

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Plzeň, 2012

Kamila Boublíková



Fakulta aplikovaných věd

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Výpočtová analýza dynamického zatížení
vázaných soustav těles**

Kamila Boublíková

V Plzni, 2012

PROHLÁŠENÍ

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 31. května 2012

.....
vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ

Chtěla bych všude poděkovat Ing. Michalovi Hajžmanovi, Ph.D., za jeho cenné rady, připomínky a podněty a rovněž za jeho mimořádnou motivaci. Také bych ráda vyslovila upřímné a srdečné díky všem svým blízkým, kteří nikdy nezapomněli.

Abstrakt

Práce se zabývá výpočtovou analýzou dynamického zatížení vázaných soustav těles. Jsou představeny významné typy souřadnic důležité pro kinematický popis, které jsou aplikovány na demonstrační příklad klikového mechanismu. Jsou použity numerické metody zprogramované v MATLABu pro řešení pohybové rovnice vycházející z metody redukce pro mechanismy s jedním stupněm volnosti. Dále je vytvořen geometrický model členů klikového mechanismu, který je importován do softwaru MSC.ADAMS a podroben dynamické analýze. Výsledky numerického řešení pohybových rovnic v MATLABu jsou srovnány s výslednou numerickou simulací modelu v MSC.ADAMS. Je vytvořeno několik rozličných konstrukčních návrhů ojnice klikové hřídele s cílem zkoumat vliv tvaru na dynamickém zatížení. Nad rámec práce je zařazena statická analýza návrhů ojnice pomocí metody konečných prvků.

Klíčová slova: dynamická analýza, numerické metody, metoda redukce, konstrukční návrh, geometrický model, matematický model

Abstract

The thesis deals with problems of multibody dynamics. There are introduced the important types of coordinates for kinematic description, which are applied for the illustrative example of the crankshaft mechanism. There are used the numerical methods implemented in MATLAB for solving of equations of motion developed in the method of reduced mass which is used for mechanism with one degree of freedom. The geometric model of crankshaft mechanism is created and imported to the MSC.ADAMS software. Results of numerical methods in MATLAB are compared to results of MSC.ADAMS. Several designs of the conrod are created in order to study the effects of the design on the dynamic loading. In addition there is a static analysis of conrod design that is created with finite element method.

Keywords: dynamic analysis, numerical methods, method of reduced mass, design, geometric model, mathematic model

Obsah

Obsah	1
1 Úvod	2
2 Kinematický popis vázaných mechanických systémů	4
2.1 Zdvihové funkce a převody pro klikový mechanismus	6
2.2 Fyzikální souřadnice klikového mechanismu	8
2.3 Rovnice popisující kinematické vazby	8
2.3.1 Rotační vazba	9
2.3.2 Posuvná vazba	12
3 Pohybové rovnice vázaných mechanických systémů	14
3.1 Metoda redukce	14
3.1.1 Redukce na rotační člen	15
3.1.2 Metoda redukce pro klikový mechanismus	16
3.2 Matematický model vázané soustavy těles	19
3.3 MSC.ADAMS	21
3.3.1 Tvorba modelu v prostředí MSC.ADAMS	22
3.4 Model klikového mechanismu	23
4 Dynamická analýza pohybu	26
4.1 Numerické metody integrace pohybových rovnic	26
4.1.1 Metoda počátečního zrychlení	26
4.1.2 ODE45, ODE23, ODE15s, ODE23s, ODE23tb	28
4.2 Srovnání integračních metod	29
5 Vliv konstrukčního návrhu ojnice na dynamické zatížení	35
5.1 Návrhy tvaru ojnice	35
5.2 Dynamická analýza návrhů	39
5.3 Statická analýza návrhů	41
6 Závěr	48
Literatura	49

Kapitola 1

Úvod

Ve světě už není významnějších výrobců automobilů, letadel, lodí, kolejových vozidel, mechatronických zařízení a spotřební elektroniky, kteří by během vývoje a inovace svých produktů nekladli vysoké požadavky na výpočtovou analýzu. Široká škála důmyslných počítačových softwarů umožňuje modelovat, analyzovat a optimalizovat virtuální prototypy budoucích výrobků ještě před vlastní realizací a tím snižuje náklady na výrobu a výzkum směrem k lepší konkurenceschopnosti.

Tato bakalářská práce je zaměřena na dynamickou analýzu pohybu vázaných mechanických systémů s důrazem na zjišťování dynamických silových účinků působících na tělesa a jejich vazby.

Kinematická analýza se zabývá klasifikací a popisem pohybu soustavy, ale nebere v potaz působící síly. Zpravidla je určena časová závislost kinematických veličin jednoho či více členů s úkolem vyšetřit pohyb zbývajících těles.

Dynamická analýza řeší pohyb mechanické soustavy s ohledem na působící síly. Obvykle jsou dány všechny charakteristické veličiny jako rozměry, hmotnosti a momenty setrvačnosti a zároveň působící silové účinky. Po provedení dynamické analýzy soustavy těles lze získat informace o zatížení jednotlivých členů v kinematických vazbách. Tyto poznatky je možné dále využít například pro analýzu napětí na tělesech s využitím softwarů na bázi metody konečných prvků. Na základě výsledků napěťové analýzy lze provádět konstrukční změny návrhu za účelem zlepšení vlastností studovaného mechanického systému.

Cíle této práce lze stanovit následovně:

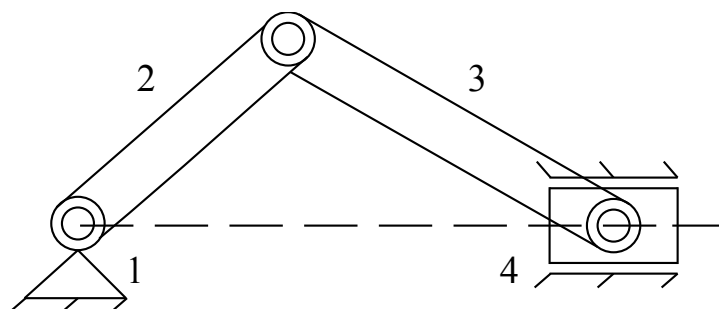
- Seznámit se se způsoby kinematického popisu vázaných mechanických systémů a vybrané postupy aplikovat na demonstrační příklad.
- Popsat vybrané metody sestavování pohybových rovnic vázaných mechanických systémů vzhledem k předchozím závěrům.
- Aplikovat vhodné numerické metody pro řešení sestavených pohybových rovnic a provést srovnání získaných výsledků na ukázkovém příkladu.
- Provést parametrickou studii vlivu konstrukčního návrhu na dynamické zatížení vybraného členu demonstrační soustavy.

Druhá kapitola se zabývá kinematickým popisem vázaných soustav těles a zmiňuje významné typy souřadnic. Pracuje s fyzikálními souřadnicemi pro ukázkový příklad klikového mechanismu a vysvětluje princip rovnic popisujících kinematické vazby. Dále pak kapitola 3 řeší pomocí metody redukce klikový mechanismus s jedním stupněm volnosti. Následně představuje software MSC.ADAMS a práci s ním pro geometrický model. V kapitole 4 jsou uvedeny numerické metody, které pro výpočet využívají vlastní pohybovou rovnici klikového mechanismu získanou v předcházející kapitole. V neposlední řadě se kapitola 5 zabývá vlivem konstrukčního návrhu ojnice na dynamickém zatížení.

Kapitola 2

Kinematický popis vázaných mechanických systémů

Vázané mechanické systémy (VMS) jsou soustavy tří a více těles (členů) vzájemně spojených kinematickými dvojicemi (KD) neboli vazbami. Na tyto soustavy mohou působit síly a momenty a ovlivňovat tak pohyb celého systému. Kinematická vazba představuje pohyblivé spojení mezi dvěma členy umožňující jejich vzájemný pohyb. Jednotlivé členy jsou označovány číslicemi, kdy rám je zpravidla volen jako číslo 1, jak je vidět na Obr. 2.1.



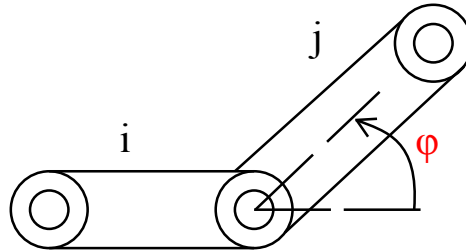
Obrázek 2.1: Klikový mechanismus s přiřazenými čísly u jednotlivých členů.

Pro popis polohy soustav těles se využívá různých druhů souřadnic. Kinematický popis VMS udává volbu souřadnic a jejich typu. Správná volba souřadnic umožňuje rychlejší a efektivnější řešení problému. Základní rozdělení souřadnic je na *nezávislé* a *závislé souřadnice*. Počet nezávislých souřadnic je roven počtu stupňů volnosti soustavy. Hodnota těchto souřadnic není vázána dalšími omezeními. Naproti tomu počet závislých souřadnic je jednoznačně vyšší než je počet stupňů volnosti. Hodnoty těchto souřadnic se nemohou měnit zcela nezávisle, neboť jsou vázány kinematickými vazbami.

Jiné dělení souřadnic pro popis VMS je možné na základě jejich vztahu ke globálním a lokálním (tělesovým) souřadným systémům. Významné typy souřadnic jsou *relativní*, *fyzikální* a *přirozené*.

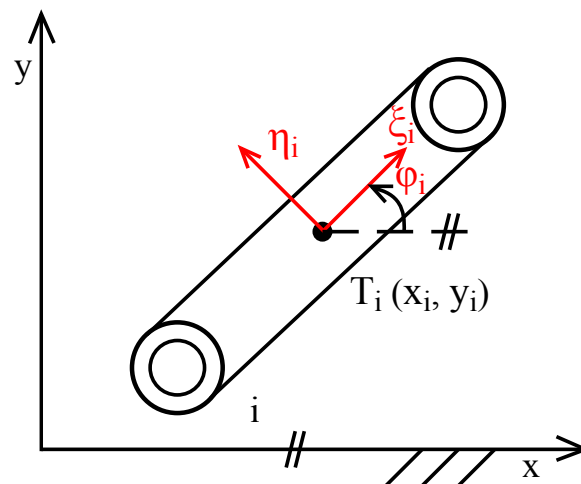
Relativní souřadnice popisují vzájemné tedy relativní pohyby v KD. U rovinné rotační kinematické vazby je relativní souřadnicí úhel natočení φ dvou vázaných těles, což je pa-

trné na Obr. 2.2. Výhodou jejich zavedení je menší počet rovnic popisujících soustavu. Nevýhodou představuje obtížnější formulace pohybových rovnic, ve kterých se většinou objevují absolutní souřadnice.



Obrázek 2.2: Relativní souřadnice pro rotační kinematickou dvojici.

Fyzikální neboli kartézské *souřadnice* jsou zavedeny tak, že na rámu je zvolen základní nepohyblivý kartézský souřadný systém a na každém členu je stanoven referenční bod, kterým je zpravidla středisko hmotnosti. Do každého referenčního bodu je přiřazen lokální souřadnicový systém. Poloha každého tělesa je určena jak kartézskými souřadnicemi referenčního bodu v základním souřadném systému, tak popisem orientace lokálního souřadného systému vůči základnímu. Pro těleso i na Obr. 2.3 jsou takovými souřadnicemi x_i, y_i, φ_i . U tohoto popisu polohy je však vyšší počet souřadnic, než je počet stupňů volnosti celé soustavy, což je značnou nevýhodou. Předností je snazší sestavení pohybových rovnic [Valášek 2011].



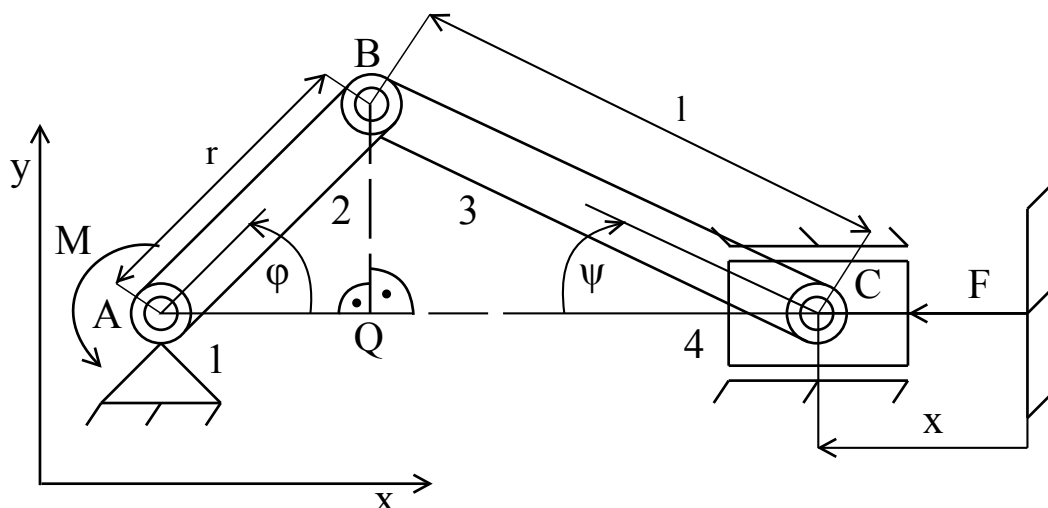
Obrázek 2.3: Fyzikální souřadnice pro uvolněné těleso.

Přirozené souřadnice jsou zaváděny tak, že na rámu je opět zvolen základní kartézský souřadný systém. U každého členu jsou vybrány význačné body a směry. Význačnými body mohou být středy hmotnosti sférických KD či body na osách rotačních nebo posuvných KD.

Význačné směry jsou jednotkové vektory os kinematických dvojic. Kartézské souřadnice těchto význačných bodů a složek jednotkových vektorů v základním souřadném systému jsou nazývány přirozenými souřadnicemi. Vždy je jich volen takový počet, aby poloha každého tělesa byla jednoznačně určena. Na rozdíl od fyzikálních souřadnic je jich třeba menší počet [Slavík et al. 1997].

2.1 Zdvihové funkce a převody pro klikový mechanismus

U klikového mechanismu jsou označena jednotlivá tělesa, jak je vidět na Obr. 2.4. Soustava má jeden stupeň volnosti, proto je možné zvolit pouze jednu zobecněnou nezávislou souřadnici popisující pohyb mechanismu. V tomto případě je jí úhel natočení φ , který udává polohu hnacího členu 2.



Obrázek 2.4: Klikový mechanismus s jedním stupněm volnosti, který má označené členy.

Pro vyjádření polohy ostatních těles mechanismu vzhledem k redukčnímu členu 2 je třeba vyjádřit zdvihové závislosti x, ψ a pomocí nich pak zdvihové funkce \dot{x} a $\dot{\psi}$.

