

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd

## **Bakalářská práce**



# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

MODELOVÁNÍ A OPTIMALIZACE JÍZDY  
AUTOMOBILU S ELEKTROPOHONEM JEDNOTLIVÝCH KOL

Jiří KOUBA

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd  
Akademický rok: 2022/2023

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Jiří KOUBA**  
Osobní číslo: **A19B0658P**  
Studijní program: **B3947 Počítačové modelování v technice**  
Studijní obor: **Výpočty a design**  
Téma práce: **Modelování a optimalizace jízdy automobilu s elektropohonem jednotlivých kol**  
Zadávací katedra: **Katedra mechaniky**

## Zásady pro vypracování

1. Seznámení se základními koncepty při modelování vozidel.
2. Sestavení výpočtového modelu vozidla pro horizontální dynamiku.
3. Návrh optimální distribuce výkonu motorů při jízdách manévrech.
4. Numerická simulace jízdých manévřů a parametrické studie pro konkrétní vozidlo.



Rozsah bakalářské práce: **20 – 40 stran A4**  
Rozsah grafických prací:  
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

1. VLK, František. Dynamika motorových vozidel. Nakladatelství a vydavatelství VLK, Brno, 2000. ISBN 80-238-5273-6.
2. JAZAR, Reza N. Vehicle dynamics: theory and application. 2nd ed. New York: Springer, 2014. ISBN 978-1-4614-8543-8.
3. SLAVÍK, J., STEJSKAL, V., ZEMAN, V.: Základy dynamiky strojů, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997, ISBN 80-01-01622-6.
4. RAJAMANI, R.: Vehicle Dynamics and Control, Springer, Boston, USA, 2006, ISBN 978-1-4614-1432-2.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Jan Rendl, Ph.D.**  
Nové technologie pro informační společnost

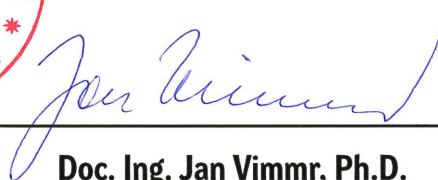
Konzultant bakalářské práce: **Doc. Ing. Michal Hajžman, Ph.D.**  
Katedra mechaniky

Datum zadání bakalářské práce: **5. října 2022**  
Termín odevzdání bakalářské práce: **31. května 2023**



---

**Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.**  
děkan



---

**Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**  
vedoucí katedry

V Plzni dne 5. října 2022

# Prohlášení

Předkládám k posouzení tuto bakalářskou práci. Prohlašuji, že jsem ji zpracoval samostatně a využil jen uvedených pramenů a literatury.

V Plzni, dne 31. května 2023

Jiří Kouba

# Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat Ing. Janu Rendlovi, Ph.D. za ochotu, trpělivost, odbornou pomoc, poskytnutí materiálů a příkladné vedení bakalářské práce. Dále bych rád poděkoval doc. Ing. Michalu Hajžmanovi, Ph.D. za odbornou pomoc se systémem optimalizace momentů.

Jiří Kouba

# Abstrakt

## Modelování a optimalizace jízdy automobilu s elektropohonem jednotlivých kol

Tato bakalářská práce pojednává o matematickém modelování silničních vozidel. Jsou představeny čtyři rovinné modely přímočarého pohybu motorových vozidel, které jsou postupně rozšiřovány o odpružení, náklon, počet kol a vertikální pohyb. Dynamické a rozměrové parametry modelů jsou vypočteny a převzaty z údajů odpovídajících studentské formuli UWB-04. Dále je odvozen a zpracován prostorový dynamický model čtyřkolého vozidla. Prostorový model čtyřkolého vozidla je pak použit k provedení parametrické studie vozidla a zkoumání vlivů různých hodnot parametrů zavěšení vozidla na jeho jízdní vlastnosti a komfort posádky. Získané údaje jsou pak použity při optimalizaci rozložení momentů a natočení kol při Skid Pad testu. Samotná optimalizace rozdělení točivých momentů kol při jízdě je provedena hledáním minima odchylky od předepsané trasy pro požadovaná kritéria pohybu.

**Klíčová slova:** dynamika, matematické modelování vozidel, počítačové modelování, rovinný model silničního vozidla, prostorový model silničního vozidla, optimalizace točivých momentů, Formule Student

# Abstract

## Modelling and optimizing the ride of an automobile with independent electric wheel drive

This bachelors thesis deals with mathematical modelling of on-road vehicles. Throughout this thesis, four planar models of rectilinear vehicle movement are described, which are gradually expanded to contain suspension, pitch, added number of wheels and movement in the vertical axis. Dynamic and dimensional parameters to be used with the models are calculated and taken over from UWB-04 Formula SAE racecar data. A spatial dynamic model of a four-wheeled vehicle is introduced. The spatial model of the four-wheeled vehicle is then used for a parametric study of the vehicle and research of the influence of various suspension-related parameter values on driving characteristics and crew comfort. Collected data are then used in optimizing the torque distribution and wheel turning during a Skid Pad test. The optimization of torque distribution itself is carried out by search of the minimal value of the divergence from the prescribed route, for the demanded movement criteria.

**Key words:** dynamics, mathematical vehicle modelling, computational modelling, planar model of a road vehicle, spatial model of a road vehicle, torque optimization, Formula SAE



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
1.1	Cíle práce . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Úvod do matematického modelování vozidel</b>	<b>3</b>
2.1	Výpočet hmotnostních charakteristik . . . . .	6
2.1.1	Sestavení matice setrvačnosti . . . . .	8
2.1.2	Parametry modelu vozidla . . . . .	10
2.2	Matematické modely vozidel . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Model přímočarého pohybu vozidla</b>	<b>14</b>
3.1	Zjednodušený model pneumatik . . . . .	15
3.2	Sestavení pohybových rovnic . . . . .	17
3.3	Doplnění rovinného modelu o náklon a odpružení . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Prostorový dynamický model vozidla</b>	<b>27</b>
4.1	Modelování pneumatik pro prostorový model vozidla . . . . .	28
4.2	Dugoffův model pneumatiky . . . . .	30
4.3	Eulerovy úhly . . . . .	31
4.4	Tait-Bryanovy úhly . . . . .	32
4.5	Sestavení pohybových rovnic . . . . .	34
4.6	Modelové jízdní manévry . . . . .	38
4.6.1	Parametrická studie jízdy po kružnici . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Řízení točivých momentů sil na jednotlivých kolech</b>	<b>51</b>
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>58</b>

# Kapitola 1

## Úvod

S nástupem řešení klimatických otázek 21. století se dostává v rámci automobilového průmyslu do popředí problém elektrifikace osobní dopravy. Tím vyvstává řada nových úloh, se kterými se průmysl a inženýři silničních vozidel musí vypořádat. Jednou z takových je úloha efektivního rozdělení energie mezi jednotlivá kola elektrických automobilů. Při aplikaci samostatných elektromotorů pro jednotlivá kola se automotive průmysl postupně zbavuje potřeby použití složitých mechanických součástí pro dělení točivých momentů a řízení mezinápravového zpřevodování, jako jsou diferenciály. Tím dochází k mechanickému zjednodušení silničních vozidel a zvyšování jejich spolehlivosti. S tímto trendem také přicházejí nové možnosti optimalizace rozdělení točivých momentů mezi jednotlivá kola. U vozidel se spalovacími motory se problém původně čistě strojírenský rázem převádí na problém počítačového řízení. Řešení tohoto problému pomocí algoritmu dovoluje precizní řízení optimalizované podle vstupních parametrů a vysokou adaptabilitu, jež by fyzický ekvivalent algoritmu, jakým je například diferenciál, nebyl schopen. Pro vývoj a optimalizaci takovýchto algoritmů potřebuje výrobce již pojízdný model a testovací trať, což může být finančně i časově náročné. Výrazného urychlení a zlevnění vývoje může být dosaženo prvotním použitím řídicího algoritmu na matematických modelech. Ty mohou být značně zjednodušené, ale také velice komplexní, a to v závislosti na tom, jaká úroveň přesnosti je v dané úloze požadována.

## 1.1 Cíle práce

Cíle práce se dají shrnout do následujících bodů:

- Uvést čtenáře do matematického modelování vozidel.
- Odvodit rovinný model přímočaré jízdy vozidla.
- Sestavit prostorový model vozidla.
- Stanovit hmotnostní charakteristiky studentské formule UWB-04.
- Použitím prostorového modelu vozidla na modelových situacích vypracovat parametrickou studii, popsat vliv změny parametrů vozidla na chování vozidla.
- Vytvořit algoritmus, který na základě vstupních dat momentálního stavu vozidla bude vyhodnocovat rozdělení točivých momentů na kola.

# Kapitola 2

## Úvod do matematického modelování vozidel

Matematické modelování vozidel se zabývá pohybem vozidel po zpevněném i nezpevněném terénu, zejména pak rozjezdem, brzděním, jízdou samotnou a zatáčením. Pohyb vozidla je pak dán dynamickými silami působícími na něj, jako jsou reakční a trakční síly od pneumatik, tíhová síla a aerodynamické síly. Pro matematické modelování vozidel využíváme různých typů modelů, v závislosti na způsobu jejich použití a v závislosti na požadovaných veličinách, které chceme matematickým modelováním získat.

Matematický model vozidla obecně považujeme za komplexní vázanou mechanickou soustavu těles. Motorová vozidla jsou složena z mnoha složitých součástí, které jsou rozprostřeny uvnitř vnějšího obalu vozidla. Pro mnohé jednodušší analýzy však můžeme předpokládat, že se všechny tyto komponenty pohybují hromadně. Například při brzdění snižují všechny komponenty vozidla svou rychlost jako jeden celek. Vozidlo tedy může být reprezentováno soustředěnou hmotností v bodě jeho středu hmotnosti a odpovídajícími parametry popisujícími rozložení hmoty v tělese vozidla.

Pro analýzu jízdy je často nutno oddělit kola vozidla jako samostatná rotační tělesa. Poté soustředěnou hmotu reprezentující šasi vozidla označujeme jako **odpruženou hmotu**, a jednotlivá kola jako **neodpruženou hmotu**.

Jak je uvedeno v [1], těleso můžeme pro všechny pohyby, kdy ho lze považovat za tuhé, efektivně nahradit soustředěnou hmotou tělesa umístěnou v jeho středu hmotnosti doplněnou o odpovídající momenty setrvačnosti a deviační momenty.

Pro implementaci modelu reálného vozidla je tedy nutno zjistit polohu jeho středu

hmotnosti. Pozice středu hmotnosti mezi nápravami se jednoduše vypočítá podle naměřeného zatížení jednotlivých kol. Ze statické rovnováhy vozidla, jak je zobrazena na obrázku 2.1, vyplývají vztahy

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg\frac{a_2}{l} \quad (2.0.1)$$

po vyjádření tedy

$$a_2 = \frac{2F_{z1}l}{mg}, \quad (2.0.2)$$

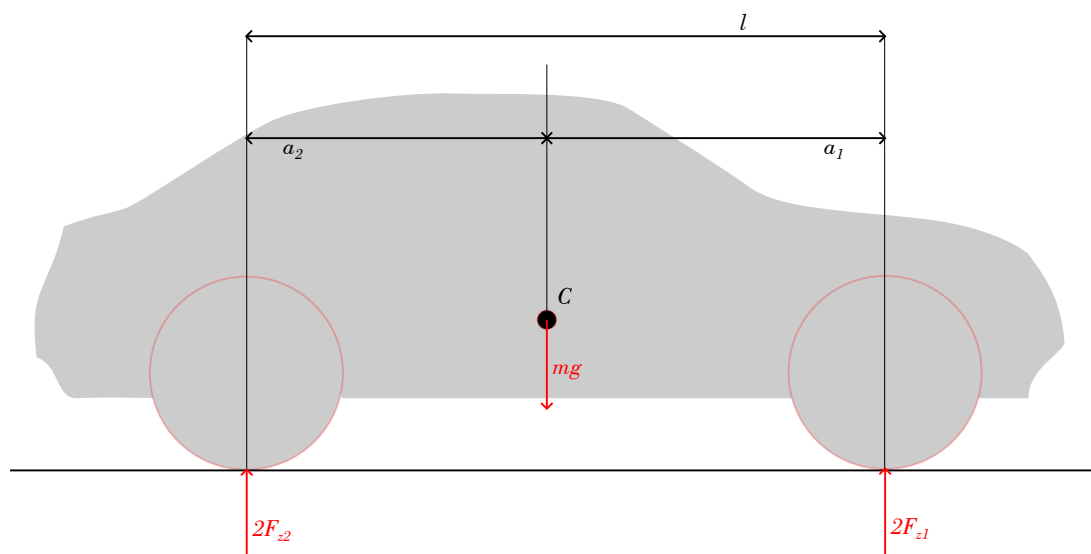
a

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg\frac{a_1}{l} \quad (2.0.3)$$

po vyjádření

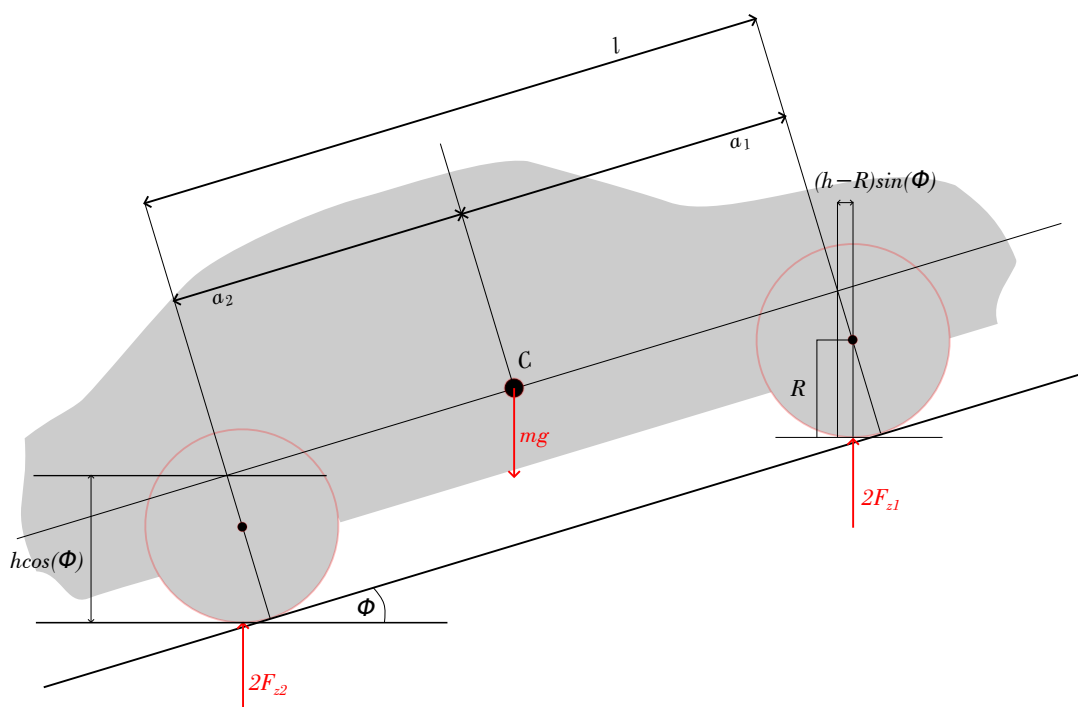
$$a_1 = \frac{2F_{z2}l}{mg}, \quad (2.0.4)$$

kde  $a_1$  a  $a_2$  představují vzdálenosti středu hmotnosti vozidla od jednotlivých náprav.



Obr. 2.1: Ilustrace zatížení náprav

Zjištění výšky těžiště se pak provádí měřením zatížení na jednotlivých kolech při statickém stavu vozidla stojícího na nerovné ploše, jak je vyobrazeno na obrázku 2.2.



Obr. 2.2: Ilustrace výpočtu výšky těžiště reálného vozidla

Ze statických podmínek rovnováhy nám vyplývají vztahy

$$2F_{z1} + 2F_{z2} - mg = 0, \quad (2.0.5)$$

$$-2F_{z1}(a_1 \cos \Phi + (h - R) \sin \Phi) + 2F_{z2}(a_2 \cos \Phi - (h - R) \sin \Phi) = 0, \quad (2.0.6)$$

ze kterých můžeme vyjádřit výšku těžiště

$$h = R + \left( 2 \frac{F_{z1}}{mg} l - a_2 \right) \cot \Phi. \quad (2.0.7)$$

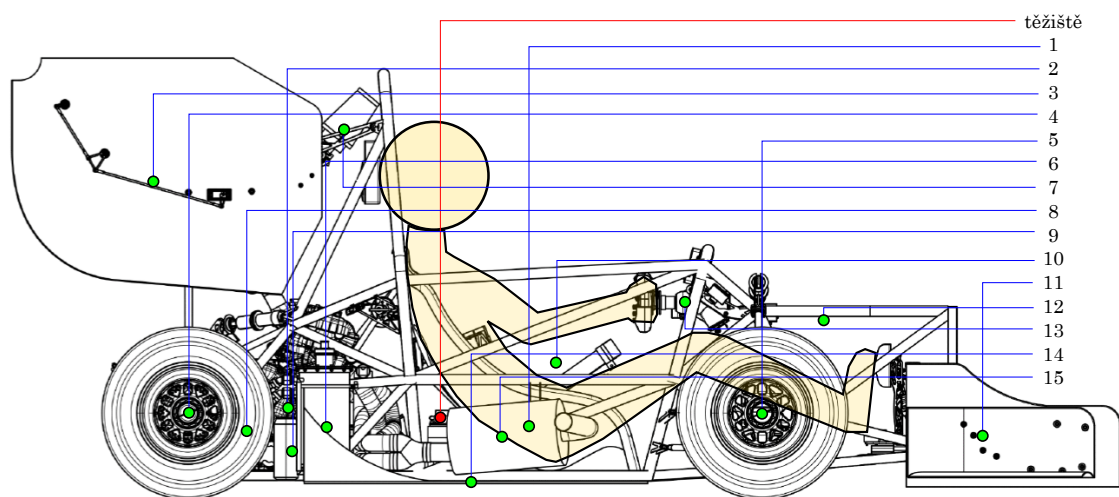
## 2.1 Výpočet hmotnostních charakteristik

Pro sestavení modelu reálného vozidla potřebujeme kromě polohy těžiště a hmotnosti členů soustavy zjistit také rozložení hmoty jeho jednotlivých součástí. Doplněním soustředěné hmoty v těžišti jednotlivých těles o veličiny charakterizující rozložení hmoty můžeme efektivně nahradit pohyb reálného tělesa. Parametry charakterizující rozložení hmotnosti těles se obecně rozdělují na dva typy: **momenty setrvačnosti** a **deviační momenty**. Ty vyjadřují rozložení hmoty tělesa v prostoru vůči referenčním osám či rovinám. Parametry hmotnosti těles vyjadřujeme ve tvaru dvou matic, matice hmotnosti (viz rovnice (2.1.1)) a matice setrvačnosti (viz rovnice (2.1.2)). Pro autenticitu byla tělesa modelována podle dat dostupných z [2] naměřených pro šasi a kola studentské formule UWB-04.

Šasi modelu bylo modelováno jako hmotné těleso složené z klíčových komponentů formule, přičemž byla pro vyšší přesnost uvažována také přítomnost pilota vozidla. Model šasi byl tedy sestaven z celkem osmnácti komponent, které jsou znázorněny na schématech v obrázcích 2.3 a 2.4. Jejich jednotlivé hmotnosti byly převzaty z [2] a jsou vypsány v tabulce 2.1. Každý komponent byl aproximován jistým jednoduchým geometrickým tvarem, jemuž se nejvíce tvarově přibližoval. Tělesa, kterými byly jednotlivé součástky aproximovány, jsou vyneseny v tabulce 2.1, stejně jako lokální kódy součástek pro nalezení jejich polohy ve schématech 2.3 a 2.4. Dále jsou v tabulce 2.1 uvedeny deviační momenty k rovině  $xz$  vozidla, která je totožná s rovinou symetrie celého vozidla, a momenty setrvačnosti (viz kapitola 2.1.1) komponentů k centrální ose celého systému vozidla.

