

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA STROJNÍ

Studijní program: B0715A270013 – Strojní inženýrství
Studijní specializace: Konstruování strojů a technických zařízení

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zvyšování efektivity materiálu pomocí tvaru průřezu

Autor: Jan Pacovský
Vedoucí práce: Ing. Ivana Slámová Ph.D.

Akademický rok 2022/2023

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta strojní
Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Jan PACOVSKÝ**
Osobní číslo: **S22B0177P**
Studijní program: **B0715A270013 Strojní inženýrství**
Specializace: **Konstruování strojů a technických zařízení**
Téma práce: **Zvyšování efektivity materiálu pomocí tvaru průřezu**
Zadávající katedra: **Katedra konstruování strojů**

Zásady pro vypracování

Prostudujte a zpracujte problematiku vlivu tvaru průřezu na vlastnosti materiálu a s tím související výběr konstrukčního materiálu pro danou komponentu. Pro názornost výkladu problematiky použijte příklady.

Osnova práce

1. Uvedení do problematiky
2. Rešerše problematiky vlivu tvaru průřezu na výběr konstrukčního materiálu
3. Příklad řešení dané problematiky
4. Shmutí a závěr

Rozsah bakalářské práce: **30-40 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **elektronická**

Seznam doporučené literatury:

- [1] ASHBY, Michael F. *Materials Selection in Mechanical Design. Fifth Edition*. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2017. ISBN 978-0-08-100599-6
[2] The *GRANTA EduPack materials and proces selection platforms*, produkt firmy ANSYS/GRANTA, www.grantadesign.com/education/

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Ivana Slámová, Ph.D.**
Katedra konstruování strojů

Datum zadání bakalářské práce: **30. listopadu 2022**
Termín odevzdání bakalářské práce: **26. května 2023**

L.S.

Doc. Ing. Vladimír Duchek, Ph.D.
děkan

Prof. Ing. Václava Lašová, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 30. listopadu 2022

Prohlášení o autorství

Akademický rok: 2022/2023
Jméno a příjmení studenta: Jan Pacovský
Název bakalářské práce: Zvyšování efektivity materiálu pomocí tvaru průřezu

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci na téma „Zvyšování efektivity materiálu pomocí tvaru průřezu“ vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který je součástí bakalářské práce.

V Plzni dne:

.....

Podpis studenta

Poděkování

Rád bych poděkoval především vedoucí této bakalářské práce Ing. Ivaně Slámové Ph.D. za čas, trpělivost, a především cenné rady, které pomohly k vytvoření této práce.

Dále bych chtěl poděkovat prof. Ing. Vladislavu Lašovi, CSc. za odbornou konzultaci k teoretické části této práce.

A v neposlední řadě bych chtěl poděkovat rodině za jejich podporu.

ANOTAČNÍ LIST BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

AUTOR	Příjmení Pacovský	Jméno Jan	
STUDIJNÍ PROGRAM	B0715A270013 Strojní inženýrství		
VEDOUcí PRÁCE	Příjmení (včetně titulů) Ing. Slámová Ph.D.	Jméno Ivana	
PRACOVISŤE	ZČU - FST – KKS		
DRUH PRÁCE	DIPLOMOVÁ	BAKALÁŘSKÁ	Nehodící se škrtněte
NÁZEV PRÁCE	Zvyšování efektivity materiálu pomocí tvaru průřezu		

FAKULTA	strojní	KATEDRA	KKS	ROK ODEVZD.	2023
----------------	---------	----------------	-----	--------------------	------

POČET STRAN (A4 a ekvivalentů A4)

CELKEM	166	TEXTOVÁ ČÁST	90	GRAFICKÁ ČÁST	76
---------------	-----	---------------------	----	----------------------	----

STRUČNÝ POPIS (MAX 10 ŘÁDEK) ZAMĚŘENÍ, TÉMA, CÍL POZNATKY A PŘÍNOSY	Tato práce se zaměřuje na problematiku výběru a zvyšování efektivity průřezů a pro vysvětlení je využita teorie pružnosti a pevnosti. Cílem je vysvětlit početní a grafickou teorii výběru průřezu dle prof. M. Ashby, včetně příkladů. Vysvětlení je uvedeno v druhé části této práce.
KLÍČOVÁ SLOVA ZPRAVIDLA JEDNOSLOVNÉ POJMY, KTERÉ VYSTIHUJÍ PODSTATU PRÁCE	Ashby, Granta EduPack, výběr průřezu, efektivita průřezu

SUMMARY OF BACHELOR SHEET

AUTHOR	Surname Pacovský		Name Jan	
STUDY PROGRAMME	B0715A270013 Mechanical Engineering			
SUPERVISOR	Surname (Inclusive of Degrees) Ing. Slámová Ph.D.		Name Ivana	
INSTITUTION	ZČU - FST - KKS			
TYPE OF WORK	DIPLOMA	BACHELOR	Delete when not applicable	
TITLE OF THE WORK	Increasing material efficiency through cross-sectional shape			

FACULTY	Mechanical Engineering	DEPARTMENT	KKS	SUBMITTED IN	2023
----------------	------------------------	-------------------	-----	---------------------	------

NUMBER OF PAGES (A4 and eq. A4)

TOTALLY	166	TEXT PART	90	GRAPHICAL PART	76
----------------	-----	------------------	----	-----------------------	----

BRIEF DESCRIPTION TOPIC, GOAL, RESULTS AND CONTRIBUTIONS	This work focuses on the issue of selecting and increasing the efficiency of cross-sections, and for explanation, the theory of elasticity and strength is used. The goal is to explain the numerical and graphical theory of cross-section selection according to Prof. M. Ashby, including examples. The explanation is provided in the second part of this work.
KEY WORDS	Ashby, Granta EduPack, cross-section selection, efficiency of a cross-section

Obsah

Poděkování	5
Seznam obrázků	12
Seznam grafů	13
Seznam tabulek	14
Abstrakt	15
Abstract	15
1 Úvod do problematiky	16
2 Struktury při vyšetřování nosníků	17
2.1 Základní předpoklady při řešení úloh pružnosti a pevnosti	17
2.2 Vnější a vnitřní síly	17
2.2.1 Metoda řezu	18
2.3 Napětí a deformace	19
2.3.1 Uložení nosníku	21
2.4 Charakteristiky průřezu	21
2.5 Příklady zjištění kvadratického momentu průřezu u nejpoužívanějších materiálů ...	23
2.5.1 Kruhový průřez	23
2.5.2 Obdélníkový průřez	24
2.5.3 I průřez – složená plocha	25
2.6 Zadání simulace MKP	27
2.6.1 Vlastnosti MKP sítě	27
2.6.2 Definice zatížení pro ohyb	28
2.6.3 Definice zatížení pro krut	28
2.6.4 Definice výsledků	28
3 Namáhání nosníků	29
3.1 Tah a tlak	29
3.1.1 Přetvoření prutu vlivem tahu	29
3.1.2 Závislost napětí a prodloužení	30
3.2 Ohyb nosníků	31
3.2.1 Typy namáhání na ohyb	31
3.2.2 Metoda momentových ploch	32
3.2.3 Příklad výpočtu vetknutého nosníku	35
3.3 Krut nosníků	37
3.3.1 Deformace při krutu pro hřídel	38
3.3.2 Příklad výpočtu kruhového nosníku namáhaného na krut	39

3.3.3	Krut u obdélníkových průřezů.....	41
3.3.4	Tenkostěnné otevřené průřezy	42
3.3.5	Plné průřezy.....	43
4	Zvyšování efektivity průřezu	45
4.1	Výběr materiálu pro daný průřez a namáhání	45
4.1.1	Zvolení průřezu	45
4.1.2	Výběr materiálu.....	46
4.1.3	Účinnost a tvarový faktor průřezu.....	46
4.1.4	Určení minimální hmotnosti nosníku	47
4.2	Koeficient pro elastický ohyb.....	48
4.3	Koeficient pro elastický krut	50
4.4	Efektivita standartních průřezů.....	50
4.5	Materiálové indikátory obsahující tvar průřezu.....	53
4.5.1	Axiální napětí nosníku	55
4.5.2	Elastický ohyb a krut.....	55
4.6	Využití mikrostruktury ke snížení hmotnosti	56
4.6.1	Mikroskopický tvarový faktor.....	58
4.7	Kombinace materiálu a průřezu.....	60
4.7.1	Výběr pomocí výpočtu	60
4.7.2	Výběr pomocí grafické metody.....	60
5	Příklady výběru	62
5.1	Výběr tvaru nosníku	67
5.1.1	Namáhání na ohyb.....	68
5.1.2	Namáhání na krut	72
5.1.3	Optimalizace průřezů	77
5.2	Výběr kombinace materiálu a průřezu.....	81
5.2.1	Namáhání na ohyb.....	82
5.2.2	Namáhání na krut	83
5.2.3	Grafický výběr.....	84
6	Závěr.....	86
	Seznam použitých zdrojů	89
	PŘÍLOHA č. 1.....	i
	PŘÍLOHA č. 2.....	xx
	PŘÍLOHA č. 3.....	xxxix
	PŘÍLOHA č. 4.....	lviii

Přehled použitých zkratk a symbolů

ČSN	Česká technická norma
EN	Evropská norma
ISO	Mezinárodní norma
FST	Fakulta strojní
KKS	Katedra konstruování strojů
ZČU	Západočeská univerzita v Plzni

Symbol	Jednotka	Definice
M	Nm	Moment
F	N	Síla
E	Gpa	Modul pružnosti v tahu
G	GPa	Modul pružnosti ve smyku
Q	N	Spojité zatížení
x	mm	Posunutí
σ_f	Mpa	Kritické napětí
ρ	kg/m ³	Hustota materiálu
S	m ²	Plocha
N	N	Normálová síla
T	N	Tečné napětí
σ	MPa	Normálové napětí
τ	MPa	Smykové napětí
T_σ	MPa	Tenzor napětí
ε	-	Přetvoření
Δl	mm	Celkové prodloužení prutu

R	N	Reakce v uložení
φ	°	Úhel natočení
v	mm	Průhyb
I	mm ⁴	Kvadratický moment
I ₀	mm ⁴	Kvadratický moment referenčního průřezu
W	mm ³	Modul průřezu v ohybu
W ₀	mm ³	Modul průřezu v ohybu referenčního průřezu
Δ	mm	Délka oblouku
l	mm	Délka
δ	rad·m ⁻¹	Úhel zkroucení
Z	m ³	Modul pružnosti v krutu
φ_0^e	-	Tvarový faktor pro elastický ohyb
φ_k^e	-	Tvarový faktor pro elastický krut
k _o	N/m	Ohybová tuhost
m	kg	Hmotnost
M ₁	-	Indikátor pro tuhý a lehký nosník namáhaný na ohyb
M ₂	-	Indikátor pro tuhý a lehký nosník namáhaný na krut
ψ_0^e	-	Tvarový faktor v ohybu pro mikrostrukturu

Seznam obrázků

Obrázek 1 Metoda řezu – řez tělesem	18
Obrázek 2 Napětí a reakce při řezu tělesa	19
Obrázek 3 Prostorové napětí	20
Obrázek 4 Typy uložení nosníku	21
Obrázek 5 Moment obecného průřezu k osám	22
Obrázek 6 Moment kruhového průřezu	23
Obrázek 7 Moment obdélníkového průřezu	24
Obrázek 8 Moment průřezu nosníku tvaru I	25
Obrázek 9 MKP síť dutého čtvercového průřezu	27
Obrázek 10 MKP síť plného čtvercového průřezu	27
Obrázek 11 Definice zatížení a uložení ohybu nosníku pro MKP řešení	28
Obrázek 12 Definice zatížení krutu nosníku pro MKP řešení	28
Obrázek 13 Přetvoření obecného tělesa	29
Obrázek 14 Prostý ohyb nosníku	31
Obrázek 15 Typy namáhání prizmatického nosníku	32
Obrázek 16 Model k výpočtu nosníku metodou momentových ploch	33
Obrázek 17 Model k výpočtu nosníku metodou momentových ploch u vetknutého nosníku ..	34
Obrázek 18 Průběh ohybového momentu na vetknutém nosníku	35
Obrázek 19 MKP řešení ohybu vetknutého nosníku – posunutí	36
Obrázek 20 MKP řešení ohybu vetknutého nosníku – napětí	37
Obrázek 21 Průběh napětí na nosníku namáhaného krutem	38
Obrázek 22 MKP řešení krutu vetknutého nosníku – posunutí	40
Obrázek 23 Průběh napětí na nosníku namáhaného krutem	40
Obrázek 24 Rozložení smykového napětí v obdélníkovém průřezu	41
Obrázek 25 Průřezy tenkostěnných nosníků	42
Obrázek 26 Koncentrace napětí na hranách	42
Obrázek 27 Vepsání největší kružnice do nosníku	44
Obrázek 28 Zachování hodnoty účinnosti průřezu při jeho zvětšení	46
Obrázek 29 Vetknutý nosník průřezu I namáhaný na ohyb	47
Obrázek 30 Model vetknutého nosníku průřezu I namáhaného na ohyb	48
Obrázek 31 Zachování hodnoty koeficientu pro elastický ohyb při zvětšení nosníku	49
Obrázek 32 Tvarování materiálu pomocí mikrostruktury	56
Obrázek 33 Vyplnění makrostruktury mikrostrukturou	57
Obrázek 34 Příklady efektivních mikrostruktur	57

Obrázek 35 MKP řešení nosníku tvaru L pro ohyb	70
Obrázek 36 MKP řešení nosníku tvaru T pro ohyb	71
Obrázek 37 MKP řešení nosníku plného kruhového tvaru pro ohyb	72
Obrázek 38 MKP řešení nosníku dutého kruhového průřezu pro krut	75
Obrázek 39 MKP řešení nosníku tvaru T pro krut	76
Obrázek 40 MKP řešení 1. upraveného nosníku tvaru I pro ohyb	78
Obrázek 41 MKP řešení 2. upraveného nosníku tvaru I pro ohyb	79
Obrázek 42 Upravený eliptický nosník po zatížení krutem	80
Obrázek 43 Rozměry referenčního průřezu	85

Seznam grafů

Graf 1 Pracovní diagram prodloužení oceli [1].....	30
Graf 2 Hodnoty kvadratického momentu pro ocelové nosníky [8].....	51
Graf 3 Hodnoty momentu krutu plochy pro ocelové nosníky [8]	52
Graf 5 Empirické hodnoty maximálních tvarových faktorů [10].....	54
Graf 6 Výběr pomocí grafické metody [8].....	61
Graf 7 Příklad grafického výběru [23]	85

Seznam tabulek

Tabulka 1 Vlastnosti nejpoužívanějších průřezů	26
Tabulka 2 Výsledky ohybu nosníku.....	37
Tabulka 3 Hodnoty konstant k_1 a k_2	41
Tabulka 4 Krut nosníku nekruhových plných průřezů.....	43
Tabulka 5 Hodnoty tvarových koeficientů různých průřezů.....	49
Tabulka 6 Maximální tvarový faktor pro některé materiály [23].....	54
Tabulka 7 Hodnoty pro kombinaci materiálu a průřezu [8].....	60
Tabulka 8 Tvary vyšetřovaných průřezů.....	62
Tabulka 9 Hodnoty vyšetřovaných plných nosníků	63
Tabulka 10 Hodnoty vyšetřovaných dutých nosníků	64
Tabulka 11 Hodnoty vyšetřovaných otevřených nosníků	65
Tabulka 12 Vlastnosti vyšetřovaných průřezů	67
Tabulka 13 Výsledky namáhání ohybem	68
Tabulka 14 Výsledné pořadí nosníků po namáhání ohybem	69
Tabulka 15 Výsledky namáhání krutem.....	73
Tabulka 16 Výsledné pořadí nosníků po namáhání krutem.....	74
Tabulka 17 1. upravený nosník	77
Tabulka 18 2. upravený nosník	78
Tabulka 19 Výsledky optimalizace na ohyb	79
Tabulka 20 Optimalizace eliptického nosníku	80
Tabulka 21 Výsledky optimalizace na krut.....	81
Tabulka 22 Vybrané materiály a jejich vlastnosti pro vyšetření ohybu.....	81
Tabulka 23 Výsledky výpočtu koeficientu M_1	82
Tabulka 24 Vybrané materiály a jejich vlastnosti pro vyšetření krutu	83
Tabulka 25 Výsledky výpočtu koeficientu M_2	84
Tabulka 26 Výsledky posunutí a tvarového faktoru při ohybu.....	86
Tabulka 27 Výsledky posunutí a tvarového faktoru při krutu	87
Tabulka 28 Výsledky výběru kombinace materiálu a průřezu.....	88

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou zvyšování efektivity materiálu pomocí změny průřezu u různě zatížených nosníků. Zvyšováním efektivity materiálu je myšlena úprava tvaru průřezu, kdy dojde ke zvýšení tuhosti vyšetřovaného nosníku. Pro ukázání problematiky je práce rozdělena do tří hlavních částí. První část se zabývá teorií pružnosti a pevnosti a vysvětluje struktury při vyšetřování nosníků, jejich tuhost, posunutí a vlastnosti jejich průřezů. Ve druhé části je vysvětlována teorie prof. Michaela Ashbyho, která se zabývá výběrem efektivních průřezů a také kombinací materiálu a průřezu. Tato teorie usnadňuje výběr a přehlednost v případě velkého množství různých průřezů a materiálů. Nakonec jsou ve třetí části uvedeny příklady výběru efektivního průřezu pomocí Ashbyho metody a porovnány s výsledky MKP simulace s využitím programu Siemens NX.

Výsledkem této práce je vysvětlení teorie výběru vhodných průřezů dle prof. Michaela Ashbyho a ukázka možností úpravy tvaru nosníků pro maximalizaci využití materiálu.

Abstract

This bachelor's thesis deals with the issue of increasing material efficiency through cross-sectional modification in differently loaded beams. Increasing material efficiency refers to modifying the cross-sectional shape, resulting in an increase in the stiffness of the investigated beam. To demonstrate the problem, the thesis is divided into three main parts. The first part deals with the theory of elasticity and strength, explaining the structures involved in beam investigation, their stiffness, displacement, and cross-sectional properties. The second part explains Professor Michael Ashby's theory, which deals with the selection of effective cross-sections, as well as the combination of material and cross-section. This theory facilitates selection and clarity in the case of a large number of different cross-sections and materials. Finally, the third part presents examples of selecting effective cross-sections using the Ashby method and compares them with the results of finite element simulation using the Siemens NX program.

The result of this thesis is an explanation of the theory of selecting suitable cross-sections according to Professor Michael Ashby and a demonstration of the possibilities of modifying beam shapes to maximize material utilization.

1 Úvod do problematiky

Při navrhování různých konstrukčních řešení je častým problémem pevnost a tuhost součásti, kdy je nutné zjistit, zda je navržená součást dostatečně odolná proti působení zatížení v uvažovaném prostředí. Tento návrh je opírá se o teorii pružnosti a pevnosti, podle níž je zatížení součásti menší, než je pevnost materiálu, a tudíž v tomto případě nedojde k selhání [1]. Tuhost součásti může být ovlivněna mnoha způsoby, přičemž nejjednodušším z nich je zvyšování tloušťky a rozměrů nosníku nebo zvolení lepšího materiálu. Tyto kroky však mohou vést ke vzniku několika problémů, jako je zvýšení ceny v důsledku nutnosti použít větší množství materiálu, větší množství potřebné práce na větším nosníku a také vyšší hmotnosti, pokud je tedy prvek součástí soustavy, může vést ke zvýšení namáhání a opětovné potřebě zvyšovat tloušťku nebo rozměry nosníku [11].

Řešením tohoto problému je zvyšování efektivity materiálu pomocí změny tvaru průřezu, což znamená úpravu tvaru součásti tak, aby tvar průřezu lépe přenášel působící síly, bez nutnosti zvyšovat tloušťku nebo rozměry součásti [10]. V této práci budou vyšetřovány dva případy vnějšího zatížení, kterými jsou ohyb a krut a jako vyšetřovaná součást bude vetknutý nosník, jelikož má velmi snadno definovatelné uložení a taktéž je možné přesně určit místo zatížení na volném konci nosníku [1]. Tato zatížení budou řešena odděleně, neboť nosníky odolné na ohyb často nebývají odolné na krut a naopak. Také řešení komplexních zatížení, kdy na vyšetřovanou součást působí více vlivů, jako zmíněný ohyb a krut, ale také vlastní tíha nebo teplotní roztažnost, se stává velmi složitým problémem, který je již potřeba řešit individuálně. Často ale součást bývá namáhána primárně na jeden typ zatížení a tento předpoklad bude v této práci využíván.

Hlavním zdrojem je teorie prof. M. Ashbyho [8], [9], [10], [11], respektive části o tvarových faktorech a materiálových indikátorech. Tato teorie by měla pomoci s výběrem tvaru nosníku a také se zvolením vhodné kombinace materiálu a průřezu. Prof. M. Ashby též definoval tvarové faktory pro plastické deformace, ale pro jejich řešení by byla třeba teorie plasticity, která by dále rozšířila tuto práci a kontrola výsledků by též byla složitější. Řešení nosníků se tedy bude pohybovat v oblasti malých pružných deformací, tedy budou využívány tvarové faktory pro elastický případ.

Cílem práce je vysvětlení metodiky a příklady výběru efektivního tvaru nosníku pro vyšetřovaný typ zatížení a ve druhé části také výběru vhodné kombinace materiálu a průřezu. Pro řešení bude využita teorie pružnosti a pevnosti napsaná v prvních kapitolách této práce, poté teorie tvarových faktorů a materiálových indikátorů a pro ověření výsledků výběru pomocí této teorie také simulace nosníků metodou konečných prvků v programu Siemens NX.

2 Struktury při vyšetřování nosníků

2.1 Základní předpoklady při řešení úloh pružnosti a pevnosti

Při řešení strojírenských problémů se vychází z různých předpokladů o vlastnostech materiálu, geometrických parametrech těles, o deformacích a napětích. Tyto předpoklady jsou základem pro aplikaci základních principů pružnosti a pevnosti při řešení problémů v oblasti mechaniky materiálů a konstrukcí.

Jsou uvažovány následující vlastnosti:

Homogennost a spojitost, což znamená, že fyzikální vlastnosti materiálu jsou po celém objemu stejné, těleso je bez přerušení a vad. Považujeme ho za kontinuum.

Izotropie, která říká, že materiál je ve všech směrech totožný. Takto jsou materiály zjednodušeny jako kovy, plasty a keramika, ale existují takové, které mají v různých směrech jiné vlastnosti. Tyto materiály se nazývají anizotropní a patří mezi ně kompozitní materiály, dřevo nebo i válcovaný materiál.

Za ideálně pružný materiál je považován materiál v případě, pokud přestane působit vnější zatížení, vymizí deformace i napětí, protože deformace jsou v porovnání s rozměry tělesa velmi malé. Zatížení je statické, dynamické účinky zanedbáme a v materiálu neexistují zbytková napětí. [1], [2], [7], [14], [17]

2.2 Vnější a vnitřní síly

Konstrukce a strojní součásti jsou zatěžovány silami vznikající vzájemným působením těles, jejich pohybem apod. Takto vznikají síly, které jsou určeny pomocí zákonů mechaniky tuhých těles. Síly působící na strojní součást se nazývají vnější a dále se dělí na dvě skupiny, objemové a povrchové.

Povrchové síly vznikají v místech dotyku tělesa s jinými tělesy. Děleny jsou na osamělé, které působí na zanedbatelně malou plochu a dále se zjednodušují na zatížení bodové, jak je uvedeno na obrázku (Obrázek 1) se silou F . Za osamělé zatížení se též považují dvojice sil vytvářející moment M . Druhou skupinou je zatížení spojitě, u kterého již nelze uvažovat zanedbatelnou plochu působení. Definují se jako zatížení na jednotku plochy, tudíž

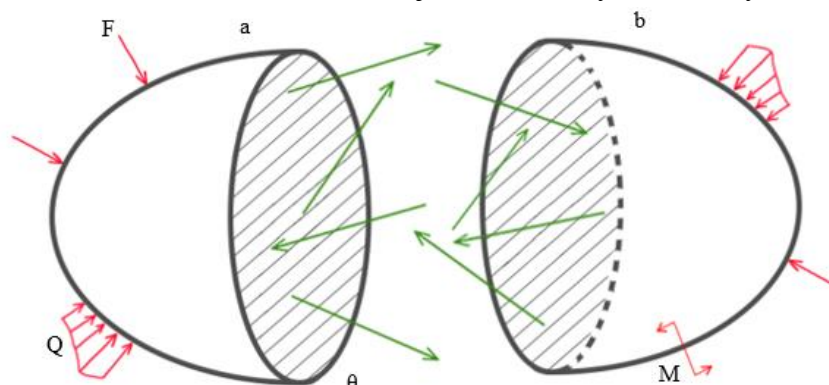
$$q(x) = \frac{dQ}{dx}, \quad (1)$$

kde dQ je zatížení působící na délku dx nosníku.

Objemové síly působí na celý objem tělesa neboli působí na každý element objemu. Patří mezi ně tíha tělesa nebo odstředivá síla v rotujícím tělese. Působící vnější síly způsobují deformace a jsou důvodem vzniku vnitřních sil, odporující účinkům vnějších sil. Pro staticky určité úlohy jsou určeny metodou řezu. [1], [2], [14], [15], [17]

2.2.1 Metoda řezu

Vyšetřovanou součástí je veden myšlený řez v určité rovině θ , který těleso rozdělí na dvě části, zde označené jako a , b . Tímto vznikne průřez tělesa, vymezený plochou, který bude označen S_θ . V takto vzniklé rovině jsou zkoumány vnitřní síly, které v řezu působí.



Obrázek 1 Metoda řezu – řez tělesem

Jelikož celé těleso musí být v rovnováze, musí platit, že části a i b pod účinkem vnějších sil nadále zůstávají v rovnováze. Je tedy možné napsat rovnice rovnováhy

$$\sum X_a = 0; \sum M_{xa} = 0; \sum X_b = 0; \sum M_{xb} = 0; \quad (2)$$

$$\sum Y_a = 0; \sum M_{ya} = 0; \sum Y_b = 0; \sum M_{yb} = 0; \quad (3)$$

$$\sum Z_a = 0; \sum M_{za} = 0; \sum Z_b = 0; \sum M_{zb} = 0; \quad (4)$$

kde X_a , Y_a , Z_a , X_b , Y_b a Z_b jsou síly působící ve směru souřadných os a M_{xa} , M_{ya} , M_{za} , M_{xb} , M_{yb} a M_{zb} jsou dvojice sil působící v rovinách kolmých na souřadné osy.

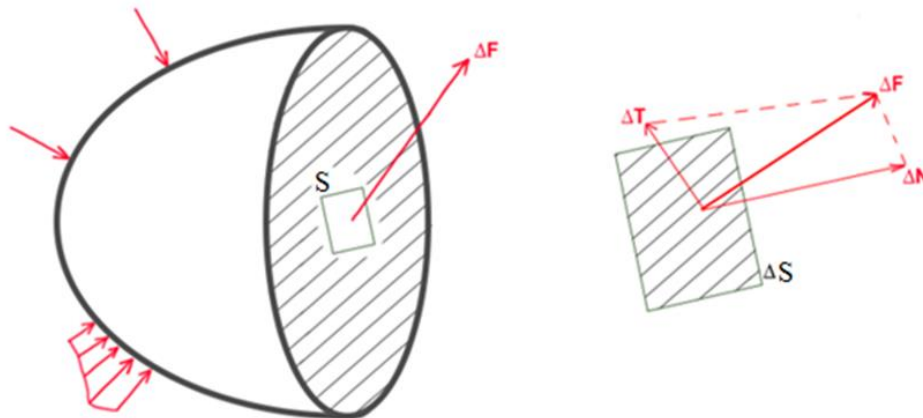
Protože vnitřní síly musí být takové, aby uchovaly i po řezu rovnovážný stav vzniklých těles a a b , musí nahradit účinek zatížení, které by odejmutá část působila. Znamená to, že výsledné vnitřní síly jsou dány vektorovým součtem všech silových účinků působících po jedné straně řezu. [1], [2], [12], [14], [15], [17]

2.3 Napětí a deformace

Pro získání představy o rozložení vnitřních sil v myšleném průřezu θ a pro posouzení jejich vlivu na strojní součást je definována míra intenzity vnitřních sil, která se nazývá napětí σ . Pro určení napětí jsou zkoumána napětí v okolí libovolného bodu v průřezu vzniklého řezem tělesa v rovině θ . Vytvořenou plošku je označena ΔS a vnitřní sílu působící na tuto plochu ΔF . Směr napětí je totožný jako směr síly, která působí na ΔS . Pro určení velikosti je potřeba jej určit jako limitu podílu elementární síly ΔF a elementární plochy ΔS

$$v_M = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} [Pa = N \cdot m^{-2}] , \quad (5)$$

kde v_M je napětí ve hledaném bodě. Často se ve strojírenství udává v MPa, má tedy sice stejný rozměr jako tlak, ale na rozdíl od tlaku, který je definovaný jako vnější síla na jednotku plochy, se jedná o vnitřní sílu působící na jednotku plochy.



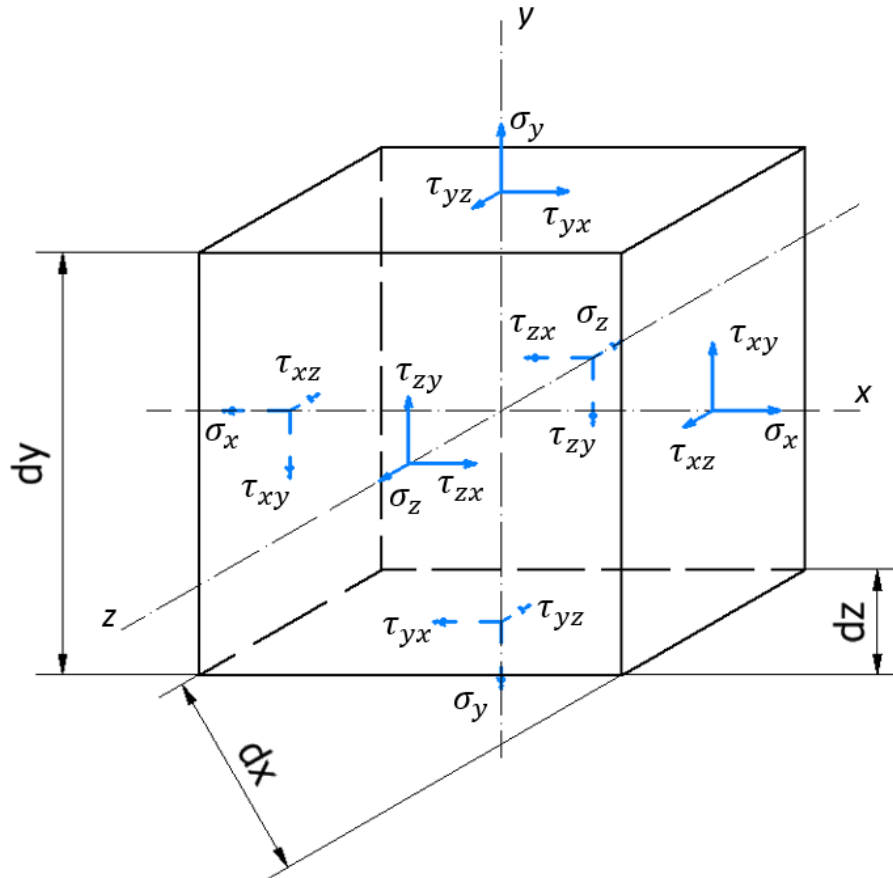
Obrázek 2 Napětí a reakce při řezu tělesa

Síla je rozdělena podle obrázku (Obrázek 2) na tečnou a normálovou složku, stejně tak se rozděluje vzniklé napětí na normálové napětí σ od složky ΔN a smykové napětí τ od složky ΔT . Vztahy pro výpočet obou složek napětí vycházejí z definice pro v_M

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA} [MPa] , \quad (6)$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \frac{dT}{dA} [MPa] , \quad (7)$$

Vyšetřovaným bodem je možné vést neomezené množství rovin řezu, což znamená, že i napětí v něm může mít neomezené množství hodnot. Je možné ale určit napětí v libovolné rovině procházející vyšetřovaným bodem, pokud jsou známy tři složky napětí v navzájem kolmých rovinách procházejících tímto bodem. Normálové složky se označují indexem podle osy, ke kterým jsou rovnoběžné, a smyková dvěma indexy. První index označuje směr roviny, ve které smykové napětí působí, a druhý index označuje osu, se kterou je napětí rovnoběžné.



Obrázek 3 Prostorové napětí

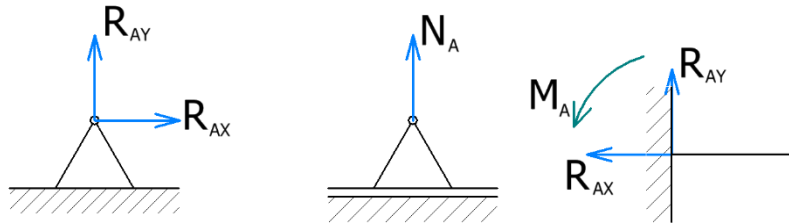
Tímto způsobem je získáno devět složek napětí ve třech rovinách, tři normálová napětí σ_x , σ_y , σ_z a šest tečných τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} a τ_{xz} . Tímto je jednoznačně charakterizována napjatost v bodě tělesa a je možné stanovit napětí v libovolné rovině procházející vyšetřovaným bodem tělesa. Pokud jsou uspořádány složky napětí do řádků a sloupců, je získán tenzor napětí T_σ .

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (8)$$

[1], [2], [12], [14], [15], [17]

2.3.1 Uložení nosníku

Další důležitou částí řešení nosníků namáhaných na ohyb je uložení. Musí být navrženo tak, aby zachycovalo předpokládané silové účinky. Na obrázku (Obrázek 4) je uložení tří typů: levá podpora odebírá dva stupně volnosti a umožňuje pouze natočení osy nosníku. Výsledná reakce R může mít libovolný směr v rovině nákresny. Prostřední podpora má stupně volnosti dva a umožňuje kromě natočení i osový posuv nosníku v uložení. Nazývá se obecná vazba a je důležitá pro staticky určité řešení nosníků.



Obrázek 4 Typy uložení nosníku

Třetí možností uložení nosníku je takzvané vetknutí. Konec nosníku je uložen takovým způsobem, že nelze osu nosníku pootočit. Vzniká nepoddajné uložení a reakce ve vetknutí jsou určeny nejenom silou R , ale i silovou dvojicí M . Při vyšetřování nosníků v této práci bude tento typ uložení využíván. [1]

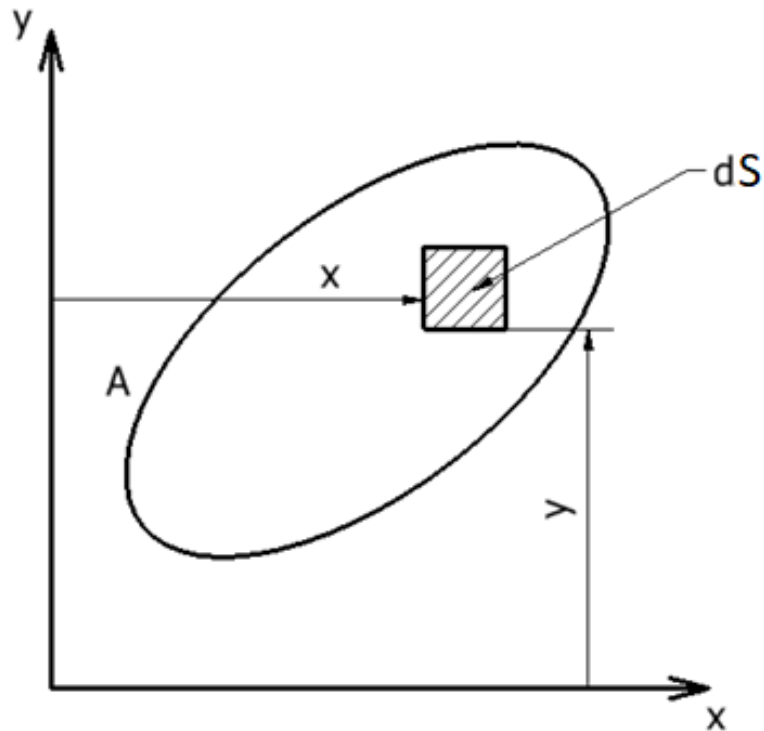
2.4 Charakteristiky průřezu

Pro řešení napětí a přetvoření nosníku se používají geometrické (průřezové) charakteristiky. Průřez S je plocha vzniklá myšleným řezem tělesa, viz obrázek (Obrázek 5).

Lineární momenty S_z a S_y průřezu se určují k přímce ležící v jeho rovině, v tomto případě k momentovým osám x a y :

$$S_z = \int_S y \cdot dS \quad [m^3] \quad (9)$$

$$S_y = \int_S z \cdot dS \quad [m^3] \quad (10)$$



Obrázek 5 Moment obecného průřezu k osám

Lineární moment průřezu k osám, které procházejí těžištěm, je nulový. Kvadratický moment průřezu J_z , J_y definuje tuhost prutu k dané ose.

$$J_z = \int_S y^2 \cdot dS \quad [m^4] \quad (11)$$

$$J_y = \int_S z^2 \cdot dS \quad [m^4] \quad (12)$$

Z nich je určen polární moment J_p , který stanoví kvadratický moment plochy vztažený k jednomu bodu, pólu – jedná se o bod, který se v daném časovém okamžiku nepohybuje.

$$J_p = \int r^2 \cdot dS = \int_S (y^2 + z^2) dS = J_a + J_z \quad [m^4] \quad (13)$$

Dále se určuje deviační moment D_{yz} , který charakterizuje chování hmoty v prostoru.

$$D_{yz} = \int_S yz \cdot dS \quad [m^4] \quad (14)$$

Tyto momenty jsou spolu s osami setrvačnosti velice důležité pro určování posunutí nosníků.

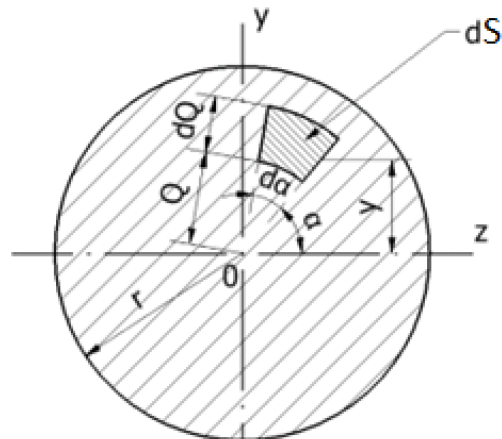
[1], [2], [13], [14], [15], [17]

2.5 Příklady zjištění kvadratického momentu průřezu u nejpoužívanějších materiálů

V technické praxi se často využívají různě tvarované průřezy, které mohou mít lepší mechanické vlastnosti jako nižší hmotnost při zachování stejné tuhosti.

Tato kapitola obsahuje příklady zjištění kvadratického momentu průřezu u nosníků používaných v technické praxi a tabulku vlastností dalších používaných průřezů (Tabulka 1). [3], [4], [6], [8]

2.5.1 Kruhový průřez



Obrázek 6 Moment kruhového průřezu

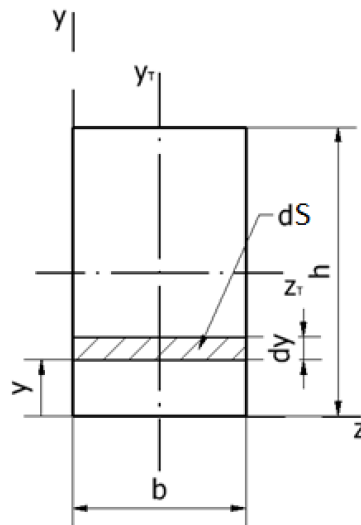
$$J_z = ?; J_z = J_y = J; J_p = 2J \quad (15)$$

$$J_p = \int_S \rho^2 dS = \int_0^r 2\pi\rho d\rho \cdot \rho^2 \cdot h = 2\pi \frac{r^4}{4} \quad (16)$$

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (17)$$

$$J_z = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{32}; D_{yz} = 0 \quad (18)$$

2.5.2 Obdélníkový průřez



Obrázek 7 Moment obdélníkového průřezu

$$J_z = \int_S y^2 dS = \int_0^h y^2 \cdot b dy = \frac{1}{3} bh^3 \quad (19)$$

$$J_y = \frac{1}{3} hb^3 \quad (20)$$

$$D_{yz} = \int_0^h y \frac{b}{2} b dy = \frac{1}{4} b^2 h^2 \quad (21)$$

$$J_{z_t} = J_z - S \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} bh^3 - \frac{1}{4} bh^3 = \frac{1}{12} bh^3 \quad (22)$$

$$J_{y_t} = J_y - S \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} hb^3 \quad (23)$$

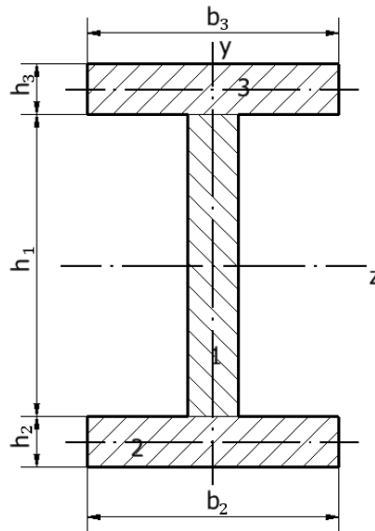
$$D_{y_t z_t} = D_{yz} - S \frac{h}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{4} b^2 h^2 - \frac{1}{4} b^2 h^2 = 0 \quad (24)$$

Jelikož čtverec má stejné délky stran, kde $a = b$, tak pro něj platí:

$$J_{z_t} = \frac{1}{12} a^4 \quad (25)$$

$$J_{y_t} = \frac{1}{12} a^4 \quad (26)$$

2.5.3 I průřez – složená plocha



Obrázek 8 Moment průřezu nosníku tvaru I

$$J_z = J_{z_1} + J_{z_2} + J_{z_3} \quad (27)$$

$$J_{z_1} = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 \quad (28)$$

$$J_{z_2} = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + b_2 h_2 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \right)^2 \quad (29)$$

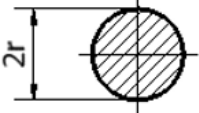
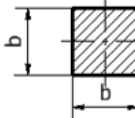
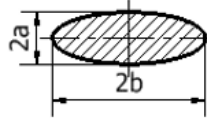
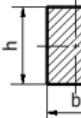
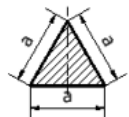
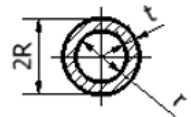
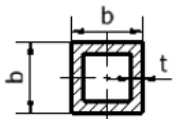
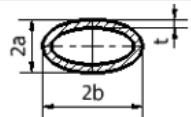
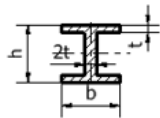
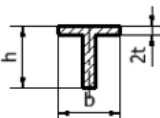
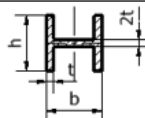
$$J_{z_3} = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + b_2 h_2 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \right)^2 \quad (30)$$

$$J_y = J_{y_1} + J_{y_2} + J_{y_3} \quad (31)$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{12} h_1 b_1^3; J_{y_2} = \frac{1}{12} h_2 b_2^3; J_{y_3} = \frac{1}{12} h_2 b_2^3 \quad (32)$$

Pro výpočet kvadratického momentu složených ploch se vychází z jednodušších ploch, které jsou skládány dohromady. K plochám musí být připočtena vzdálenost od osy. [3]

Tabulka 1 Vlastnosti nepoužívanějších průřezů

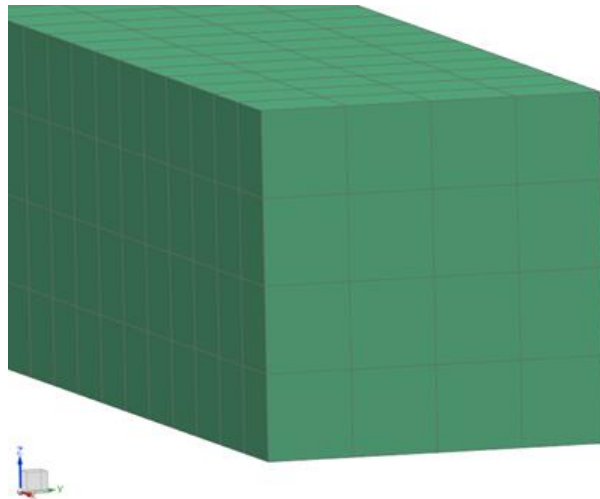
	Tvar průřezu	Plocha	Kvadratický moment	Modul průřezu v ohybu (Z)	Modul průřezu v krutu (Q)
Kruhový plný průřez		πr^2	$\frac{\pi}{4} r^4$	$\frac{\pi}{4} r^3$	$\frac{\pi}{2} r^3$
Čtvercový plný průřez		b^2	$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b^3}{6}$	$0,21b^3$
Eliptický plný průřez		πab	$\frac{\pi}{4} a^3 b$	$\frac{\pi}{4} a^3 b$	$\frac{\pi}{2} a^2 b$
Obdélníkový plný průřez		bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{b^2 h^2}{3h + 1,8b}$
Trojúhelníkový plný průřez		$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$\frac{a^4}{32\sqrt{3}}$	$\frac{a^3}{32}$	$\frac{a^3}{20}$
Kruhový dutý průřez		$\pi(R^2 - r^2)$	$\frac{\pi}{4}(R^2 - r^2)$	$\frac{\pi}{4R}(R^4 - r^4)$	$\frac{\pi}{2R}(R^4 - r^4)$
Čtvercový dutý průřez		$4bt$	$\frac{2}{3} b^3 t$	$\frac{4}{3} b^2 t$	$2b^2 t (1 - \frac{t}{b})^2$
Eliptický dutý průřez		$\pi(a+b)t$	$\frac{\pi}{4} a^3 t (1 + \frac{3b}{a})$	$\frac{\pi}{4} a^2 t (1 + \frac{3b}{a})$	$2\pi t (a^3 b)^{\frac{1}{2}}$
I profil		$2t(h+b)$	$\frac{1}{6} h^3 t (1 + \frac{3b}{h})$	$\frac{1}{3} h^2 t (1 + \frac{3b}{h})$	$\frac{2}{3} t^2 b (1 + \frac{4h}{b})$
T profil		$2t(h+b)$	$\frac{1}{6} (h^3 + 4bt^2)$	$\frac{1}{3h} (h^3 + 4bt^2)$	$\frac{t^2}{3} (8b + h)$
H profil		$2t(h+b)$	$\frac{1}{6} (h^3 + 4bt^2)$	$\frac{1}{3h} (h^3 + 4bt^2)$	$\frac{2}{3} ht^2 (1 + \frac{4b}{h})$

2.6 Zadání simulace MKP

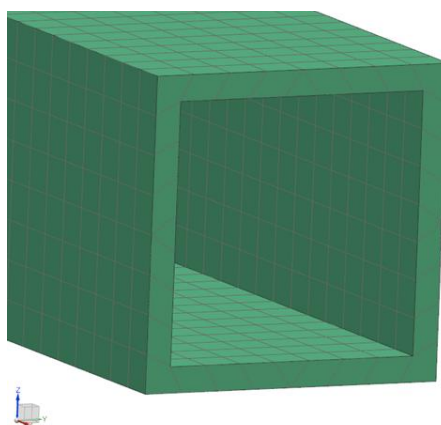
Pro vyšetřování nosníků bude, jak již bylo napsáno v kapitole 1 Úvod do problematiky, využita metoda konečných prvků v programu Siemens NX. V této kapitole jsou krátce popsány vlastnosti sítě a definice uložení a zatížení nosníků vyšetřovaných v pozdějších kapitolách této práce.

2.6.1 Vlastnosti MKP sítě

Pro vytvoření sítě je použit 3D sweep mesh s CHEXA(20) prvky, také nazývanými brick. Tato metoda síťování vyžaduje dvě tangentní plochy, které v tomto případě tvoří oba konce síťovaného nosníku. Pro potřeby této práce jsou zvoleny prvky velikosti 6 mm pro všechny průřezy, protože není potřeba dosahovat vysoké přesnosti výsledků, jelikož se jedná o teoretické případy, kde dle tabulek výsledků (Tabulka 14, Tabulka 16) jsou výsledky dostatečně rozdílné a podle tabulky (Tabulka 2) i velmi přesné.



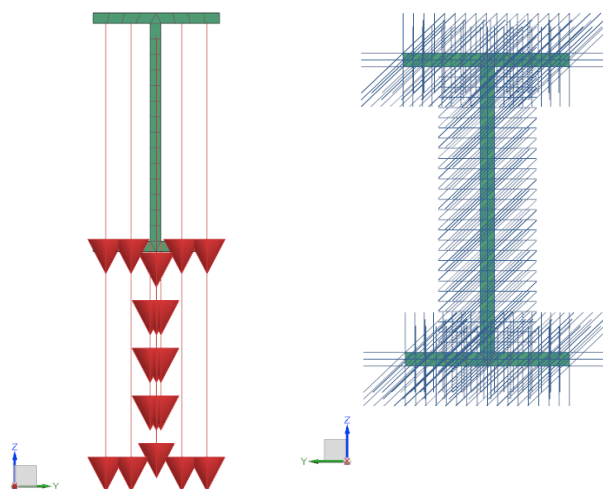
Obrázek 10 MKP síť plného čtvercového průřezu



Obrázek 9 MKP síť dutého čtvercového průřezu

2.6.2 Definice zatížení pro ohyb

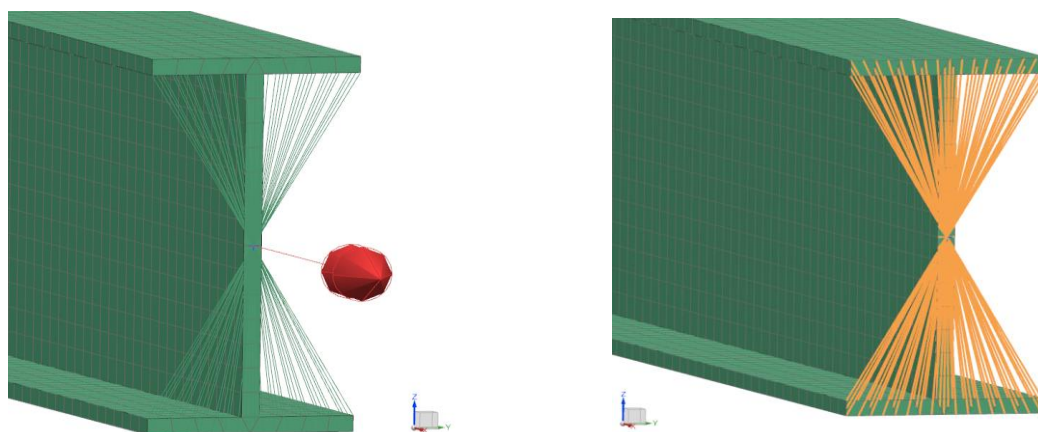
Pro ohyb namáhané nosníky je zatížením síla působící na celou plochu jednoho z průřezů o velikosti $F = 1000$ N. Uložení je definováno jako pevné, bez možnosti natočení a po celé ploše druhého průřezu, viz obrázek (Obrázek 11):



Obrázek 11 Definice zatížení a uložení ohybu nosníku pro MKP řešení

2.6.3 Definice zatížení pro krut

Definice zatížení nosníku na krut je složitější než na ohyb. Pro typ zatížení je zvolen krouťící moment, který je vztažen k 0D prvku ležícím ve středu hmotnosti průřezu. Pomocí pevných RBE2 1D prvků je tento prvek připojen ke každému uzlu v ploše průřezu (Obrázek 12). Uložení je definované stejně jako v případě ohybu v kapitole 2.6.2.



Obrázek 12 Definice zatížení krutu nosníku pro MKP řešení

2.6.4 Definice výsledků

Výsledky simulace v ohybu jsou definovány jako maxima složkových napětí elementů v uzlech. To platí pro posun i pro napětí.

Při simulaci krutu jsou napětí zobrazena jako výsledné napětí v uzlech a stejným způsobem je zobrazen posun.

3 Namáhání nosníků

3.1 Tah a tlak

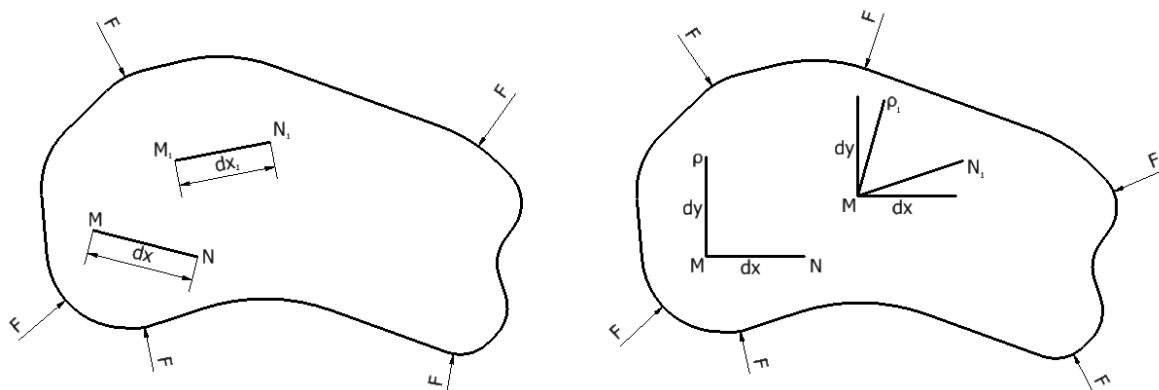
Průřez je namáhán tahem, pokud je vnější zatížení takového charakteru, že vnitřní síla je v prutu tvořena pouze normálovou silou v těžišti průřezu. Pokud je předpokládáno, že působící síla je rovnoměrně rozložena a vyšetřovaný průřez se nachází dostatečně daleko od působící síly, je možno určit napětí jako podíl síly a průřezu:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)}, \quad (33)$$

kde σ je napětí [MPa], N normálová síla [N] a S plocha průřezu [m²]. Kladným napětím je označeno tahové, záporným tlakové. Jedná se o nejjednodušší zatížení pro řešení, neboť pro výpočet je potřeba pouze plocha průřezu. [1], [2], [6], [13], [14], [15], [17], [21]

3.1.1 Přetvoření prutu vlivem tahu

Prut se účinkem působení síly přetváří. Pro sledování tohoto přetvoření se využívají dva body M a N , které leží na prutu. Vzdálenost před zatížením je označena dx a vlivem zatížení se tyto body přemístí do polohy M_1 a N_1 . Odlehlost těchto bodů je poté označena na obrázku (Obrázek 13) jako dx_1 .



Obrázek 13 Přetvoření obecného tělesa

Důsledkem tohoto zatížení je změna délky ve směru \overline{AB} o Δdx , kde

$$\Delta dx = dx_1 - dx. \quad (34)$$

Poměr změny délky k původní délce se označuje ε , které je bezrozměrné a udává poměrné prodloužení ve směru spojnice \overline{AB}

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (35)$$

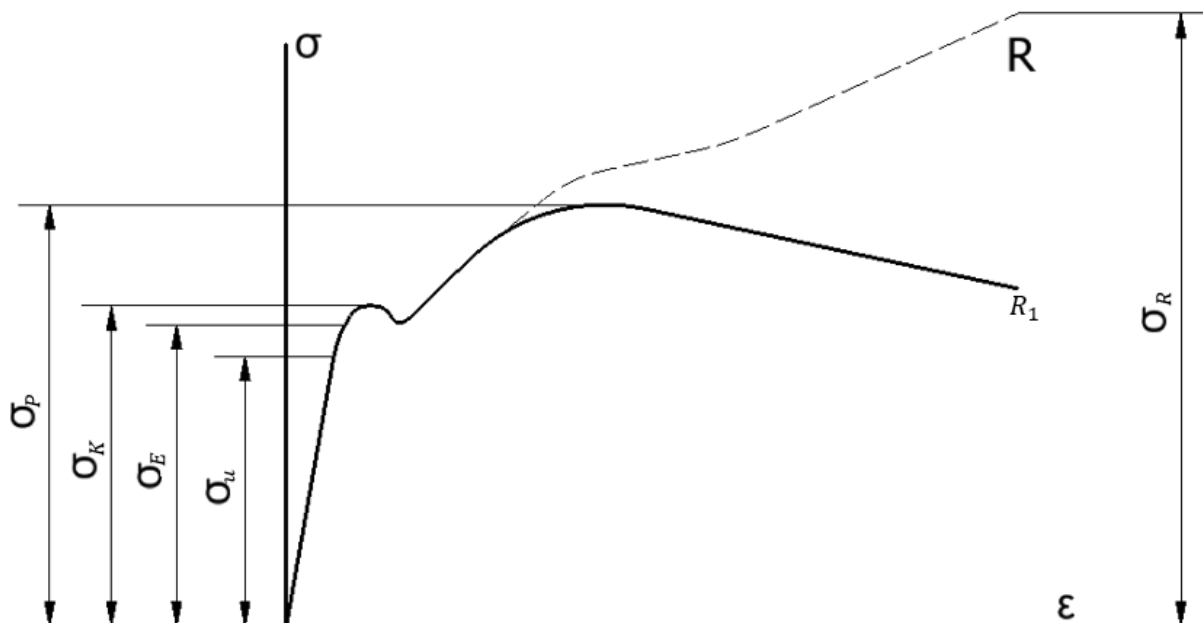
Praktičtější vyjádření tohoto vztahu se vyjadřuje jako celkové prodloužení prutu Δl

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot S}, \quad (36)$$

kde F [N] je působící síla, l [mm] délka prutu, E [MPa] modul pružnosti v tahu a S [mm²] plocha průřezu. [1], [2], [6], [13], [14], [15], [17]

3.1.2 Závislost napětí a prodloužení

Ve strojírenství se využívá závislosti mezi napětím σ a poměrným prodloužením ε . Tato závislost se určuje pomocí materiálových zkoušek, nejčastěji normovaných zkušebních tyčí s přesnými rozměry danými normou ČSN EN ISO 6892-2: (2018). Výsledkem takovéto zkoušky je pracovní tahový diagram (Graf 1), přičemž vodorovná osa vyjadřuje poměrné prodloužení ε , nebo prodloužení Δl a svislá osa napětí σ , nebo zatížení N . Důležitou informací je, že napětí je po celém diagramu vztaženo k původnímu průřezu.



Graf 1 Pracovní diagram prodloužení oceli [1]

Materiály, kterým přísluší tento diagram se jmenují houževnaté a specificky je zobrazen pracovní diagram pro ocel. Tento graf roste lineárně až do hodnoty σ_u , která je nazývána mezí úměrnosti. Tato hodnota vyjadřuje maximální napětí v součásti bez vzniku jakékoliv plastické deformace. Další hodnotou v tomto diagramu je mez pružnosti σ_e a při dosažení této hodnoty napětí stále nevznikají po odlehčení plastické deformace větší než 0,005 %. Do této hodnoty se materiál považuje za pružný a využívá se pro standartní řešení úloh pružnosti a pevnosti. Po dosažení hodnoty σ_k nazývaní se mezí kluzu a deformace začnou v tomto místě rychle vzrůstat. Posledním napětím v levé části grafu je σ_p , která se nazývá smluvní mezí pevnosti. Na zkoušeném prvku se vytváří krček a dochází k lokálnímu zúžení průřezu až do chvíle, kdy dojde k roztržení tyčky v bodě R_1 . V pravé části diagramu se ještě nachází napětí σ_R , vyjadřuje napětí, při kterém dojde k roztržení tyčky, a je rozdílné od grafu smluvního diagramu, protože je vztaženo k zmenšujícímu se průřezu vznikajícího krčku.

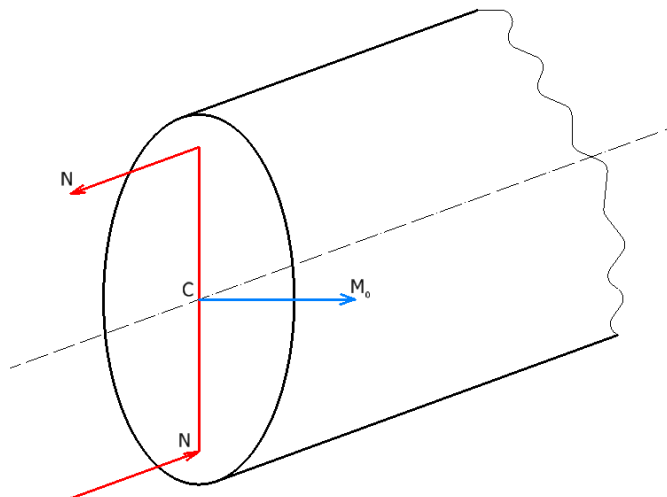
Důležitou vlastností je lineární závislost mezi napětím a poměrným prodloužením definovaným Robertem Hookem a udává se v MPa, tedy

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{ MPa} , \quad (37)$$

kde σ je napětí, ε je poměrné prodloužení a E je modul pružnosti v tahu a pro běžnou ocel se pohybuje kolem 210000 MPa. [1], [6]

3.2 Ohyb nosníků

Průřez libovolného prutu je namáhán na ohyb, když všechny vnější silové účinky po jedné straně řezu vytvoří silovou dvojici, která leží v rovině kolmé k podélné ose (Obrázek 14). Tato silová dvojice je označena jako ohybový moment M_o . Pokud na nosník nepůsobí žádné jiné zatížení, tento stav se definuje jako prostý ohyb, který se v reálných případech nevyskytuje, ale pro zjednodušení zde bude využit.