Ke stanovení zdvihové závislosti x je využita trigonometrická metoda, která operuje se základními goniometrickými funkcemi. Jestliže jsou trojúhelníky ABQ a BCQ na Obr.2.4 pravoúhlé, potom je x určena jako

$$x = (r + l) - (r \cos \varphi + l \cos \psi), \quad (2.1)$$

kde $\psi = \psi(\varphi)$. Pro určení $\cos \psi$, slouží následující rovnost ze zmíněných pravoúhlých trojúhelníků ABQ a BCQ

$$r \sin \varphi = l \sin \psi. \quad (2.2)$$

Vyjádřením $\sin \psi$ z předchozí rovnice lze psát

$$\sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi. \quad (2.3)$$

Úpravou rovnice (2.3) je dán vztah pro zdvihovou závislost

$$\psi = \arcsin \left(\frac{r}{l} \sin \varphi \right). \quad (2.4)$$

S využitím známého výrazu, lze pro obecný úhel α psát

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (2.5)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (2.6)$$

Jestliže platí rovnost $\psi = \psi(\varphi)$, potom je po dosazení ψ za obecný úhel α do(2.6) zřejmé, že

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \varphi \right)^2}. \quad (2.7)$$

Po dosazení (2.7) do výrazu (2.1) je získán tvar pro druhou zdvihovou závislost jako

$$x(\varphi) = (r + l) - \left(r \cos \varphi + l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \varphi \right)^2} \right). \quad (2.8)$$

Pomocí zdvihových závislostí je možno derivacemi stanovit

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = p_{42}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}, \quad (2.9)$$

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = p_{32}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}, \quad (2.10)$$

kde p_{32} je převodová funkce mezi členy 2 a 3, p_{42} je převodová funkce mezi členy 2 a 4. Tyto funkce mají v případě klikového mechanismu tvar

$$p_{42}(\varphi) = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{l \sqrt{1 - \left(\frac{r \sin \varphi}{l} \right)^2}} + r \sin \varphi, \quad (2.11)$$

$$p_{32}(\varphi) = \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{r \cos \varphi}{l \sqrt{1 - \left(\frac{r \sin \varphi}{l}\right)^2}}. \quad (2.12)$$

2.2 Fyzikální souřadnice klikového mechanismu

Pro další využití jsou na klikovém mechanismu stanoveny fyzikální souřadnice. Nejprve jsou jednotlivá tělesa soustavy uvolněna z vazeb a na rám je umístěn základní nepohyblivý kartézský souřadný systém. Jsou vyznačeny referenční body představované těžišti jednotlivých členů a do nich je přiřazen lokální souřadný systém, což je vidět na Obr. 2.5. Pro každý člen je stanovena poloha těžiště v základním souřadném systému a zároveň úhel natočení lokálního souřadného systému vůči základnímu. Tyto souřadnice jsou uspořádány ve třech vektorech jako

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Výsledný polohový vektor pro klikový mechanismus sestává z dílčích vektorů výše

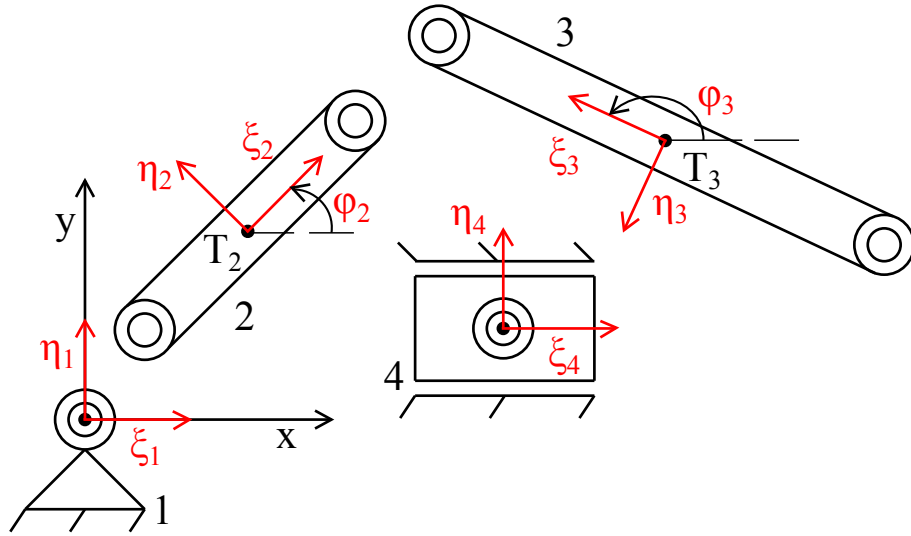
$$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_2^T, \mathbf{c}_3^T, \mathbf{c}_4^T]^T = [x_2, y_2, \varphi_2, x_3, y_3, \varphi_3, x_4, y_4, \varphi_4]^T. \quad (2.14)$$

Těchto devět souřadnic jsou proměnné. Jestliže dojde k pohybu členů, souřadnice získají rozdílné hodnoty. Samozřejmě pokud jsou zavedeny kinematické vazby, tyto proměnné již nejsou nezávislé. V následující podkapitole je ukázáno, jak popisovat kinematické vazby reprezentované rotační či posuvnou vazbou.

2.3 Rovnice popisující kinematické vazby

Vazbová rovnice je značena netučně $\Phi = 0$. Jestliže existuje více než jedna algebraická vazbová rovnice je značena tučně $\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$ a představuje vektor. Označení vazeb může obsahovat levé indexy v závorce se dvěma vstupy, jako je $^{(a,b)}\Phi$. První index a , představuje typ vazby například r pro *rotační* a t pro *posuvnou*. Druhým indexem je b , které udává počet vazbových rovnic. Jestliže je vektor zobecněných souřadnic definován jako \mathbf{c} , potom jsou pozice vazeb v obecné formě vyjádřeny jako

$$\mathbf{\Phi} \equiv \mathbf{\Phi}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$



Obrázek 2.5: Klikový mechanismus s uvolněnými členy, kterým jsou přiřazeny lokální souřadné systémy v těžištích.

V případě soustavy, která má n_b členů, obsahuje pole \mathbf{c} celkem n_b třírozměrných polí jako je

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_b} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

kde $\mathbf{c}_i = [x_i, y_i, \varphi_i]^T$ pro $i = 1, \dots, n_b$ [Nikravesh 2008].

2.3.1 Rotační vazba

Pokud je rotační vazba uvažována mezi body P_i a P_j na členech i a j , jak je vidět na Obr. 2.6, kinematická podmínka vypadá tak, že x -ová a y -ová souřadnice v základním souřadném systému jsou v těchto místech stejné, tedy $\mathbf{r}_j^P = \mathbf{r}_i^P$. Vazbové rovnice jsou potom obecně vyjádřeny jako

$${}^{(r,2)}\Phi = \mathbf{r}_j^P - \mathbf{r}_i^P = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

V maticovém zápisu má rovnice (2.17) následující tvar

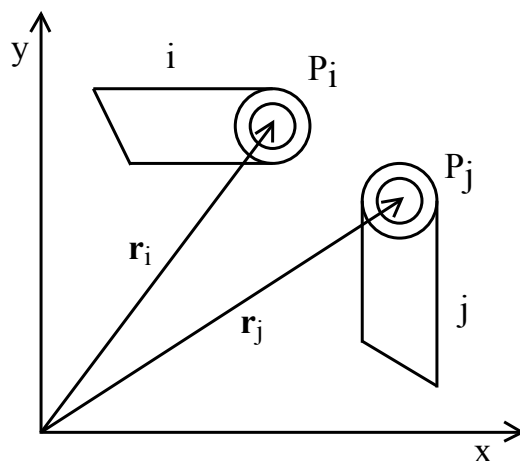
$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_j^P \\ \eta_j^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_i^P \\ \eta_i^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

kde $x_{i,j}$ a $y_{i,j}$ jsou souřadnice počátku lokálního souřadného systému vůči počátku základního souřadného systému, $\varphi_{i,j}$ a $\varphi_{i,j}$ jsou úhly mezi osami ξ a x a $\xi_{i,j}^P$ a $\eta_{i,j}^P$ jsou vzdálenosti mezi počátkem lokálního souřadného systému a zvoleným bodem P.

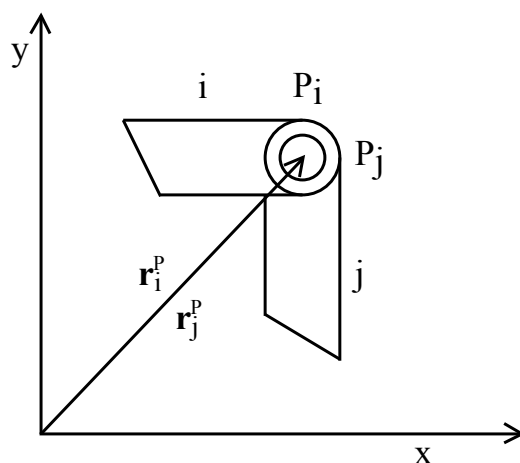
Rovnici (2.18) lze rozepsat jako

$${}^{(r,2)}\Phi = \begin{bmatrix} x_j + \xi_j^P \cos \varphi_j - \eta_j^P \sin \varphi_j - x_i - \xi_i^P \cos \varphi_i + \eta_i^P \sin \varphi_i \\ y_j + \xi_j^P \sin \varphi_j + \eta_j^P \cos \varphi_j - y_i - \xi_i^P \sin \varphi_i - \eta_i^P \cos \varphi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Splnění těchto podmínek rotační vazby mezi členy soustavy je znázorněno na Obr.2.7. Dvě omezení ve vztahu (2.17) redukují počet stupňů volnosti soustavy o dva.



Obrázek 2.6: Dvě tělesa před zavedením rotační vazby.



Obrázek 2.7: Dva členy po zavedení rotační vazby.

V případě zmíněného klikového mechanismu se rotační kinematická dvojice nachází mezi členy

- 1 a 2,
- 2 a 3,

- 3 a 4.

Pro tyto případy lze formulovat rovnice popisující kinematické vazby s využitím vztahů výše.

Rotační vazba mezi členy 1 a 2

Pro sestavení vazbové rovnice je použit vztah (2.17), kde $i = 1, j = 2$. Po dosazení má rovnice tvar

$${}^{(r,2)}\Phi = \mathbf{r}_2^P - \mathbf{r}_1^P = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

Rovnice (2.20) je rozepsána dle výrazu (2.18), kde $\varphi_i = 0, \varphi_j = \varphi$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2^P \\ \eta_2^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^P \\ \eta_1^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

Jestliže je pro případ klikového mechanismu $x_1 = 0$ a $y_1 = 0$, potom po dosazení do předchozího je získáno

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2^P \\ \eta_2^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^P \\ \eta_1^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Rotační vazba mezi členy 2 a 3

Vazbová rovnice je formulována obdobně jako v předchozím případě. Vektorový vztah je odvozen s využitím rovnice (2.17). Jestliže $i = 2$ a $j = 3$, potom

$${}^{(r,2)}\Phi = \mathbf{r}_3^P - \mathbf{r}_2^P = \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

V maticovém zápisu získá předchozí formulace s přihlédnutím ke vztahu (2.18) tvar

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_3^P \\ \eta_3^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2^P \\ \eta_2^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Rotační vazba mezi členy 3 a 4

Vektorový tvar vazbové rovnice pro tento případ, kde $i = 3$ a $j = 4$, je

$${}^{(r,2)}\Phi = \mathbf{r}_4^P - \mathbf{r}_3^P = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Bude-li vztah (2.25) rozepsán dle obecné formulace (2.18), potom

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_4 & -\sin \varphi_4 \\ \sin \varphi_4 & \cos \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_4^P \\ \eta_4^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_3^P \\ \eta_3^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Pro rotační kinematickou dvojici na členech 3 a 4 dle zvolených lokálních souřadných systémů platí, že $\varphi_4 = 0$ a zároveň $\xi_4^P = 0, \eta_4^P = 0$. Po dosazení do předchozího výrazu ho lze přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_4^P \\ \eta_4^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

2.3.2 Posuvná vazba

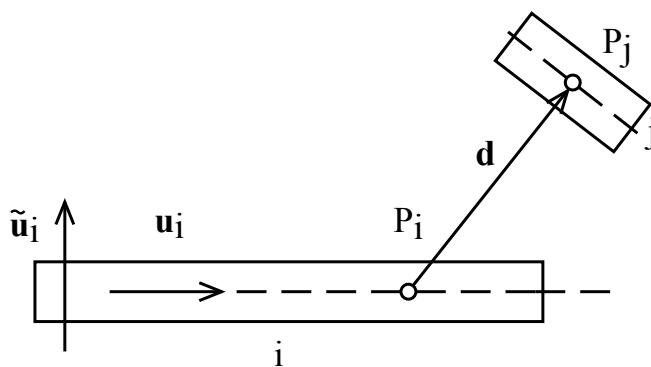
Posuvná vazba umožňuje dvěma členům vzájemný posuv podle osy vazby. Pro zkonstruování této vazby mezi členy i a j je dán bod a jednotkový vektor \mathbf{u}_i ve směru posunutí na tělese i a bod na stejné ose na členu j , jak je vidět na Obr. 2.8. Dále jsou označeny body P_i a P_j a jednotkový vektor \mathbf{u}_i . Vektor \mathbf{d} je vytvořen spojením P_i a P_j tak, že $\mathbf{d} = \mathbf{r}_j^P - \mathbf{r}_i^P$. Nutné a postačující podmínky pro dvě tělesa pro nerotační vztah k jinému členu a také pro vektory \mathbf{u}_i a \mathbf{d} jsou

$${}^{(r,2)}\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_j - \varphi_i - {}^c\varphi \\ (\tilde{\mathbf{u}}_i^P)^T \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

kde ${}^c\varphi$ je konstantní úhel mezi osami ξ_j a ξ_i a $(\tilde{\mathbf{u}}_i^P)^T$ představuje transpozici jednotkového vektoru kolmého na původní vektor \mathbf{u}_i . Rovnice (2.28) může být vyjádřena pomocí x -ových a y -ových složek vektorů jako

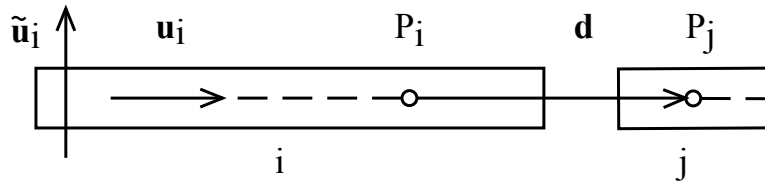
$${}^{(r,2)}\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_j - \varphi_i - {}^c\varphi \\ -u_{i(y)}d_x + u_{i(x)}d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Pokud jsou tyto podmínky splněny, posuvná vazba je umístěna mezi dva členy soustavy, jak je ukázáno na Obr. 2.9.



Obrázek 2.8: Dva členy před splněním posuvné vazby mezi nimi.

Posuvná vazba odebrává dva stupně volnosti mezi připojenými tělesy.



Obrázek 2.9: Dva členy po splnění posuvné vazby.

Posuvná vazba mezi členy 4 a 1

Posuvná kinematická dvojice se u klikového mechanismu s jedním stupněm volnosti nachází mezi tělesy 4 a 1.

Jestliže $i = 4$ a $j = 1$, potom je možno psát

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}_j^P - \mathbf{r}_i^P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_4 \\ -y_4 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Dosazením (2.30) a transponovaného vektoru $\tilde{\mathbf{u}}_i^P = [0, 1]^T$ do (2.28) a za předpokladu, že $\varphi_4 = \varphi_4, \varphi_1 = 0$ a ${}^c\varphi = 0$, má vazbová rovnice tvar

$${}^{(r,2)}\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_4 \\ -y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Kapitola 3

Pohybové rovnice vázaných mechanických systémů

Dynamika vázaných mechanických systémů zkoumá pohyb s ohledem na působící silové účinky. Dává tedy odpověď na otázku v jaké poloze a s jakou rychlostí se daná soustava těles nachází v určitém čase.

Dle zadaných silových účinků jsou rozlišovány dva základní typy úloh řešení dynamiky soustav těles:

1. **Úloha kinetostatiky** - Je předepsán pohyb pro tolik členů soustavy, kolik má sama stupňů volnosti. Cílem je nalézt přídavné silové účinky pro zajištění předepsaného pohybu. Tento postup vede k sestavení soustavy algebraických rovnic.
2. **Úloha vlastní dynamiky** - Jsou předepsány všechny zátěžné akční silové účinky. Úkolem je řešení pohybu těles soustavy určeného zadaným zatížením. To vede na sestavení vlastní pohybové rovnice soustavy, která je obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu (v případě soustavy s jedním stupněm volnosti).

Pro řešení dynamiky soustav těles na základě vektorové dynamiky jsou využívány dvě metody. První je *metoda uvolňování*, jenž je obecnější. Je vhodná pro soustavy s jakýmkoliv počtem stupňů volnosti a i pro úlohy se třením. Je volena též pro problémy, ve kterých je klíčová znalost reakcí v KD. Druhou v pořadí je *metoda redukce*. Nepracuje s reakcemi ve vazbách a pasivními účinky, a proto se nehodí pro řešení úloh se třením. Je zcela striktně určena pro soustavy s jedním stupněm volnosti, tzv. mechanismy. Vede přímo k sestavení vlastní pohybové rovnice soustavy vázaných mechanických systémů.

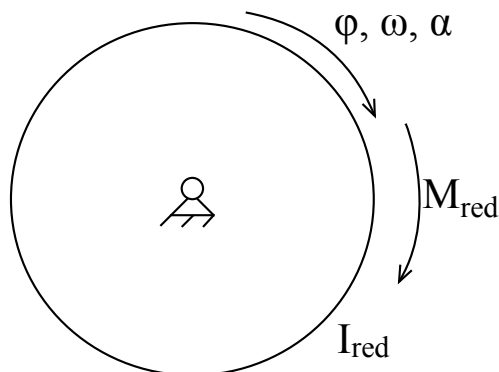
3.1 Metoda redukce

Princip metody spočívá ve volbě jednoho členu soustavy (zpravidla hnacího členu řešeného mechanismu) za tzv. *redukční člen*. Tento člen může konat rotační nebo posuvný pohyb a jsou na něj redukovány všechny hmotnostní parametry soustavy srovnáním kinetických

energií jednotlivých členů. Dále jsou na něj redukovány akční, tedy pracovní, silové účinky působící na soustavu srovnáním jejich výkonů.