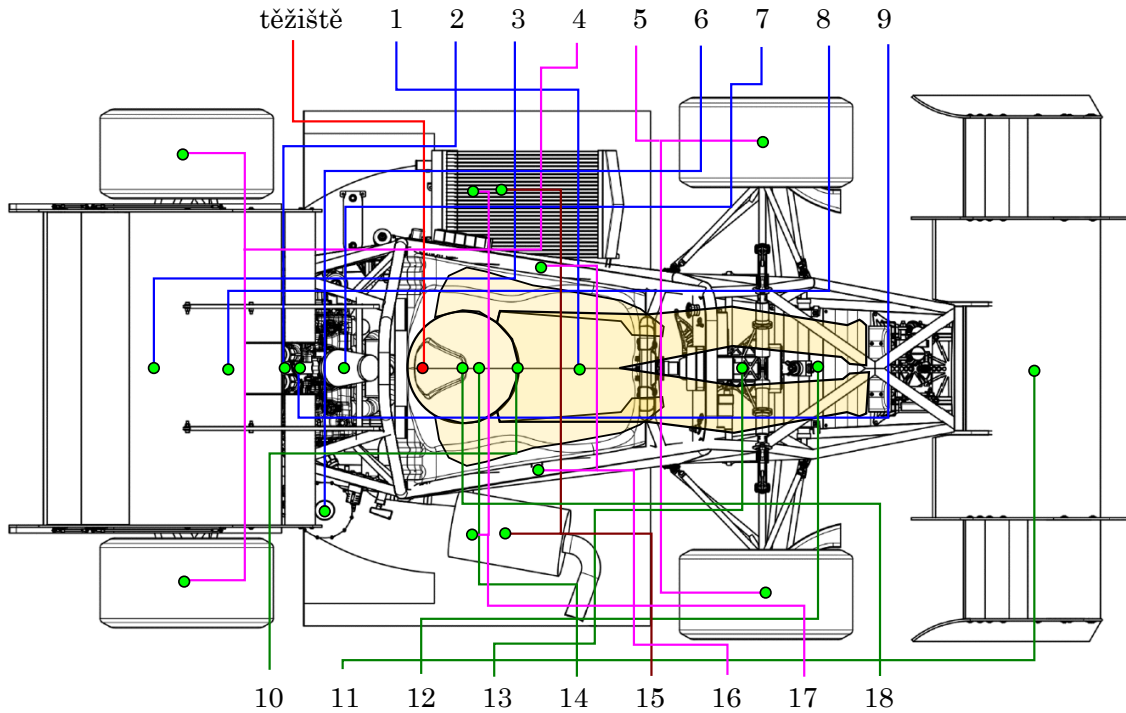
Tab. 2.1: Tabulka momentů setrvačnosti a deviačních momentů

Název součásti	kód	$m$ [kg]	těleso	$D_{xz}$ [kg · m <sup>2</sup> ]	$I_z$ [kg · m <sup>2</sup> ]	$I_y$ [kg · m <sup>2</sup> ]	$I_x$ [kg · m <sup>2</sup> ]
pilot	1	68.00	válec	4.01	7.08	7.08	3.04
motor	2	57.00	kvádr	-2.56	11.33	10.95	1.29
zadní křídlo	3	4.00	kvádr	2.75	2.47	4.36	3.15
zavěšení zadní	4	6.08	bod	-0.09	5.67	2.77	2.87
zavěšení přední	5	6.48	bod	0.06	7.00	4.77	2.60
olejová pumpa	6	4.00	bod	0.08	0.53	0.53	0.5184
sání	7	2.00	bod	-0.36	0.12	1.44	1.34
převodovka	8	5.00	bod	0.03	1.18	2.23	0
nádrž	9	7.00	bod	0.17	1.65	1.65	0.01
rám	10	34.90	kvádr	3.73	19.76	19.95	1.66
přední křídlo	11	3.00	deska	-0.26	7.33	6.89	0.56
kapotáž	12	2.25	kvádr	0.49	2.33	2.33	0.11
osa řízení	13	5.30	bod	0.46	1.74	3.12	0.67
plát	14	4.00	deska	-0.08	0.97	0.43	0.85
chladič, výfuk	15	4.00	bod	0	0.94	0.06	0.94
boční stěny	16	0.42	deska	0.06	0.18	0.14	0.10
postranní díly	17	2.00	deska	-0.02	1.08	0.02	0.54
kokpit	18	2.00	deska	0.01	0.08	0.18	0



Obr. 2.3: Schéma součástí (pohled ze strany)





Obr. 2.4: Schéma součástí (pohled shora)

### 2.1.1 Sestavení matice setrvačnosti

Pro konstrukci pohybových rovnic modelu potřebujeme sestavit matici hmotnosti a matici setrvačnosti soustavy. Matici hmotnosti sestavíme jako

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & m \end{bmatrix}. \quad (2.1.1)$$

Matrice setrvačnosti pro tělesa v prostoru je symetrická matice obsahující na hlavní diagonále momenty setrvačnosti  $I_x$ ,  $I_y$  a  $I_z$  k jednotlivým centrálním osám  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Mimo diagonálu se pak nacházejí deviační momenty  $D_{xy}$ ,  $D_{yz}$  a  $D_{xz}$  k jednotlivým rovinám  $xy$ ,  $yz$  a  $xz$ . Finální podoba matice je tedy

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_z \end{bmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Pro sestavení konkrétní matice setrvačnosti pro šasi modelu musíme vypočítat jednotlivé její prvky. Momenty setrvačnosti a deviační momenty byly počítány v systému s počátkem ve středu hmotnosti šasi, který je znázorněn ve schématech na obrázcích 2.3

a 2.4. Poloha středu hmotnosti byla vypočtena z poskytnutých dat z [2], jmenovitě pak z rozložení hmoty mezi přední a zadní nápravou, výškou těžiště a rozvorem. Díky symetrii vozidla je osa  $y$  hlavní osou setrvačnosti, deviační momenty  $D_{yz}$  a  $D_{xy}$  jsou tedy nulové. Výsledné momenty setrvačnosti a deviační moment byly vypočteny součtem momentů setrvačnosti a deviačních momentů jednotlivých komponentů formule, tedy dle vztahů

$$I_i = \sum_{j=1}^{18} I_{ij},$$

$$D_{xz} = \sum_{j=1}^{18} D_{xzj},$$

kde  $i$  představuje jednotlivé osy  $i = x, y, z$  a  $j$  odpovídá jednotlivým součástem vozidla, viz tabulka 2.1. Momenty setrvačnosti těles vůči lokálním osám procházejícím vlastním středem hmotnosti v prostoru jsou definovány jako

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm, \quad (2.1.3)$$

$$I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm, \quad (2.1.4)$$

$$I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm, \quad (2.1.5)$$

$$(2.1.6)$$

a deviační moment  $D_{xz}$  jako

$$D_{xz} = \int_m xz dm. \quad (2.1.7)$$

Komponenty vozidla byly pro jejich složitý tvar aproximovány jednoduchými geometrickými tělesy. Hmotné komponenty zanedbatelných rozměrů byly aproximovány hmotnými body. V tabulce 2.1 jsou uvedeny hmotnosti součástí, typy těles, kterými byly součásti aproximovány, samostatné deviační momenty, momenty setrvačnosti součástí k centrálním osám a kódové označení součástí ve schématech 2.3 a 2.4. Polohy jednotlivých součástí pak znázorňují schémata 2.3 a 2.4. Jejich momenty setrvačnosti byly přepočítány k centrálním osám pomocí Steinerovy věty

$$I_i = I_{0i} + mr_{Vi}^2$$

pro  $i = \{x, y, z\}$ ,

$$D_{xz} = D_{xz_0} + mxz,$$

kde  $I_0$  je moment setrvačnosti tělesa k jeho vlastní lokální centrální ose setrvačnosti,  $m$  je jeho hmotnost,  $r_V$  je kolmá vzdálenost těžiště tělesa od globální centrální osy setrvačnosti,

$D_{xz0}$  je deviační moment tělesa k jeho centrální ose setrvačnosti,  $x$  a  $z$  jsou průměty polohového vektoru těžiště tělesa od středu hmotnosti vozidla do osy  $x$  a  $z$ .

Tělo pilota bylo aproximováno jako natočený válec, jehož hmotové charakteristiky byly přepočteny do nenatočeného souřadnicového systému. Trojice součástí chladiče, výfuku a olejové pumpy byla uvažována kvůli vyvážení vozidla jako symetrická podle roviny  $xz$ .

Průřezové charakteristiky kol byly jako neodpružená hmota počítány separátně. Kola byla aproximována jako izotropní válce. Parametry byly převzaty z [2]. Moment setrvačnosti kola vůči ose otáčení kola  $I_w$  vyšel

$$I_w = 0.2645 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Po součtu hodnot pro veškeré komponenty nám vychází hodnoty pro celé vozidlo uvedené v tabulce 2.2. V této tabulce je také uvedena hmotnost  $m$  šasi vozidla.

Tab. 2.2: Tabulka momentů setrvačnosti a deviačních momentů celého šasi vozidla

	$m$ [kg]	$D_{xz}$ [kg · m <sup>2</sup> ]	$I_z$ [kg · m <sup>2</sup> ]	$I_y$ [kg · m <sup>2</sup> ]	$I_x$ [kg · m <sup>2</sup> ]
UWB-04	320.5	5.87	71.42	68.81	20.22

## 2.1.2 Parametry modelu vozidla

Rozměrové parametry vozidla jsou vyobrazeny v tabulce 2.3.

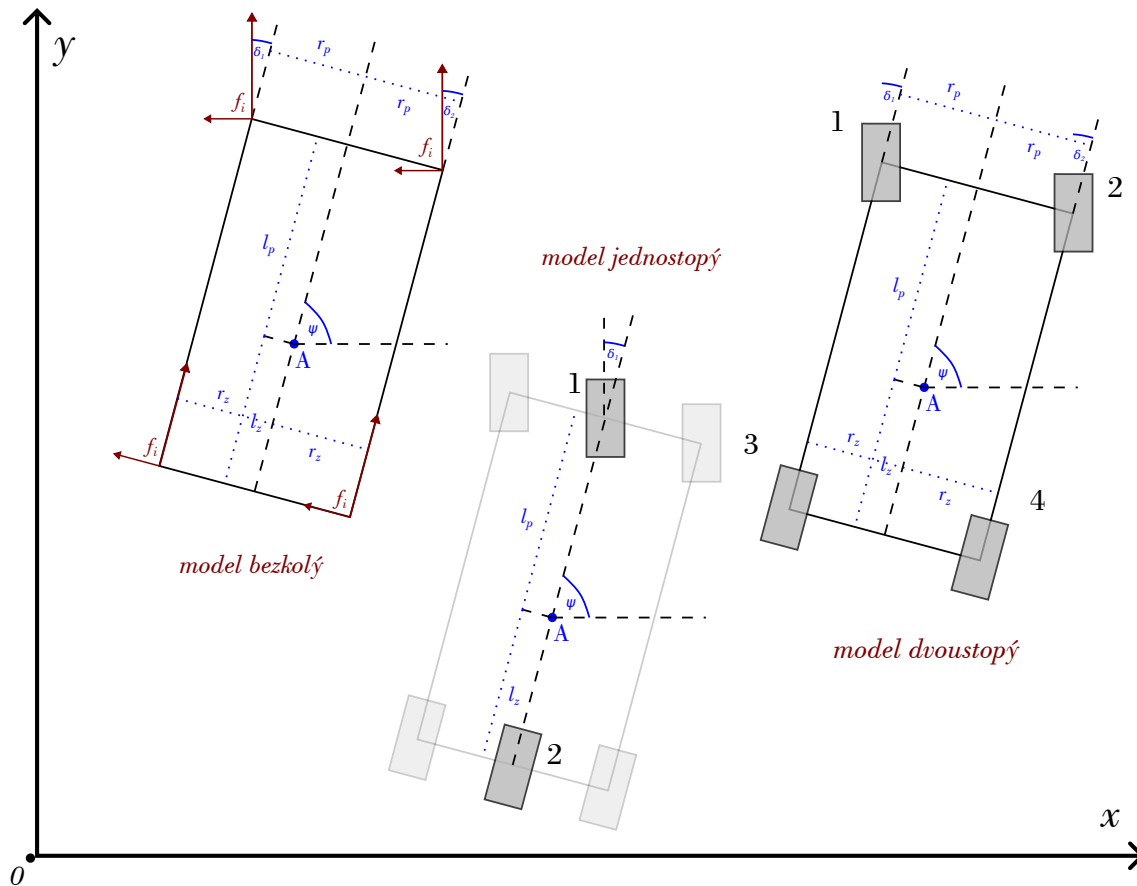
Tab. 2.3: Tabulka parametrů vozidla

symbol	hodnota	rozměr	význam
$l_p$	0.85	[m]	vzdálenost středu hmotnosti od přední nápravy
$l_z$	0.7	[m]	vzdálenost středu hmotnosti od zadní nápravy
$r_p$	0.5	[m]	rozchod předních kol
$r_z$	0.6	[m]	rozchod zadních kol
$h$	0.13	[m]	vzdálenost středu hmotnosti v ose $z$ od úchyty zavěšení
$R$	0.2341	[m]	poloměr kola
$f_0$	0.8	[-]	součinitel tření pneumatiky s asfaltem
$m_w$	12.5	[kg]	hmotnost kola

Rozměrové parametry a hmotnost kola byly převzaty z [2], součinitel tření pneumatiky s asfaltem byl převzat z [3].

## 2.2 Matematické modely vozidel

Hodnoty parametrů z kapitoly 2.1.1 použijeme při sestavování matematických modelů vozidel. Jak už bylo zmíněno v kapitole 2, v závislosti na modelování požadovaných manévru můžeme reálné vozidlo modelovat různými způsoby. Pro mnoho případů nám stačí modely dvourozměrné, především pak pro řešení kinematiky vozidla. Například pro řešení problému říditelnosti vozidla povětšinou postačí rovinný model horizontálního pohybu v rovině (popsán v [4, 5]). Takovéto modely se mohou skládat z jednoho tělesa (šasi, viz obrázek 2.5), pokud neuvažují rotaci kol nebo jsou trakční síly od pneumatik již známé. Dále se dají rozšířit na jednostopý kinematický model, viz obrázek 2.5, který navíc řeší pohyb kol, ale redukuje jejich počet u čtyřkolého vozidla na dvě. Finální evolucí tohoto typu rovinného modelu je čtyřkolý model (viz obrázek 2.5), který modeluje jak pohyb šasi, tak i pohyb všech kol. Podobný model nám postačí také například pro modelování řídicího ústrojí [4, 5, 1].



Obr. 2.5: Typy rovinných horizontálních modelů

Dalším z rovinných modelů je model pohybu přímočarého, kdy zanedbáváme zatáčení. Ten je vhodný hlavně pro modelování rozjezdu a brzdění vozidla a přitěžování náprav při těchto jízdních manévrech. Schéma tohoto modelu je zobrazeno v následující kapitole na obrázku 3.2. Sestavení tohoto modelu se budeme věnovat záhy, v kapitole 3.

Takovéto modely nám postačí pro zjištění kinematiky vozidla. Nedají nám však informaci například o naklápění šasi. Pokud tedy chceme tyto informace získat, například pro účely zlepšení pohodlí posádky vozidla, musíme modely doplnit o odpružení. Odpružený rovinný model přímočarého pohybu je popsán v kapitole 3. Prostorový odpružený model je pak popsán v kapitole 4.

Pokud navíc požadujeme informace o pohybu jednotlivých komponentů vozidla, jako jsou součásti zavěšení, využíváme takzvaného multibody přístupu k modelování vozidel, kdy kromě pohybu šasi a kol také modelujeme pohyb součástí, u kterých vlivem působení sil jízdy dochází k pohybu [6]. Příkladem budiž model s kyvným ramenem nebo nelineární modely uvažující náklon kola (tzv. **camber**), jak jsou vyobrazeny v [6]. Multibody modely vozidel s pohyblivými nápravami se pak vzájemně liší podle typu zavěšení a typu odpružení

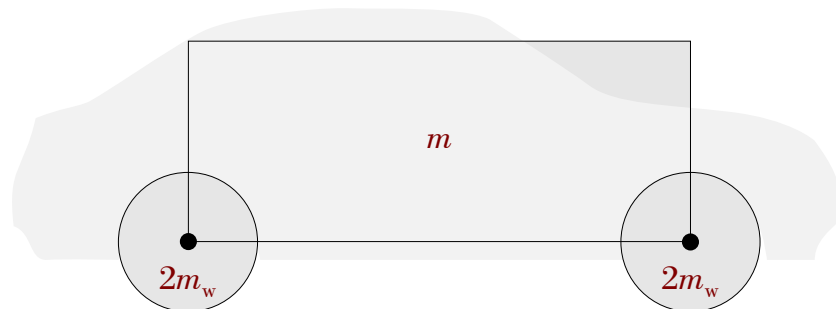
reálného vozidla, jako nápravy typu McPherson, Short Long Arm pro přední nápravu nebo třeba torzní příčku a tuhou nápravu pro zadní nápravu. Pro torzní příčku například uvažujeme pružné vzájemné spojení zadních kol, viz [7].

# Kapitola 3

## Model přímočarého pohybu vozidla

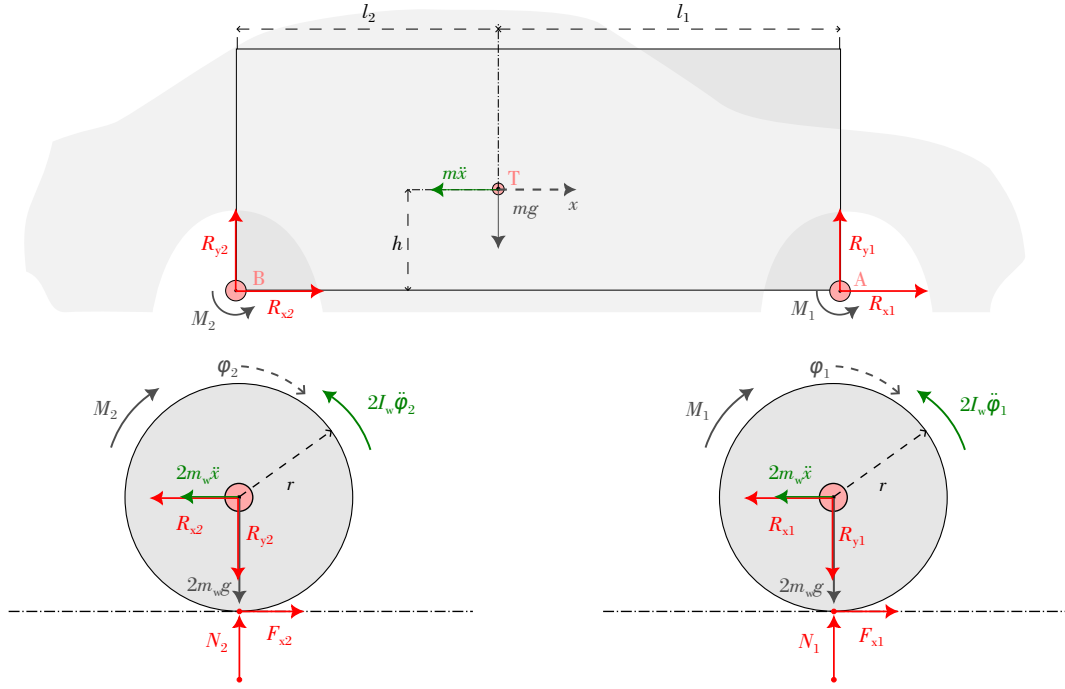
Pro modelování chování dvoustopého či čtyřstopého vozidla můžeme použít jeho dvourozměrný model. Ten neuvažuje zatáčení vozidla a popisuje pohyb vozidla v rovině  $xz$ . Kvůli zanedbání zatáčení se dá použít pouze při modelování přímočarého pohybu, tedy přímé jízdy. Je ideální pro kontrolu funkčnosti komplexnějších modelů při přímočarém rozjezdu, jak je řečeno ve [4]. Dále je ideální pro modelování přímočarých jízdních manévrů, jako je rozjezd a brzdění.

Dvourozměrný model uvažuje tři nebo pět těles, jedno šasi a dvě (jak je zobrazeno na obrázku 3.1) nebo čtyři kola. V případě čtyřkolého modelu uvažujeme symetrické zatížení



Obr. 3.1: Ilustrace 2D soustavy

levé a pravé strany. Zároveň ale uvažujeme přítěžování jednotlivých náprav v závislosti na dynamických stavech vozidla, tedy například zatížení přední nápravy a odlehčení zadní nápravy při brzdění. Pomocí metody uvolňování uvolníme všechna tělesa a zavedeme zobecněné souřadnice translačního pohybu šasi  $x$  a úhlové rychlosti kol  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ , jak jsou znázorněny v obrázku 3.2.



Obr. 3.2: Uvolnění komponent 2D vozidla

Z uvolnění soustavy získáme tři podmínky rovnováhy pro každé těleso – dvě silové pro osy  $x$  a  $y$  a jednu momentovou, viz (3.0.1) až (3.0.3) pro šasi, a (3.0.4) až (3.0.6) pro jednotlivá kola.

$$R_{y2} + R_{y1} - mg = 0 \quad (3.0.1)$$

$$R_{x2} + R_{x1} - m\ddot{x} = 0 \quad (3.0.2)$$

$$R_{y2} \cdot l_2 - R_{y1} \cdot l_2 - R_{x2} \cdot h - R_{x1} \cdot h - M_1 - M_2 = 0 \quad (3.0.3)$$

$$-R_{yi} + N_i = 0 \quad (3.0.4)$$

$$-R_{xi} - 2m_w\ddot{x} + F_{xi} = 0 \quad (3.0.5)$$

$$M_i - 2I_w\ddot{\varphi}_i - F_{xi} \cdot r = 0 \quad (3.0.6)$$

### 3.1 Zjednodušený model pneumatik

Uvažujeme jednoduchý model pneumatik, který efektivně aproximuje přenos sil mezi zemí a pneumatikou. Vyjádříme trakční síly kontaktu pneumatik s vozovkou  $F_{x1}$  a  $F_{x2}$

$$F_{x1} = f_1 N_1, \quad (3.1.1)$$

$$F_{x2} = f_1 N_2, \quad (3.1.2)$$



kde  $N_1$  a  $N_2$  jsou reakce na vertikální zatížení v ose  $z$ . Získáváme tak vztahy pro normálové síly  $N_2$  a  $N_1$

$$N_2 = \frac{M_2 + M_1 + mgl_1 + 2m_Wg(l_1 + l_2) + hm\ddot{x}}{l_1 + l_2}, \quad (3.1.3)$$

$$N_1 = mg + 4m_Wg - N_2. \quad (3.1.4)$$

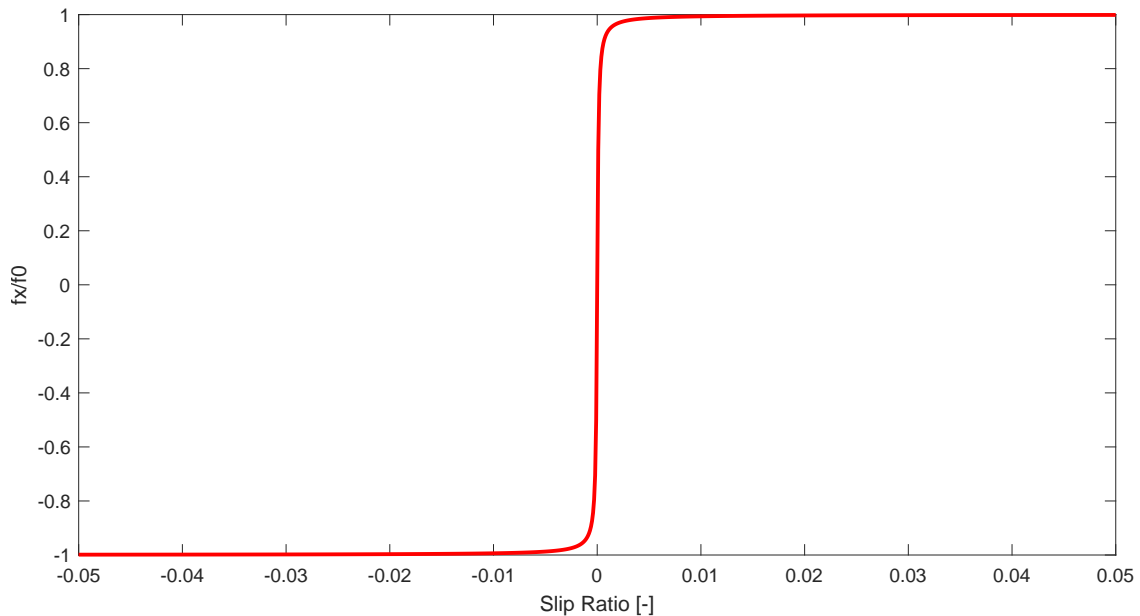
Model bude operovat s proměnným součinitelem tření, který vyjádříme jako

$$f_i = f_0 \frac{2}{\pi} \arctan(1 \cdot 10^4 \cdot v_{rel,i}), \quad (3.1.5)$$

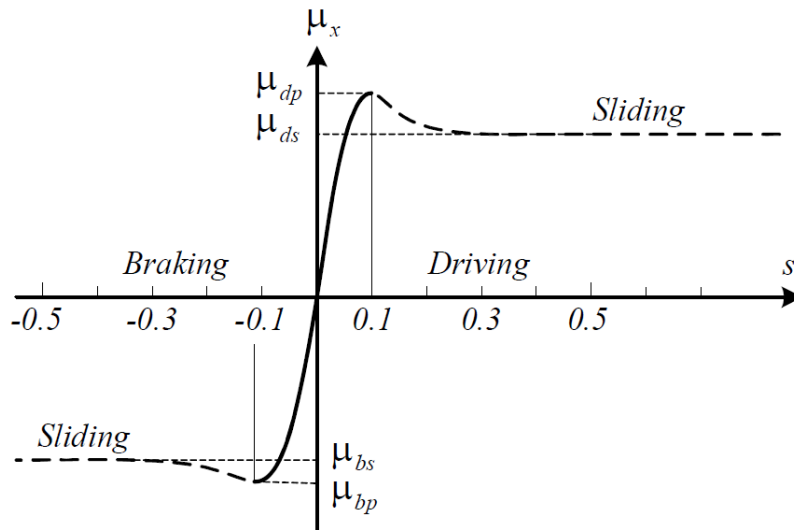
kde  $f_0$  je výchozí součinitel tření, relativní rychlost  $v_{rel,i}$  představuje vztah

$$v_{rel,i} = r\dot{\varphi}_i - \dot{x}. \quad (3.1.6)$$

Tento model aproximuje závislost podélné trakční síly na podélném prokluzu reálného kola, který v tomto případě vyjadřujeme jako slip ratio  $s = v_{rel}/\dot{x}$ , jak je ilustrováno na obrázku (3.3). Výstup byl zbezrozměrován vůči vstupní hodnotě  $f_0$  pro lepší porovnání s experimentálně zjištěnou závislostí na obrázku 3.4. Pro porovnání byla totiž přidána experimentálně zjištěná závislost v reálném prostředí, která byla převzata z [8], viz obrázek 3.4.