Obrázek 14 Prostý ohyb nosníku

Jedná se o nejrozšířenější typ zatížení, neboť k namáhání nosníku ohybem dochází téměř vždy vlastní hmotností nosníku, kromě případů, kdy je nosník umístěn kolmo k působící tíhové síle. [1], [2], [6], [13], [14], [15], [17], [19]

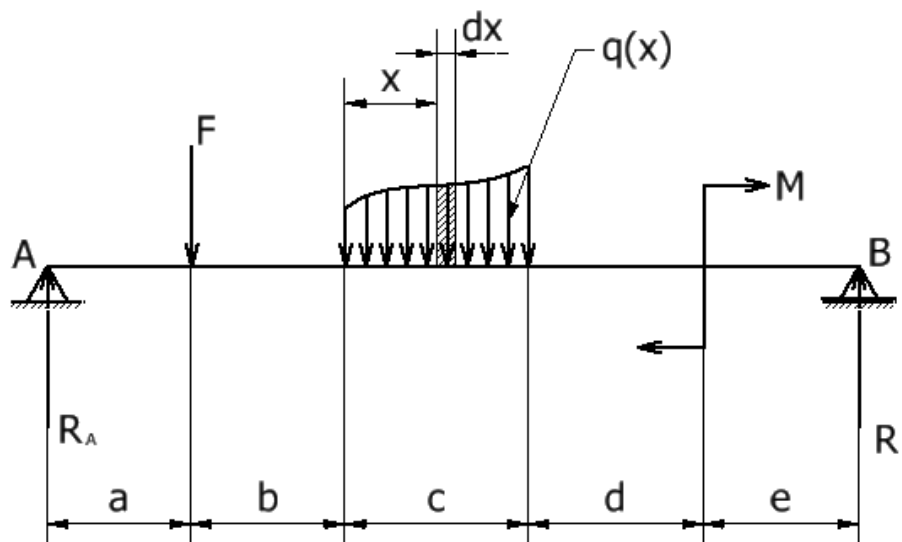
3.2.1 Typy namáhání na ohyb

Schematicky je možno zakreslit nosník do roviny a zatížit různými typy namáhání, viz obrázek (Obrázek 15). Působící síla F se nazývá osamělou silou, vyjadřující výslednici silového účinku jiného tělesa působícího na nosník. Předpoklad je, že styková plocha tohoto tělesa a nosníku je oproti délkovému rozměru nosníku zanedbatelná.

Spojité zatížení Q působí na nosník v délce c je definováno jako funkce $q(x)$ po délce x . Udává intenzitu silového účinku spojitěho zatížení na jednotku délky při určité, stálé šířce nosníku. Velikost tohoto zatížení se určuje integrací, která nám vypočte plochu pod křivkou, udávající velikost zatížení.

$$Q = \int_c dQ = \int_c q(x)dx \quad (38)$$

Tato zatížení jsou zakreslena na prizmatický nosník na obrázku (Obrázek 15), prizmatickým nosníkem je myšlen takový, který má po celé své délce stejný průřez.



Obrázek 15 Typy namáhání prismatického nosníku

Silová dvojice neboli moment M je silový účinek umístěný do jediného bodu. Též se nazývá osamělou silovou dvojicí. [1], [2], [13], [19], [20]

3.2.2 Metoda momentových ploch

Celkový ohybový moment se určuje jako součet momentů všech silových účinků po jedné straně myšleného řezu vůči řezu, to znamená, že v tomto místě se vytváří reakce a celý systém se tím uvede do rovnováhy. Vztahy mezi ohybovým momentem, posouvající silou a vnějším zatížením udává Schwedlerova věta

$$\frac{dM(x)}{dx} = T(x); \frac{dT(x)}{dx} = -q(x); \frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \quad (39)$$

[1], [2]

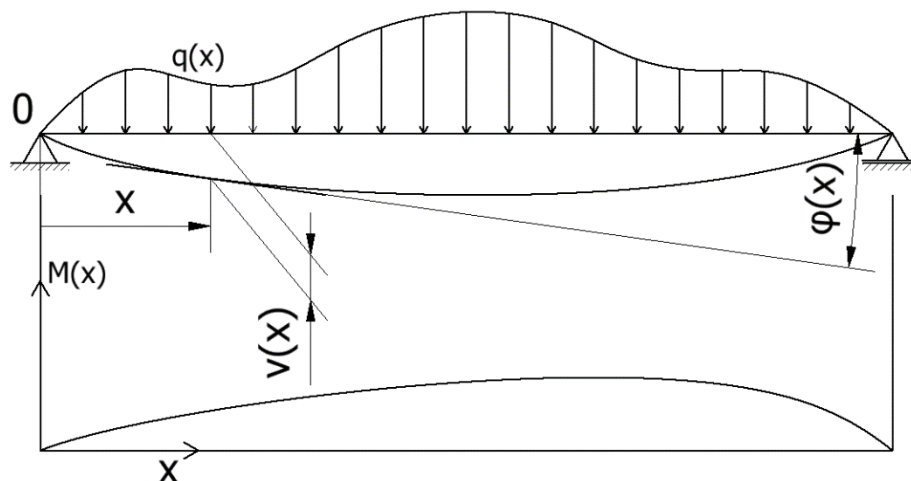
Metoda momentových ploch, také Mohrova metoda, pro řešení deformací nosníků ohybem je založena na Schwedlerových větách (39) pro ohybový moment a posouvající sílu a diferenciální rovnici, která popisuje úhel natočení a průhyb.

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \text{ a } \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x) \quad (40)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{M(x)}{EJ_z} \text{ a } \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ_z} \quad (41)$$

kde T je posouvající síla, q je spojité zatížení, M je silová dvojice, x je vzdálenost myšleného řezu od počátku, φ je úhel natočení, E je modul pružnosti v tahu a J_z je kvadratický moment průřezu.

Důležitou částí metody momentových ploch pro výpočet průhybu nosníku je fiktivní zatížení náhradního nosníku ve tvaru momentové plochy vzniklé působením zatížení. Náhradní nosník obecně nemá totožné uložení jako nosník vyšetřovaný, ale okrajové podmínky pro vnitřní účinky musí být stejné u fiktivního zatížení náhradního nosníku jako okrajové podmínky pro deformace na skutečném nosníku.



Obrázek 16 Model k výpočtu nosníku metodou momentových ploch

Po určení okrajových podmínek je deformace určena následovně:

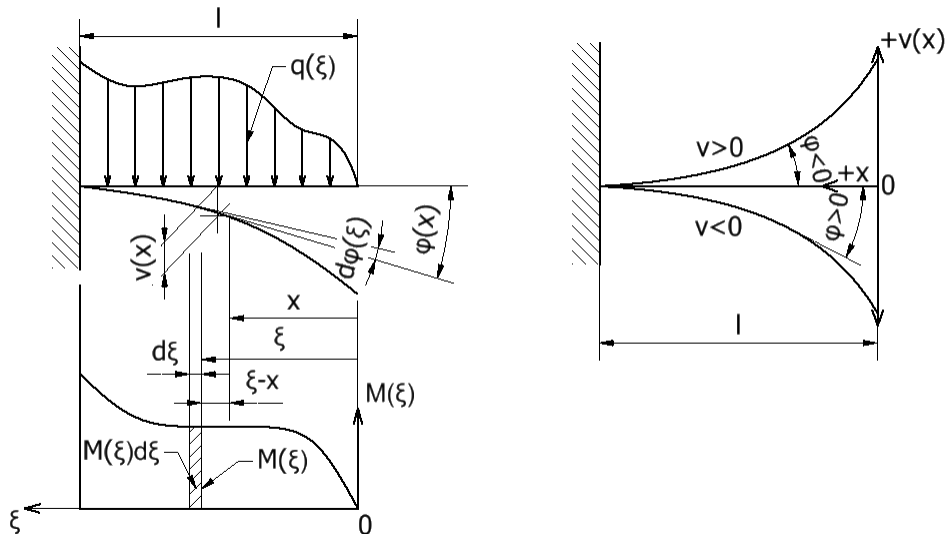
Průhyb

$$v(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot [M_f] = \frac{1}{E \cdot J_z} [\text{ohybový moment od fiktivního zatížení}] \quad (42)$$

Úhel natočení:

$$\varphi(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot [T_f] = \frac{1}{E \cdot J_z} [\text{posouvající síla od fiktivního zatížení}] \quad (43)$$

Tento postup ale nelze aplikovat u vetknutých nosníků, kde nejsou splněny odpovídající okrajové podmínky. Z obrázku (Obrázek 17) vychází, že pro $\xi = l$ je fiktivní ohybový moment $M_f(l) \neq 0$, zatímco pro průhyb $v(l) = 0$, což neodpovídá reálnému stavu.



Obrázek 17 Model k výpočtu nosníku metodou momentových ploch u vetknutého nosníku

Je možno tedy psát

$$dv(\xi) = (\xi - x)d\varphi(\xi) = \pm \frac{M(\xi)}{EJ_z} (\xi - x)d\xi \quad (44)$$

$$d\varphi(\xi) = \pm \frac{M(\xi)}{EJ_z} d\xi \quad (45)$$

Následnou integrací těchto dvou rovnic pro určení úhlu natočení a průhybu v místě x je:

$$\text{průhyb } v(x) = \pm \int_x^l \frac{M(\xi)}{EJ_z} (\xi - x)d\xi \quad (46)$$

$$\text{úhel natočení } \varphi(x) = \pm \int_x^l \frac{M(\xi)}{EJ_z} d\xi \quad (47)$$

Výsledkem jsou vztahy pro výpočet průhybu a úhlu natočení ve zvoleném myšleném řezu $x \in \langle 0, l \rangle$:

Průhyb

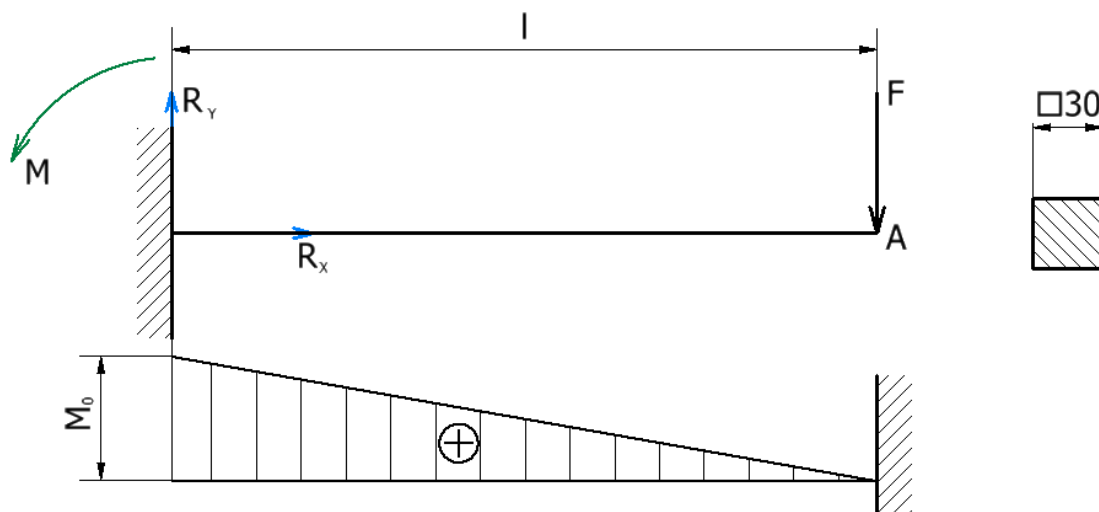
$$v(x) = \pm \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\text{lineární moment části momentové plochy mezi místem výpočtu a místem vetknutí} \right] \quad (48)$$

Úhel natočení:

$$\varphi(x) = \pm \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\text{plocha části momentové plochy mezi místem výpočtu úhlu natočení a místem vytknutí} \right] \quad (49)$$

Zda se jedná o kladné nebo záporné hodnoty se určuje dle zavedené soustavy souřadnic, ale znaménko při dosazování ohybového momentu do integrálu se vždy uvažuje kladné. [1], [2], [13], [14], [19], [20]

3.2.3 Příklad výpočtu vetknutého nosníku



Obrázek 18 Průběh ohybového momentu na vetknutém nosníku

Vetknutý nosník na obrázku (Obrázek 18) o délce $l = 2$ [m] je zatížen na svém převislém konci osamělou silou $F = 1000$ [N]. Kvadratický moment průřezu nosníku k je k neutrální ose I_z . Modul pružnosti v tahu materiálu je $E = 207$ [MPa]. Pro výpočet je použita metoda momentových ploch.

Nejprve je nutné vyšetřit průběh ohybového momentu, poté zatížit náhradní nosník fiktivním spojitým zatížením ve formě momentové plochy a podle výše uvedených vztahů určit průhyb a natočení. Vychází se ze vztahů (48), (49) uvedených dříve

$$\varphi(x) = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot T_f \quad (50)$$

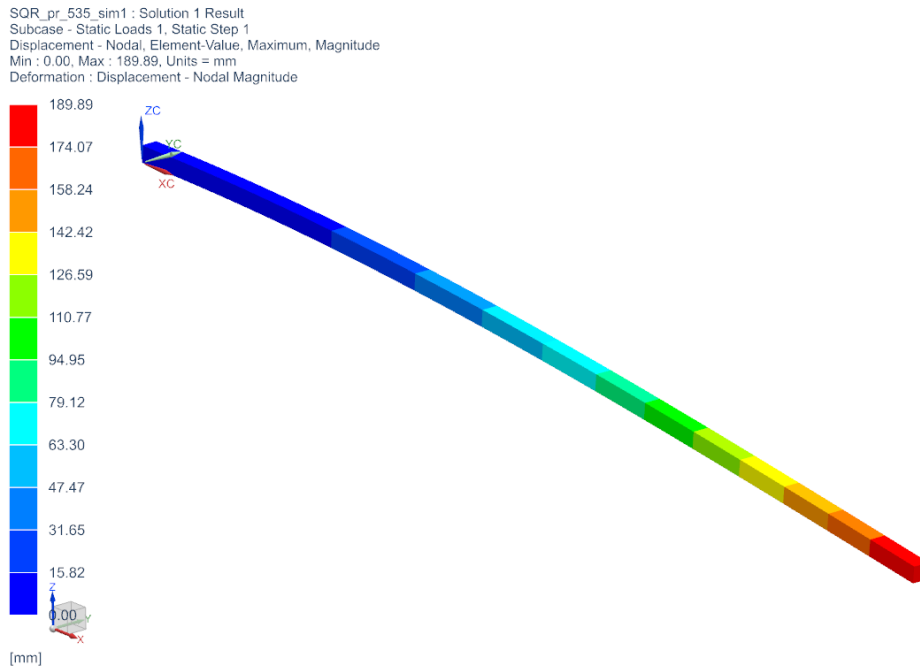
$$v(x) = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot M_f \quad (51)$$

Z průběhu momentu na náhradním nosníku je získána velikost spojitého zatížení pro dosažení do těchto rovnic. Po dosazení bude tedy

$$v_p = -\frac{1 Fl^3}{3 EI_z} = -\frac{1}{3} \frac{Fl^3}{E \cdot \frac{1}{12} a^4} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1000}{210 \cdot 10^6} \cdot \frac{2000^3}{\frac{1}{12} \cdot 30^4} = -190,085 \text{ mm} \quad (52)$$

$$\varphi = -\frac{1 Fl^2}{2 EI_z} = -\frac{1}{2} \frac{Fl^2}{E \cdot \frac{1}{12} a^4} = -\frac{1}{2} \frac{1000 \cdot 2000^2}{210 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 30^4} = -1,141^\circ \quad (53)$$

Tyto výsledky je možné též pozorovat při provedení simulace v programu Siemens NX, metodou konečných prvků. Pro výpočet je uvažován stejný nosník s čtvercovým průřezem strany $a = 30$ mm, délky $l = 2$ m, který je zatěžován silou $F = 1000$ N na svém konci.



Obrázek 19 MKP řešení ohybu vetknutého nosníku – posunutí

Velikost posunutí dle simulace je $v_s = 189,89$ mm. Vychází tedy, že si výsledky průhybu simulace a výpočtu téměř odpovídají, rozdílná znaménka jsou způsobena orientací zavedeného souřadnicového systému. Jejich absolutní velikost je tedy podobná a procentuální rozdíl mezi výsledky činí

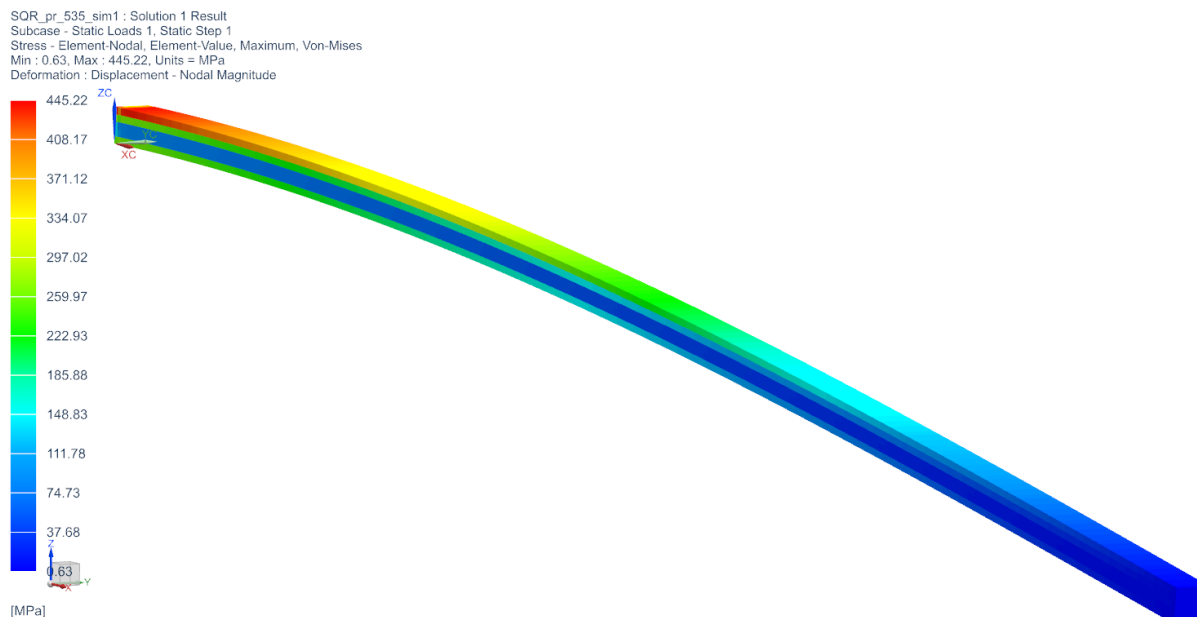
$$\frac{(v_p - v_s)}{v_p} = \frac{(190,085 - 189,89)}{190,085} = 0,1026 \% \quad (54)$$

kde v_p je vypočtený průhyb nosníku a v_s je průhyb určený simulací metodou konečných prvků. Rozdíl mezi těmito výsledky je zanedbatelně malý.

Další hodnotou k porovnání je napětí v krajních vláknech σ_p . Pro ruční výpočet je využit vztah dle [1], tedy

$$\sigma_p = \frac{M_k \cdot a}{2 \cdot I_z} = \frac{F \cdot l \cdot a}{2 \cdot \frac{1}{12} a^4} = \frac{1000 \cdot 2 \cdot 0,03}{2 \cdot \frac{1}{12} 0,03^4} = 444,44 \text{ MPa} \quad (55)$$

Při řešení pomocí metody konečných prvků je použito stejné zadání jako pro výpočet průhybu a pro porovnání bude vzato maximální napětí na vrchní straně nosníku, v místě uložení.



Obrázek 20 MKP řešení ohybu vetknutého nosníku – napětí

Velikost napětí v krajním vlákně, tedy v uzlech krajních elementů, dle simulace je $\sigma_s = 445,22 \text{ MPa}$. Tento výsledek je téměř stejný jako výsledek ručního výpočtu. Rozdíl těchto hodnot je

$$\frac{(\sigma_s - \sigma_p)}{\sigma_s} = \frac{(445,22 - 444,44)}{445,22} = 0,175 \% \quad (56)$$

kde σ_p je vypočtené napětí při průhybu nosníku a σ_s je napětí určené simulací metodou konečných prvků.

Celkové výsledky jsou shrnuty v tabulce, kde jsou vypsány hodnoty průhybu a napětí pro ruční výpočet a pro výsledky simulace. Pro ruční výpočet je také vypočten úhel natočení, který ale nelze určit ze simulace a musel by být dopočítán ručně, ale kvůli předchozím výsledkům lze uvažovat, že výsledek bude opět velmi podobný.

Tabulka 2 Výsledky ohybu nosníku

Výpočet	Průhyb [mm]	Napětí [Mpa]	Úhel natočení [°]
Ruční	190,085	444,44	-1,141
MKP	189,89	445,22	-

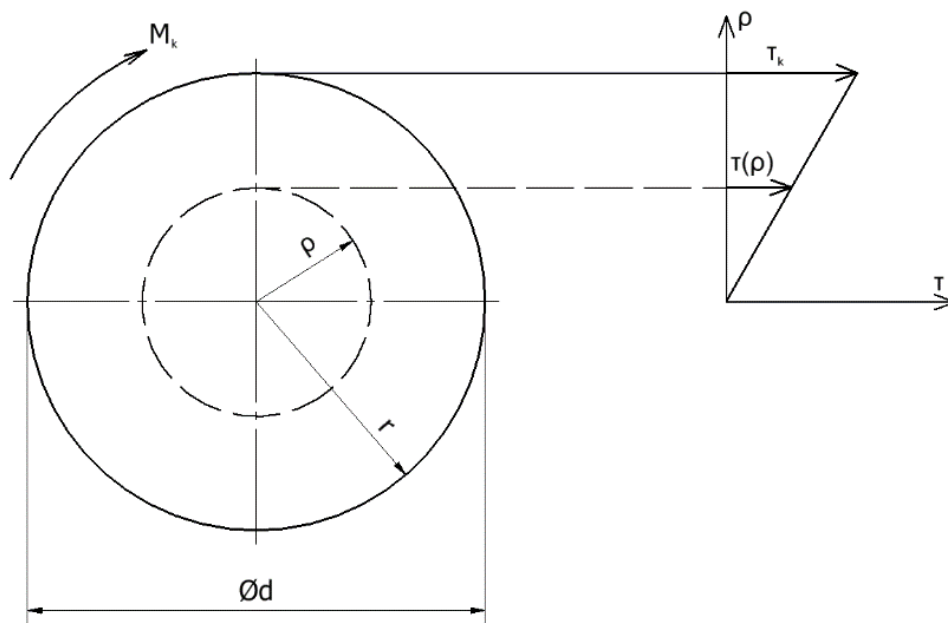
[3], [4], [19], [20]

3.3 Krut nosníků

Prut je namáhán na krut, pokud je namáhán dvojicí sil F , která se též nazývá torzním (kroutícím) momentem, jenž působí v rovině kolmé k ose trubky. Pro prostý krut platí, že výsledný účinek všech sil a momentů musí být moment ležící v rovině řezu. Vznikající vnitřní síly vyvolané kroutícím momentem M_k leží v rovině řezu θ , tudíž napětí, která vzniknou, jsou smyková napětí τ . Velikost tohoto napětí je možné určit na základě předpokladu, že deformace zůstávají při deformaci rovinné, průřez se pouze otáčí kolem osy tělesa a při předpokladu platnosti Hookova zákona ve vzdálenosti r určit napětí τ .

$$\tau(r) = \frac{M_k}{J_p} \cdot r, \quad (57)$$

kde M_k [Nm] je kroutící moment, J_p [mm⁴] je polární moment průřezu, ρ je vzdálenost od osy tělesa a r je průměr nosníku.



Obrázek 21 Průběh napětí na nosníku namáhaného krutem

Ze vztahu pro smykové napětí a obrázku vyplývá, že největší napětí bude působit na povrchu tělesa.

Ve vzdálenosti dx od prvního řezu θ je vytvořen druhý myšlený řez θ' , který bude oproti prvnímu natočený o úhel γ . Nazývá se zkso a jeho velikost je závislá na smykovém napětí a na modulu pružnosti ve smyku. V oblasti lineární závislosti mezi napětím τ a zkosem γ platí podobný zákon Hookovu pro napětí, nazývaný Hookův zákon pro smyk σ a poměrné prodloužení ε . Tedy

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (58)$$

kde G je materiálová konstanta nazývaná modul pružnosti ve smyku a jednotku má stejnou jako modul pružnosti v tahu E , tudíž MPa (N·mm⁻¹). [1], [2], [6], [13], [14], [15], [22]

3.3.1 Deformace při krutu pro hřídel

Deformace zkrucovaného hřídele se projevuje natočením o úhel $d\phi$ rovnoběžných průřezů v různých rovinách vzdálených od sebe o dx . Koncový průřez se oproti vetknutí natočí na své délce l o úhel ϕ . Pro určení úhlu natočení je využit výpočet oblouku Δ

$$\Delta = l \cdot \gamma = \phi \cdot r, \quad (59)$$

a tedy

$$\phi = \frac{l \cdot \gamma}{r} = \frac{l}{r} \cdot \frac{\tau_{max}}{G}. \quad (60)$$

τ_{max} je poté vyjádřeno ze předchozího vztahu (57) a dosazeno do úhlu natočení

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{J_p} \cdot r \rightarrow \varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_p} [rad] \quad (61)$$

Často se místo úhlu zkroucení využívá zkrut, také nazývaný poměrným úhlem zkroucení δ

$$\delta = \frac{d\varphi}{dx} [rad \cdot m^{-1}] \quad (62)$$

Zkrut δ vyjadřuje úhel zkroucení dvou rovnoběžných řezů kolmých na osu hřídele ve vzdálenosti dx . Pro prizmatický hřídel s délkou l bude z předcházejících vztahů platit

$$\delta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_K}{G \cdot J_p} \quad (63)$$

[1], [2], [6], [13], [22]

3.3.2 Příklad výpočtu kruhového nosníku namáhaného na krut

Vetknutý prut kruhového průřezu S ve vzdálenosti l je na svém konci zatížen kroutícím momentem M_K . Úkolem je zjistit průběh kroutícího momentu, úhlu pootočení (zkroucení) průřezu vůči vetknutí.

Pro vyšetření úhlu zkroucení bude uvažován ocelový nosník průřezu dutého válce o průměru $R = 30$ mm, tloušťkou stěny $t = 3$ mm, délce $l = 500$ mm a kroutícího momentu $M_K = 1000$ Nm, který bude působit na volném konci nosníku.

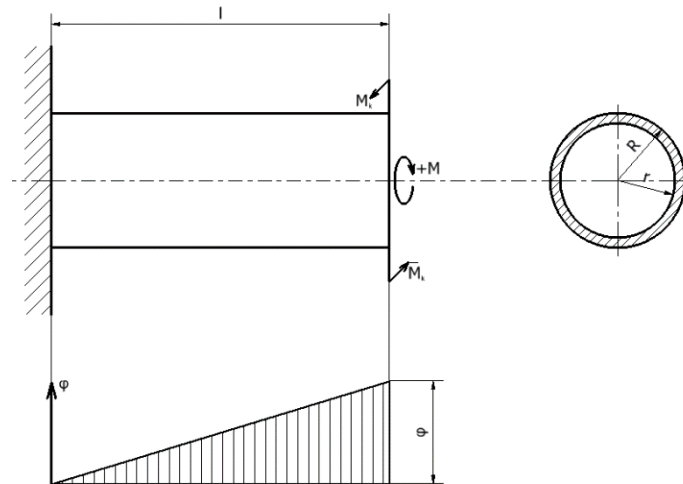
Nejdříve je potřeba určit průběh kroutícího momentu. Jelikož je prut namáhan pouze jedním momentem, bude konstantní po celé délce a . Je možné určit velikost smykového napětí podél prutu, ale pro výpočet úhlu zkroucení to není přímo třeba. Ale pokud budou využity zadané hodnoty a dosazeny do upraveného vztahu (61), je možné určit napětí:

$$\tau = \frac{M_K}{W_k} = \frac{M_K}{\frac{\pi}{16 \cdot R} (R^4 - r^4)} = \frac{16 \cdot 0,03 \cdot 1000}{\pi \cdot (0,03^4 - 0,024^4)} = 319,492 \text{ MPa} \quad (64)$$

Úhel zkroucení se vypočte pomocí předchozích vztahů (60), tudíž po dosazení bude

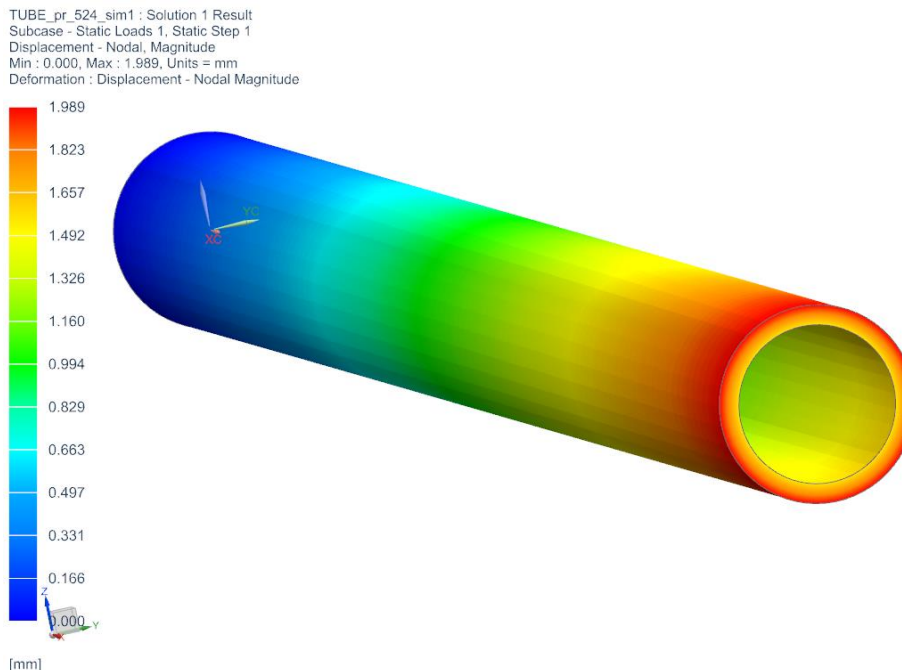
$$\varphi = \frac{M_K \cdot a}{G \cdot J_p} = \frac{M_K \cdot a}{G \cdot \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4)} = \quad (65)$$

$$= \frac{1000 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot \frac{\pi}{2} (0,03^4 - 0,024^4)} = 8,32 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,478^\circ \quad (66)$$



Obrázek 23 Průběh napětí na nosníku namáhaného krutem

Podobně jako v kapitole o průhybu nosníku zde byla použita pro kontrolu metoda konečných prvků v programu Siemens NX.



Obrázek 22 MKP řešení krutu vetknutého nosníku – posunutí

Díky této metodě jsou získány hodnoty posunutí, které je třeba přepočítat. Určení úhlu zkroucení může být využit pravoúhlý trojúhelník, tvořený vnějším průměrem průřezu a velikostí posunutí:

$$\varphi_{simulace} = \arctan \frac{\text{posunutí}}{R} = \arctan \frac{1,989}{30} = 3,793^\circ$$

Výsledky zkroucení si neodpovídají, rozdíl může být způsoben definicí zatížení krutem pro MKP výpočet podle kapitoly (2.6.3). Tento rozdíl simulace a ručního výpočtu bude zanedbán, jelikož budou všechny simulace definovány stejným způsobem. Je ale možné uvést výsledky takovéto simulace pro dokázání tvrzení, že se nejvyšší hodnota napětí vyskytuje na povrchu součásti. [3], [4], [22]

3.3.3 Krut u obdélníkových průřezů

Protože detailní analýza krutu nosníků nekrhových průřezů je velmi komplexní, bude se tato práce zabývat krutem u obdélníkových průřezů, kde jedna strana a je výrazně delší než druhá strana b . Experimentálně bylo zjištěno, že maximální smykové napětí vznikne uprostřed delší strany (Obrázek 24).

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{k_1 \cdot db^2} \quad (67)$$

kde k_1 je konstanta vycházející z poměru $\frac{a}{b}$. Hodnoty jsou uvedeny v tabulce (Tabulka 3) získané z teorie prof. S. Timoshenka [18], spolu s další konstantou k_2 , která opět vychází z poměru $\frac{a}{b}$ a využívá se ve výpočtu zkrutu.

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{M_K}{k_2 \cdot db^3 \cdot G'} \quad (68)$$

Tabulka 3 Hodnoty konstant k_1 a k_2 [18]

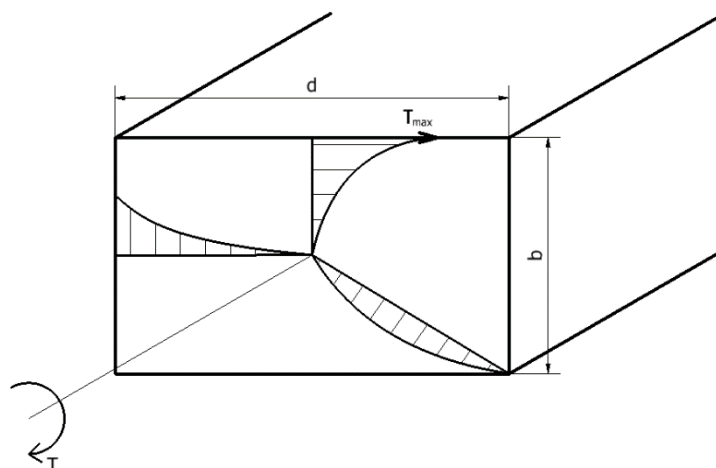
d/b	1.0	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
k1	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
k2	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

Pro velmi úzké průřezy se poměr $\frac{a}{b}$ blíží k $\frac{1}{3}$, takže pro poměr $\frac{a}{b} > 10$ jsou výše napsané vztahy zjednodušeny na

$$\tau_{max} = \frac{3 \cdot M_K}{db^2} \quad (69)$$

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{3 \cdot M_K}{db^3 \cdot G} \quad (70)$$

Hlavní rozdíl mezi rozložením napětí u kruhových a obdélníkových průřezů je vidět na obrázku níže, kde smykové napětí je nejvyšší ve středu nejdelší strany, nižší na kratší straně a má nulovou hodnotu ve středu průřezu.

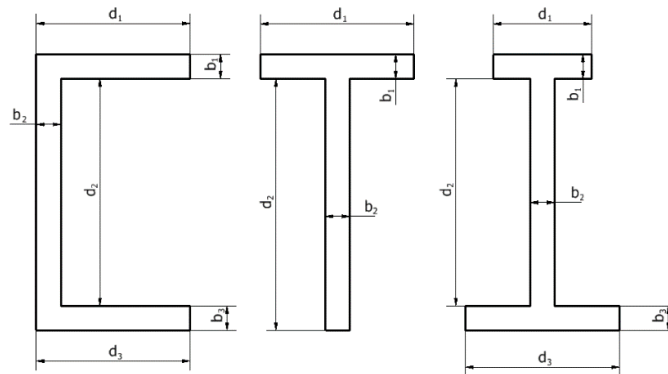


Obrázek 24 Rozložení smykového napětí v obdélníkovém průřezu

[5], [18]

3.3.4 Tenkostěnné otevřené průřezy

V technické praxi se velmi často využívají různé válcované průřezy z oceli nebo jiných slitin, kde dochází k určité úrovni namáhání na krut. Pro přibližné určení úhlu natočení se využívá nahrazení obdélníkového průřezu eliptickým se stejnou plochou S a stejným polárním momentem J . K tomuto postupu jsou potřeba dodržet dvě podmínky, průřezy musí být otevřené a stěny musí dodržet poměr $\frac{a}{b} > 10$, aby byly považovány za tenké.



Obrázek 25 Průřezy tenkostěnných nosníků

Pro takové úlohy se rovnice přepisují pro obdélníkové nosníky na

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{k_1 \cdot db^2} = \frac{M_K}{Z'}, \quad (71)$$

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{M_K}{k_2 \cdot db^3 \cdot G} = \frac{M_K}{J_{ef} \cdot G}, \quad (72)$$

kde Z' je modul pružnosti v krutu

$$Z' = \sum k_1 db^2 \quad (73)$$

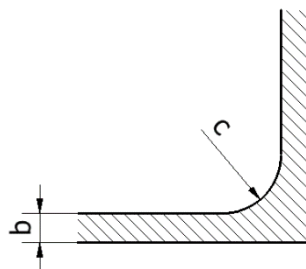
a J_{ef} je efektivní polární moment, ekvivalentní kvadratickému momentu původní plochy

$$J_{ef} = \sum k_2 db^3 \quad (74)$$

Pro započtení míst s koncentracemi napětí na hranách je maximální napětí násobeno

$$\left[1 + \frac{b}{4c} \right], \quad (75)$$

kde b je šířka plochy a c je poloměr oblouku, který vznikne v ohybu.



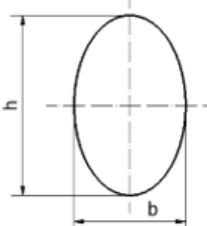
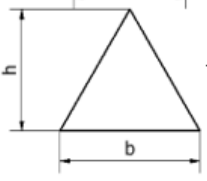
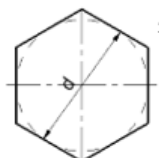
Obrázek 26 Koncentrace napětí na hranách

[5], [16], [18]

3.3.5 Plné průřezy

Pro řešení plných uzavřených nekuhových průřezů mohou být použity dva postupy. První z těchto postupů spočívá v náhradě vyšetřovaného nosníku pomocí eliptického průřezu se stejnou plochou a stejným polárním momentem jako původní nosník. To lze využít v několika případech vypsanych v tabulce (Tabulka 4). Druhým postupem, který lze aplikovat pro všechny plné průřezy je metoda vepsané kružnice popsána prof. Reymondem J. Roarkem [5].

Tabulka 4 Krut nosníku nekuhových plných průřezů

	Maximální smykové napětí	Úhel natočení na jednotku délky
 <p>Eliptický průřez</p>	$\frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot b^2 \cdot h}$	$\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot M_k \cdot J_p}{S^4 \cdot G}$
 <p>Trojúhelníkový průřez</p>	$\frac{20 \cdot M_k}{b^3}$	$\frac{46 \cdot 2M_k}{b^4 \cdot G}$
 <p>Šestiúhelníkový průřez</p>	$\frac{M_k}{0,217 \cdot S \cdot d}$	$\frac{M_k}{0,133 \cdot S \cdot d^2 \cdot G}$

Druhý postup je univerzálnější a říká, že pokud je libovolný plný průřez nosníku namáhán na krut, tak se maximální smykové napětí projeví na největší vepsané kružnici, kterou lze vytvořit v plném průřezu. Standartně k tomuto dochází v místech, kde je křivost povrchu průřezu nejmenší, konvexní křivky jsou vzaté pozitivně a konkávní, neboli vratné křivky, jsou vzaté záporně. Maximální smykové napětí se určí ze vztahu

$$\tau_{max} = \left(\frac{G \cdot \varphi}{l} \right) C \quad , \quad (76)$$

kde τ_{max} je maximální smykové napětí, G je modul pružnosti v krutu, φ je úhel natočení a l je délka vyšetřovaného nosníku. C je konstanta, která má rozdílný výpočet pro pozitivní a pro negativní křivky. Výpočet pro pozitivní C je dle [5]

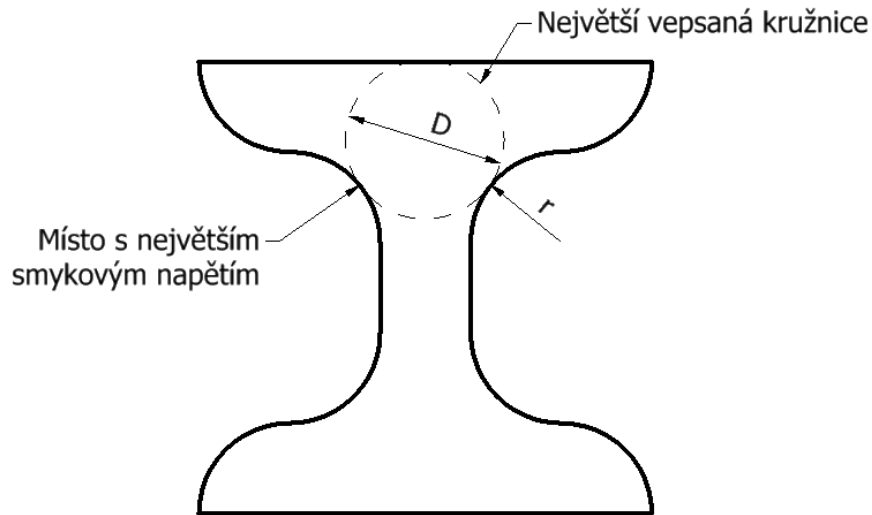
$$C = \frac{D}{1 + \frac{\pi^2 D^4}{1 + 16S^2}} \left[1 + 0.15 \cdot \left(\frac{\pi^2 D^4}{1 + 16S^2} - \frac{D}{2r} \right) \right] \quad , \quad (77)$$

kde D je největší průměr, který je možný vepsat průřezu, r je poloměr křivosti povrchu ve zvoleném místě a S je plocha průřezu.

Pro negativní konstantu C podle [5] platí

$$C = \frac{D}{1 + \frac{\pi^2 D^4}{1 + 16S^2}} \left[1 + \left\{ 0,118 \cdot \log_e \left(1 - \frac{D}{2r} \right) - 0,238 \frac{D}{2r} \right\} \cdot \tanh \left(\frac{2\theta}{\pi} \right) \right], \quad (78)$$

kde θ je úhel, o který se tečna k hranici natočí při průchodu druhou pozicí dotyku v radiánech a r je zde dosazováno záporně.



Obrázek 27 Vepsání největší kružnice do nosníku

[5], [16], [18]

4 Zvyšování efektivity průřezu

Tvarované průřezy přenášejí působící napětí s větší efektivností než plné průřezy. Tímto je myšleno průřezy ve tvarech trubek, dutých obdélníkových průřezů nebo často v praxi používaných I nosníků. Pro další zvýšení efektivity průřezu se využívají úpravy makrostruktury pomocí změny vnitřní struktury průřezu, jakou je například vytvoření včelí plástve nebo jehlanových útvarů.

Do řešení tedy často vstupuje několik různých materiálů s různými možnými průřezy, například rám kola, který je namáhán na ohyb, může být tvořen plným obdélníkovým průřezem ze dřeva, které podle kapitoly (4.7.1) bude podle grafu efektivnější než podobný průřez tvořený ocelí. Nicméně pokud by byl využit ocelový tenkostěnný eliptický průřez, je možné dojít k lepším výsledkům než u dřeva, nicméně takových možností je ale více. Bylo by dosaženo lepších výsledků, pokud by byl použit dural s trojúhelníkovým průřezem s polymerovou výplní, nebo hořčíková slitina s I průřezem, který je vysoce efektivní proti ohybu? Tato kapitola se bude zabývat výběrem různých kombinací materiálu a průřezů pro zadané parametry a bude využívat teoretické základy uvedené v předchozích kapitolách.

Hlavním bodem je výběr nejlepší kombinace materiálu a průřezu pro typ namáhání. V této práci budou tyto namáhání řešeny každé zvlášť, protože řešení komplexních zatížení nosníků je velmi složité a vyžaduje daleko rozsáhlejší práci, než je tato. V praxi jsou všechny nosníky namáhány vlastní tíhou nebo například tepelnou roztažností. Výsledkem by měli být optimalizované nosníky pro ohyb a krut. Pro tah je důležitá hlavně plocha průřezu, zatímco tvar se neprojevuje vůbec, tudíž libovolný průřez bude stejně dobře přenášet tah jako jiný se stejnou plochou průřezu. U ohybu však tvar průřezu může znamenat rozdíl mezi nevyhovujícím a těžkým nosníkem a nosníkem splňujícím maximální průhyb a zároveň s výrazně nižší hmotností. Podobně u krutu, kde je ale daleko menší výběr ze vhodných průřezů. Nejvhodnějšími průřezy jsou kruhové, díky největší vzdálenosti největšího množství materiálu od osy působení kroutícího momentu.

Pro rozlišování efektivity nosníků jsou zavedeny dva tvarové faktory φ , jeden pro elastický ohyb nosníků φ_O^e a druhý pro elastické zkroucení prutu φ_K^e . Prof. Ashby též definoval další dva tvarové faktory pro plastické deformace, ale tím se tato práce nebude zabývat. Jsou zavedeny tabulky hodnot tvarových faktorů pro různé tvary průřezů. [8], [9], [10], [11]

4.1 Výběr materiálu pro daný průřez a namáhání

Je nutné dbát na zadané konstrukční požadavky při návrhu řešení, které se mohou velmi lišit. Jedním z možných návrhů nosníku je na požadovanou pevnost, respektive kolik tíhy je nosník schopen vydržet, bez ohledu na jeho rozměry. V jiných případech mohou být vyžadovány malé rozměry nosníku, aby byl stále schopen vydržet zatížení, ale tato práce se bude soustředit na řešení případu nosníku s nízkou hmotností. Tato práce se zabývá návrhem z hlediska tuhosti. [8], [9], [10], [11]

4.1.1 Zvolení průřezu

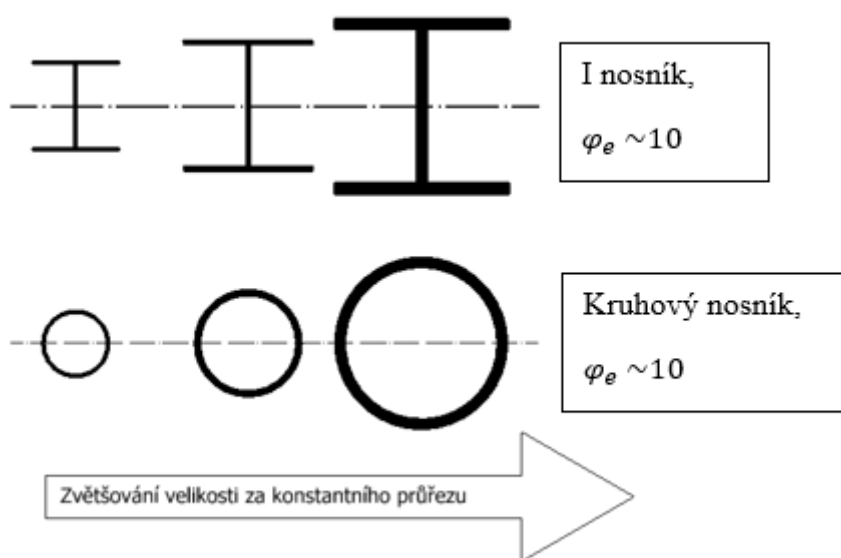
Prvním krokem při návrhu je zjištění typu namáhání na navrhovanou součást. Typy namáhání jsou detailněji popsány v další kapitole této práce, ale například krut je velmi dobře přenášen kruhovými a trubkovými průřezy než čtvercovými průřezy, díky lepšímu rozložení hmoty ve vzdálenosti od středu. Jelikož je namáhání krutem nejvyšší na povrchu nejbližším ke středu, je kruhový průřez velmi výhodný, protože se napětí rovnoměrně rozprostře po celém povrchu. [1], [2], [5]

4.1.2 Výběr materiálu

Obecně se výběr materiálu řídí konstrukčními požadavky a pro konkurenceschopnost návrhu je třeba využít materiál efektivně – při přenosu daného namáhání využívat co nejnižší množství materiálu, který zároveň nebude příliš drahý na použití. Například pro výrobu kuchyňských vidliček sice je možno využít slitinu titanu, která bude lehká, zdravotně nezávadná a nesmírně tuhá, ale zároveň by takový produkt nebyl konkurenceschopný kvůli vysoké ceně. Daleko efektivnější je využít řádově levnější ocel, která bude splňovat stejné požadavky. [8], [9], [10], [11]

4.1.3 Účinnost a tvarový faktor průřezu

Účinnost průřezu vyjadřuje, jak efektivně je materiál při zatížení využíván. Vychází z průřezových charakteristik a liší se pro každý průřez. Tvarový faktor (anglicky shape factor) je bezrozměrná veličina charakterizující průřez.



Obrázek 28 Zachování hodnoty účinnosti průřezu při jeho zvětšení

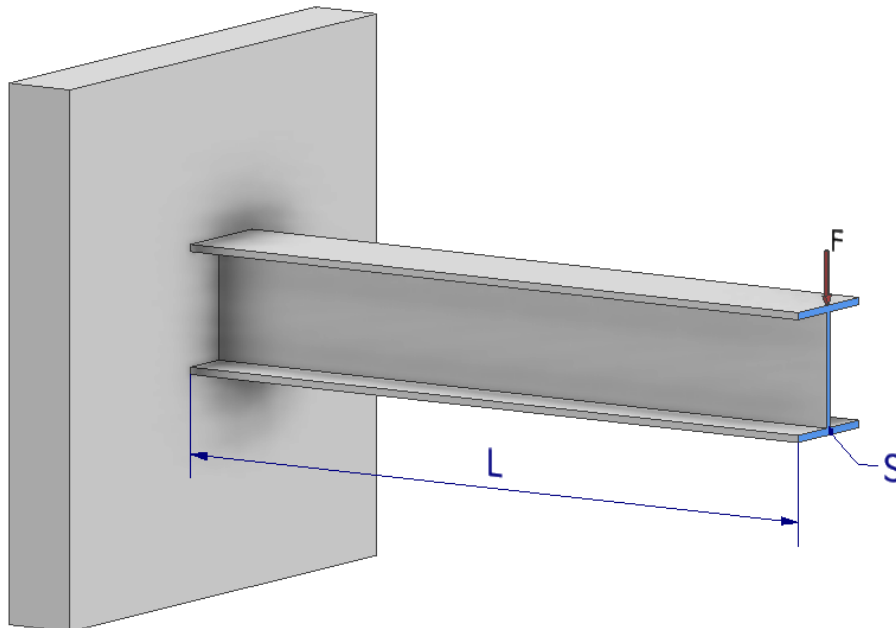
Každý z těchto průřezů je přibližně desetkrát tužší v ohybu než plný čtvercový průřez se stejnou plochou. Touto úpravou lze dosáhnout významných úbytků nákladů na materiál a snížení celkové hmotnosti konstrukce. Dle [8], [9], [10], [11] je definován tvarový faktor elasticity pro ohyb φ_e

$$\varphi_e = \frac{k}{k_0} = \frac{EI}{EI_0} = 12 \frac{I}{S^2}, \quad (79)$$

kde k je tuhost upraveného průřezu, k_0 je tuhost kruhového průřezu stejné plochy, E je modul pružnosti v tahu, I je kvadratický moment upraveného průřezu, I_0 je kvadratický moment kruhového průřezu stejné plochy a S je plocha průřezu. [8], [9], [10], [11]

4.1.4 Určení minimální hmotnosti nosníku

Je uvažován nosník průřezu I s hmotností m , plochou průřezu S , délkou L , hustotě ρ , tuhosti S , momentu plochy I a modulem pružnosti v tahu E



Obrázek 29 Vetknutý nosník průřezu I namáhaný na ohyb

Úkolem je minimalizovat hmotnost, kde

$$m = SL\rho \quad (80)$$

kde m je získaná hmotnost nosníku, S je plocha průřezu, L je délka nosníku a ρ je hustota materiálu, ze kterého je nosník tvořen.

Ze vztahu pro výpočet elastického tvarového faktoru (79) je

$$\varphi_e = 12 \frac{I}{k^2}; I = \frac{S^2}{12} \quad (81)$$

Z těchto vztahů se dosazením získá

$$m = \left(\frac{12kL^3}{C} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\rho}{(E)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (82)$$

kde C je konstanta závislá na typu nosníku, viz obrázek (Obrázek 30)

A hledaný materiál by měl mít nejnižší podíl hustoty ρ a modulu pružnosti v tahu E

$$\left(\frac{\rho}{(E)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (83)$$

[8], [9], [10], [11]

4.2 Koeficient pro elastický ohyb

První z koeficientů, tedy pro elastický ohyb, vychází z tuhosti tvarovaného nosníku vůči tuhosti plného kruhového průřezu se stejnou plochou, nebo také z poměru kvadratických momentů podle tabulky vůči plnému průřezu kruhového tvaru, tedy

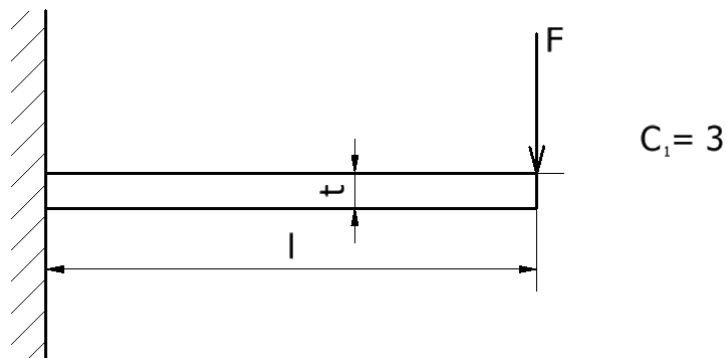
$$\varphi_e^0 = \frac{k^0}{k_0^0} = \frac{I}{I_0} , \quad (84)$$

kde S_0 je plocha neupraveného průřezu, S_0^0 je plocha upraveného průřezu, I je kvadratický moment upraveného průřezu a I_0 je kvadratický moment původního průřezu.

Tuhost nosníku k_0 o délce l , materiálu s modulem pružnosti v tahu E bude

$$k_0 = \frac{C_1 \cdot E \cdot I}{l^3} , \quad (85)$$

kde k_0 je tuhost nosníku, C_1 je konstanta závislá na typu nosníku, v tomto případě se jedná o vetknutý nosník, viz obr. (Obrázek 30), E je modul pružnosti v tahu, I je kvadratický moment průřezu a l je délka nosníku.



Obrázek 30 Model vetknutého nosníku průřezu I namáhaného na ohyb

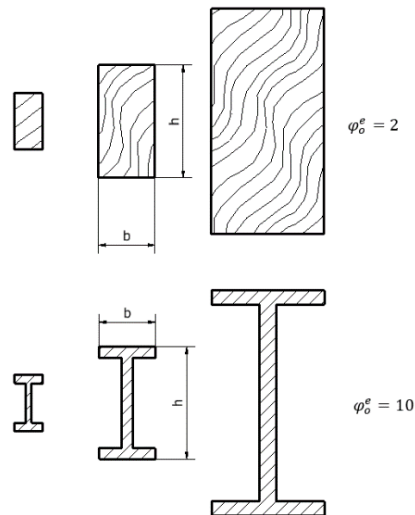
a kvadratický moment kruhového nosníku byl určen v kapitole (2.5.1), tudíž zjednodušeně

$$I = \int_{\text{průřez}} y^2 dS = \frac{S^2}{4\pi} , \quad (86)$$

kde S je plocha vyšetřovaného průřezu.

Pokud je dosazeno do vztahu pro elastický ohyb, je

$$\varphi_e^0 = \frac{4\pi I}{S^2} [-] \quad (87)$$



Obrázek 31 Zachování hodnoty koeficientu pro elastický ohyb při zvětšení nosníku

Tento koeficient je bezrozměrný a stejný pro velké i malé nosníky stejných tvarů průřezů. Demonstrováno je to na obrázku (Obrázek 31), kde se nemění tvar nosníků, ale pouze jejich velikost, tudíž φ_0^e zůstává stejný. Samotná hodnota udává, kolikrát je vyšetřovaný průřez tužší v ohybu než plný průřez stejné plochy průřezu. Hodnoty tvarového faktoru pro některé používané průřezy jsou uvedeny v tabulce (Tabulka 5). [8], [9], [10], [11]

Tabulka 5 Hodnoty tvarových koeficientů různých průřezů

Název průřezu	Tvar průřezu	φ_0^e	φ_K^e
Dutý čtvercový průřez		$\frac{\pi b}{6 t}$	$\frac{\pi b}{6 t} \left(1 - \frac{t}{b}\right)^4$
Dutý eliptický průřez		$\frac{a \left(1 + \frac{3b}{a}\right)}{t \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2}$	$\frac{8(ab)^{\frac{5}{2}}}{t(a^2 + b^2)(a + b)^2}$
Dutý obdélníkový průřez		$\frac{\pi h \left(1 + \frac{3b}{h}\right)}{6 t \left(1 + \frac{b}{h}\right)^2}$	$\frac{\pi b^2 h^2}{t(h + b)^3}$
I průřez		$\frac{\pi h \left(1 + \frac{3b}{h}\right)}{6 t \left(1 + \frac{b}{h}\right)^2}$	$\frac{\pi h \left(1 + \frac{4h}{b}\right)}{6 t \left(1 + \frac{h}{b}\right)^2}$
T průřez		$\frac{\pi h \left(1 + \frac{4bt^2}{h^3}\right)}{6 t \left(1 + \frac{b}{h}\right)^2}$	$\frac{\pi t \left(1 + \frac{8b}{h}\right)}{6 h \left(1 + \frac{b}{h}\right)^2}$
H průřez		$\frac{\pi h \left(1 + \frac{4bt^2}{h^3}\right)}{6 t \left(1 + \frac{b}{h}\right)^2}$	$\frac{\pi t \left(1 + \frac{4b}{h}\right)}{6 h \left(1 + \frac{b}{h}\right)^2}$

4.3 Koeficient pro elastický krut

Tvary průřezů odolných vůči ohybu často nebývají efektivní vůči krutu, proto je zaveden koeficient pro elastický krut φ_K^e . Na rozdíl od ohybu se koeficient pro krut určuje z tuhosti v krutu k_K a kvadratického momentu v krutu J_p . Tuhost prutu v krutu je

$$k_K = \frac{J_p \cdot G}{l}, \quad (88)$$

kde J_p je kvadratický moment v krutu a je uveden v tabulce (Tabulka 1), G je modul pružnosti v krutu a l udává délku nosníku. Do výpočtu vstupuje kvadratický moment v krutu z výpočtu, který je uveden v kapitole (2.5.1), tudíž zjednodušeně

$$J_p = \int_{\text{průřez}} r^2 dS \quad (89)$$

kde dS je diferenciálně malá plocha ve vzdálenosti od středu r . Kvadratický moment slouží k výpočtu zkrutu, který je třeba pro určení samotného koeficientu. Tedy

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{J_p \cdot G}, \quad (90)$$

kde M_k je působící kroutící moment, l je opět délka nosníku, J_p je polární moment průřezu a G je modul pružnosti v krutu.

Tvarový faktor pro elastický krut je tedy poměr tuhosti v krutu k_K a polárního momentu J_p vůči stejným proměnným u plného kruhového průřezu stejné plochy průřezu. Tudíž

$$\varphi_K^e = \frac{k_K}{k_K^0} = \frac{J_p}{J_p^0} \quad (91)$$

Pokud bude do vztahu dosazeno za J_p^0 , který je známý z tabulky (Tabulka 1) pro plný kruhový průměr

$$J_p^0 = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{S^2}{2\pi} \quad (92)$$

Tím je získán vztah pro tvarový faktor pro elastický krut

$$\varphi_K^e = \frac{2\pi J_p}{S^2} [-] \quad (93)$$

Stejně jako pro ohyb, se zvětšujícími se rozměry prutu se nezvětšuje velikost koeficientu. Hodnoty některých používaných průřezů jsou uvedeny v tabulce (Tabulka 5). [8], [9], [10], [11]

4.4 Efektivita standartních průřezů

Standartními nosníky jsou myšleny nosníky bez vnitřní mikrostruktury, nebo komplexnější makrostruktury. Takové nosníky jsou často masově vyráběné pomocí válcování, tažení nebo jiných technologických postupů. Tvary průřezů nosníků jsou často omezeny praktickými limity jako tloušťkou stěn nebo možnostmi výrobce, protože výroba velmi specifických průřezů by byla obtížná a zároveň velmi drahá. Stejně tak přímo materiál ovlivňuje možné tvary průřezu, hlavně jeho vnitřní struktura. V této kapitole budou zkoumány průřezy a bude se empiricky zabývat průřezy reálných materiálů a zaznamenání jejich efektivity průřezu.