3.1.1 Redukce na rotační člen

Za redukováný hmotový parametr je v případě rotace redukčního členu zvolen *redukováný moment setrvačnosti* I_{red} , jak je znázorněno na Obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Redukční člen, na který je redukována celá soustava.

Bilance kinetické energie E_k má pro rotační člen redukčního členu tvar

$$\frac{1}{2}I_{red}(\varphi)\dot{\varphi}^2 = \sum_i E_{ki}(\varphi, \ddot{\varphi}) = E_k(\varphi, \ddot{\varphi}), \quad (3.1)$$

kde i prochází všechny pohybující se členy soustavy. Pro rotační pohyb má kinetická energie tvar

$$E_k = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2. \quad (3.2)$$

A pro posuvný pohyb tělesa nechť platí

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (3.3)$$

Koná-li člen obecný rovinný pohyb při rozkladu ve středu hmotnosti, je třeba uplatnit Königovu větu

$$E_k = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}I_S\dot{\varphi}^2, \quad (3.4)$$

kde I_S je moment setrvačnosti. Jestliže je rozklad pohybu v těžišti problémový, je možné těleso nahradit v určených místech dvěma hmotnými body označenými jako m_A a m_B a korekčním momentem setrvačnosti I_{kor} . Kinetická energie tělesa má pak tvar

$$E_k = \frac{1}{2}(m_A v_A^2 + m_B v_B^2 + I_{kor} \dot{\varphi}^2), \quad (3.5)$$

kde v_A, v_B jsou rychlosti pohybu hmotných bodů v místech A, B .

Za redukovaný silový parametr je v tomto případě zvolen *redukovaný moment* M_{red} . Bilance výkonů P_j pracovních sil je tedy vyjádřena jako

$$M_{red}(t, \varphi, \dot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi} = \sum_j P_j = P, \quad (3.6)$$

kde je sčítáno přes všechny akční silové účinky.

Jestliže je aplikována věta o změně kinetické energie mezi obecnou a počáteční polohou soustavy, platí rovnice

$$E_k - E_{k_0} = W, \quad (3.7)$$

kde W je práce všech pracovních statických účinků, E_k je kinetická energie na konci pohybu a E_{k_0} je kinetická energie na začátku pohybu. Po provedení časové derivace rovnice (3.7), kde E_{k_0} je konstanta, lze získat

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dE_k}{dt} = P. \quad (3.8)$$

Dosazením z (3.1) a (3.6) je dán (pro obecné I_{red} závislé na poloze φ soustavy) obecný tvar pohybové rovnice soustavy

$$\frac{1}{2} \frac{dI_{red}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \dot{\varphi}^2 + I_{red} \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = M_{red} \dot{\varphi}. \quad (3.9)$$

Zkrácením celé předchozí rovnice o člen $\dot{\varphi}$ je možné vztah ještě upravit

$$\frac{1}{2} \frac{dI_{red}}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 + I_{red} \ddot{\varphi} = M_{red}. \quad (3.10)$$

3.1.2 Metoda redukce pro klikový mechanismus

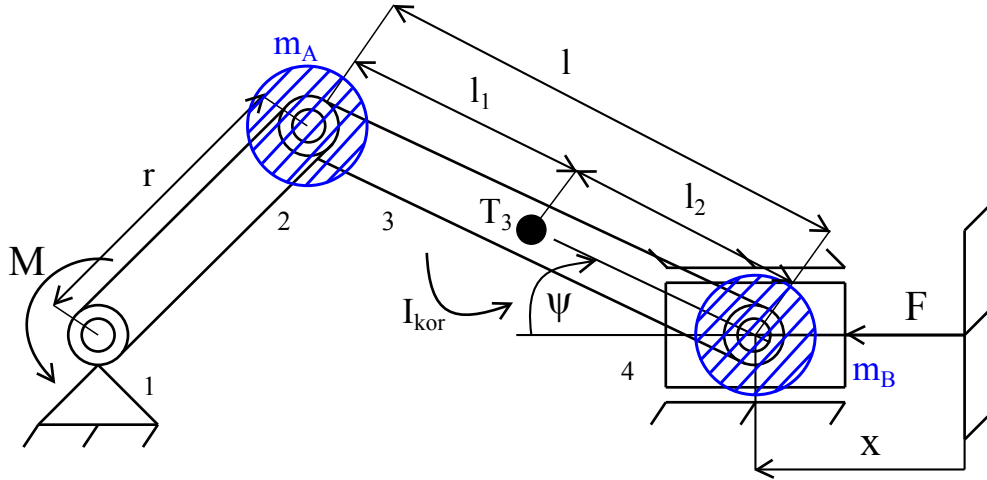
Klika (člen 2) koná rotační pohyb a je zvolena za redukční člen celé soustavy.

Těleso 3, tedy ojnice, koná obecný rovinný pohyb. Tento člen je proto uvažován jako dva hmotné body m_A, m_B v místech A, B , jak je vidět na Obr. 3.2. Bod m_A se pohybuje po kružnici na rameni r a bod m_B koná posuvný pohyb se členem 4.

Jestliže je celá hmotnost tělesa 3 rozdělena, žádná hmota se nesmí ztratit. Musí tedy platit

$$m_3 = m_A + m_B. \quad (3.11)$$

Zároveň musí platit rovnost statických momentů vůči středisku hmotnosti pro oba hmotné body tak, že



Obrázek 3.2: Redukce členu (3) na dva hmotné body.

$$m_A l_1 = m_B l_2. \quad (3.12)$$

Dále je třeba zachovat rovnost mezi momentem setrvačnosti členu 3 vůči středu a součtu dílčích momentů od hmotných bodů spolu s korekčním momentem setrvačnosti

$$I_{S3} = m_A l_1^2 + m_B l_2^2 + I_{kor}. \quad (3.13)$$

Z předchozí rovnice je vyjádřen korekční moment jako

$$I_{kor} = I_{S3} - m_A l_1^2 - m_B l_2^2. \quad (3.14)$$

Cílem metody redukce je určení vlastní pohybové rovnice soustavy. Nejprve je tedy provedena bilance kinetické energie pro celou soustavu

$$E_k = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_A (r \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} m_4 (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} I_{kor} \dot{\psi}^2 \quad (3.15)$$

Dosazením za (3.1) do (3.15) nabývá rovnice pro bilanci kinetické energie tvar

$$\frac{1}{2} I_{red}(\varphi) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_A (r \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} m_4 (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} I_{kor} \dot{\psi}^2. \quad (3.16)$$

Dalšími úpravami získá předchozí rovnice podobu

$$I_{red}(\varphi) = I_2 + m_A r^2 + m_B p_{42}^2(\varphi) + m_4 p_{42}^2 + I_{kor} p_{32}^2. \quad (3.17)$$

Pro sestavení pohybové rovnice je třeba určit také derivaci redukovaného momentu setrvačnosti dle zobecněné souřadnice jako

$$\frac{dI_{red}(\varphi)}{d\varphi} = \underbrace{\frac{dI_2}{d\varphi}}_{=0} + m_A \underbrace{\frac{dr^2}{d\varphi}}_{=0} + m_B \frac{dp_{42}^2(\varphi)}{d\varphi} + m_4 \frac{dp_{42}^2(\varphi)}{d\varphi} + I_{kor} \frac{dp_{32}^2(\varphi)}{d\varphi}, \quad (3.18)$$

kde $\frac{dr^2}{d\varphi} = 0$, $\frac{dr^2}{d\varphi} = 0$, neboť nejsou závislé na parametru φ a derivace konstanty je rovna nule. Po úpravě je patrné, že

$$\frac{dI_{red}(\varphi)}{d\varphi} = 2m_B p_{42}(\varphi) \frac{dp_{42}(\varphi)}{d\varphi} + 2m_4 p_{42}(\varphi) \frac{dp_{42}(\varphi)}{d\varphi} + 2I_{kor} dp_{32}(\varphi) \frac{dp_{32}(\varphi)}{d\varphi}. \quad (3.19)$$

S přihlédnutím k obecnému vyjádření bilance výkonů (3.6) je určen redukovaný moment mechanismu

$$M_{red}(\varphi)\dot{\varphi} = M\dot{\varphi} + F\dot{x}, \quad (3.20)$$

$$M_{red}(\varphi)\dot{\varphi} = M\dot{\varphi} + Fp_{42}(\varphi)\dot{\varphi}. \quad (3.21)$$

Rovnici výše je možné ještě dále upravit tak, že

$$M_{red}(\varphi) = M + Fp_{42}(\varphi). \quad (3.22)$$

Po dosazení vztahů (3.17), (3.19), (3.22) do obecného předpisu pro pohybovou rovnici soustavy (3.10) je možno psát

$$\begin{aligned} & [I_2 + m_A r^2 + m_B p_{42}^2(\varphi) + m_4 p_{42}^2(\varphi) + I_{kor} p_{32}^2(\varphi)] \ddot{\varphi} + \\ & + \left[2m_B p_{42}(\varphi) \frac{dp_{42}(\varphi)}{d\varphi} + 2m_4 p_{42}(\varphi) \frac{dp_{42}(\varphi)}{d\varphi} + \right. \\ & \left. + 2I_{kor} dp_{32}(\varphi) \frac{dp_{32}(\varphi)}{d\varphi} \right] \dot{\varphi}^2 = M + Fp_{42}(\varphi). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Po úpravách je tedy výsledná vlastní pohybová rovnice klikového mechanismu přepsána do podoby

$$\begin{aligned} & [I_2 + m_A r^2 + m_B p_{42}^2(\varphi) + m_4 p_{42}^2(\varphi) + I_{kor} p_{32}^2(\varphi)] \ddot{\varphi} + \\ & + \left[2p_{42}(\varphi) \frac{dp_{42}(\varphi)}{d\varphi} (m_B + m_4) + 2I_{kor} dp_{32}(\varphi) \frac{dp_{32}(\varphi)}{d\varphi} \right] \dot{\varphi}^2 = M + Fp_{42}(\varphi). \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2 Matematický model vázané soustavy těles

Fyzikální souřadnice zavedené v předchozí kapitole je možné s výhodou využít pro sestavení pohybových rovnic soustavy v obecnějších případech než u metody redukce.

S využitím rovnice (2.15) lze obecně psát pro vektor vazeb klikového mechanismu

$$\Phi(\mathbf{c}) = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7, \phi_8]^T = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

Po dosazení (2.20), (2.23), (2.25), (2.31) do vztahu výše je patrné, že

$$\Phi(\mathbf{c}) = \begin{bmatrix} x_2 + \xi_2^P \cos \varphi_2 - \eta_2^P \sin \varphi_2 \\ y_2 + \xi_2^P \sin \varphi_2 + \eta_2^P \cos \varphi_2 \\ x_3 + \xi_3^P \cos \varphi_3 - \eta_3^P \sin \varphi_3 - x_2 - \xi_2^P \cos \varphi_2 + \eta_2^P \sin \varphi_2 \\ y_3 + \xi_3^P \sin \varphi_3 + \eta_3^P \cos \varphi_3 - y_2 - \xi_2^P \sin \varphi_2 - \eta_2^P \cos \varphi_2 \\ x_4 - x_3 - \xi_3^P \cos \varphi_3 + \eta_3^P \sin \varphi_3 \\ -y_3 - \xi_3^P \sin \varphi_3 - \eta_3^P \cos \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ -y_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.26)$$

Matematický model vázané soustavy těles je popsán s využitím vztahu pro pohybovou rovnici [Nikravesh 2008]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{h} + \mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (3.27)$$

kde \mathbf{M} je diagonální matice hmotnosti, $\ddot{\mathbf{c}}$ je vektor zrychlení, \mathbf{h} je vektor sil a momentů působící na soustavu, \mathbf{D}^T je transponovaná Jacobiho matice vazeb a $\boldsymbol{\lambda}$ je vektor Lagrangeových multiplikátorů. Vektor zrychlení společně s vektorem Lagrangeových multiplikátorů představují neznámé v rovnici výše. Jak bude dále ukázáno, soustava rovnic (3.27) je nedourčená.

Matice \mathbf{M} má na diagonále dílčí matice hmotnosti jednotlivých členů tak, že pro klikový mechanismus platí

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_4 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Dílčí matice \mathbf{M}_i je pro $i = 2, 3, 4$ sestavena jako

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & I_i \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

kde m_i je hmotnost každého členu a I_i je moment setrvačnosti.

Nechť neznámý vektor $\ddot{\mathbf{c}}$ je

$$\ddot{\mathbf{c}} = [\ddot{x}_2, \ddot{y}_2, \ddot{\varphi}_2, \ddot{x}_3, \ddot{y}_3, \ddot{\varphi}_3, \ddot{x}_4, \ddot{y}_4, \ddot{\varphi}_4]^T. \quad (3.30)$$

Vektor působících sil a momentů \mathbf{h} sestává z dílčích vektorů \mathbf{h}_i pro každý člen, kde $i = 2, 3, 4$. Každý dílčí vektor bude sestaven jako

$$\mathbf{h}_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_i \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

kde F_{ix} , F_{iy} jsou složky sil ve směrech os x, y a M_i je moment, který působí na daný člen.

Jacobiho matice vazeb představuje parciální derivaci vektoru vazeb ze vztahu (3.25) podle celkového polohového vektoru uvedeného v rovnici (2.14). Lze tedy psát

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_4} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_4} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi_4} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_4} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_4} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \varphi_4} \\ \frac{\partial \phi_4}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_4}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_4}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \phi_4}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_4}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_4}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial \phi_4}{\partial x_4} & \frac{\partial \phi_4}{\partial y_4} & \frac{\partial \phi_4}{\partial \varphi_4} \\ \frac{\partial \phi_5}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_5}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_5}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \phi_5}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_5}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_5}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial \phi_5}{\partial x_4} & \frac{\partial \phi_5}{\partial y_4} & \frac{\partial \phi_5}{\partial \varphi_4} \\ \frac{\partial \phi_6}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_6}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_6}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \phi_6}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_6}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_6}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial \phi_6}{\partial x_4} & \frac{\partial \phi_6}{\partial y_4} & \frac{\partial \phi_6}{\partial \varphi_4} \\ \frac{\partial \phi_7}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_7}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_7}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \phi_7}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_7}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_7}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial \phi_7}{\partial x_4} & \frac{\partial \phi_7}{\partial y_4} & \frac{\partial \phi_7}{\partial \varphi_4} \\ \frac{\partial \phi_8}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_8}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_8}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \phi_8}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_8}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_8}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial \phi_8}{\partial x_4} & \frac{\partial \phi_8}{\partial y_4} & \frac{\partial \phi_8}{\partial \varphi_4} \\ \frac{\partial \phi_9}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_9}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_9}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \phi_9}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_9}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_9}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial \phi_9}{\partial x_4} & \frac{\partial \phi_9}{\partial y_4} & \frac{\partial \phi_9}{\partial \varphi_4} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Po dosazení vazbových rovnic (2.22), (2.24), (2.27), (2.29) pro klikový mechanismus, lze Jacobiho matici rozepsat jako

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\xi_2^P \sin \varphi_2 - \eta_2^P \cos \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi_2^P \cos \varphi_2 - \eta_2^P \sin \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \xi_2^P \sin \varphi_2 + \eta_2^P \cos \varphi_2 & 1 & 0 & -\xi_3^P \sin \varphi_3 - \eta_3^P \cos \varphi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\xi_2^P \cos \varphi_2 + \eta_2^P \sin \varphi_2 & 0 & 1 & \xi_3^P \cos \varphi_3 - \eta_3^P \sin \varphi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \xi_3^P \sin \varphi_3 + \eta_3^P \cos \varphi_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\xi_3^P \cos \varphi_3 + \eta_3^P \sin \varphi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Nechť vektor neznámých Lagrangeových multiplikátorů je

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8]^T. \quad (3.34)$$

Vztah (3.27) představuje soustavu devíti diferenciálních rovnic, do níž vstupuje celkem sedmnáct neznámých. Jak již bylo zmíněno, tato soustava je nedourčená, tzn. obsahuje méně rovnic než je počet neznámých. Pro doplnění soustavy diferenciálních rovnic bude využit vztah (3.25) resp. jeho druhá derivace získaná tak, že

$$\dot{\Phi} = D\dot{c} = 0, \quad (3.35)$$

$$\ddot{\Phi} = \dot{D}\dot{c}^2 + D\ddot{c} = 0. \quad (3.36)$$

Časová derivace matice D je

$$\dot{D} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial c} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\xi_2^P \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \eta_2^P \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^P \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 - \eta_2^P \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2^P \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - \eta_2^P \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 & 0 & 0 & -\xi_3^P \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 + \eta_3^P \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2^P \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \eta_2^P \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 & 0 & 0 & -\xi_3^P \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 + \eta_3^P \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_3^P \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 - \eta_3^P \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_3^P \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 + \eta_3^P \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Soustava rovnic (3.27), (3.36) reprezentuje vázaný mechanický systém. Do rovnic vstupují vektory neznámých zrychlení \ddot{c} a Lagrangeových multiplikátorů λ . Vztah (3.27) lze zapsat po doplnění ve tvaru

$$\begin{bmatrix} M & -D^T \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{c} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

kde je označeno $\gamma = -\dot{D}\dot{c}^2$.