Obr. 3.3: Závislost proměnného koeficientu tření v poměru ku výchozímu koeficientu tření, na slip ratiu, pro jednoduchý model pneumatiky



Obr. 3.4: Experimentálně určená závislost proměnného koeficientu tření na slip ratiu, převzato z [1]

Porovnáním závislostí z obrázků 3.3 a 3.4 vidíme, že námi zavedený vztah pro proměnný koeficient tření (3.1.5) poměrně efektivně aproximuje jeho skutečnou závislost na relativní rychlosti. Mezi naší aproximací a experimentálně zjištěnou závislostí můžeme vidět rozdíl v globálním maximu a minimu funkce, které u experimentálně zjištěné závislosti nastává při jemném prokluzu. Tento rozdíl částečně kompenzuje rychlejší náběh koeficientu u naší aproximace. Pro naše využití je tedy tato aproximace dostačující.

## 3.2 Sestavení pohybových rovnic

Pohybové rovnice popisují pohyb mechanické soustavy těles v prostoru. Obecně se jedná o soustavy diferenciálních rovnic 2. řádu ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}, \quad (3.2.1)$$

kde  $\mathbf{M}$  je matice hmotnosti systému,  $\ddot{\mathbf{q}}$  je vektor zrychlení, obsahující druhé derivace nezávislých proměnných, tedy posuvu  $x$  a úhlů natočení kol  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  a konečně  $\mathbf{f}$  je vektor zobecněných sil reprezentující silové a momentové působení na soustavu. Po rozepsání

tedy dostáváme soustavu tří rovnic

$$\begin{bmatrix} m + 2m_W & & \\ & I_W & \\ & & I_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1}(N_1) + F_{x2}(N_2) \\ M_1 - rF_{x1}(N_1) \\ M_2 - rF_{x2}(N_2) \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

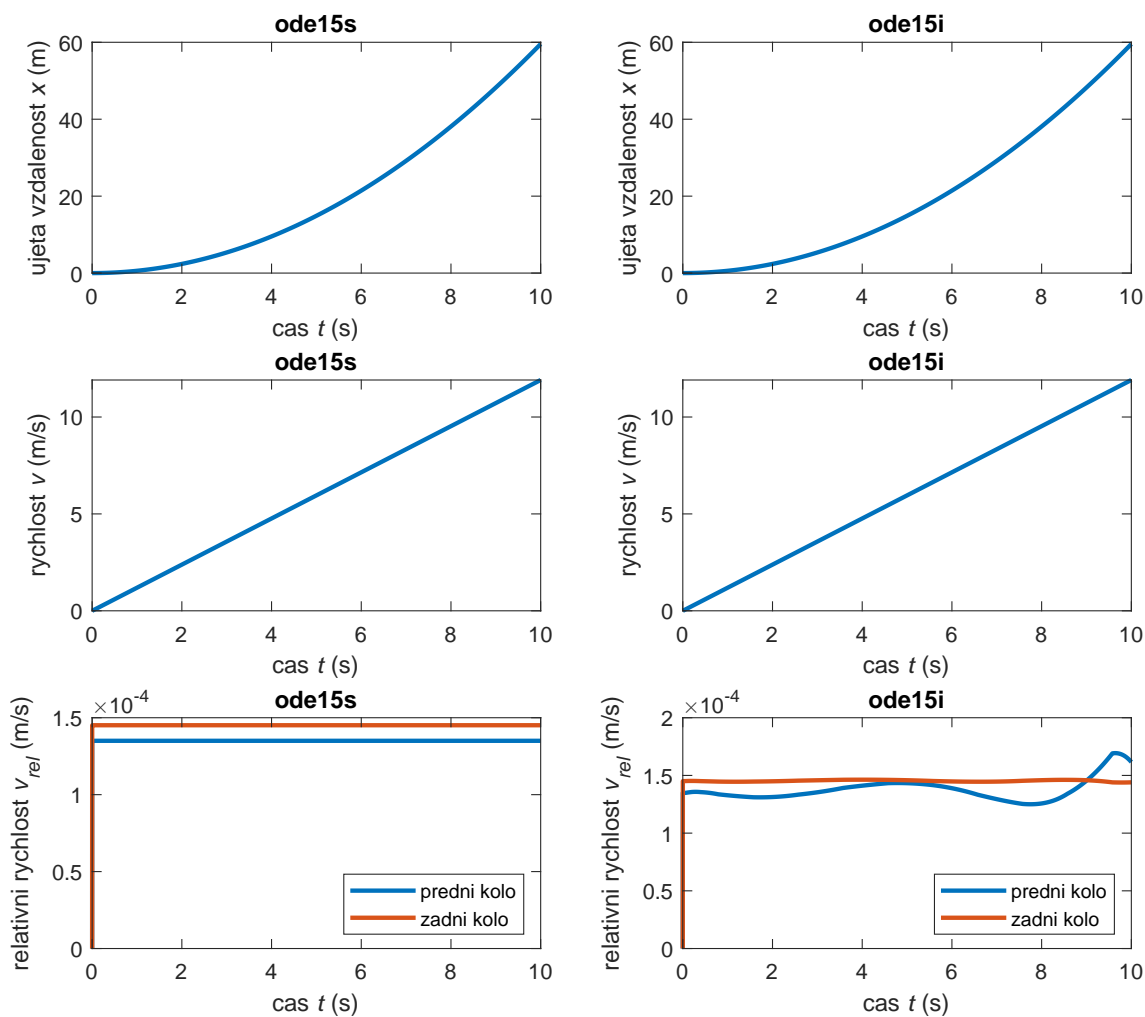
pro dvoukolý model s třemi stupni volnosti. Při předpokladu symetrického zatížení levé a pravé strany můžeme uvažovat další dvě kola, tedy dvě na přední a dvě na zadní nápravě. Tímto nám přibývají další dva stupně volnosti a vlastní pohybové rovnice se změňí na soustavu pěti rovnic druhého řádu, tedy

$$\begin{bmatrix} m + 4m_W & & & & \\ & I_W & & & \\ & & I_W & & \\ & & & I_W & \\ & & & & I_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1}(N_1) + F_{x2}(N_2) \\ M_{pp} - rF_{xpp}(N_{pp}) \\ M_{pz} - rF_{xpz}(N_{pz}) \\ M_{lp} - rF_{xlp}(N_{lp}) \\ M_{lz} - rF_{xlz}(N_{lz}) \end{bmatrix}, \quad (3.2.3)$$

pro model čtyřkolý, kde

$$M_1 = M_{pp} + M_{lp}, \quad M_2 = M_{pz} + M_{lz}, \quad N_{pp} = N_{lp} = \frac{N_1}{2} \quad a \quad N_{pz} = N_{lz} = \frac{N_2}{2}. \quad (3.2.4)$$

Soustava obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu byla v tomto případě řešena nejprve bez přitěžování náprav z důvodů absence setrvačného členu od zrychlení při řešení explicitním numerickým řešičem. Poté byla, kvůli závislosti vertikálních reakcí  $N_i$  na členu  $\ddot{x}$ , řešena pomocí implicitního numerického řešiče pro hodnoty odpovídající studentské formuli UWB-04, které byly převzaty z kapitoly 2.1.1. Výstup jednotlivých řešičů rozjezdu dvoukolého modelu vozidla hnacími momenty  $M_1 = 40 \text{ Nm}$  a  $M_2 = 60 \text{ Nm}$  je na obrázku 3.5.

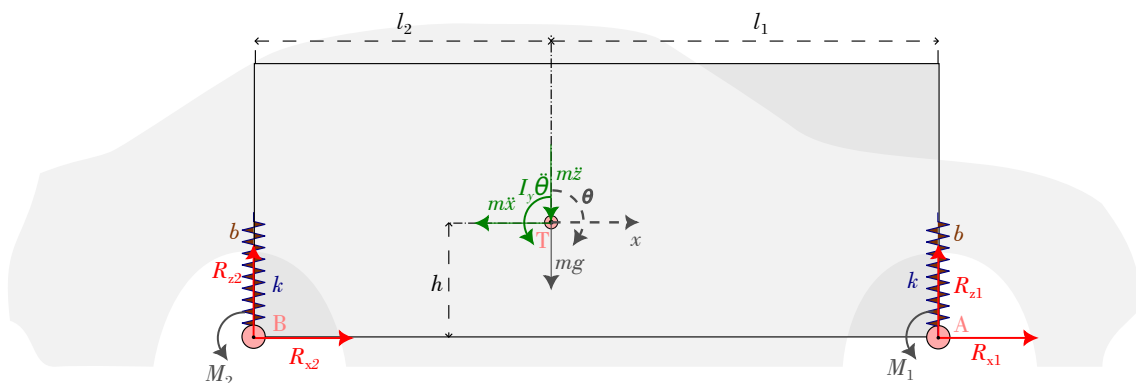


Obr. 3.5: Výstup numerické integrace 2D Modelu (výsledky pro explicitní řešič vlevo, pro implicitní vpravo)

Tento model simuluje proměnné zatížení náprav, zároveň ale zanedbává náklon šasi, který při rozjezdu a brzdění nastává. Na obrázku 3.5 můžeme vidět porovnání výstupů explicitního a implicitního numerického řešiče. Implicitní řešič (vpravo) navíc uvažuje člen setrvačné síly od zrychlení, který přitěžuje jednotlivé nápravy. To se projevuje, jak můžeme vidět, na relativní rychlosti, kdy odlehčená přední náprava v případě použití implicitního řešiče více prokluzuje. Mimo průběh relativních rychlostí můžeme vidět, že výstupy pohybu celé soustavy jsou identické. V případě řešení obou řešičů dosáhl model rychlosti  $12 \text{ ms}^{-1}$  a ujel 60 m.

### 3.3 Doplnění rovinného modelu o náklon a odpružení

Při uvažování náklonů šasi zavádíme novou nezávislou výchylku úhlu náklonu šasi  $\theta$ , kterou dle konvencí popisu pohybu vozidel označujeme termínem **pitch** (klonění). Nejdříve doplníme stávající model šasi o pružné spojení s podvozkem (viz obrázek 3.6) a o tlumiče, které produkují vratný moment v závislosti na úhlové rychlosti  $\dot{\theta}$ . Doplněním odpružení



Obr. 3.6: Model šasi s odpružením

šasi nám vzniká vratný moment, který vyrovnává klonění (pitch) šasi. Tímto se mění momentová podmínka rovnováhy šasi, která musí zahrnovat vratný moment od odpružení. Pro malé úhly natočení, tedy  $\theta \leq 5^\circ$ , platí, že  $\sin \theta \approx \theta$ . Tuto aproximaci využijeme pro linearizaci deformace pružin a tlumičů při klonění vozidla. Uvažujme lineární pružinu o tuhosti  $k$ . Pak tedy vratná síla od odpružení působící na šasi bude

$$F_{kp} = k_p \cdot [(z - z_0) - \theta \cdot l_1]$$

pro přední pružiny, kde  $k_p$  je koeficient tuhosti předních pružin,  $z$  je aktuální výchylka,  $z_0$  je statická rovnovážná poloha a  $\theta$  je úhel klonění. Pro zadní pružiny pak

$$F_{kz} = k_z \cdot [(z - z_0) + \theta \cdot l_2].$$

Doplněním šasi o tlumiče nám vzniká tlumící moment závislý na rychlosti (úhlové rychlosti) šasi, který působí proti klonění a posuvu v ose  $z$  šasi. Uvažujme lineární tlumič o koeficientu tlumení  $b$ . Pak tedy tlumící síla od předního tlumiče bude

$$F_{bp} = b_p \cdot (\dot{z} - \dot{\theta} \cdot l_1)$$

a od zadního pak

$$F_{bz} = b_z \cdot (\dot{z} + \dot{\theta} \cdot l_2)$$

celková vertikální síla od tlumiče a pružiny je pak tedy

$$F_{zi} = F_{preload}^i - F_{ki} - F_{bp},$$

kde  $F_{preload}^i$  je síla předpětí pružiny, například v našem případě u čtyřkolého modelu nastavena podle vztahu

$$F_{preload}^p = \frac{m \cdot g \cdot l_2}{2 \cdot (l_1 + l_2)},$$

pro přední nápravu a

$$F_{preload}^z = \frac{m \cdot g}{2} - F_{preload}^p,$$

pro nápravu zadní. Hnací síly od kol  $F_{xi}$ , vyjádřené v kapitole 3.1, přeznačíme pro přehlednost tabulky na tvar  $H_i$ , pro  $i = \{1; 2; 3; 4\}$ . Síla  $F_{zi}$  pak zároveň z principu metody uvolňování působí vertikálně na pneumatiku. V jednoduchém modelu pneumatiky v kapitole 3.1 tedy nahrazujeme síly  $N_i$  silami  $F_{zi}$ .

K předchozím pohybovým rovnicím (3.3.1) a (3.3.2) doplníme momentovou podmínku rovnováhy šasi

$$-I_y \cdot \ddot{\theta} - F_{z1} \cdot l_1 + F_{z2} \cdot l_2 - h \cdot (H_1 + H_2) - M_1 - M_2 = 0$$

a silovou podmínku v ose  $z$

$$F_{z1} + F_{z2} - m\ddot{z} - mg = 0.$$

Doplníme vlastní pohybové rovnice o dvě rovnice pro nově získané stupně volnosti. Pro model se dvěma koly tedy vznikne soustava pěti diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\begin{bmatrix} m + 2m_W & & & & \\ & m & & & \\ & & I_y & & \\ & & & I_W & \\ & & & & I_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 + H_2 \\ F_{z2} + F_{z2} - mg \\ -F_{z1} \cdot l_1 + F_{z2} \cdot l_2 - z \cdot (H_1 + H_2) - M_1 - M_2 \\ M_1 - rH_1 \\ M_2 - rH_2 \end{bmatrix}. \quad (3.3.1)$$

Pro čtyřkolý model pak soustava sedmi diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m + 4m_W & & & & & & \\ & m & & & & & \\ & & I_y & & & & \\ & & & I_W & & & \\ & & & & I_W & & \\ & & & & & I_W & \\ & & & & & & I_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} H_1 + H_2 + H_3 + H_4 \\ F_{z1} + F_{z2} + F_{z3} + F_{z4} - mg \\ -F_{z1} \cdot l_1 + F_{z2} \cdot l_1 - F_{z3} \cdot l_2 + F_{z4} \cdot l_2 - z \cdot (H_1 + H_2 + H_3 + H_4) - \sum_i M_i \\ M_1 - rH_1 \\ M_2 - rH_2 \\ M_3 - rH_3 \\ M_4 - rH_4 \end{bmatrix}, \quad (3.3.2)
 \end{aligned}$$

Tyto soustavy rovnic řešíme explicitním numerickým řešičem. Opět byly použity hodnoty momentů setrvačnosti, deviačních momentů a hmotností z kapitoly 2.1. Pro dvoukolý model jsme uvažovali hnací moment s předpisem

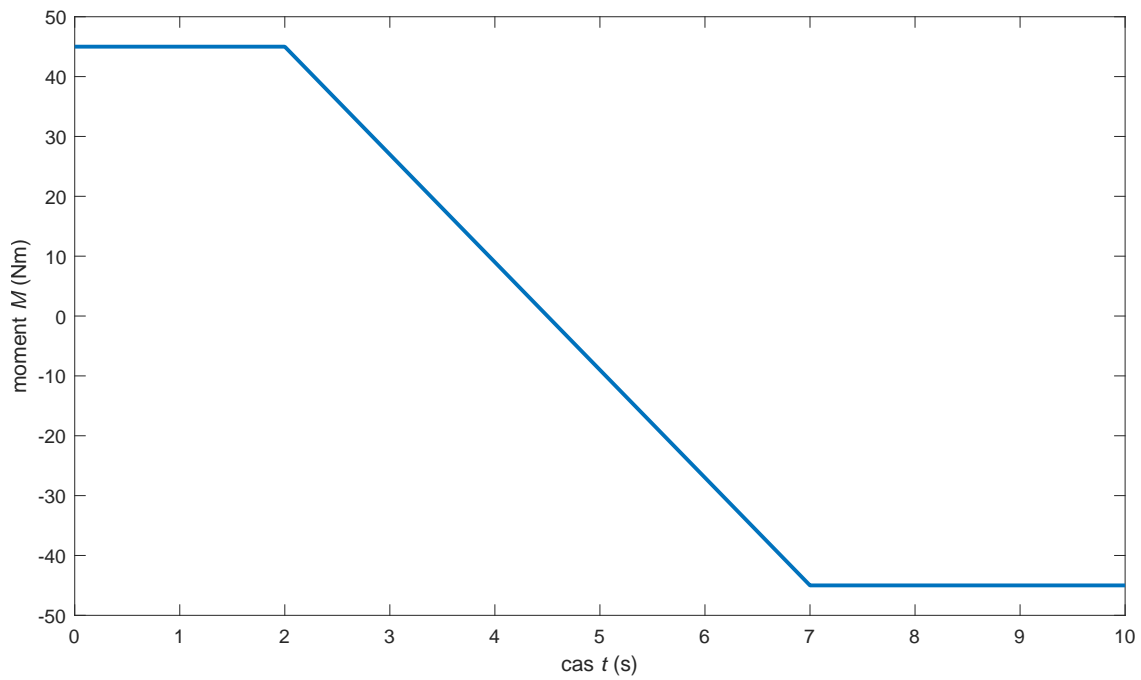
$$M_i = \begin{cases} 90 \text{ Nm} = M_0 & \text{pro } t < 2 \\ M_0 - M_0 \cdot (0.4 \cdot (t - 2)) & \text{pro } t \geq 2 \text{ pro } i = \{1; 2\} \\ -90 \text{ Nm} & \text{pro } t \geq 7 \end{cases}$$

tzn. vozidlo se rozjelo a zabrzdilo.  $M_0$  je v tomto případě zadaný počáteční moment na kolech. Výsledné grafy pro dvoukolý model můžeme vidět na obrázku 3.8. Pro čtyřkolý model jsme uvažovali hnací moment předepsaný funkcí

$$M_i = \begin{cases} 45 \text{ Nm} = M_0, & \text{pro } t < 2 \\ M_0 - M_0 \cdot (0.4 \cdot (t - 2)) & \text{pro } t \geq 2 \text{ pro } i = \{1; 2; 3; 4\} \\ -45 \text{ Nm} & \text{pro } t \geq 7 \end{cases}$$

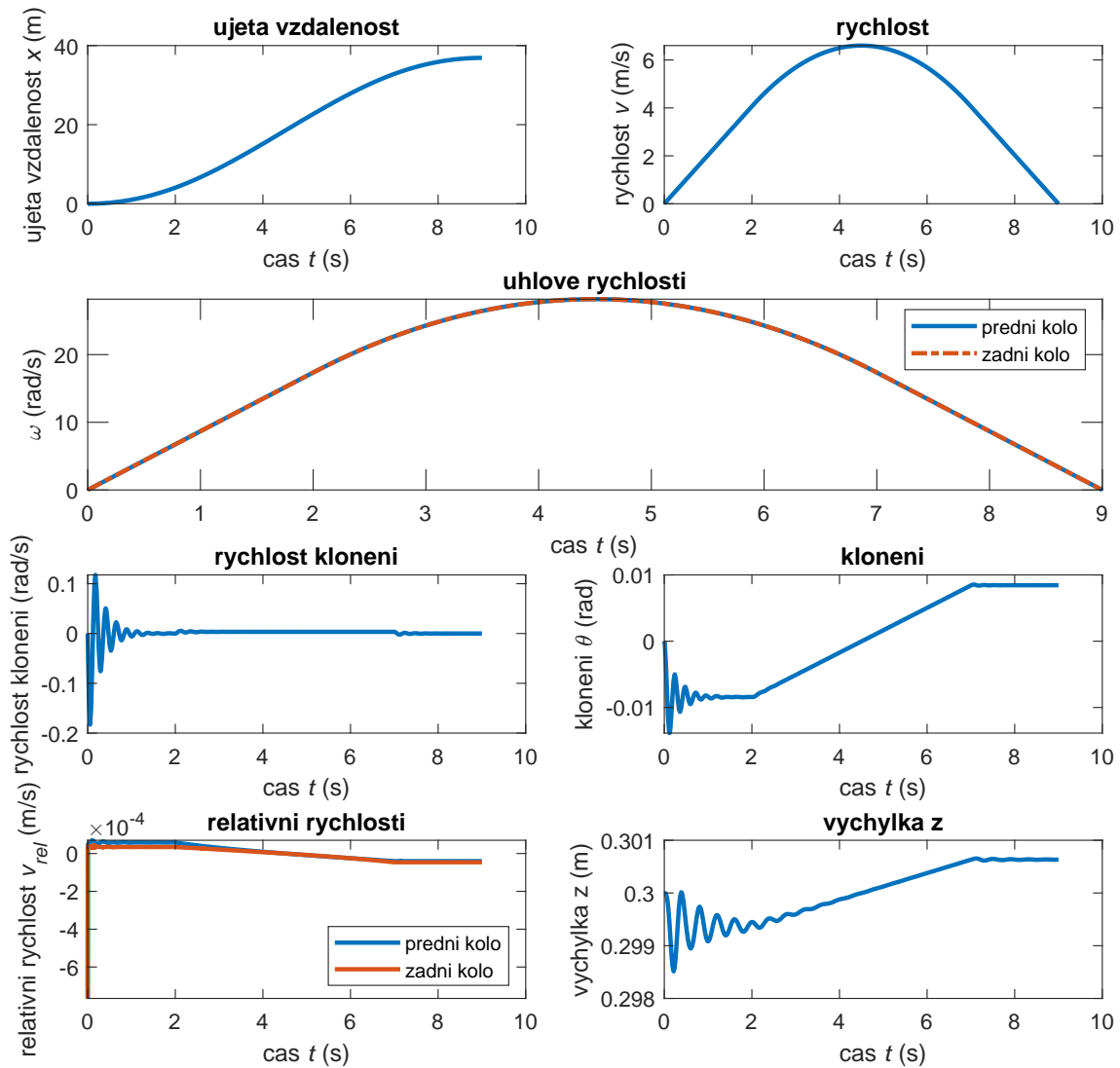
tzn. vozidlo se rozjelo a zabrzdilo stejným způsobem jako u dvoukolého modelu. Průběh momentu na kole čtyřkolého modelu v závislosti na čase můžeme vidět na obrázku 3.7. V modelech byly použity hodnoty  $k_p = k_z = 20 \text{ kNm}^{-1}$  a  $b_p = b_z = 200 \text{ Nsm}^{-1}$ . Kvůli porovnání výstupů jednotlivých modelů byl průběh momentů čtyřkolého a dvoukolého

modelu totožný. Výsledné grafy pro dvoukolý model můžeme vidět na obrázku 3.8, výsledky pro čtyřkolý model pak na obrázku 3.9. Simulace byla prováděna do času  $t = 9$  s, což je okamžik, kdy se vozidlo zastaví.