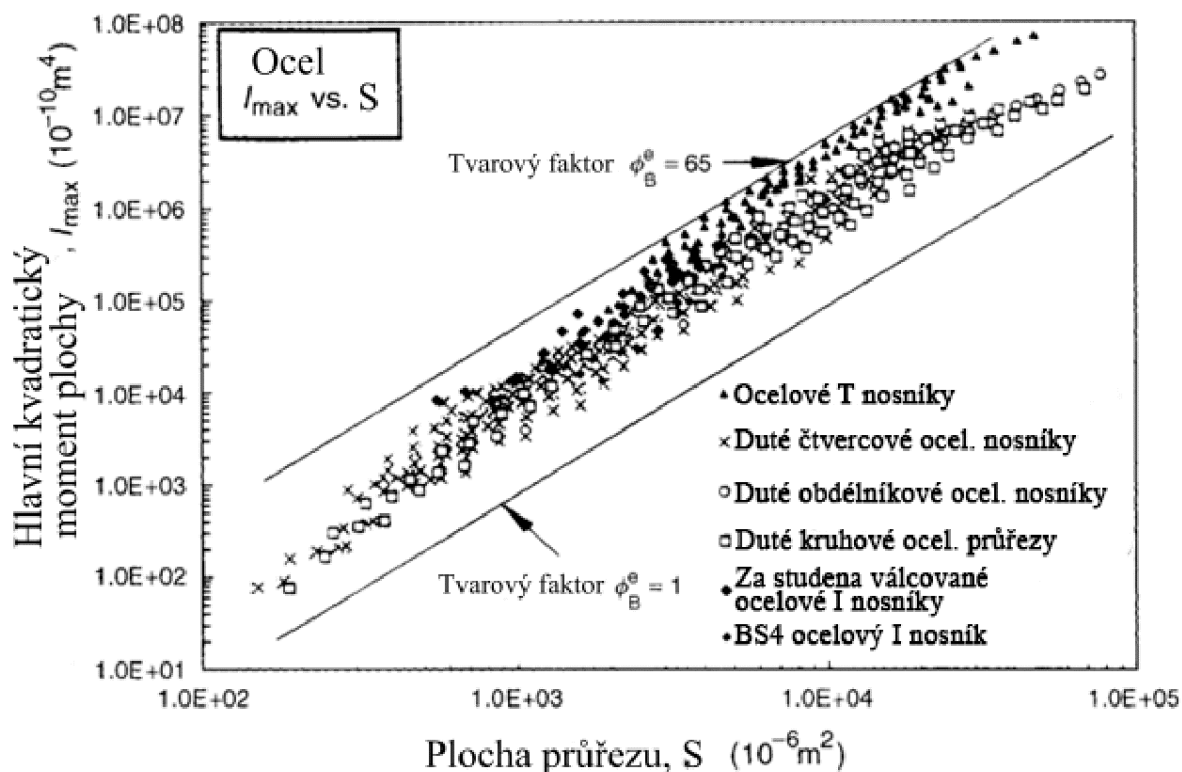
Zatěžovanou součást bude uvažován prismatický nosník. Takové nosníky jsou často tažené, frézované, protahované, válcované atd. pro různé materiály, s plným, uzavřeně-duté (jako dutý čtverec nebo trubkový), nebo otevřené (I, H, C profily). Zvolené materiály pro vyšetření jsou ocel, hliníková slitina, CFRB, polymer a dřevo. Z těchto vlastností materiálu, rozměru a průřezu, je možné zkoumat efektivitu průřezu.

Z následujícího grafu (Graf 2) je vidět, že se hodnoty pro tvarový faktor vyskytují v oblasti omezené dvěma křivkami. Rovnice pro ně je možné získat úpravou základní rovnice pro výpočet koeficientu. Tedy pro získání závislosti kvadratického momentu k ploše průřezu je:

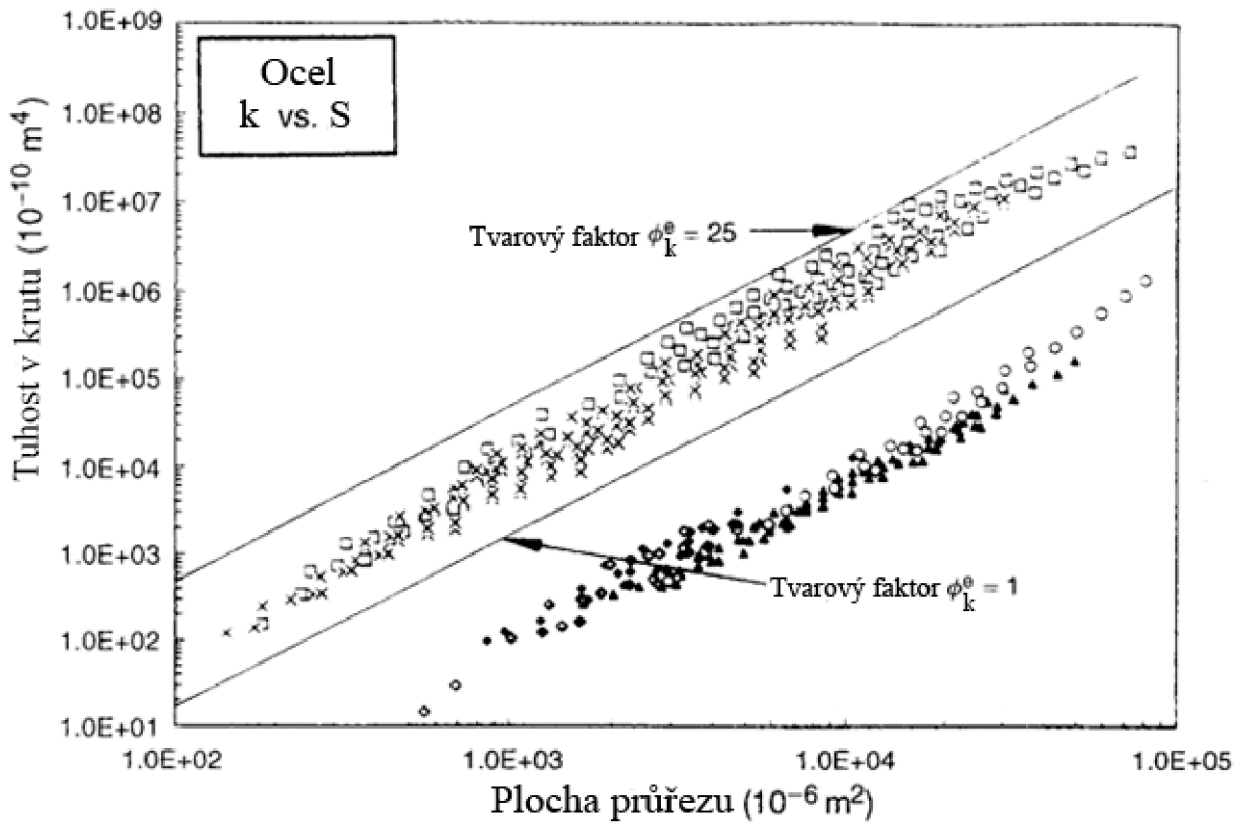
$$\log I = 2 \log S + \log \frac{\varphi_0^e}{4\pi} \quad (94)$$

kde I je kvadratický moment k ploše průřezu, S je plocha průřezu a φ_0^e je materiálový indikátor pro ohyb.

Znamená to tedy že se hodnoty koeficientu pohybují mezi dvěma paralelními křivkami určenými výše uvedeným vztahem (94) a také mezi hodnotami tvarového faktoru, kde hodnota $\varphi_0^e = 1$ znamená plný kruhový průřez a $\varphi_0^e = 65$, který je empirický horní limit pro tvarový koeficient charakterizující maximální tuhost jednoduchého ocelového nosníku. Analogicky lze získat vztah pro určení tuhosti v krutu, ze vztahu (93), který opět určí maximální hodnotu tohoto tvarového faktoru. Zde se vytvářejí dvě skupiny průřezů, neboť obecně jsou otevřené průřezy méně odolné na krut oproti kruhovým, viz graf (Graf 3). [8], [9], [10], [11]



Graf 2 Hodnoty kvadratického momentu pro ocelové nosníky [8]



Graf 3 Hodnoty momentu krutu plochy pro ocelové nosníky [8]

4.5 Materiálové indikátory obsahující tvar průřezu

Materiálové indikátory definované prof. Michaelem Ashbym [8], [9], [10], [11] jsou užitečným nástrojem pro návrh konstrukčních řešení. Tyto indikátory umožňují porovnat materiál vůči určitému kritériu, kterým je například tuhost, hmotnost, cena nebo i odolnost vůči opotřebení a díky přehlednosti a jednoduchosti vztahů jsou schopny pomoci rychle porovnat vlastnosti materiálů a nalézt nejvýhodnější materiál nebo v tomto případě průřez pro danou aplikaci.

Materiálový indikátor účinnosti je definován čtyřmi faktory

- Funkce obsahuje základní geometrii a typy namáhání součásti
- Limitující tuhost je hlavní kritérium, které musí být splněno, aby vyšetřovaná součást vyhověla konstrukčním požadavkům
- Cíl je hlavní proměnnou, která je optimalizována, například minimální hmotnost
- Proměnné jsou myšleny takové geometrické parametry, které je možno měnit, jako například tloušťka stěn

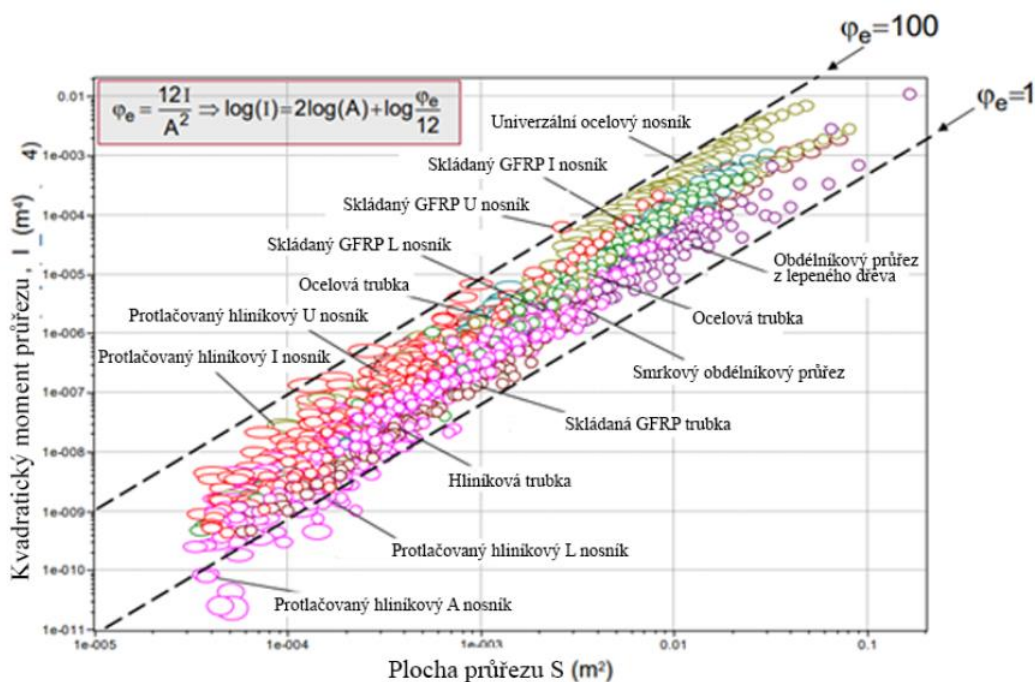
Zjednodušeně jsou materiálové indikátory podíl různých materiálových parametrů, které slouží ke zvýšení efektivity součásti. Výsledkem tohoto zlomku je číslo, které je možné snadno porovnat s dalšími kombinacemi.

Dalším prvkem při výběru efektivity různých materiálů jsou přímkové indikátory. Materiály, které se nacházejí na těchto liniích, jsou v daném případě stejně efektivní. Dále materiály, které se nacházejí v daném případě nad touto linií, mají vyšší účinnost a pod touto linií jsou méně efektivní a mají nižší hodnotu materiálového indikátoru.

Pro zvyšování efektivity kombinace materiálu a tvaru, pro daný způsob zatěžování, se využívá následujících metod popsaných v následujících podkapitolách (4.5.1, 4.5.2).

[8], [9], [10], [11]

Pro každý materiál existuje maximální tvarový faktor určovaný empiricky



Graf 4 Empirické hodnoty maximálních tvarových faktorů [10]

Tento graf je shrnut do tabulky pro některé používané materiály:

Tabulka 6 Maximální tvarový faktor pro některé materiály [23]

Materiál	Maximální φ_e
Oceli	65
Hliníkové slitiny	44
GFRP a CFRP	39
Polymery	12
Dřevo	8
Elastomery	<6

Pro určení hodnoty maximálního tvarového faktoru je možné využít materiálovou databázi GrantaEdu Pack [23]. U jiných materiálů lze využít vztah pro výpočet přibližného maximálního tvarového faktoru

$$\varphi_e \sim 2 \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}, \quad (95)$$

kde E je modul pružnosti v tahu a σ_y je mez kluzu u hledaného materiálu.

[8], [9], [10], [11]

4.5.1 Axiální napětí nosníku

Schopnost nosníku snášet tah nebo tlak o síle F , bez velké deformace, nebo dokonce selhání součásti, nezávisí na tvaru průřezu, ale pouze na ploše průřezu [1]. Aby platilo toto tvrzení je nutné zanedbat vzpěr. Indikátor, který určí minimální hmotnost pro určitou tuhost je $\frac{E}{\rho}$ a platí pro všechny tvary. Nicméně toto neplatí v případě ohybu nebo krutu. [8], [9], [10], [11]

4.5.2 Elastický ohyb a krut

Bude uvažován nosník z vybraného materiálu, který by měl mít tuhost k_o , délce l a úkolem je navrhnout nosník s minimální hmotností m . Výběr průřezu a materiálu musí zahrnout, že pro vybrané materiály se mění tvar průřezu. Z kapitoly (4.2) je znám vztah pro výpočet tuhosti nosníku, kde po dosazení I za φ_o^e , tedy

$$k_o = \frac{C_1 E}{4\pi l^3} \varphi_o^e S^2 \quad (96)$$

A pokud je využit tento vztah pro dosazení za plochu S , je získán vztah pro výpočet hmotnosti

$$m = \left[\frac{4\pi k_o}{C_1 l} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{\rho^2}{\varphi_o^e E} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (97)$$

kde k_o je tuhost nosníku v ohybu, C_1 je konstanta dle typu nosníku, ρ hustota materiálu, φ_o^e je materiálový indikátor v ohybu a E je modul pružnosti v tahu.

Pro nosníky, u kterých je hledaná nejnižší hmotnost skrze materiál, neboť tvar průřezu je daný, je hledán materiál s nejvyšší hodnotou poměru $\frac{E^{\frac{1}{2}}}{\rho}$. Toto platí u materiálů nejen plných průřezů, ale pro všechny tvary. Nicméně pokud je cílem získat kombinaci materiálu a průřezu pro tuhý a lehký nosník, je nejlepší možností ta s nejvyšší hodnotou indikátoru

$$M_1 = \frac{[E \varphi_o^e]^{\frac{1}{2}}}{\rho} \quad (98)$$

Postup pro určení kombinace materiálu a průřezu pro elastický krut je podobný jako pro určení této kombinace pro elastický ohyb. Prut s průřezem S a délkou l je namáhaný kroučícím momentem M_k , který jej natáčí o úhel natočení φ . Opět je úkolem získat nosník tuhý v krutu $\frac{T}{\varphi}$, aby bylo dosaženo potřebné tuhosti k_o . Tuhost v krutu je tedy

$$k_o = \frac{J_p G}{l} \quad (99)$$

Po nahrazení J_p pomocí φ_k^e je možné získat

$$m = \left[\frac{2\pi k_o}{l^3} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot l^3 \cdot \left[\frac{\rho^2}{\varphi_k^e G} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (100)$$

Nejlepší kombinace materiálu a tvaru pro namáhání krutem je ten s nejvyšší hodnotou ze vztahu (101).

Modul pružnosti v krutu je velmi podobný s modulem pružnosti v tahu E , pro praktické využití se přibližná hodnota G určuje jako $\frac{3}{8}E$. Poté indikátor pro tuhý a lehký nosník namáhaný na krut, kde je volen materiál i průřez, je nejlepší ten s nejvyšší hodnotou indikátoru

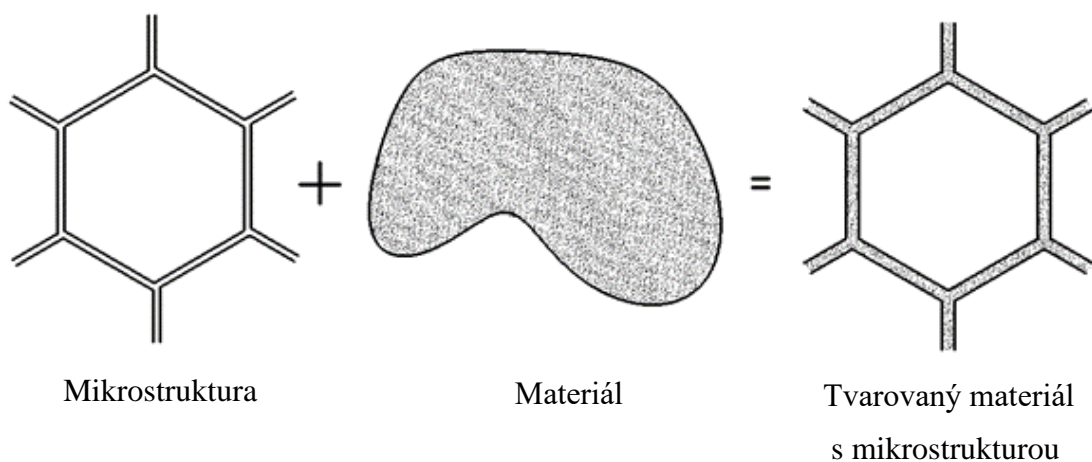
$$M_2 = \frac{\left[\frac{3}{8}E\varphi_K^e\right]^{\frac{1}{2}}}{\rho} \quad (101)$$

Pokud by bylo zadání: výběr materiálu pro určitý tvar, vztah by byl upraven na $\frac{1}{\rho} \frac{E^{\frac{1}{2}}}{\varphi_K^e}$.

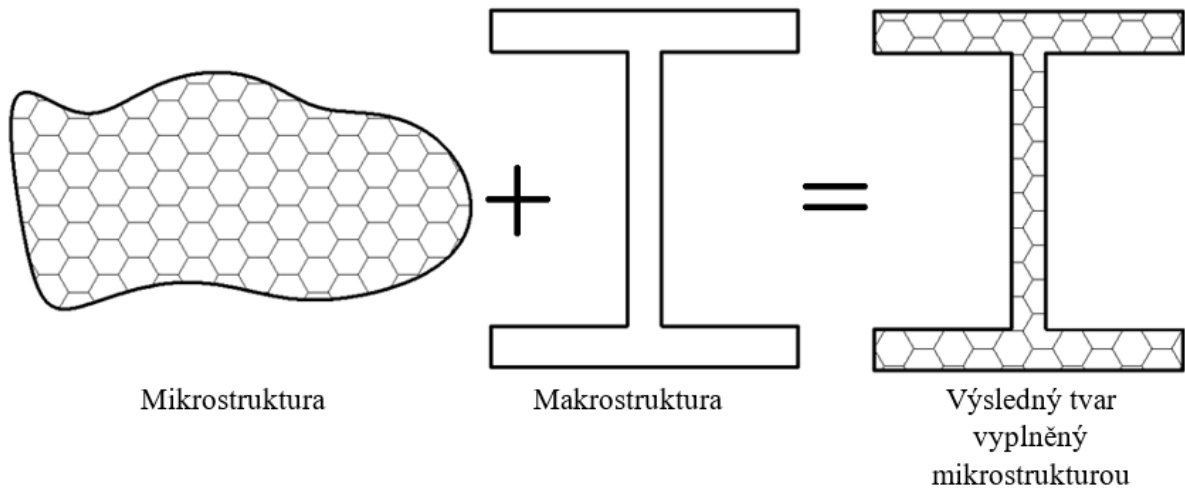
[8], [9], [10], [11]

4.6 Využití mikrostruktury ke snížení hmotnosti

V předchozí kapitole byl popsán postup zvyšování efektivity pomocí makrostruktury průřezu, respektive úpravou celého tvaru průřezu. Nicméně je možné upravit materiál v menším měřítku, jakým je změna tvaru výplně nosníku neboli mikrostruktury. Příkladem takového materiálu s mikrostrukturou jsou kompozity jako CFRP nebo dřevo, kde druhý ze zmíněných je kompozit celulózy, lignitu a dalších polymerů, je tvořen mikroskopickými buňkami, které se při ohybu nebo krutu posunou dále od osy, na kterou namáhání působí. Díky tomu má dřevo lepší vlastnosti v krutu a ohybu, než pokud by bylo tvořeno z čistého materiálu. Tato zvýšená efektivita je charakterizována veličinou nazývanou mikroskopický tvarový faktor ψ , jehož charakteristika a definice je stejná jako pro tvarový koeficient φ . Důležitou vlastností mikroskopické struktury je opakující se vzor, ale jinak lze uvažovat, že se jedná o další materiál, který má hustotu, pružnost, tuhost, jako ostatní materiály. Je možné vyplnit základní průřez s některou z mikrostruktur a tím získat lepší výsledky z hlediska tuhosti a hmotnosti nosníku než pouze úpravou makrostruktury. Nicméně velké množství přírodních materiálů také využívá mikrostruktury pro získání lepší tuhosti a hmotnosti, kromě dřeva se jedná o kosti nebo stonky rostlin, všechny mají vysokou tuhost a zároveň nízkou hmotnost.



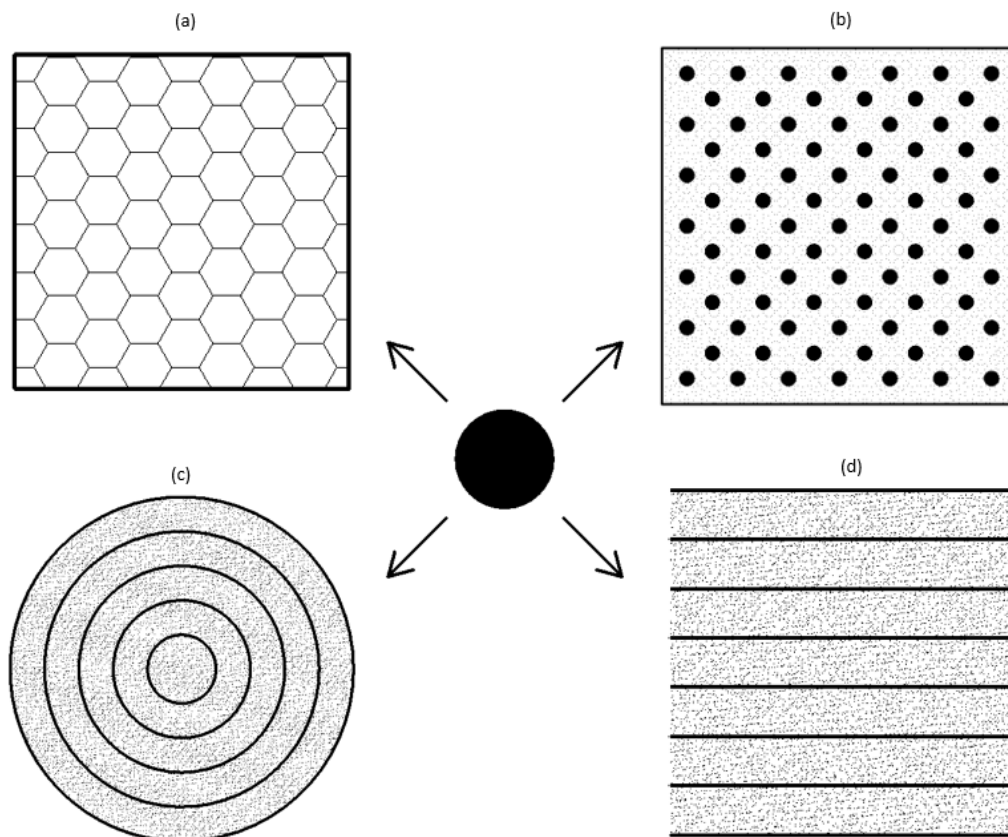
Obrázek 32 Tvarování materiálu pomocí mikrostruktury



Obrázek 33 Vyplnění makrostruktury mikrostrukturou

Příklady efektivních mikrostrukturních struktur při mechanickém namáhání jsou zobrazeny na obrázku (Obrázek 34), kde (a) jsou prismatické buňky, (b) jsou vlákna uložená ve pěnové matici, (c) jsou soustředné tvrdé vrstvy s pěnovou výplní a (d) ukazují paralelní vrstvy s pěnou jako mezivrstvou.

[8], [9], [10], [11]



Obrázek 34 Příklady efektivních mikrostruktur

4.6.1 Mikroskopický tvarový faktor

Pokud bude uvažován nosník jako plný kruhový průřez, jak je znázorněno černým kruhem na obrázku výše, a budou se zvětšovat rozměry beze změny hmotnosti, musí se snížit hustota a příkladem je změna vnitřní struktury do jedné z popsanych dřívě (Obrázek 34). Tuhost původního nosníku k_0 je

$$k_0 = \frac{C_1 E_0 I_0}{l^3}, \quad (102)$$

kde indexem 0 je myšleno vlastnostmi plného průřezu, tedy C_1 je konstanta podle typu nosníku, E je modul pružnosti v tahu, I je kvadratický moment průřezu. Pokud se tedy zvětšují rozměry nosníku, změní se hustota ρ_0 na ρ a zvětší se průměr nosníku r_0 na

$$r = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r_0 \quad (103)$$

s výsledným kvadratickým momentem se zvýší z původního I_0 na

$$I = \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \cdot r_0^4 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 I_0 . \quad (104)$$

Pokud budou elementy mikrostruktury paralelní s osou nosníku, modul pružnosti se z původního E_0 změní na

$$E = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) E_0 \quad (105)$$

A tedy výsledná tuhost takto upraveného prutu

$$k = \frac{C_1 EI}{l^3} = \frac{C_1 E_0 I_0}{l^3} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \quad (106)$$

Mikroskopický tvarový faktor ψ je definovaný stejným způsobem jako pro makroskopický. Jedná se o poměr tuhosti upraveného nosníku proti neupravenému. Tedy pro faktor v ohybu platí

$$\psi_0^e = \frac{k}{k_0} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (107)$$

Pro elastický krut je podobný, pouze se uvažuje kruhový průřez namáhaný na krut, tedy

$$\psi_0^e = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (108)$$

Tvarováním mikrostruktury nosníku se mění konstanty E_0 a působící sílu σ_0 na nové E a σ . Pokud je nosník s novou mikrostrukturou tvarován do efektivního tvaru, jako je I, nebo trubka, tak se ohybová tuhost zvyšuje o další faktor φ_0^e . Poté je tedy tuhost nového nosníku oproti původnímu plnému

$$k = \psi_0^e \cdot \varphi_0^e \cdot k_0 \quad (109)$$

Je možné uvažovat další úpravy vzniklých struktur, pomocí vložení další mikrostruktury do elementů, přidávající další koeficient do vztahu (109) výše. Tyto struktury mohou být dále v elementech rozloženy do struktur a tak dále. V přírodě se jedná o častý případ, ale pro technickou praxi je to nepraktické, ať už z hlediska vyrobitelnosti, ekonomické stránky nebo spolehlivosti, neboť pokud by struktura byla takovým způsobem maximálně optimalizována, selhání jednoho z nespočtu členů by způsobilo selhání celé součásti.

Jak bylo psáno výše, takováto výplň může být uvažována jako samostatný materiál s tuhostí, hustotou, tepelnou odolností a tak dále. Je možné je tedy relativně snadno zanášet do tabulek, pokud se ale tato mikrostruktura nestane příliš velkou, poté již nelze uvažovat, že je tato výplň jednotná a vyšetřování musí být řešeno jinak. [8], [9], [10], [11]

4.7 Kombinace materiálu a průřezu

Samotná optimalizace výběru kombinace materiálu a průřezu, může být provedena dvěma způsoby, buď počtně, kde vztahy pro výběr takové kombinace byly odvozeny v předchozích kapitolách, nebo graficky, který využívá materiálové databáze, jakými je Granta EduPack [23].

4.7.1 Výběr pomocí výpočtu

Pro příklad bude uvažován tuhý tvarovaný nosník s minimální hmotností. Na výběr je v tomto případě ze čtyř materiálů: ocel, hliníková slitina, polymer se skelnými vlákny a dubové dřevo.

Tvary a vlastnosti, ve kterých jsou tyto materiály dostupné, jsou charakterizovány pomocí φ_0^e . Je požadován nosník s minimální hmotností s největší hodnotou materiálového indikátoru M_1 ze vztahu (98) z předchozí kapitoly

$$M_1 = \frac{(\varphi_0^e \cdot E)^{\frac{1}{2}}}{\rho} \quad (110)$$

Po výpočtu jednotlivých hodnot je možné je sepsat do tabulky, tedy

Tabulka 7 Hodnoty pro kombinaci materiálu a průřezu [8]

Materiál	ρ	E	φ_{max}^*	$\frac{E^{\frac{1}{2}}}{\rho}$	$\frac{(\varphi_{max} E)^{\frac{1}{2}}}{\rho}$
	mg/m ³	Gpa	-		
1020 Ocel	7,85	205	65	1,8	14,7
6061-T4 Hliník	2,7	70	44	3,1	20,5
GFRP	1,75	28	39	2,9	19
Dubové dřevo	0,9	13,5	5	4,1	9,1

Předposlední sloupec vyjadřuje případ, kde je uvažován daný průřez, kde má nejlepší hodnotu dřevo, které je dvakrát tužší než ocel, při zachování stejné hmotnosti. Poslední sloupec ale ukazuje, že pokud bude uvolněn tvar tak, aby byl každý materiál využit efektivně, dřevo se dostane na poslední pozici a nejlepších výsledků dosahuje slitina hliníku. [8], [9], [10], [11]

4.7.2 Výběr pomocí grafické metody

Vlastnosti tvarovaných průřezů mohou být zobrazeny a poté vybrány pro hledanou kombinaci materiál – průřez. Pokud bude rovnice pro indikátor M_1 pro elastický ohyb přepsána, tak

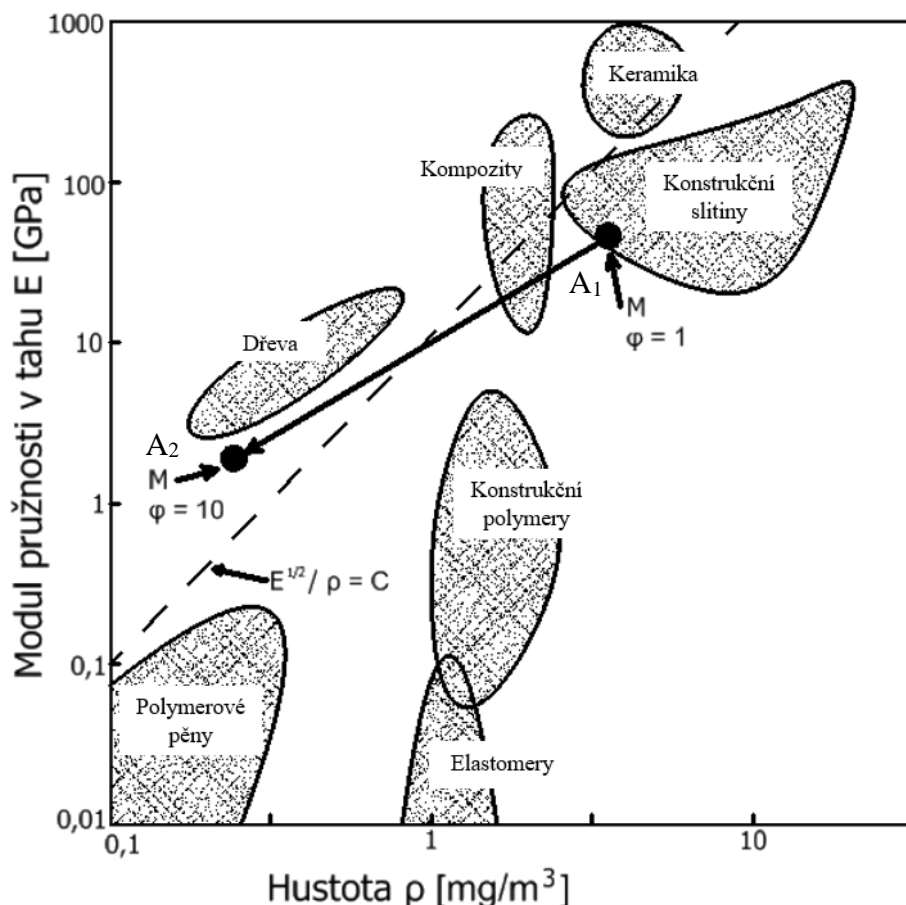
$$M_1 = \frac{(\varphi_0^e \cdot E)^{\frac{1}{2}}}{\rho} = \frac{\left(\frac{E}{\varphi_0^e}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\rho}{\varphi_0^e}} \quad (111)$$

Díky této úpravě je možné napsat pro materiál s modulem E a hustotou ρ , že pokud bude tento materiál upraven tvarovaným průřezem, bude se chovat jako materiál s modulem E^* a hustotou ρ^* , kde

$$E^* = \frac{E}{\varphi_0^e} \quad (112)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\varphi_0^e} \quad (113)$$

Poté je možné zobrazit graf $E-\rho$, do kterého je možné vložit hodnoty E^* a ρ^* . Bude uvažován nosník s tvarovým faktorem pro ohyb například $\varphi_0^e = 10$, tím dojde k pohybu uvažovaného materiálu M z původní pozice A_1 určené hodnotami E, ρ , které udávají hodnoty pro plný průřez stejné plochy, do polohy A_2 , která již vyjadřuje hodnoty pro upravený nosník, kde podle vztahů psaných výše je $E^* = \frac{E}{10}$ a $\rho^* = \frac{\rho}{10}$. Jako ve dřívější kapitole se kritéria výběru vkládají stejně, tedy $\frac{E^{\frac{1}{2}}}{\rho}$ bude konstantní přímka, určující efektivitu výběru. Pokud se bude poloha A_2 nacházet vpravo od této přímky, nebude se jednat o efektivní kombinaci a pokud se bude nacházet vlevo od přímky, bude se jednat o efektivní kombinaci.



Graf 5 Výběr pomocí grafické metody [8]

V tomto případě se materiál s koeficientem $\varphi_0^e = 10$ přesunul z levé části na pravou, tím se stal efektivním a materiál byl lépe využit, tento výsledek je vidět na grafu. Stejný postup platí pro elastický krut. [8], [9], [10], [11]

5 Příklady výběru

Se znalostmi získanými z kapitoly 4 bude v této kapitole prakticky ukázán výběr nejprve tvaru nosníku pro daný typ namáhání, v tomto případě ohyb a krut, a poté i výběr kombinace materiálu a průřezu opět pro stejné namáhání. Pro vyšetřování těchto příkladů budou využity průřezy uvedené v tabulce (Tabulka 8) a budou též porovnávány s plnými průřezy stejných tvarů o stejné hmotnosti nosníku. Pro jejich řešení bude využita metoda konečných prvků v programu Siemens NX.

Nejprve bude tedy definována tabulka vyšetřovaných průřezů, kdy k porovnání bude 18 různých průřezů, kde duté průřezy jsou odvozeny z plných průřezů. Všechny nosníky mají stejnou plochu průřezu jako plný kruhový průřez o průměru 30 mm. Dle teorie psané dříve by mělo dojít ke změnám tuhosti nosníků různých tvarů při zachování stejné hmotnosti. Pokud by bylo cílem získat nosník s minimální hmotností pro daný maximální nosník, bylo by možné tyto výsledky využít pro určení optimálního nosníku, kdy by bylo přistoupeno ke snižování hmotnosti nosníku do dosažení požadovaného maximálního průhybu.

Tabulka 8 Tvary vyšetřovaných průřezů

Název		
Plné průřezy	Duté průřezy	Otevřené průřezy
Plný čtvercový průřez	Dutý čtvercový průřez	I průřez
Plný kruhový průřez	Dutý kruhový průřez	T průřez
Plný obdélníkový průřez	Dutý obdélníkový průřez	H průřez
Plný šestistěnný průřez	Dutý šestistěnný průřez	U průřez
Plný eliptický průřez	Dutý eliptický průřez	Tenký obdélníkový průřez
Plný trojúhelníkový průřez	Dutý trojúhelníkový průřez	L průřez

Pro určení tohoto efektivního nosníku lze využít tvarové faktory definované prof. Michaelem Ashbym a popsané v předchozí kapitole. První podkapitola se bude zabývat případem, kde bude hledán nejodolnější nosník proti ohybu, bude využit vztah (87), tedy

$$\varphi_e^o = \frac{4\pi I}{S^2} [-] , \quad (114)$$

kde φ_e^o je faktor pro elastický ohyb, I je kvadratický moment průřezu nosníku a S je plocha průřezu, která ale bude stejná pro všechny nosníky.

Podobným způsobem je definován tvarový faktor pro krut, který bude vyšetřován v kapitole (4.3). Bude využit vztah (93), který hledá nejodolnější nosník proti krutu, tedy

$$\varphi_k^e = \frac{2\pi J_p}{S^2} = \frac{2\pi S_T}{S^2} [-] , \quad (115)$$

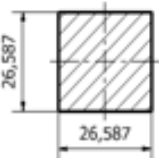
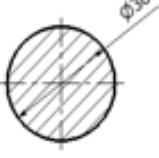
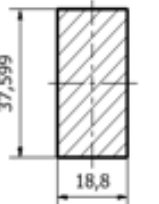
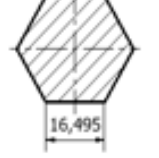

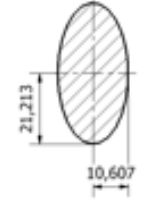
kde φ_k^e je faktor pro elastický krut, J_p je polární moment k ose a S je plocha průřezu. Polární moment bude zde nahrazen torzní tuhostí S_T , kvůli nepřesnosti při deformaci nekruhových průřezů, které tvoří většinu vyšetřovaných průřezů.

Pro určení těchto faktorů je tedy třeba znát kvadratický moment průřezu, polární moment nebo torzní tuhost. Hodnoty by bylo možné určit ručně, nebo přímo pomocí programu Siemens NX. Pro tento případ byla zvolena druhá varianta, protože hledání těchto momentů není přímo tématem této práce. Jednoduché příklady, které byly uvedeny pro názornost v kapitolách (3.2.3, 3.3.2), ukazují na možnost tento problém řešit ručně, bez použití

počítačových simulací. Pro krut byla zvolena hodnota torzní tuhosti, protože je možné ji snadněji určit.

V následujících tabulkách jsou uvedeny rozměry, hodnoty kvadratických momentů a torzních tuhostí jednotlivých vyšetřovaných průřezů z tabulky (Tabulka 8):

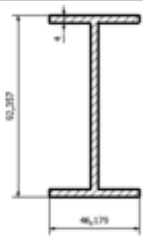
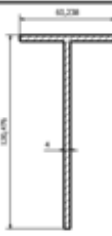
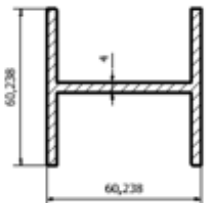
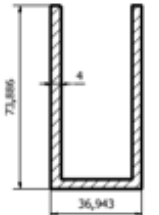

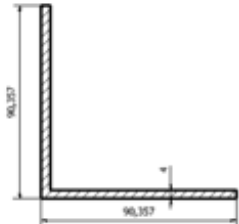
Tabulka 9 Hodnoty vyšetřovaných plných nosníků

PLNÉ PRŮŘEZY			
Plný čtvercový průřez			
Kvadratický moment J_z	67500	mm^4	
Torzní tuhost	113867,397	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
Plný kruhový průřez			
Kvadratický moment J_z	39760,781	mm^4	
Torzní tuhost	79521,562	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
Plný obdélníkový průřez			
Kvadratický moment J_z	83273,245	mm^4	
Torzní tuhost	57131,816	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
Plný šestistěnný průřez			
Kvadratický moment J_z	40067,847	mm^4	
Torzní tuhost	76651,456	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
Plný trojúhelníkový průřez			
Kvadratický moment J_z	96155,437	mm^4	
Torzní tuhost	57691,569	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
Plný eliptický průřez			
Kvadratický moment J_z	99404,702	mm^4	
Torzní tuhost	47700	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	

Tabulka 10 Hodnoty vyšetřovaných dutých nosníků

DUTÉ PRŮŘEZY			
Dutý čtvercový průřez			
Kvadratický moment J_z	231825,95	mm^4	
Torzní tuhost	360636,012	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
Dutý kruhový průřez			
Kvadratický moment J_z	280981,708	mm^4	
Torzní tuhost	561963,417	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
Dutý obdélníkový průřez			
Kvadratický moment J_z	352014,101	mm^4	
Torzní tuhost	272279,329	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
Dutý šestistěnný průřez			
Kvadratický moment J_z	257100	mm^4	
Torzní tuhost	463600	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
Dutý eliptický průřez			
Kvadratický moment J_z	245390,227	mm^4	
Torzní tuhost	138700	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
Dutý trojúhelníkový průřez			
Kvadratický moment J_z	413737,854	mm^4	
Torzní tuhost	186900	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	

Tabulka 11 Hodnoty vyšetřovaných otevřených nosníků

OTEVŘENÉ PRŮŘEZY			
I průřez			
Kvadratický moment J_z	921625,449	mm^4	
Torzni tuhost	3811,904	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
T průřez			
Kvadratický moment J_z	1103336,043	mm^4	
Torzni tuhost	3764,011	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
H průřez			
Kvadratický moment J_z	145999,009	mm^4	
Torzni tuhost	3726,553	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
U průřez			
Kvadratický moment J_z	387263,942	mm^4	
Torzni tuhost	3753,284	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
Tenký deskový průřez			
Kvadratický moment J_z	459866,344	mm^4	
Torzni tuhost	14219,112	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	
L průřez			
Kvadratický moment J_z	575657,505	mm^4	
Torzni tuhost	3735,229	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	

Druhá podkapitola se bude zabývat hledáním vhodných kombinací materiálu a průřezu nosníku, přičemž budou opět využity vztahy popsané v předchozí kapitole a definované prof. Michaelem Ashbym. K tomu budou využity vztahy pro nalezení hodnot koeficientu M_1 a M_2 , kde dle odvození v kapitole (4.5.2) pro ně platí, že

$$M_1 = \frac{[E\varphi_0^e]^{\frac{1}{2}}}{\rho}, \quad (116)$$

kde E je modul pružnosti v tahu vyšetřovaného materiálu, φ_0^e je faktor pro elastický ohyb a ρ hustota materiálu.

A podobně koeficient M_2 je

$$M_2 = \frac{[G\varphi_K^e]^{\frac{1}{2}}}{\rho}, \quad (117)$$

kde G je modul pružnosti v krutu vyšetřovaného materiálu, φ_K^e je faktor pro elastický krut a ρ hustota materiálu.

Pro řešení při namáhání na ohyb byl zvolen vetknutý nosník o délce $l = 2000$ mm, ploše průřezu $S = 706,858$ mm², kde tato hodnota vychází z plochy plného kruhového nosníku o průměru $r = 30$ mm a zatížený na svém volném konci silou $F = 1000$ N nebo momentem $M = 1000$ Nmm. Není uvažována vlastní tíha nosníku, neboť hmotnost všech vyšetřovaných nosníků bude vždy stejná.

5.1 Výběr tvaru nosníku

Díky hodnotám v tabulkách (Tabulka 9, Tabulka 10, Tabulka 11) je možné dosadit hodnoty kvadratického momentu a torzní tuhosti do rovnic (116) a (117), tím určit hodnotu tvarových faktorů a porovnat je v následující tabulce. Tedy:

Tabulka 12 Vlastnosti vyšetřovaných průřezů

Průřezy	Počítaná plocha				
	S	706,858	mm ²		
	Ohyb			Krut	
Plné průřezy	I [mm ⁴]	φ_e^O	k_t [N·m ⁻¹]	φ_a^K	
Plný čtvercový průřez	67500,00	1,698	113867,40	1,432	
Plný kruhový průřez	39760,78	1,000	79521,56	1,000	
Plný obdélníkový průřez	83273,25	2,094	57131,82	0,718	
Plný šestistěnný průřez	40067,85	1,008	76651,46	0,964	
Plný eliptický průřez	99404,70	2,500	47700,00	0,600	
Plný trojúhelníkový průřez	96155,44	2,418	57691,57	0,725	
Duté průřezy					
Dutý čtvercový průřez	231825,95	5,831	360636,01	4,535	
Dutý kruhový průřez	280981,71	7,067	561963,42	7,067	
Dutý obdélníkový průřez	352014,10	8,853	272279,33	3,424	
Dutý šestistěnný průřez	257100,00	6,466	463600,00	5,830	
Dutý eliptický průřez	245390,23	6,172	138700,00	1,744	
Dutý trojúhelníkový průřez	413737,85	10,406	186900,00	2,350	
Otevřené průřezy					
I průřez	921625,45	23,179	3811,90	0,048	
T průřez	1103336,04	27,749	3764,01	0,047	
H průřez	145999,01	3,672	3726,55	0,047	
U průřez	387263,94	9,740	3726,55	0,047	
Tenký obdélníkový průřez	459866,34	11,566	14219,11	0,179	
L průřez	575657,51	14,478	3735,23	0,047	

5.1.1 Namáhání na ohyb

Ze sloupce hodnot φ_e^0 tabulky (Tabulka 12) tedy vychází, že nosník tvaru T ve zvolených rozměrech by podle vztahů prof. Ashbyho měl být nejefektivnější vůči prostému ohybu. Pro ověření této hypotézy bude využita metoda konečných prvků v programu Siemens NX.

Výsledky této simulace jsou vypsány v následující tabulce, ve které je uvedeno celkové posunutí. Pokud budou porovnány hodnoty získané simulací a výsledky tvarových faktorů, tak získáme následující tabulku:

Tabulka 13 Výsledky namáhání ohybem

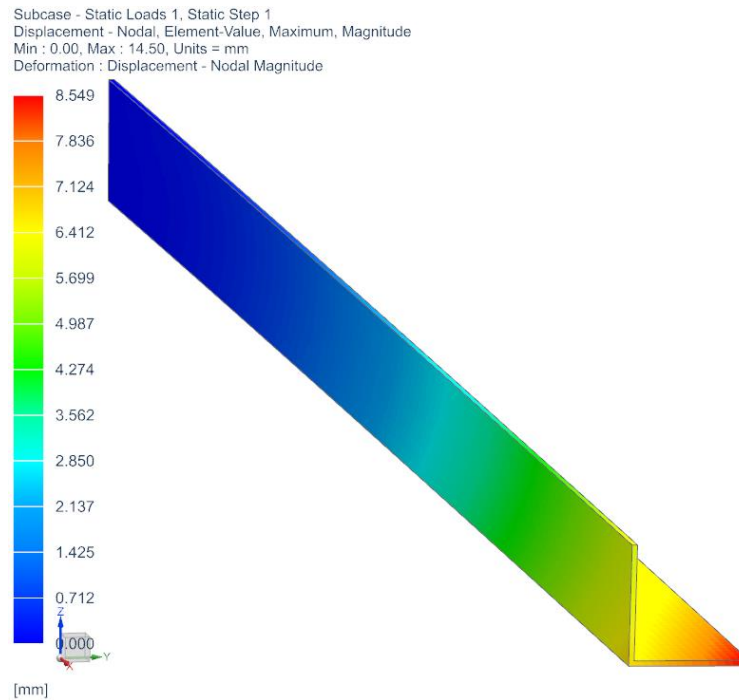
OHYB			
Plné průřezy	Posunutí [mm]	φ_e^0	Odkaz na přílohu
Plný čtvercový průřez	51,42	1,698	Příloha 1. 1
Plný kruhový průřez	53,51	1,000	Příloha 1. 2
Plný obdélníkový průřez	25,72	2,094	Příloha 1. 3
Plný šestistěnný průřez	53,43	1,008	Příloha 1. 4
Plný eliptický průřez	26,77	2,500	Příloha 1. 5
Plný trojúhelníkový průřez	44,54	2,418	Příloha 1. 6
Duté průřezy	Posunutí [mm]	φ_e^0	
Dutý čtvercový průřez	9,608	5,831	Příloha 1. 7
Dutý kruhový průřez	7,917	7,067	Příloha 1. 8
Dutý obdélníkový průřez	5,983	8,853	Příloha 1. 9
Dutý šestistěnný průřez	8,666	6,466	Příloha 1. 10
Dutý eliptický průřez	9,865	6,172	Příloha 1. 11
Dutý trojúhelníkový průřez	10,762	10,406	Příloha 1. 12
Otevřené průřezy	Posunutí [mm]	φ_e^0	
I průřez	2,345	23,179	Příloha 1. 13
T průřez	1,958	27,749	Příloha 1. 14
H průřez	14,5	3,6719	Příloha 1. 15
U průřez	5,555	9,740	Příloha 1. 16
Tenký obdélníkový průřez	4,678	11,566	Příloha 1. 17
L průřez	8,549	14,478	Příloha 1. 18

A pokud budou výsledky posunutí seřazeny sestupně podle efektivity, je získána tabulka:

Tabulka 14 Výsledné pořadí nosníků po namáhání ohybem

Pořadí		
	Z posunutí	Z tvarového faktoru
1.	T průřez	T průřez
2.	I průřez	I průřez
3.	Tenký obdélníkový p.	L průřez
4.	U průřez	Tenký obdélníkový p.
5.	Dutý obdélníkový p.	Dutý trojúhelníkový p.
6.	Dutý kruhový p.	U průřez
7.	L průřez	Dutý obdélníkový p.
8.	Dutý šestistěnný p.	Dutý kruhový p.
9.	Dutý čtvercový p.	Dutý šestistěnný p.
10.	Dutý eliptický p.	Dutý eliptický p.
11.	Dutý trojúhelníkový p.	Dutý čtvercový p.
12.	H průřez	H průřez
13.	Plný obdélníkový p.	Plný eliptický p.
14.	Plný eliptický p.	Plný trojúhelníkový p.
15.	Plný trojúhelníkový p.	Plný obdélníkový p.
16.	Plný čtvercový p.	Plný čtvercový p.
17.	Plný šestistěnný p.	Plný šestistěnný p.
18.	Plný kruhový p.	Plný kruhový p.

Z porovnání pořadí od nejlepšího po nejhorší průřez ve zvolených rozměrech je vidět, že si výsledky simulace a výpočtu odpovídají, ale různí se u některých průřezů. Například průřez tvaru L se skrze simulaci umístil na 7. místo, ale při výpočtu tvarového faktoru se umístil na 3. Je to způsobeno rozdílem při ohybu, kdy se jedna strana tohoto nosníku posune více než druhá neboli je to způsobeno nesymetričností tvaru průřezu. Pro představu je uveden výsledek simulace, kde červeně barvená část zobrazuje nejvyšší hodnotu posunutí, viz obrázek (Obrázek 35).

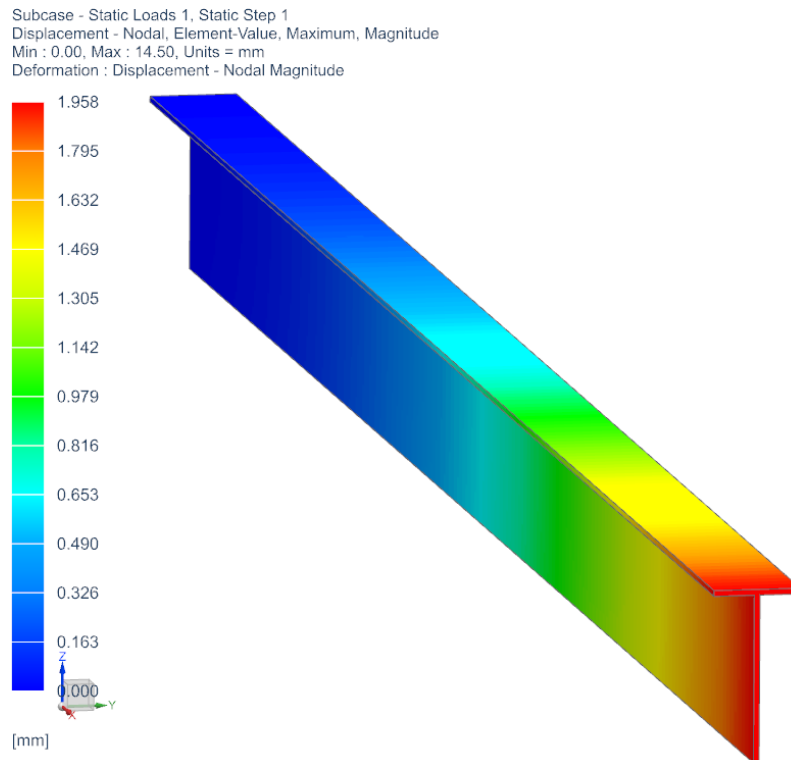


Obrázek 35 MKP řešení nosníku tvaru L pro ohyb

Pro názornost jsou zde uvedeny výsledky simulace dvou tvarů nosníků, které si vedly nejlépe a nejhůře při zatížení ohybem.

Nejlepší průřez navržených rozměrů z tabulek (Tabulka 9, Tabulka 10, Tabulka 11) je podle výsledků simulace i výpočtu nosník tvaru T. Dobrá odolnost nosníku průřezu T vůči ohybu je způsobena dobrým rozložením hmoty v průřezu tak, že se velké množství hmoty nachází v ploše rovnoběžné s působící silou.

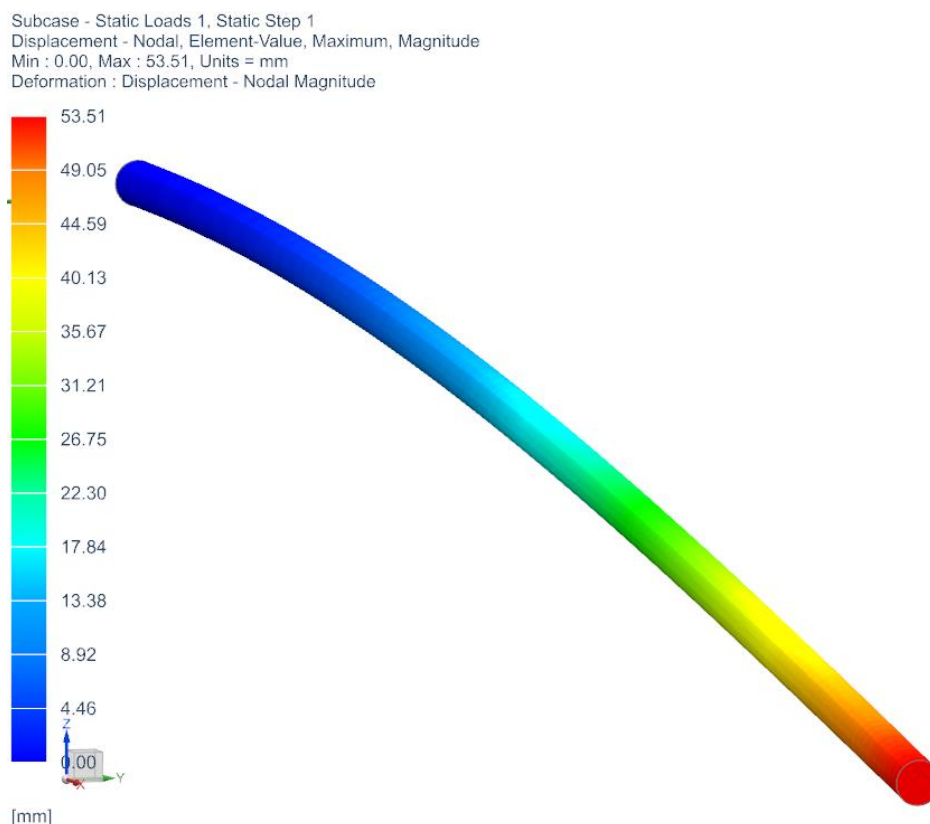
Jeho průhyb je pouze 1,958 mm oproti nezatíženému stavu. Pokud bude porovnán i s 5. nejlepším průřezem, kterým je velmi používaný dutý obdélníkový průřez, je rozdíl v průhybu 4,025 mm. Jestliže bude porovnán s nejhorším průřezem, kterým je referenční plný kruhový nosník, je rozdíl 51,552 mm, tedy nosník tvaru T je v tomto případě 27krát tužší než kruhový stejné plochy.



Obrázek 36 MKP řešení nosníku tvaru T pro ohyb

Druhým nejlepším průřezem je tvaru I, který je velmi často využíván v technické praxi pro tuhé a lehké nosníky. Posunutí tohoto nosníku je 2,345 mm, tedy o 0,387 mm více, než nosník tvaru T. Důvodem je kratší stěna kolmá k působící síle, ale je možné tento nosník více upravit a získat efektivnější nosník, jak je více rozvedeno v kapitole (5.1.3).

Naopak nejhorším vyšetřovaným průřezem je plný kruhový průřez, a to pro simulaci tak i pro výpočet. Příčinou je v tomto případě špatné rozložení hmoty v průřezu. I přesto že oproti například plnému čtvercovému průřezu má větší rozměr v ose, 30 mm průměru kruhového nosníku proti 26,587 mm, ale toto platí i pro šířku nosníku, a to je důvodem většího posunutí.



Obrázek 37 MKP řešení nosníku plného kruhového tvaru pro ohyb

5.1.2 Namáhání na krut

Podle výsledků hypotézy dané vztahem (93) pro výpočet φ_K^e určený prof. Ashbym a napsaných ve sloupci hodnot φ_e^K tabulky (Tabulka 12) by měl být nosník s dutým trubkovým tvarem ve zvolených rozměrech nejefektivnější proti krutu. Opět jako pro ohyb nosníku bude pro kontrolu využita metoda konečných prvků v programu Siemens NX.

Výsledky simulace jsou uvedeny v následující tabulce (Tabulka 15) a pro porovnání bude využita hodnota celkového posunutí, ale taktéž by bylo možné využít hodnoty vznikajících smykových napětí:

Pro lepší představu jsou uvedeny dva příklady, první je nosník s nejnižší hodnotou celkového posunutí, tedy takový, který ze simulace vyšel jako nejefektivnější nosník zvolených rozměrů (viz obrázek: Obrázek 38) a druhý, který je naopak nejméně odolný proti namáháním krutem (viz obrázek: Obrázek 39).

Tabulka 15 Výsledky namáhání krutem

KRUT			
Plné průřezy	Posunutí [mm]	φ_e^K	Odkaz na přílohu
Plný čtvercový průřez	0,001110	1,4319	Příloha 3. 1
Plný kruhový průřez	0,000783	1,0000	Příloha 3. 2
Plný obdélníkový průřez	0,001520	0,7184	Příloha 3. 3
Plný šestistěnný průřez	0,000893	0,9639	Příloha 3. 4
Plný eliptický průřez	0,001380	0,5998	Příloha 3. 5
Plný trojúhelníkový průřez	0,001675	0,7255	Příloha 3. 6
Duté průřezy	Posunutí [mm]	φ_e^K	
Dutý čtvercový průřez	0,000390	4,5351	Příloha 3. 7
Dutý kruhový průřez	0,000222	7,0668	Příloha 3. 8
Dutý obdélníkový průřez	0,000535	3,4240	Příloha 3. 9
Dutý šestistěnný průřez	0,000279	5,8299	Příloha 3. 10
Dutý eliptický průřez	0,000850	1,7442	Příloha 3. 11
Dutý trojúhelníkový průřez	0,000711	2,3503	Příloha 3. 12
Otevřené průřezy	Posunutí [mm]	φ_e^K	
I průřez	0,039800	0,0479	Příloha 3. 13
T průřez	0,12300	0,0473	Příloha 3. 14
H průřez	0,035300	0,0469	Příloha 3. 15
U průřez	0,088900	0,0469	Příloha 3. 16
Tenký obdélníkový průřez	0,012600	0,1788	Příloha 3. 17
L průřez	0,093700	0,0470	Příloha 3. 18

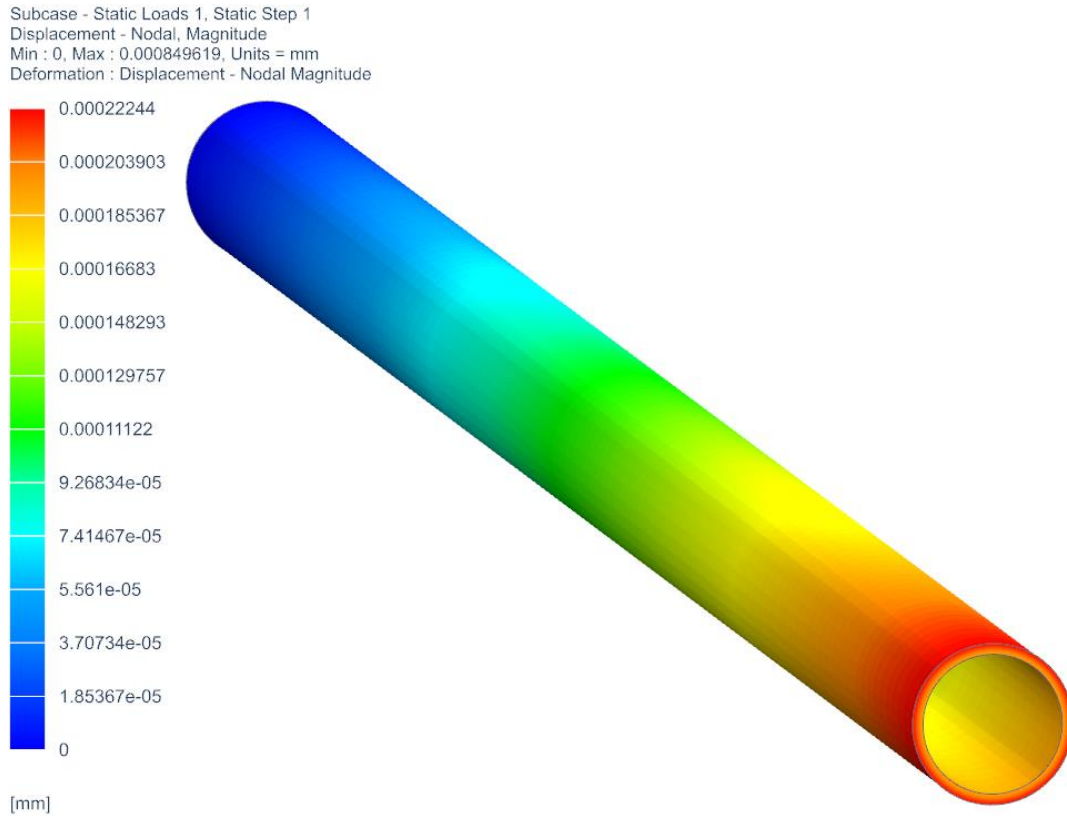
Pokud budou sepsány výsledky z tabulky (Tabulka 15) a seřazeny sestupně podle velikosti posunutí:

Tabulka 16 Výsledné pořadí nosníků po namáhání krutem

Pořadí		
	Z posunutí	Z tvarového faktoru
1.	Dutý kruhový p.	Dutý kruhový p.
2.	Dutý šestistěnný p.	Dutý šestistěnný p.
3.	Dutý čtvercový p.	Dutý čtvercový p.
4.	Dutý obdélníkový p.	Dutý obdélníkový p.
5.	Dutý trojúhelníkový p.	Dutý trojúhelníkový p.
6.	Plný kruhový p.	Dutý eliptický p.
7.	Dutý eliptický p.	Plný čtvercový p.
8.	Plný šestistěnný p.	Plný kruhový p.
9.	Plný čtvercový průřez	Plný šestistěnný p.
10.	Plný eliptický p.	Plný trojúhelníkový p.
11.	Plný obdélníkový p.	Plný obdélníkový p.
12.	Plný trojúhelníkový p.	Plný eliptický p.
13.	Tenký obdélníkový p.	Tenký obdélníkový p.
14.	H průřez	I průřez
15.	I průřez	T průřez
16.	U průřez	H průřez
17.	L průřez	L průřez
18.	T průřez	U průřez

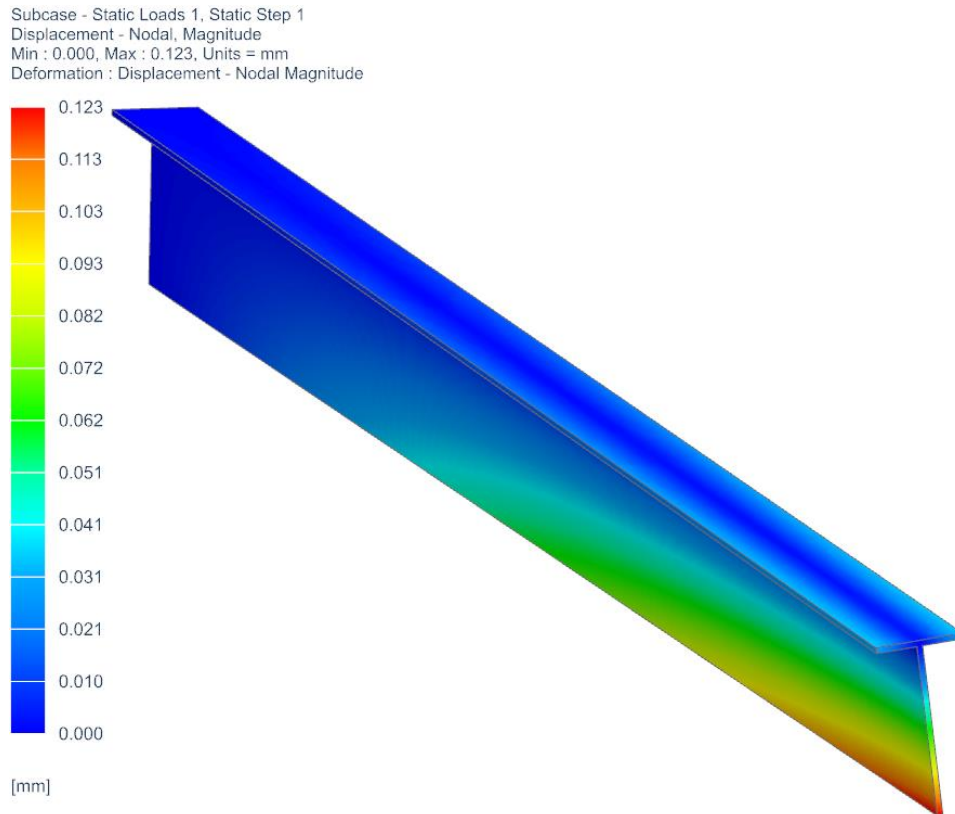
Opět si výsledky přibližně odpovídají podobně jako při vyšetřování ohybu. Rozdíly je možno vysvětlit aplikací 1D prvků a RBE2 prvků při simulaci pro umožnění aplikace momentu na celý průřez. Tím je plocha průřezu připojena k 1D prvku pomocí neprodloužitelných, dokonale tuhých prvků a dojde tím ke zvýšení tuhost nosníku.