Model vázaného mechanického systému (3.38) má formu soustavy nelineární algebraicko-diferenciálních rovnic a z toho je zřejmé, že je třeba ho řešit pomocí různých numerických metod, které lze najít ve specializovaných monografiích, např. [Nikravesh 2008], [Shabana 2001].

Výše popsáný přístup k odvození pohybové rovnice vázaných soustav těles je základem metod implementovaných v systému MSC.ADAMS (viz dále).

3.3 MSC.ADAMS

Další možností pro řešení úloh dynamiky vázaných mechanických systémů je software MSC.ADAMS (Automatic Dynamic Analysis of Mechanical System). Tento program vyvíjela 25 let firma Mechanical Dynamics, Inc. a od roku 2002 patří do portfolia produktů firmy MSC.Software, Inc.

Tento program představuje technologii modelování a simulace vázaných mechanických soustav. Má interaktivní prostředí na automatizovanou statickou, dynamickou a kinematickou analýzu parametrizovaných mechanických systémů stiff a nonstiff problémů s geometrickými či silovými vazbami, na které působí gravitační, setrvačné, třecí, aerodynamické, hydrodynamické, elektromechanické a experimentálně určené síly. V současnosti pokrývá MSC.ADAMS zhruba 50% světového trhu ve své oblasti.

Pro práci je většinou využit preprocesor MSC.ADAMS/View, který zpravidla funguje ve spojení s modulem MSC.ADAMS/Solver. Tento modul představuje řešič ADAMSu a může pracovat i samostatně, kdy je uživatelem zadáván soubor příkazů v textovém režimu. Na základě vstupů řešič sestavuje matematický model mechanického systému a řeší soustavu nelineárních algebraických a diferenciálních rovnic. Takový postup však neumožňuje přímou vizualizaci modelu a výsledků.

Výhodnější je tedy využití grafického modulu View, s jehož pomocí lze vytvořit model ve virtuálním prostředí. Pro vyhodnocení slouží MSC.ADAMS/PostProcessor. Jeho předností je snadná simulace pohybu daného modelu a také analýza různých variant konstrukčního tvaru až k nalezení toho optimálního.

3.3.1 Tvorba modelu v prostředí MSC.ADAMS

Mechanické soustavy lze v modulu View modelovat jako soubor dílčích stiff nebo nonstiff problémů. Jednotlivá tělesa jsou vzájemně spojena vazbami (rotační, posuvná, sférická a další). Tělesům jsou dále přiřazeny hmotové vlastnosti reálné soustavy jako hmotnost, poloha středů hmotnosti a momenty setrvačnosti. Vazbám či zmíněným tělesům lze rovněž předepsat určitý pohyb v závislosti na čase. Model je zpravidla ještě doplněn o silové účinky ve smyslu sil nebo momentů.

Na základě působení silových účinků je sestavený model podrobován statické, kinematické nebo dynamické analýze. Výstupem simulace je chování vázané soustavy těles v určitém čase.

Průběh práce lze rozdělit do tří fází:

1. tvorba modelu
2. transformace modelu do jeho matematické formy
3. řešení matematického modelu
4. vyhodnocení výsledků

Uživatel může ovlivnit jen fázi první. Zbylé dvě fáze probíhají automaticky na základě uživatelem zvolených parametrů jako jsou časové rozpětí simulace, počet kroků výpočtu, typ analýzy pohybu apod. [Blekta 2005].

3.4 Model klikového mechanismu

Pro sestavení geometrického modelu klikového hřídele, který je následně podroben dynamické analýze v programu MSC.ADAMS je použit CAD systém NX.7.5. Jednotlivá tělesa soustavy (klika, ojnice a píst) zobrazená na Obr. 3.3, 3.4, 3.5 jsou v CAD systému kreslena zvlášť a po částech importována do prostředí MSC.ADAMS/View, kde jsou spojena příslušnými kinematickými vazbami. Po spojení těles vazbami a spojení kliky s rámem je píst zatížen silou F a na kliku je předepsán točivý moment M . Celé soustavě je přiřazena jako materiál ocel o hustotě $7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Poté je geometrický model z Obr. 3.6 připravený pro samotnou dynamickou analýzu.

Pro další využití jsou z geometrického modelu v MSC.ADAMS zjištěny hodnoty vstupující do metody redukce, se kterými se dále pracuje. Hmotnost kliky je $m_2=8,9459574505 \text{ kg}$, hmotnost ojnice je $m_3 = 4,3069062051 \text{ kg}$ a hmotnost pístu je $m_4 = 5,2269229374 \text{ kg}$. Dalšími důležitými veličinami jsou rozměry $l_1=0,07939460165 \text{ m}$, $l_2=0,1006053983 \text{ m}$ a $r=0,046 \text{ m}$. Pro určení hmotností bodů m_A, m_B je využit vztah (3.11) tak, že je vyjádřena hmotnost m_B jako

$$m_B = m_3 - m_A. \quad (3.39)$$

Jestliže je dosazen výraz (3.39) do (3.12), pak platí

$$m_A l_1 = (m_3 - m_A) l_2. \quad (3.40)$$

Po vyjádření a dosazení konkrétních hodnot je patrné, že

$$m_A = \frac{m_3 l_2}{l_1 + l_2} = 2,407211190695486 \text{ kg}. \quad (3.41)$$

Je-li dosazen vztah (3.41) do (3.39), lze psát

$$m_B = m_3 - \frac{m_3 l_2}{l_1 + l_2} = 1,89969501440514 \text{ kg}. \quad (3.42)$$

Dále je zjištěn moment setrvačnosti kliky vzhledem k ose rotace tělesa jako $I_{S_2} = 0,1619745319 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Tento údaj je však stanoven vůči středisku hmotnosti členu, proto je třeba určit moment setrvačnosti vůči kinematické dvojici mezi klikou a rámem. K výpočtu je použita Steinerova věta

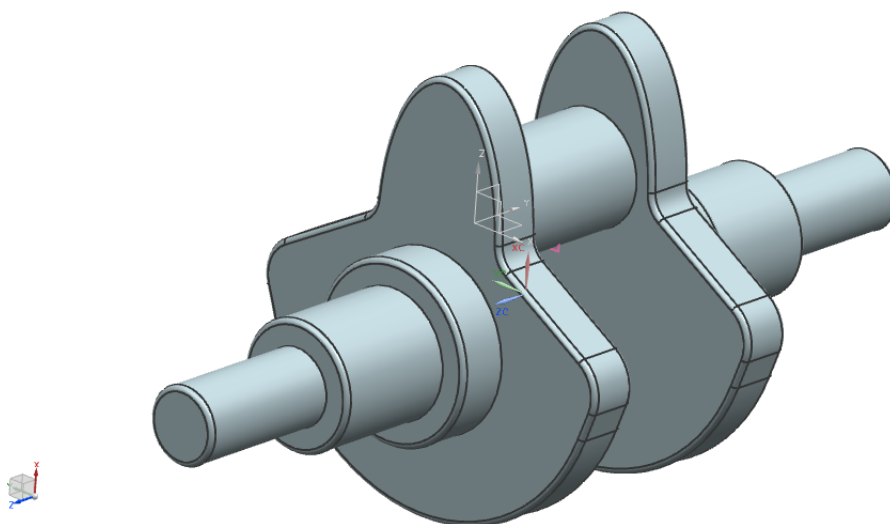
$$I_2 = I_{S_2} + m_2 e^2 = 0,016438481547370 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad (3.43)$$

kde $e = 0,005190636979 \text{ m}$ je excentricita.

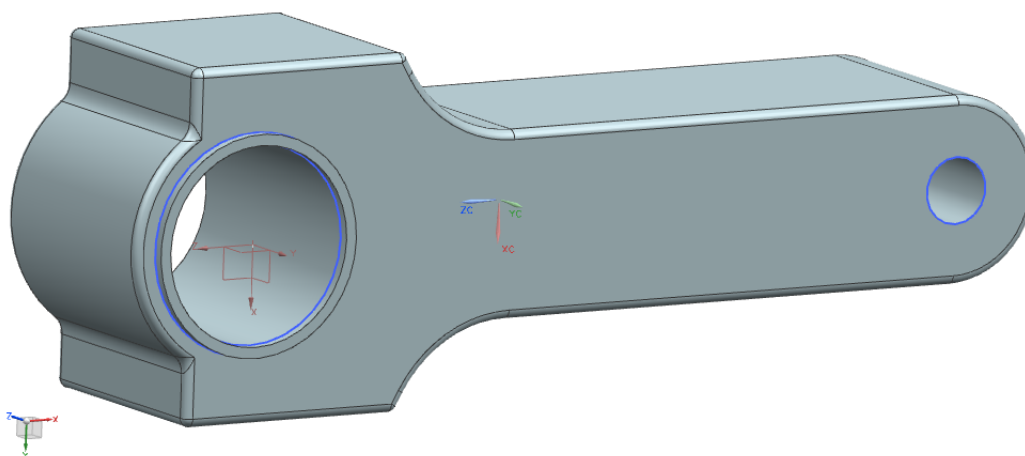
V neposlední řadě je potřeba určit korekční moment setrvačnosti z (3.14) jako

$$I_{kor} = I_{S_3} - m_A l_1^2 - m_B l_2^2 = -0,031881341820528 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad (3.44)$$

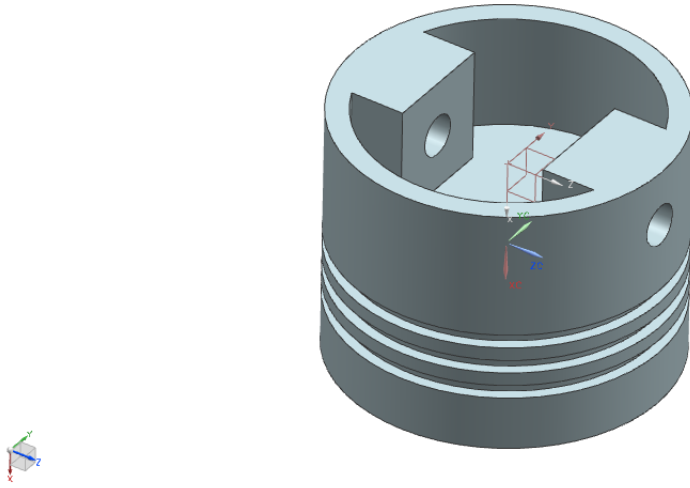
kde $I_{S_3} = 0,002520181413 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ je moment setrvačnosti ojnice vzhledem k těžišti.



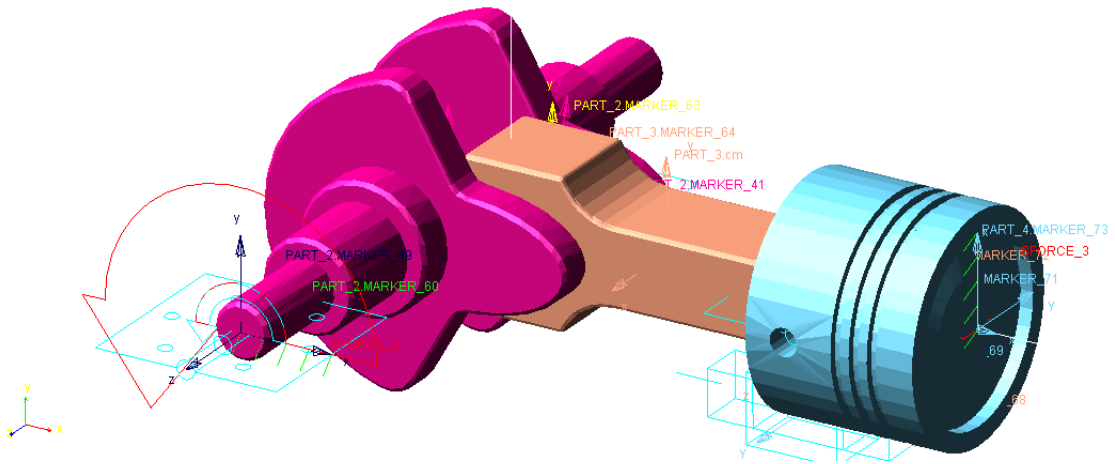
Obrázek 3.3: Geometrický model kliky kreslené v CAD systému NX 7.5 .



Obrázek 3.4: Geometrický model ojnice kreslené v CAD systému NX 7.5 .



Obrázek 3.5: Geometrický model pístu kresleného v CAD systému NX 7.5 .



Obrázek 3.6: Geometrický model klikového mechanismu v MSC.ADAMS .

Kapitola 4

Dynamická analýza pohybu

V této kapitole bude popsáno řešení dříve vyjádřených rovnic a budou srovnány výsledky získané na testovacím příkladu klikového mechanismu.

4.1 Numerické metody integrace pohybových rovnic

Numerická metoda je striktně popsanou cestou k vyřešení numerické úlohy. Popis řešení v krocích se nazývá algoritmus metody. Algoritmus je uplatněn na určení konečných výstupů matematické úlohy zformulované díky znalosti konkrétního problému. Tyto metody se běžně používají u složitějších úkolů, jejichž vyřešení nelze nalézt přímo nebo by bylo časově i finančně velmi složité

Při simulaci pohybu systémů reprezentovaných soustavou diferenciálních rovnic je využívána řada numerických metod vyvíjených od počátku minulého století. Tyto metody jsou členěny dle mnoha kritérií, nicméně největší důraz je kladen na jejich efektivitu z hlediska přesnosti a na numerickou náročnost.

Určitá míra nepřesnosti vznikající během procesu řešení se nazývá odhad chyby (v mnohých případech je tento odhad pouze myšlený, neboť přesné řešení není známo). Další nepřesnost je do algoritmu vnášena při stanovení matematického modelu.

V současnosti jsou numerické metody pevně svázány s užíváním počítačů. Díky velkému počtu metod je snadné zvolit tu nejvhodnější s ohledem na její výhody a nevýhody.