Obr. 3.7: Průběh momentu na jednotlivých kolech

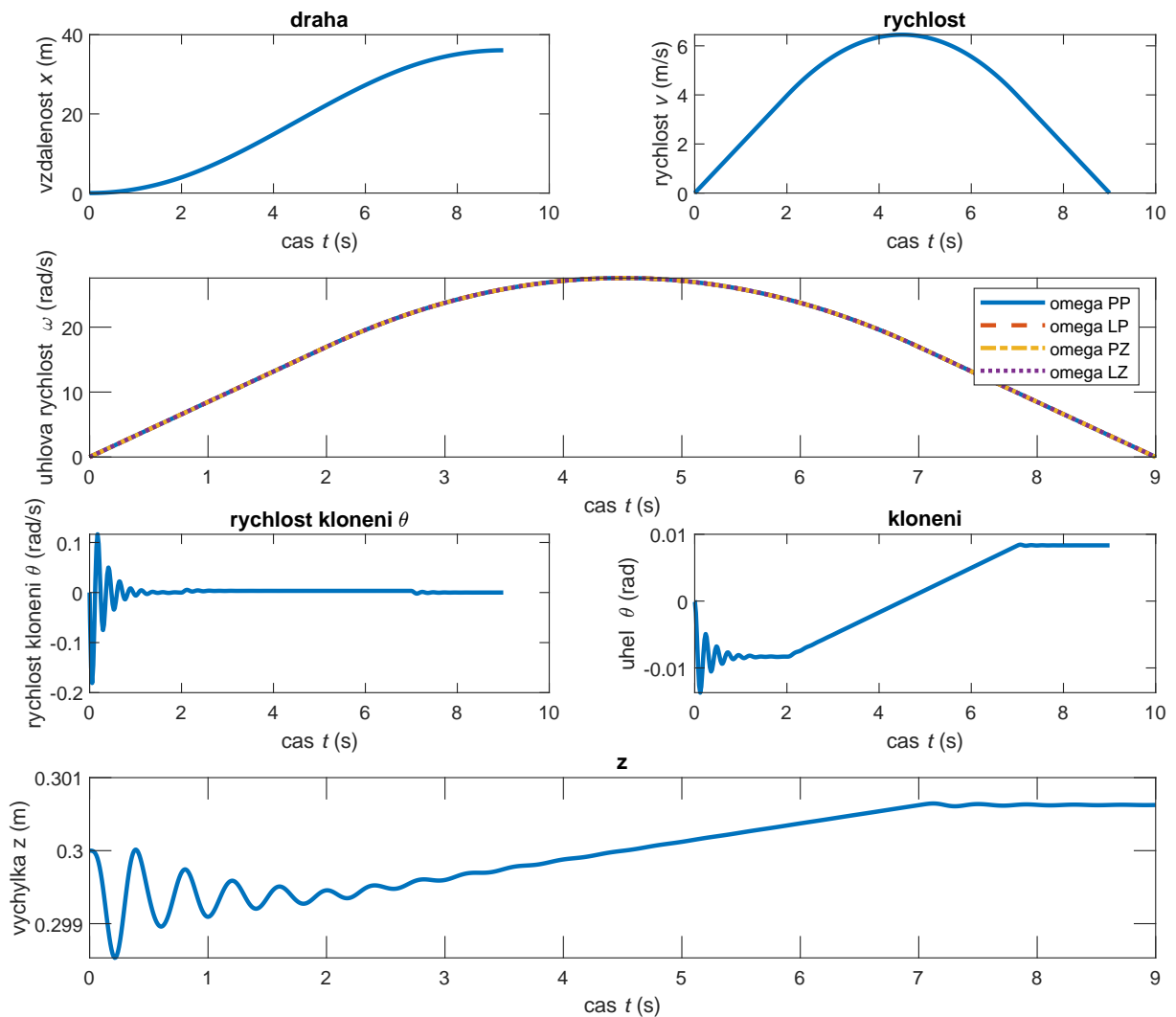




Obr. 3.8: Výstup numerické integrace rovinného dvoukolého modelu přímočarého pohybu s odpružením a tlumením

Na obrázku 3.8 vidíme, že během tohoto manévru ujelo vozidlo přes 35 m a jeho maximální rychlost byla přibližně  $7 \text{ ms}^{-1}$ . Při rozjezdu došlo k mírnému prokluzu, při brzdění se pak relativní rychlost dostala do záporných hodnot, tzn. obvodová rychlost kol byla nižší, než rychlost vozidla, jak je zjevné z obrázku 3.8. To reprezentuje stav reálného vozidla při mírném zablokování kol z důvodů excesivního brždění. Pokud je brzdný moment větší, dochází v případě skutečného vozidla i k naprostému zastavení otáčení kol. Tento jev je nežádoucí, jelikož může způsobit nekontrolovaný smyk a snižuje účinnost brždění. Pro jeho eliminaci se v dnešní době používají systémy jako ABS (Antilock Brake System), které snižují sílu, kterou brzdíč působí na třmen, čímž zabraňují jeho zablokování, jak je popsáno v [3, 4]. Výchylka v ose  $z$  se během jízdy postupně stabilizuje kolem hodnoty

$z_0$ . Při rozjezdu je patrný náběh záporného klonění, tedy záklon. Při přechodu vozidla do brzdění pak vidíme, že nastává předklon šasi. Ze závislosti relativních rychlostí na čase také vidíme, že při rozjezdu došlo vlivem odlehčení přední nápravy k většímu prokluzu předního kola.



Obr. 3.9: Výstup numerické integrace rovinného čtyřkolého modelu přímočarého pohybu s odpružením a tlumením

Na obrázku 3.9 vidíme, že stejně jako u dvoukolého modelu během tohoto manévru ujelo vozidlo přes 35 m a jeho maximální rychlost byla přibližně  $7 \text{ ms}^{-1}$ . Průběh výchyly v ose  $z$  je prakticky také totožný.

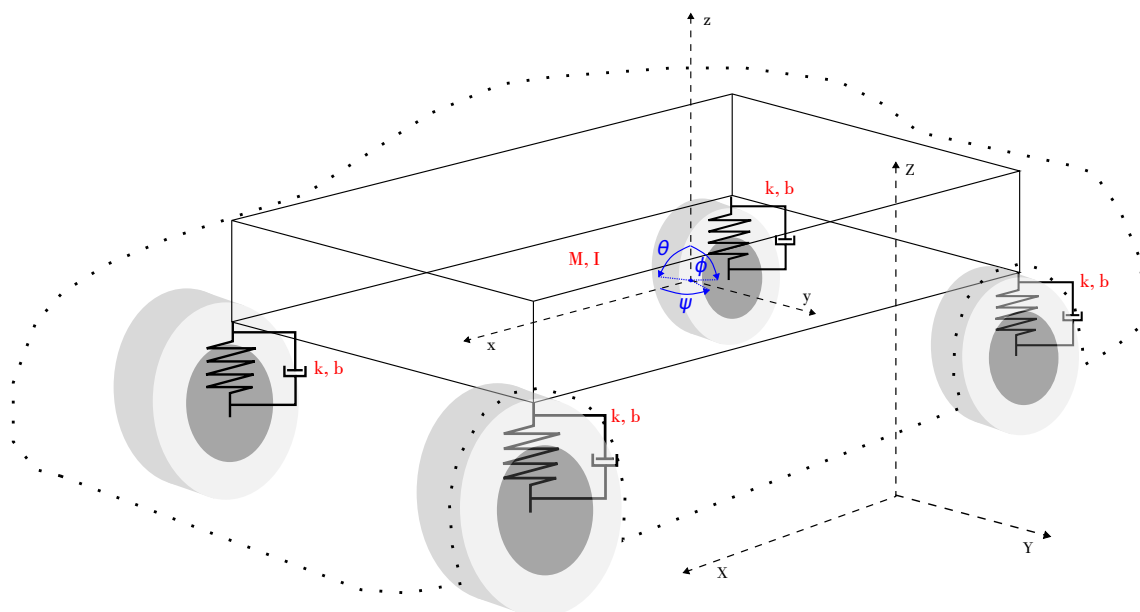
Z výstupů vidíme, že při rozjezdu (zrychlení) dochází u obou modelů k zápornému klonění, tedy záklonu, zatímco při brzdění nebo zpomalení dochází ke kladnému klonění, tedy předklonu, což odpovídá chování skutečných vozidel při těchto jízdních manévrech.

Model lze dále doplnit při předpokladu laminárního proudění vzduchu o odpor vzduchu [4, 1, 6]. Díky své jednoduchosti se na něm také dá testovat implementace složitějších modelů pneumatik, jako například Dugoffův model [1, 5].

# Kapitola 4

## Prostorový dynamický model vozidla

Matematickým modelem, kterým je možno simulovat už prakticky všechny jízdní manévry, kterých je vozidlo schopno, je prostorový model. Šasi je zcela uvolněno v prostoru, má tedy šest stupňů volnosti. Uvažujeme translační pohyb v osách  $X$ ,  $Y$  a  $Z$ , a rotační pohyb kolem lokálních os, tedy klopení  $\varphi$ , neboli **roll**, klonění  $\theta$ , neboli **pitch** a stáčení  $\psi$ , neboli **yaw**, viz obrázek 4.1. Šasi je s koly a podvozkem spojeno pružinami a tlumiči, které vytváří vratné síly v závislosti na rotaci šasi a úhlových rychlostech šasi, podobně jako je vyobrazeno v [7]. Uvažujeme dynamicky proměnné zatížení kol, tedy reálné pojetí jízdy vozidla s přitěžováním kol například při zrychlení. Také pro jednoduchost uvažujeme neustálý dotyk všech kol s vozovkou.



Obr. 4.1: Ilustrace odpružení 3D modelu vozidla

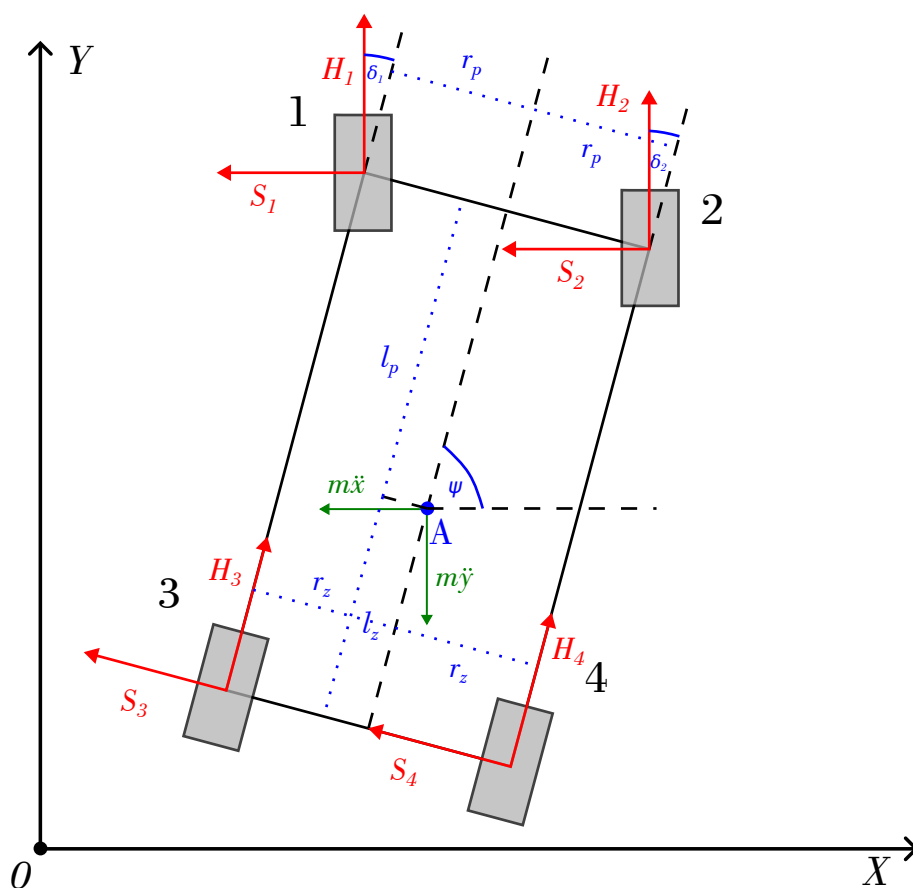
Zavádíme polohový vektor vozidla v globálním systému  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = [X^i, Y^i, Z^i]^T$$

a vektor natočení šasi v prostoru  $\Phi$

$$\Phi = [\phi^i, \theta^i, \psi^i]^T.$$

Zároveň zavádíme natačení pouze předních kol, a volný pohyb vozidla vůči globálnímu souřadnicovému systému, jak je vyobrazeno na obrázku 4.1 a 4.2.

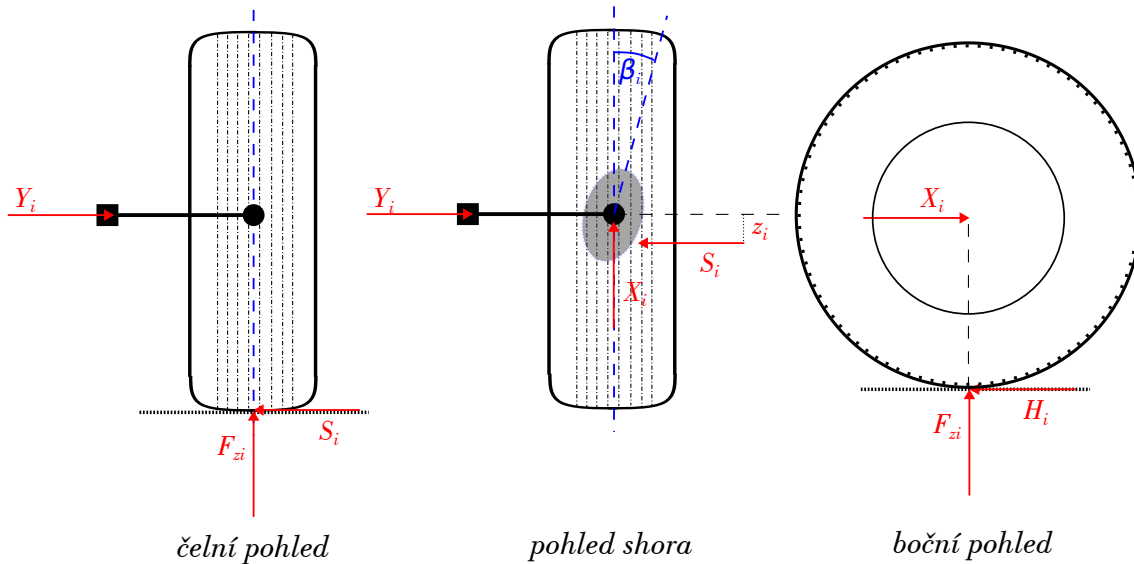


Obr. 4.2: Schéma prostorového modelu vozidla (pohled shora)

## 4.1 Modelování pneumatik pro prostorový model vozidla

Jak je naznačeno na obrázku 4.2, odpružení přenáší na rám síly od kontaktu pneumatik s vozovkou. Pro matematickou simulaci kontaktu pneumatik s vozovkou musíme vytvořit matematický model, tentokrát složitější, než model, který jsme použili v kapitole 3.1,

protože mimo síly hnací, bude zahrnovat i síly boční vodící. Modelování pneumatik vozidel je velice složitý problém, který řeší závislost trakčních a bočních sil na aktuálním stavu pneumatiky. Tyto síly jsou ovlivněny mnoha faktory, jako jsou vlastnosti a tvar vozovky a pneumatiky, momentální skluz, nebo svislé zatížení pneumatiky. Hlavními z těchto silových účinků jsou hnací síla  $H$  a boční vodící síla  $S$ , jak jsou znázorněny na obrázku 4.3. Síla  $Y_i$ , působící příčně na kolo vozidla, a představující setrvačné účinky volného pohybu



Obr. 4.3: Schéma sil působících na pneumatiku

vozidla na kola v prostoru vyvolá v místě kontaktu pneumatiky s vozovkou stejně velkou, opačně orientovanou sílu  $S_i$ . Ta vyvolává setrvačné odstředivé účinky při jízdě do zatáčky [9, 5]. Tento scénář pro valící se pneumatiku je zobrazen na obrázku 4.3. Při působení boční síly  $Y_i$  dochází k deformaci pneumatiky, kdy se osa stopy vychyluje mimo středovou rovinu kola. Při otáčení kola jsou pak elementární části pneumatiky, u kterých dochází momentálně ke kontaktu s vozovkou vychýleny. Tomuto vychýlení se říká **směrová úchylka** a reprezentuje ho úhel  $\beta_i$ . Při valení pneumatiky s nenulovým úhlem  $\beta_i$  dochází vlivem nerovnoměrného zatížení v kontaktní ploše také k posunu působíště boční vodící síly  $S_i$  o vzdálenost  $z_i$ , jak je zobrazeno na obrázku 4.3. Vzdálenost  $z_i$  nazýváme **závlek** [3, 5]. Tímto vzniká moment  $M_{si}$  který natáčí pneumatiku do směru rychlosti, ve tvaru

$$M_{si} = z_i S_i \quad (4.1.1)$$

Diagramy závislosti mezi stavovými veličinami pneumatiky a trakčními silami vznikajícími v kontaktu nazýváme směrové charakteristiky pneumatik, a jejich průběh určujeme

experimentálně. Poté hledáme funkci, která bude jejich průběh co nejlépe aproximovat, kterou použijeme pro jejich matematické modelování. Příkladem parametrů těchto závislostí jsou funkce závislé na směrové úchylce  $\beta_i$

$$S_i = f(\beta_i)$$

$$M_{S_i} = f(\beta_i).$$

Pro naše využití použijeme Dugoffův model pneumatiky. Mezi jeho výhody patří vzájemná nezávislost podélných a normálových sil. Na rozdíl od Pacejkova modelu pneumatiky předpokládá rovnoměrné rozložení zatížení v celém kontaktu pneumatiky s vozovkou. Princip bude vysvětlen v následující podkapitole 4.2. Pro naše účely zanedbáváme takzvanou Ackermanovu podmínku, která určuje závislost natočení jednotlivých předních kol  $\delta_1$  a  $\delta_2$  na průsečíku jejich normálových os ve středu opisované kružnice. V našem případě budou úhly  $\delta_1$  a  $\delta_2$  předepsané a totožné, tj. bude se jednat o řízení paralelní.

## 4.2 Dugoffův model pneumatiky

Dugoffův model pneumatiky je vedle Fialova (1954) a Pacejkova (1991) modelu pneumatiky dalším hojně využívaným modelem. Umožňuje modelovat trakční síly při kombinovaném namáhání pneumatik bočními a hnacími silami. Oproti Pacejkovu modelu zjednodušuje rozdělení vertikální síly působící na plochu dotyku tím, že jí uvažuje ve všech bodech totožnou, oproti Pacejkovu modelu, který uvažuje její parabolický průběh, viz [1, 5]. Výhoda Dugoffova modelu oproti Pacejkovu je možnost použití rozdílných hodnot tuhosti pneumatik v příčném a podélném směru. Model je dle [5, 9, 3] vyjádřen dvěma rovnicemi, jednou pro hnací síly  $H_i$  (4.2.1)

$$H_i = C_\sigma \frac{\sigma_i}{1 + \sigma_i} f(\lambda) \quad (4.2.1)$$

a druhou pro boční vodící síly  $S_i$  (4.2.2)

$$S_i = C_\beta \frac{\tan \beta_i}{1 + \sigma_i} f(\lambda). \quad (4.2.2)$$

Funkce  $f(\lambda)$  obsažená v těchto rovnicích je ve tvaru

$$f(\lambda) = \begin{cases} (2 - \lambda)\lambda, & \text{pro } \lambda < 1 \\ 1, & \text{pro } \lambda \geq 1 \end{cases}, \quad (4.2.3)$$

a parametr  $\lambda$  poté

$$\lambda = \frac{fF_{zi}(1 + \sigma_i)}{2\sqrt{(C_\sigma\sigma_i)^2 + (C_\beta \tan \beta_i)^2}}, \quad (4.2.4)$$

kde  $C_\beta$  je směrová tuhost,  $C_\sigma$  je tuhost podélná,  $f$  je součinitel tření,  $F_{zi}$  svislé zatížení,  $\beta_i$  směrová úchylka a  $\sigma_i$  podélný skluz kola.

V Dugoffově modelu pneumatiky není zahrnut moment  $M_{si}$ , který při valení pneumatiky s nenulovou směrovou úchylkou působí na kolo. Ten ale jednoduše dopočítáme podle vztahu (4.1.1), kde  $z_s$  stanovíme experimentálně. Pro náš model jsme použili hodnotu pro  $z_s$  převzanou z [2], tedy 0,025 m.

### 4.3 Eulerovy úhly

Pro popis pohybu a prostorového natočení prostorového modelu se obecně používají takzvané **Eulerovy úhly**. V trojrozměrném prostoru můžeme popsat rotaci systému třemi nezávislými Eulerovými úhly, které nahrazují běžný popis prostorové rotace pomocí směrových kosinů. Eulerovy úhly vyjadřují postupná natočení kolem os, které na sebe obecně nemusí být kolmé. Provedením těchto tří rotací ve správném pořadí se systém dostává do jakéhokoliv prostorového natočení, jak je uvedeno v [10].

Mějme dva zprvu totožné systémy souřadnic  $XYZ$  a  $X^iY^iZ^i$ . Nejprve provedeme otočení  $\phi^i$  kolem osy  $Z$ . Matici transformace této rotace pak vyjádříme jako

$$\mathbf{A}_1^i = \begin{bmatrix} \cos \phi^i & -\sin \phi^i & 0 \\ \sin \phi^i & \cos \phi^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3.1)$$

Následuje natočení o úhel  $\theta^i$  kolem momentální osy  $X^i$ , které popíšeme transformační maticí

$$\mathbf{A}_2^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^i & -\sin \theta^i \\ 0 & \sin \theta^i & \cos \theta^i \end{bmatrix}. \quad (4.3.2)$$

Nakonec přichází natočení systému o úhel  $\psi^i$  kolem momentální osy  $Z^i$

$$\mathbf{A}_3^i = \begin{bmatrix} \cos \psi^i & -\sin \psi^i & 0 \\ \sin \psi^i & \cos \psi^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3.3)$$



Tato sekvence se vyjádří vektorem natočení  $\Phi^i$

$$\Phi^i = \begin{bmatrix} \phi^i \\ \theta^i \\ \psi^i \end{bmatrix}. \quad (4.3.4)$$

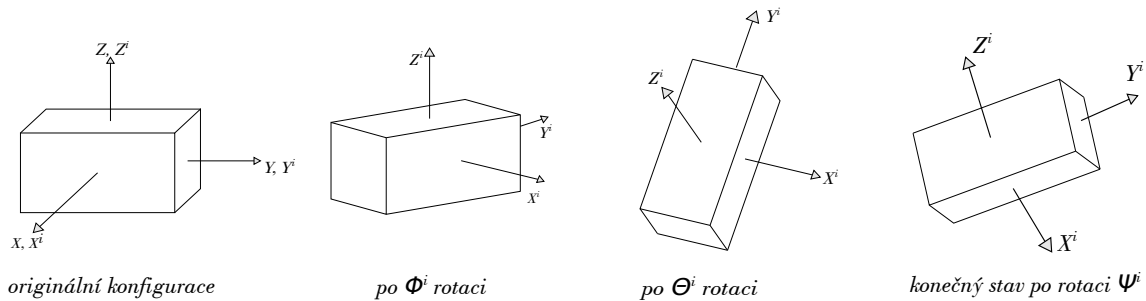
Použitím transformačních matic ze vztahů (4.3.1), (4.3.2), (4.3.3) můžeme pomocí vztahu

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{A}_1^i \mathbf{A}_2^i \mathbf{A}_3^i \quad (4.3.5)$$

sestavit transformační matici  $A^i$  finální orientace systému  $X^i Y^i Z^i$ , která bude mít tvar

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} \cos \psi^i \cos \phi^i - \cos \theta^i \sin \phi^i \sin \psi^i & -\sin \psi^i \cos \phi^i - \cos \theta^i \sin \phi^i \cos \psi^i & \sin \theta^i \sin \phi^i \\ \cos \psi^i \sin \phi^i + \cos \theta^i \cos \phi^i \sin \psi^i & -\sin \psi^i \sin \phi^i + \cos \theta^i \cos \phi^i \cos \psi^i & -\sin \theta^i \cos \phi^i \\ \sin \theta^i \sin \psi^i & \sin \theta^i \cos \psi^i & \cos \theta^i \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

kde úhly  $\phi^i$ ,  $\theta^i$ ,  $\psi^i$  se nazývají **Eulerovými úhly**. Prostorová orientace trojrozměrného objektu se pak dá získat provedením těchto tří po sobě jdoucích rotací, jak je znázorněno na obrázku 4.4 a zmíněno v [10] a [9].