Nosník s dutým kruhovým průřezem je zde uveden jako nejefektivnější díky tomu, že má velké množství hmoty průřezu umístěnou daleko od své osy, a tedy se napětí dobře rozprostře po celé ploše průřezu. Naopak nejméně je efektivní tvar průřezu T, protože se napětí koncentruje v malé ploše a část průřezu je velmi málo využita. Tento výsledek odpovídá teorii napsané v kapitole (3.3.4) o krutu u nekruhových průřezů.



Obrázek 38 MKP řešení nosníku dutého kruhového průřezu pro krut

Oproti velmi dobrým výsledkům tenkých otevřených průřezů při ohybu se po zatížení krutem stanou nejméně efektivními a s výsledky řádově horšími než duté nebo plné průřezy. Například průřez tvaru T, který při simulaci ohybu byl na první pozici v tabulce (Tabulka 13) se při zatížení krutem přesunul na poslední místo podle simulace a na 15. místo podle tvarového faktoru.



Obrázek 39 MKP řešení nosníku tvaru T pro krut

Na obrázku je zobrazeno, jakým způsobem se tento nosník pootočí při zatížení krutem, kde nejhůře odolává spodní část průřezu. Tenký obdélníkový průřez, který je tvořen pouze touto deskou, by mohl být nejméně efektivním průřezem, ale pro tento průřez byla zvolena dvojnásobná tloušťka desky oproti nosníku tvaru T.

5.1.3 Optimalizace průřezů

Nosníky, které podle simulace a tvarových faktorů vyšly jako jedny z nejefektivnějších, je možné dále upravovat a zvyšovat jejich efektivitu díky snížení velikosti posunutí. Zvolené nosníky jsou dva pro oba typy namáhání s druhými nejvyššími hodnotami posunutí z předchozí podkapitoly.

Zvýšením kvadratického momentu průřezu vzroste i odolnost nosníku proti ohybu. Toho je možné dosáhnout zúžením nosníku ve směru kolmém na směr působení zatížení a prodloužením ve směru působícího zatížení. Pro optimalizaci nosníku na ohyb byl zvolen nosník tvaru I.

Prvním pokusem o zlepšení je zúžení střední desky průřezu z původních 4 mm na 3 mm a tím celý průřez prodloužit v ose kolmé k působící síle. Tato úprava by měla znamenat zvýšení kvadratického momentu průřezu a tím zlepšení celkové tuhosti nosníku. Pro řešení bude opět limitujícím faktorem plocha průřezu, která činí $S = 706,858 \text{ mm}^2$.

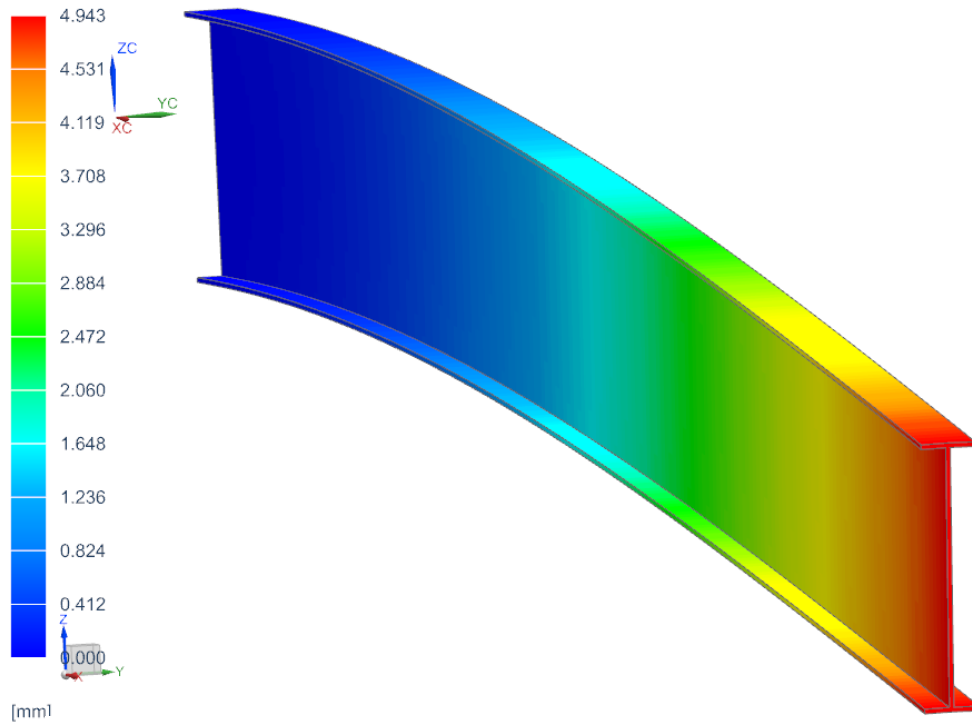
Tabulka 17 1. upravený nosník

I průřez			
Kvadratický moment J_z	2617745,428	mm^4	
Tvarový faktor φ_e^0	65,837	-	

Výsledný kvadratický moment je více jak dvojnásobný oproti původnímu nosníku, nebo i proti nosníku tvaru T. Když bude tato hodnota dosazena do vztahu (87) pro výpočet tvarového faktoru, je získána hodnota $\varphi_e^0 = 65,837 [-]$. Z tohoto výsledku by měl být získán nosník, který bude lépe odolávat ohybu než původní neupravený průřez. Nicméně simulace ukázala, že dojde k většímu průhybu než u neupraveného nosníku, viz obrázek (Obrázek 40).

Tento výsledek může být způsoben malou tloušťkou střední desky.

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.000, Max : 4.943, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



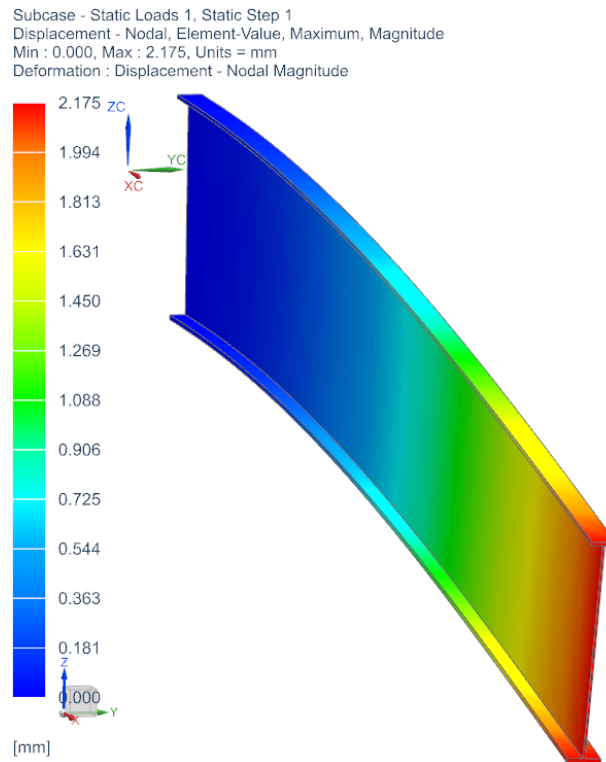
Obrázek 40 MKP řešení 1. upraveného nosníku tvaru I pro ohyb

Po nové úpravě rozměrů byl vytvořen nosník následujících vlastností uvedených v tabulce:

Tabulka 18 2. upravený nosník

I průřez			
Kvadratický moment J_z	6143555,540	mm^4	
Tvarový faktor φ_e^0	154,513	-	

Simulace takového upraveného nosníku ukazuje (Obrázek 41), že posunutí bude nižší než u původního nosníku, tedy bude tento nosník efektivnější proti ohybu.



Obrázek 41 MKP řešení 2. upraveného nosníku tvaru I pro ohyb

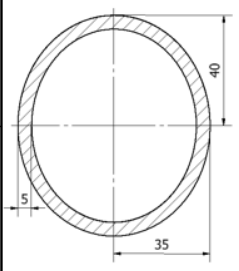
Výsledky optimalizace je možné porovnat v tabulce (Tabulka 19) s výsledky původních tvarů a tím poukázat na důležitost optimalizování nosníků při různých strojírenských aplikacích.

Tabulka 19 Výsledky optimalizace na ohyb

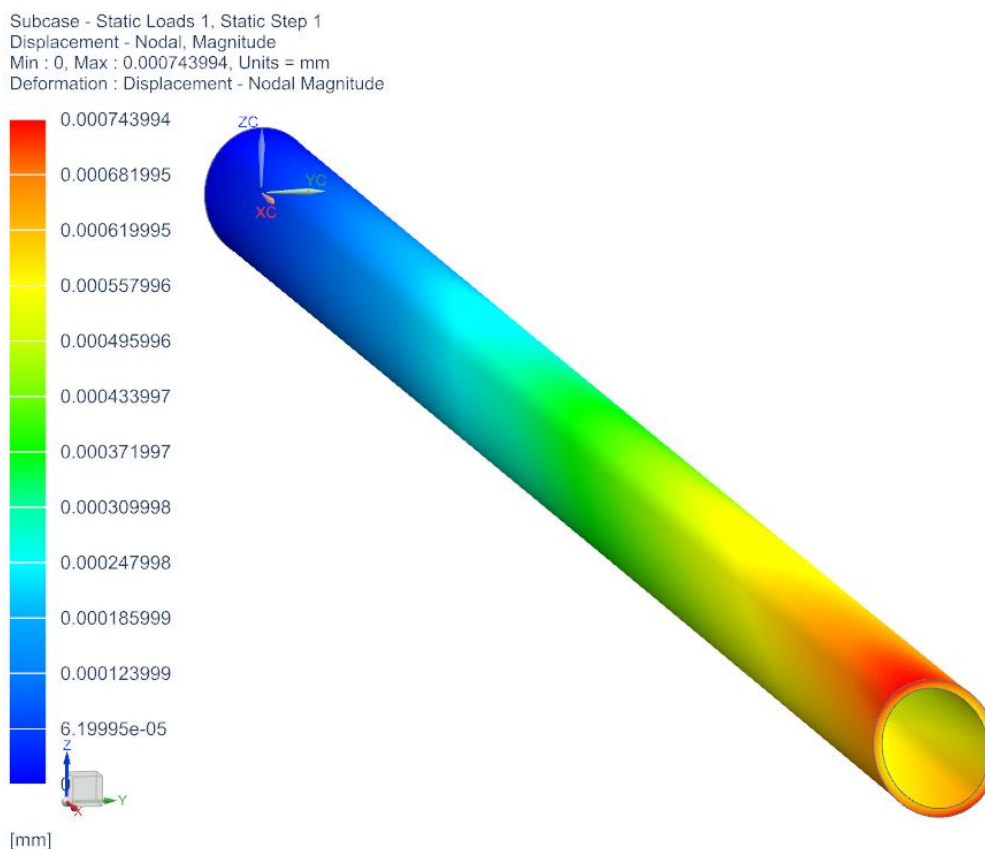
Průřez	Tvarový faktor φ_e^0 [-]	Posunutí [mm]
Původní I p.	23,179	2,345
1. upravený I p.	65,837	4,493
2. upravený I p.	154,513	2,175

Druhým příkladem bylo řešení nosníku namáhaného na krut, který také lze upravit pro lepší výsledky. Nosník odolný na krut musí mít vysokou hodnotu polárního momentu průřezu. Tato hodnota se zvyšuje lepším rozložením hmoty průřezu do větší vzdálenosti od osy, ve které působí zatěžující moment. Pro optimalizaci nosníku na krut byl zvolen nosník s eliptickým průřezem.

Tabulka 20 Optimalizace eliptického nosníku

Eliptický průřez			
Torzní tuhost	133100,000	mm ⁴	
Tvarový faktor Φ_e^K	3,348	-	

Rozměry, torzní tuhost a tvarový koeficient upraveného nosníku jsou uvedeny v tabulce (Tabulka 20). Již při prvním pokusu o optimalizaci jsou získány lepší výsledky posunutí, jak je zobrazeno na obrázku (Obrázek 42) ze simulace.



Obrázek 42 Upravený eliptický nosník po zatížení krutem

Výsledky jsou uvedeny v tabulce (Tabulka 21), které je možné porovnat s výsledkem neoptimalizovaného průřezu. Tvar optimalizovaného průřezu se více blíží dutému kruhovému průřezu, který vyšel jako nejvíce efektivní nosník pro krut pro zadané rozměry.

Tabulka 21 Výsledky optimalizace na krut

Průřez	Tvarový faktor φ_e^K [-]	Posunutí [mm]
Původní eliptický p.	1,744	0,000849619
Upravený eliptický p.	3,348	0,000743994

Výsledky těchto optimalizací poukazují na důležitost úpravy průřezu při použití v technické praxi. Nosníky stejných hmotností mohou být vysoce odolné proti určitým typům zatížení a zároveň selhávat při jiném zatížení. Velmi dobrým příkladem je nosník tvaru T jak bylo popsáno v této kapitole.

5.2 Výběr kombinace materiálu a průřezu

Při výběru kombinace materiálu a průřezu jsou potřeba empirické hodnoty materiálů φ_{max}^e , určené prof. Ashby, moduly pružnosti v tahu jednotlivých vyšetřovaných materiálů a jejich hustoty. Tyto hodnoty jsou získány z materiálové databáze Granta EduPack [23], která obsahuje téměř 4000 materiálů. Výběr z takového množství různých materiálů by byl složitý a výsledek málo přehledný. Pro potřeby této práce bylo zvoleno několik zástupců z různých rodin s různými vlastnostmi. Tabulka je uvedena v anglickém jazyce pro snazší orientaci v materiálové databázi.

Tabulka 22 Vybrané materiály a jejich vlastnosti pro vyšetření ohybu

Název	Rodina	ρ [mg/m ³]	E [Gpa]	Max. tvarový faktor
Cordierite	Keramika	2,38	110	15
High alloy steel AF1410	Slitiny železa	7,83	210	15
High alloy nickel steel Kovar	Slitiny železa	8,36	138	43
Low alloy cast steel SAE 4130	Slitiny železa	7,83	202	46
Carbon steel AISI 1137, tempered at 540°C	Slitiny železa	7,9	210	34
Aluminium 6010 O	Neželezné kovy	2,71	70,2	42
Beryllium S-200FH hot isostatically pressed	Neželezné kovy	1,85	305	41
Platinum P04995 annealed	Vzácné kovy	21,5	170	30
Titanium alpha alloy Ti-0,2Pd (grade 11)	Neželezné kovy	4,51	103	37
Zirconium carbide	Technická keramika	6,7	410	14
Titanium silicate	Skla	2,21	68	15
Al-40%AlN(p)	Kompozit s kovovou maticí	2,92	120	31
Mg-20%SiC(p)	Kompozit s kovovou maticí	2,1	73	16
SiC/SiC fiber, 35-45Vf - quasi-isotropic laminate	Kompozit s keramickou maticí	2,5	230	20
Oak (quercus spp.) (I)	Dřevo	1,01	23	6
PEEK (30% glass fiber)	Termoplasty	1,51	10	6
PEI (30% carbon fiber)	Termoplasty	1,41	21	8
TPV (PP+EP(D))M, Shore D50	Elastomery	0,945	0,235	2
Aluminium-SiC foam (0,41)	Pěny	0,41	1,6	3
Stainless steel, AISI 440B, tempered at 316°C	Nerezová ocel	7,8	205	12

Podle kapitoly (4.7) je možné získávat kombinace materiálu a průřezu dvěma způsoby. Prvním je výběr pomocí výpočtu popsáný v kapitole (4.7.1), který zde bude využit, neboť je přehlednější a prostorově méně náročný. Druhým je výběr pomocí grafické metody, která je popsána v kapitole (4.7.2) a zde bude ukázán jeden příklad takového výběru.

5.2.1 Namáhání na ohyb

Při hledání tuhého lehkého nosníku se využívá materiálového indikátoru M_1 , která obsahuje modul pružnosti v tahu, hustotu materiálu a tvarový faktor φ_{max}^e , pro který jsou hodnoty vypsány v tabulce (Tabulka 22). Všechny tyto proměnné jsou vloženy do rovnice (98) a výsledkem je tabulka (Tabulka 23).

Příkladem tohoto výpočtu bude nerezová ocel AISI 440B, která je uvedena v poslední řádce materiálové tabulky. Za všechny proměnné budou dosazeny hodnoty v základních jednotkách, ve kterých jsou uvedeny v tabulce, tedy

$$M_1 = \frac{[E\varphi_0^e]^{\frac{1}{2}}}{\rho} = \frac{[205 \cdot 12]^{\frac{1}{2}}}{7,8} = 6,359 [-] , \quad (118)$$

kde M_1 je koeficient pro ohyb, E je modul pružnosti v tahu, φ_0^e je faktor pro elastický ohyb a ρ je hustota materiálu.

Tabulka 23 Výsledky výpočtu koeficientu M_1

Název	Koeficient M_1
Cordierite	17,067
High alloy steel AF1410	7,168
High alloy nickel steel Kovar	9,214
Low alloy cast steel SAE 4130	12,311
Carbon steel AISI 1137, tempered at 540°C	10,696
Aluminium 6010 O	20,037
Beryllium S-200FH hot isostatically pressed	60,446
Platinum P04995 annealed	3,322
Titanium alpha alloy Ti-0,2Pd (grade 11)	13,688
Zirconium carbide	11,308
Titanium silicate	14,451
Al-40%AlN(p)	20,888
Mg-20%SiC(p)	16,274
SiC/SiC fiber, 35-45Vf - quasi-isotropic laminate	27,129
Oak (quercus spp.) (I)	11,631
PEEK (30% glass fiber)	5,130
PEI (30% carbon fiber)	9,193
TPV (PP+EP(D))M, Shore D50	0,725
Aluminium-SiC foam (0,41)	5,344
Stainless steel, AISI 440B, tempered at 316°C	6,359

Z výsledků tabulky vychází nejlépe beryllium izostaticky lisované za tepla a po něm následuje uhlíčan-křemičitým kompozitem s keramickou matricí. Tento výsledek je pro situaci, kdy je uvolněn tvar nosníku a jsou využity maximální tvarové faktory dané materiálovou databází Granta EduPack [23].

Reálný výběr kombinace materiálu a průřezu by probíhal s vlastními hodnotami tvarových faktorů podle dostupných nosníků a materiálů. Další proměnnou, která by se velmi pravděpodobně promítla do výběru, je cenový koeficient, který je definován

$$C = C_m m \quad (119)$$

kde C je celková cena nosníku, C_m je cena za kilogram a m je hmotnost nosníku. C_m je možné získat z Granta EduPack [23].

A po dosažení do vztahu pro výpočet koeficientu M_1

$$M_1 = \frac{E^{\frac{1}{2}}}{\rho C} \quad (120)$$

Cílem v případě tohoto koeficientu je získat nosník s daným průřezem a nejlepším poměrem tuhosti a ceny.

5.2.2 Namáhání na krut

Pro vyšetřování krutu se využívá podobných vztahů a hodnot jako pro případ řešení ohybu. Rozdílem je použití G neboli modulu pružnosti ve smyku. Vlastnosti materiálů pro krut jsou zapsány v tabulce:

Tabulka 24 Vybrané materiály a jejich vlastnosti pro vyšetření krutu

Název	Rodina	ρ [mg/m ³]	G [Gpa]	Max. tvarový faktor
Cordierite	Keramika	2,38	41,25	15
High alloy steel AF1410	Slitiny železa	7,83	78,75	15
High alloy nickel steel Kovar	Slitiny železa	8,36	51,75	43
Low alloy cast steel SAE 4130	Slitiny železa	7,83	75,75	46
Carbon steel AISI 1137, tempered at 540°C	Slitiny železa	7,9	78,75	34
Aluminium 6010 O	Neželezné kovy	2,71	26,325	42
Beryllium S-200FH hot isostatically pressed	Neželezné kovy	1,85	114,375	41
Platinum P04995 annealed	Vzácné kovy	21,5	63,75	30
Titanium alpha alloy Ti-0,2Pd (grade 11)	Neželezné kovy	4,51	38,625	37
Zirconium carbide	Technická keramika	6,7	153,75	14
Titanium silicate	Skla	2,21	25,5	15
Al-40%AlN(p)	Kompozit s kovovou maticí	2,92	45	31
Mg-20%SiC(p)	Kompozit s kovovou maticí	2,1	27,375	16
SiC/SiC fiber, 35-45Vf - quasi-isotropic laminate	Kompozit s keramickou maticí	2,5	86,25	20
Oak (quercus spp.) (I)	Dřevo	1,01	8,625	6
PEEK (30% glass fiber)	Termoplasty	1,51	3,75	6
PEI (30% carbon fiber)	Termoplasty	1,41	7,875	8
TPV (PP+EP(D)M, Shore D50	Elastomery	0,945	0,088	2
Aluminium-SiC foam (0,41)	Pěny	0,41	0,6	3
Stainless steel, AISI 440B, tempered at 316°C	Nerezová ocel	7,8	76,875	12

Pokud je tedy z tabulky vlastností vyšetřovaných materiálů na krut (101) dosaženo do tohoto vztahu, jsou získány hodnoty této materiálového indikátoru M_2 .

Pro příklad výpočtu bude opět využita nerezová ocel AISI 440B aby bylo ukázáno, že výběr pro krut a pro ohyb nejsou příliš rozdílné.

$$M_2 = \frac{[G\varphi_K^e]^{\frac{1}{2}}}{\rho} = \frac{[76,875 \cdot 12]^{\frac{1}{2}}}{7,8} = 3,894 [-] \quad , \quad (121)$$

kde M_2 je koeficient pro krut, G je modul pružnosti v krutu, φ_K^e je faktor pro elastický ohyb a ρ je hustota materiálu.

Tabulka 25 Výsledky výpočtu koeficientu M_2

Název	Koeficient M_2
Cordierite	10,452
High alloy steel AF1410	4,389
High alloy nickel steel Kovar	5,643
Low alloy cast steel SAE 4130	7,539
Carbon steel AISI 1137, tempered at 540°C	6,550
Aluminium 6010 O	12,270
Beryllium S-200FH hot isostatically pressed	37,016
Platinum P04995 annealed	2,034
Titanium alpha alloy Ti-0,2Pd (grade 11)	8,382
Zirconium carbide	6,925
Titanium silicate	8,850
Al-40%AlN(p)	12,791
Mg-20%SiC(p)	9,966
SiC/SiC fiber, 35-45Vf - quasi-isotropic laminate	16,613
Oak (quercus spp.) (I)	7,123
PEEK (30% glass fiber)	3,141
PEI (30% carbon fiber)	5,629
TPV (PP+EP(D)M, Shore D50	0,444
Aluminium-SiC foam (0,41)	3,272
Stainless steel, AISI 440B, tempered at 316°C	3,894

Výsledek je tedy podobný jako pro řešení ohybu, kde nejlepším materiálem by z výběru bylo beryllium izostaticky lisované za tepla.

5.2.3 Grafický výběr

Pro hlavní porovnání kombinace materiálu a průřezu byla využita výpočetní metoda, ale lze též použít grafickou metodu. Tento postup je ale náročnější, a tedy bude zde ukázán pouze na příkladu

Bude tedy uvažován vetknutý nosník z vysokolegované oceli AF1410, který bude zatěžovaný na ohyb a má následující vlastnosti: délku $l = 2000$ mm, modulem pružnosti v tahu $E = 210$ GPa, hustotou $\rho = 7,83$ mg \cdot m³ a zatížený na svém volném konci silou $F = 1000$ N.

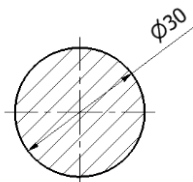
Prvním krokem je určení tvaru, do kterého byl nosník upraven pro určení hodnoty tvarového koeficientu φ_0^e . Pro daný případ bude využit tvar nosníku I, který byl navržen v tabulce (Tabulka 11) s hodnotou $\varphi_0^e = 23,179$ [-] je možné jej zkontrolovat následujícím způsobem protože:

$$\varphi_e^o = \frac{S^o}{S_0^o} = \frac{I}{I_0} \quad (122)$$

kde S_0 je plocha neupraveného průřezu, S^o je plocha upraveného průřezu, I je kvadratický moment upraveného průřezu a I_0 je kvadratický moment původního průřezu. Neupraveným průřezem je v tomto případě plný kruhový průřez s rozměry $r = 30$ mm.

Tento průřez má hodnotu $I_0 = 83273,25 \text{ mm}^4$ a tedy upravený nosník má hodnotu koeficientu φ_0^e :

$$\varphi_0^e = \frac{I}{I_0} = \frac{921625,45}{39760,781} = 23,179 [-] \quad (123)$$



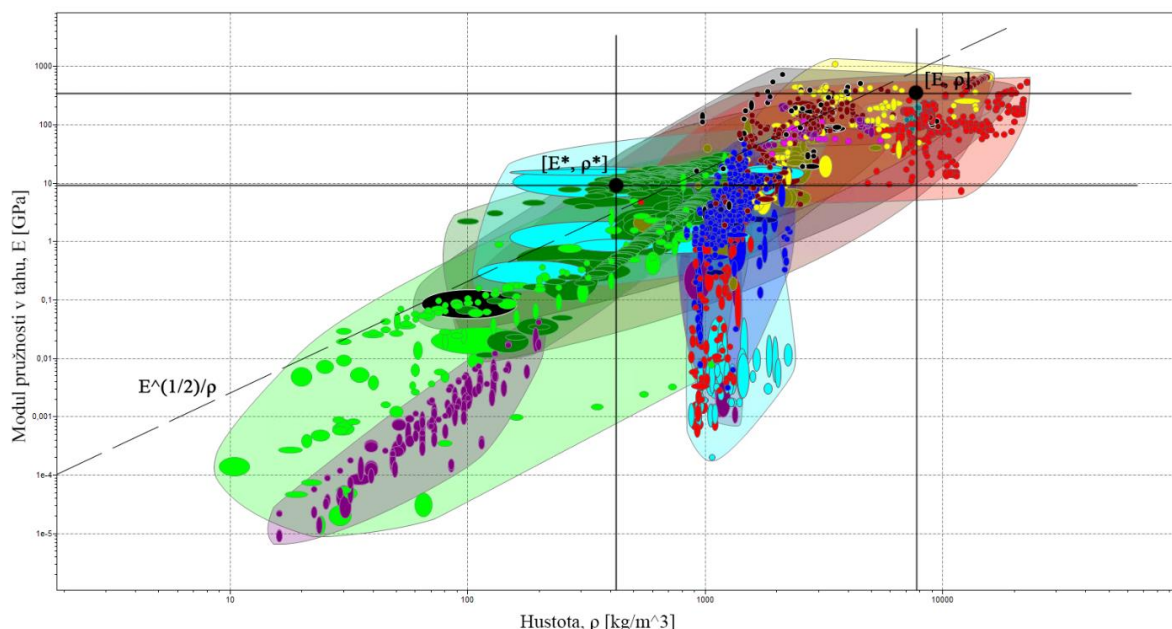
Obrázek 43 Rozměry referenčního průřezu

Nyní je možné již dosadit do vztahů pro E^* (124) a ρ^* (125), které je možné vložit do grafu E - ρ .

$$E^* = \frac{E}{\varphi_0^e} = \frac{210}{23,179} = 9,0599 \text{ GPa} \quad (124)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\varphi_0^e} = \frac{7,83}{23,179} = 0,338 \text{ mg} \cdot \text{m}^3 \quad (125)$$

Při zakreslení pozic $A_1[E; \rho]$ a $A_2[E^*; \rho^*]$ je vidět posun efektivity z pravé části grafu do levého. Graf je rozdělen konstantní přímkou $\frac{E^2}{\rho}$, kde kombinace materiálu a průřezu nacházející se v pravé části této křivky jsou méně efektivní než neupravený průřez. Pokud se kombinace bude nacházet v části vlevo od křivky, bude se jednat o efektivní průřez.



Graf 6 Příklad grafického výběru [23]

Hodnota podílu $\frac{E}{\varphi_0^e}$ a $\frac{\rho}{\varphi_0^e}$ je tedy zakreslena do grafu (Graf 6). Výsledná poloha $A_2[E^*; \rho^*]$ se nachází v levé části grafu a jedná se tedy o efektivní výběr kombinace materiálu a průřezu grafickou metodou.

6 Závěr

Cílem této práce bylo ukázat metodiku výběru vhodné změny tvaru průřezu pro zvýšení efektivity materiálu. Myšlené zvýšení efektivity materiálu nastane v případě, že úpravou průřezu dojde ke zvýšení tuhosti vyšetřovaného nosníku. Nejprve byly vysvětleny v první části této práce (kapitola 2 a kapitola 3) pomocí znalostí z pružnosti a pevnosti základní pojmy a předpoklady pro řešení ohybu a krutu nosníků. Poté ve druhé části (kapitola 4) byla vysvětlena metoda výběru průřezu nosníku a výběru vhodné kombinace materiálu a průřezu pomocí tvarových faktorů a materiálových indikátorů dle prof. M. Ashbyho, která byla následně využita pro třetí část (kapitola 5), ve které je tato metoda využita pro nalezení efektivních tvarů nosníků pro ohyb a krut. Dále ve třetí části byla metoda tvarových faktorů ověřena pomocí simulace metodou konečných prvků v programu Siemens NX. Výsledky těchto simulací jsou uvedeny v přílohách [Ohyb – posunutí: PŘÍLOHA č. 1, Ohyb – napětí: PŘÍLOHA č. 2, Krut – posunutí: PŘÍLOHA č. 3, Krut – napětí: PŘÍLOHA č. 4].

Před samotným řešením metody výběru průřezu nosníku byla zvolena řada různých tvarů nosníku často používaných v technické praxi. Rozměry těchto nosníků jsou popsány v kapitole 5 (Tabulka 9, Tabulka 10, Tabulka 11) a všechny jsou definovány takovým způsobem, aby měly stejnou plochu průřezu jako plný kruhový průřez o průměru 30 mm. Následovalo jejich modelování a vytváření sítě pro výpočet všech osmnácti porovnávaných nosníků, kde prvním vyšetřovaným případem bylo namáhání ohybem. Paralelně se simulací byly dle prof. M. Ashbyho [8], [9], [10], [11] určeny tvarové faktory jednotlivých průřezů. Výsledek při ohybu u těchto postupů je napsán v tabulce (Tabulka 13) a výsledky si téměř odpovídají, kdy jeden z největších rozdílů vytváří nosník tvaru L. Tento rozdíl je způsoben nesymetričností průřezu, a tedy část průřezu podlehne ohybu více než zbytek (viz Obrázek 35), zatímco pro tvarový faktor není uvažován tento rozdíl. Zde je uvedena tabulka výsledků seřazená sestupně podle efektivity nosníků. Druhý a třetí sloupec je seřazen dle výsledků simulace, čtvrtý a pátý sloupec tabulky je seřazen dle výsledků tvarového faktoru.

Tabulka 26 Výsledky posunutí a tvarového faktoru při ohybu

Pořadí	Z posunutí	Hodnota posunutí [mm]	Z tvarového faktoru	Hodnota tvarového faktoru [-]
1.	T průřez	1,958	T průřez	27,7494
2.	I průřez	2,345	I průřez	23,1793
3.	Tenký obdélníkový p.	4,678	L průřez	14,4780
4.	U průřez	5,555	Tenký obdélníkový p.	11,5658
5.	Dutý obdélníkový p.	5,983	Dutý trojúhelníkový p.	10,4057
6.	Dutý kruhový p.	7,917	U průřez	9,7399
7.	L průřez	8,549	Dutý obdélníkový p.	8,8533
8.	Dutý šestistěnný p.	8,666	Dutý kruhový p.	7,0668
9.	Dutý čtvercový p.	9,608	Dutý šestistěnný p.	6,4662
10.	Dutý eliptický p.	9,865	Dutý eliptický p.	6,1717
11.	Dutý trojúhelníkový p.	10,762	Dutý čtvercový p.	5,8305
12.	H průřez	14,5	H průřez	3,6719
13.	Plný obdélníkový p.	25,72	Plný eliptický p.	2,5001
14.	Plný eliptický p.	26,77	Plný trojúhelníkový p.	2,4184
15.	Plný trojúhelníkový p.	44,54	Plný obdélníkový p.	2,0944
16.	Plný čtvercový p.	51,42	Plný čtvercový p.	1,6977
17.	Plný šestistěnný p.	53,43	Plný šestistěnný p.	1,0077
18.	Plný kruhový p.	53,51	Plný kruhový p.	1,0000

Z výsledků je vidět, že otevřené tenkostěnné nosníky nejlépe odolávají ohybu. Naopak plné průřezy jsou dle tabulky (Tabulka 26) nejméně efektivní. Je tedy zřejmá důležitost úpravy tvaru průřezu nosníku pro zvýšení konkurenceschopnosti konstrukčního návrhu.

V druhém případě byl vyšetřován krut nosníku, kde byly využity stejné nosníky jako pro první případ, aby bylo možné nejen porovnat efektivitu jednotlivých průřezů, ale též porovnat efektivitu nosníků při různém zatížení. Zatížení nosníků bylo řešeno pomocí momentu krutu ve středu vyšetřovaných nosníků. Opět byl vypočten tvarový faktor pro krut definovaný prof. M. Ashbym a výsledky simulace krutu a tvarového faktoru porovnány v tabulce (Tabulka 15). Stejně jako pro ohyb je zde uvedena tabulka výsledků seřazená podle efektivnosti nosníků s připojenými hodnotami posunutí. Výsledky získané ze simulace odpovídají výsledkům získaných z teorie prof. Ashbyho. Navíc se ve výsledcích neobjevuje rozdíl vzniklý velkým rozdílem efektivnosti jednoho z nosníků, jako byl nosník tvaru L v případě ohybu.

Tabulka 27 Výsledky posunutí a tvarového faktoru při krutu

Pořadí	Z posunutí	Hodnota posunutí [mm]	Z tvarového faktoru	Hodnota tvarového faktoru [-]
1.	Dutý kruhový p.	0,00022244	Dutý kruhový p.	7,0668
2.	Dutý šestistěnný p.	0,000278576	Dutý šestistěnný p.	5,8299
3.	Dutý čtvercový p.	0,000390329	Dutý čtvercový p.	4,5351
4.	Dutý obdélníkový p.	0,000534707	Dutý obdélníkový p.	3,4240
5.	Dutý trojúhelníkový p.	0,000710569	Dutý trojúhelníkový p.	2,3503
6.	Plný kruhový p.	0,00022244	Dutý eliptický p.	1,7442
7.	Dutý eliptický p.	0,000849619	Plný čtvercový p.	1,4319
8.	Plný šestistěnný p.	0,000892673	Plný kruhový p.	1,0000
9.	Plný čtvercový průřez	0,00110957	Plný šestistěnný p.	0,9639
10.	Plný eliptický p.	0,0013801	Plný trojúhelníkový p.	0,7255
11.	Plný obdélníkový p.	0,00151994	Plný obdélníkový p.	0,7184
12.	Plný trojúhelníkový p.	0,0016749	Plný eliptický p.	0,5998
13.	Tenký obdélníkový p.	0,0126	Tenký obdélníkový p.	0,1788
14.	H průřez	0,0353	I průřez	0,0479
15.	I průřez	0,0398	T průřez	0,0473
16.	U průřez	0,0889	H průřez	0,0469
17.	L průřez	0,0937	L průřez	0,0470
18.	T průřez	0,123	U průřez	0,0469

Z výsledků simulací krutu vychází, že si duté průřezy vedly oproti výsledkům pro ohyb mnohem lépe a tenkostěnné otevřené průřezy se z prvních pozic v tabulce dostaly na poslední. Z tohoto výsledku je možné vyvodit, že není pouze důležité upravit průřez nosníku, ale též jej upravit správně.

Posledním vyšetřovaným případem je již zmíněná kombinace materiálu a průřezu. Pro řešení bylo zvoleno dvacet různých materiálů z materiálové databáze Granta EduPack [23]. Materiály byly zvoleny skrze celé spektrum materiálů obsažených v databázi, od dřeva, přes ocel až po beryllium izostaticky lisované za tepla. Z databáze byly vybrány hodnoty modulů pružnosti v tahu a smyku, hustoty, a hlavně empirické tvarové faktory pro zvolené materiály. Tyto hodnoty jsou zapsány v tabulkách pro ohyb a krut materiálů (Tabulka 22, Tabulka 24) a využity pro výpočet materiálových indikátorů pomocí vztahů pro výpočet koeficientů M_1 (98) a M_2 (101). Výsledky jsou zde uvedeny sestupně podle efektivity kombinace materiálu a průřezu zapsané v tabulce (Tabulka 28).

Tabulka 28 Výsledky výběru kombinace materiálu a průřezu

Pořadí	Název	Koeficient M_1	Koeficient M_2
1.	Beryllium S-200FH hot isostatically pressed	60,446	37,016
2.	SiC/SiC fiber, 35-45Vf - quasi-isotropic laminate	27,129	16,613
3.	Al-40%AlN(p)	20,888	12,791
4.	Aluminium 6010 O	20,037	12,270
5.	Cordierite	17,067	10,452
6.	Mg-20%SiC(p)	16,274	9,966
7.	Titanium silicate	14,451	8,850
8.	Titanium alpha alloy Ti-0,2Pd (grade 11)	13,688	8,382
9.	Low alloy cast steel SAE 4130	12,311	7,539
10.	Oak (quercus spp.) (I)	11,631	7,123
11.	Zirconium carbide	11,308	6,925
12.	Carbon steel AISI 1137, tempered at 540°C	10,696	6,550
13.	High alloy nickel steel Kovar	9,214	5,643
14.	PEI (30% carbon fiber)	9,193	5,629
15.	High alloy steel AF1410	7,168	4,389
16.	Stainless steel, AISI 440B, tempered at 316°C	6,359	3,894
17.	Aluminium-SiC foam (0,41)	5,344	3,272
18.	PEEK (30% glass fiber)	5,130	3,141
19.	Platinum P04995 annealed	3,322	2,034
20.	TPV (PP+EP(D)M, Shore D50	0,725	0,444

V takovém případě je velmi důležitá dostupnost materiálů, které vstupují do výběru, a taktéž možnosti jejich zpracování definované tvarovým faktorem. Proto jsou výsledky tohoto výběru spíše ilustrativní a ukazují metodiku výběru pomocí materiálových indikátorů ať už výpočtem nebo grafickou metodou. Pro reálný případ je možné si představit situaci, kdy konstruktér vybere z katalogu dostupné materiály, porovná jejich cenu a vlastnosti a následně vybere nejlepší kombinaci odpovídající konstrukčním požadavkům. S tímto výběrem může též pomoci indikátoru ceny definovaná v kapitole (5.2.1) vztahem (119), který je možné zakomponovat do vztahu (98) a tím získat koeficient pro tuhý a lehký nosník s určitým tvarem, který ale bude zároveň nejlevnější.

Seznam použitých zdrojů

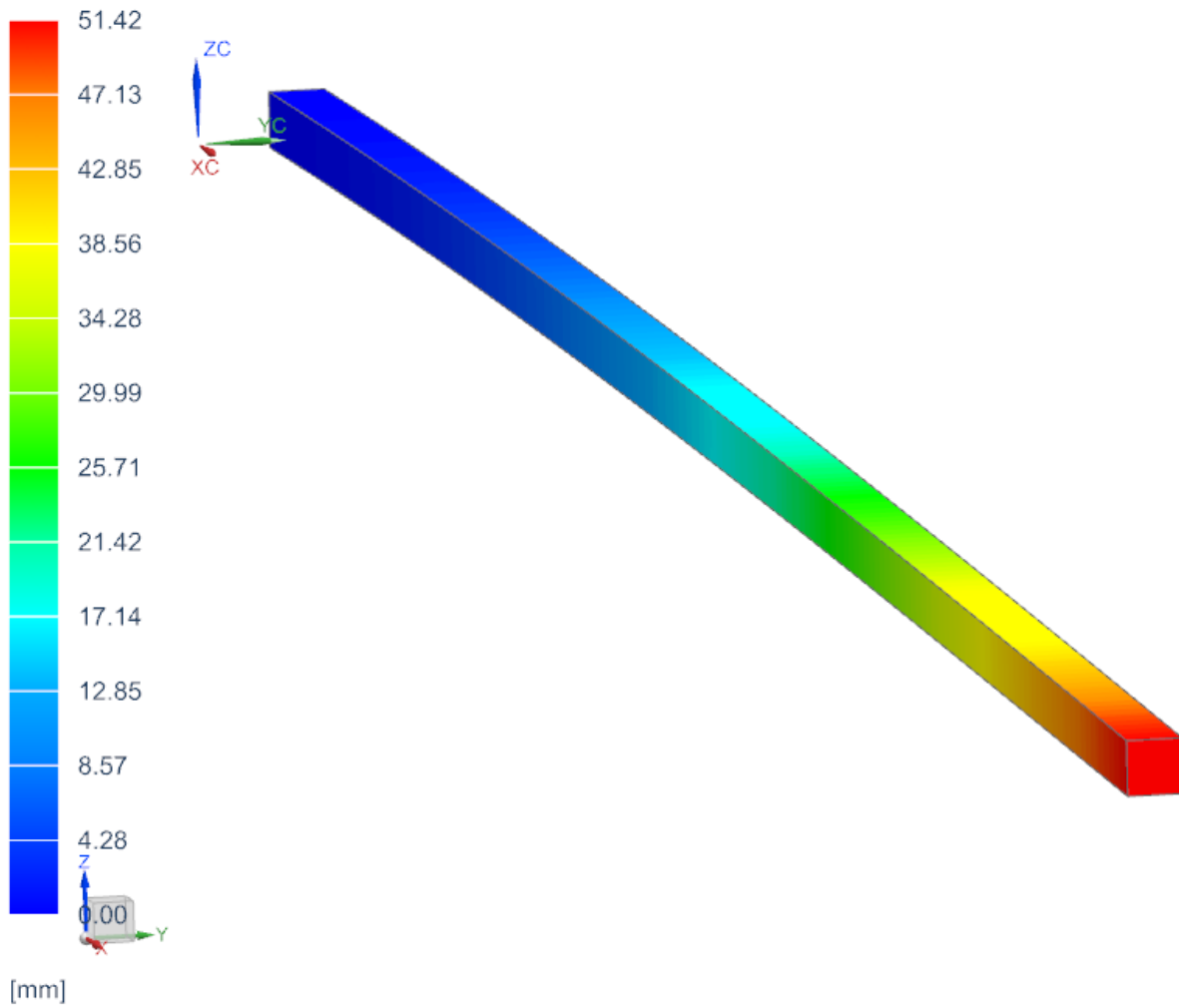
- [1] HÁJEK, Emanuel, REIF, Pavel a VALENTA, František. *Pružnost a pevnost I*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1988. 429 s.
- [2] MICHALEC, Jiří a kol. *Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. Praha: Česká technika – nakladatelství ČVUT, 2009. 307 s. ISBN 978-80-01-04224-3.
- [3] LAŠ, Vladislav, HLAVÁČ, Zdeněk a VACEK, Vlastimil. *Technická mechanika v příkladech*. 3. dopl. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2001. 160 s. ISBN 80-7082-849-8.
- [4] BITTNAROVÁ, Jitka et al. *Pružnost a pevnost: příklady*. 2. vyd. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2008. 235 s. ISBN 978-80-01-02743-0.
- [5] HEARN, E. J. *Mechanics of materials: an introduction to the mechanics of elastic and plastic deformation of solids and structural materials*. 2. 3rd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1997. xx, 539 s. ISBN 0-7506-3266-6.
- [6] ČERNOCH, Svatopluk. *Strojně technická příručka*. 11. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1959.
- [7] HALAMA, Radim a kol. *Pružnost a pevnost – interaktivní studijní materiál* [online]. Ostrava: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava. Dostupné z: https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost_pevnost_obraz.pdf.
- [8] ASHBY, Michael. *Materials selection in mechanical design*. 2. vyd. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999, 513 s. ISBN 0-7506-4357-9.
- [9] ASHBY, Michael. *Materials selection in mechanical design*. 3. vyd. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005, 602 s. ISBN 0-7506-6168-2.
- [10] ASHBY, Michael. *Materials selection in mechanical design*. 4. vyd. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2019, 810 s. ISBN 978-0-08-102376-1.
- [11] ASHBY, Michael. *Materials selection in mechanical design*. 5. vyd. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2023, 513 s. ISBN 978-0-08-100599-6
- [12] SHIMA, Hiroyuki. *Functional Analysis for Physics and Engineering*. Boca Raton: CRC Press, 2016, 282 s. ISBN 978-1-4822-2303-3.
- [13] GERE, James. *Mechanics of Materials*. 6. vyd. Belmont: Brooks/Cole – Thompson Learning, 2004, 964 s. ISBN 0-534-41793-0
- [14] GERE, James, GOODNO, Barry. *Mechanics of Materials, Brief Edition*. Stamford: Cengage Learning, 2012, 644 s. ISBN 978-1-111-13602-4.
- [15] VABLE, Madhukar. *Mechanics of Materials* [online]. 2. vyd. Dostupné z: <https://madhuvable.org/wp-content/uploads/2016/04/Entire%20Book%202018.pdf>
- [16] PAVAZZA, Radoslav, MATOKOVIĆ, Ado, PLAZIBAT, Bože. *Torsion of thin-walled beams of symmetrical open cross-sections with influence of shear*. International Journal of Mechanical Sciences. Roč. 7 (2005), s. 1099-1122. ISSN 0020-7403.
- [17] TIMOSHENKO, Stephen. *Strength of materials, part I*. 2. vyd. New York: D. Van Nostrand Company, 1940, 450 s.
- [18] TIMOSHENKO, Stephen. *Strength of materials, part II*. 3. vyd. New York: D. Van Nostrand Company, 1956, 563 s.

- [19] PLÁNIČKA, F., ZAJÍČEK, M., ADÁMEK, V. *Ohyb (Napjatost)*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2008 [cit. 24. 4. 2023]. Dostupné z <https://www.kme.zcu.cz/kmet/pp/ohyb-a-napjatost/shrnuti.pdf>
- [20] PLÁNIČKA, F., ZAJÍČEK, M., ADÁMEK, V. *Ohyb (Deformace)*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2008 [cit. 26. 4. 2023]. Dostupné z <https://www.kme.zcu.cz/kmet/pp/ohyb-a-deformace/shrnuti.pdf>
- [21] PLÁNIČKA, F., ZAJÍČEK, M., ADÁMEK, V. *Tah – tlak*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2008 [cit. 30. 4. 2023]. Dostupné z <https://www.kme.zcu.cz/kmet/pp/tah-tlak/shrnuti.pdf>
- [22] PLÁNIČKA, F., ZAJÍČEK, M., ADÁMEK, V. *Krut a stříh*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2008. Dostupné z <https://www.kme.zcu.cz/kmet/pp/krut-a-strih/shrnuti.pdf>
- [23] The GRANTA EduPack materials and proces selection platforms, produkt firmy ANSYS/GRANTA, www.grantadesign.com/education/

PŘÍLOHA č. 1

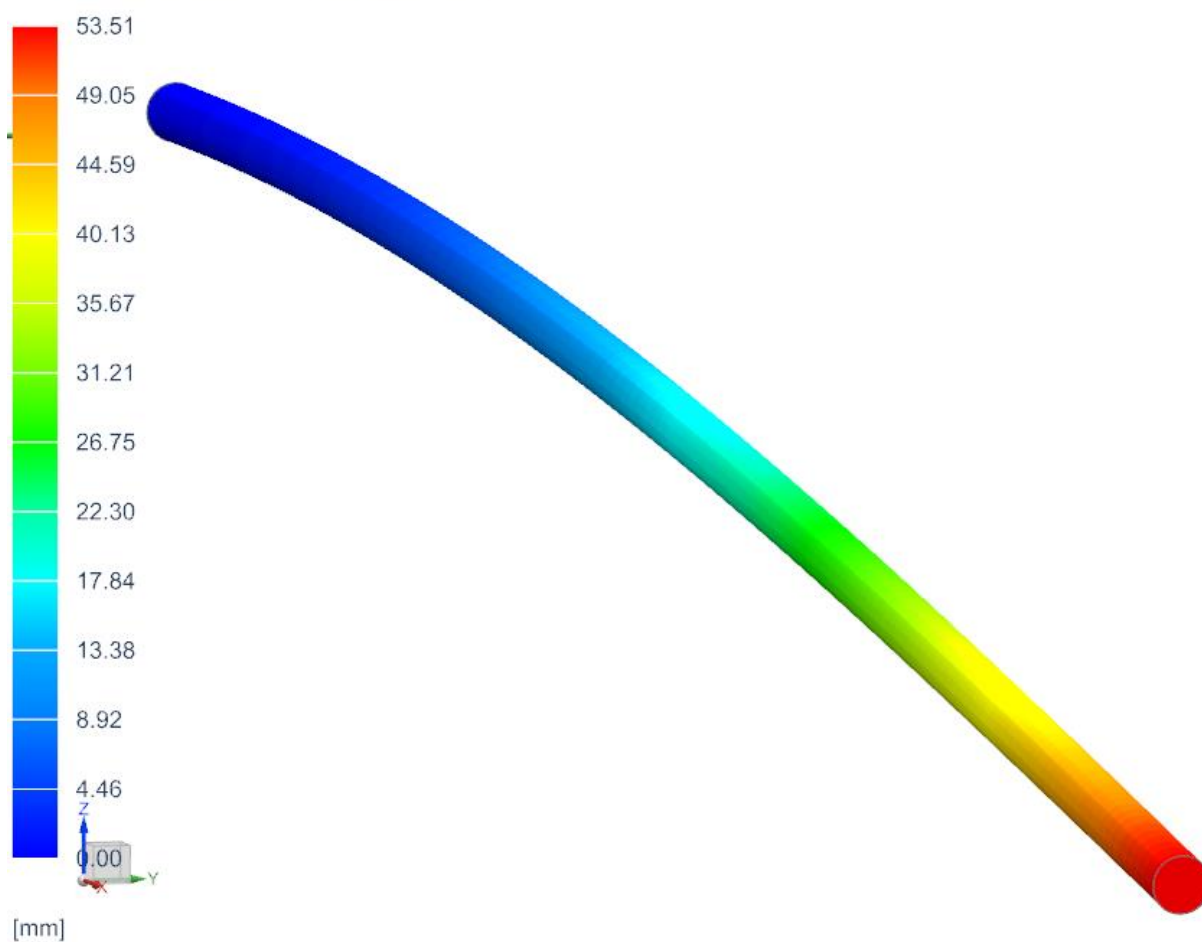
Výsledky simulace nosníku pomocí MKP Ohyb – posunutí

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 53.51, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



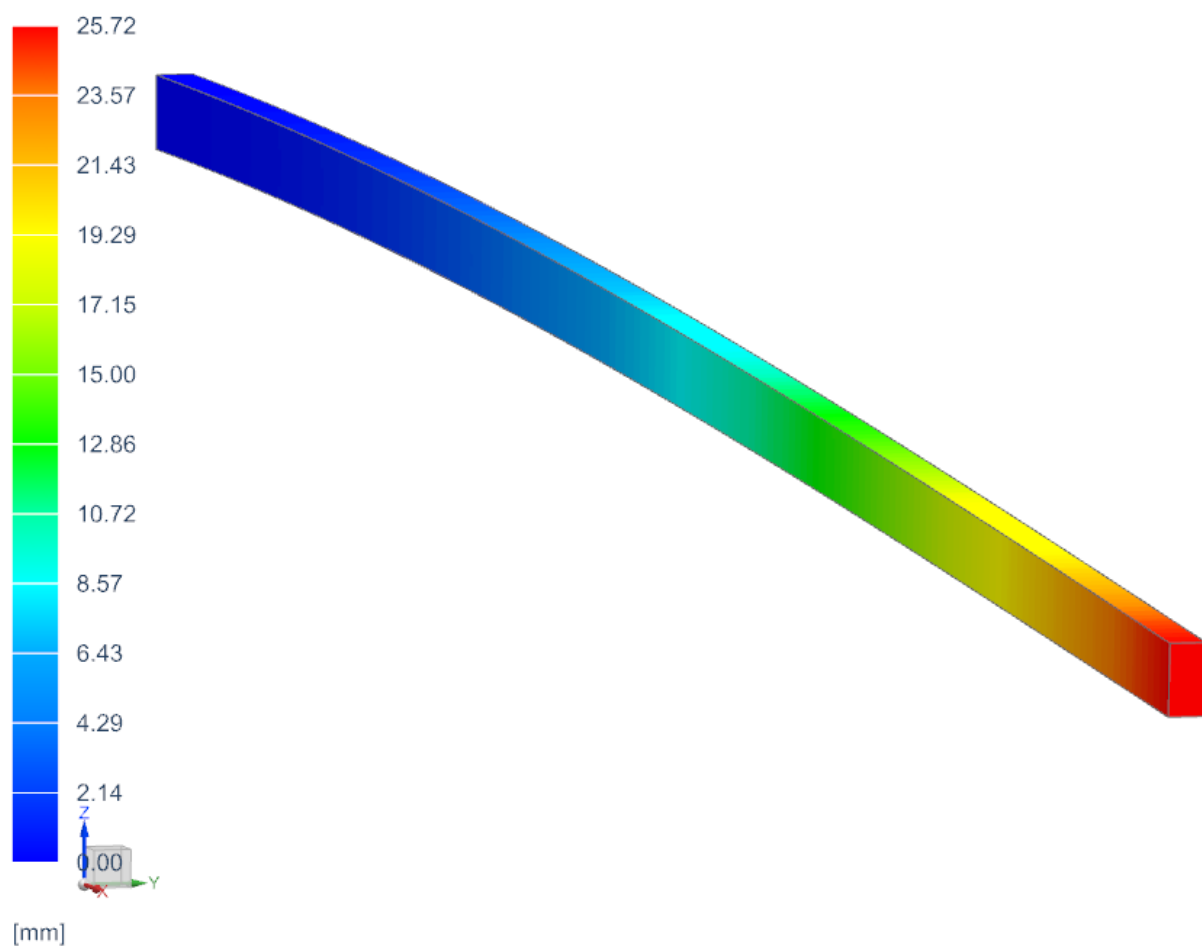
Příloha 1. 1 Ohyb – posunutí – Plný čtvercový průřez

Plne_ohyb_sim1 : Solution 1 Result
Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 53.51, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



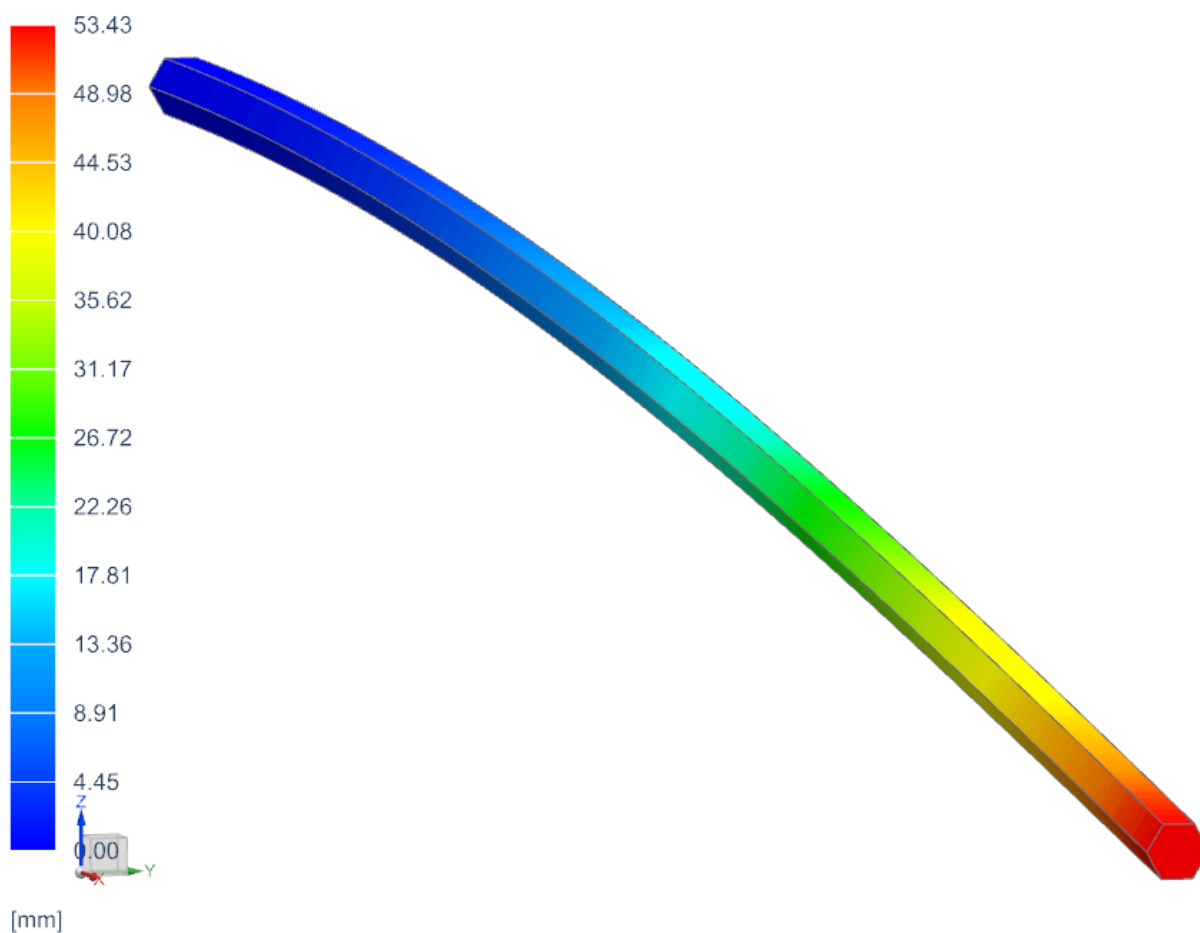
Příloha 1. 2 Ohyb – posunutí – Plný kruhový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 53.51, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