4.1.1 Metoda počátečního zrychlení

Princip metody bude demonstrován na numerickém řešení pohybové rovnice (3.10), ze které je vyjádřeno zrychlení $\ddot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi} = \frac{M_{red}(t, \varphi, \dot{\varphi})}{I_{red}(\varphi)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{dI_{red}(\varphi)}{d\varphi}}{I_{red}(\varphi)} \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (4.1)$$

Tato metoda patří mezi numerické metody, které řeší pohybové rovnice mechanických soustav na zvoleném intervalu $t \in \langle t_0, T \rangle$, kde t_0 představuje počátek numerického integrování a T je doba trvání simulace pohybu soustavy těles. Je voleno $T > 0$ a zpravidla $t_0 = 0$. Dále je volen časový krok integrace Δt , pro který platí

$$t_1 = \Delta t, t_2 = t_1 + \Delta t, \dots, t_{k+1} = t_k + \Delta t. \quad (4.2)$$

Uživatel volí počáteční podmínky jako

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad (4.3)$$

$$\dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0. \quad (4.4)$$

Z rovnice (4.1) je získána počáteční iterace

$$\ddot{\varphi}_0 = \frac{M_{red}(t_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0)}{I_{red}(\varphi_0)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{dI_{red}(\varphi_0)}{d\varphi}}{I_{red}(\varphi_0)} \cdot \dot{\varphi}_0^2. \quad (4.5)$$

Pro získání předpisu pro iteraci $\dot{\varphi}$ nechť je integrována základní rovnice kinematiky

$$\ddot{\varphi}_0 = \frac{d\dot{\varphi}}{d\tau}, \quad (4.6)$$

kde τ je obecný časový krok. Rovnice je integrována od nuly do libovolného obecného časového kroku τ a zároveň od počáteční hodnoty $\dot{\varphi}$ do obecné rychlosti $\dot{\varphi}$ jako

$$\int_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi} = \int_0^\tau \ddot{\varphi}_0 d\tau, \quad (4.7)$$

$$\dot{\varphi}(\tau) = \dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_0 \tau. \quad (4.8)$$

Jestliže platí, že $\tau = \Delta t$, potom lze rovnici (4.8) přepsat na tvar

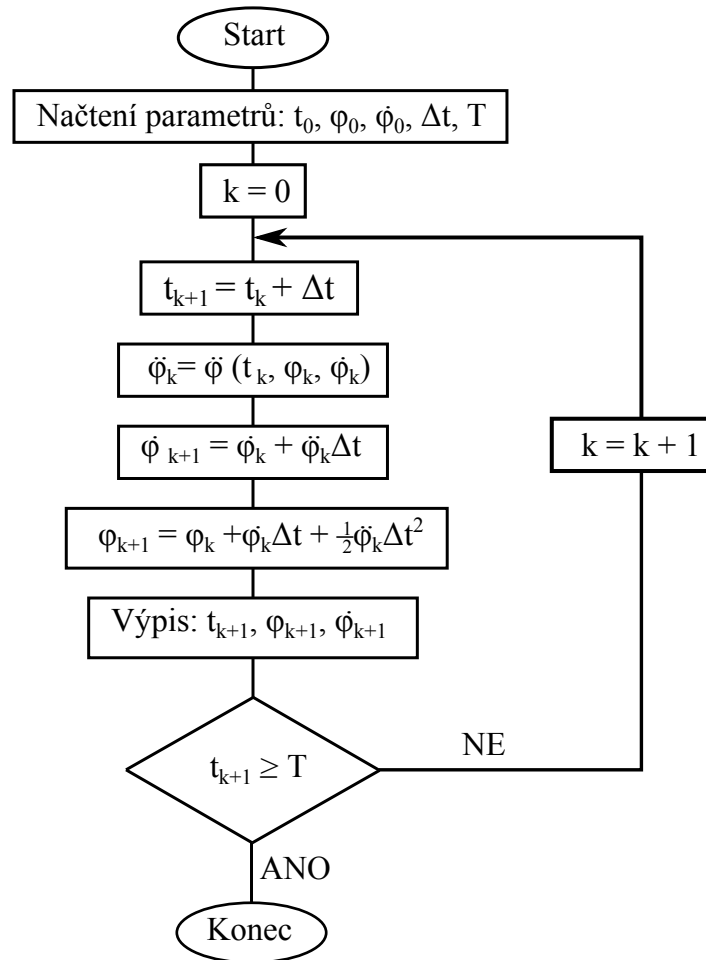
$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}_0 \Delta t. \quad (4.9)$$

Dalším nezbytným krokem je stanovení předpisu pro iteraci φ . K jeho určení je opět použita základní rovnice kinematiky, do níž je dosazeno ze vztahu (4.8)

$$\dot{\varphi}(\tau) = \dot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}_0 \tau = \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (4.10)$$

Předchozí rovnice je integrována od počátečního úhlu natočení φ_0 do obecného φ a zároveň od počátečního nulového času do libovolného časového kroku τ

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^\tau (\dot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}_0 \tau) d\tau, \quad (4.11)$$



Obrázek 4.1: Vývojový digram popisující průběh integrační metody.

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0\tau + \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_0\tau^2. \quad (4.12)$$

Bude-li opět platit, že $\tau = \Delta t$, potom je možné pro první iteraci φ psát

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0\Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_0\Delta t^2. \quad (4.13)$$

Tuto metodu lze vhodně popsat pomocí vývojového diagramu uvedeného níže na Obr. 4.1.

4.1.2 ODE45, ODE23, ODE15s, ODE23s, ODE23tb

Metody numericky řeší obyčejné diferenciální rovnice (ODR) v programovém prostředí MATLAB. Algoritmus těchto metod je implementací explicitně vyjádřených metod Runge-Kutta adaptovaných v metodě Bogacki–Shampine [MATLAB R2010a]. Každá metoda může

být díky svým specifickým vlastnostem použita pro rozličné druhy problémů. Tab. 4.1 vystihuje základní uplatnění metod využitých pro tuto práci.

Metoda	Typ problému	Míra přesnosti řešení	Využití
ode45	Nonstiff	Střední	Je nejběžnější. Doporučuje se pro prvotní použití při řešení podobných problémů.
ode23	Nonstiff	Nižší	Pro problémy s větší možností chyby a pro řešení částečně stiff problému.
ode15s	Stiff	Střední	V okamžiku, kdy ode45 je příliš pomalá, protože se jedná o stiff problém.
ode23s	Stiff	Nižší	Pro úlohy s větší mírou chyby u stiff problémů
ode23tb	Stiff	Nižší	Pro úlohy s větší mírou chyby u stiff problémů.

Tabulka 4.1: Přehled použití a vlastností metod *ode*.

Tyto metody řeší ODR 1. řádu. Vlastní pohybová rovnice stanovená pomocí metody redukce (3.24) je však ODR 2. řádu. Je potřeba ji proto převést na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu, které mají obecný tvar

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t), \quad (4.14)$$

kde t je čas z intervalu $\langle t_0, t_k \rangle$, \mathbf{y} představuje vektor počátečních podmínek a $\dot{\mathbf{y}}$ jeho derivaci. Oba vektory lze zapsat jako

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Algoritmus ode pracuje s vlastní pohybovou rovnicí (3.10), ze které je opět vyjádřeno $\ddot{\varphi}$ stejně jako v (4.1).

4.2 Srovnání integračních metod

Charakteristiky geometrického modelu klikového mechanismu zjištěné na konci předchozí kapitoly jsou použity při výpočtu jednotlivých metod. Soustava je zatížena silou $F = 15 \text{ N}$ ve směru posuvného pohybu pístu a točivým momentem $M = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ na členu 2 tedy klice.

Tento postup zajišťuje stejné vstupní parametry pro všechny integrační metody a simulaci pohybu v MSC.ADAMS.

Pro dynamickou analýzu lze v MSC.ADAMS využít různé integrátory (implementace numerických metod), které umožňují řídit do jisté míry numerickou integraci pohybových rovnic během analýzy. Integrátory se dělí do dvou základních skupin podle možnosti použití na *integrátory pro stiff problémy* a *nonstiff problémy*. Zpravidla bývají integrátory nonstiff problémů neefektivní pro řešení úloh se stiff problémy.

Integrátor *GSTIFF* je nastaven jako výchozí a je tedy nejvíce využíván. Dává uživateli svobodnou ruku ve volbě kroku integrace. Jeho předností je vysoká rychlost výpočtu a přesnost v určování posunutí. Nevýhodou bývá chyba vnášená do rychlostí a především zrychlení. Lze ji eliminovat vhodnou volbou časového kroku.

Integrátor *WSTIFF* je obdobný jako *GSTIFF*. Jeho přesnost však nezávisí na volbě kroku jak je tomu u *GSTIFF*.

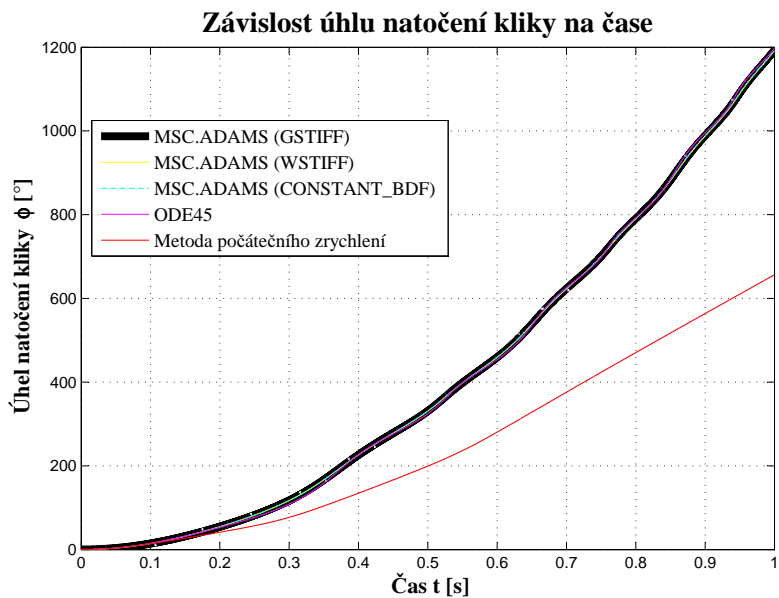
Integrátor *CONSTANT_BDF* umožňuje také volbu libovolného kroku. Pro řešení úloh stiff problémů je nejstabilnější. Není tolik citlivý na výkyvy ve zrychleních a silách jako *GSTIFF*. Jeho neotřesitelnou výhodou je, že může řešit i ty problémy, u kterých *GSTIFF* nemusí uspět. Nicméně při volbě příliš velkého časového kroku je do výpočtu vnášena značná chyba a s velmi malým krokem se simulace pohybu zpomaluje [MSC.ADAMS].

Všechny výše zmíněné metody ve výpočtovém prostředí MATLAB jsou konfrontovány s výsledky dynamické analýzy v programu MSC.ADAMS za použití tří zmíněných integrátorů. Časový interval pro výpočet je zvolen od 0 s do 1 s. Krok integrace je zvolen jako $\Delta t = 0,0001$ s. Pro metodu počátečního zrychlení je časový krok volen menší $\Delta t = 0,0000001$ s, aby byla zajištěna její větší přesnost.

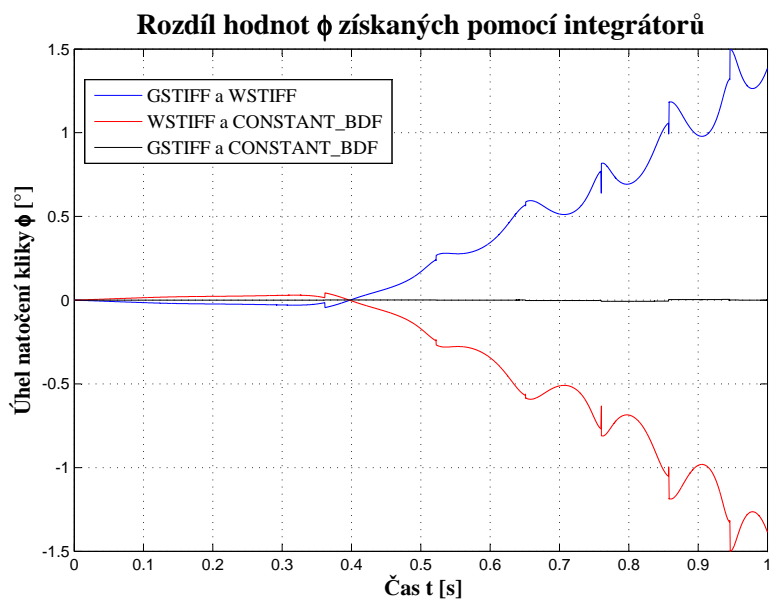
Na Obr. 4.2 je grafická závislost úhlu natočení φ kliky na čase pro tři integrátory MSC.ADAMS, metodu ODE45 a metodu počátečního zrychlení. Z grafu je vidět, že metoda počátečního zrychlení je méně přesná než výsledky získané z dynamické analýzy v MSC.ADAMS a pomocí ODE45 v prostředí MATLAB. Částečně je to i z toho důvodu, že metoda sama nepracuje se žádným vnitřním algoritmem. Na druhou stranu výsledky dosažené pomocí metody ODE45 a pomocí jiných integrátorů jsou si velice podobné.

Aby byla zjištěna odchylka mezi výsledky vypočtenými integrátory, je stanoven jejich rozdíl závislý na čase vyneseny do grafu na Obr. 4.3. Tento graf udává, že *GSTIFF* a *CONSTANT_BDF* pracují prakticky shodně, neboť jejich rozdíl je nejmenší.

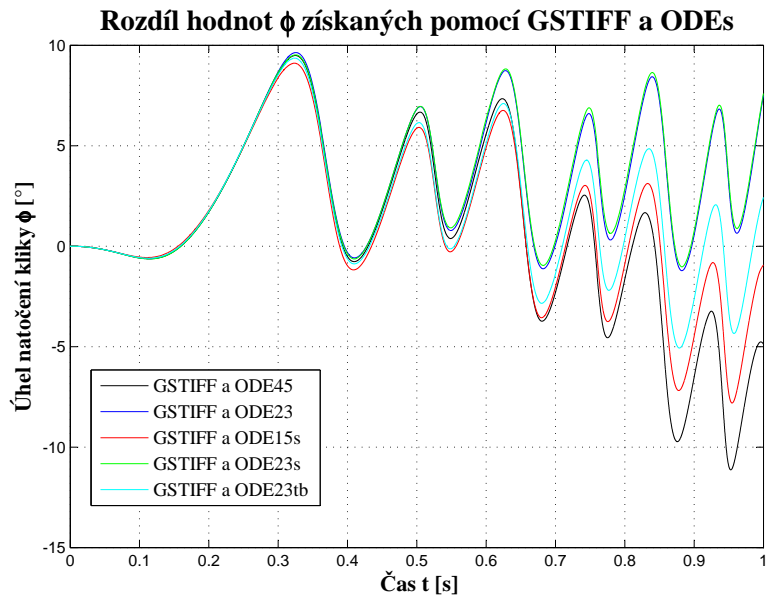
Pro stanovení odchylek mezi výsledky získanými v MSC.ADAMS dynamickou analýzou a integračními metodami v MATLABu pro úhel natočení kliky φ je na Obr. 4.4 vykreslen graf. Jako integrátor MSC.ADAMS je zde volen integrátor nastavený pro program jako výchozí tedy *GSTIFF*. Zaznamenané odchylky jsou malé hodnoty v řádech desítek.



Obrázek 4.2: Časová závislost φ s využitím integračních metod spolu s různými integrátory.



Obrázek 4.3: Odchylka φ mezi integrátory MSC.ADAMS.

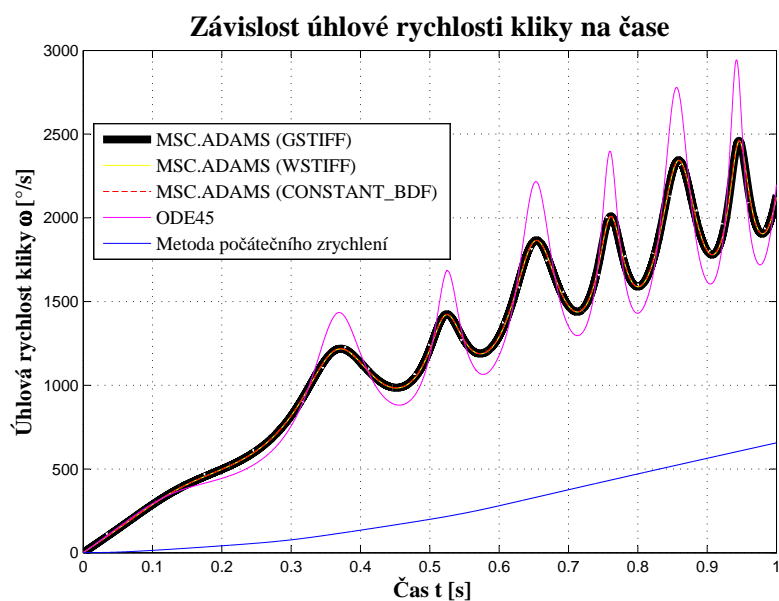


Obrázek 4.4: Odchylka φ mezi integrátorem GSTIFF a použitými ODEs.

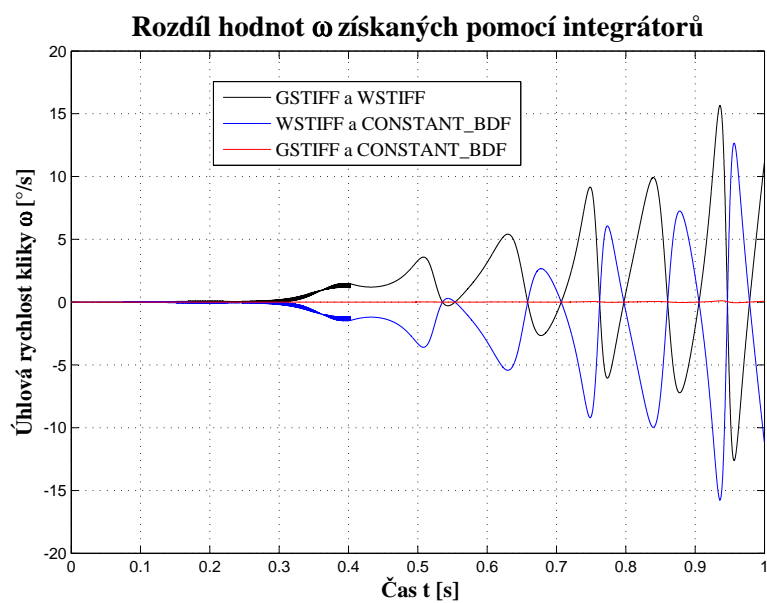
Pro závislost úhlové rychlosti ω na čase je rovněž v MATLABu vykreslen graf, který je na Obr. 4.5. Opět je patrné, že metoda počátečního zrychlení je méně přesná. Dále je vidět, že se výsledky metody ODE45 a integrátorů MSC.ADAMS liší více než tomu bylo u závislosti úhlu natočení kliky φ na čase.

