,00001	1,00001	1,00001	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Obrázek č. 21 Výpočet příkladu Gauss-Seidelovou metodou