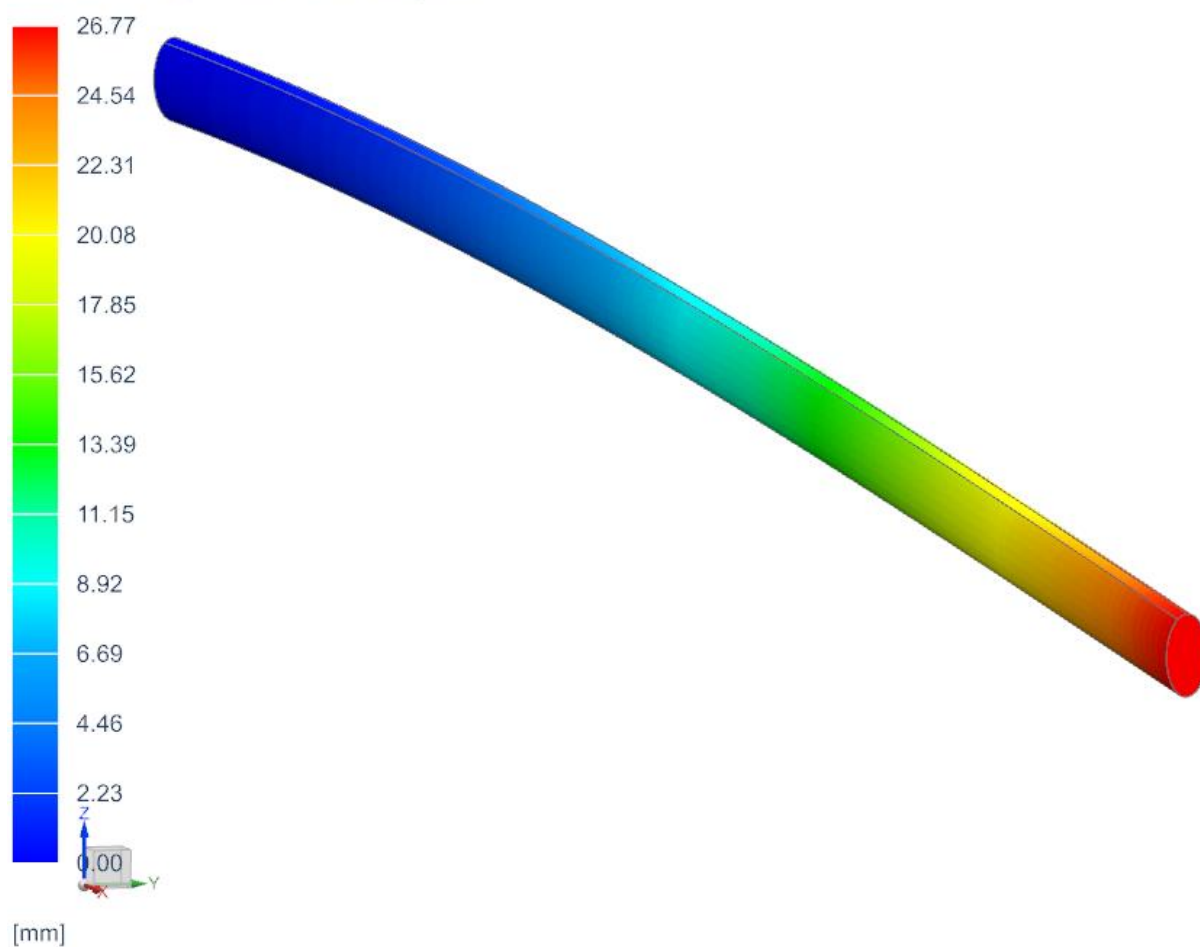
Příloha 1. 3 Ohyb – posunutí – Plný obdélníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 53.51, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



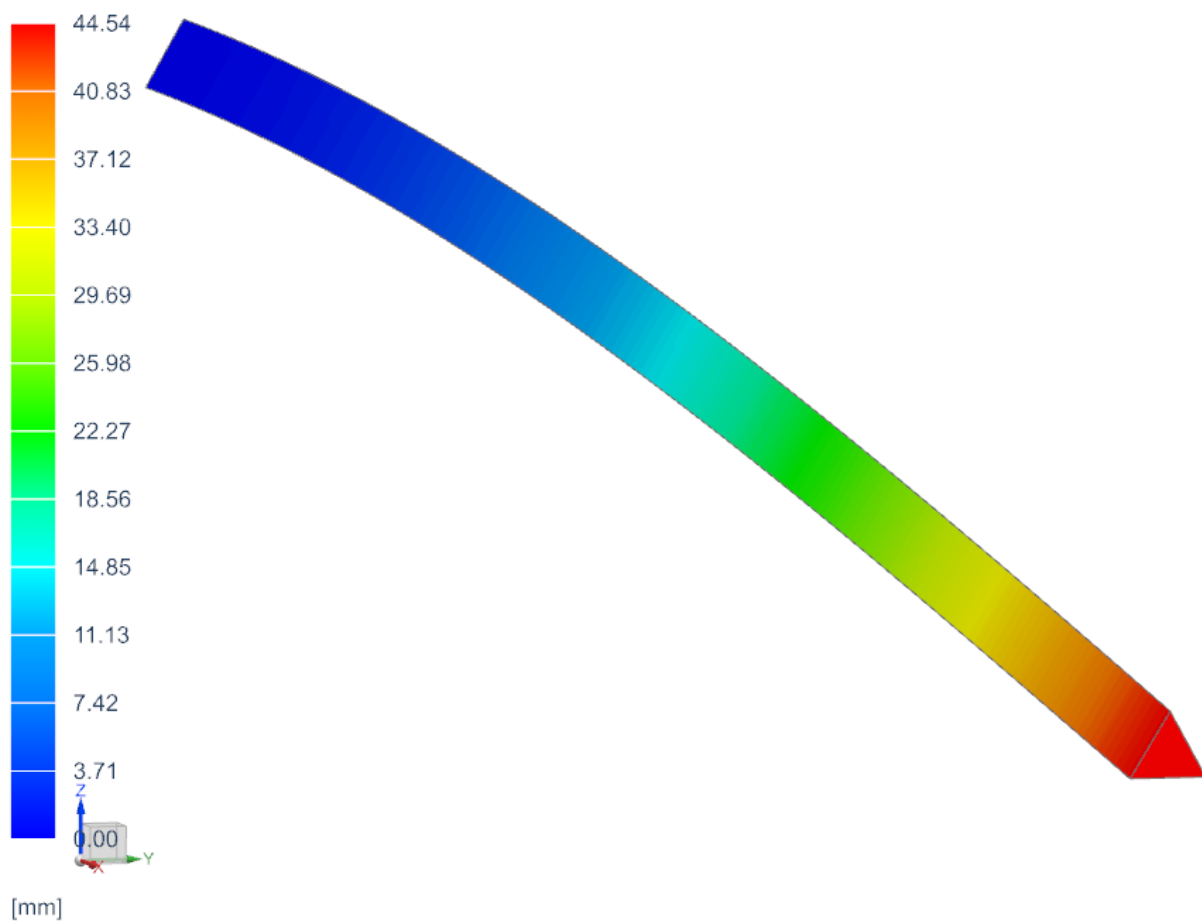
Příloha 1. 4 Ohyb – posunutí – Plný šestistěnný průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 53.51, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



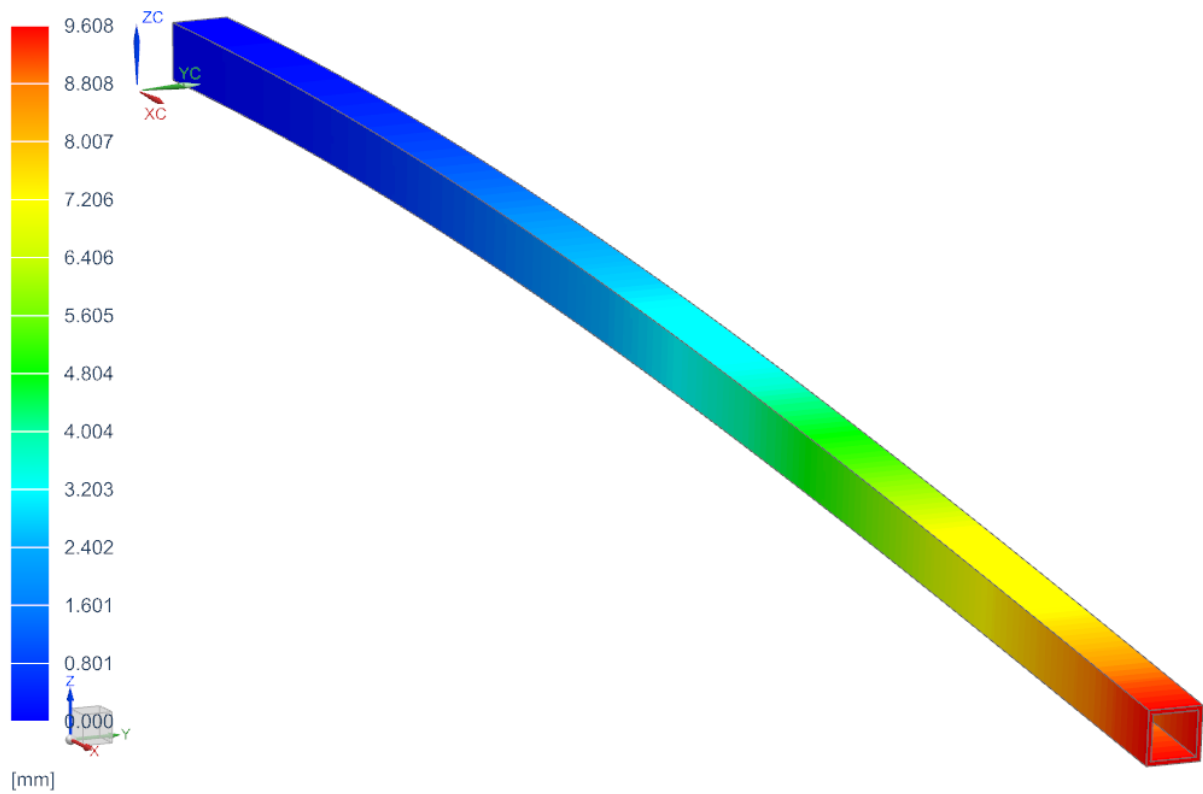
Příloha 1. 5 Ohyb – posunutí – Plný eliptický průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 53.51, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

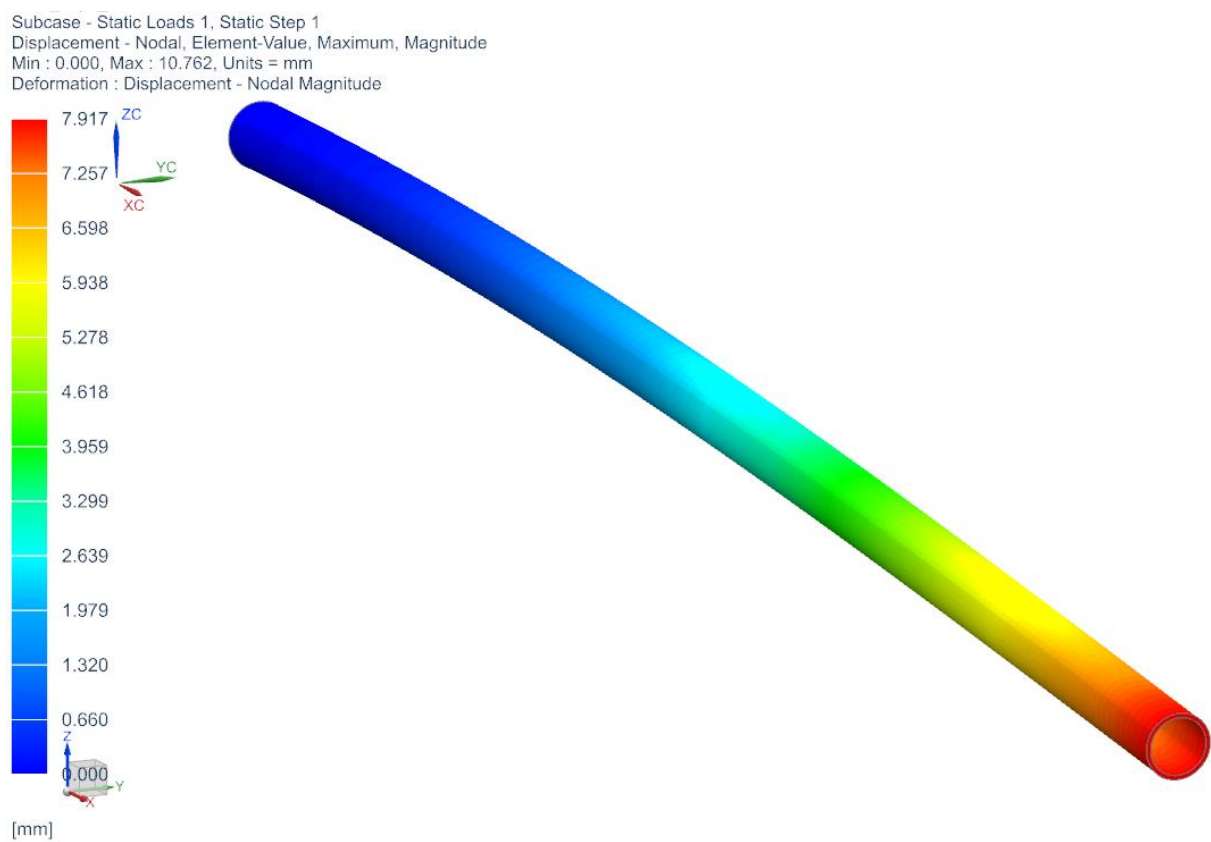


Příloha 1. 6 Ohyb – posunutí – Plný trojúhelníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.000, Max : 10.762, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

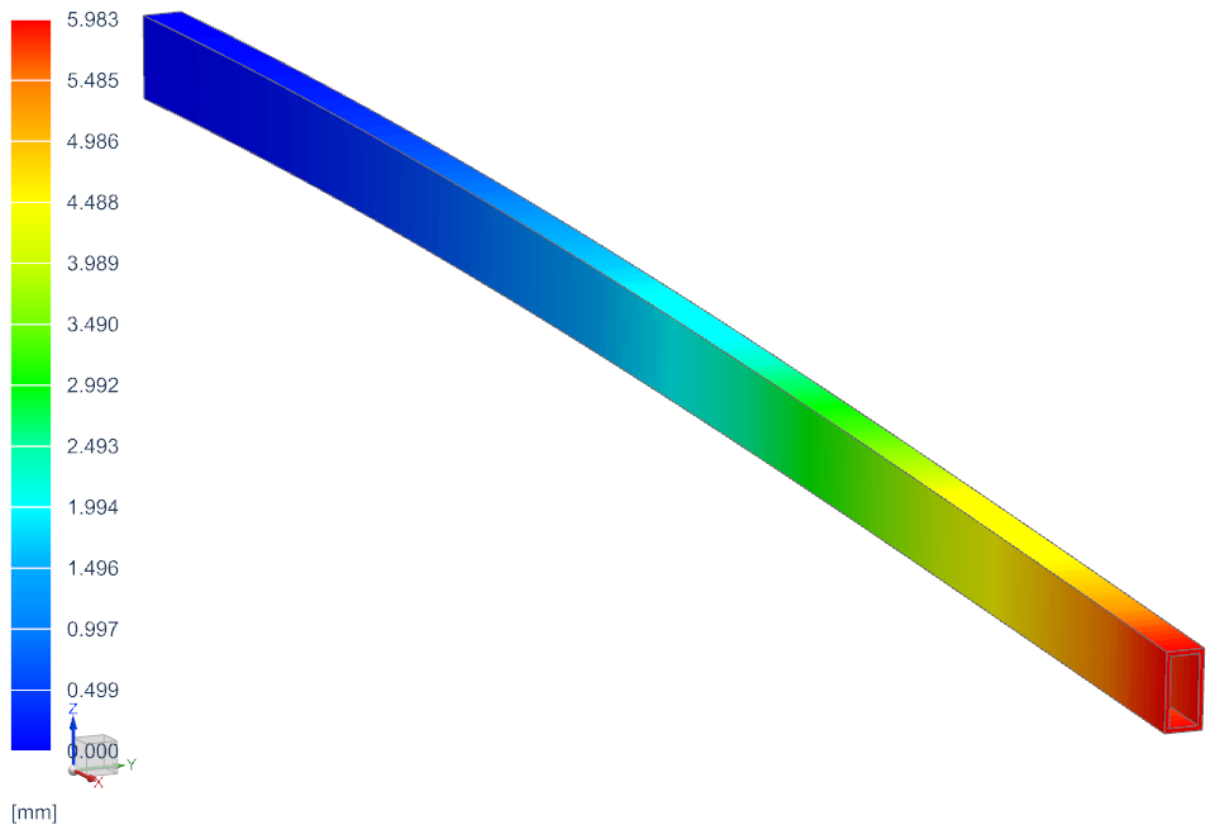


Příloha 1. 7 Ohyb – posunutí – Dutý čtvercový průřez



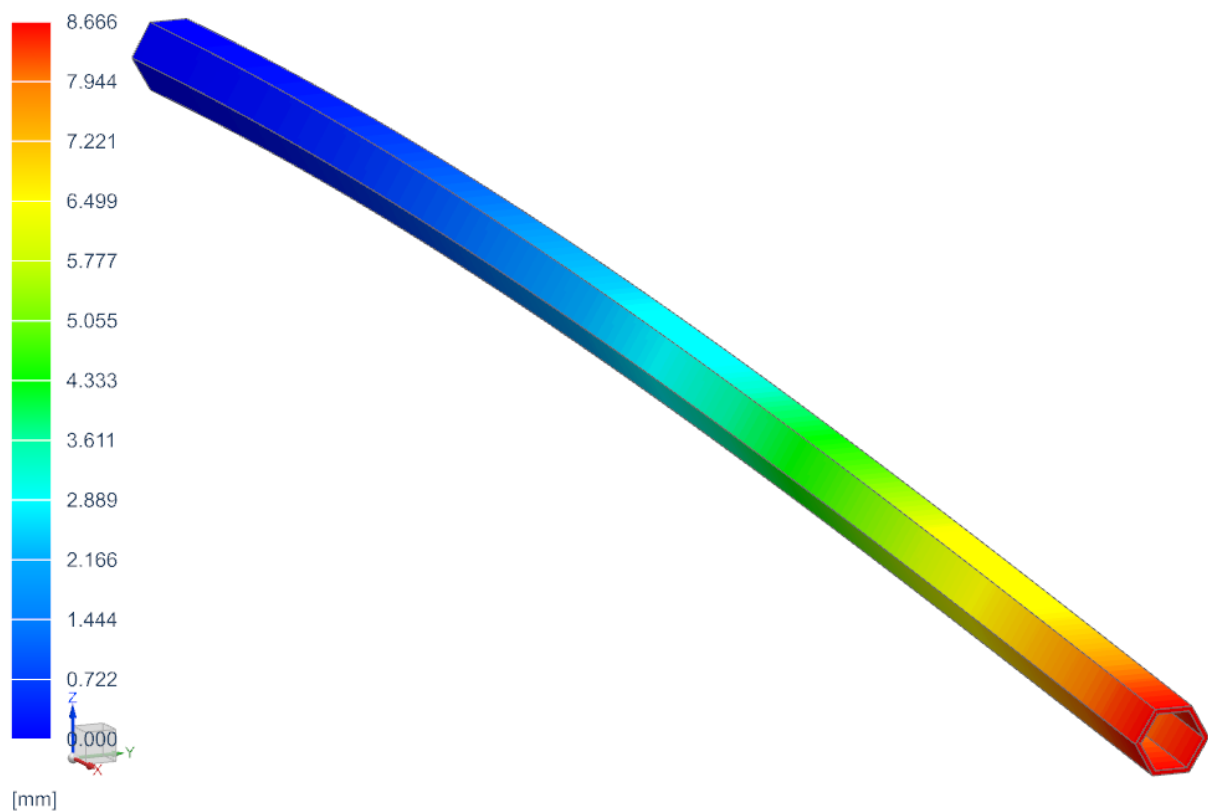
Příloha 1. 8 Ohyb – posunutí – Dutý kruhový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.000, Max : 10.762, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



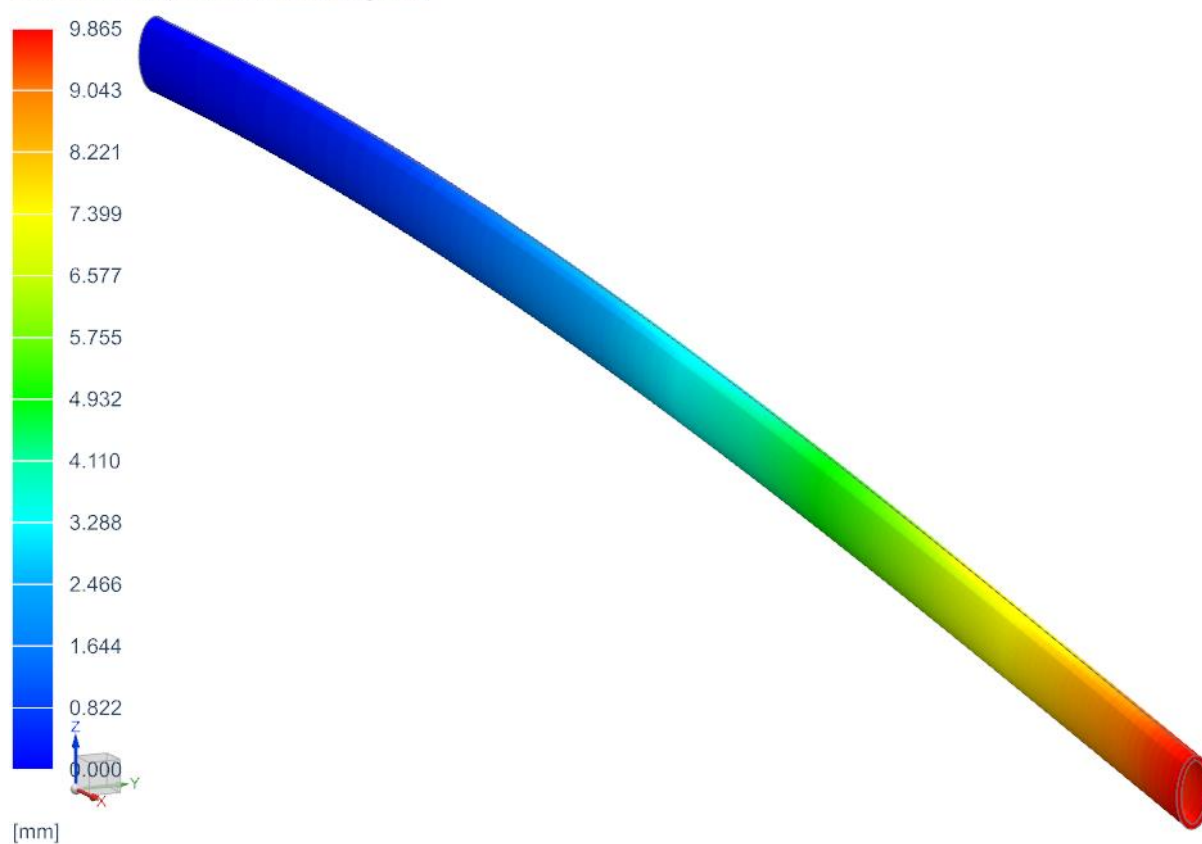
Příloha 1. 9 Ohyb – posunutí – Dutý obdélníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.000, Max : 10.762, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



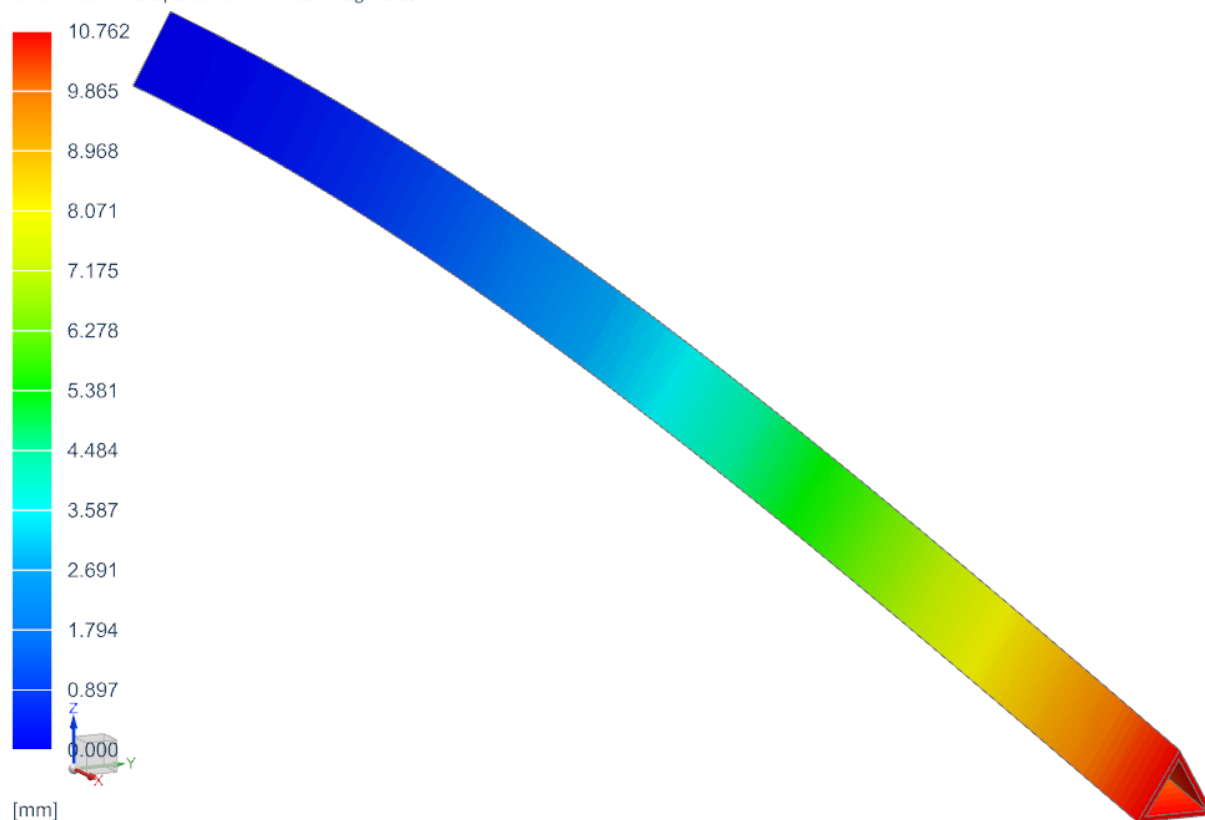
Příloha 1. 10 Ohyb – posunutí – Dutý šestistěnný průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.000, Max : 10.762, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



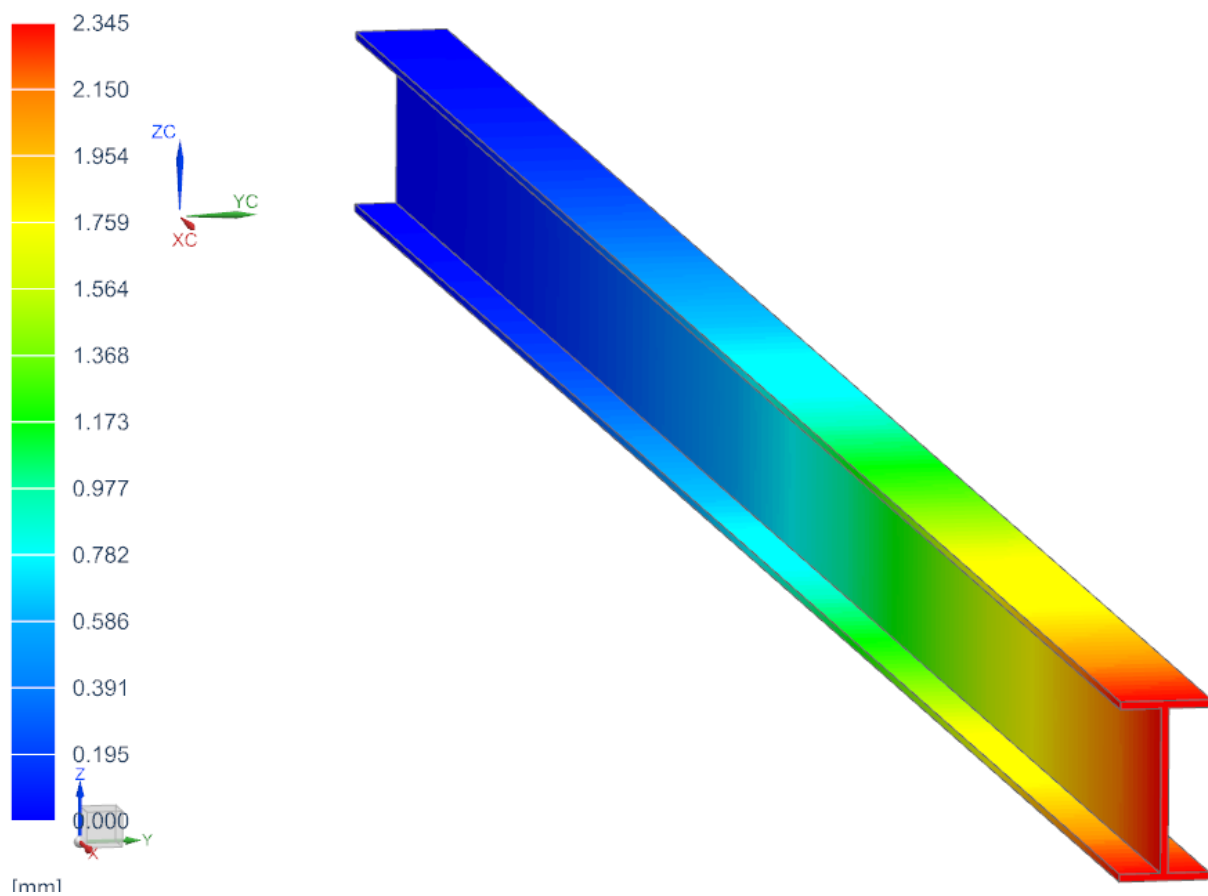
Příloha 1. 11 Ohyb – posunutí – Dutý eliptický průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.000, Max : 10.762, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



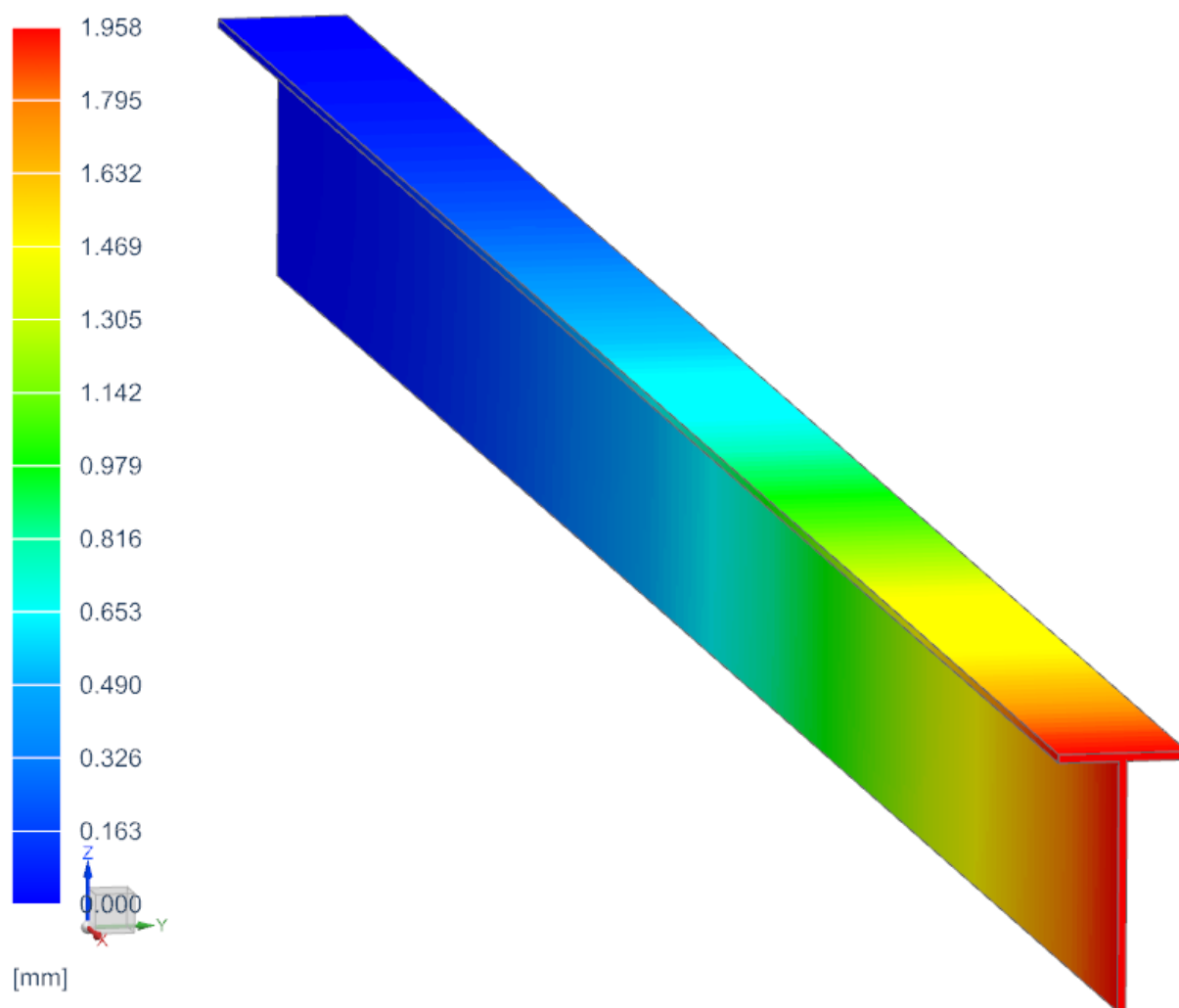
Příloha 1. 12 Ohyb – posunutí – Dutý trojúhelníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 14.50, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



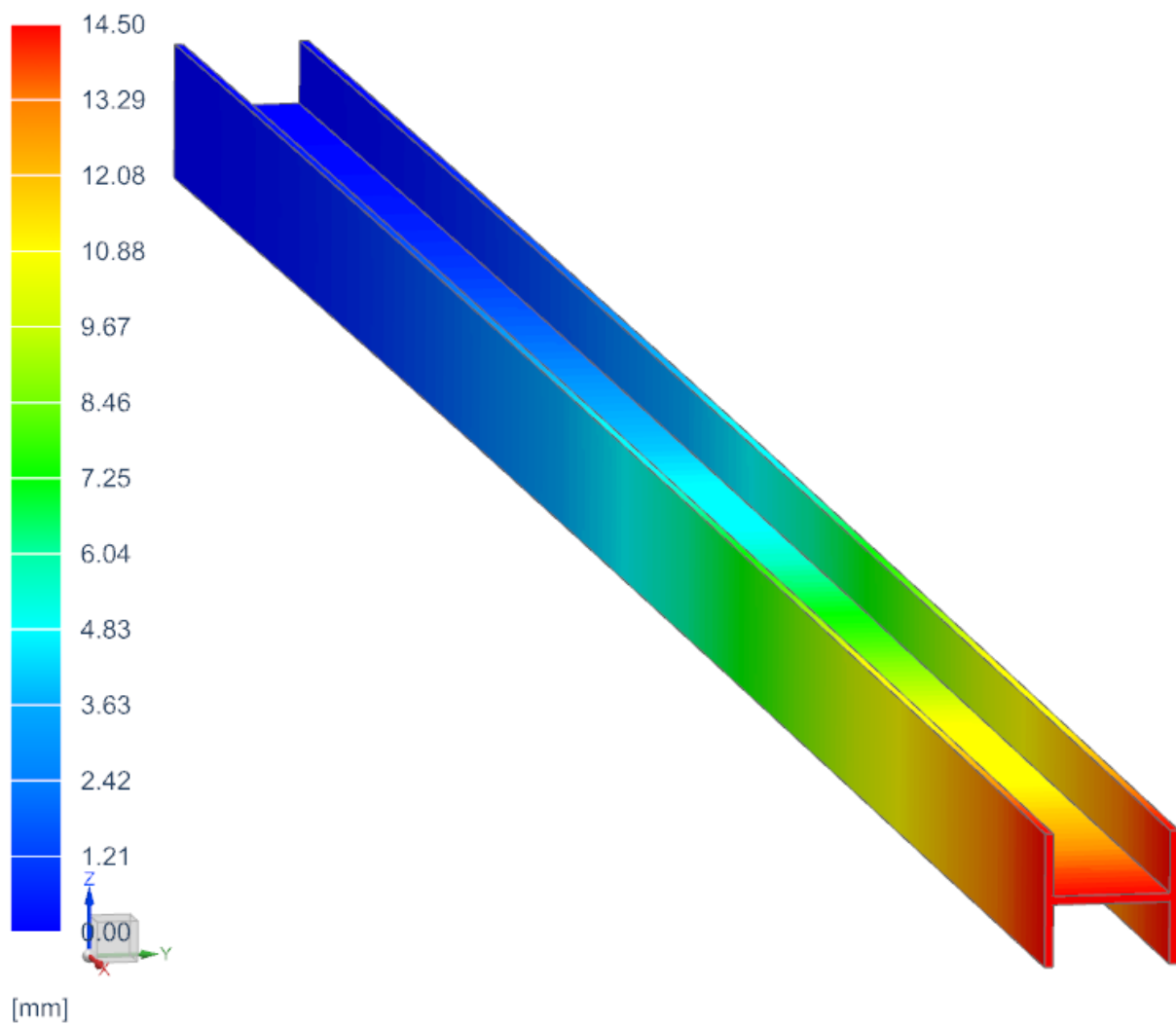
Příloha 1. 13 Ohyb – posunutí – I průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 14.50, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



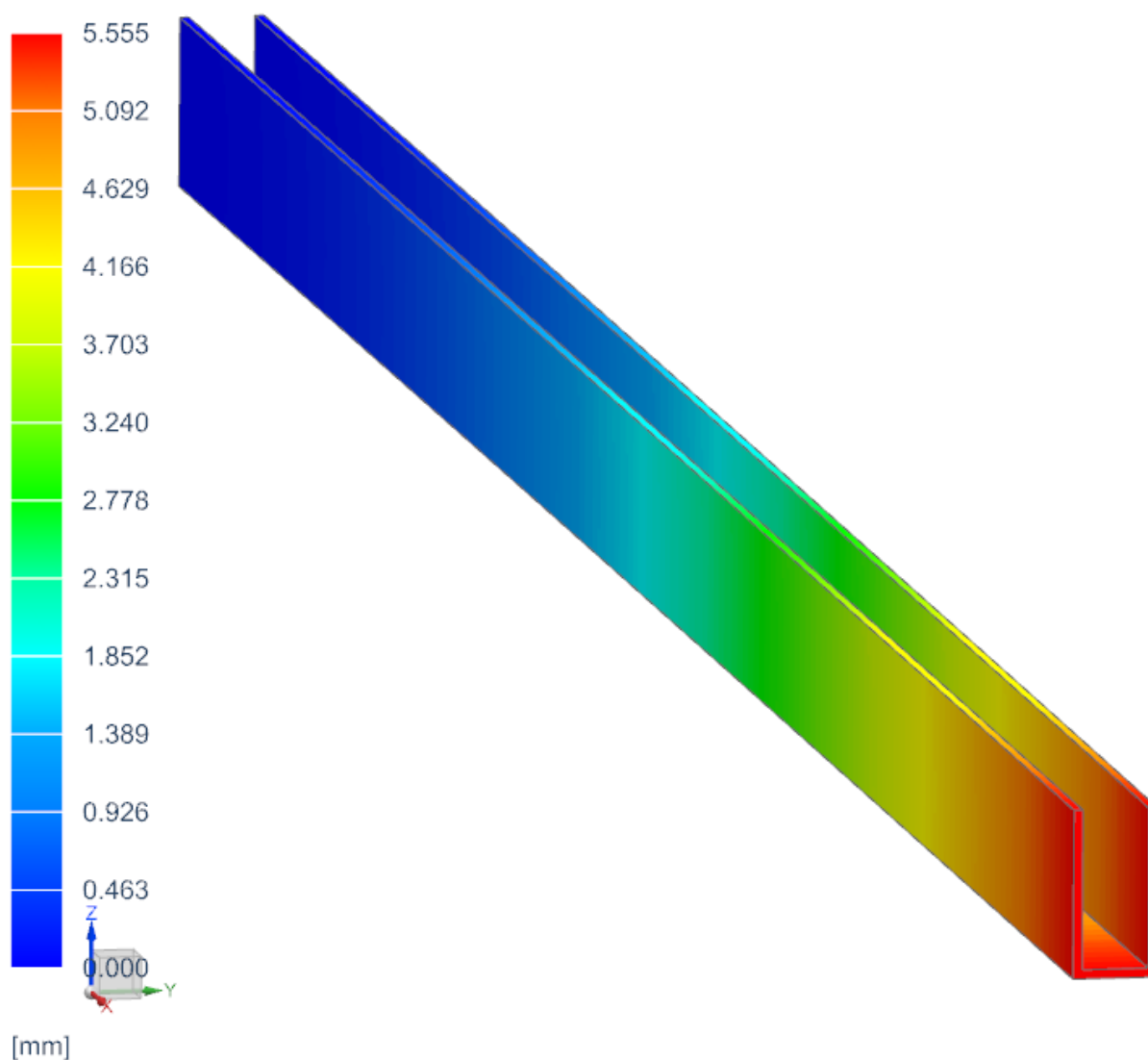
Příloha 1. 14 Ohyb – posunutí – T průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 14.50, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



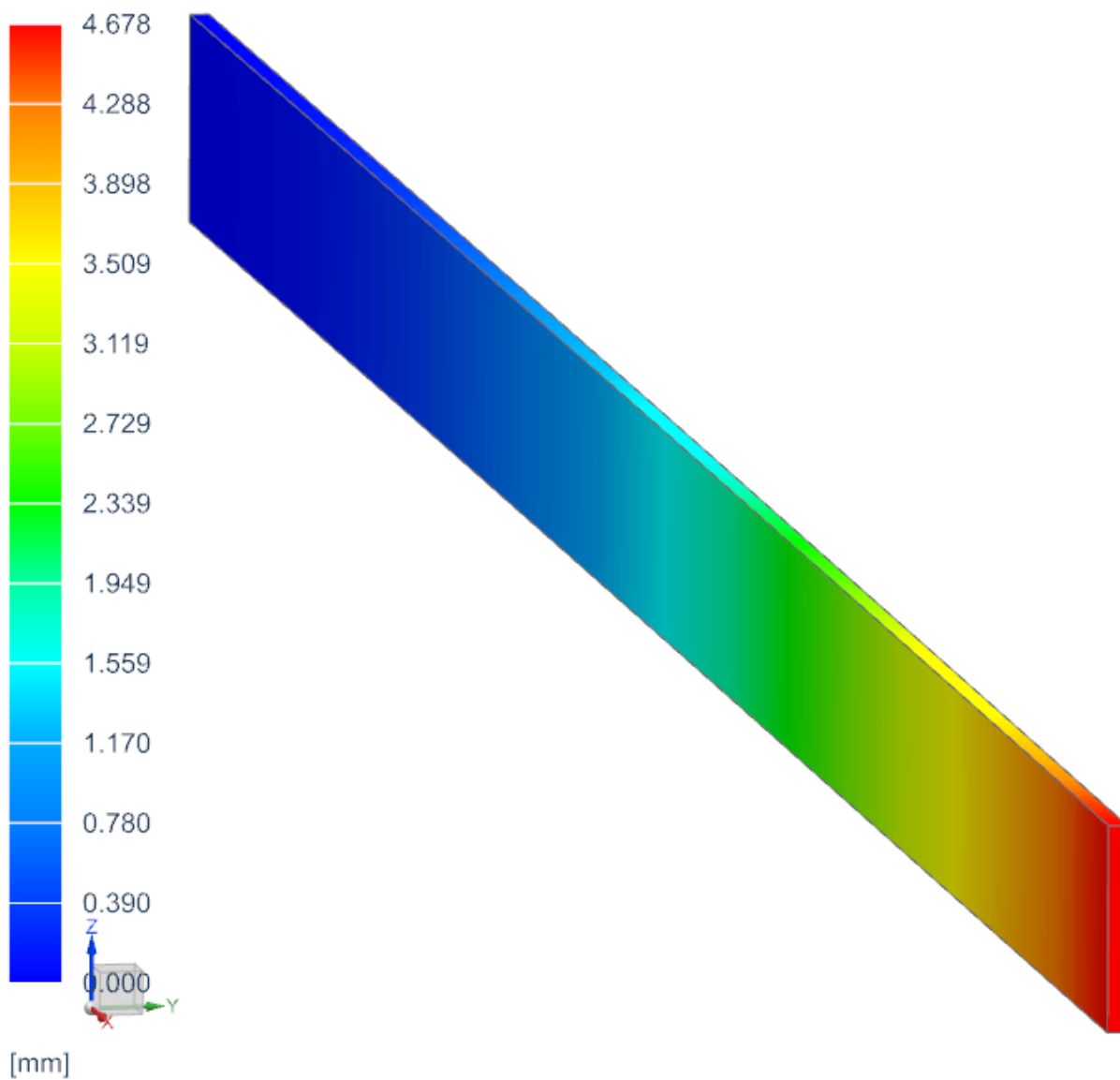
Příloha 1. 15 Ohyb – posunutí – H průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 14.50, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



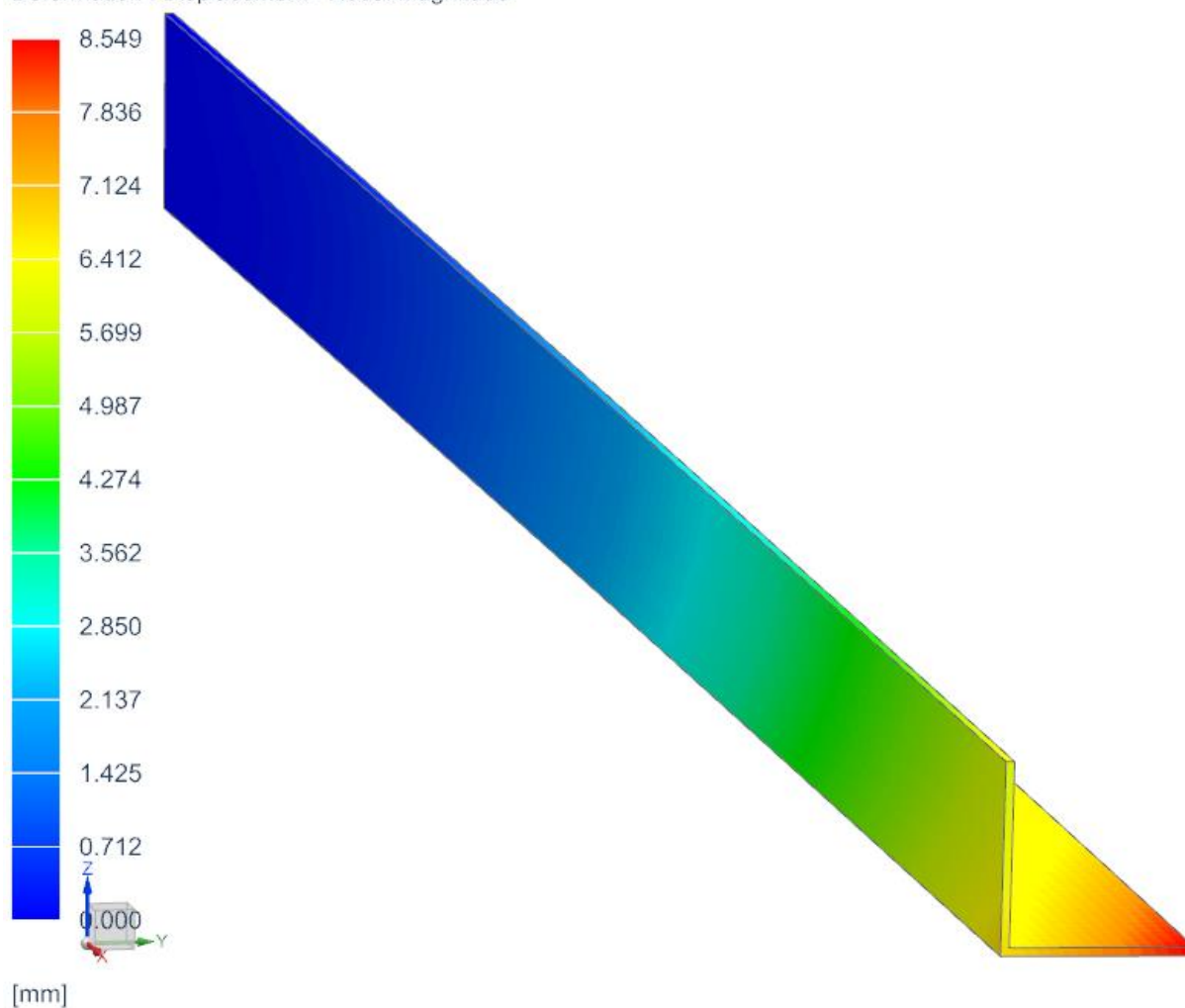
Příloha 1. 16 Ohyb – posunutí – U průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 14.50, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



Příloha 1. 17 Ohyb – posunutí – Tenká deska

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Element-Value, Maximum, Magnitude
Min : 0.00, Max : 14.50, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

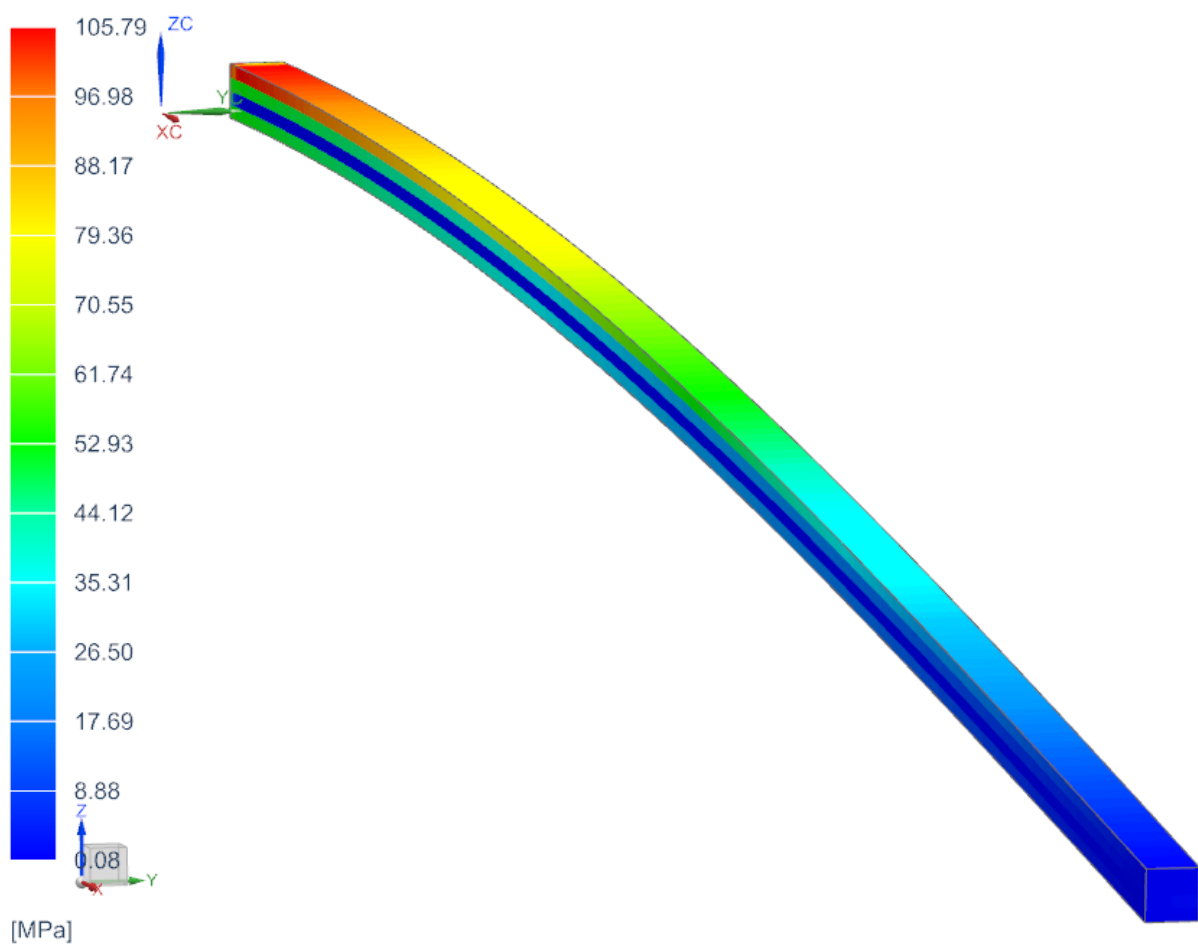


Příloha 1. 18 Ohyb – posunutí – L průřez

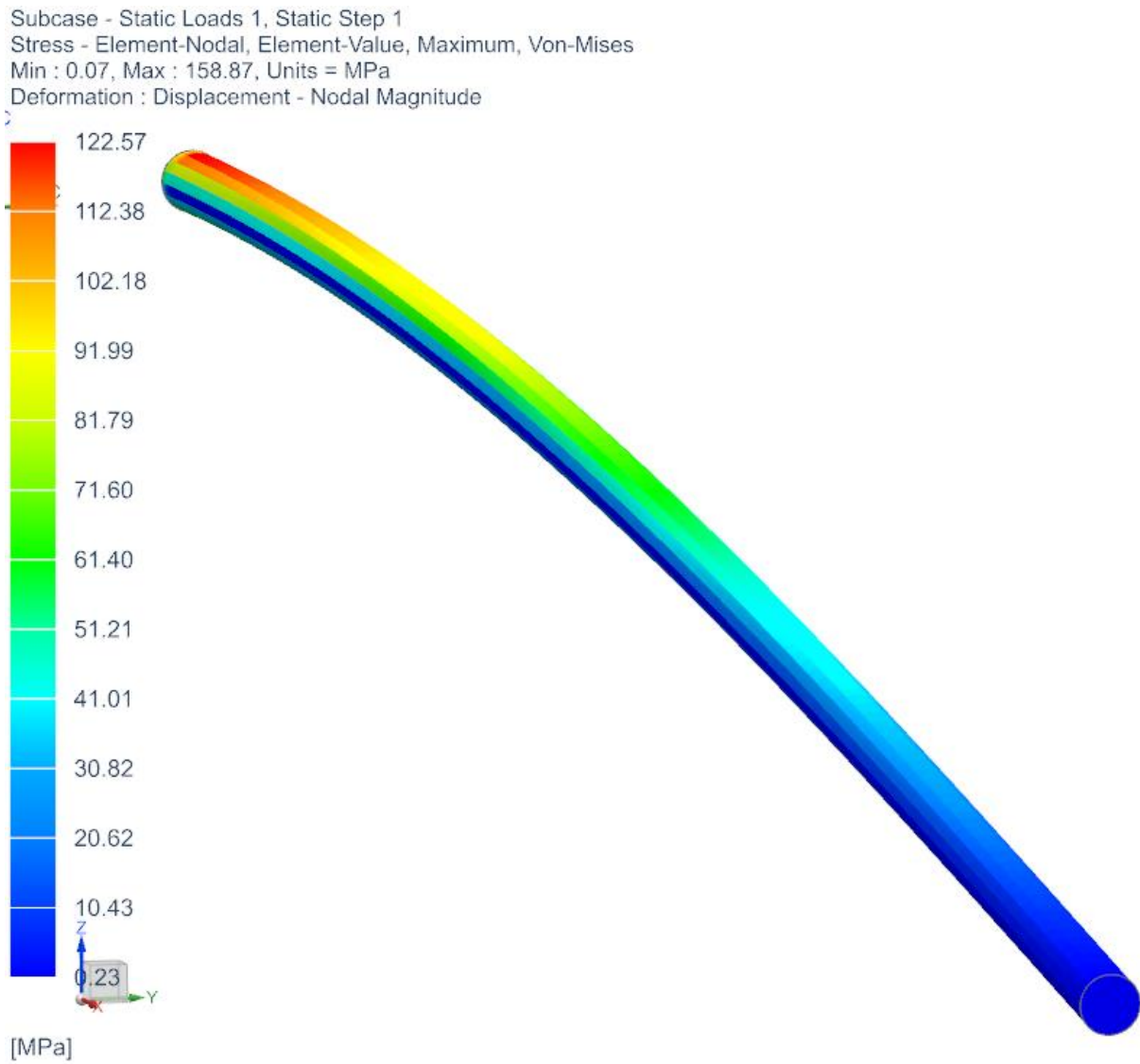
PŘÍLOHA č. 2

Výsledky simulace nosníku pomocí MKP Ohyb – napětí

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.07, Max : 158.87, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

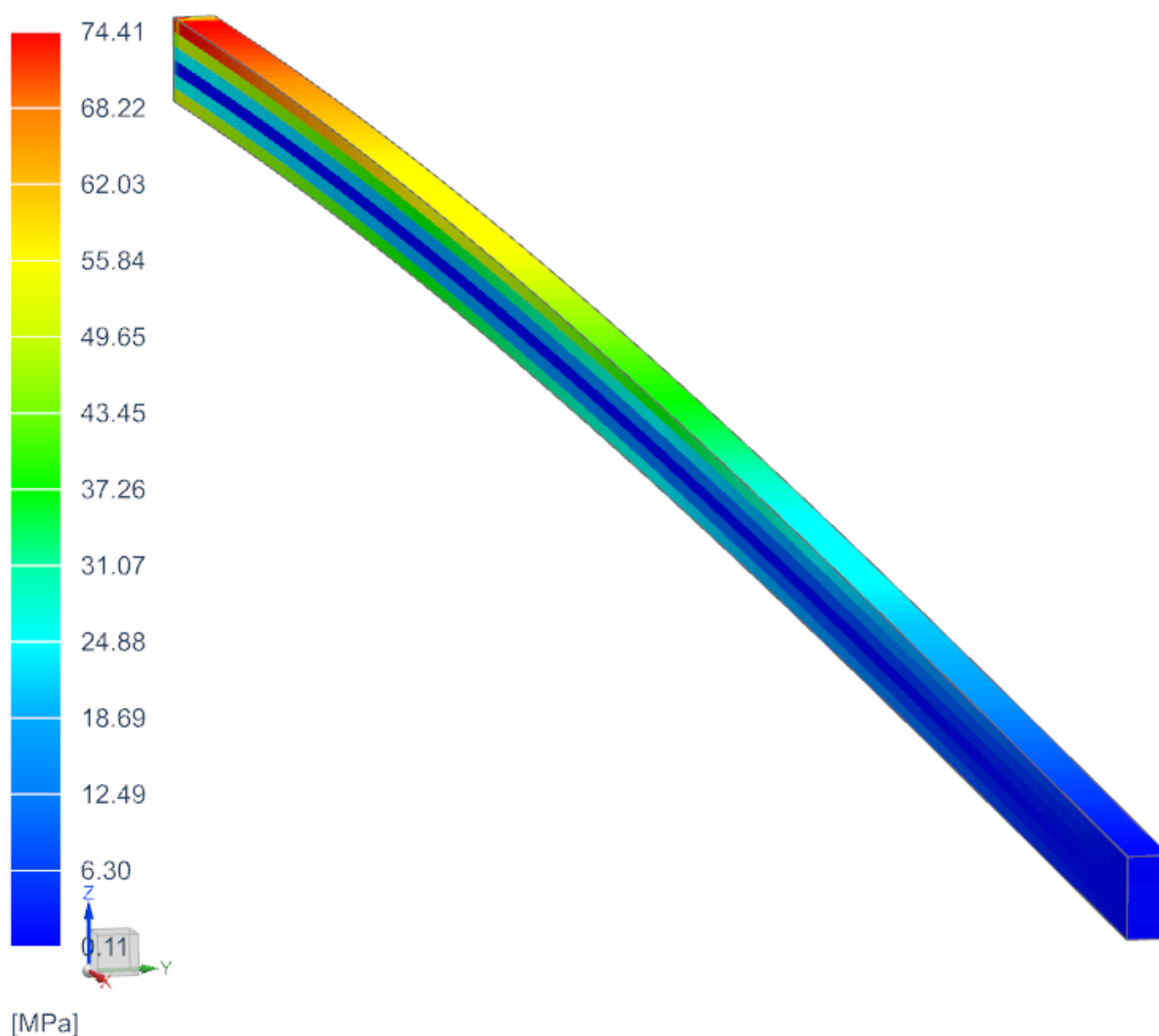


Příloha 2. 1 Ohyb – napětí – Plný čtvercový průřez



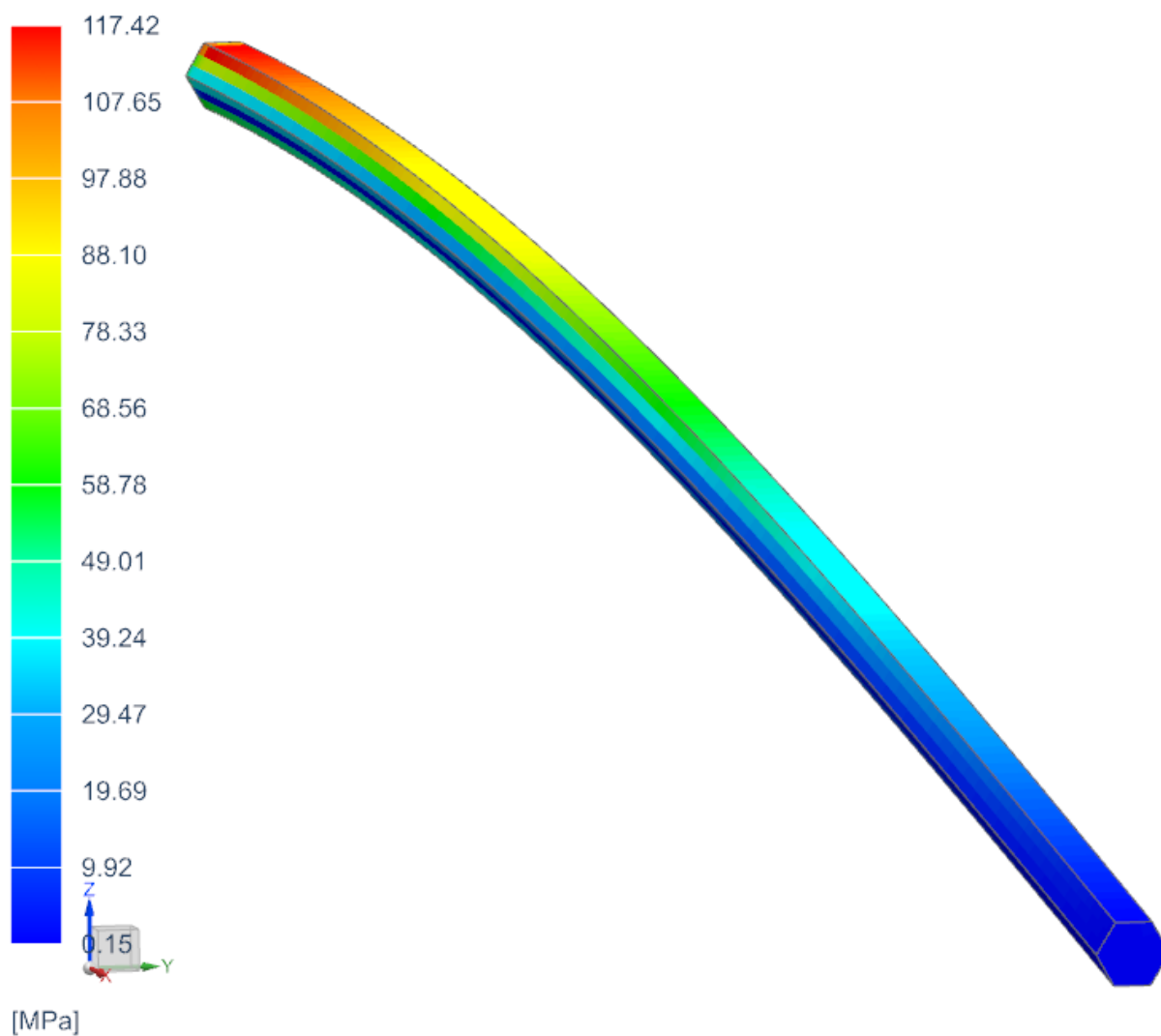
Příloha 2. 2 Ohyb – napětí – Plný kruhový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.07, Max : 158.87, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