Výsledky tří integrátorů jsou nicméně stále velice obdobné, proto je na Obr. 4.6 vykreslena jejich odchylka. Odchylka výsledných hodnot pro GSTIFF a CONSTANT_BDF opět osciluje v blízkosti nuly.

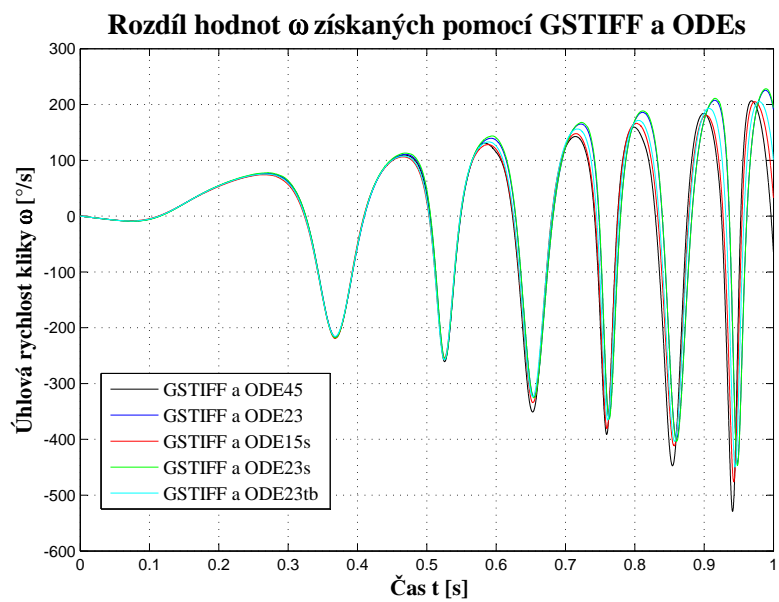
Odchylka mezi řešením získaným z MSC.ADAMS (opět pro integrátor GSTIFF) a pomocí metod ODE je zobrazena na Obr. 4.7. Pro úhlovou rychlost ω závislou na čase je amplituda výrazně vyšší než u časové závislosti úhlu natočení kliky. Tento závěr byl však předem patrný už z grafu na Obr. 4.5.



Obrázek 4.5: Časová závislost ω s využitím integračních metod spolu s různými integrátory.



Obrázek 4.6: Odchylka ω mezi integrátory MSC.ADAMS.



Obrázek 4.7: Odchylka ω mezi integrátorem GSTIFF a použitými ODEs.

Kapitola 5

Vliv konstrukčního návrhu ojnice na dynamické zatížení

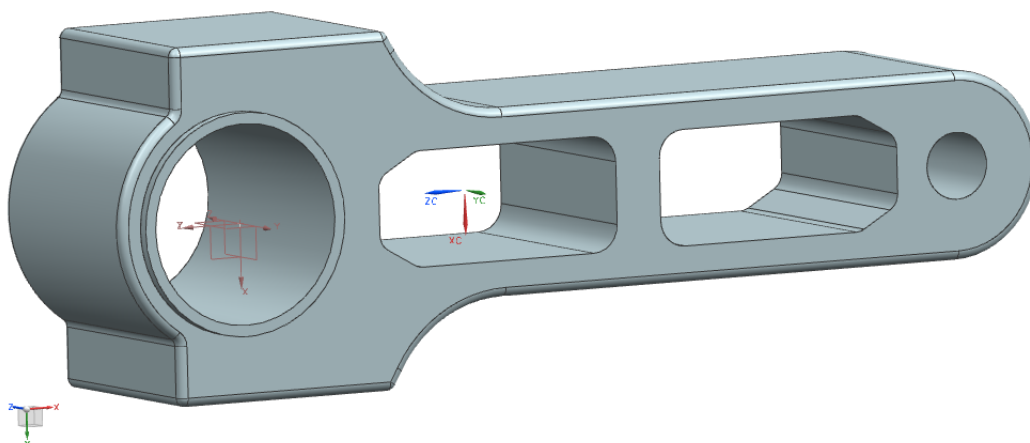
Při výrobě produktů nabízených spotřebním trhem se uplatňují studie designu. Jejich cílem je poskytnout výrobku patřičnou atraktivitu, jenž jde ruku v ruce se snahou snížit spotřebu materiálu a také usnadnit samu výrobu. Dalším cílem, ale ne méně důležitým, je získání poznatků o vlivu tvaru dílu na zatížení. Nedílnou součástí studie jsou zároveň bezpečnostní kontroly, které musí zvláště v dnešní době splňovat vysoká předepsaná kritéria.

Na nalezení optimálního tvaru tedy nepracuje pouze designer, ale také konstruktér, výpočtář a technolog. Celý tým odborníků má mnohdy na výběr z širokého spektra komerčních softwarů, které umožňují převést návrh z papíru do 3D počítačového modelu a podrobit jej příslušné analýze pohybu. To představuje značnou výhodu. Na druhou stranu je tato práce zpravidla vykonávána ve velké časové tísni, jenž chce zvýšit šanci na úspěch výrobku na trhu a podnítit tak konkurenceschopnost.

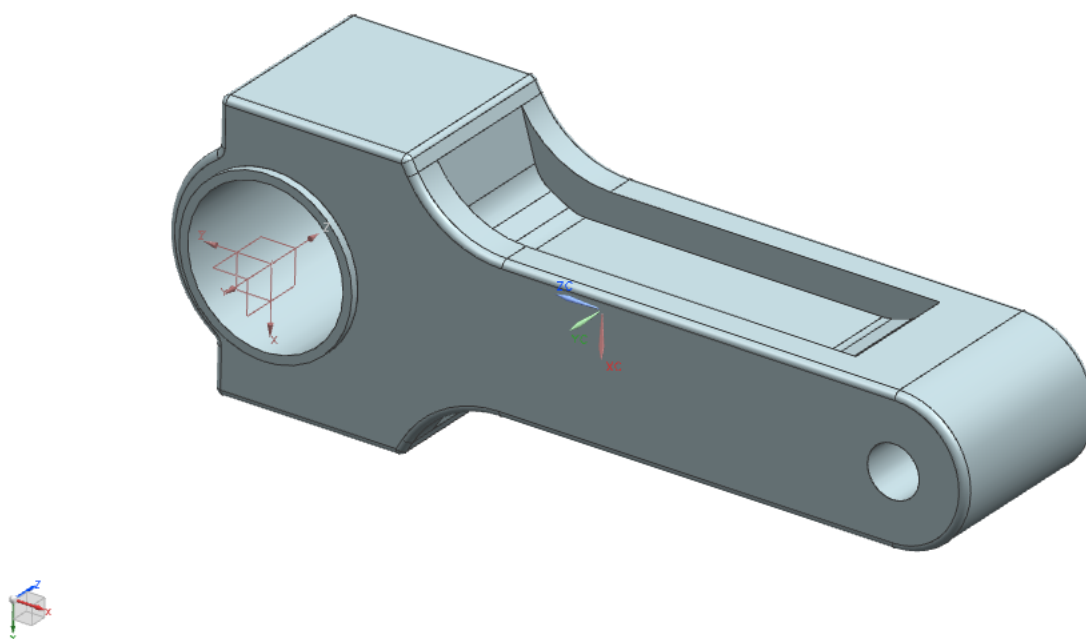
5.1 Návrhy tvaru ojnice

Jedním z cílů této práce je zkoumání, do jaké míry ovlivní tvar ojnice klikového mechanismu reakce v nejvíce zatěžovaných místech celé soustavy. Pro porovnání jsou použity rozličné návrhy ojníc o různých hmotnostech zobrazené na Obr. 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5.

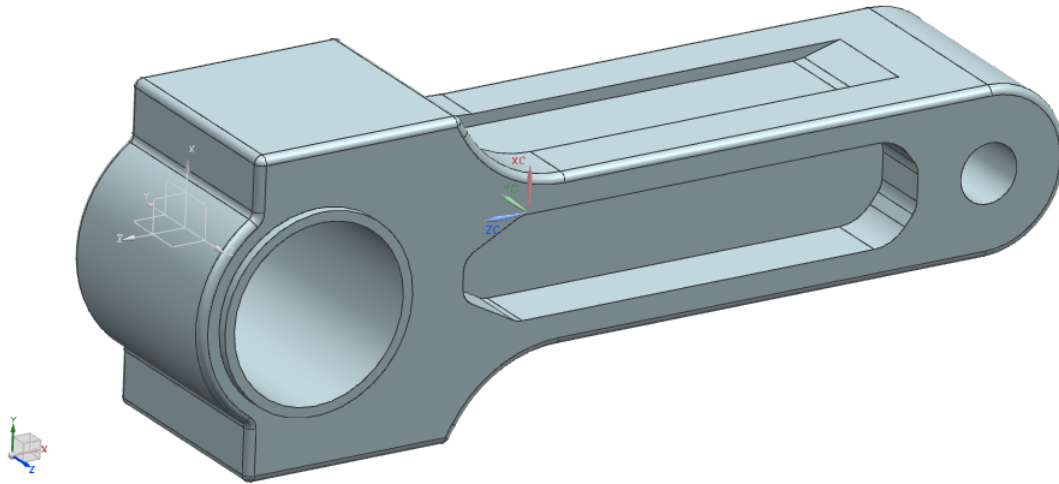
Konstrukce geometrických modelů ojníc je provedena opět v CAD systému NX 7.5 a následně jsou modely importovány do MSC.ADAMS, kde jsou spojeny s geometrickými modely kliky a ojnice.



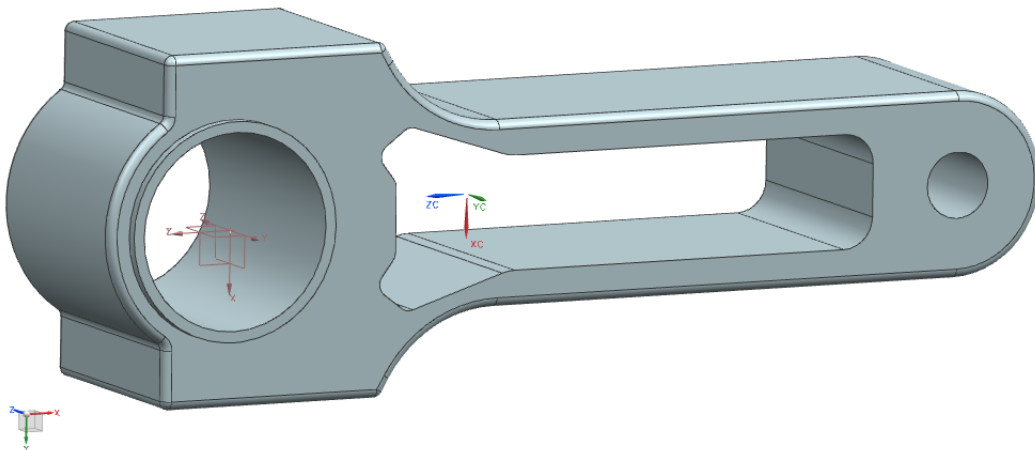
Obrázek 5.1: Návrh ojnice č. 1.



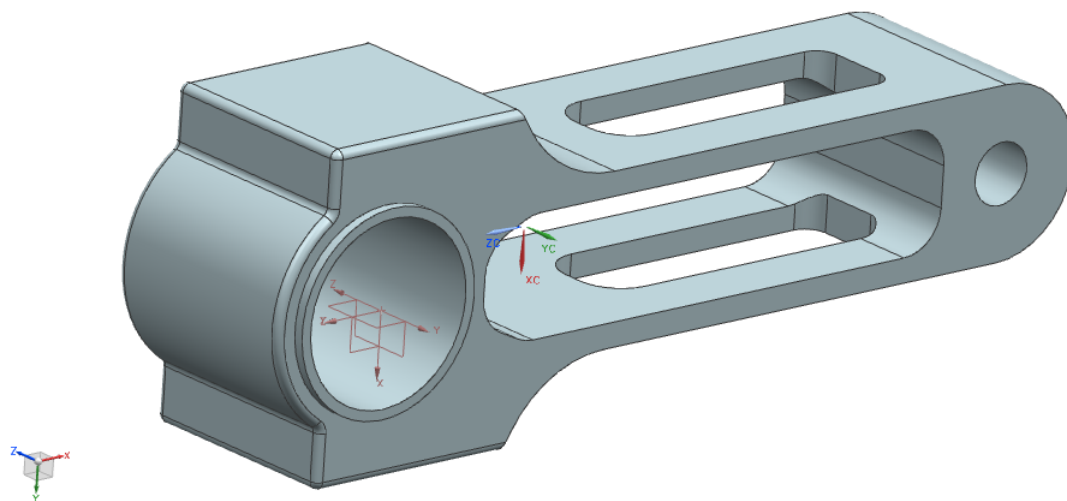
Obrázek 5.2: Návrh ojnice č. 2, který má ze všech navržených tvarů největší hmotnost.



Obrázek 5.3: Návrh ojnice č. 3.



Obrázek 5.4: Návrh ojnice č. 4.



Obrázek 5.5: Návrh ojnice č. 5, který má ze všech navržených tvarů nejmenší hmotnost.

5.2 Dynamická analýza návrhů

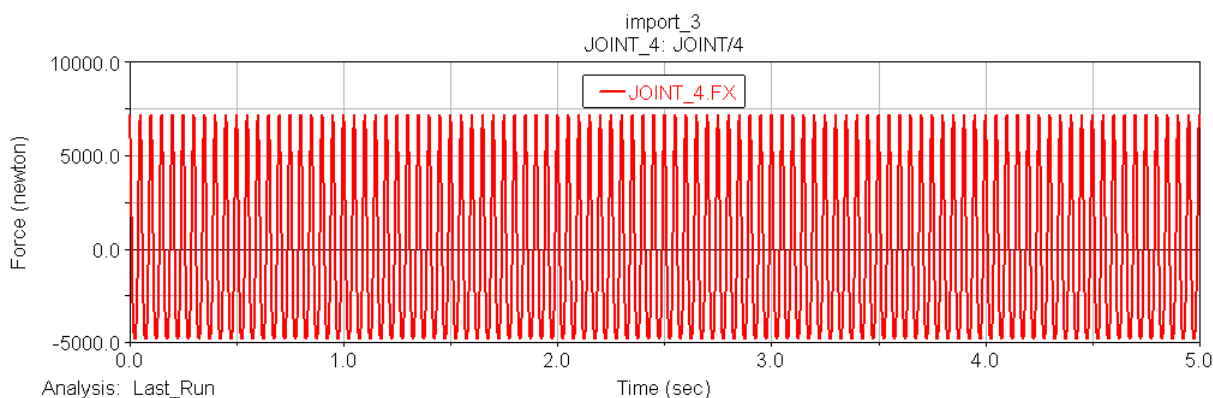
V MSC.ADAMS/View není na soustavu klikového mechanismu aplikován moment M [N · m] a síla F [N] jako u případů již dříve zmíněných. Naopak je kinematické dvojici mezi klikou a povrchem předepsán rovnoměrný rotační pohyb $40\pi t$ tedy dvacet otáček za vteřinu a soustava je podrobena dynamické analýze pohybu na časovém intervalu od 0 s do 5 s při 5000 krocích. Jako integrátor je zvolen výchozí GSTIFF.

Hmotnosti a momenty setrvačnosti jednotlivých návrhů jsou uvedeny v Tab. 5.1, ve které je zároveň uvedena maximální dynamická síla ve vazbě kliky a ojnice. Jak je z tabulky patrné, velikost zmíněné maximální dynamické síly závisí jak na hmotnosti, tak na matici setrvačnosti tělesa.