Obr. 4.4: Ilustrace Eulerových úhlů

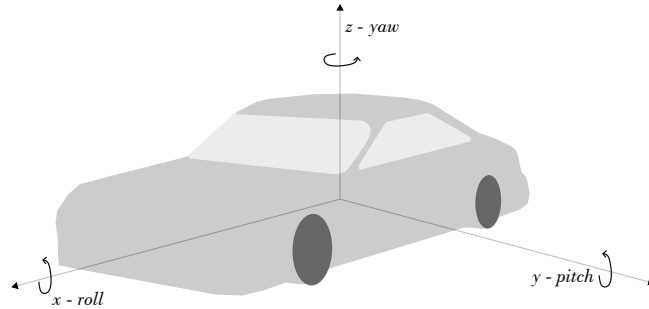
## 4.4 Tait-Bryanovy úhly

V této sekci jsme uvažovali postupnou sekvenci rotací systému kolem momentálních os  $z^i$ ,  $y^i$  a  $x^i$ , což odpovídá speciálnímu případu Eulerových úhlů, kterými jsou **Tait-Bryanovy úhly**. Tait-Bryanovy úhly používáme v prostorovém modelu s šesti stupni volnosti pro jejich speciální formalismus, užívaný pro jeho praktičnost při popisu pohybu vozidel. Ten, oproti posloupnosti natočení klasických Eulerových úhlů, uvažuje prvotní natočení kolem

lokální osy  $z^i$ , následně kolem osy  $y^i$ , a finální rotace je vedena kolem lokální osy  $x^i$ . Vektor a sekvence natočení  $\Phi^i$  je pak tedy

$$\Phi^i = \begin{bmatrix} \psi^i \\ \theta^i \\ \phi^i \end{bmatrix} \quad (4.4.1)$$

kde v konvenci vozidel nazýváme natočení  $\psi^i$  termínem **yaw**, neboli **stáčení**,  $\theta^i$  termínem **pitch**, neboli **klonění** a  $\phi^i$  termínem **roll**, neboli **klopení**.



Obr. 4.5: Konvence názvů rotací

Transformační matice z lokálního do globálního systému znovu sestavíme vztahem (4.3.5), kde se ale kvůli rozdílné sekvenci natočení změní tvar matice  $\mathbf{A}_i^i$ , kde  $i = \{1; 2; 3\}$  na

$$\mathbf{A}_1^i = \begin{bmatrix} \cos \psi^i & -\sin \psi^i & 0 \\ \sin \psi^i & \cos \psi^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

$$\mathbf{A}_2^i = \begin{bmatrix} \cos \theta^i & 0 & \sin \theta^i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta^i & 0 & \cos \theta^i \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

$$\mathbf{A}_3^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi^i & -\sin \phi^i \\ 0 & \sin \phi^i & \cos \phi^i \end{bmatrix}. \quad (4.4.4)$$

Přičemž jednotlivé transformační matice označíme podle typu rotace šasi (stáčení  $\psi$ , klonění  $\theta$  a klopení  $\phi$ ), kterou reprezentují, tedy

$$\mathbf{A}_1^i = \mathbf{A}_\psi, \mathbf{A}_2^i = \mathbf{A}_\theta, \mathbf{A}_3^i = \mathbf{A}_\phi,$$

a jejich jednotlivé vzájemné násobky označujeme konvencí například

$$\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta = \mathbf{A}_{\psi\theta}.$$

Z porovnání dvou různých konvencí natočení vidíme, že největší vzájemná tvarová odchylka je v druhé matici.

Finální transformační matice popisující celkové natočení šasi bude tedy mít tvar

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{A}_{\psi\theta\phi} = \begin{bmatrix} \cos \psi^i \cos \theta^i & \cos \psi^i \sin \phi^i \sin \theta^i - \cos \phi^i \sin \psi^i & \sin \psi^i \sin \phi^i + \cos \psi^i \cos \phi^i \sin \theta^i \\ \cos \theta^i \sin \psi^i & \cos \psi^i \cos \phi^i + \sin \psi^i \sin \phi^i \sin \theta^i & -\cos \psi^i \sin \phi^i + \cos \phi^i \sin \psi^i \sin \theta^i \\ -\sin \theta^i & \cos \theta^i \sin \phi^i & \cos \phi^i \cos \theta^i \end{bmatrix}. \quad (4.4.5)$$

## 4.5 Sestavení pohybových rovnic

Pro sestavení pohybových rovnic vozidla využijeme Newton-Eulerovy rovnice. V Newton-Eulerově formulaci jsou pohybové rovnice vyjádřeny za pomoci úhlových rychlostí a vektorů zrychlení. Pro použití Newton-Eulerových rovnic předpokládáme, že počátek lokálního systému souřadnic tělesa, neboli referenční bod, je totožný se středem hmotnosti tělesa. Tvar pohybové rovnice tuhého tělesa pak bude

$$m^i \ddot{\mathbf{R}}^i = (\mathbf{Q}_e^i)_R \quad (4.5.1)$$

pro translační pohyb, kde  $m^i$  je hmotnost tuhého tělesa,  $\ddot{\mathbf{R}}^i$  je vektor zrychlení, a  $(\mathbf{Q}_e^i)_R$  je vektor zobecněných sil působících na šasi. Pohyb rotační nám poté popisuje rovnice

$$\mathbf{I}_{\theta\theta}^i \boldsymbol{\alpha}^i = \mathbf{F}_\theta^i - \boldsymbol{\omega}^i \times (\mathbf{I}_{\theta\theta}^i \boldsymbol{\omega}^i), \quad (4.5.2)$$

jak je uvedeno v [10], kde  $\boldsymbol{\alpha}^i$  je vektor úhlového zrychlení, definován v globálním systému souřadnic,  $\boldsymbol{\omega}^i$  je vektor úhlových rychlostí, definován v globálním systému souřadnic,  $\mathbf{I}_{\theta\theta}^i$  je tenzor setrvačnosti v globálním souřadnicovém systému, a  $\mathbf{F}_\theta^i$  je vektor kartézských momentů sil, které působí na tuhé těleso. Rovnice (4.5.1) a (4.5.2) můžeme zkombinovat do maticového zápisu

$$\begin{bmatrix} m^i \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\theta\theta}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}^i \\ \boldsymbol{\alpha}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_e^i)_R \\ \mathbf{F}_\theta^i - \boldsymbol{\omega}^i \times (\mathbf{I}_{\theta\theta}^i \boldsymbol{\omega}^i) \end{bmatrix}. \quad (4.5.3)$$

Úhlové rychlosti nejsou v prostorové dynamice obecně časovými derivacemi polohy. Proto úhlové zrychlení, které získáme řešením Newton-Eulerových rovnic nemůže být přímo integrováno pro získání polohových parametrů. Pro jejich získání potřebujeme vyjádřit funkci závislosti jejich druhé derivace na úhlových rychlostech.

Člen úhlových rychlostí v lokálním systému vozidla  $\bar{\omega}^i$  můžeme vyjádřit podle vztahu s maticí  $\mathbf{G}^i$ , který je uveden v [10]

$$\bar{\omega}^i = \mathbf{A}^T \mathbf{G}^i \Phi^i, \quad (4.5.4)$$

kde vektor  $\Phi^i$  je vektorem Tait-Bryanových úhlů. Dále ještě vyjádříme člen globálního zrychlení  $\alpha$

$$\alpha = \dot{\mathbf{G}}\dot{\Phi} + \mathbf{G}\ddot{\Phi},$$

a lokálního zrychlení  $\bar{\alpha}$

$$\bar{\alpha} = \mathbf{A}^T (\dot{\mathbf{G}}\dot{\Phi} + \mathbf{G}\ddot{\Phi}).$$

Tvar matice  $\mathbf{G}^i$  je pro danou sekvenci rotací, jak je uvedeno v [10],

$$\mathbf{G}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \psi & \cos \theta \cos \psi \\ 0 & \cos \psi & \cos \theta \sin \psi \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix}. \quad (4.5.5)$$

Pokud vyjádříme úhlové zrychlení v lokálním souřadnicovém systému, matice koeficientů v (4.5.3) bude konstantní. Využitím vztahu

$$\alpha^i = \mathbf{A}^i \bar{\alpha}^i$$

a

$$\mathbf{I}_{\theta\theta}^i = \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i \mathbf{A}^{iT},$$

kde  $\mathbf{A}^i$  je transformační matice z lokálního do globálního systému, a  $\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i$  je matice setrvačnosti vozidla, kterou jsme odvozovali v 2.1.1, v rovnici (4.5.2) po úpravě a kombinaci s (4.5.1) dostáváme alternativní formu Newton-Eulerových rovnic

$$\begin{bmatrix} m^i \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}^i \\ \bar{\alpha}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_e^i)_R \\ \bar{\mathbf{F}}_{\theta}^i - \bar{\omega}^i \times (\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i \bar{\omega}^i) \end{bmatrix}. \quad (4.5.6)$$

V této formě zápisu Newton-Eulerových rovnic matice koeficientů konstantní, jelikož tenzor setrvačnosti je definován v lokální souřadném systému šasi.

Pro kompletní popis pohybu našeho modelu vozidla přidáme k (4.5.6) pohybové rovnice kol

$$\mathbf{I}_W \bar{\boldsymbol{\alpha}}_W^i = \mathbf{M}_W^i, \quad (4.5.7)$$

kde  $\mathbf{I}_W$  je matice momentů setrvačnosti kol ve tvaru

$$\mathbf{I}_W = \begin{bmatrix} I_W & & & \\ & I_W & & \\ & & I_W & \\ & & & I_W \end{bmatrix},$$

$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_W^i$  je vektor úhlových zrychlení jednotlivých kol

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_W^i = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix},$$

a  $\mathbf{M}_W^i$  vektor momentů sil na kolech

$$\mathbf{M}_W^i = \begin{bmatrix} M_1 - r_W H_1 \\ M_2 - r_W H_2 \\ M_3 - r_W H_3 \\ M_4 - r_W H_4 \end{bmatrix}.$$

Podélné síly  $H_i$  pro  $i = \{1; 2; 3; 4\}$  řešíme podle Dugoffova modelu pneumatiky z podkapitoly 4.1. Člen  $r_W$  je převzat z tabulky parametrů 2.3.  $\mathbf{I}$  je pak jednotková matice.

Zobecněné síly  $(\mathbf{Q}_e^i)_R$  působící na těleso jsou síly působící na šasi od odpružení a kol, jak jsou zobrazeny na obrázku 4.2 doplněné o tíhovou sílu. Síly působící od kol na šasi musíme přetransformovat z lokálního do globálního souřadného systému a proto tvar  $(\mathbf{Q}_e^i)_R$  bude

$$(\mathbf{Q}_e^i)_R = \mathbf{A}_\psi (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4) + \mathbf{g}, \quad (4.5.8)$$

kde matice  $\mathbf{A}_\psi$  je transformační matice z lokálního do globálního systému po natočení o úhel  $\psi$ , silové vektory  $\mathbf{F}_i$  ( $i = \{1; 2; 3; 4\}$ ) reprezentují síly od kol  $H_i$ ,  $S_i$  a síly od odpružení  $F_{S_i}$ , působící na rám, ve tvarech

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 & -\sin \delta_1 & 0 \\ \sin \delta_1 & \cos \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ S_1 \\ F_{S1} \end{bmatrix} \quad (4.5.9)$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \cos \delta_2 & -\sin \delta_2 & 0 \\ \sin \delta_2 & \cos \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 \\ S_2 \\ F_{S2} \end{bmatrix} \quad (4.5.10)$$

$$\mathbf{F}_3 = [H_3; S_3; F_{S3}]^T \quad (4.5.11)$$

$$\mathbf{F}_4 = [H_4; S_4; F_{S4}]^T, \quad (4.5.12)$$

a kde

$$\mathbf{g} = [0; 0; -m^i g]^T,$$

přičemž  $m^i$  je celková hmotnost tělesa a  $g$  je tíhové zrychlení. V rovnicích (4.5.9) až (4.5.12) si můžeme povšimnout členů  $F_{Si}$  ( $i = \{1; 2; 3; 4\}$ ), které označují vertikální síly od odpružení.  $F_{Si}$  jsou definovány jako

$$F_{Si} = F_{prlp} - k_p(Z - Z_0 + d_{iz}) - b_p \dot{d}_{iz} \quad (4.5.13)$$

pro přední nápravu a

$$F_{Si} = F_{prlz} - k_z(Z - Z_0 + d_{iz}) - b_z \dot{d}_{iz} \quad (4.5.14)$$

pro nápravu zadní.  $F_{prlz}$  představuje sílu předpětí pružiny,  $k_p$  a  $k_z$  jsou koeficienty tuhosti předních a zadních pružin,  $b_p$  a  $b_z$  jsou koeficienty tlumení předních a zadních tlumičů. Člen  $Z$  reprezentuje výchylky v ose  $z$ ,  $Z_0$  statická rovnovážná poloha,  $\dot{d}_{iz}$  jsou rychlosti a  $d_{iz}$  jsou velikosti pružné vertikální deformace odpružení, které se spočítají vztahy

$$d_{iz} = \mathbf{A}_{\theta\phi} \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i \quad (4.5.15)$$

$$\dot{d}_{iz} = \dot{\mathbf{R}}^i + (\mathbf{G}\dot{\Phi}^i) \times (\mathbf{A}_{\theta\phi} \mathbf{r}_i), \quad (4.5.16)$$

kde

$$\dot{\mathbf{R}}^i = [\dot{X}; \dot{Y}; \dot{Z}],$$

a kde  $\mathbf{r}_i$  jsou polohové vektory uchycení zavěšení od středu lokálního systému souřadnic, umístěného ve středu hmotnosti vozidla.

Matice  $\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i$  ve vztahu (4.5.6) je matice setrvačnosti tuhého tělesa v lokálním souřadnicovém systému. Tuto matici jsme již odvodili v kapitole 2.1.  $\bar{\mathbf{F}}_{\theta}^i$  je vektor zobecněných momentů sil působících na tuhé těleso (šasi).

$$\bar{\mathbf{F}}_{\theta}^i = \sum_{i=1}^4 [(\mathbf{A}_{\theta\phi}^T \mathbf{r}_i) \times (\mathbf{A}_{\theta\phi}^T \mathbf{F}_i)] - \mathbf{A}_{\theta\phi}^T \mathbf{M}_j - \mathbf{A}_{\theta\phi}^T \mathbf{S}, \quad (4.5.17)$$

kde

$$\mathbf{M}_j = \left[ 0; \sum_{j=1}^4 M_j; 0 \right]^T,$$

a

$$\mathbf{S} = \left[ 0; 0; \sum_{k=1}^4 (z_i \cdot S_k) \right]^T. \quad (4.5.18)$$

V případě vztahu (4.5.18) představuje veličina  $z_i$  **závlek** (viz kapitola (4.1)). Člen  $\mathbf{r}_i$  je pro ( $i = \{1; 2; 3; 4\}$ ) definován jako

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{ix} \\ r_{iy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \end{bmatrix} \\ -Z \end{bmatrix}$$

Tímto máme všechny členy Newton-Eulerových rovnic (4.5.6) vyjádřeny, zkombinováním rovnic (4.5.6) s (4.5.7) získáváme pohybovou rovnici vozidla

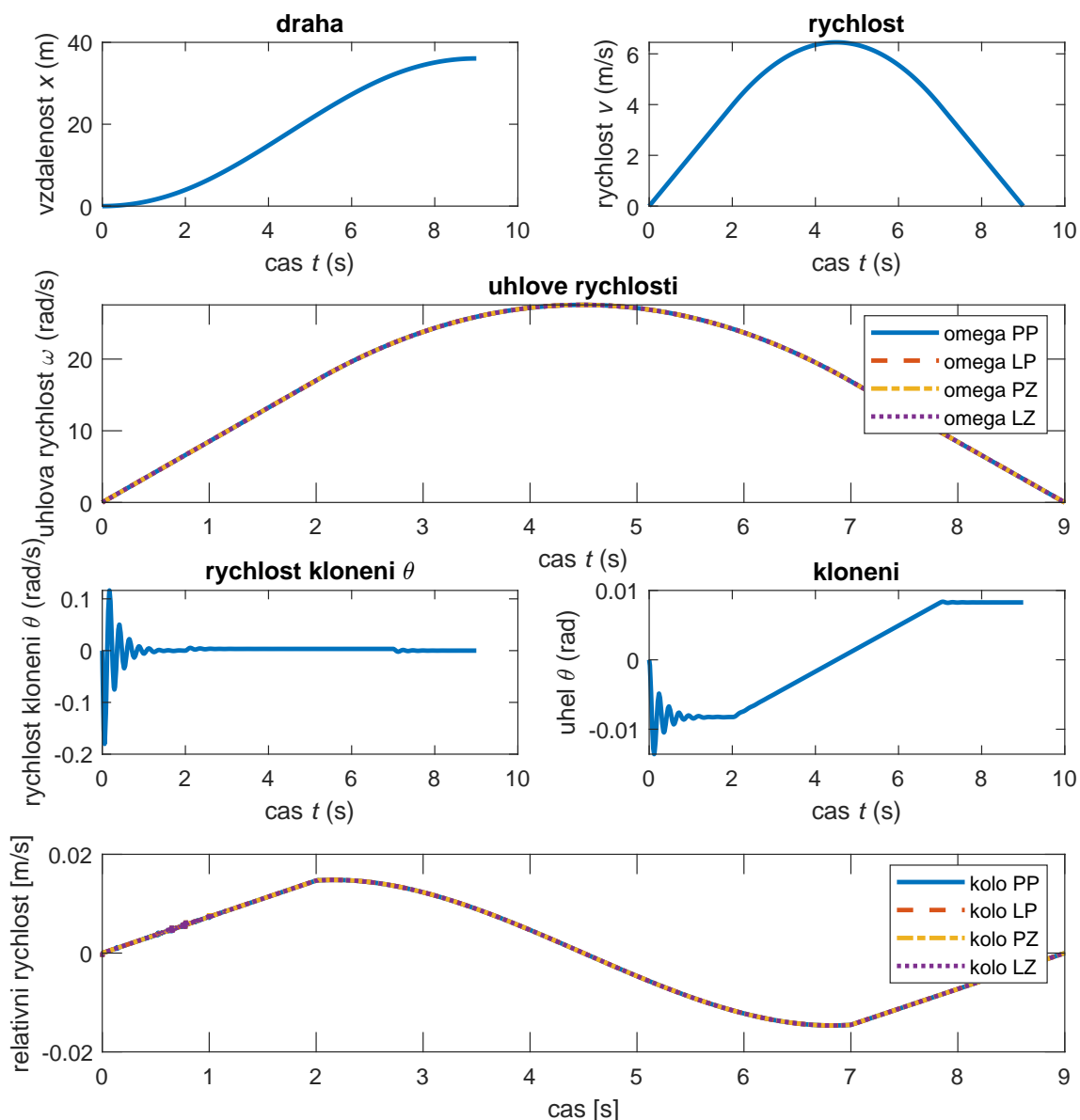
$$\begin{bmatrix} m^i \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}^i \\ \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^i \\ \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_W^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_e^i)_R \\ \bar{\mathbf{F}}_\theta^i - \bar{\boldsymbol{\omega}}^i \times (\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i \bar{\boldsymbol{\omega}}^i) \\ \mathbf{M}_W^i \end{bmatrix}. \quad (4.5.19)$$

## 4.6 Modelové jízdní manévry

Vytvořený model implementujeme v programu Matlab, a pomocí jeho explicitního řešiče **ode15s** můžeme modelovat různé jízdní situace. Model později použijeme v kapitole 5 pro testování algoritmu optimalizujícího hnací točivé momenty. Pro testování funkčnosti algoritmu potřebujeme nadefinovat modelové příklady jízdních manévru. Prvním z nich je jednoduchý scénář přímočarého rozjezdu a zabrzdění. Hnací momenty se v tomto případě řídí vztahem

$$M_i = \begin{cases} 45 \text{ Nm} = M_0, & \text{pro } t < 2 \\ M_0 - M_0 \cdot (0.4 \cdot (t - 2)) & \text{pro } t \geq 2 \\ 0 & \text{pro } t \geq 2 \wedge \dot{x} \leq 0 \end{cases} \quad \text{pro } i = \{1; 2; 3; 4\},$$

tedy stejným vztahem, jakým jsme řídili momenty u rozjezdu a brždění u dvourozměrného modelu. To z něj dělá ideálního kandidáta na porovnání výstupů obou modelů při zadání stejných parametrů, tedy parametrů studentské formule UWB-04, z kapitoly 2.1 a z [2]. Výstup a data vypočtená pro námi zadaný manévr najdeme na obrázku 4.6.



Obr. 4.6: Výstup numerické integrace přímočarého rozjezdu a brždění trojrozměrného modelu

Při porovnání obrázku 4.6 s obrázky 3.8 a 3.9, které obsahují tentýž manévr provedený dvourozměrnými modely se dvěma nebo čtyřmi koly, můžeme zjistit, že výstup modelů pro tento jízdní manévr je totožný. Jak můžeme vidět ze závislosti relativní rychlosti, u obou modelů dochází k prokluzu pneumatik při rozjezdu, a následnému prokluzu pneumatik při brždění.