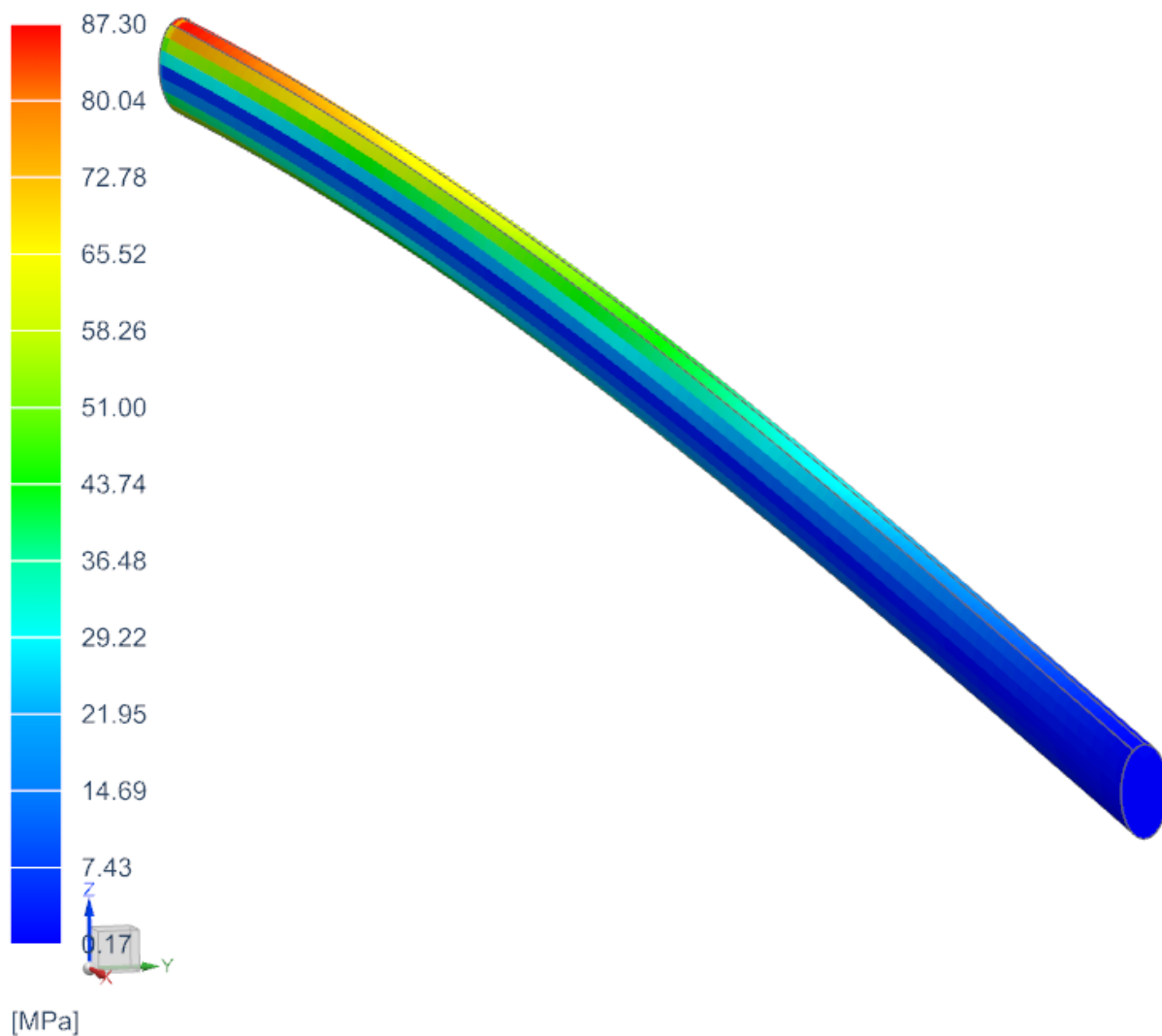
Příloha 2. 3 Ohyb – napětí – Plný obdélníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.07, Max : 158.87, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



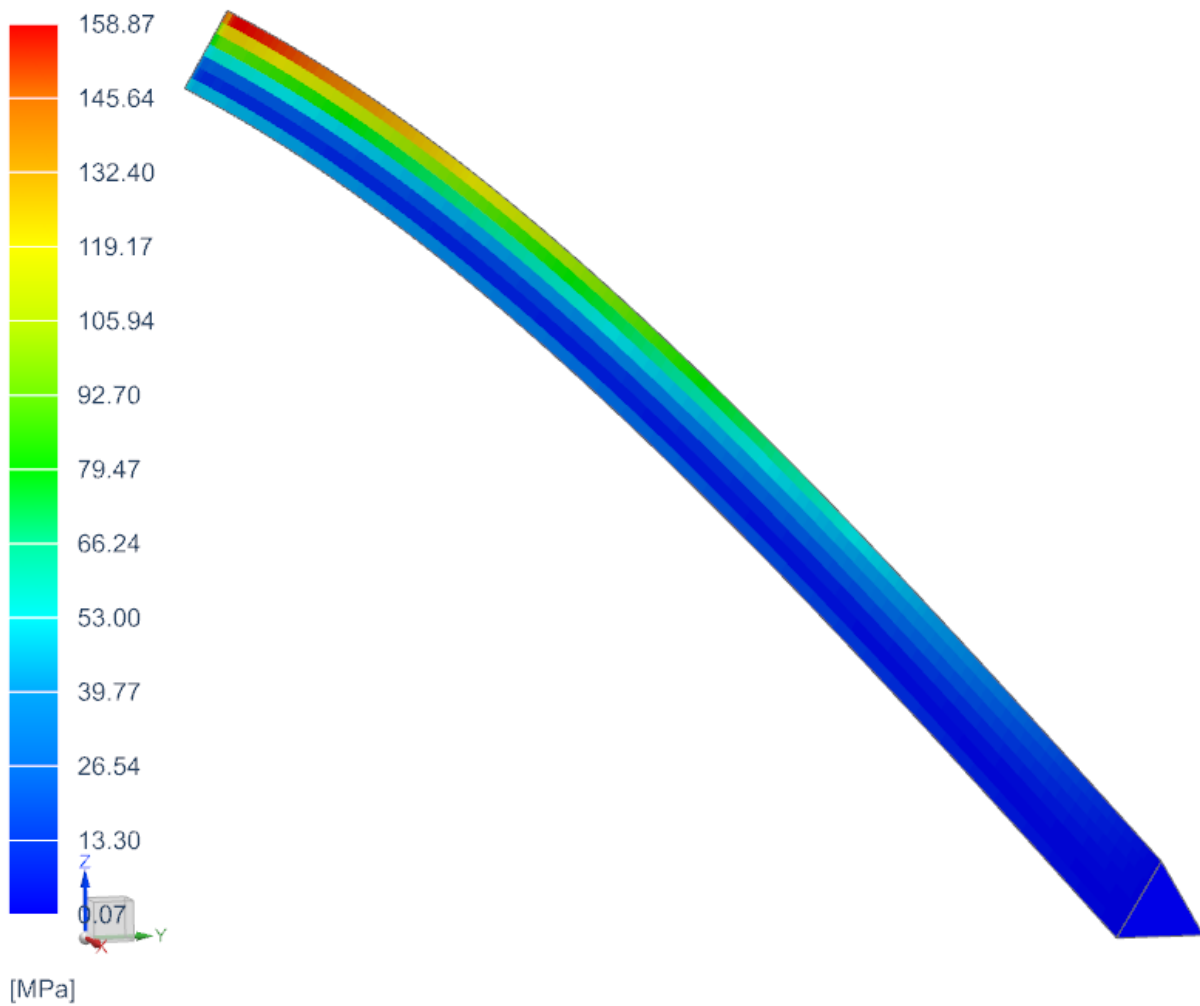
Příloha 2. 4 Ohyb – napětí – Plný šestistěnný průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.07, Max : 158.87, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



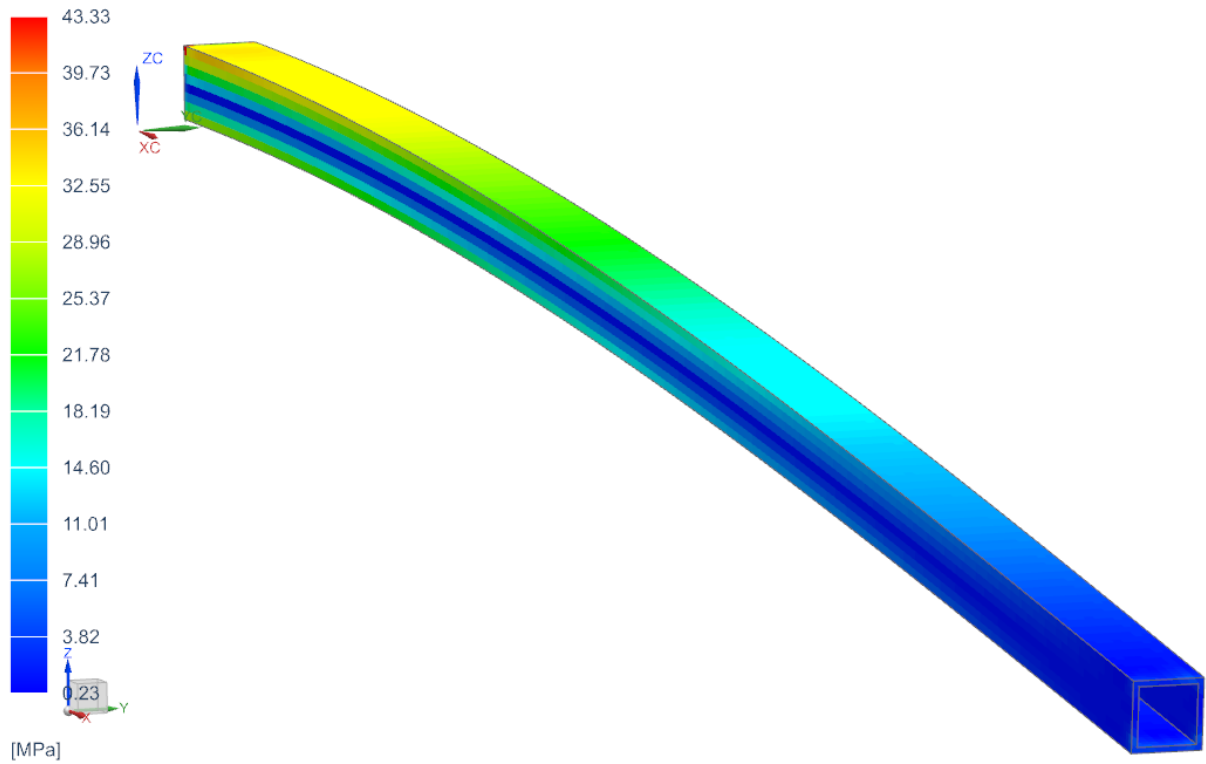
Příloha 2. 5 Ohyb – napětí – Plný eliptický průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.07, Max : 158.87, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



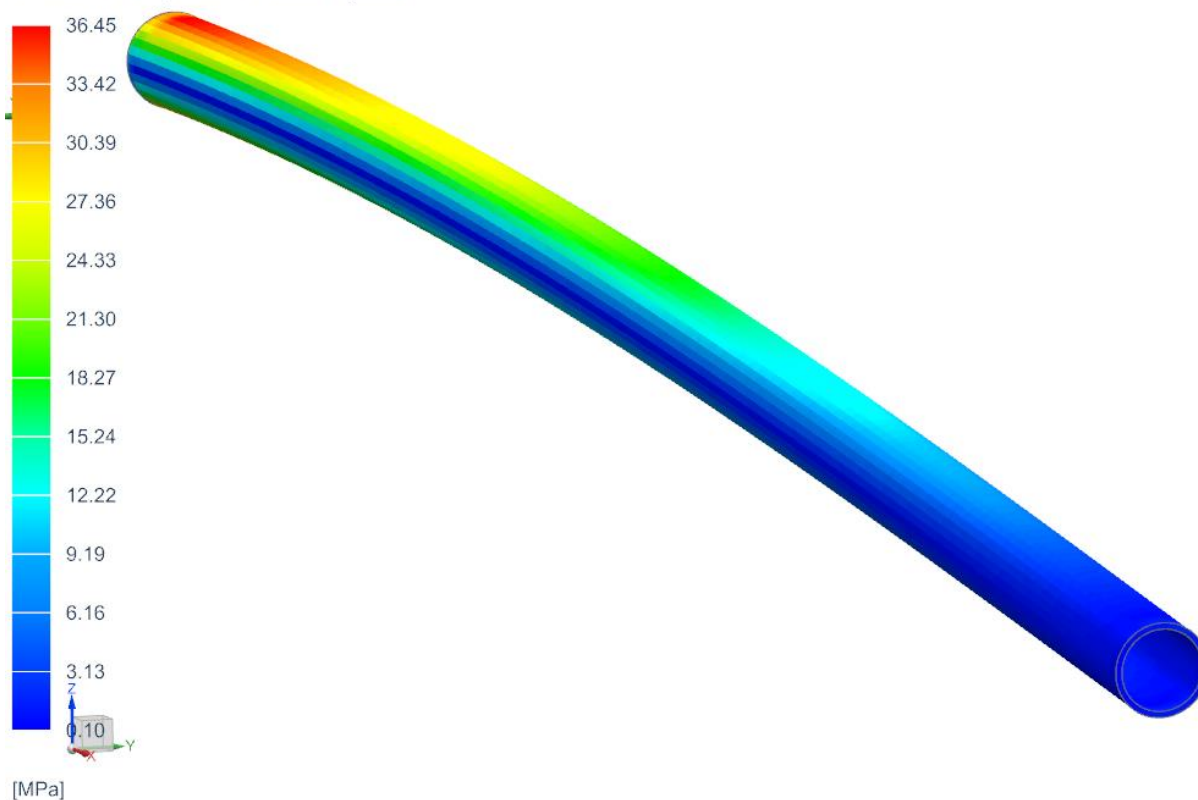
Příloha 2. 6 Ohyb – napětí – Plný trojúhelníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.10, Max : 66.00, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



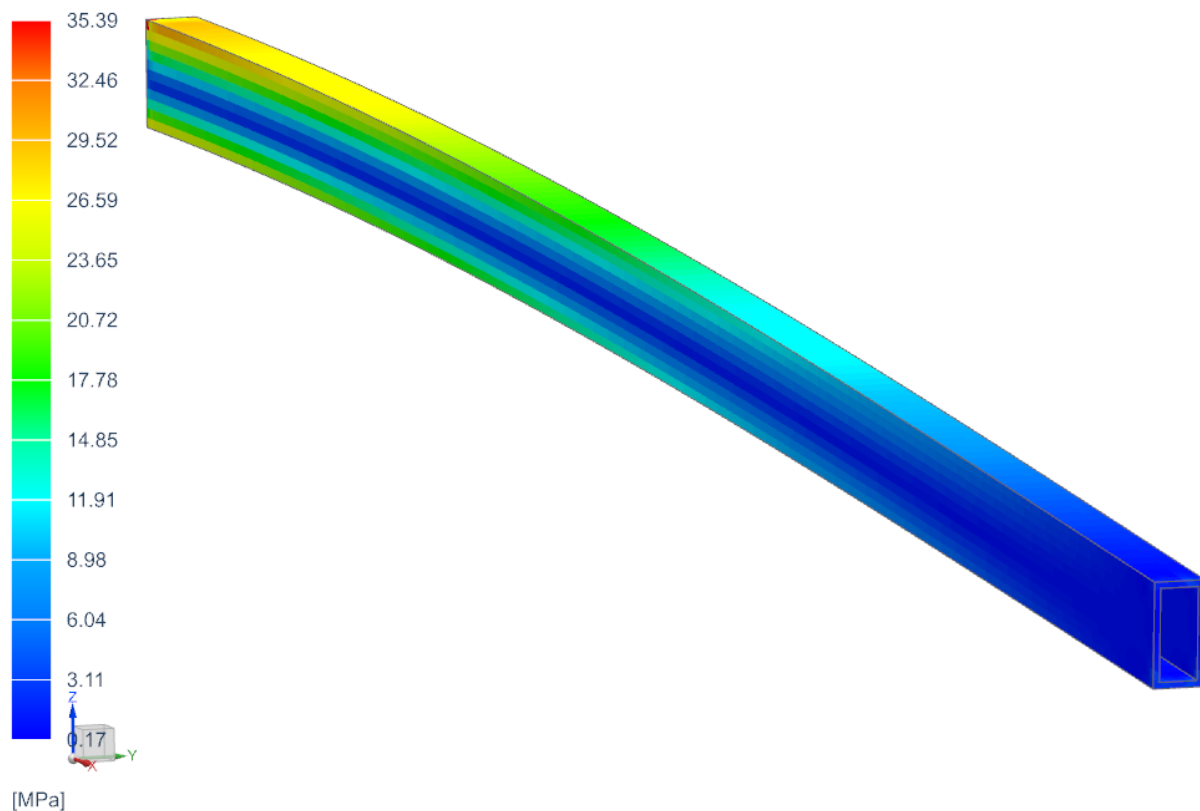
Příloha 2. 7 Ohyb – napětí – Dutý čtvercový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.10, Max : 66.00, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



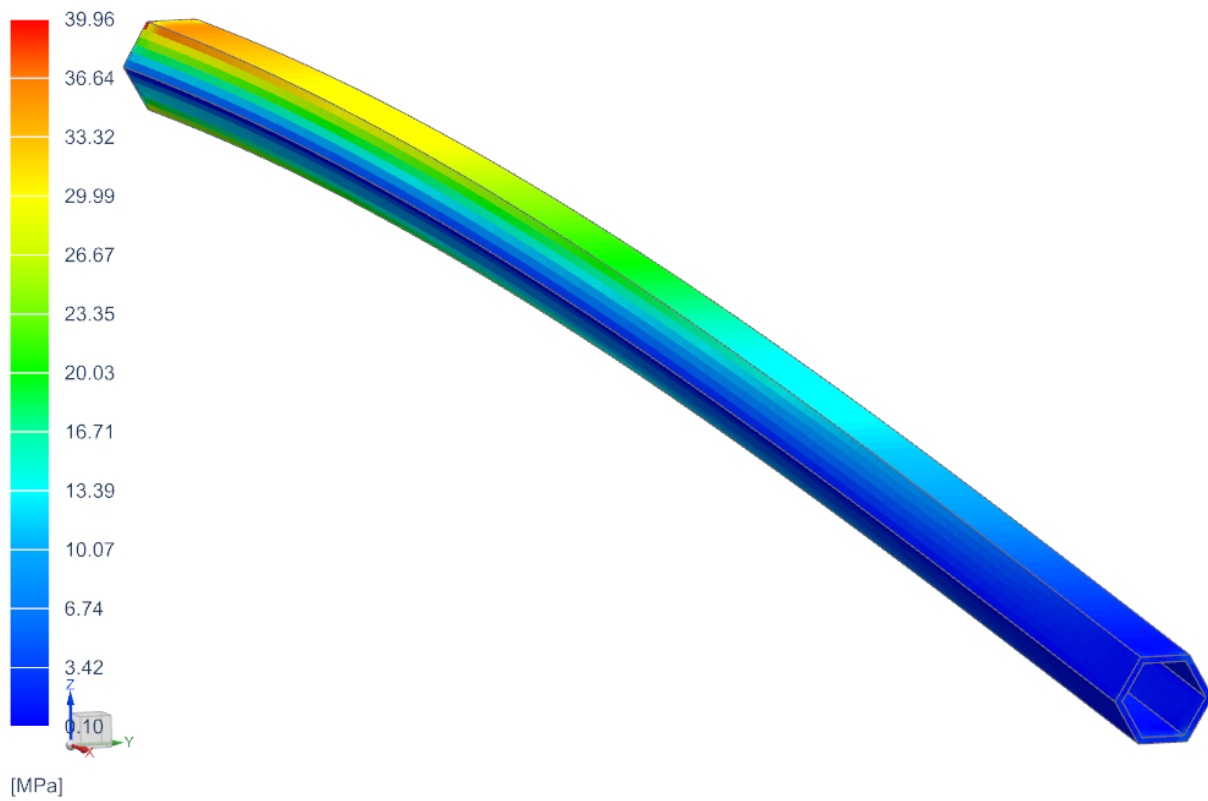
Příloha 2. 8 Ohyb – napětí – Dutý kruhový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.10, Max : 66.00, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



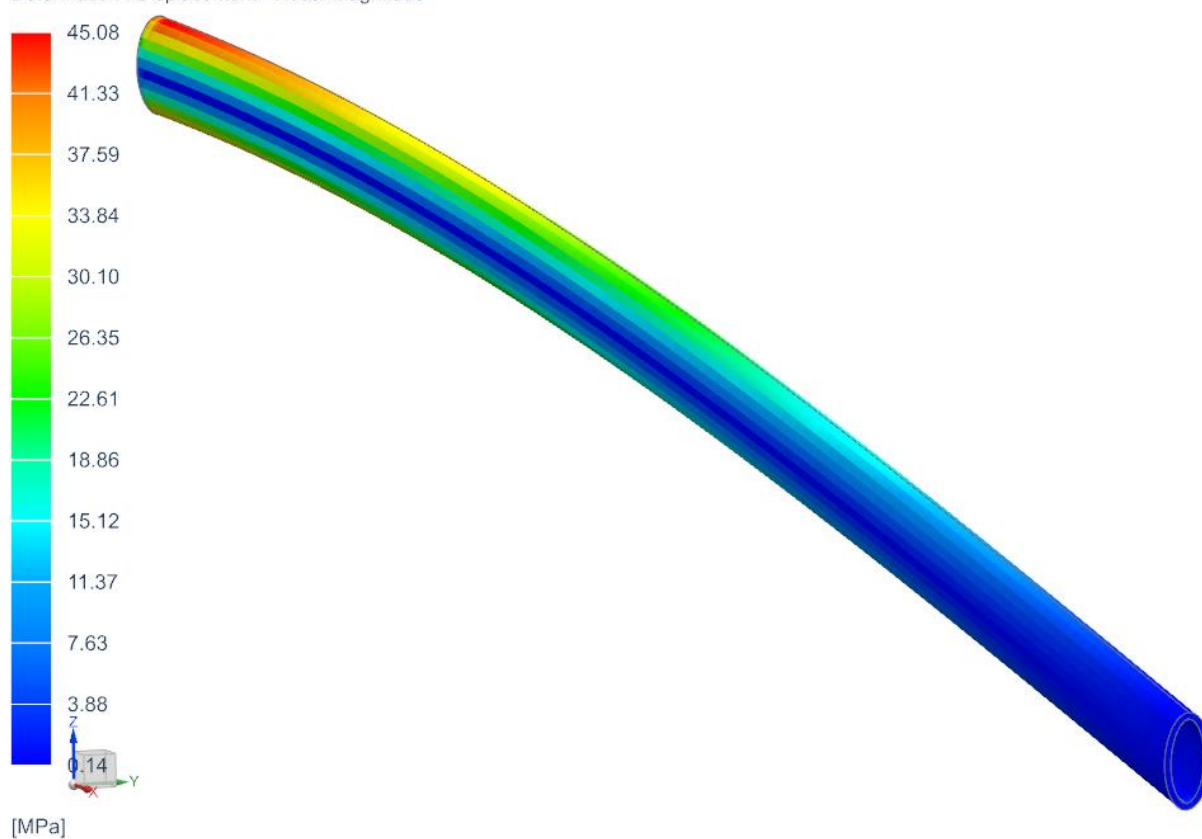
Příloha 2. 9 Ohyb – napětí – Dutý obdélníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.10, Max : 66.00, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



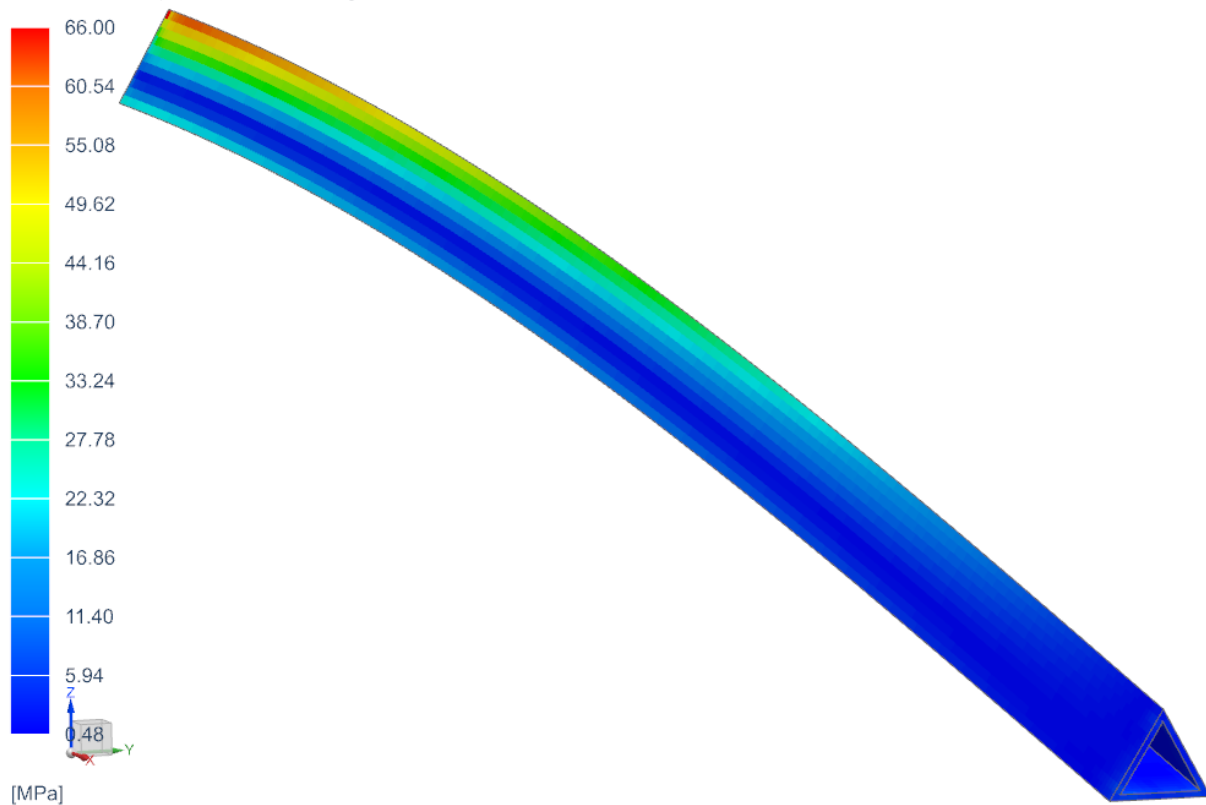
Příloha 2. 10 Ohyb – napětí – Dutý šestistěnný průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.10, Max : 66.00, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

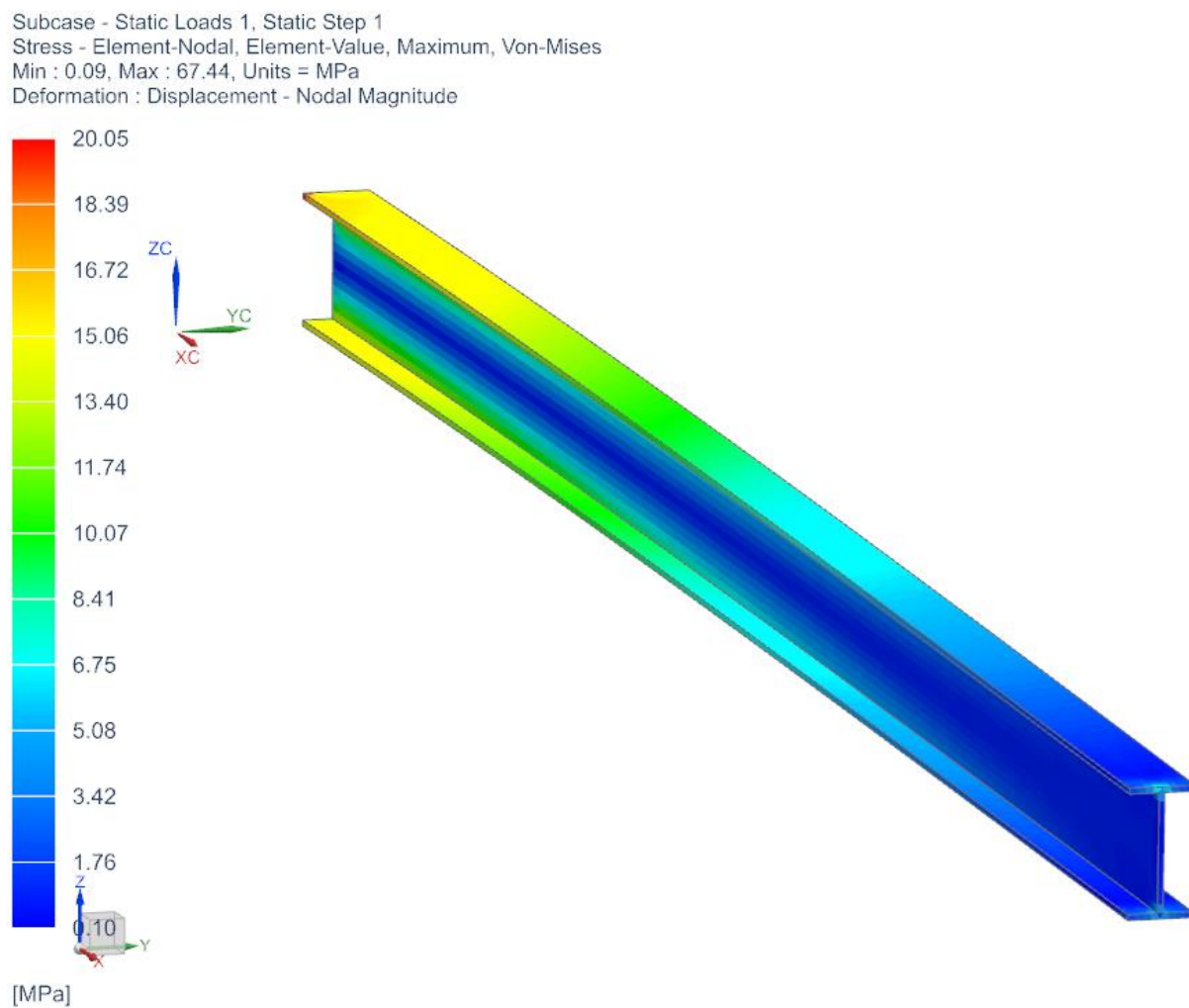


Příloha 2. 11 Ohyb – napětí – Dutý eliptický průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.10, Max : 66.00, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

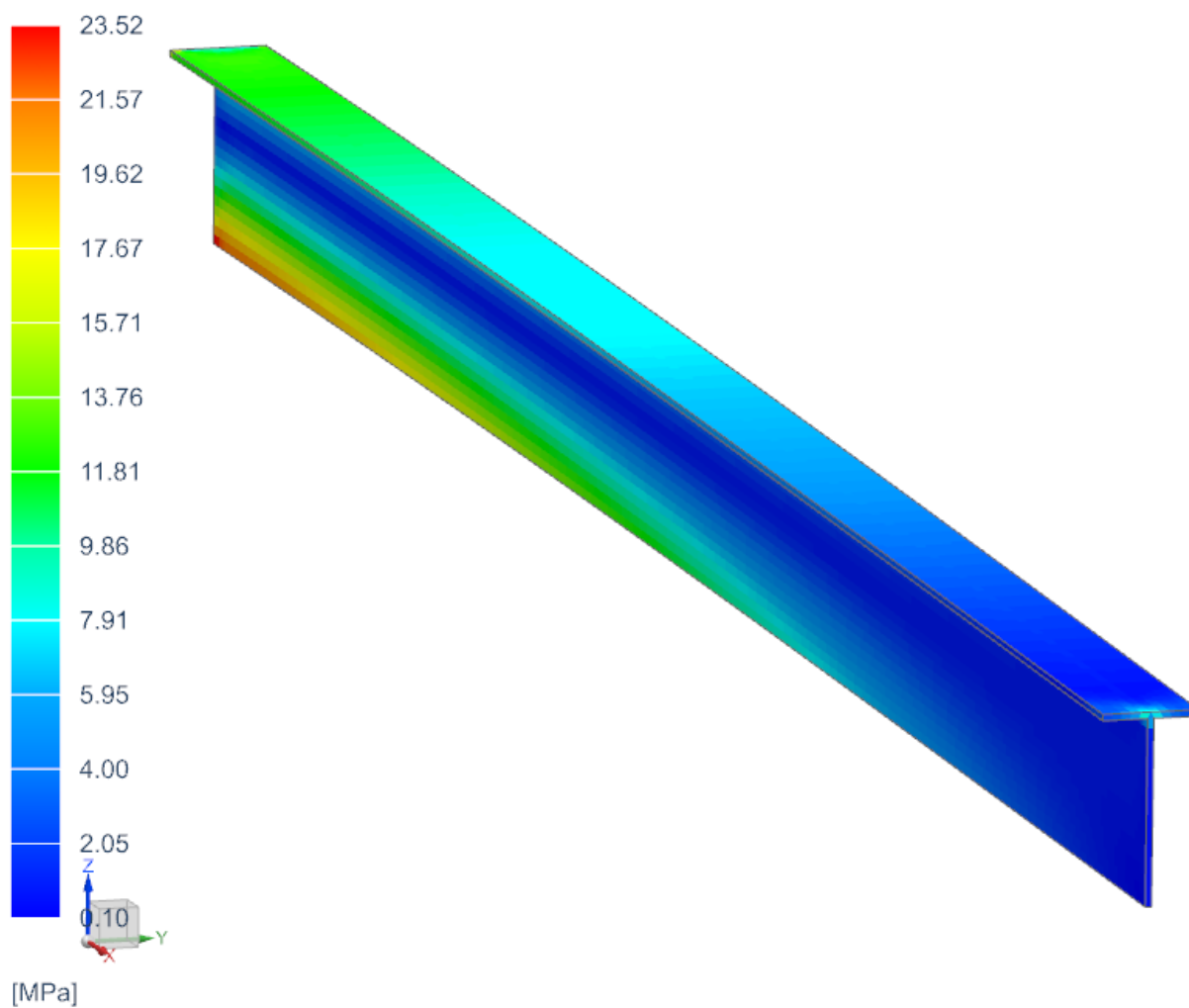


Příloha 2. 12 Ohyb – napětí – Dutý trojúhelníkový průřez



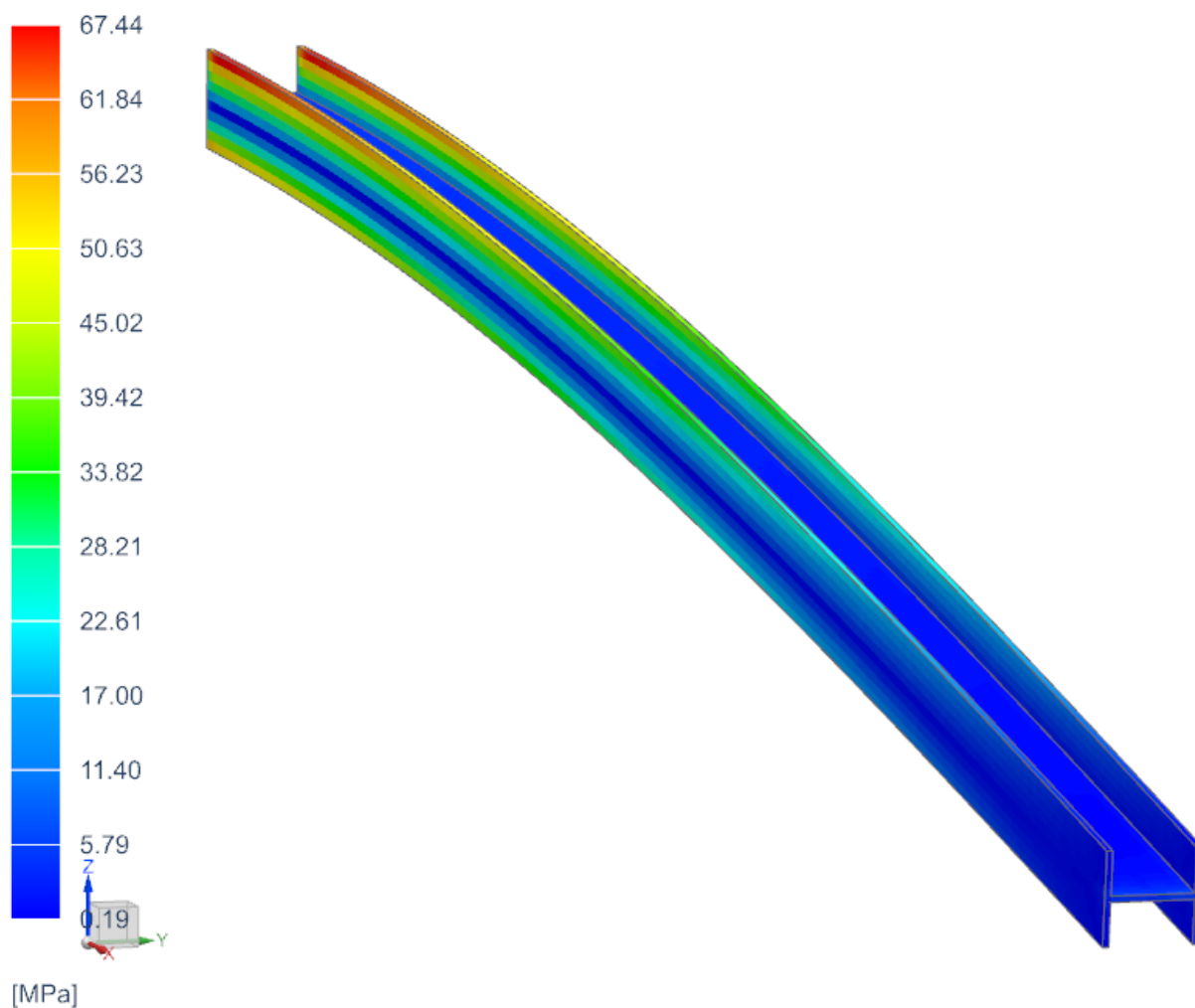
Příloha 2. 13 Ohyb – napětí – Otvřený I průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.09, Max : 67.44, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



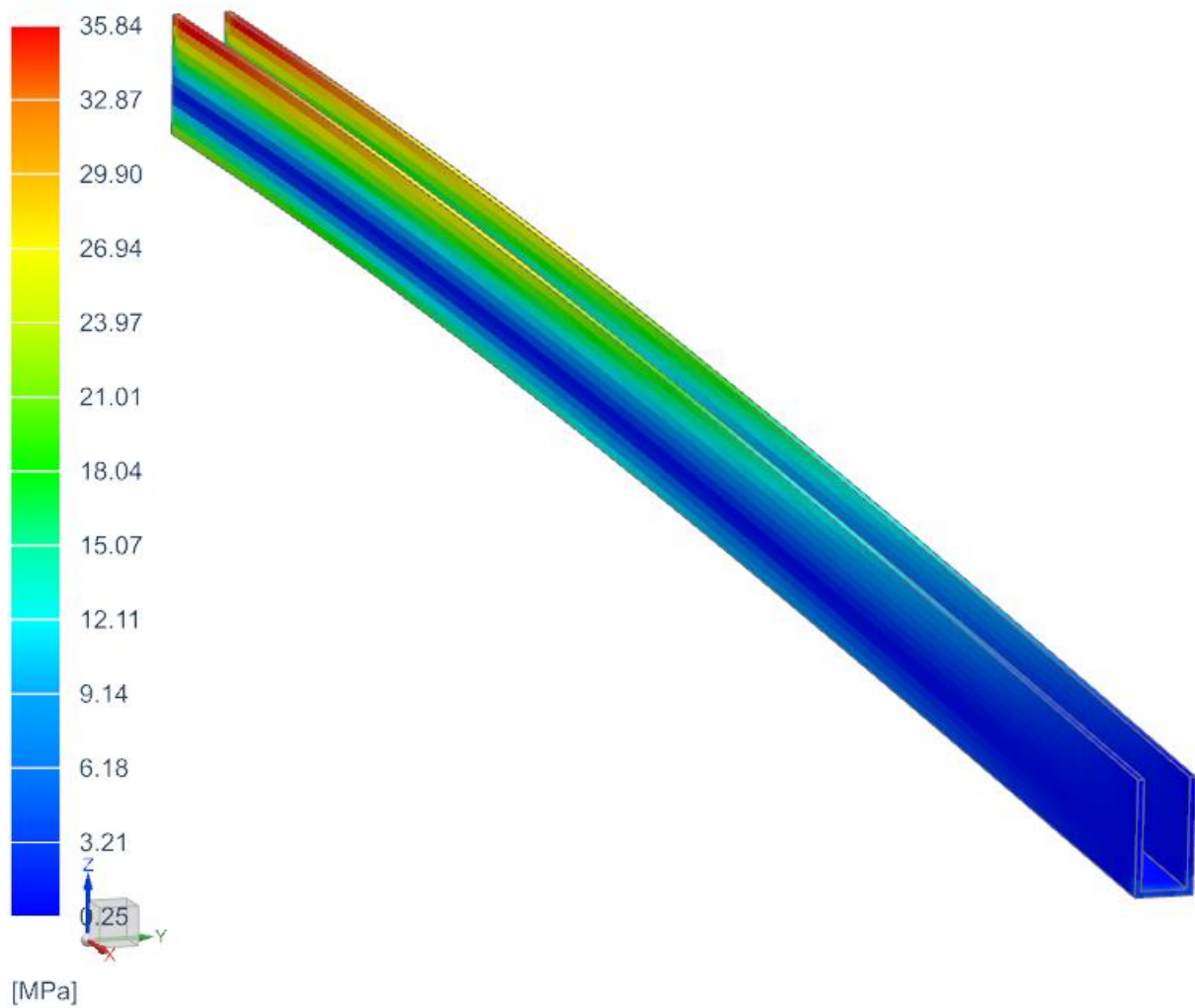
Příloha 2. 14 Ohyb – napětí – Otevřený T průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.09, Max : 67.44, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



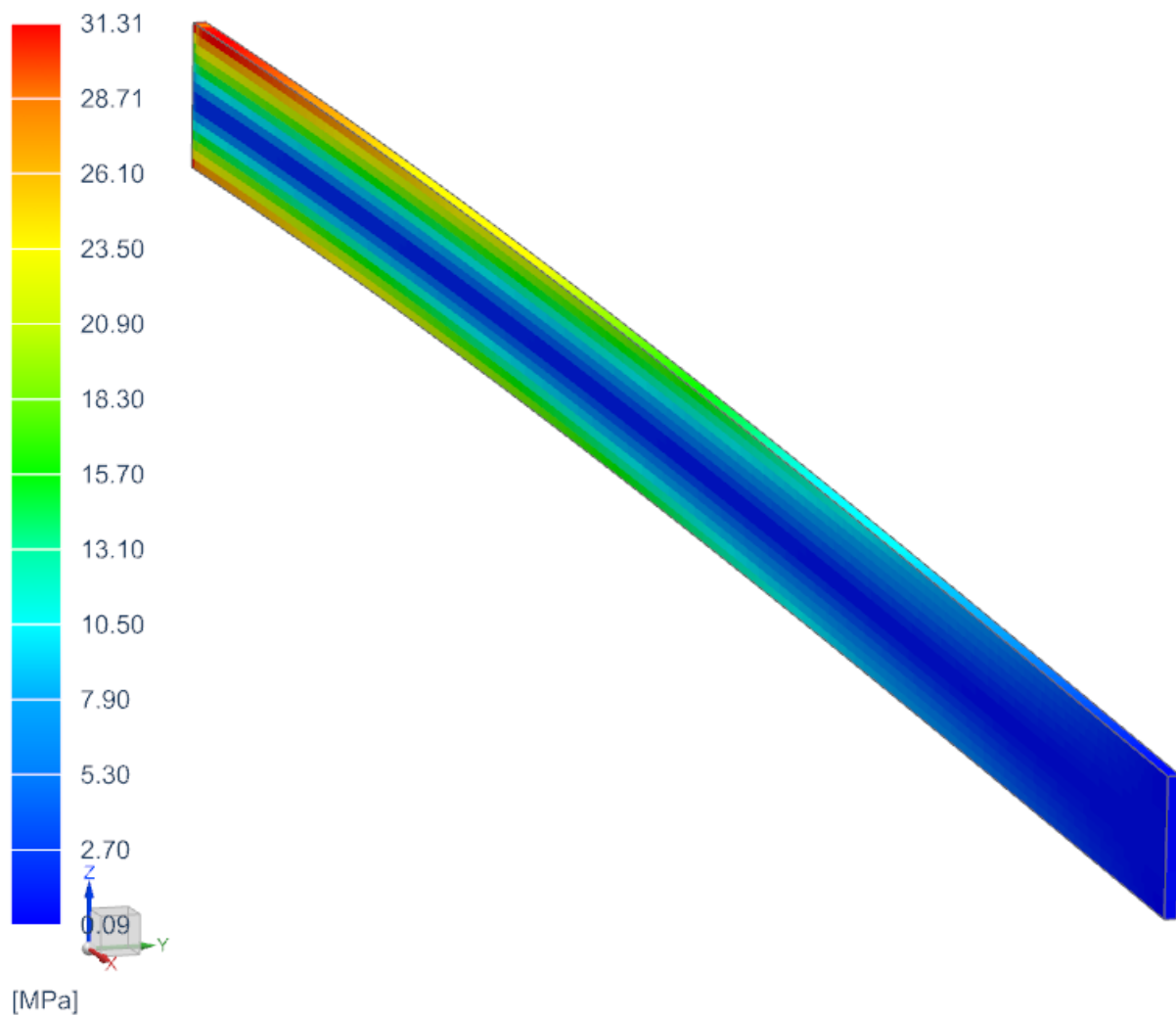
Příloha 2. 15 Ohyb – napětí – Otevřený H průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.09, Max : 67.44, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



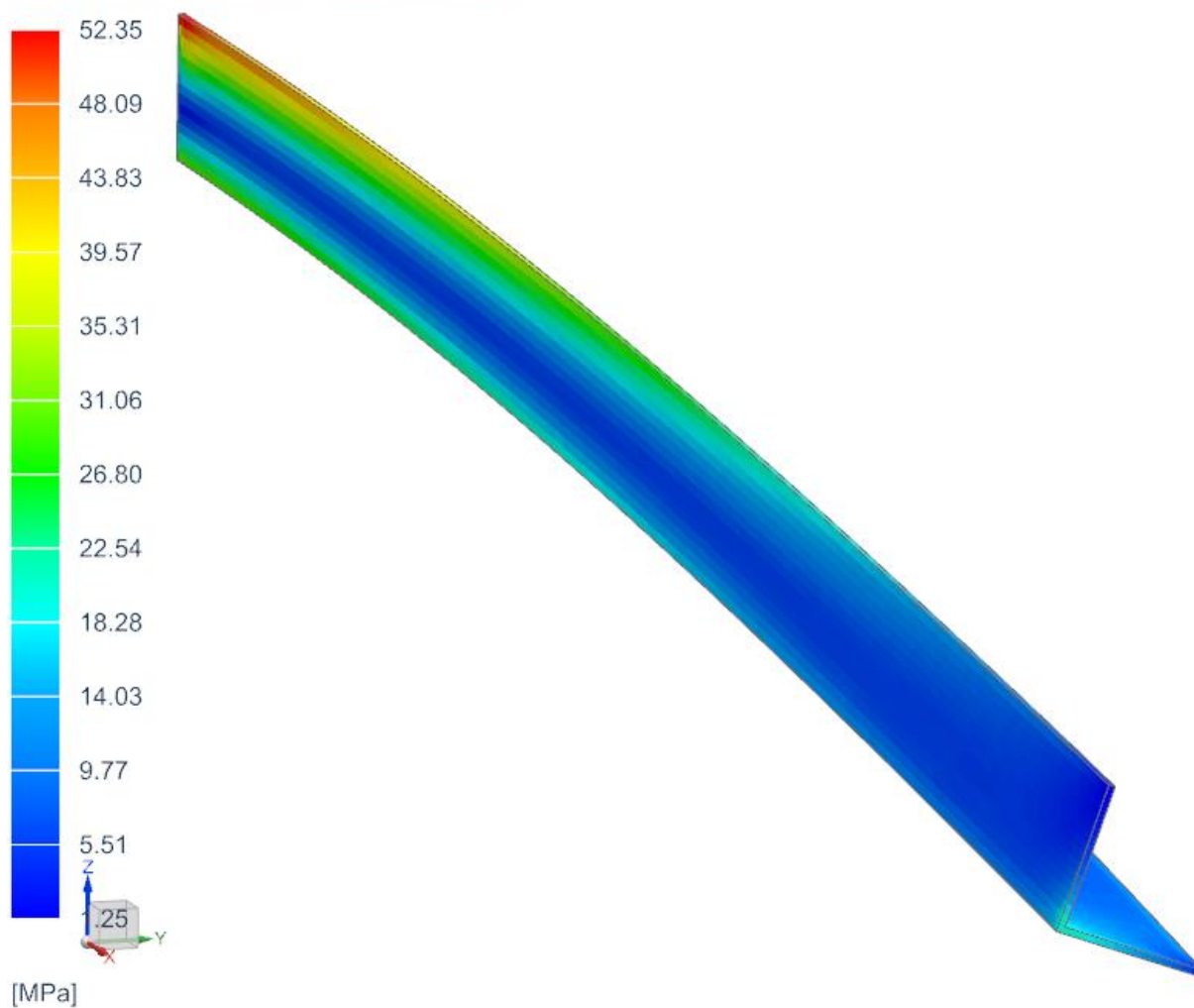
Příloha 2. 16 Ohyb – napětí – Otevřený U průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.09, Max : 67.44, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



Příloha 2. 17 Ohyb – napětí – Tenká deska

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Element-Value, Maximum, Von-Mises
Min : 0.09, Max : 67.44, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

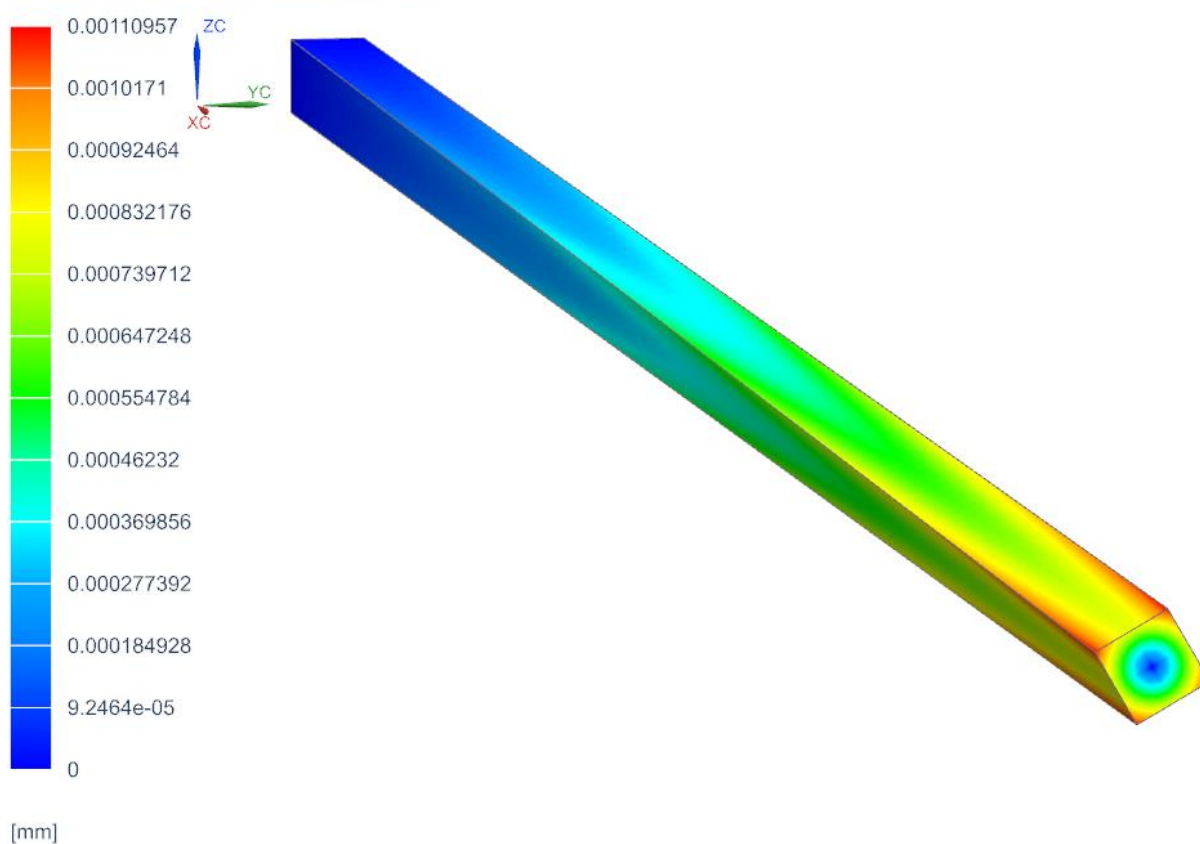


Příloha 2. 18 Ohyb – napětí – Otevřený L průřez

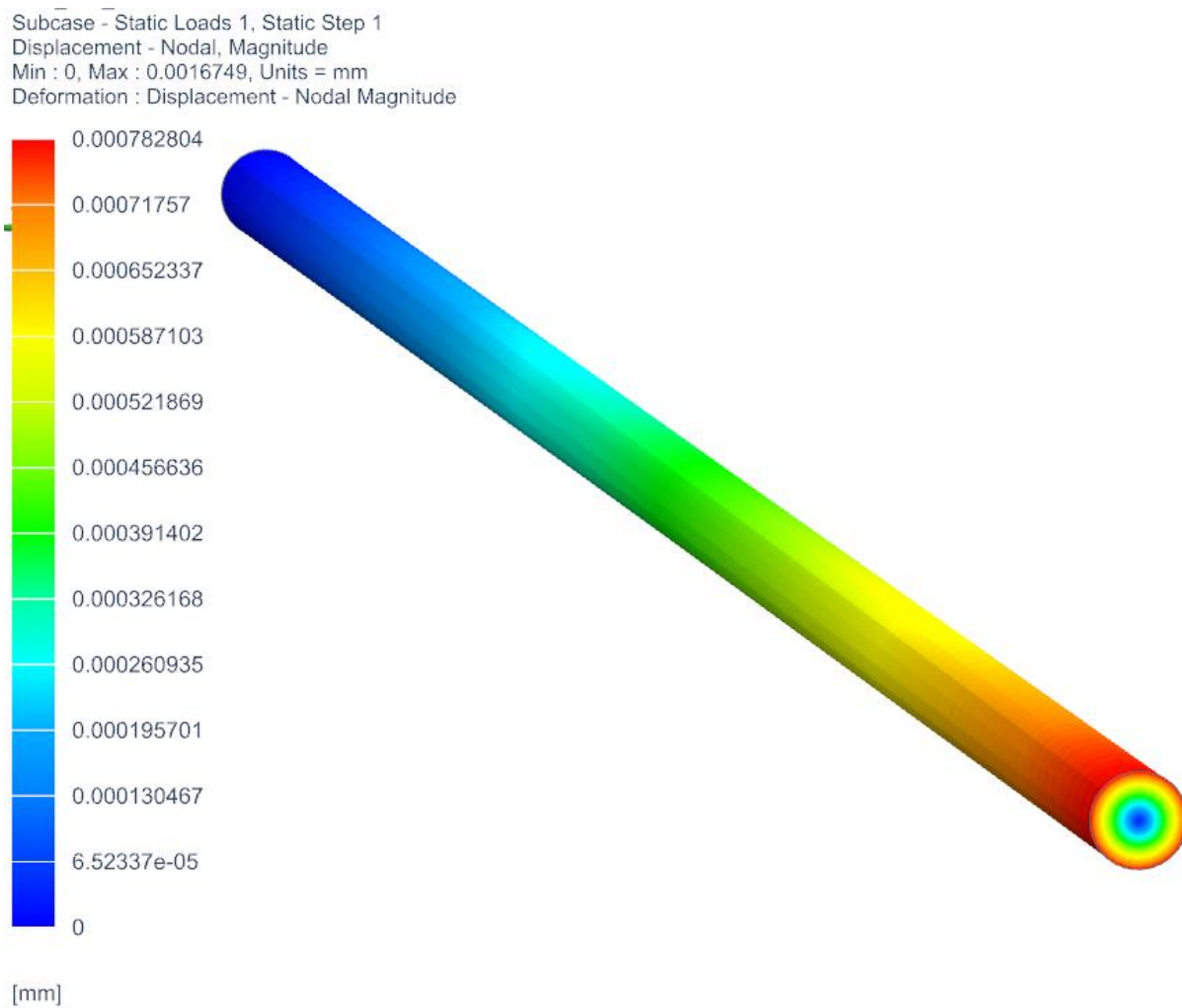
PŘÍLOHA č. 3

Výsledky simulace nosníku pomocí MKP Krut – posunutí

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0, Max : 0.0016749, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