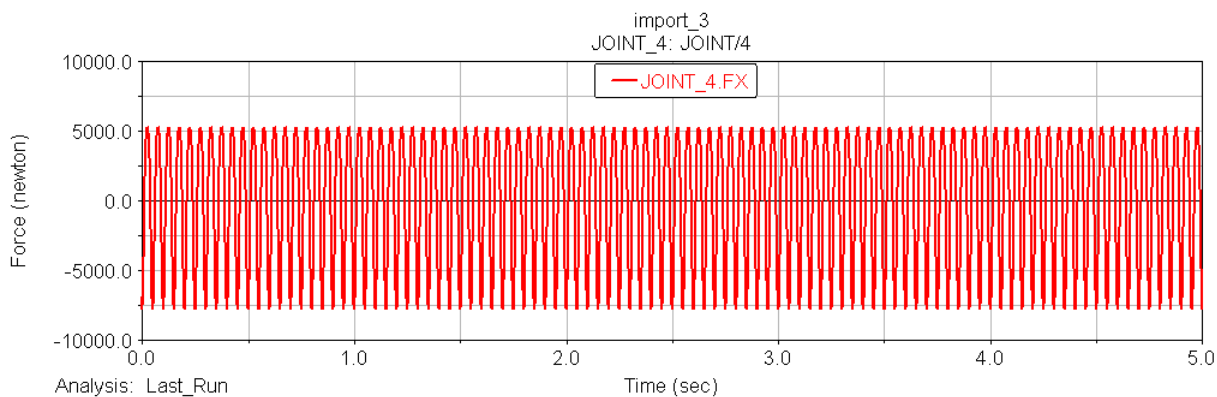
Na Obr. 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 jsou grafy závislostí maximální reakční síly ve vazbě kliky a návrhu ojnice na čase.

Číslo návrhu	Hmotnost [kg]	Moment setrvačnosti k těžišti [$kg \cdot m^2$]	Max. dynamická síla [N]
1	3,0420019180	0.0021344700938	7202
2	3,7363893102	0,0022836258632	5244
3	3,4571018109	0.0021168783226	7546
4	2,8775347239	0,0020569589380	7072
5	2,4794531840	0,0019245222142	6736

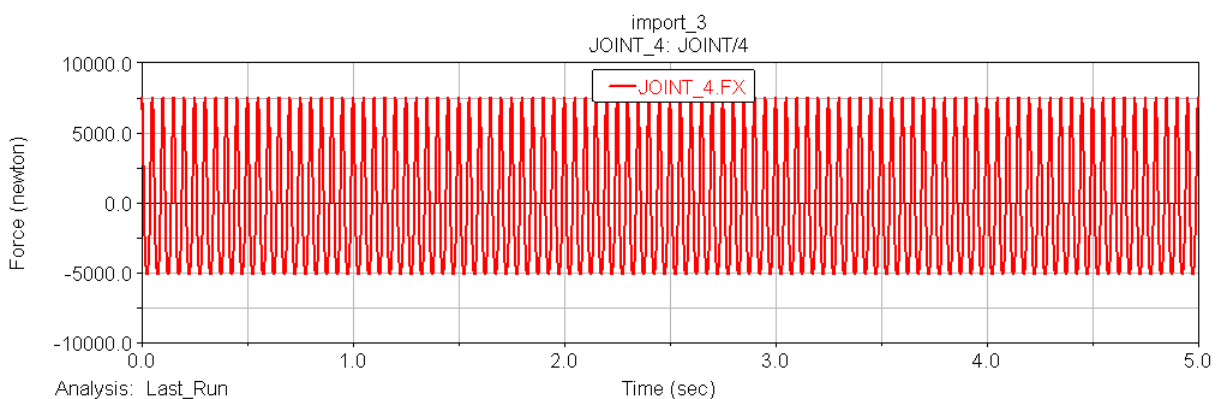
Tabulka 5.1: Parametry jednotlivých ojnic získané pomocí MSC.ADAMS.



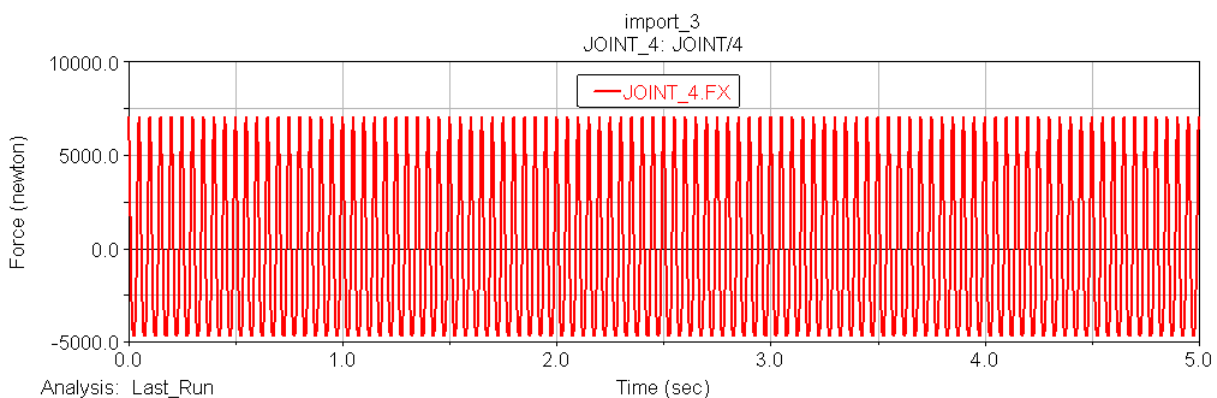
Obrázek 5.6: Reakce v kinematické dvojici spojující kliku a návrh ojnice č. 1.



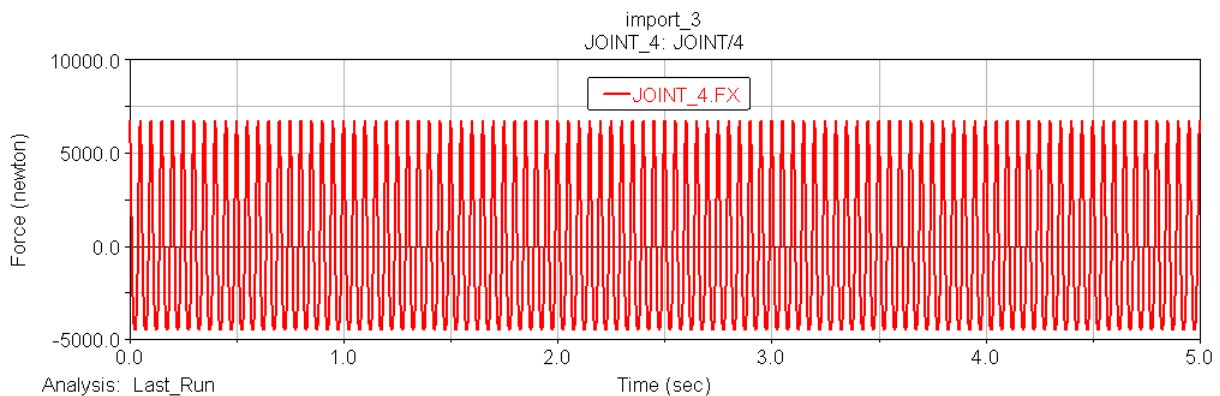
Obrázek 5.7: Reakce v kinematické dvojici spojující kliku a návrh ojnice č. 2.



Obrázek 5.8: Reakce v kinematické dvojici spojující kliku a návrh ojnice č. 3.



Obrázek 5.9: Reakce v kinematické dvojici spojující kliku a návrh ojnice č. 4.



Obrázek 5.10: Reakce v kinematické dvojici spojující kliku a návrh ojnice č. 5.

5.3 Statická analýza návrhů

V předchozí podkapitole byl řešen problém, jak velká dynamická reakce vzniká ve vazbě mezi klikou a ojnicí. Nad rámec původního zadání je v této podkapitole uvedeno několik ilustračních výsledků napěťové analýzy (vyhodnocované napětí je podle von Misesa) při statickém zatížení maximálními silami zjištěnými v předchozí podkapitole. Pro to bude použita metoda konečných prvků. Pro tento úkol bude využit CAD systém NX 7.5, v němž budou konstrukční návrhy ojnice diskretizovány. Typ elementu nechť je CTETRA(10) (čtyřstěny s nelineární násadou) a jeho velikost je 5 mm. Na Obr. 5.11 je znázorněno, jak je každá ojnice zatěžována a uchycena. V místě B je součást na válcové ploše pevně uchycena, tzn. jsou odebrány všechny stupně volnosti. V místě A je celá válcová plocha členu zatížena nejprve statickou silou F_x a potom silou F_y .

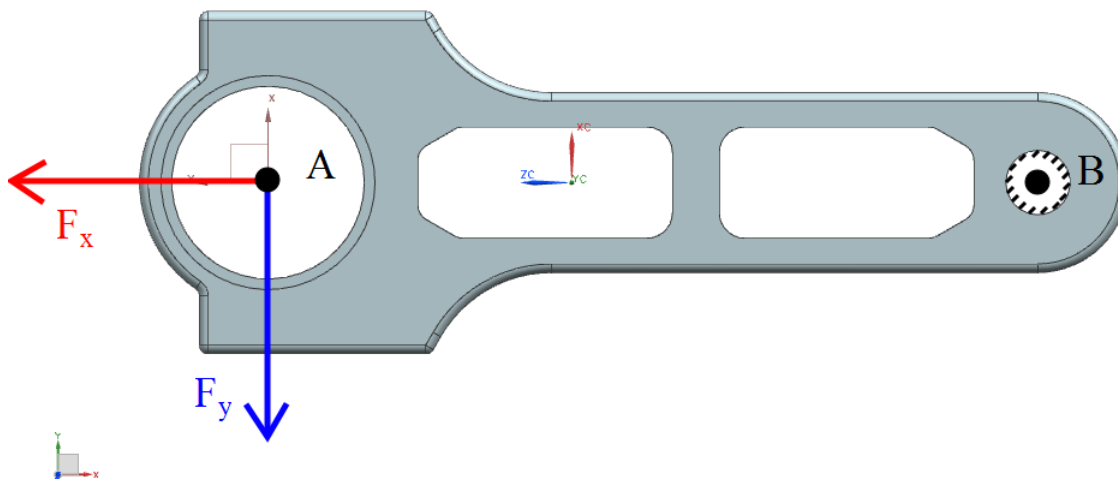
Pro ojnici č. 1 se maximální hodnota napětí při zatížení silami F_x a F_y výrazně liší. Z hodnoty maximálního napětí pro zatížení silou F_y lze též usuzovat, že by došlo k porušení součásti (v závislosti na třídě oceli zvolené pro výrobu).

Ojnice č. 2 z hlediska statické analýzy vyhovuje, neboť hodnoty maximálních napětí v obou směrech zatížení jsou totožné.

U ojnice č. 3 se maximální napětí liší stejně jako tomu bylo v prvním případě, nicméně hodnota maximálního napětí při zatížení silou F_y je tentokrát menší, a proto by k porušení součástí nemuselo dojít.

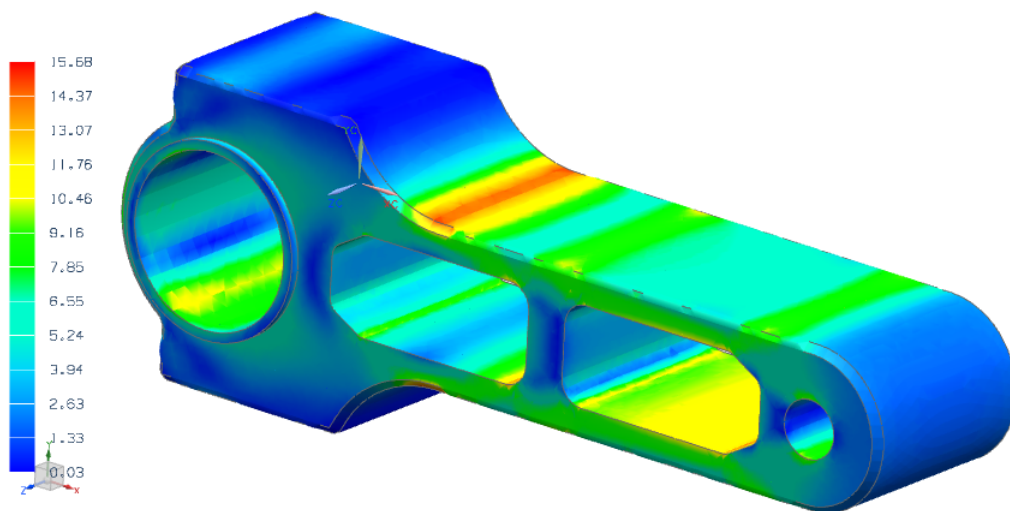
V případě ojnice č. 4 jsou hodnoty maximálních napětí velmi rozdílné. Při zatížení silou F_y je velikost maximálního napětí tak velká, že k porušení součásti by došlo zcela určitě a tento návrh je proto nevyhovující.

Pro ojnici č. 5 platí zcela obdobné závěry jako pro ojnici č. 4. Rozdílnost maximálních napětí a hodnota maximálního napětí pro y -ový směr je natolik velká, že zcela jistě dojde k porušení. Tento návrh ojnice je tedy nevyhovující.



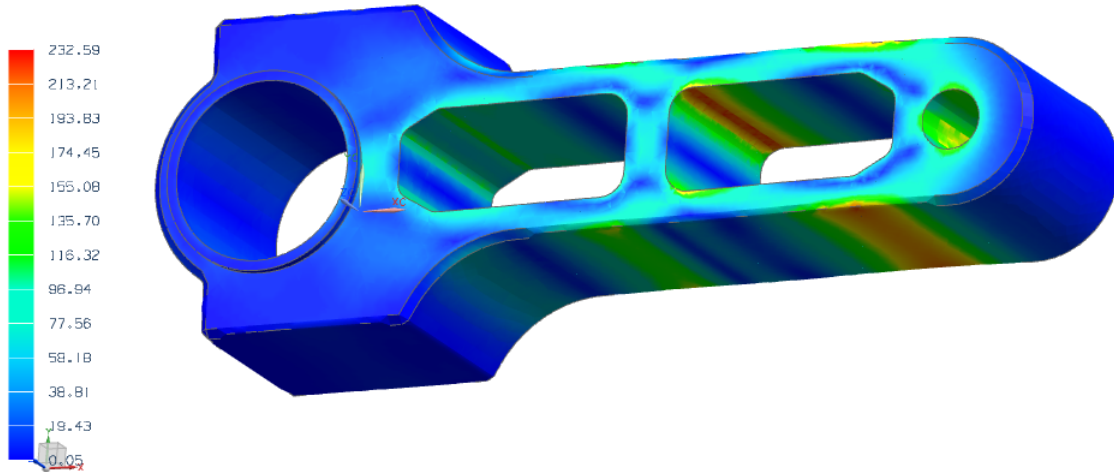
Obrázek 5.11: Schéma zatížení a uchycení ojnice.

D:\V1_SIM : Solution 1 Result
 Load Case 1, Static Step 1
 Stress : Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
 Min : 0.02, Max : 15.68, N/mm²(MPa)
 Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



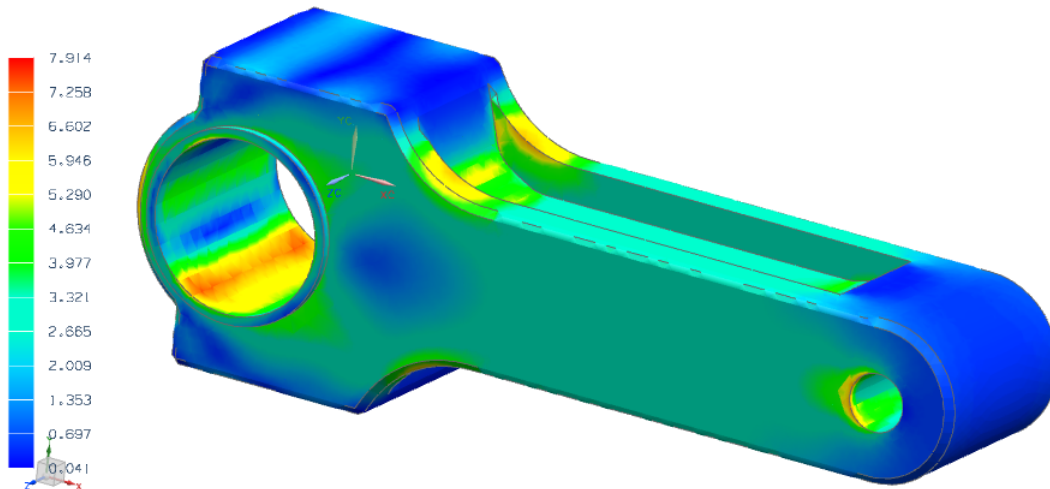
Obrázek 5.12: Ojnice č. 1 zatížená maximální statickou silou ve směru osy x.