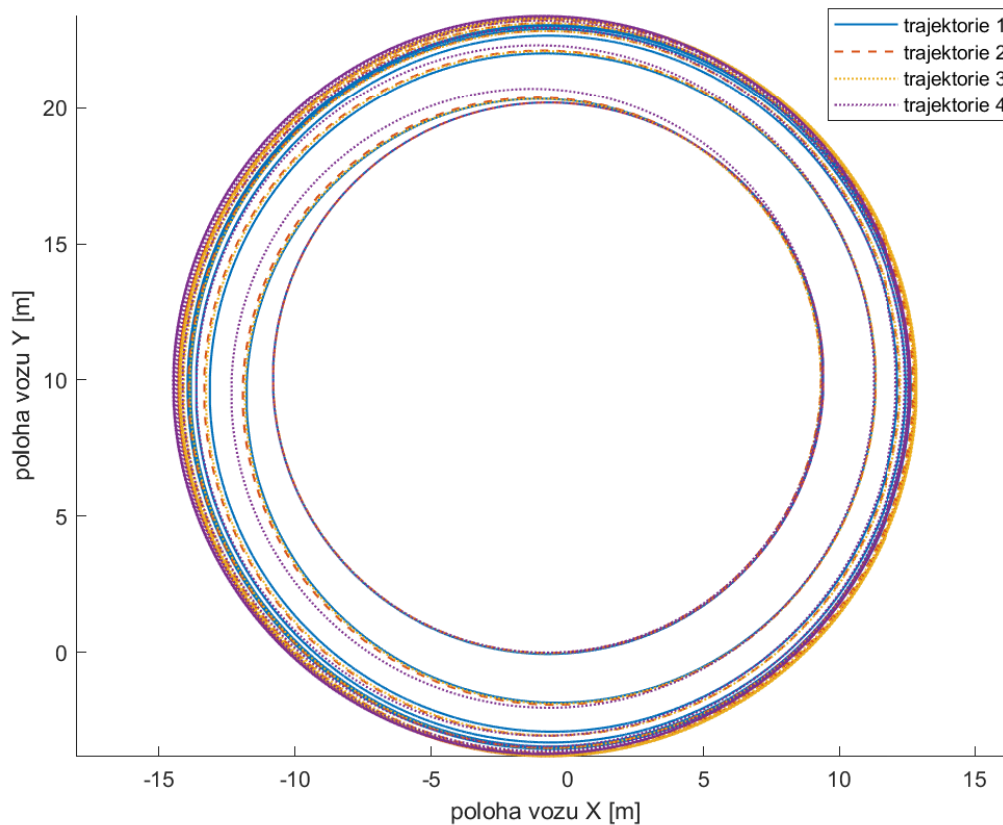
### 4.6.1 Parametrická studie jízdy po kružnici

Druhým modelovým případem je jízda po kružnici s konstantním poloměrem. Ta spočívá v tom, že úhel natočení kol při jízdě po kružnici je konstantní. V našem případě uvažujeme i konstantní hnací momenty, pro modelovou úlohu a testování parametrů jsme je zvolili pro všechna kola jako  $M_i = 10 \text{ Nm}$ . Úhel natočení obou kol  $\delta$  byl zvolen jako  $\delta = 8,8^\circ$ , což je přibližně úhel rovnoběžného natočení kol, který by podle Ackermannovy podmínky natočení kol měl vést k jízdě modelu po kružnici s poloměrem  $R = 10 \text{ m}$ . Tento jízdni manévr jsme použili k testování parametrů vozidla a jejich vlivu na chování vozidla. Především nás pak zajímal vliv koeficientu tuhosti pružin a koeficientu tlumení tlumičů na výsledné naklápění šasi, a průběh naklápění. Nejprve jsme zvolili obě hodnoty záměrně nízké oproti hodnotám uvedeným v [2], abychom pozorovali, jak se vozidlo s nedostatečně tuhými pružinami může chovat. V modelu jsme tedy pro první simulaci zvolili hodnoty koeficientů tuhosti  $k_{p1} = k_{z1} = 1000 \text{ Nm}^{-1}$  a koeficientů tuhosti  $b_{p1} = b_{z1} = 80 \text{ Nsm}^{-1}$ , pro druhou simulaci jsme pak zvolili hodnoty koeficientů tuhosti, které byly použity v rovinných modelech kapitoly 3. Tedy  $k_{p2} = k_{z2} = 20000 \text{ Nm}^{-1}$  a koeficientů tuhosti  $b_{p2} = b_{z2} = 200 \text{ Nsm}^{-1}$ . Pro třetí simulaci jsme zvolili vysokou hodnotu koeficientu tuhosti pružiny, a nízkou hodnotu koeficientu tlumení tlumičů, tedy hodnoty koeficientů tuhosti  $k_{p3} = k_{z3} = 20000 \text{ Nm}^{-1}$  a koeficientů tuhosti  $b_{p3} = b_{z3} = 20 \text{ Nsm}^{-1}$ . V poslední z této sady simulací jsme použili vysokou hodnotu koeficientu tlumení tlumičů a nízkou hodnotu koeficientu tuhosti pružin, tedy hodnoty koeficientů tuhosti  $k_{p4} = k_{z4} = 10000 \text{ Nm}^{-1}$  a koeficientů tuhosti  $b_{p4} = b_{z4} = 1500 \text{ Nsm}^{-1}$ . Počáteční výchylky a rychlosti byly pro všechny simulace nulové, dochází tedy k rozjezdu po kružnici. To má samozřejmě vliv na hodnoty klopení a klonění před ustálením pohybu po kružnici. Manévr rozjezdu byl to parametrické studie schválně zakomponován, po zvýšení komplexnosti simulovaného manévru a zjištění jízdni vlastností modelu s danými parametry při zrychleném pohybu. Parametry pro jednotlivé simulace jsou pro přehlednost vyneseny v tabulce 4.1.

Tab. 4.1: Tabulka parametrů jednotlivých simulací parametrické studie

číslo simulace $i$	$k_{pi}$ [ $\text{Nm}^{-1}$ ]	$k_{zi}$ [ $\text{Nm}^{-1}$ ]	$b_{pi}$ [ $\text{Nsm}^{-1}$ ]	$b_{zi}$ [ $\text{Nsm}^{-1}$ ]
1	1000	1000	80	80
2	20000	20000	200	200
3	20000	20000	20	20
4	10000	10000	1500	1500

Na obrázku 4.7 můžeme vidět výstup z programu, porovnání jednotlivých trajektorií vozidla v případech jednotlivých simulací s různými parametry.

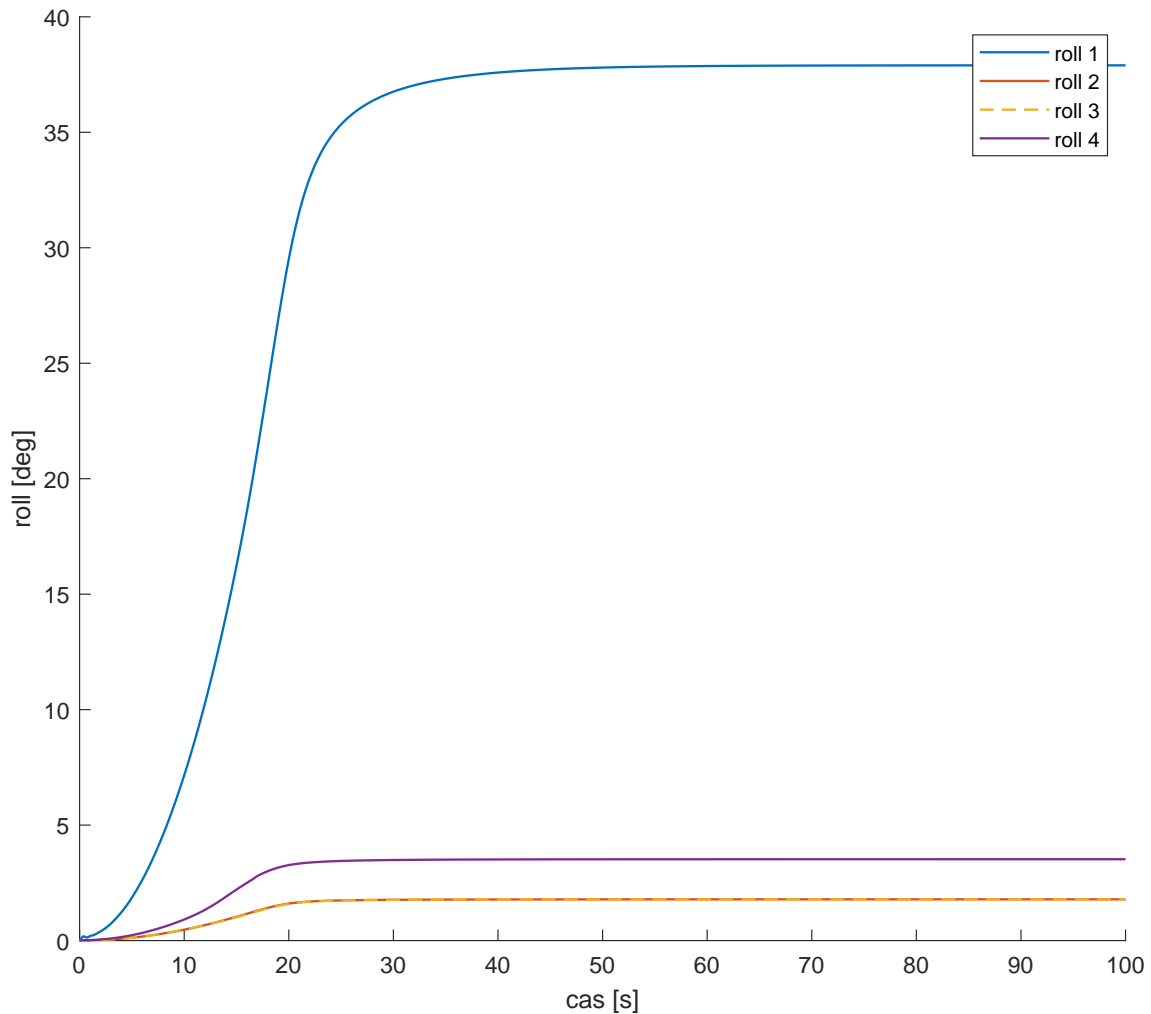


Obr. 4.7: Porovnání trajektorií vozidla v simulacích s různými parametry

Jak můžeme z obrázku 4.7 vidět, první simulace s nevhodnými (moc nízkými) parametry koeficientů tuhosti a tlumení opisuje kružnici s menším poloměrem, než ostatní.

Vozidlo v druhé až čtvrté simulaci opsalo přibližně stejnou kružnici, rozdíl by však v poloze středu kružnice, kterou vozidlo finálně opisovalo. U výrazně tlumeného případu (simulace 4) došlo například k negativnímu posuvu středu opisované kružnice v ose  $x$ .

Na obrázku 4.8 pak můžeme vidět výstup z programu, porovnání jednotlivých průběhů klopení pro jednotlivé simulace s různými parametry.

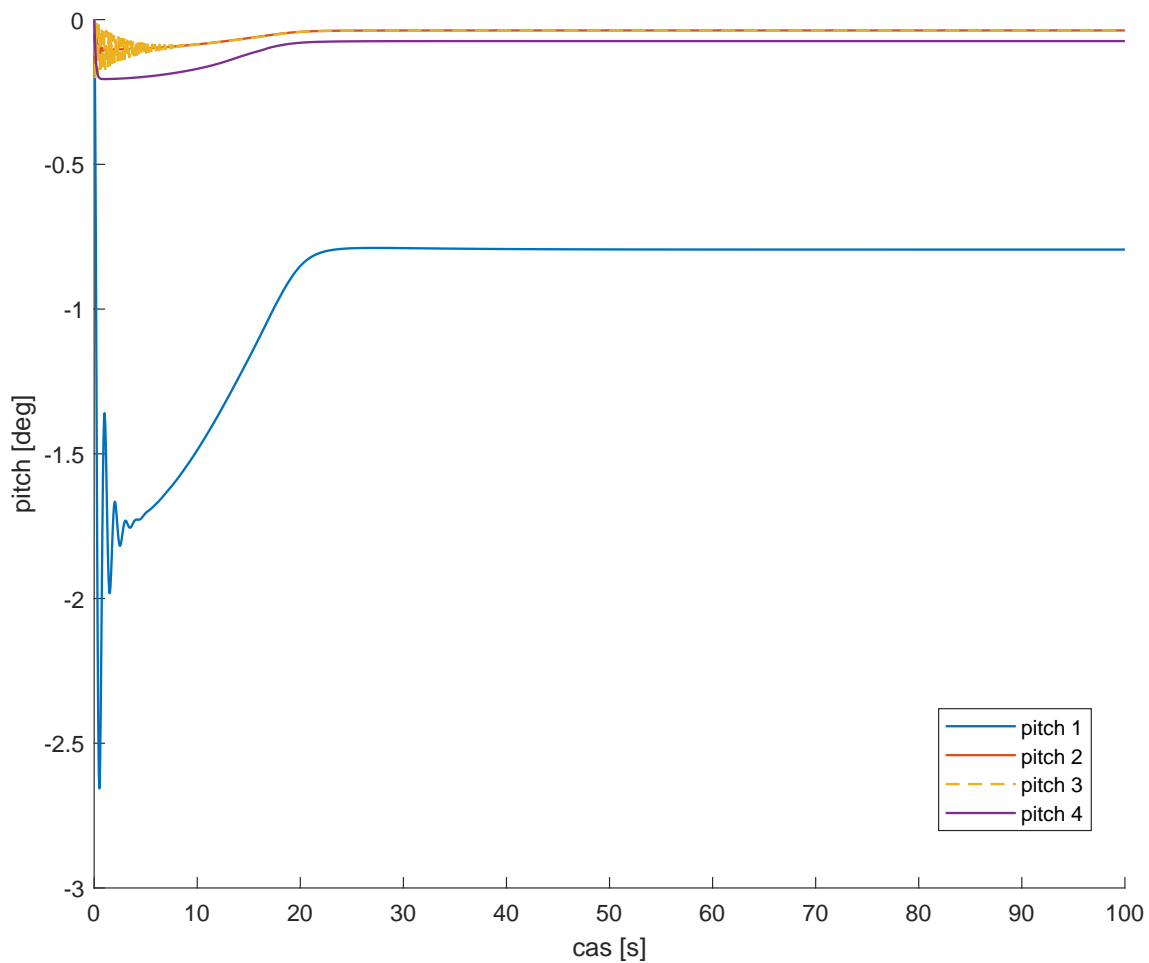


Obr. 4.8: Porovnání klopení vozidla v simulacích s různými parametry

Z obrázku 4.8 můžeme vidět, že v první simulaci, s nedostatečnou hodnotou koeficientu tuhostí pružin, nabyla hodnota klopení (roll) po ustálení na kružnici hodnoty téměř  $35^\circ$ . To je samozřejmě pro reálné vozidlo nepřijatelná hodnota. Hodnoty finálního naklopení pro druhou a třetí simulaci byly totožné, okolo  $2^\circ$ . U čtvrté simulace s vysokým koeficientem tlumení tlumičů vidíme, že hodnota naklopení byla sice vyšší, než u druhé a třetí simulace, zároveň se ale rychleji ustálila.

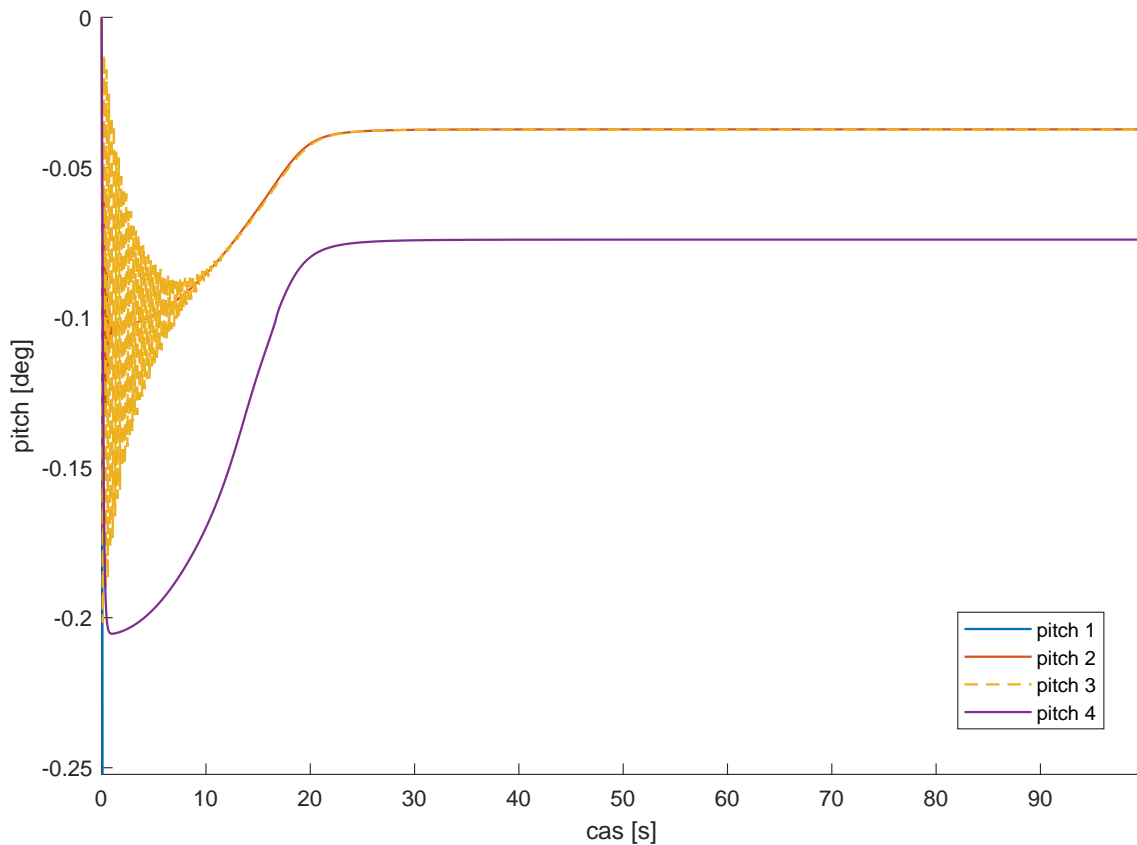
Další sledovanou hodnotou pro simulace byla hodnota klonění (pitch). Její závislost

na čase pro jednotlivé simulace zachycuje obrázek 4.9.



Obr. 4.9: Porovnání klonění vozidla v simulacích s různými parametry

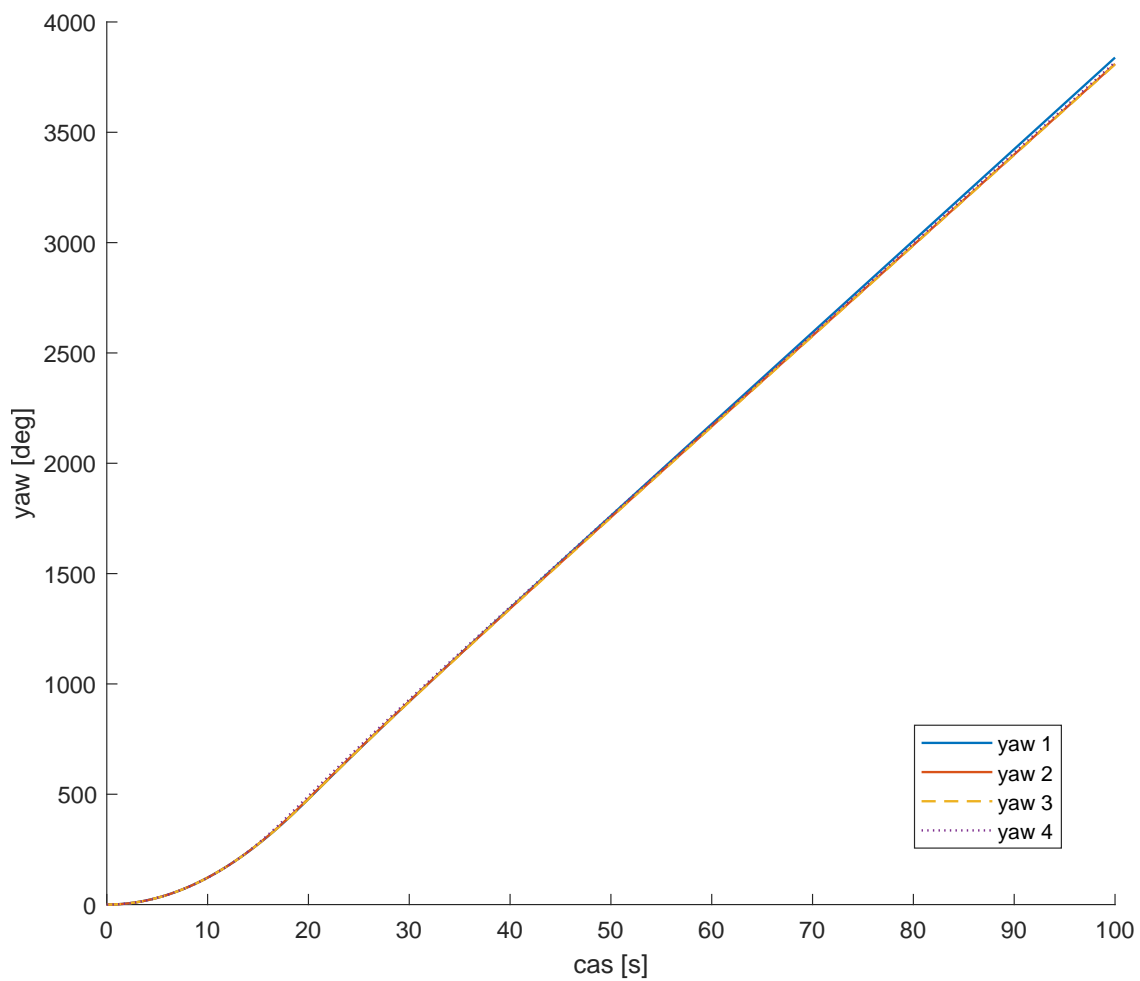
Jak je ilustrováno v obrázku 4.9, pro první simulaci byla hodnota náklonu znovu nejvyšší, a to dokonce řádově. Maximální hodnota náklonu u první simulace dosahovala hodnot až přes  $2,5^\circ$ , což je na náklon u reálného vozidla poměrně vysoká hodnota. Pro lepší evaluaci náklonů v ostatních simulacích jsou závislosti náklonů ještě detailně vyobrazeny na obrázku 4.10.