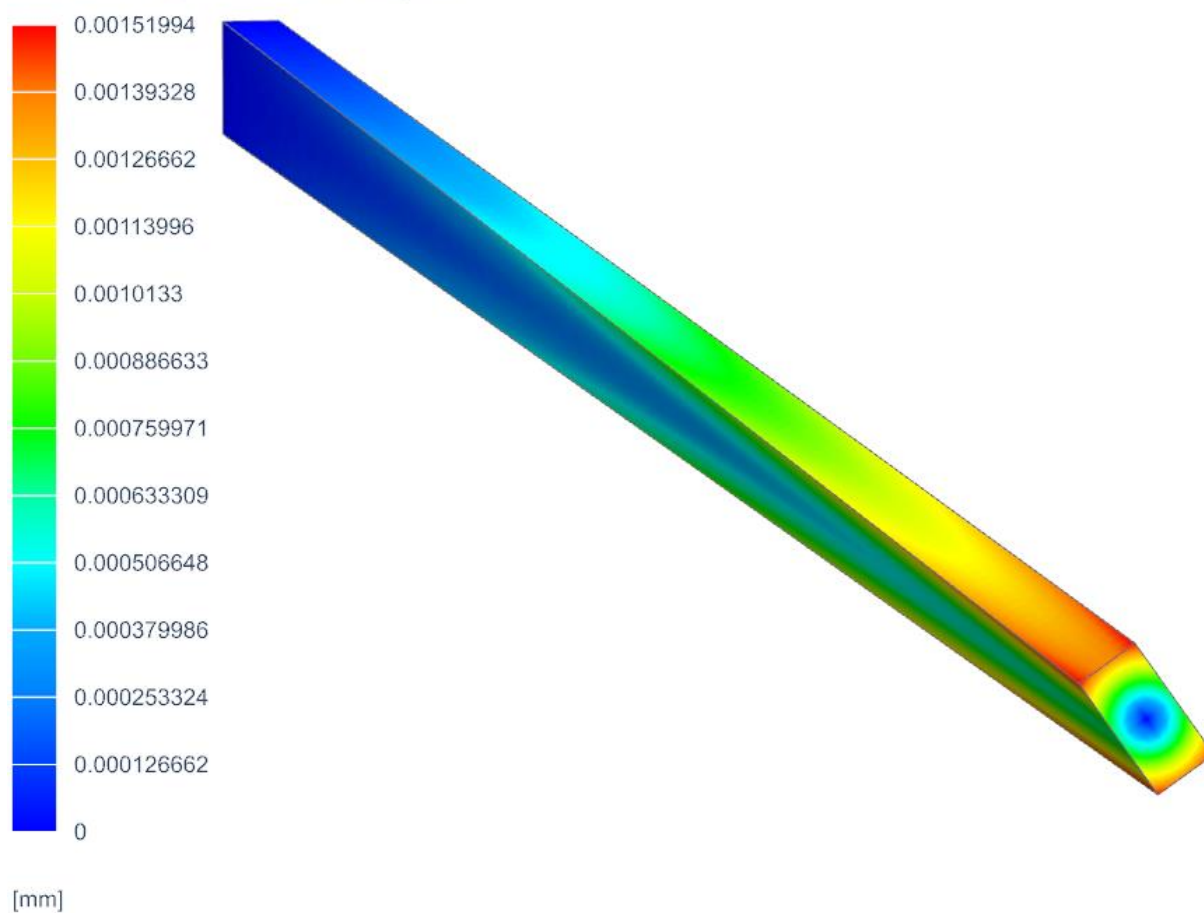


Příloha 3. 1 Krut – posunutí – Plný čtvercový průřez

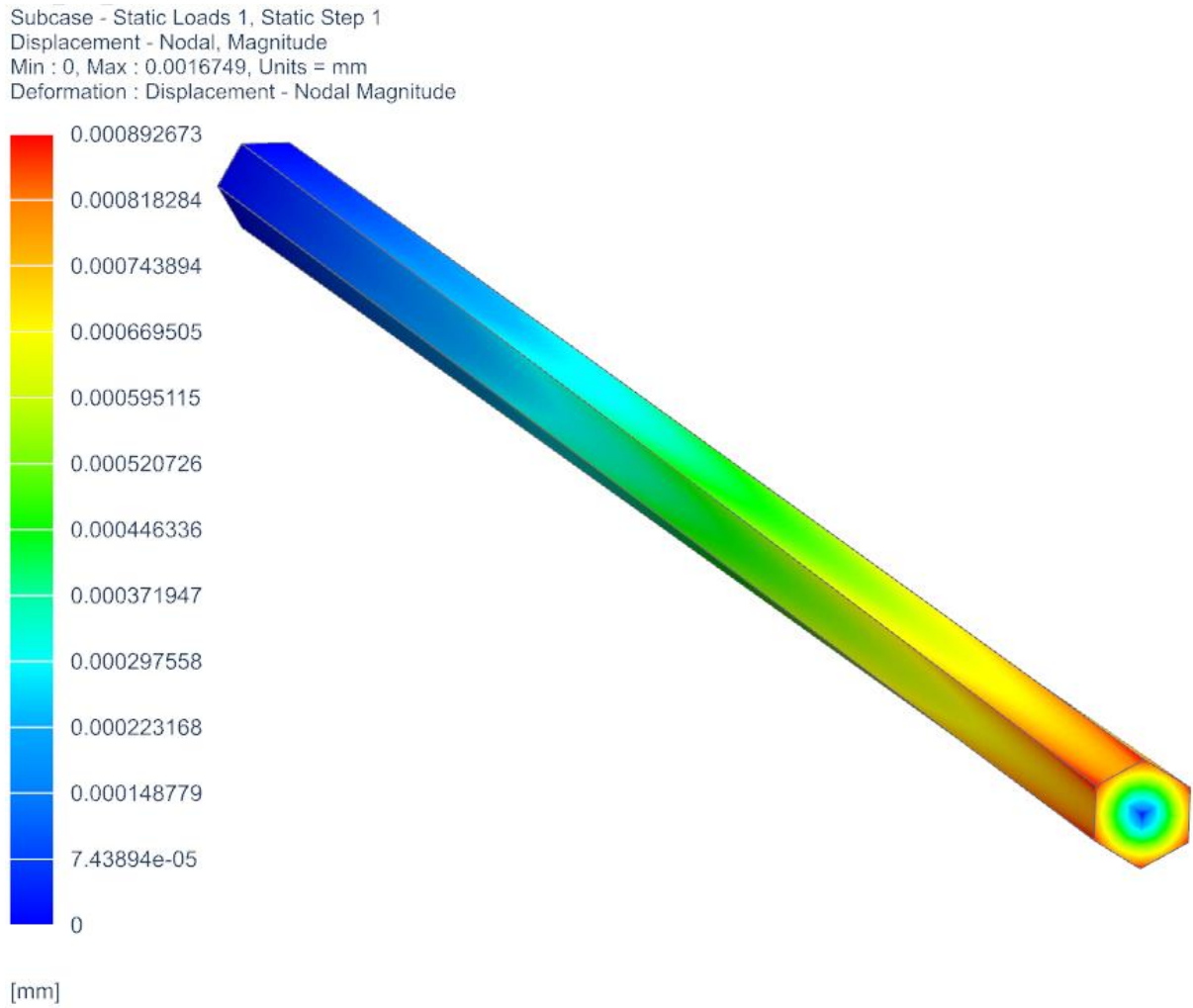


Příloha 3. 2 Krut – posunutí – Plný kruhový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0, Max : 0.0016749, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

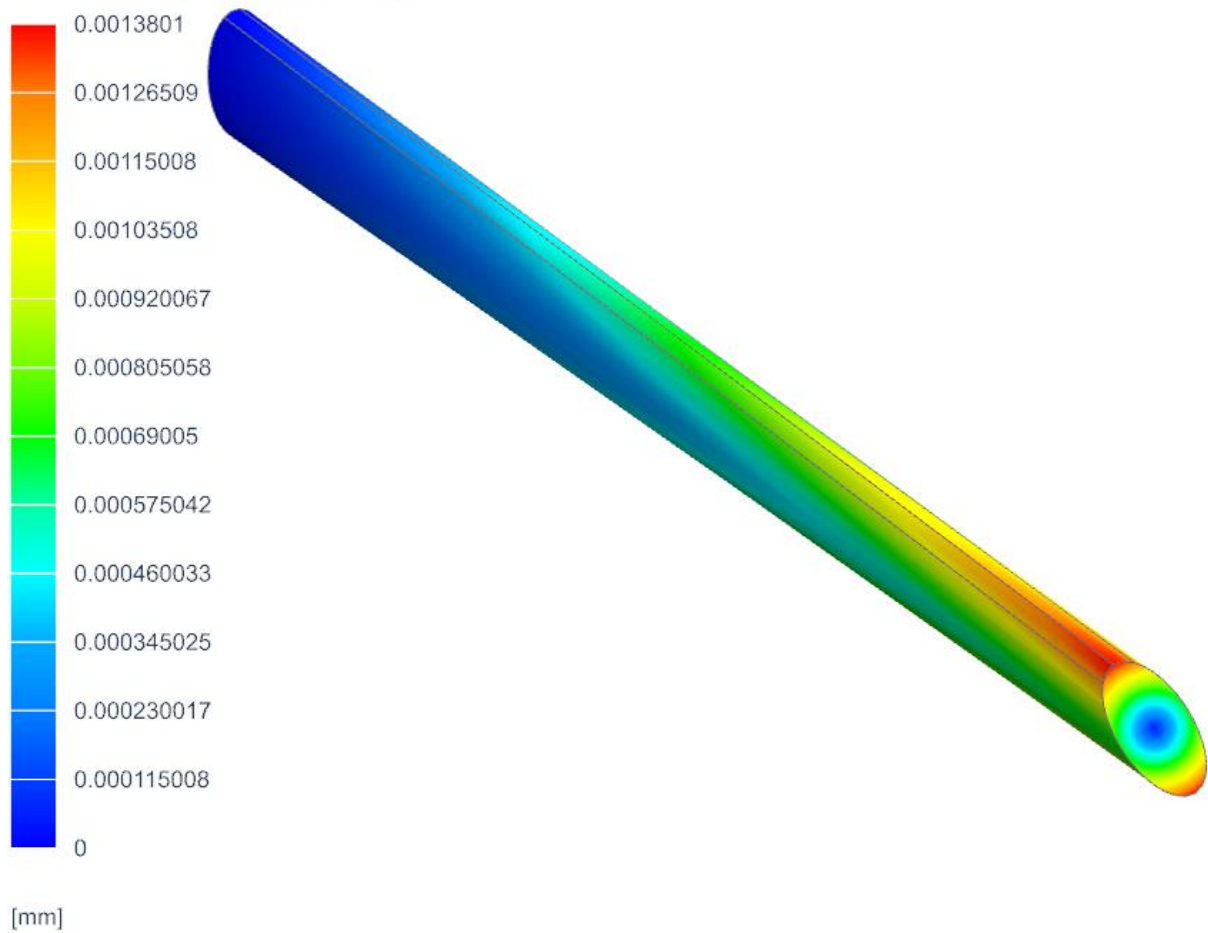


Příloha 3. 3 Krut – posunutí – Plný obdélníkový průřez



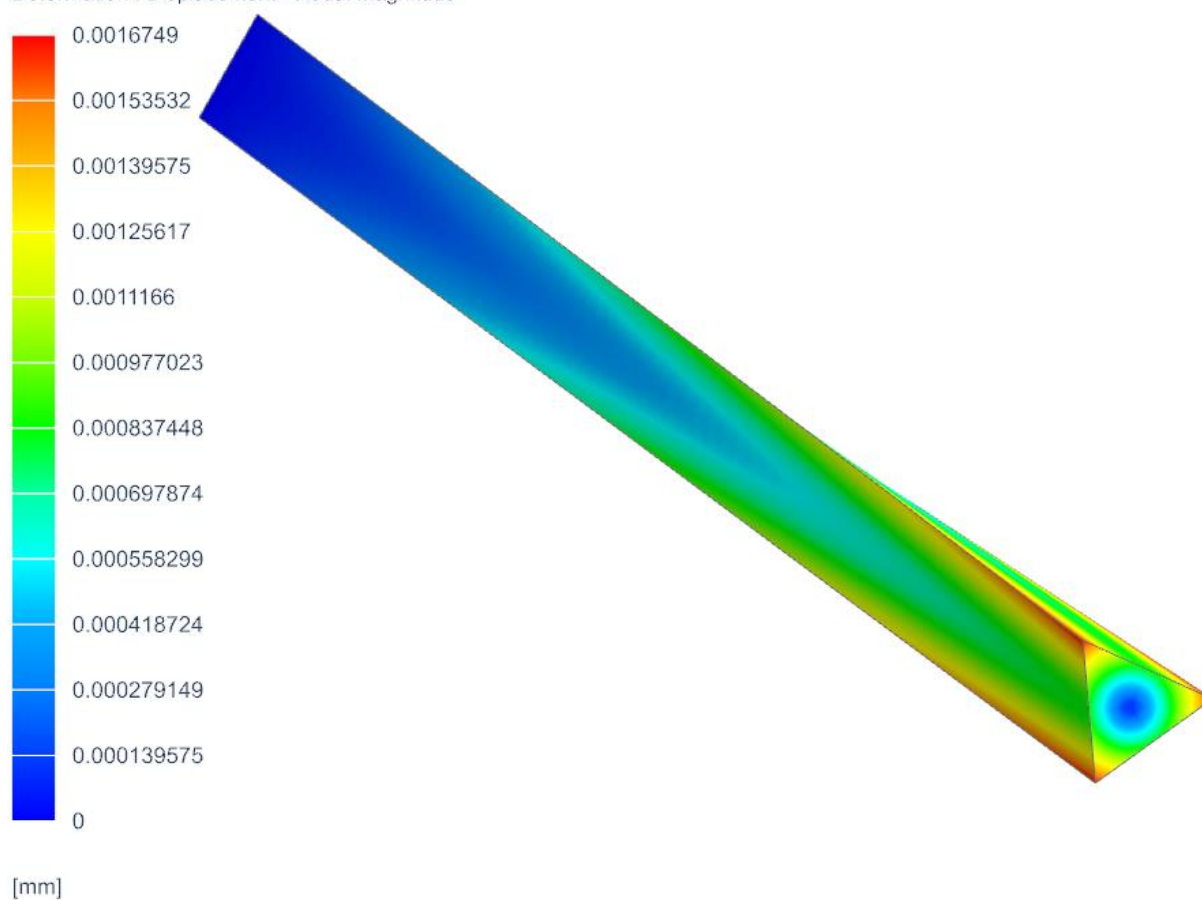
Příloha 3. 4 Krut – posunutí – Plný šestistěnný průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0, Max : 0.0016749, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



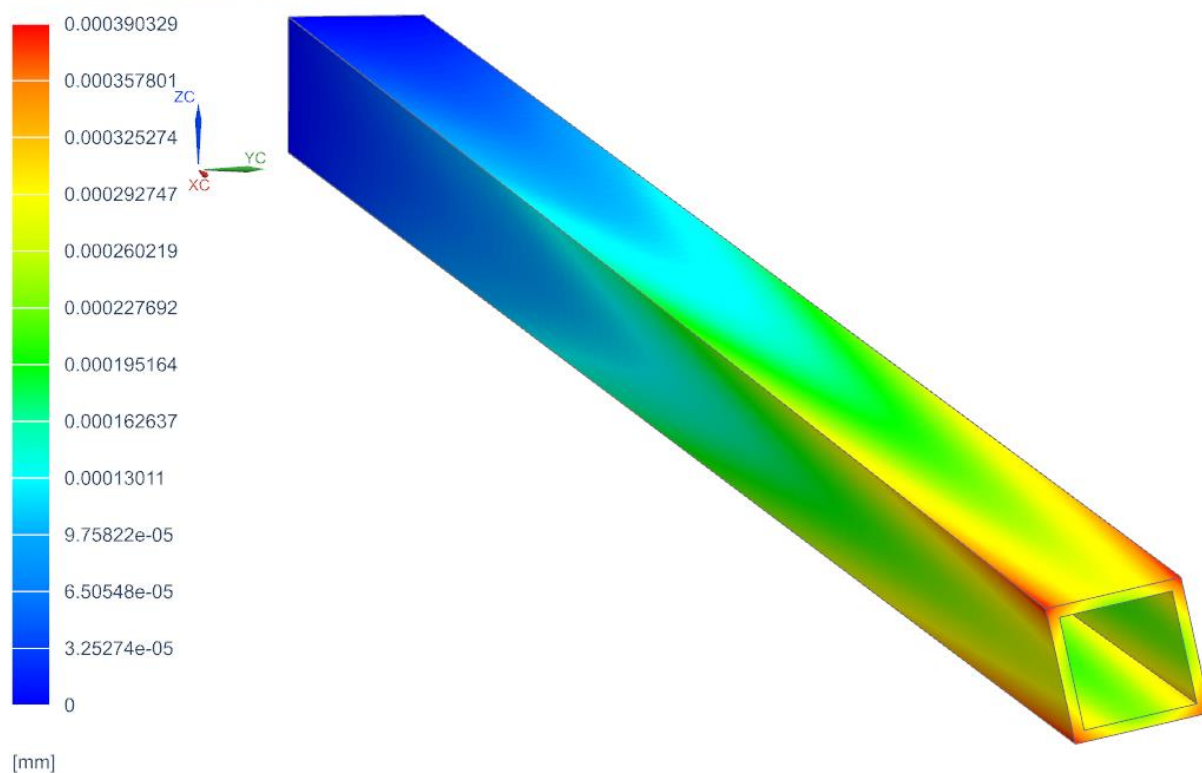
Příloha 3. 5 Krut – posunutí – Plný eliptický průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0, Max : 0.0016749, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

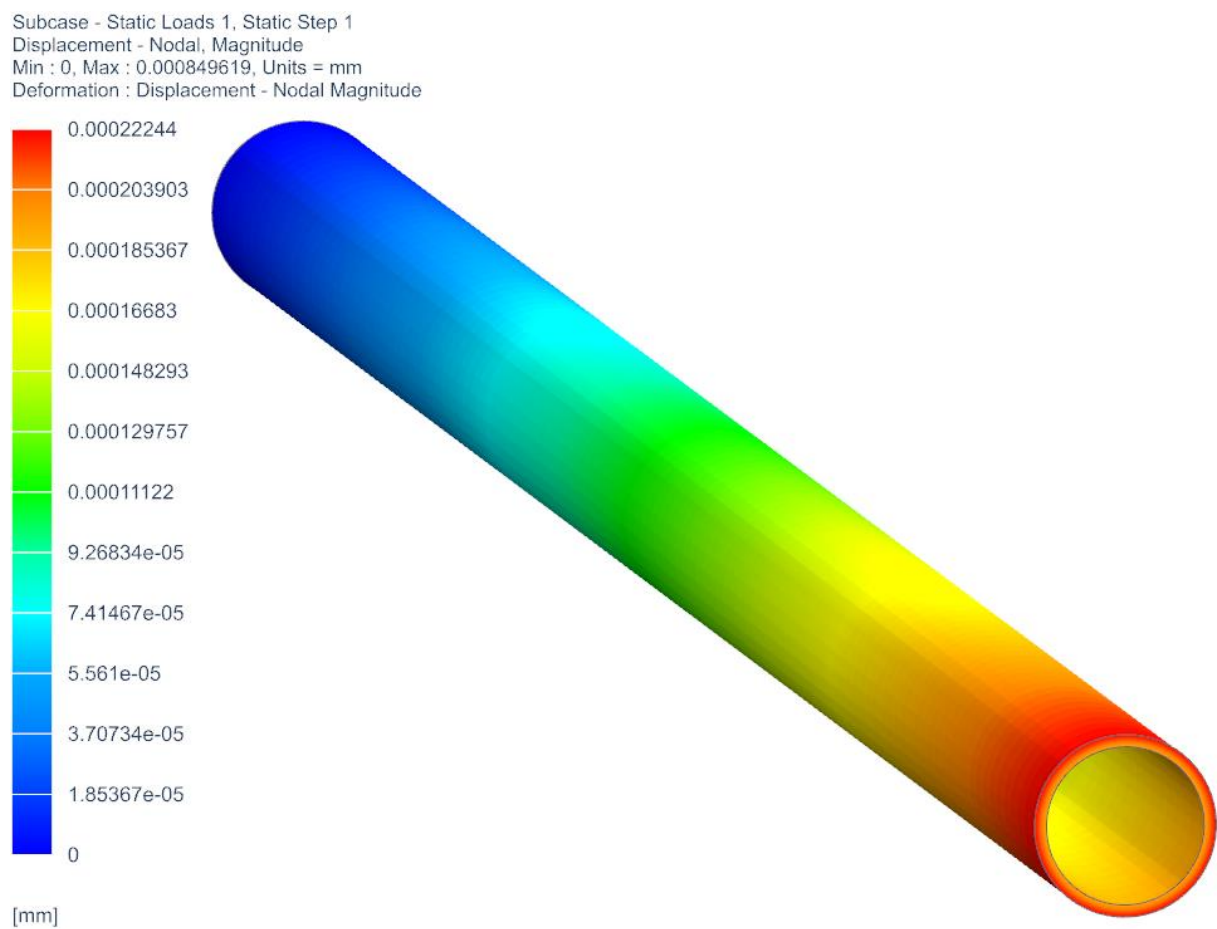


Příloha 3. 6 Krut – posunutí – Plný trojúhelníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0, Max : 0.000849619, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

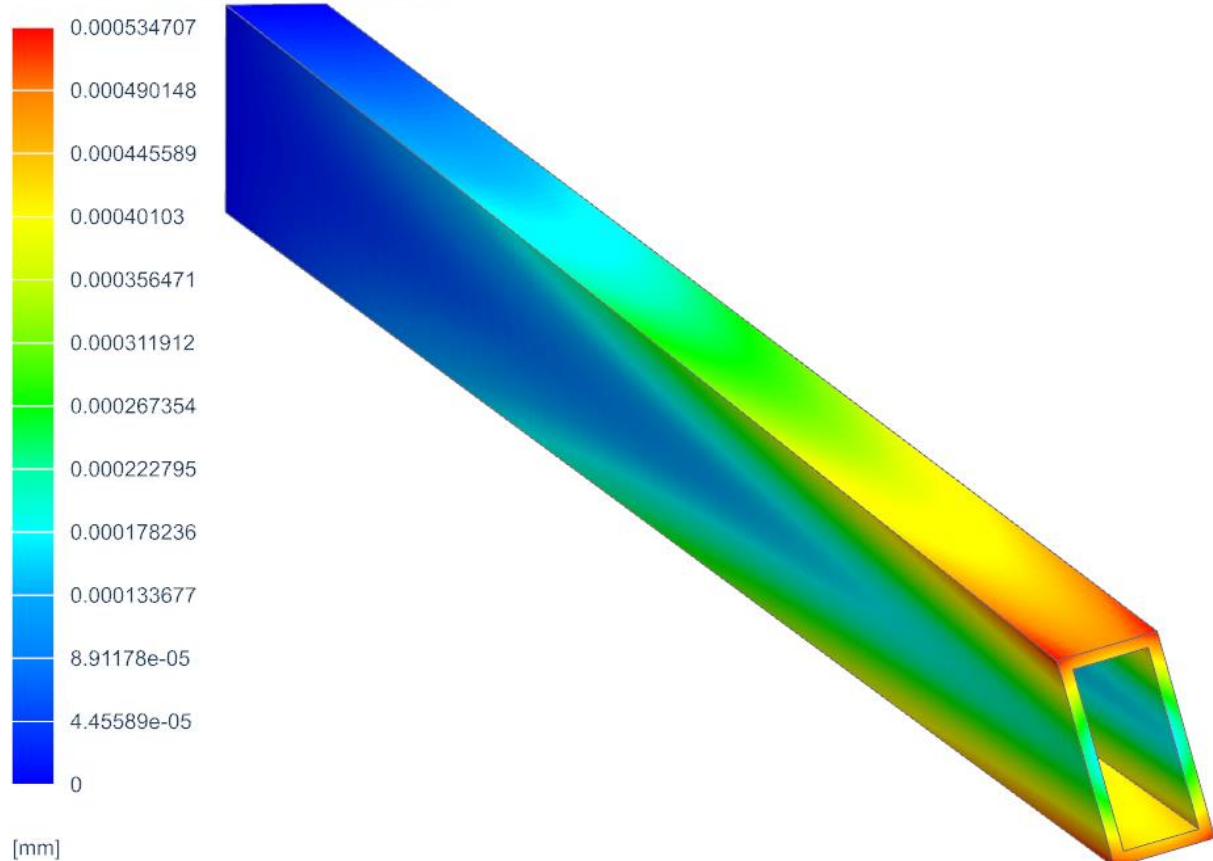


Příloha 3. 7 Krut – posunutí – Dutý čtvercový průřez



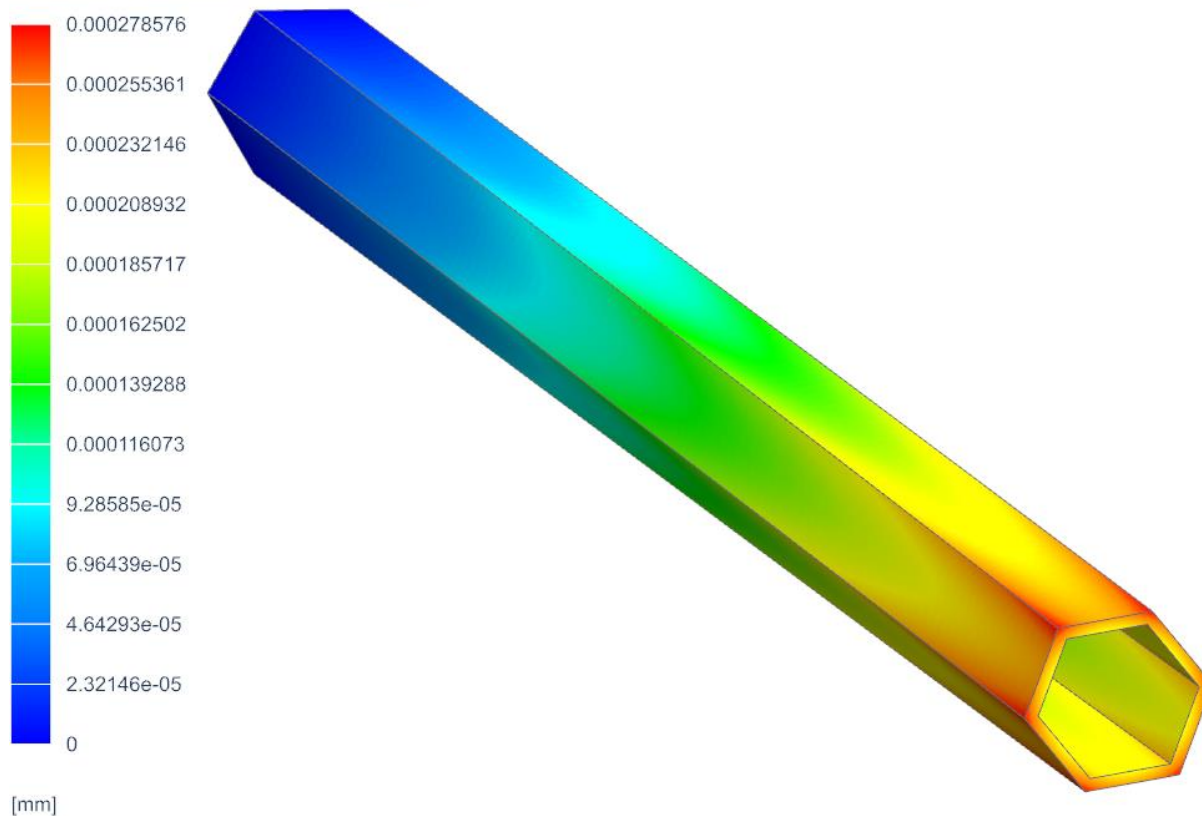
Příloha 3. 8 Krut – posunutí – Dutý kruhový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0, Max : 0.000849619, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



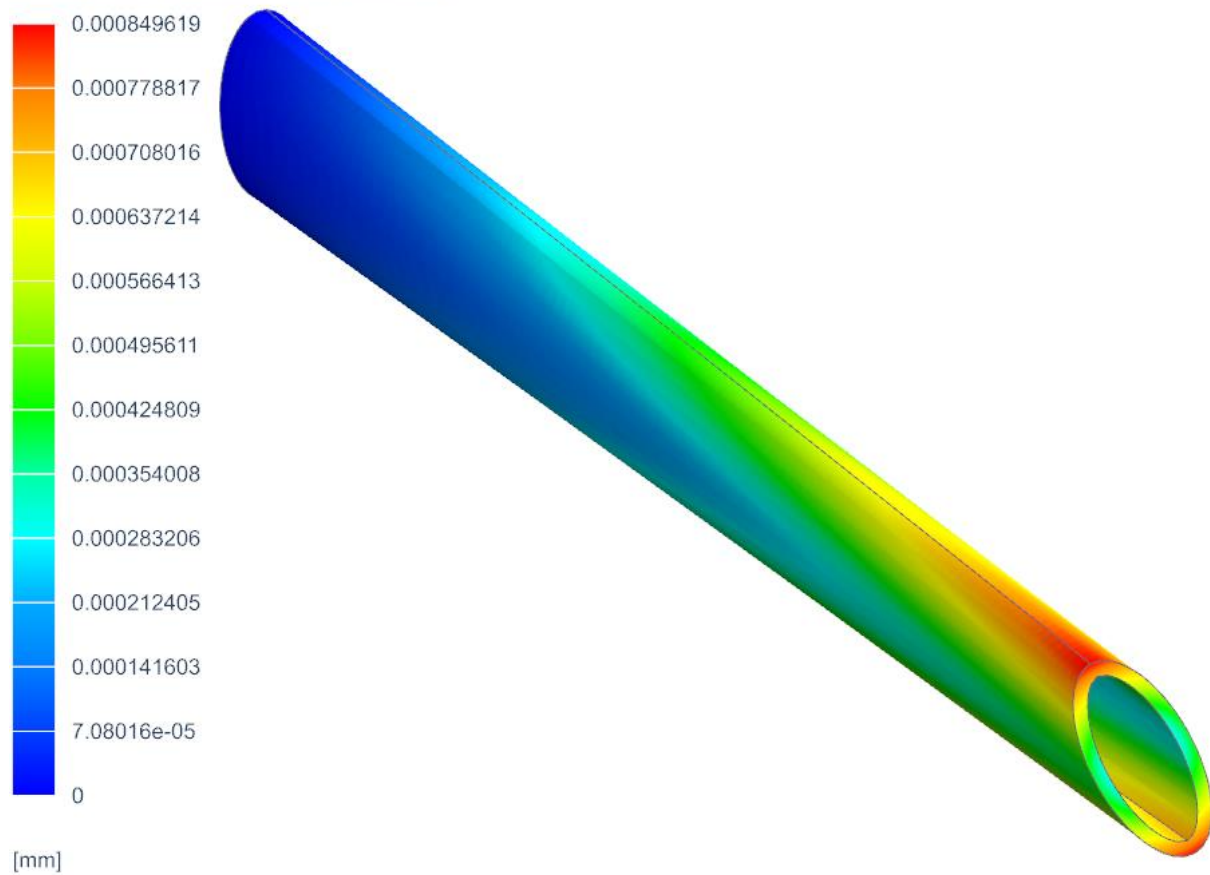
Příloha 3. 9 Krut – posunutí – Dutý obdélníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0, Max : 0.000849619, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

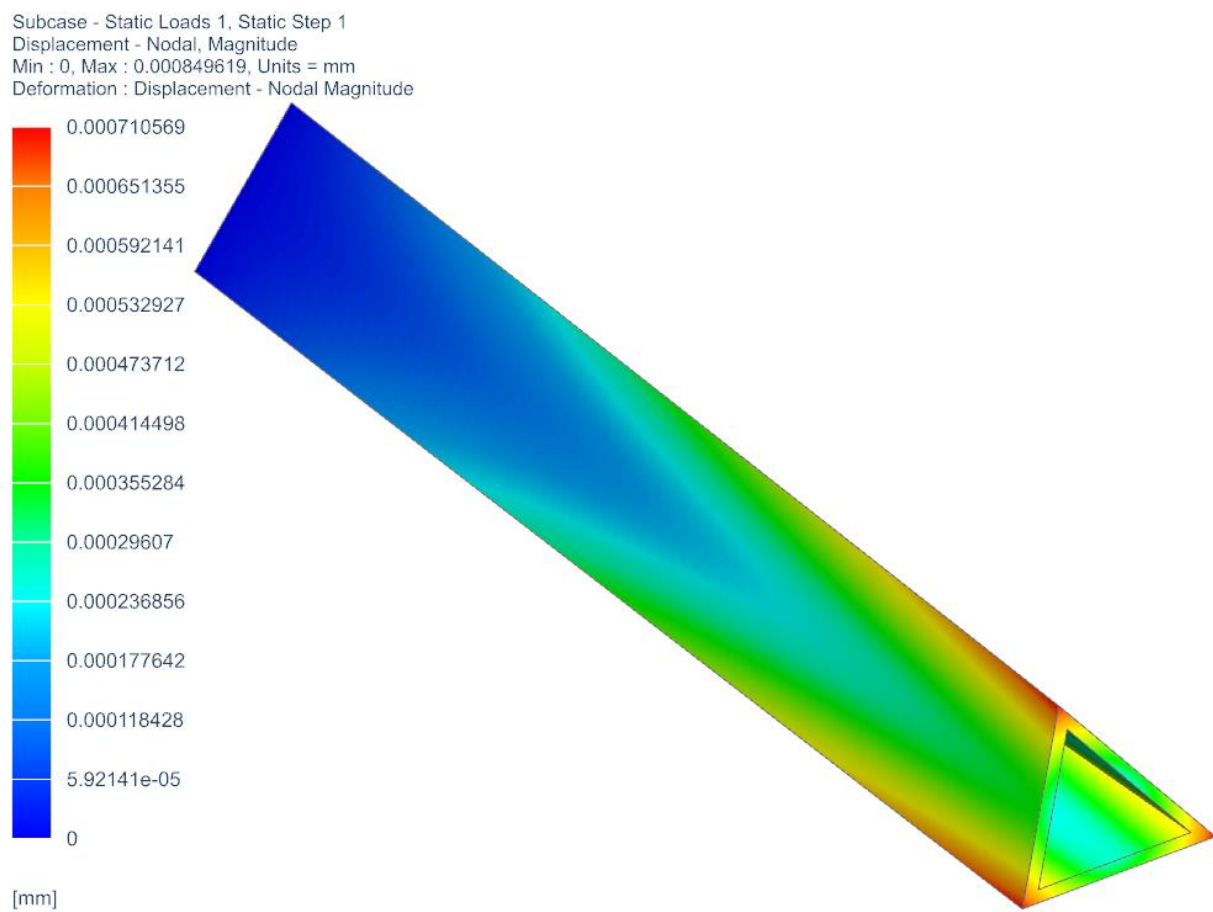


Příloha 3. 10 Krut – posunutí – Dutý šestistěnný průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0, Max : 0.000849619, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

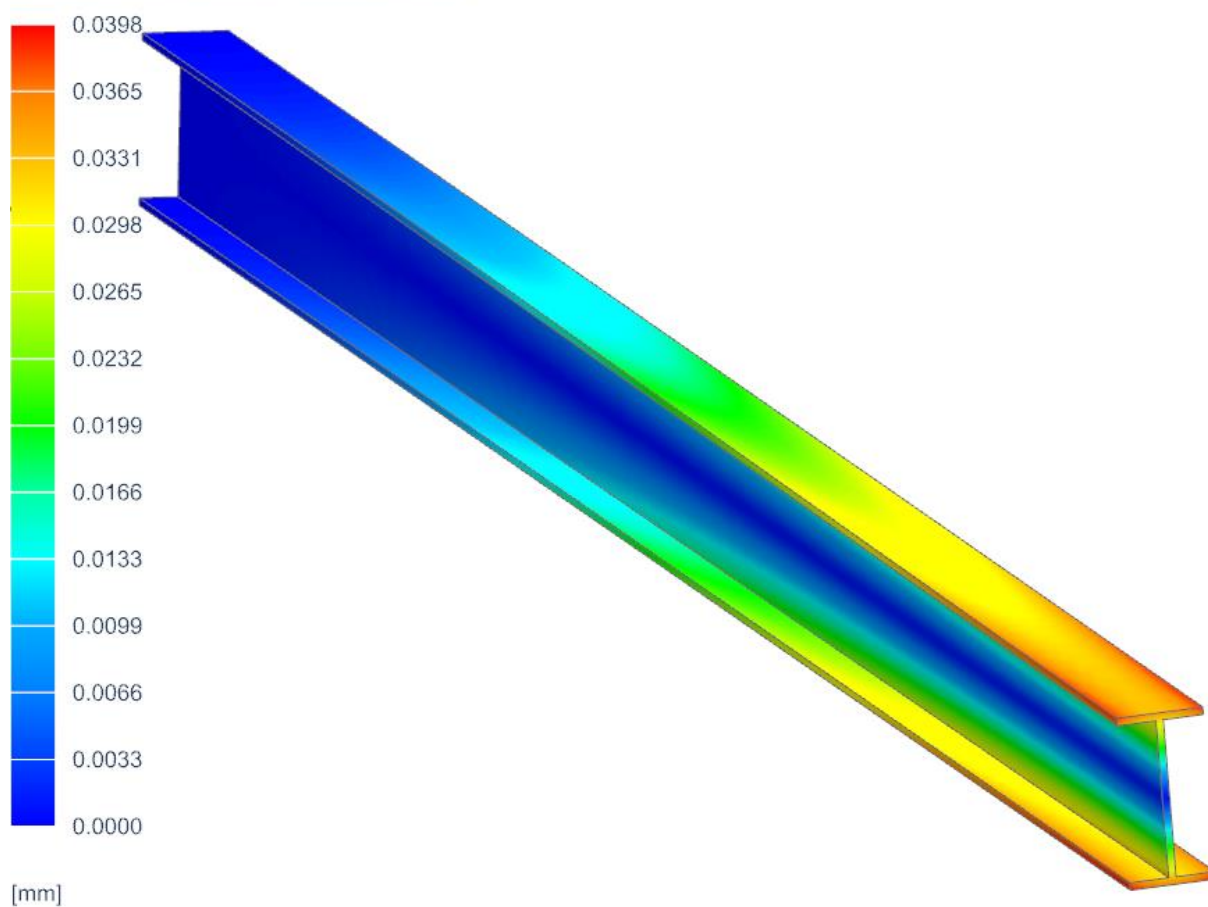


Příloha 3. 11 Krut – posunutí – Dutý eliptický průřez



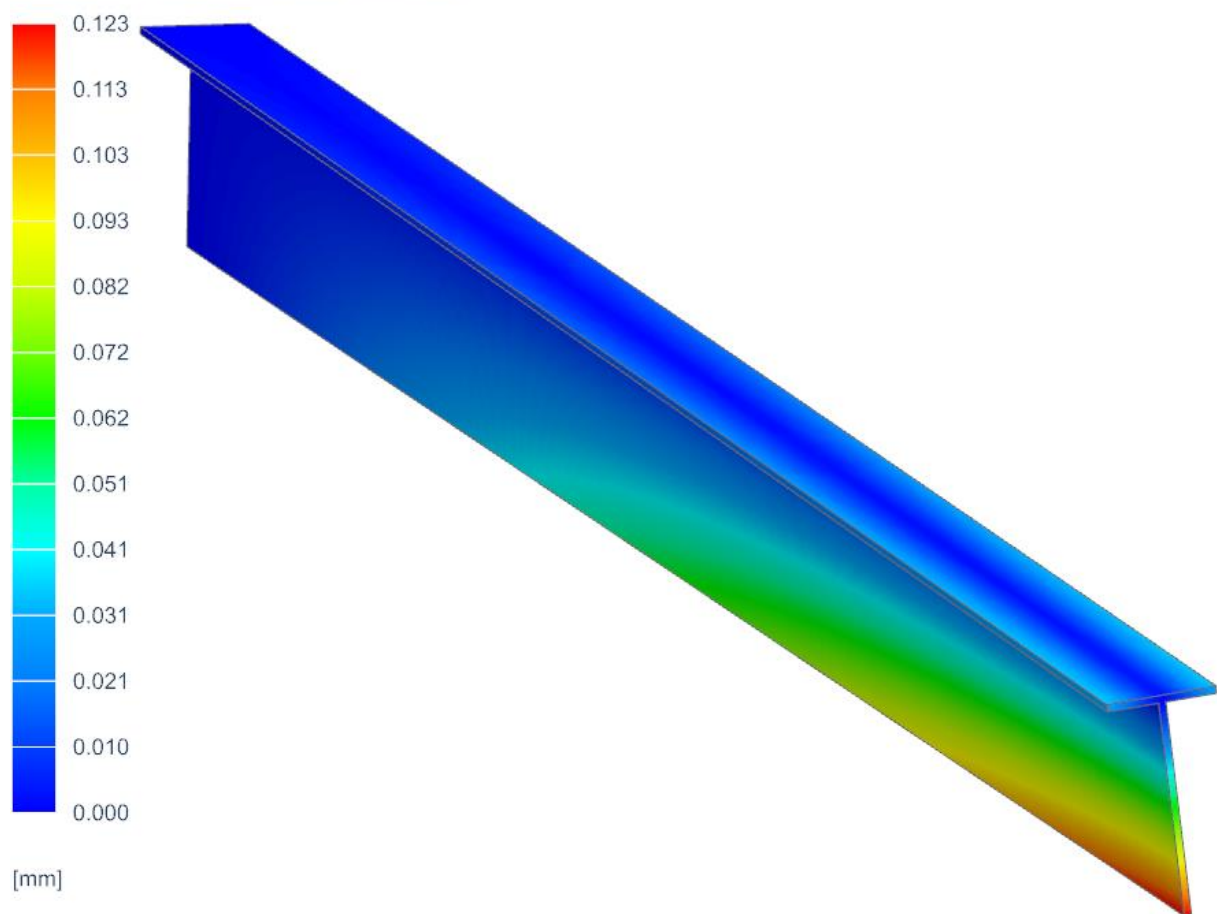
Příloha 3. 12 Krut – posunutí – Dutý trojúhelníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0.000, Max : 0.123, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



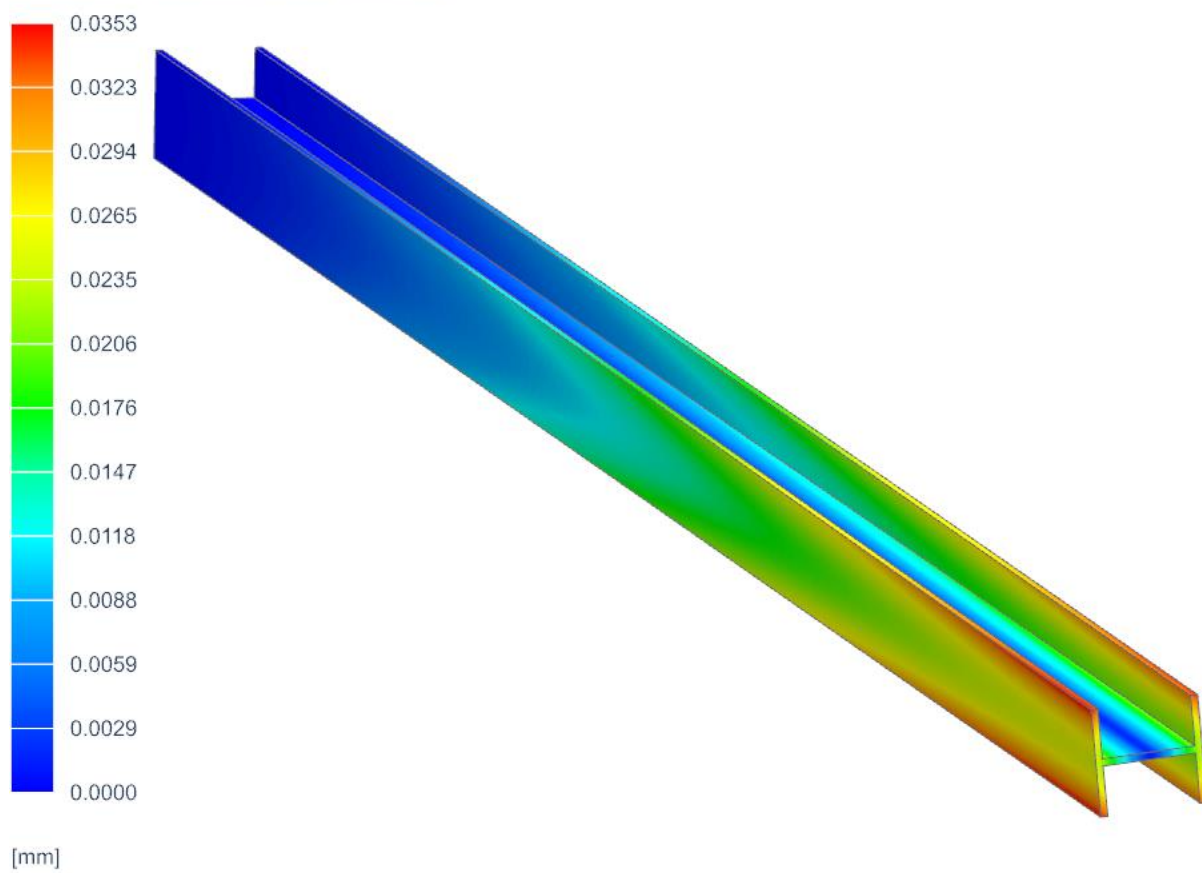
Příloha 3. 13 Krut – posunutí – I průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0.000, Max : 0.123, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



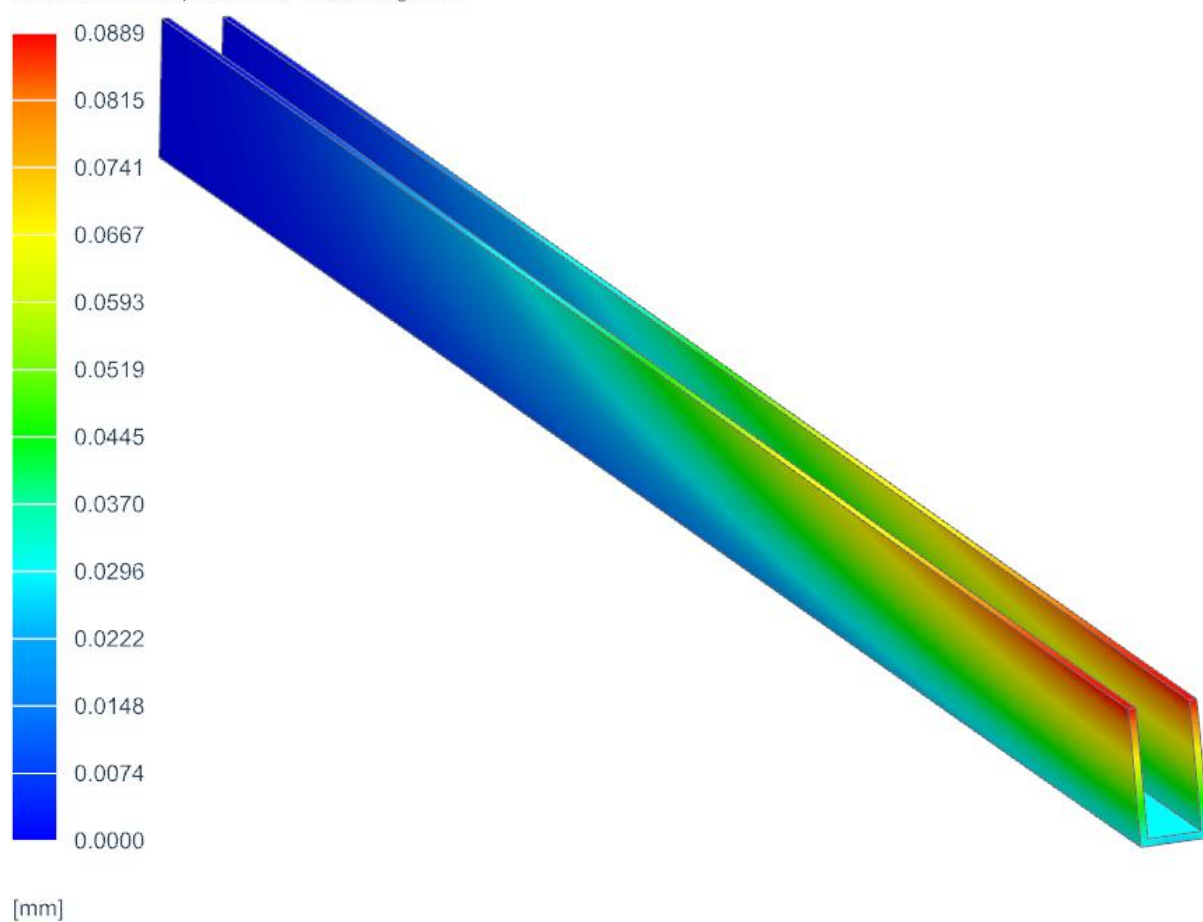
Příloha 3. 14 Krut – posunutí – T průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0.000, Max : 0.123, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



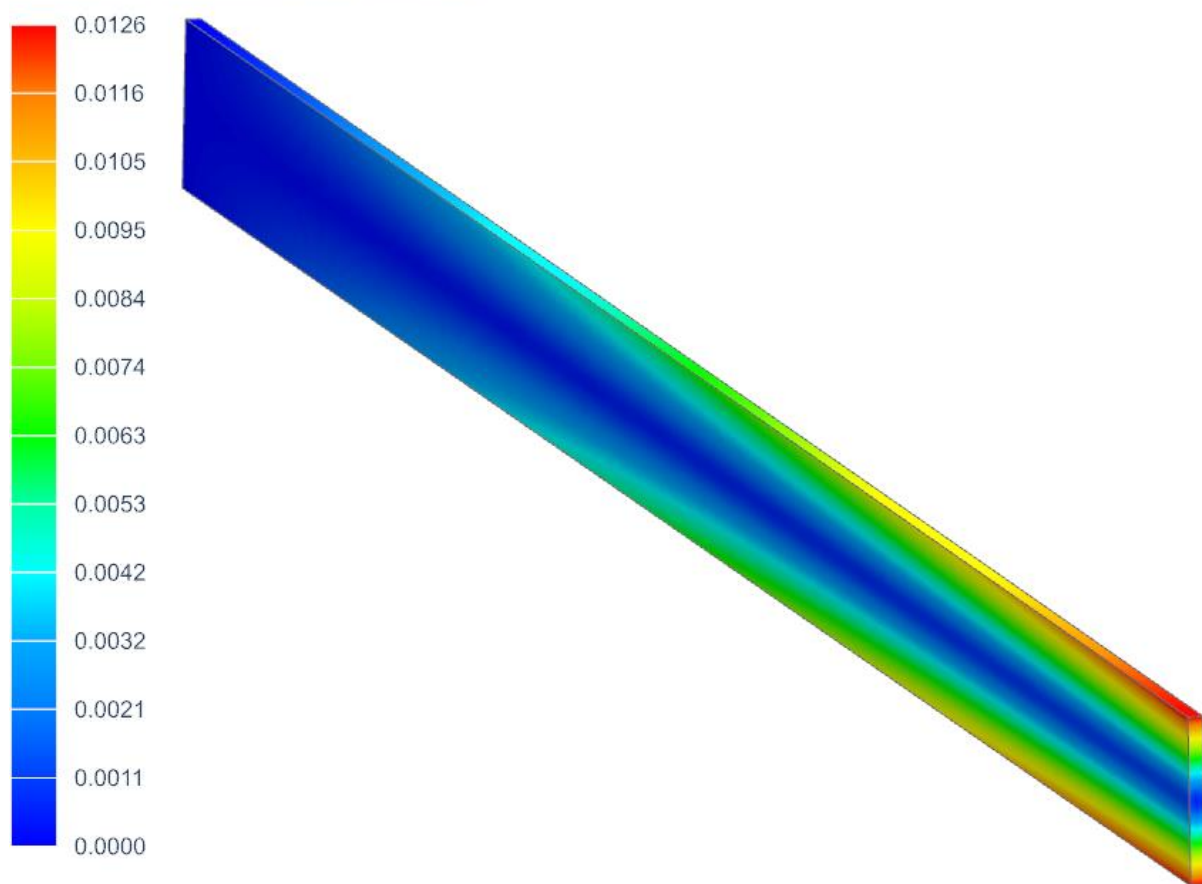
Příloha 3. 15 Krut – posunutí – H průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0.000, Max : 0.123, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



Příloha 3. 16 Krut – posunutí – U průřez

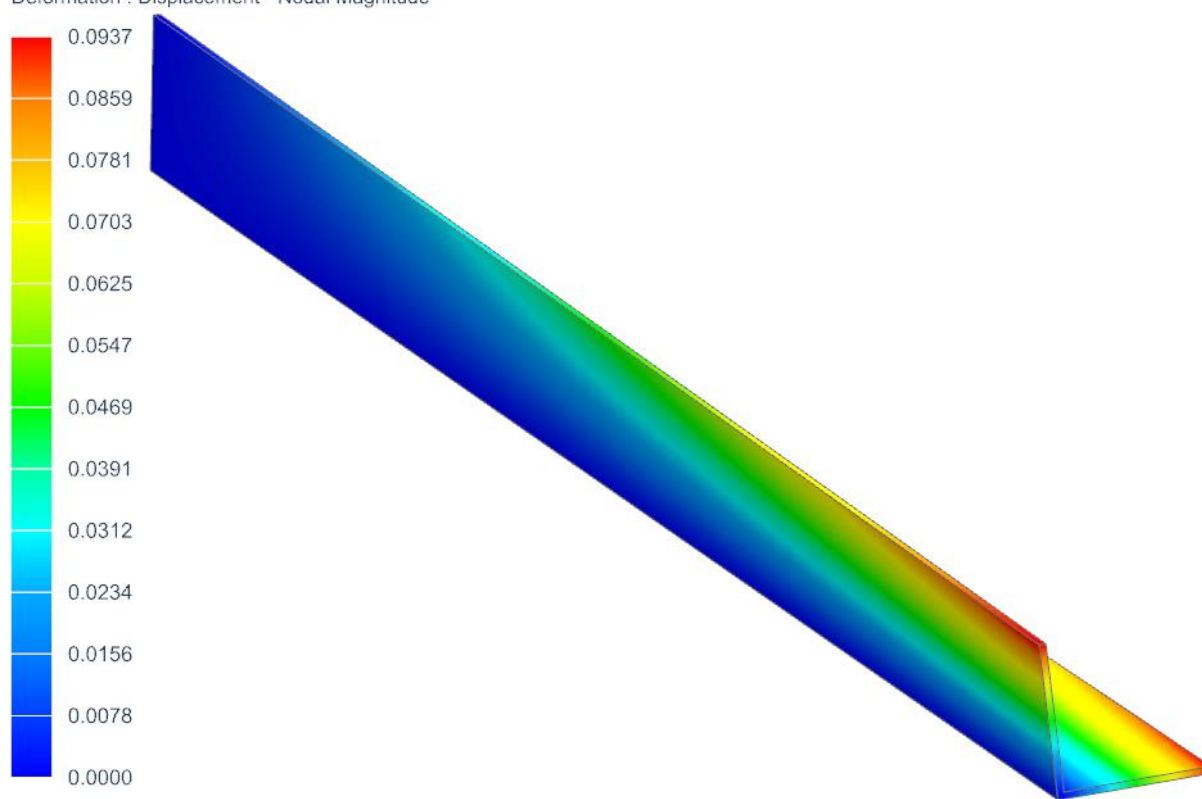
Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0.000, Max : 0.123, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



[mm]

Příloha 3. 17 Krut – posunutí – Tenká deska

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Displacement - Nodal, Magnitude
Min : 0.000, Max : 0.123, Units = mm
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



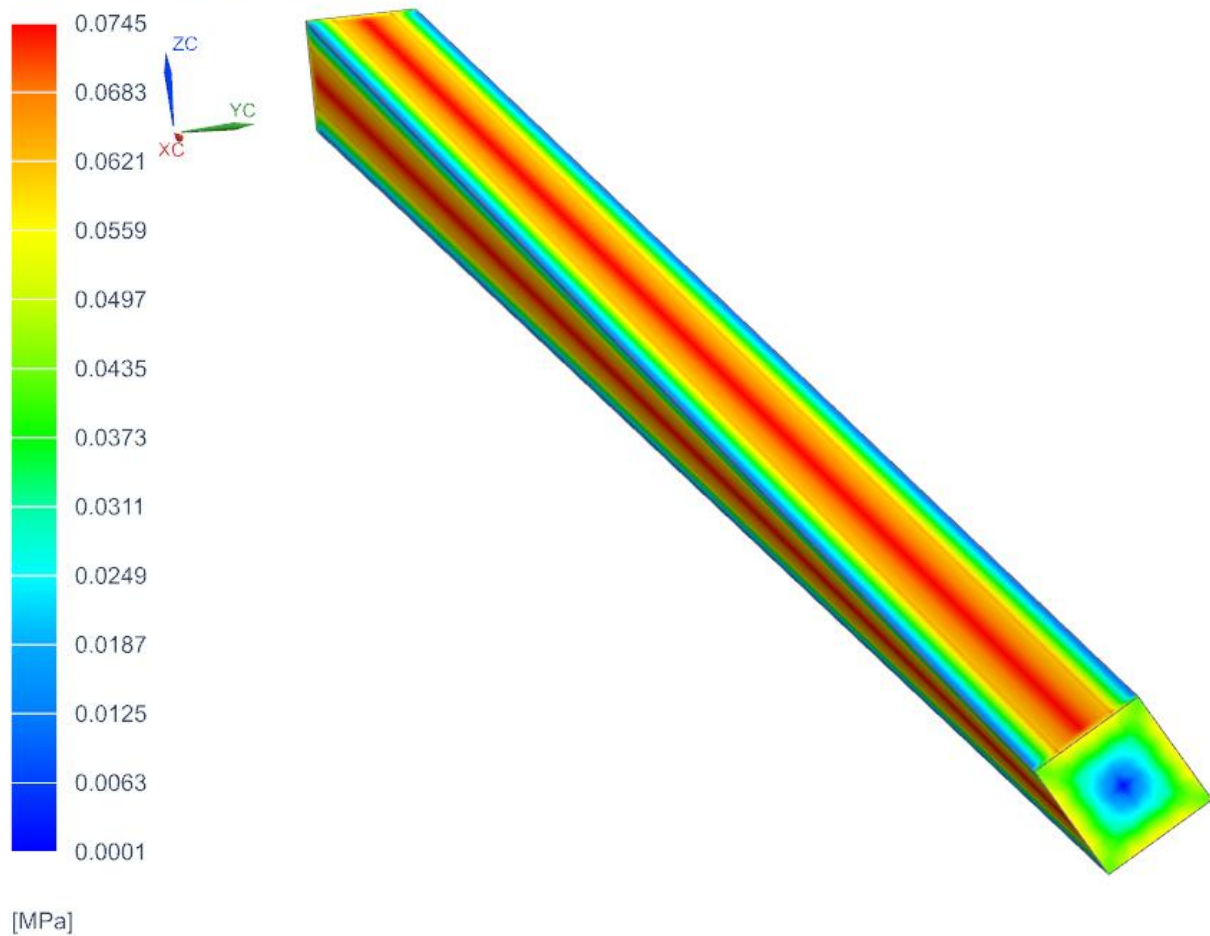
[mm]

Příloha 3. 18 Krut – posunutí – L průřez

PŘÍLOHA č. 4

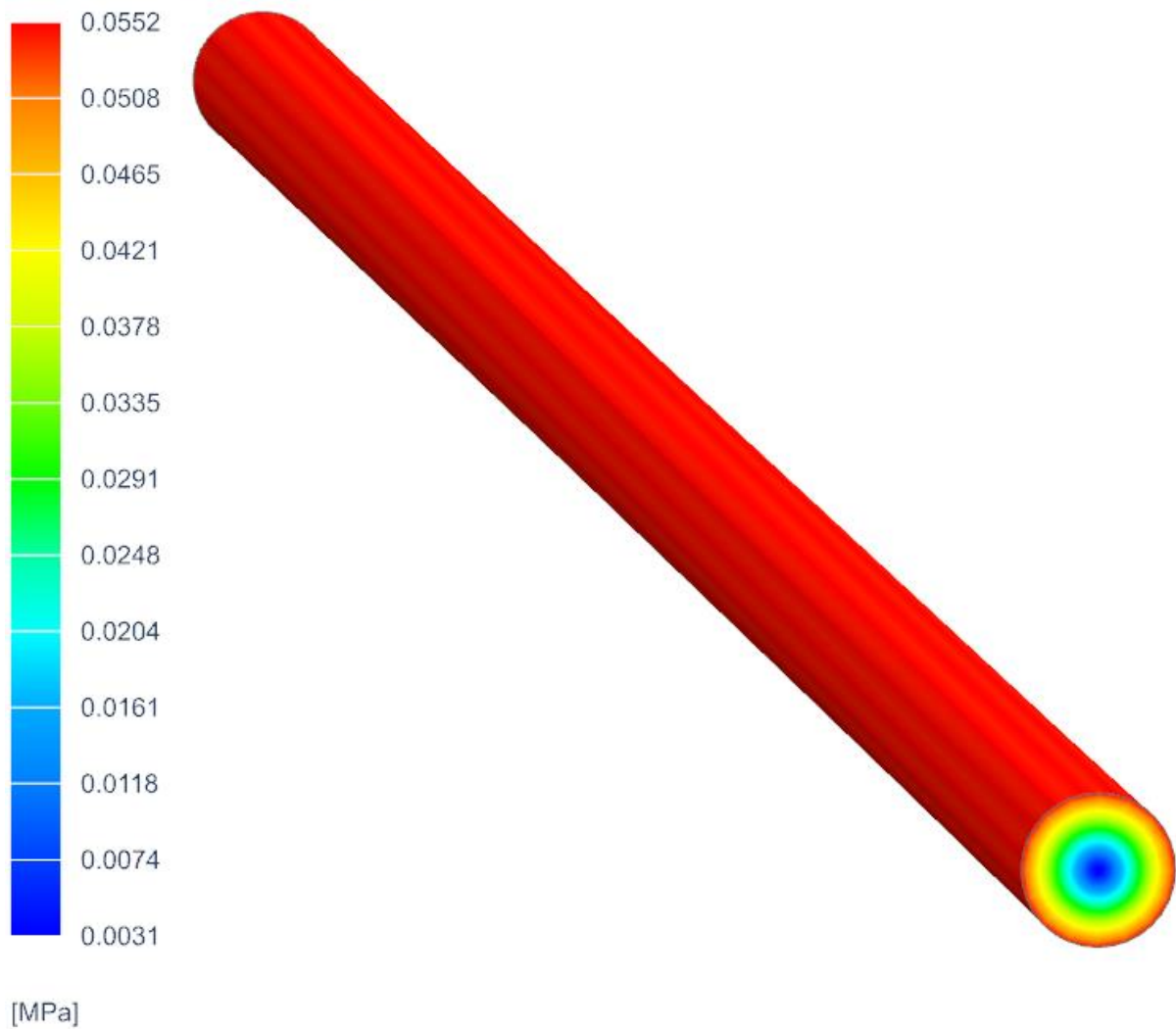
Výsledky simulace nosníku pomocí MKP Krut – napětí