D_V1_SIM : Solution 1 Result
Load Case 1, Static Step 1
Stress : Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.05, Max : 232.59, N/mm²(MPa)
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



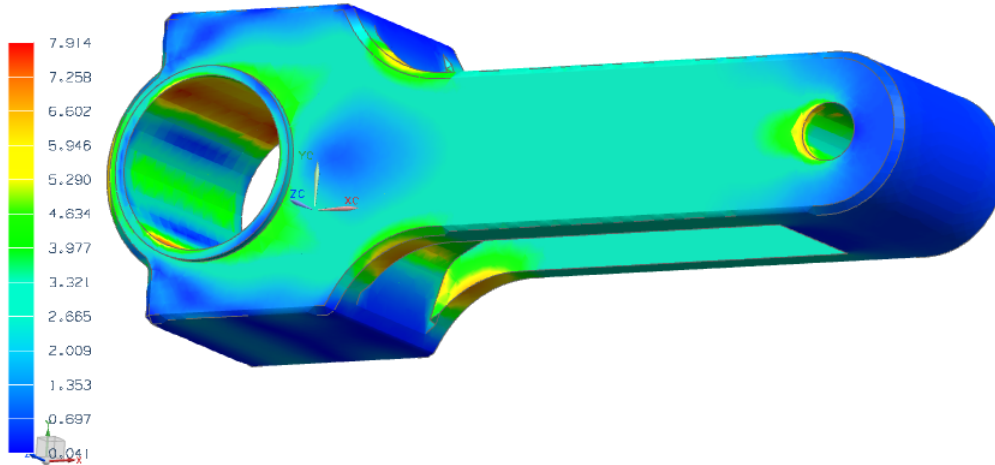
Obrázek 5.13: Ojnice č. 1 zatížená maximální statickou silou ve směru osy y.

D_V2_SIM : Solution 1 Result
Load Case 1, Static Step 1
Stress : Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.041, Max : 7.914, N/mm²(MPa)
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



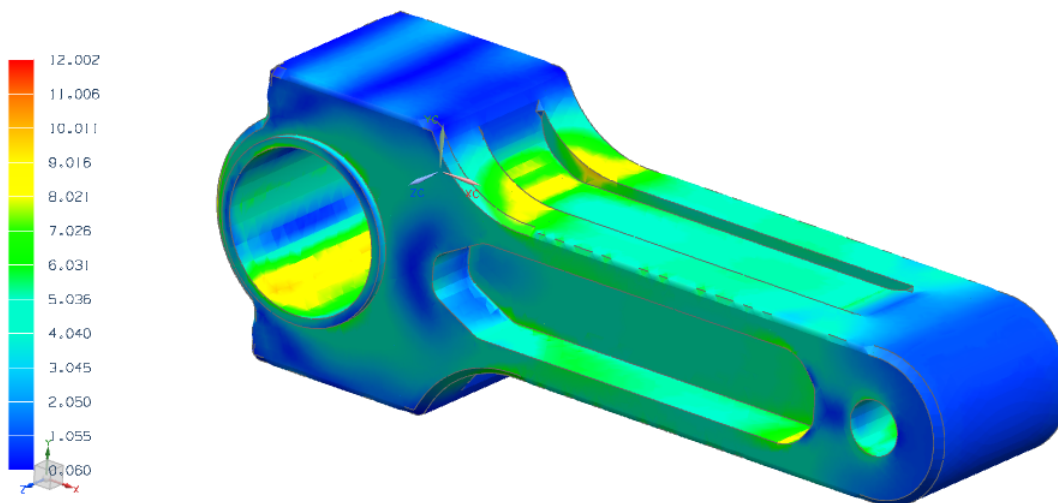
Obrázek 5.14: Ojnice č. 2 zatížená maximální statickou silou ve směru osy x.

D_V2_SIM : Solution 1 Result
Load Case 1, Static Step 1
Stress : Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.041, Max : 7.914, N/mm²(MPa)
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



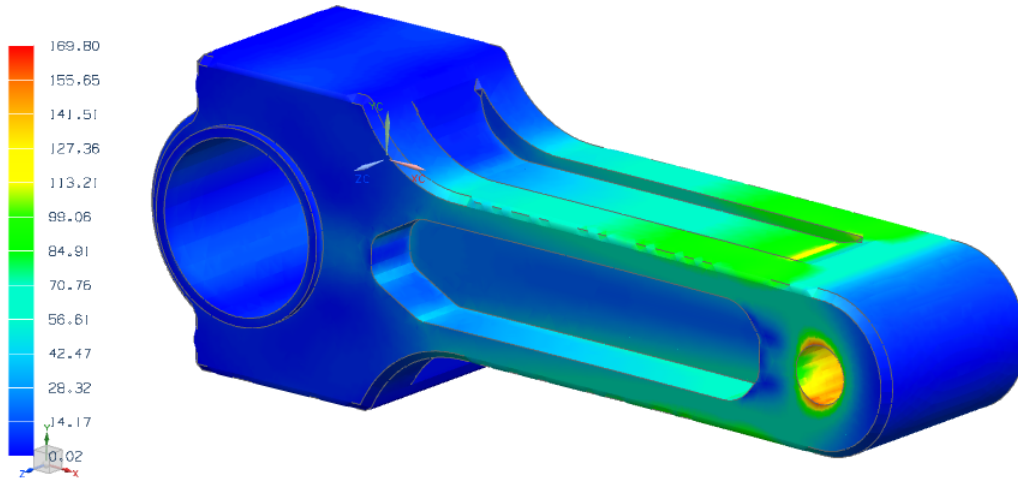
Obrázek 5.15: Ojnice č. 2 zatížená maximální statickou silou ve směru osy y.

D_V3_SIM : Solution 1 Result
Load Case 1, Static Step 1
Stress : Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.060, Max : 12.002, N/mm²(MPa)
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



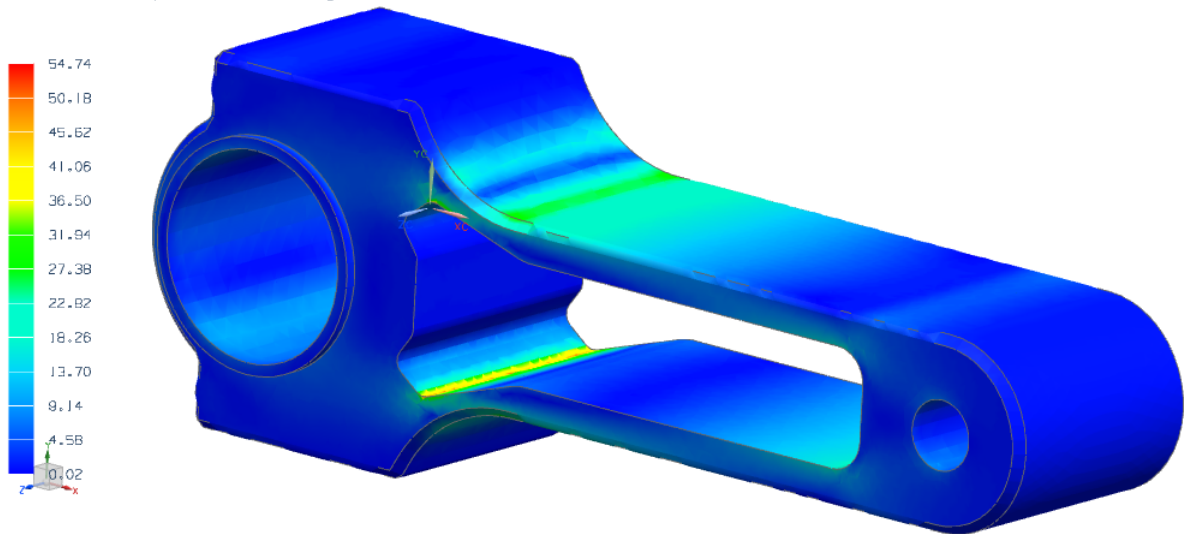
Obrázek 5.16: Ojnice č. 3 zatížená maximální statickou silou ve směru osy x.

D.V3_SIM : Solution 1 Result
Load Case 1, Static Step 1
Stress : Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.02, Max : 169.80, N/mm²(MPa)
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



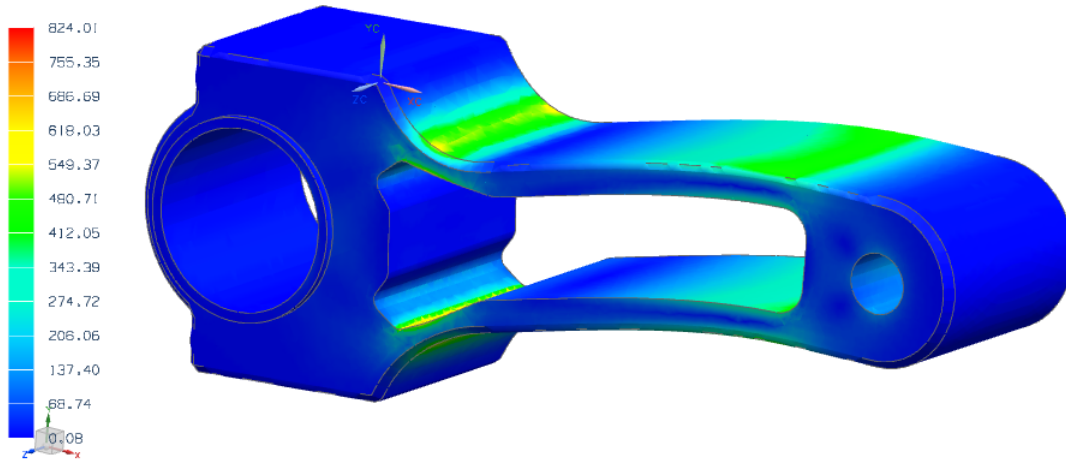
Obrázek 5.17: Ojnice č. 3 zatížená maximální statickou silou ve směru osy y.

D.V4_SIM : Copy of Solution 1 Result
Load Case 1, Static Step 1
Stress : Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.02, Max : 54.74, N/mm²(MPa)
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



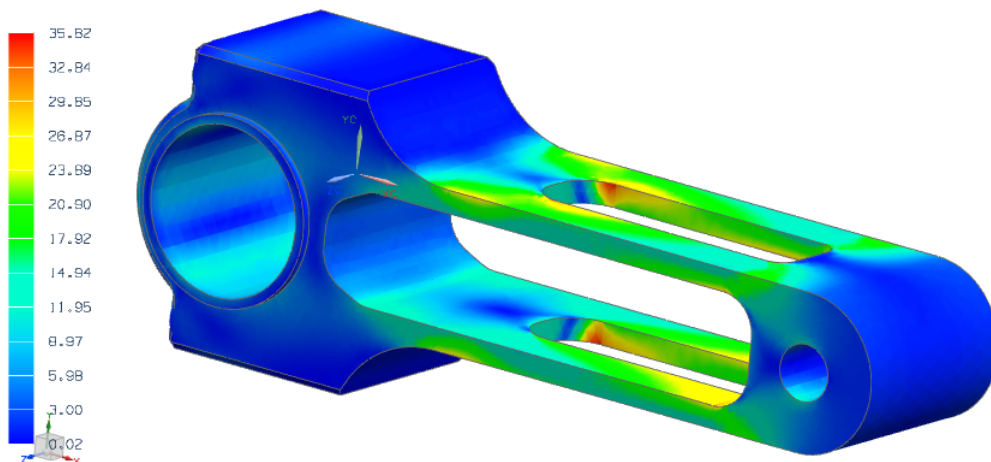
Obrázek 5.18: Ojnice č. 4 zatížená maximální statickou silou ve směru osy x.

D_V4_SIM : Solution 1 Result
Load Case 1, Static Step 1
Stress : Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.08, Max : 824.01, N/mm²/MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



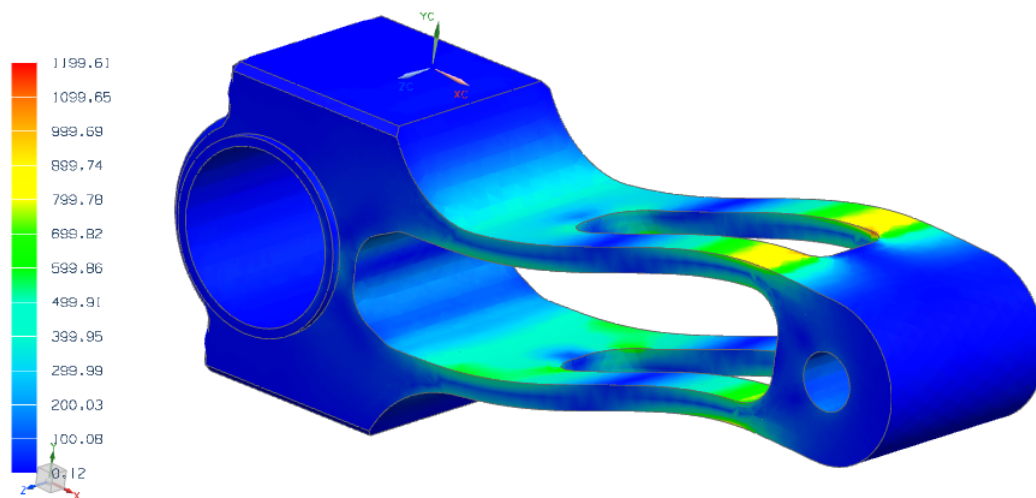
Obrázek 5.19: Ojnice č. 4 zatížená maximální statickou silou ve směru osy y.

D_V5_SIM : Solution 1 Result
Load Case 1, Static Step 1
Stress : Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.02, Max : 35.82, N/mm²/MPa
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



Obrázek 5.20: Ojnice č. 5 zatížená maximální statickou silou ve směru osy x.

D:\V5_S1M : Copy of Solution 1 Result
Load Case 1, Static Step 1
Stress : Element-Nodal, Unaveraged, Von-Mises
Min : 0.12, Max : 1199.61, N/mm²(MPa)
Deformation : Displacement - Nodal Magnitude



Obrázek 5.21: Ojnice č. 5 zatížená maximální statickou silou ve směru osy y.

Kapitola 6

Závěr

Tématem této bakalářské práce je výpočtová analýza dynamického zatížení vázaných soustav těles. Počítačové modelování má velký potenciál v odvětvích vývoje konstrukcí, neboť svými přínosy může ušetřit nejen pracovní sílu, ale také použitý materiál a samozřejmě i finance na nákladné experimenty.

V úvodu bylo specifikováno několik cílů. Prvotním cílem byl obecný kinematický popis vázaných mechanických systémů, který byl aplikován na demonstrační příklad klikového mechanismu.

V kapitole 3 byl vysvětlen obecný princip metody redukce a pomocí ní byla stanovena vlastní pohybová rovnice pro klikový mechanismus. Dále byl sestaven matematický model vázaných soustav těles a byly navrženy jednotlivé členy geometrického modelu klikové hřídele v CAD systému, které byly importovány do MSC.ADAMS.

Obsahem kapitoly 4 byly vybrané numerické metody pro řešení pohybových rovnic a jejich srovnání. Ukázalo se, že metoda počátečního zrychlení je na rozdíl od ostatních metod nepřesná. Naopak metody ODE (implementované v MATLABu) shodně korespondovaly s výsledky jednotlivých integrátorů v MSC.ADAMS. Metody ODE se tedy díky srovnání jeví jako přesnější.

Dalším cílem byla parametrická studie vlivu konstrukčního návrhu na dynamické zatížení vybraného členu. V kapitole 5 jsou uvedeny jednotlivé tvarové návrhy ojnice pro klikový mechanismus. Tyto návrhy jsou podrobeny dynamické analýze, která dává odpověď na otázku, jaká reakce bude vznikat v kinematické vazbě mezi klikou a ojnicí.

Nad rámec zadání byly provedeny napěťové analýzy návrhů ojnice při zdvihovém zatížení ve dvou různých směrech.

Literatura

- [Slavík et al. 1997] Slavík, J. - Stejskal, V. - Zeman, V.: *Základy dynamiky strojů*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997.
- [Valášek 2011] Valášek, M.: *Kinematika robotických systémů*. Učební text k semináři. ČVUT, Praha, 2011. Dostupné na:
<http://www.crr.vutbr.cz/system/files/brozura_06_1102.pdf>
- [Nikravesh 2008] Nikravesh, Parviz E.: *Planar multibody dynamics*. CRC Press, Boca Raton, USA, 2008.
- [Blekta 2005] Blekta, J.: *K problematice multibody simulací*. Disertační práce. Technická univerzita v Liberci, 2005.
- [MSC.ADAMS] *MD ADAMS R3 2008 Help*. MSC.Software, Inc.
- [MATLAB R2010a] *MATLAB R2010a Help*. The MathWorks, Inc.
- [Shabana 2001] Shabana, A.A.: *Computational dynamics*. Wiley, New York, 2001.