Obr. 4.10: Porovnání klonění vozidla v simulacích s různými parametry (detail)

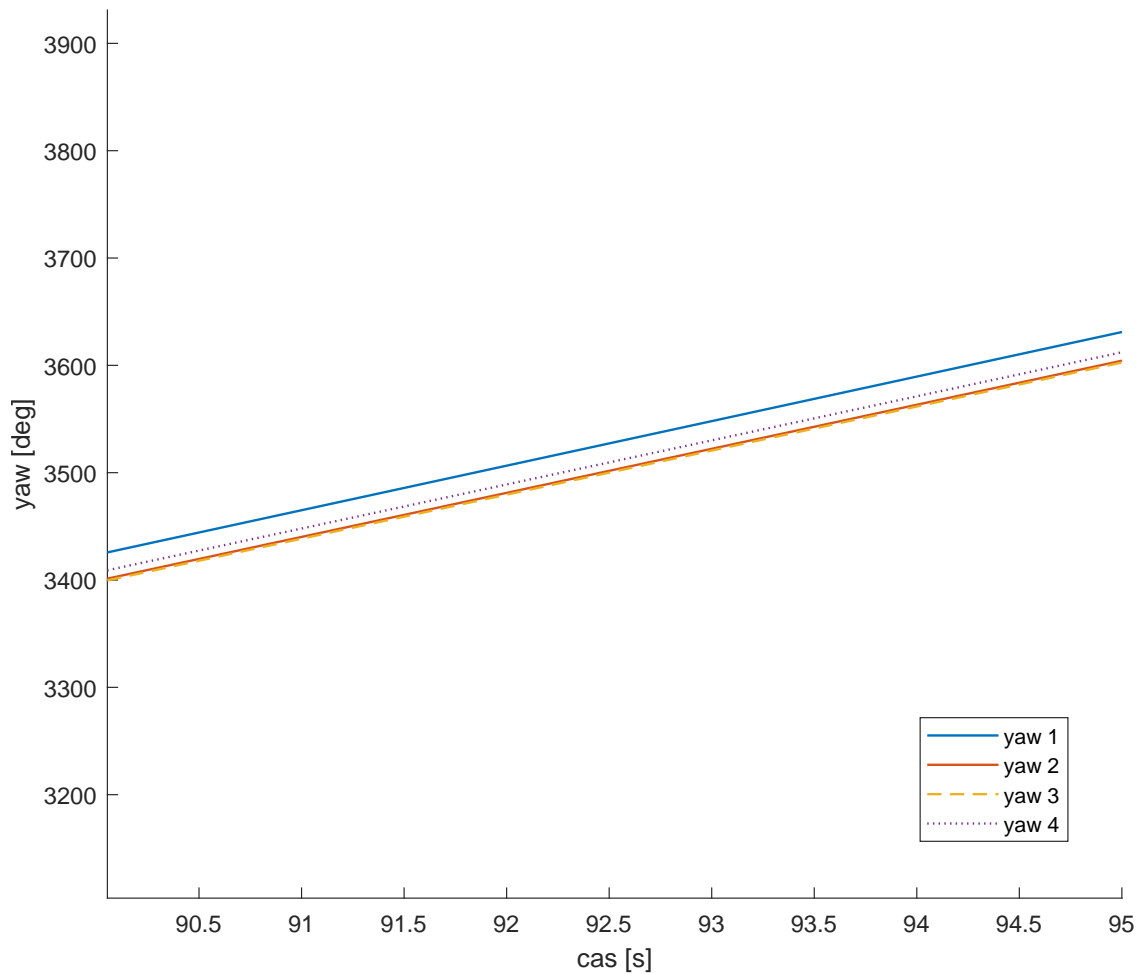
Z tohoto obrázku je patrné, že nástup náklonu u modelů s nízkými hodnotami koeficientu tlumení, a s vysokými hodnotami koeficientu tlumení má výrazně odlišný průběh. Zatímco u nízkých hodnot dohází k poměrně výraznému kmitání, u vysokých hodnot je nástup plynulý. To se jeví jako pozitivní přínos pro pohodlí a ovladatelnost vozu, nutno ale podotknout, že při velmi vysokých hodnotách koeficientů tlumení tlumičů (tzv. tuhé tlumiče) dochází k přenosu ran od nerovností ve vozovce, viz [4].

Další zkoumanou veličinou je stáčivost (yaw). Její časová závislost pro jednotlivé případy nastavení parametrů je vyobrazena na obrázku 4.11.



Obr. 4.11: Porovnání stáčení vozidla v simulacích s různými parametry

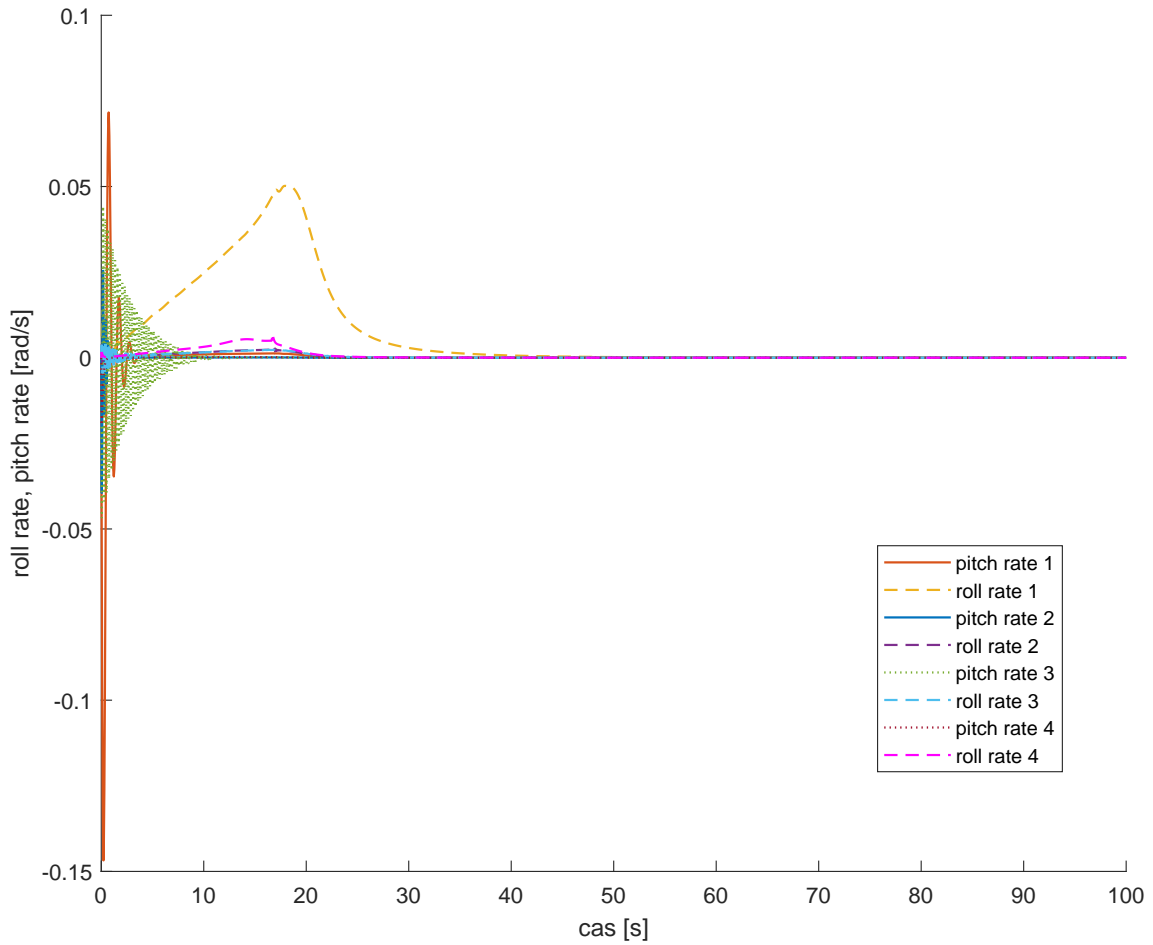
Z tohoto obrázku můžeme vidět, že na největší hodnotě stáčivosti se ustálil případ první simulace. Protože se hodnoty z velké části překrývají, vynesli jsme detailní vyobrazení hodnot pro časový úsek 90 až 95 sekund. Ten je zobrazen na obrázku 4.12.



Obr. 4.12: Porovnání stáčení vozidla v simulacích s různými parametry (detail)

Z tohoto obrázku je zřejmé, že největší hodnotu stáčivosti mělo vozidlo, jak už bylo řečeno, při první simulaci. Zatímco však hodnoty z druhé a třetí simulace splývají, čtvrtá simulace s vysokou hodnotou koeficientu tlumení tlumičů měla stáčivost o něco vyšší, což může být, po evaluaci ostatních dat žádoucí vlastnost.

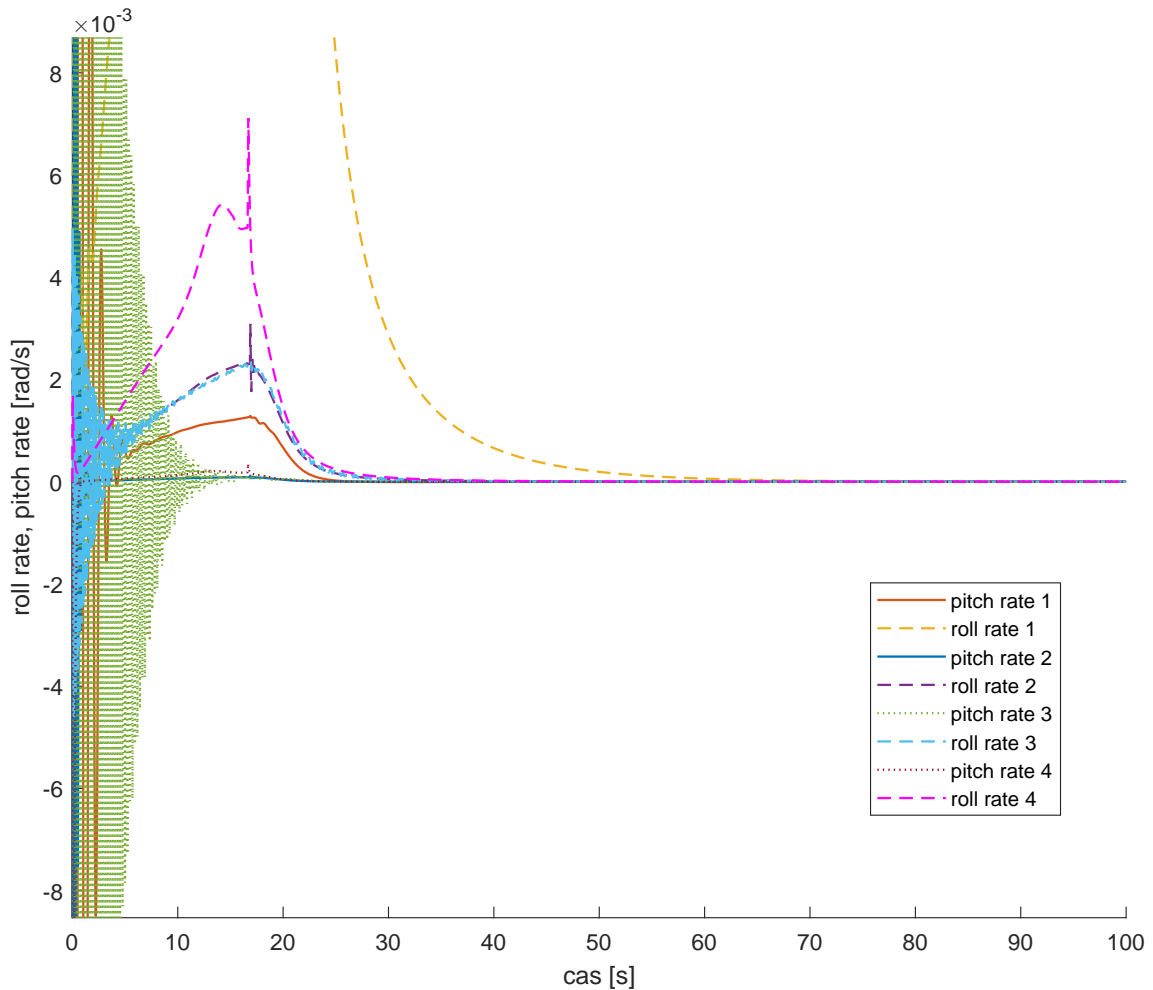
Další sledovanou veličinou byly úhlové rychlosti klonění a klopení, jejich závislosti pro jednotlivé případy nastavení parametrů jsou vyobrazeny na obrázku 4.13.



Obr. 4.13: Porovnání úhlových rychlostí klopení a klonění vozidla v simulacích s různými parametry

Vysoká rychlost klopení a klonění je v reálných vozidlech nežádoucí, jelikož má negativní vliv na jízdní vlastnosti vozu a na komfort posádky [4, 8]. V případě první simulace dochází, jak můžeme vidět na obrázku 4.13 k vysoké úhlové rychlosti naklonění, stejně jako v případě třetí simulace. Nejvyšších hodnot rychlosti naklonění znovu dosahuje případ první simulace. Pro detailnější porovnání ostatních případů nastavení parametrů jsme znovu vytvořili detail celkové závislosti, na obrázku 4.14.



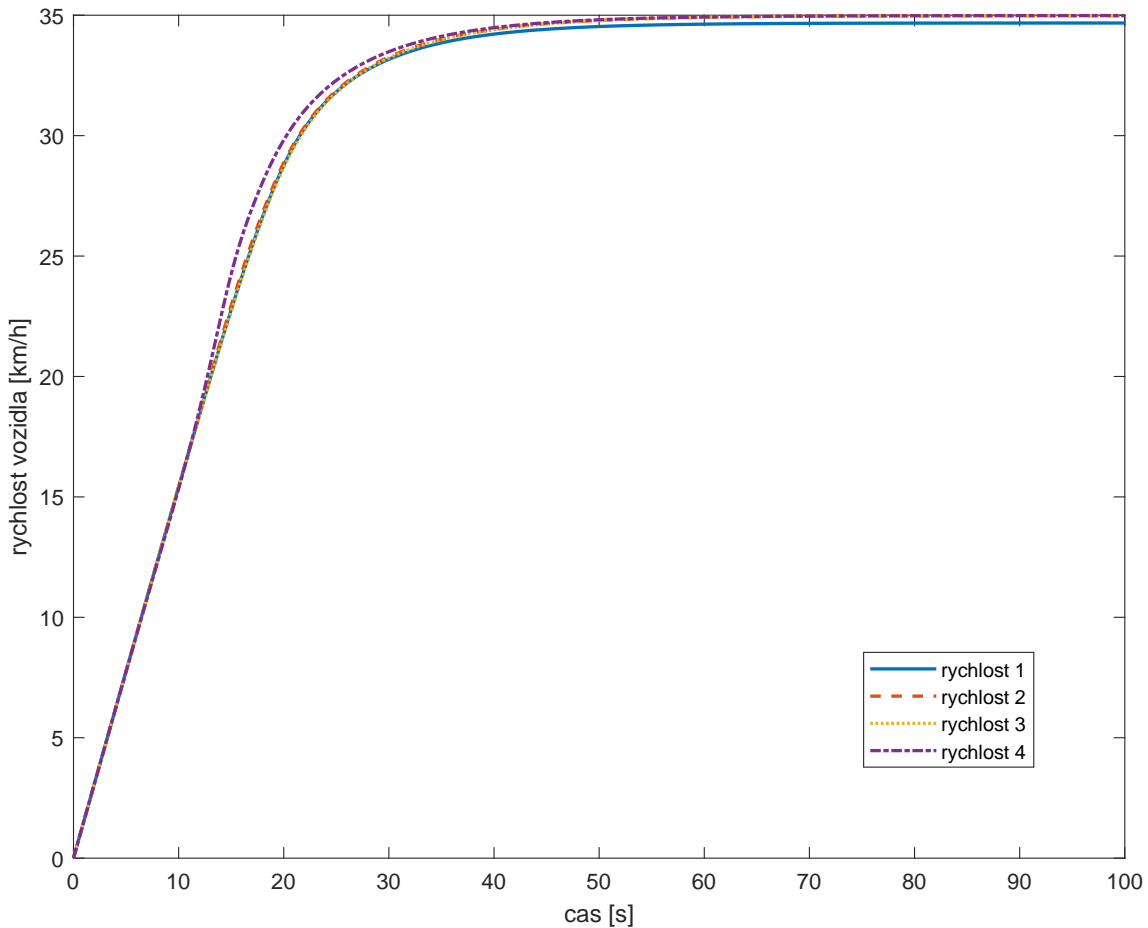


Obr. 4.14: Porovnání úhlových rychlostí klopení a klonění vozidla v simulacích s různými parametry (detail)

Z obrázku 4.14 vidíme u čtvrtého nastavení parametrů vyšší hodnoty rychlosti naklopení než u třetího a druhého. Zároveň u něj ale nedochází tak výraznému úhlovému zrychlení, jako od kmitání ve smyslu klonění. Vidíme také, že všechny hodnoty se po ustálení pohybu po kružnici blíží k hodnotě blízké nule. Pro naši parametrickou studii poslední významnou veličinou je dopředná rychlost vozidla. Vypočítá se z globálních složek rychlosti jako

$$v = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}.$$

Její závislost na čase pro jednotlivé případy nastavení parametrů vidíme na obrázku 4.15.



Obr. 4.15: Porovnání dopředných rychlostí vozidla v simulacích s různými parametry (detail)

Vidíme, že pro nízké nastavení koeficientů tuhosti pružin a koeficientů tlumení tlumičů v první simulaci opisovalo vozidlo kružnici nižší rychlostí, než v ostatních případech. V ostatních třech případech dosáhlo vozidlo pokaždé přibližně stejné rychlosti 35 km/h. Ve čtvrtém případě se ale podařilo vozidlu této rychlosti dosáhnout dříve. Z toho je zřejmé, že tužší nastavení tlumičů může mít pozitivní vliv na jízdní vlastnosti formule nebo automobilu. Hodnotu koeficientu tlumení  $b_{p4} = b_{z4} = 1500 \text{ Nsm}^{-1}$  ze čtvrté simulace tedy přebereme, a použijeme jí při optimalizaci a řízení momentů v kapitole 5. Tuhosti pružin nastavíme na hodnotu  $k_p = k_z = 20 \text{ kNm}^{-1}$ , jak byla nastavena v druhé a třetí simulaci, protože přinášela pozitivní vliv na jízdní vlastnosti, především pak na hodnotu klopení.

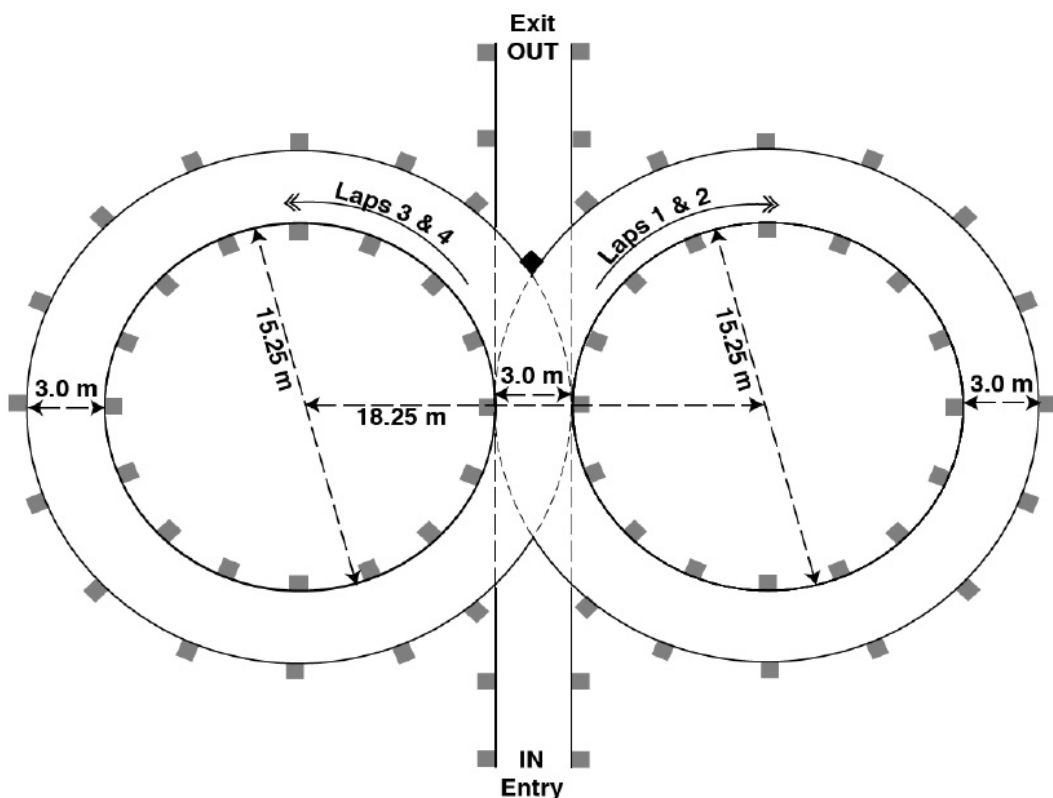
Mimo pružiny a tlumiče lze tento model dále rozšířit mnoha způsoby, jedním z nich je například přidání stabilizátorů, které na šasi působí silou v závislosti na pohybu a vertikální výchylce jednotlivých stran vozidla. Tím zmírňují naklopení vozidla v zatáčkách.

Dalším doplnění může být například znovu o odpor vzduchu, kdy ve většině případů pro jednoduchost uvažujeme laminární proudění kolem karoserie vozidla.

# Kapitola 5

## Řízení točivých momentů sil na jednotlivých kolech

Problém řízení točivých momentů je velice komplexní, a dá se k němu přistupovat různými způsoby. Obecně jde vždy o nalezení optimálního rozložení točivých momentů mezi jednotlivá kola na nápravě, pro provedení zadaného jízdního manévru. V našem případě je tím manévrem jízda po kružnici, tedy po vozidle požadujeme, aby co nejpřesněji opisovalo předepsanou kružnici, v co nejvyšší rychlosti. Nejprve si musíme definovat kružnici, kterou má vlastně vozidlo opisovat. V našem případě se budeme inspirovat jednou ze soutěžních disciplín, která prověřuje studentské formule, takzvaný **Skid Pad**. Skid Pad spočívá v průjezdu speciální dráhy, která se skládá ze dvou kruhových výsečí, které se dotýkají a protínají, složených do tvaru osmičky, viz obrázek 5.1. Cílem je co nejrychleji dvakrát projet každou z výsečí. Tímto způsobem se testuje jak kvalita řízení momentů na kolech, tak i boční stabilita formule. Klasická kruhová výseč Skid Pad testu je vytyčena vnitřní kružnicí o průměru 15,25 m, a vnější kružnicí o průměru 21,25 m. Pro naše testování využijeme pouze polovinu Skid Pad testu, tedy pouze levotočivou z kružnic, a požadujeme jízdu po kružnici o poloměru 10 m, která se dá do kruhové výseče Skid Pad testu vepsat.



Obr. 5.1: Ilustrace Skid Pad testu, převzato z [11]

Námi provedená optimalizace se netýká pouze momentů, nýbrž i úhlu natočení kol pro optimální průjezd zatáčkou. Smysl optimalizace bude takový, že budeme pro zadaný rozsah parametrů vozidla (rozsah natočení volantu, možný rozsah točivých momentů) hledat řešení pohybové rovnice prostorového modelu vozidla, jehož trajektorie se nejméně odchyluje od předepsané kružnice. Hledáme tedy hodnoty úhlu natočení kol, a momentů na kolech, při kterých nastává **minimum maxima** funkce odchylky polohy vozidla od předepsané kružnice. K tomu nám poslouží funkce **fmincon** zabudovaná v programu Matlab, která hledá minimum nelineárních funkcí s více proměnnými. V tomto případě budeme hledat minimum funkce

$$f(R_{AKT}) = \max \left[ \left( 1 - \frac{R_{AKT}}{R_{DES}} \right)^2 \right], \quad (5.0.1)$$

kde  $R_{AKT}$  je poloměr aktuálně opisované kružnice, a  $R_{DES}$  poloměr předepsané kružnice, kterou má vozidlo jízdou opisovat. Optimalizaci provádíme pro vozidlo (formuli) s pohonem pouze zadních kol, což bývá nejčastější způsob pohonu u závodních vozů, díky jeho agilním vlastnostem a nízké hmotnosti, viz [7]. Zavádíme také počáteční rychlost  $v_0$ , což je počáteční hodnota dopředné a zároveň obvodové rychlosti vozidla, při pohybu po

kružnici. Maximální možný točivý moment na jednom kole  $M_{MAX}$  jsme zvolili podle dat pro elektromotor nezávisle pohánějící kolo [11] jako  $M_{MAX} = 21$  Nm.