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0001, Max : 0.0886, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



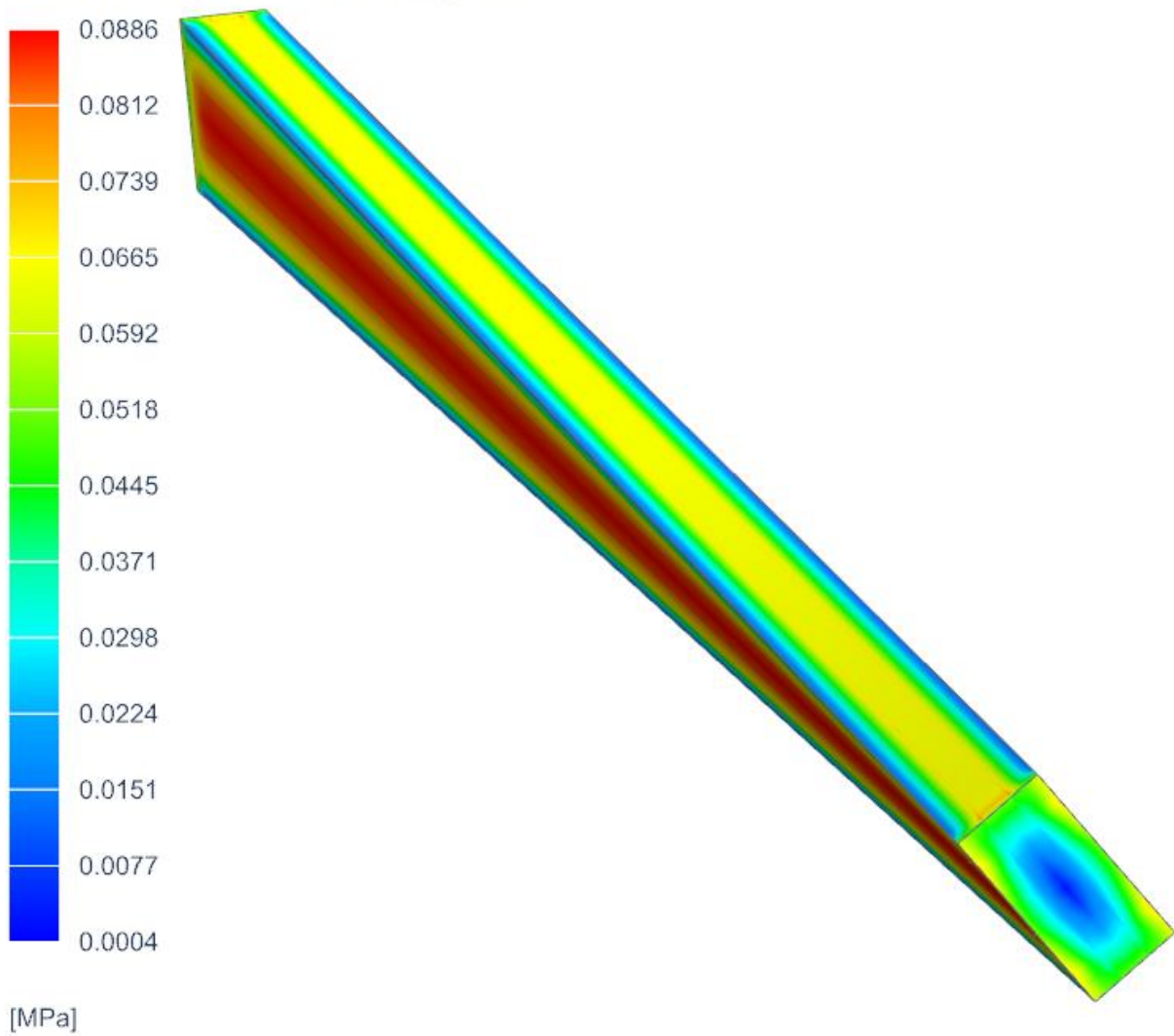
Příloha 4. 1 Krut – napětí – Plný čtvercový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0001, Max : 0.0886, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



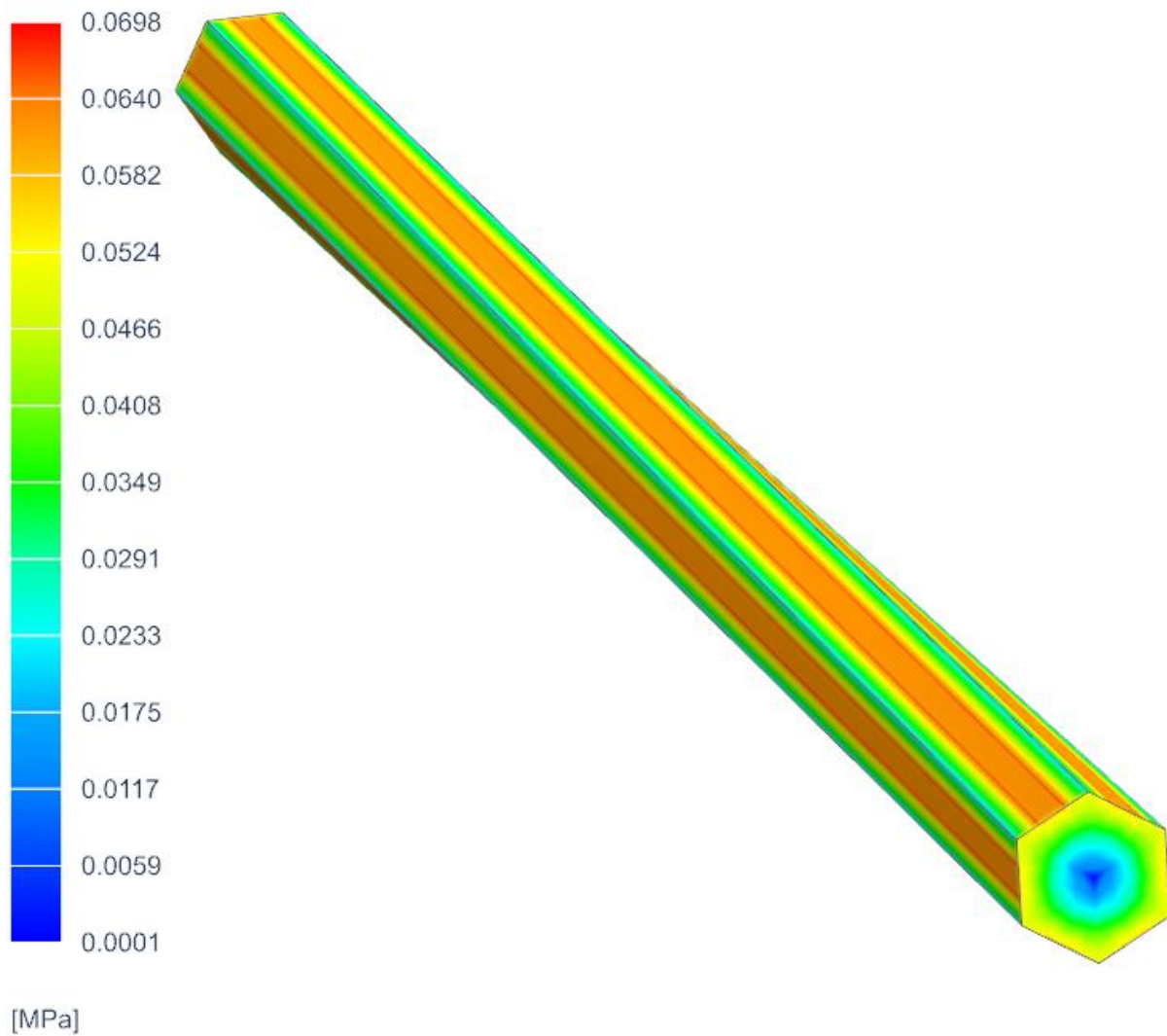
Příloha 4. 2 Krut – napětí – Plný kruhový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0001, Max : 0.0886, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



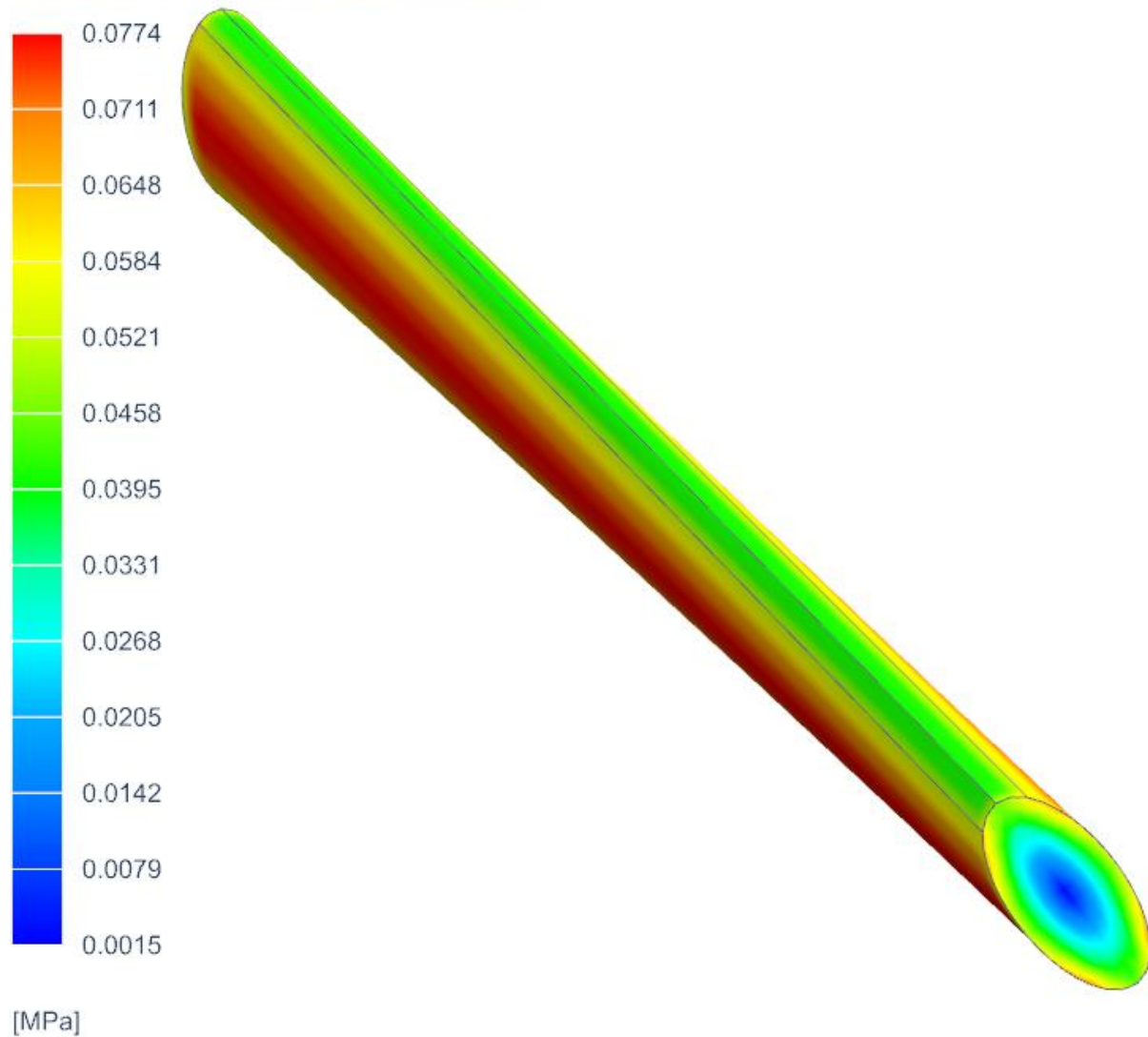
Příloha 4. 3 Krut – napětí – Plný obdélníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0001, Max : 0.0886, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



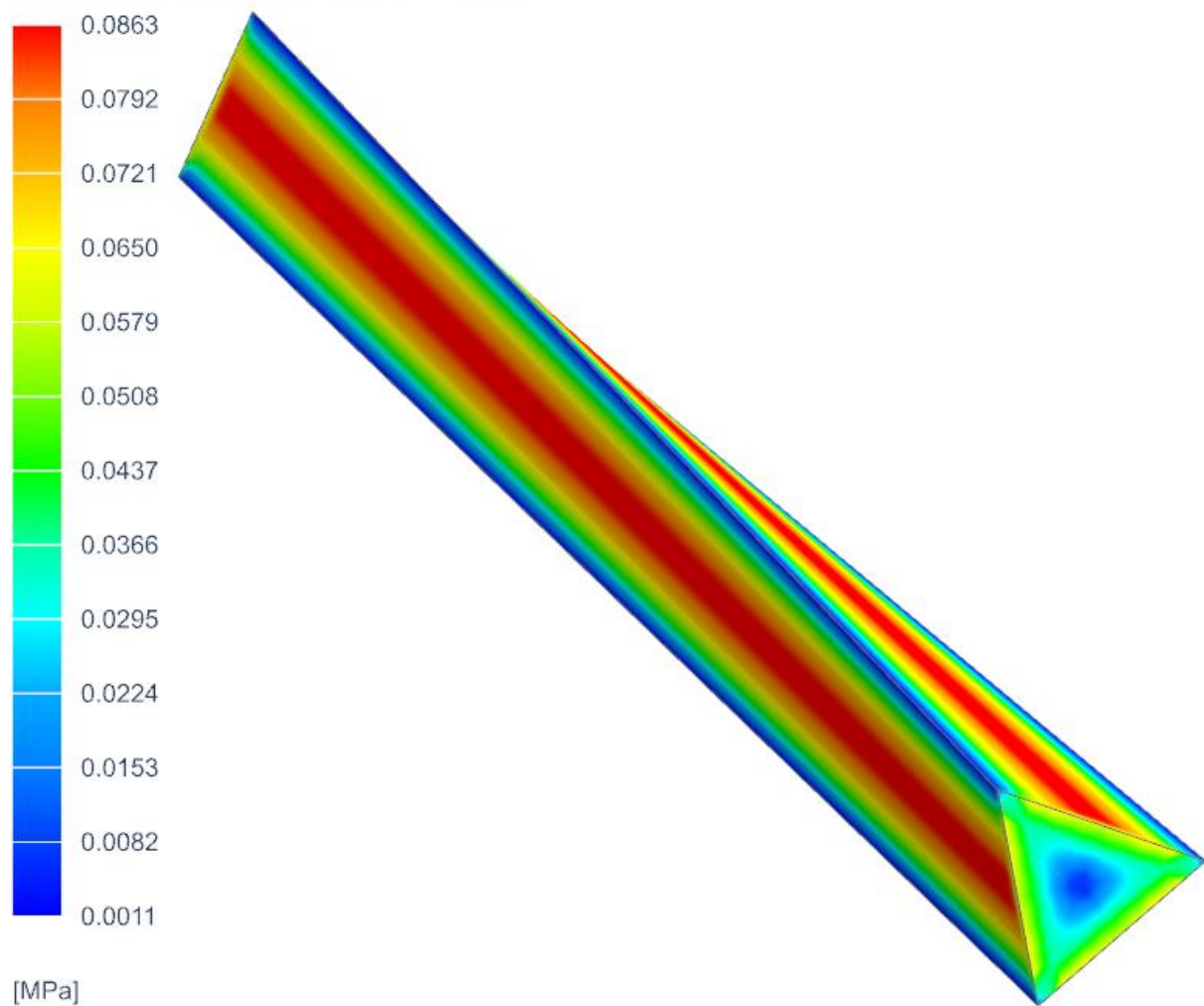
Příloha 4. 4 Krut – napětí – Plný šestistěnný průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0001, Max : 0.0886, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



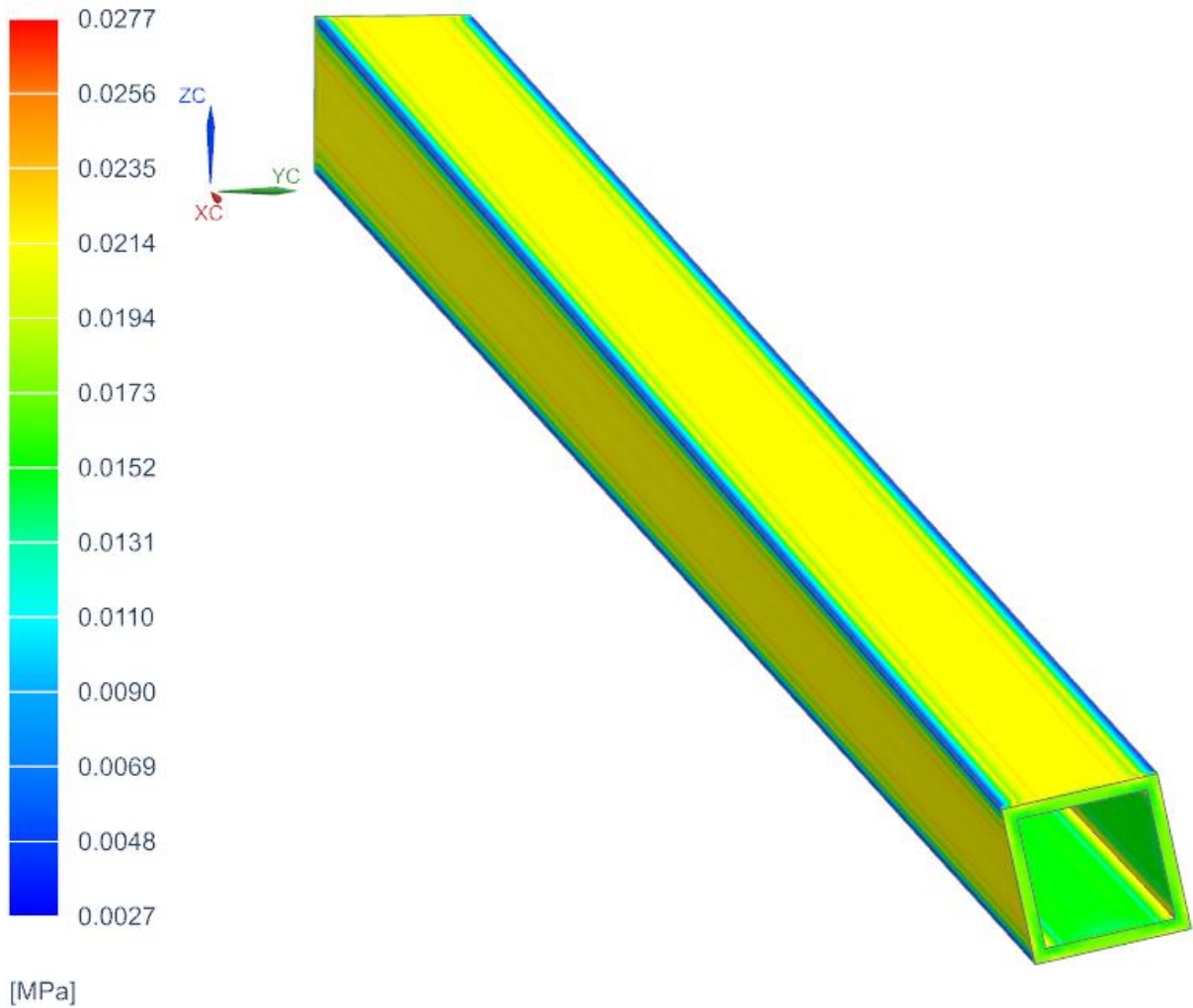
Příloha 4. 5 Krut – napětí – Plný eliptický průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0001, Max : 0.0886, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



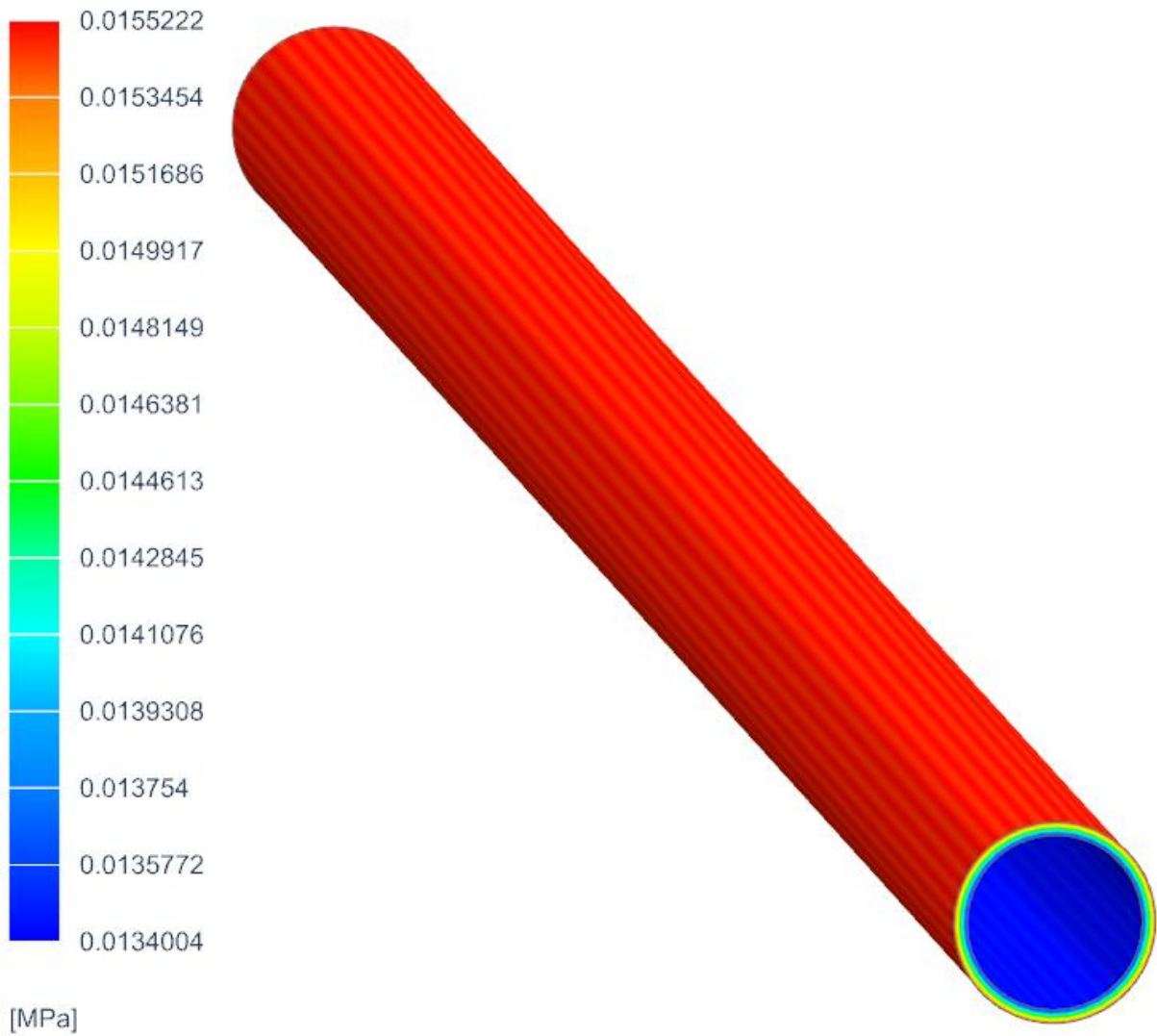
Příloha 4. 6 Krot – napětí – Plný trojúhelníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0009, Max : 0.0449, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



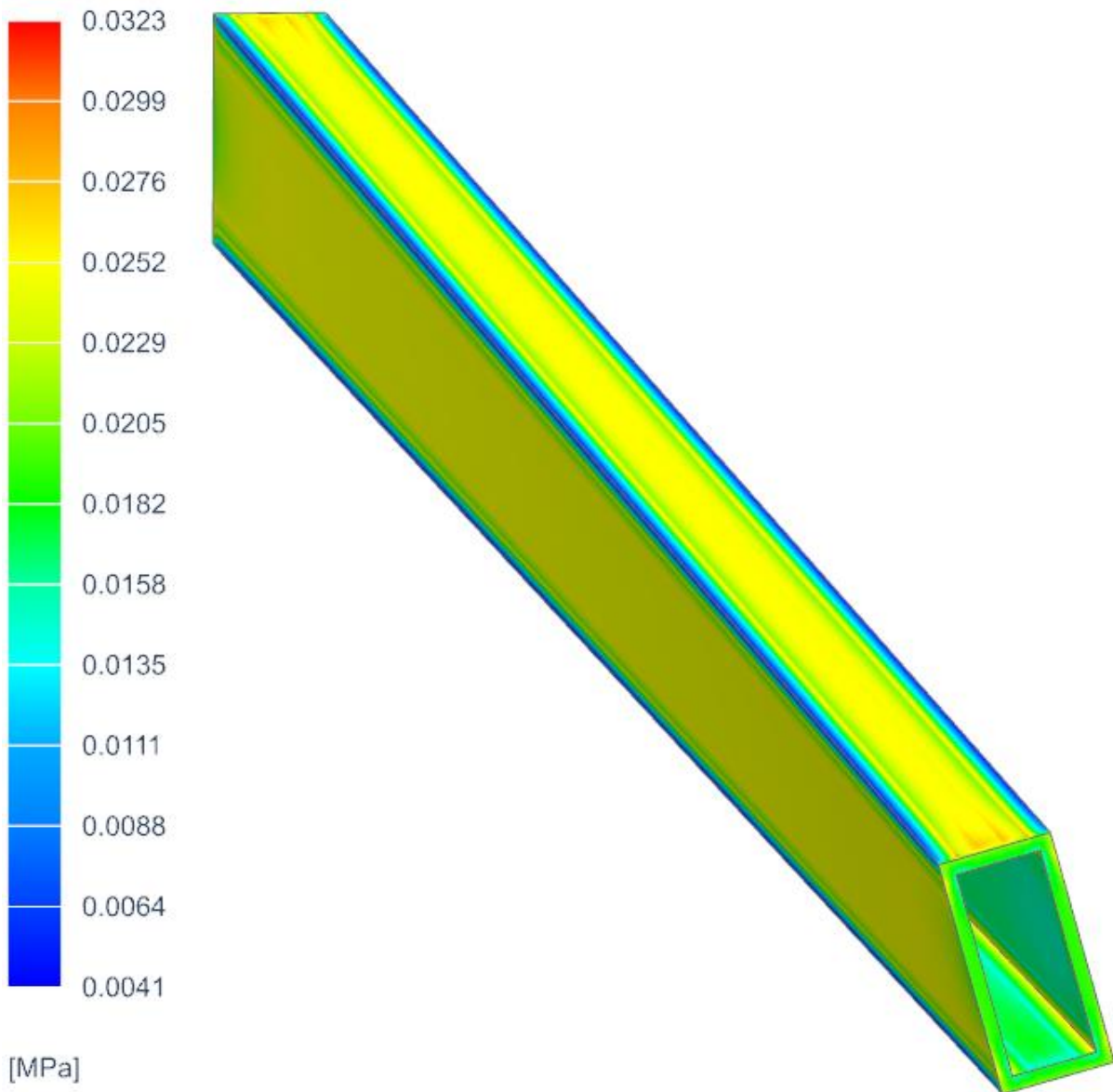
Příloha 4. 7 Krut – napětí – Dutý čtvercový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0009, Max : 0.0449, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



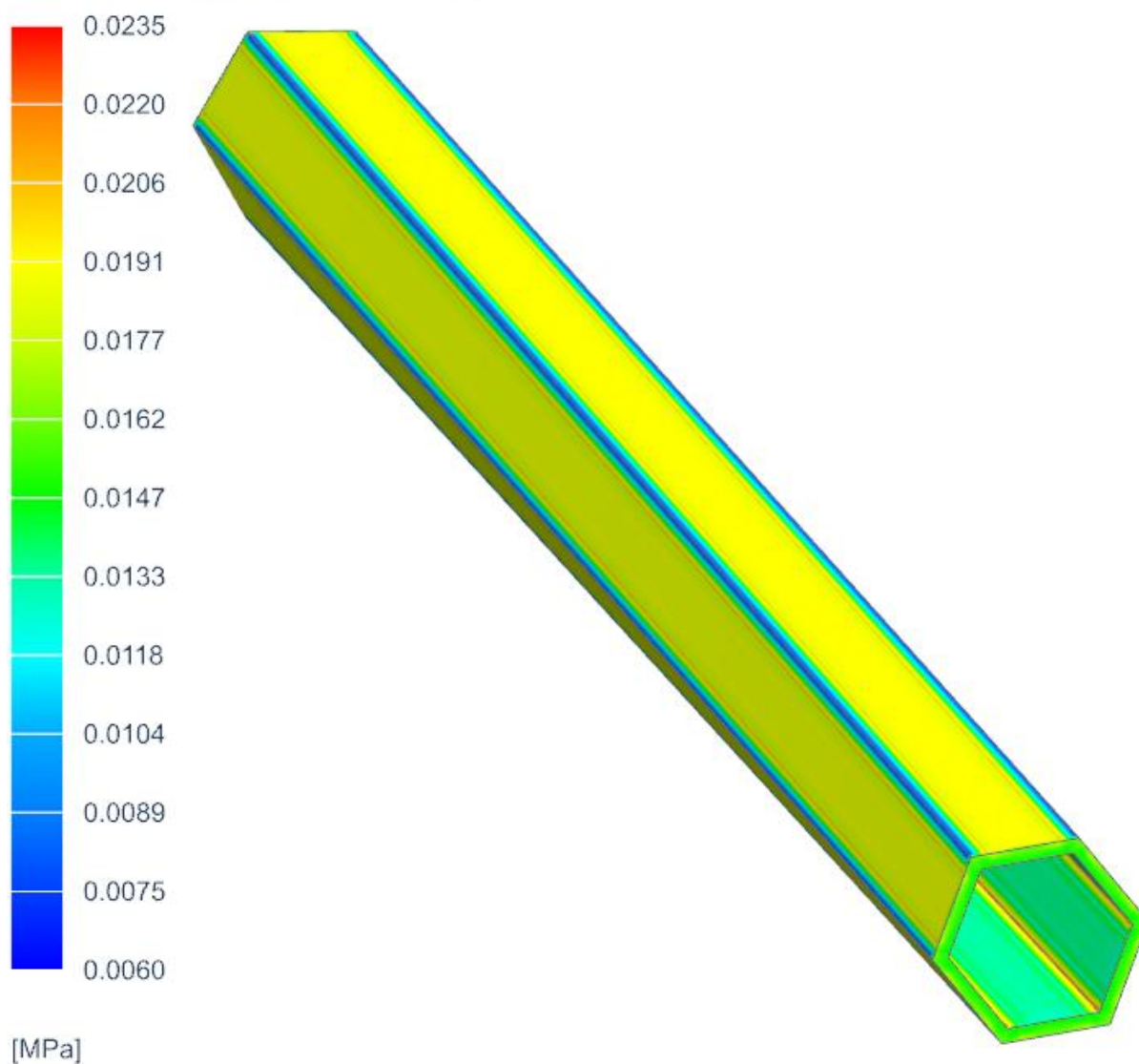
Příloha 4. 8 Krut – napětí – Dutý kruhový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0009, Max : 0.0449, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



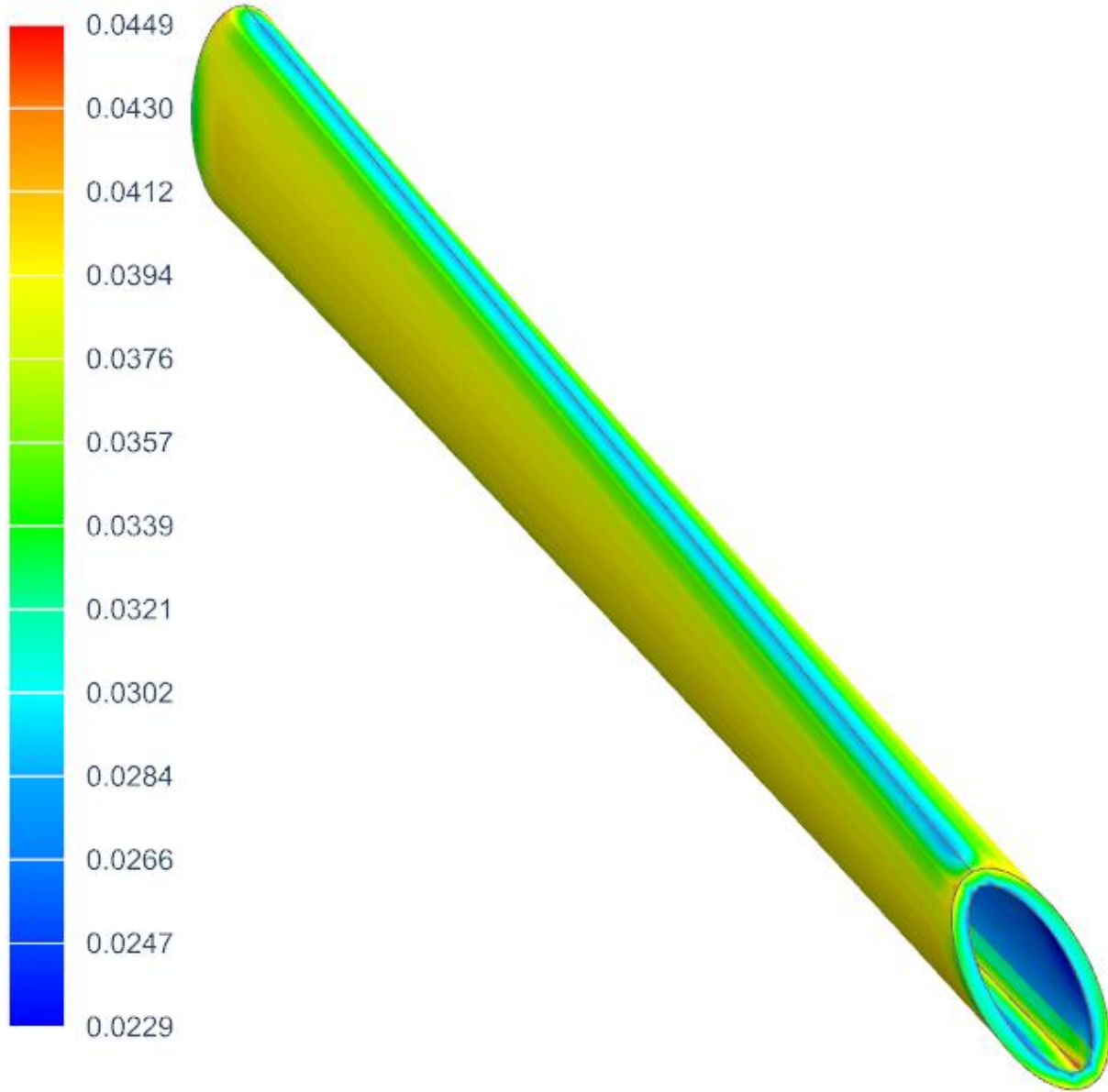
Příloha 4. 9 Krut – napětí – Dutý obdélníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0009, Max : 0.0449, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



Příloha 4. 10 Krut – napětí – Dutý šestistěnný průřez

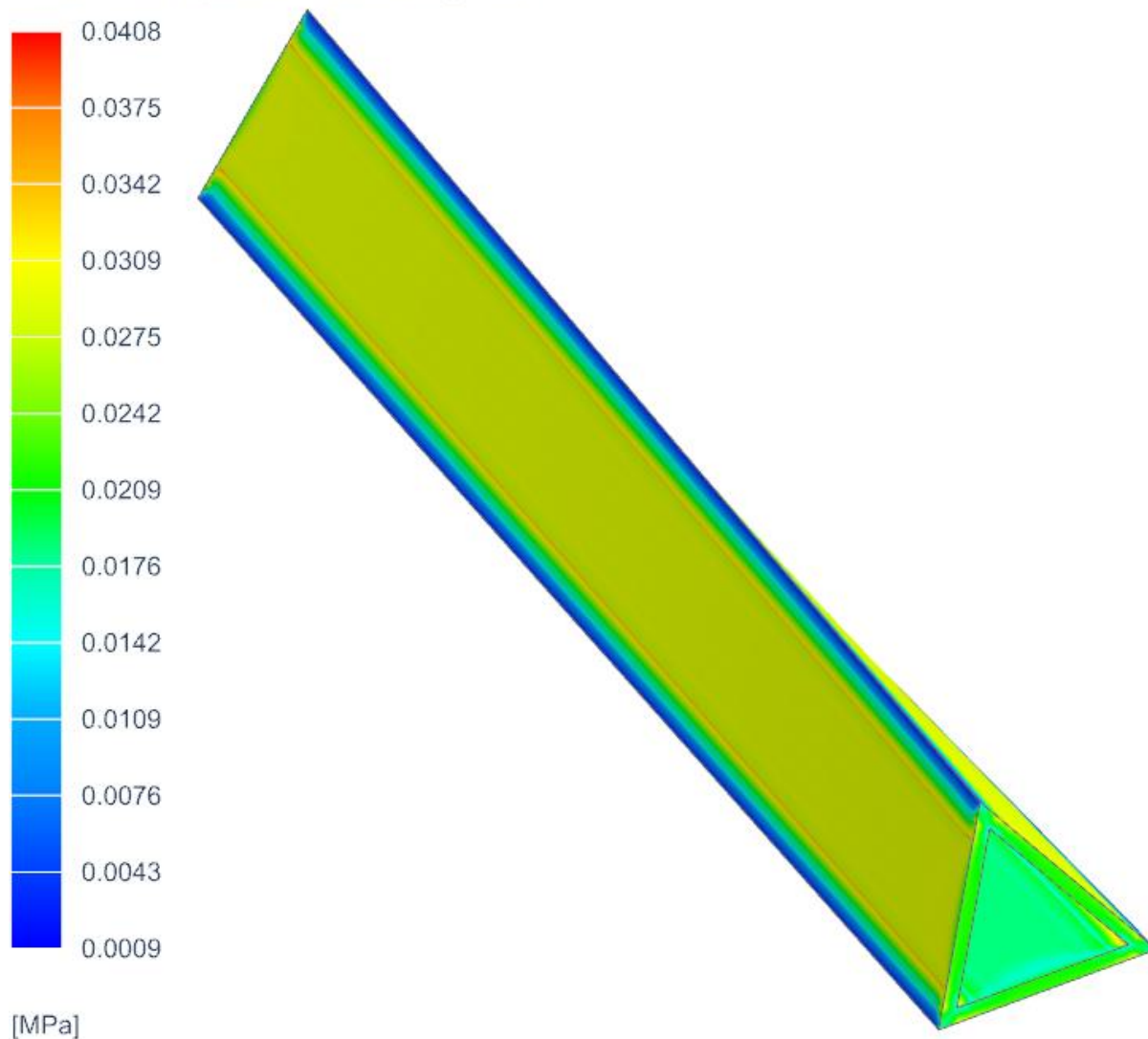
Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0009, Max : 0.0449, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



[MPa]

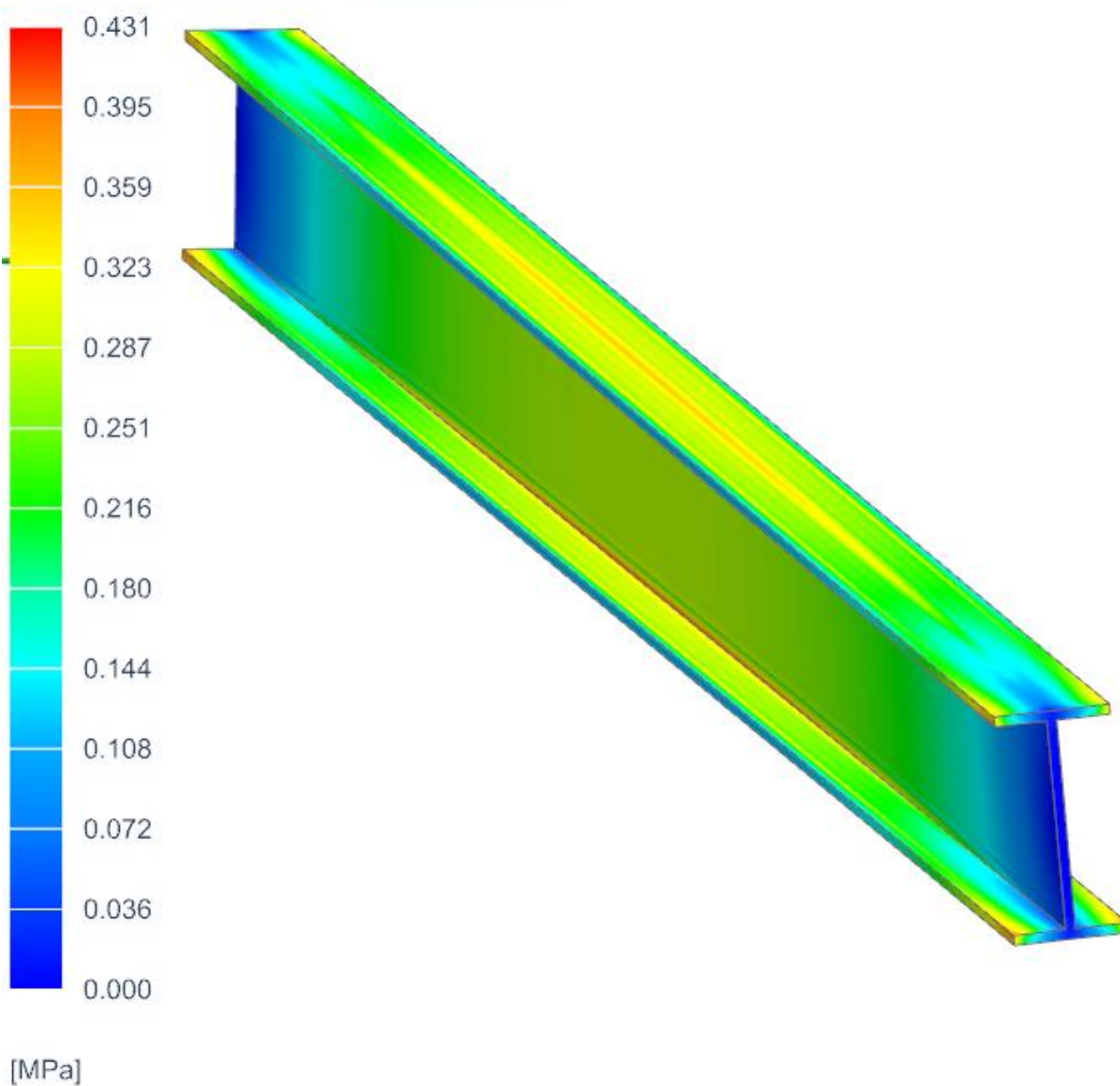
Příloha 4. 11 Krut – napětí – Dutý eliptický průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.0009, Max : 0.0449, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



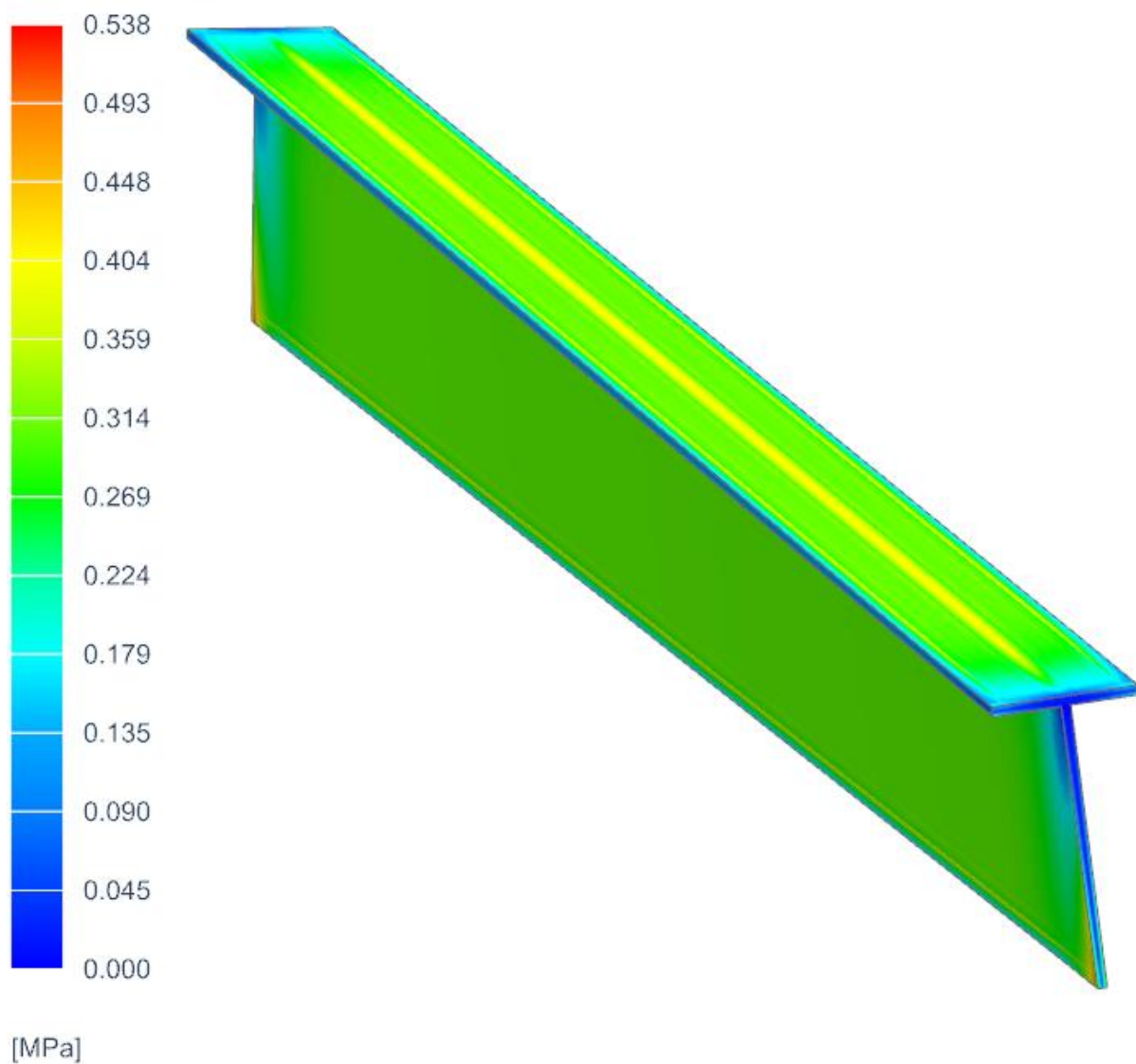
Příloha 4. 12 Krut – napětí – Dutý trojúhelníkový průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.000, Max : 0.538, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



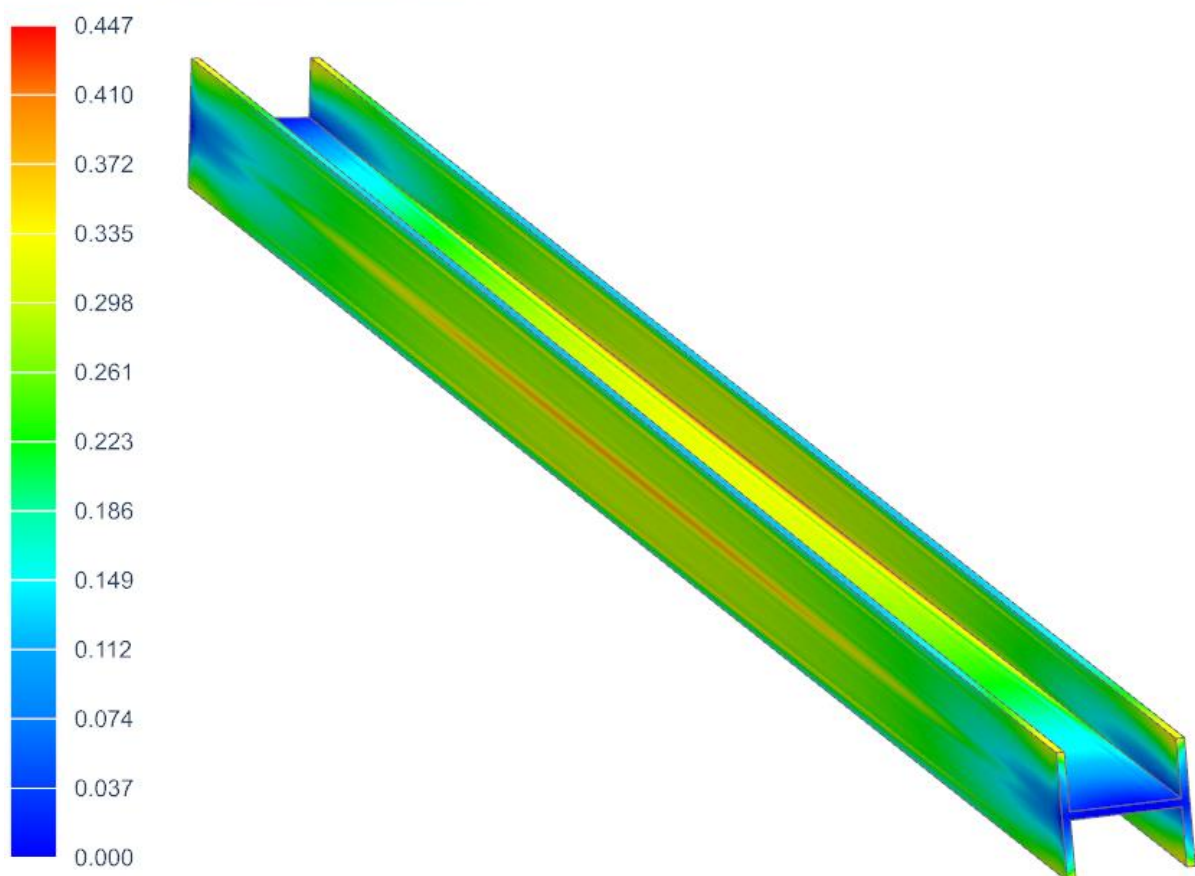
Příloha 4. 13 Krut – napětí – I průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.000, Max : 0.538, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



Příloha 4. 14 Krut – napětí – T průřez

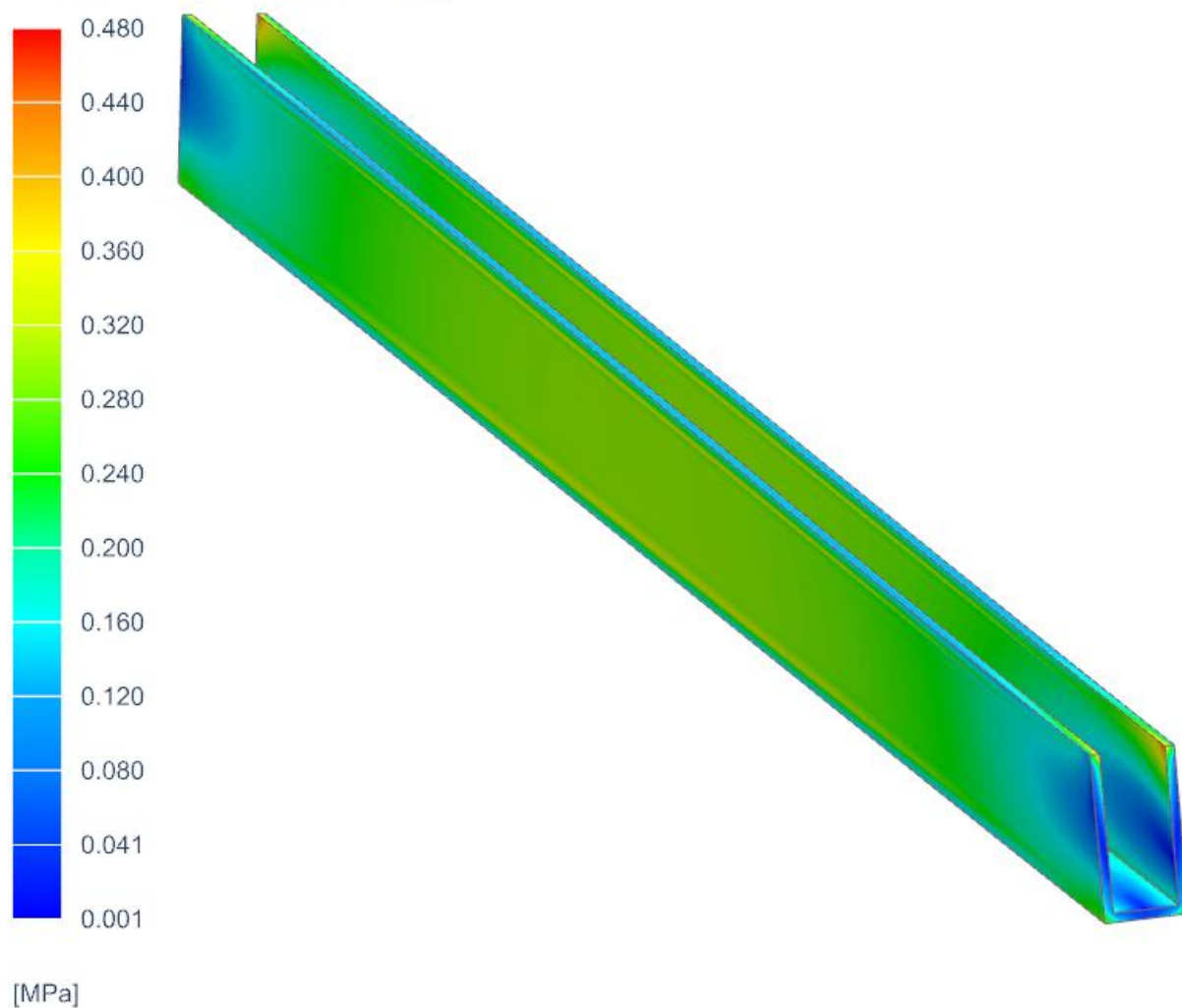
Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.000, Max : 0.538, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



[MPa]

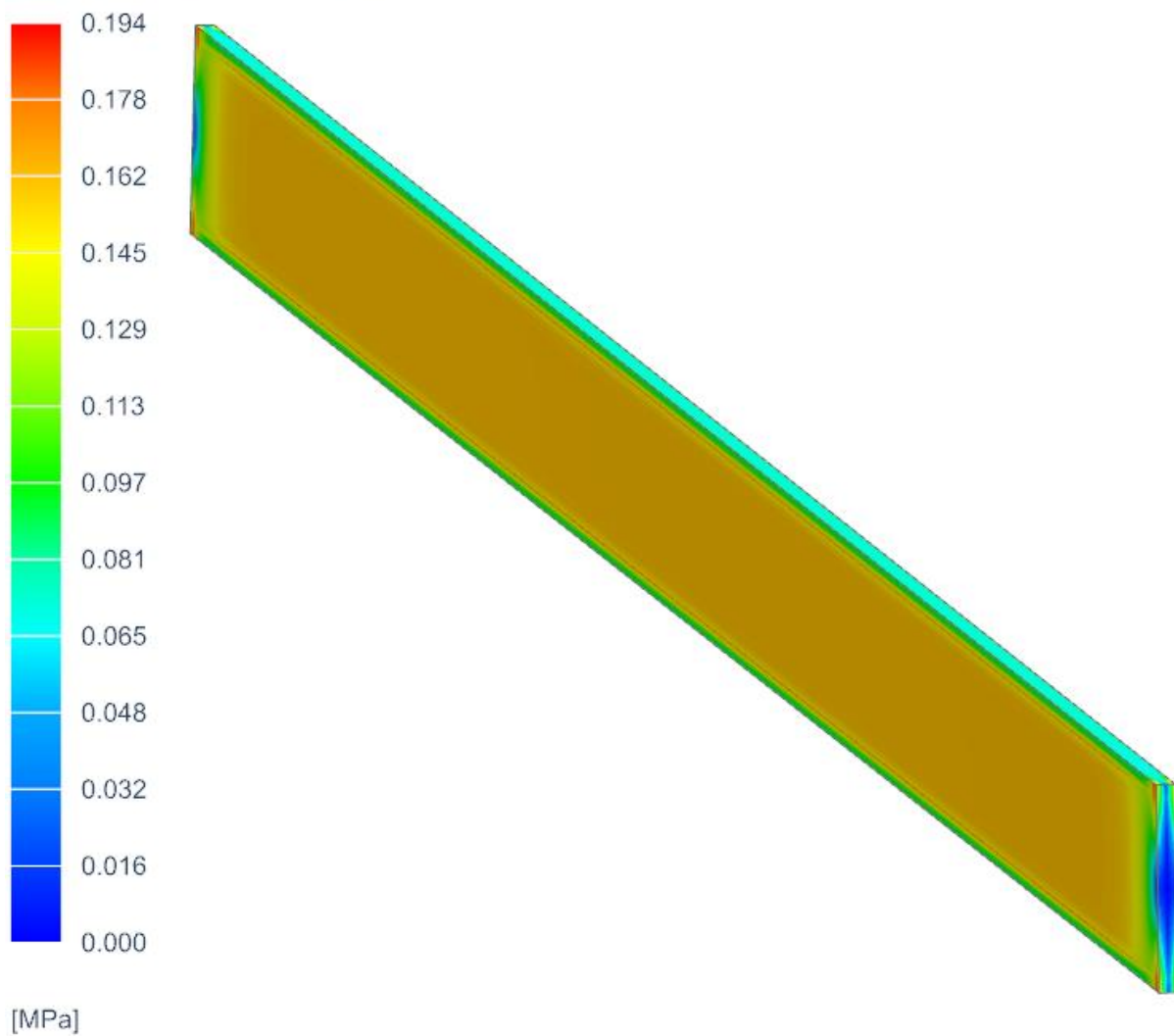
Příloha 4. 15 Krut – napětí – H průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.000, Max : 0.538, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



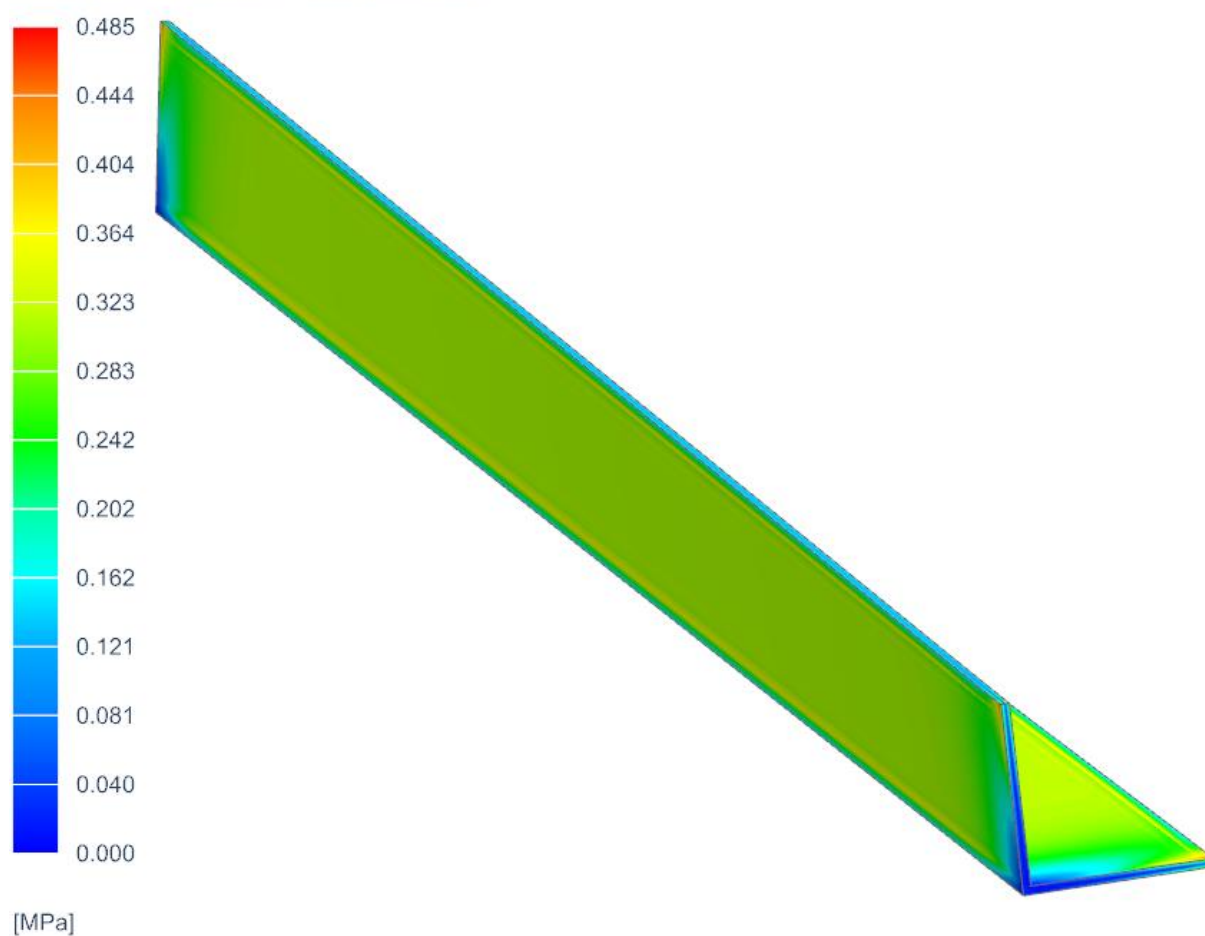
Příloha 4. 16 Krut – napětí – U průřez

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.000, Max : 0.538, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



Příloha 4. 17 Krut – napětí – Tenká deska

Subcase - Static Loads 1, Static Step 1
Stress - Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.000, Max : 0.538, Units = MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



Příloha 4. 18 Krot – napětí – L průřez