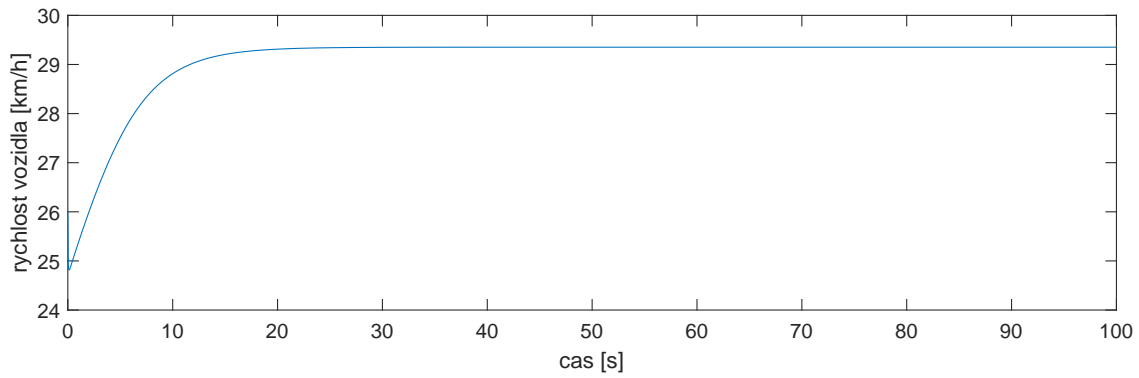
Pro námi požadovaný pohyb opisu kružnice o průměru 20 m, s počáteční rychlostí  $v_{DESi}$ , nám funkce `fmincon` našla minimální odchylku od trasy pro hodnoty vypsané v tabulce 5.1.

$v_{0i}$ [km/h]	$\delta_i$ [deg]	$M_{LZ}$	$M_{PZ}$	$v_{max}$ [km/h]	$r_{difmax}$ [m]
25	8.7202	5.9969	6.1767	27.22	0.27
26	8.9901	8.2364	16.1767	29.35	0.37
30	8.7164	5.8304	6.3267	-	0.26

Tab. 5.1: Tabulka výsledků optimalizované jízdy

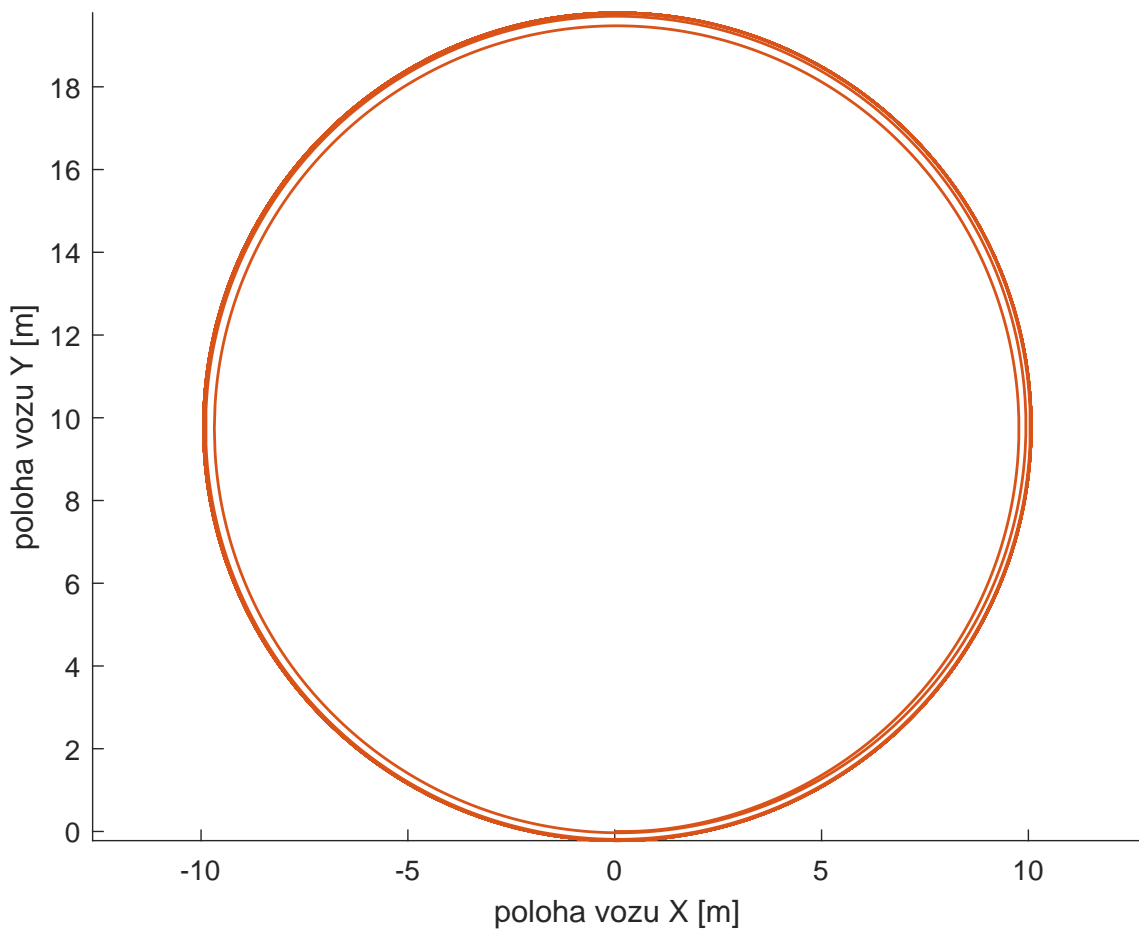
V tabulce 5.1 jsou vyobrazeny jednotlivé zkoušky optimalizací, s různými počátečními rychlostmi.  $v_{0i}$  je počáteční rychlost, kterou vozidlo do kružnice najelo,  $\delta_i$  je algoritmem vypočtené optimální natočení kol,  $M_{LZ}$  a  $M_{PZ}$  algoritmem vypočtené točivé momenty na jednotlivých zadních kolech, tedy  $M_{LZ}$  na levém zadním a  $M_{PZ}$  na pravém zadním kole. Výhoda elektronického řízení momentů na kolech je ta, že oproti otevřenému diferenciálu, který rozděluje při všech jízdních situacích momenty na kola souměrně, tedy  $M_{LZ} = M_{PZ}$ , řízení momentů elektromotorů jednotlivých kol umožňuje nerovnoměrné rozdělení momentů. Z výsledků optimalizace v tabulce 5.1 vidíme, že pro optimální průjezd zatáčkou byl vždy točivý moment na vnitřním kole menší, než ten na vnějším. Jelikož vnitřní kolo opisuje kružnici o menším poloměru, než vnější, je tímto rozložením momentů mezi ně možno omezit prokluz vnitřního kola, a tím zlepšit jízdní vlastnosti. [1]

Při zadání počáteční hodnoty rychlosti  $v_{0i} = 30$  km/h došlo k přibrzdění vozidla, jelikož rychlost byla na vytočení zatáčky již příliš vysoká, proto maximální dosažená rychlost není v tabulce 5.1 udána. Nejvyšší rychlosti dosáhl model po optimalizaci momentů při hodnotě  $v_{0i} = 26$  km/h, zároveň byla ale oproti ostatním simulacím maximální odchylka od předepsané trasy vyšší. Závislost rychlosti pro tuto simulaci je vyobrazená na obrázku 5.2.



Obr. 5.2: Průběh rychlosti při optimalizovaném pohybu po kružnici s  $v_{0i} = 26$  km/h

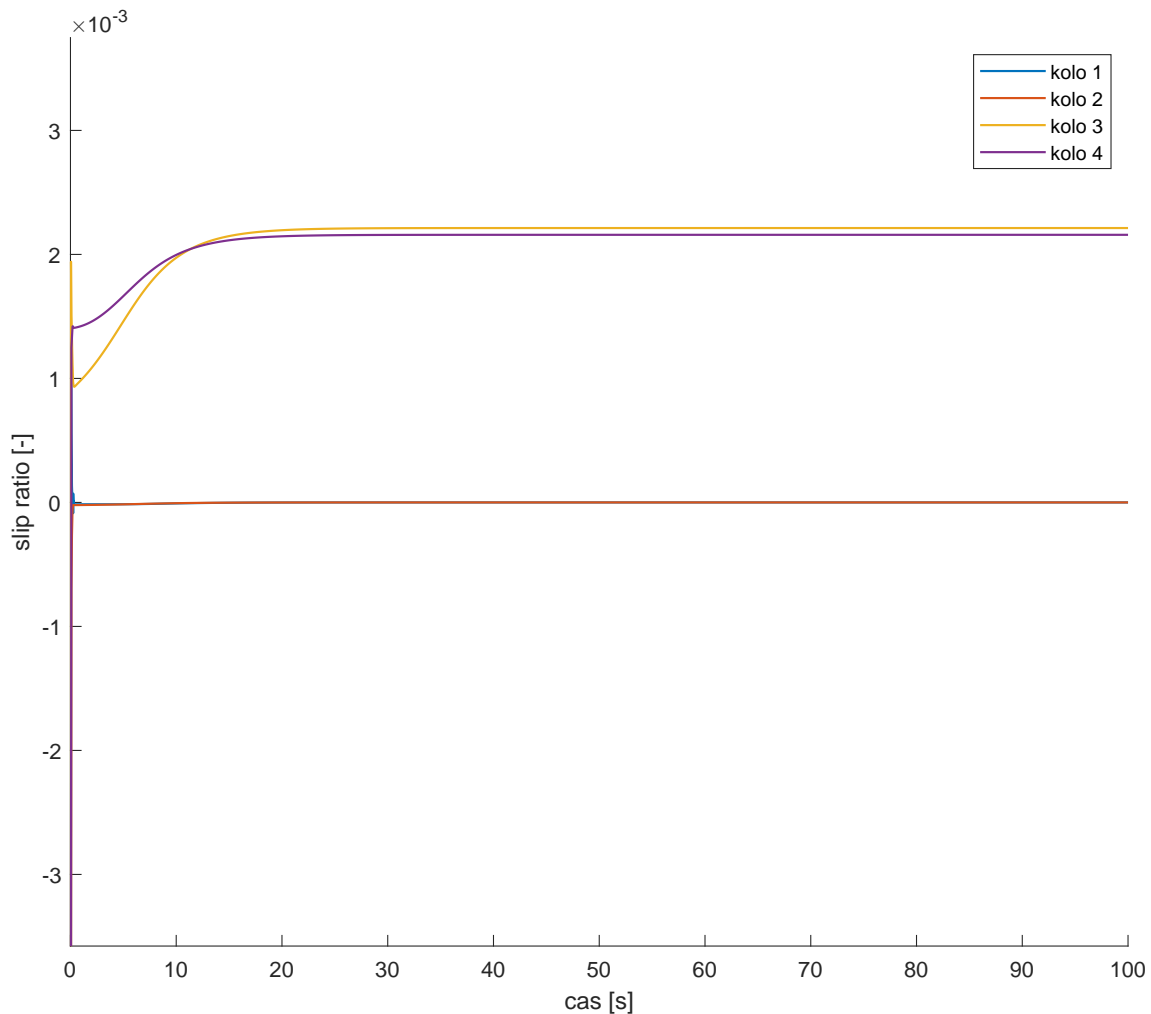
Z obrázku 5.2 vidíme, že dopředná rychlost vozidla nejprve poklesla, vlivem brzdících sil od roztočení kol, které byly na počátku manévru v klidu. Poté rychlost vystoupala až na hodnotu uvedenou v tabulce 5.1. Na obrázku 5.3 je pak vyobrazena trajektorie téhož optimalizovaného pohybu.



Obr. 5.3: Trajektorie optimalizovaného pohybu po kružnici pro  $v_{0i} = 26$  km/h

Z obrázku 5.3 vidíme, že zřejmě vlivem jemné přetáčivosti opisuje vozidlo od určité

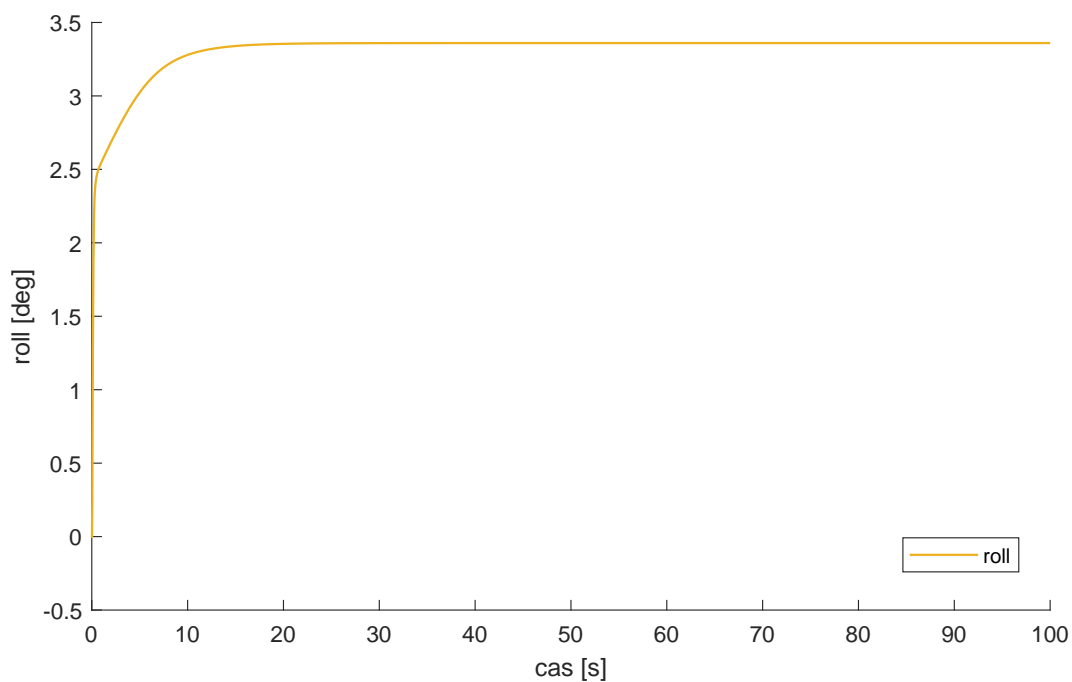
chvíle kružnici o užším poloměru. Toto by mělo být patrné i z hodnot prokluzu vyjádřeného ve formě poměrného prokluzu slip ratio, pro jednotlivá kola, jak je zobrazeno na obrázku 5.4.



Obr. 5.4: Slip ratio kol při pohybu po kružnici pro  $v_{0i} = 26$  km/h

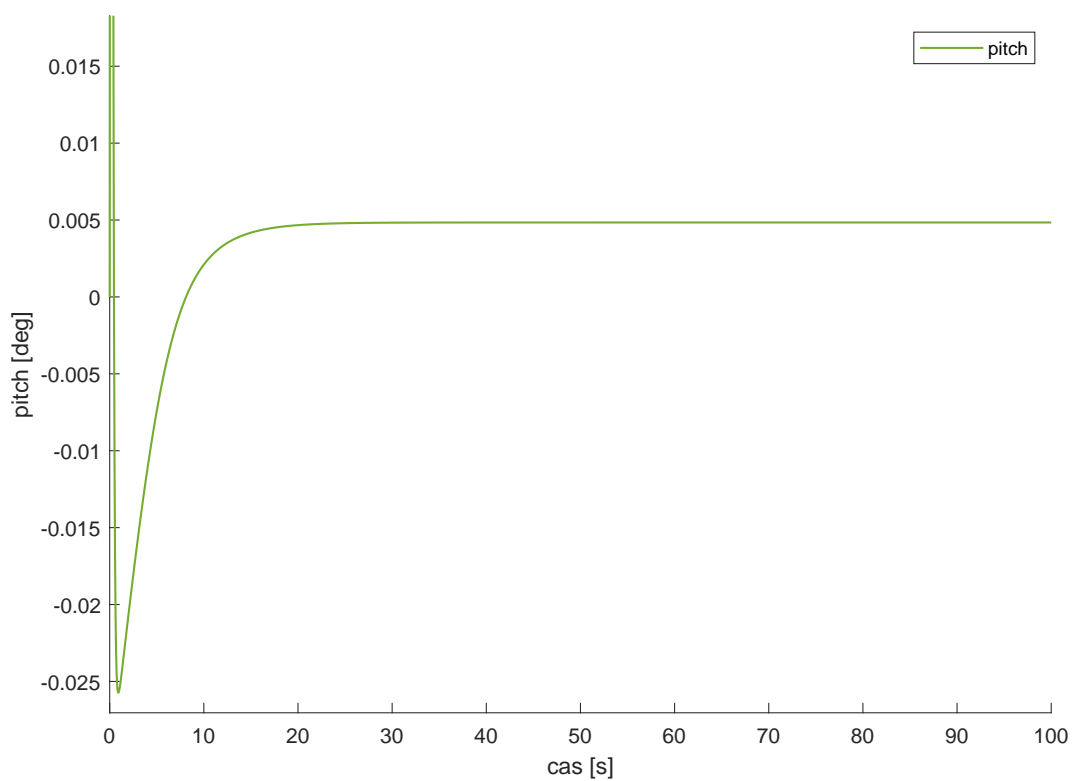
Z tohoto obrázku je vidět, že prokluz zadních kol 3 a 4 je výrazně vyšší než předních kol - během celého manévru tedy dochází k mírnému smyku zadních kol, zatímco přední kola nejsou hnána. Prokluz kol níže porovnáme s hodnotami z případu s počáteční rychlostí  $v_{0i} = 26$  km/h. Pro zjištění efektivity nastavení koeficientů součástí podvozku podle parametrické studie můžeme evaluovat v optimalizovaném případě závislost náklonů šasi vozidla na čase. Závislost klopení je zobrazena na obrázku 5.5, závislost klonění pak na obrázku 5.6.





Obr. 5.5: Klopení šasi při pohybu po kružnici pro  $v_{0i} = 26$  km/h

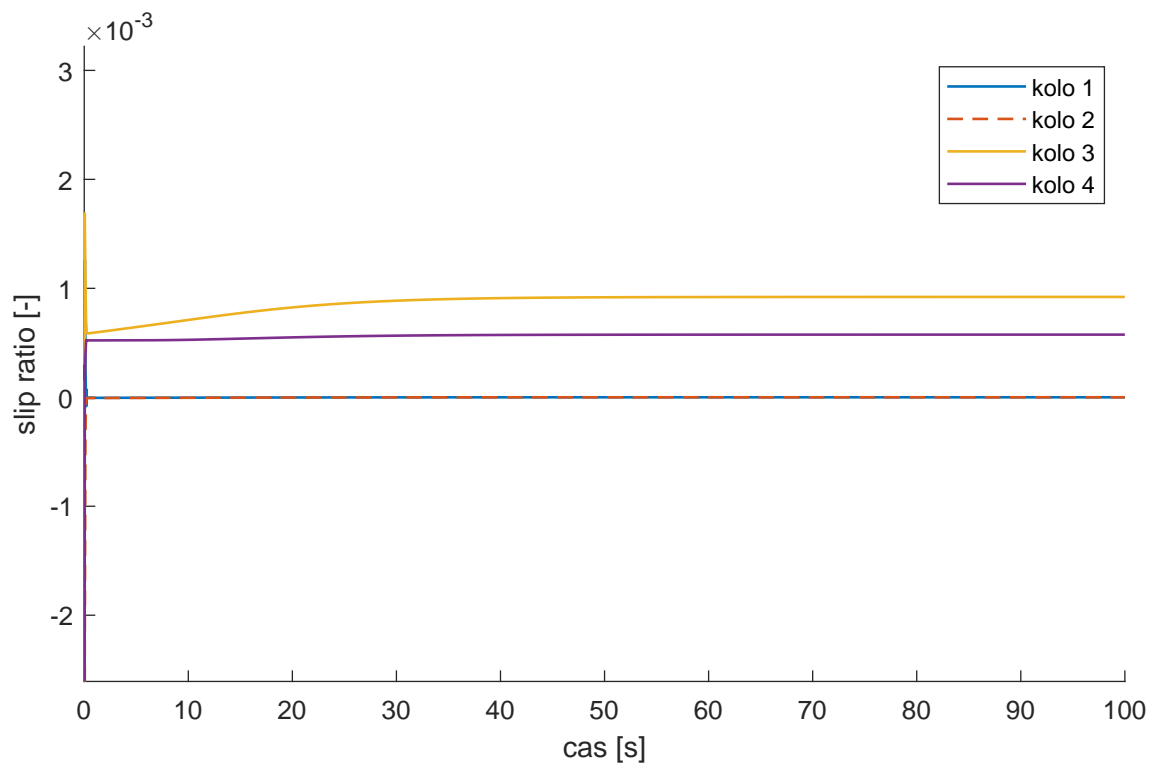
Z tohoto obrázku vidíme, že naklopení se ustálilo na hodnotě přibližně  $3,3^\circ$ , což je pro reálné vozidlo přijatelná hodnota.



Obr. 5.6: Klonění šasi při pohybu po kružnici pro  $v_{0i} = 26$  km/h

Z obrázku 5.6 vidíme, že rapidní změnou rychlosti došlo k prudkému nárůstu náklonu.

Po ustálení pohybu po kružnici se ale náklon ustálil na hodnotě  $0,004^\circ$ , což je efektivně nula. Hodnoty u obou případů náklonů šasi (klopení i klonění) jsou tedy použitelné i pro náš optimalizovaný model. Při hledání optimálních momentů v případě  $v_{0i} = 26$  zvolila funkce `fmincon` agresivnější jízdu. Při porovnání hodnot prokluzu `slip ratio` z obrázku 5.4 s případem s počáteční rychlostí  $v_{0i} = 25$ , jak je vyobrazen na obrázku 5.7, zjistíme, že u případu s  $v_{0i} = 25$  jsou hodnoty `slip ratio` výrazně nižší, tudíž nedochází k takovému prokluzu. Takový přístup k řízení momentů bychom mohli zvolit, pokud bychom chtěli být konzervativnější například co se opotřebení pneumatik týče, viz [7].



Obr. 5.7: Slip ratio kol při pohybu po kružnici s  $v_{0i} = 25$  km/h

# Kapitola 6

## Závěr

V této bakalářské práci byl popsán princip matematického modelování vozidel, od velice jednoduchých modelů až po vysoce komplexní modely a jejich použití při optimalizaci rozložení točivých momentů mezi jednotlivá kola.

Prvně byly v kapitole 2.1 vypočítány parametry rozložení hmotnosti vozidla jako jsou deviační momenty a momenty setrvačnosti, a z nich sestavena matice hmotnosti a setrvačnosti vozidla. Při těchto výpočtech jsme vycházeli z dat týkajících se skutečné studentské formule UWB-04 z [2], které nám byly poskytnuty.

Pro vysvětlení principu konstrukce matematických modelů vozidel byl dále v kapitole 3 sestaven rovinný model přímočarého pohybu dvoukolého a čtyřkolého vozidla. V rámci sestavení rovinných modelů byl v kapitole 3.1 představen jednoduchý model pneumatiky pro přímočarou jízdu. Rovinné modely byly dále doplněny o odpružení a uvolněny ve vertikálním směru pohybu. Odpružené modely byly pro ilustraci chování vozidla při přímočarém pohybu počítačově implementovány v programu Matlab, následně použity pro simulaci rozjezdu a brzdění. Tato simulace byla provedena ke znázornění vlivu nastavení pružení a tlumení na klonění šasi. Dále byly v kapitole 3 zmíněny jiné typy rovinných modelů vozidel, a jejich využití. Všechny námi odvozené rovinné modely byly uvažovány s dynamickým přítěžováním jednotlivých náprav, tedy reálným pojetím jízdy vozidla.

V kapitole 4 byl pak odvozen prostorový model čtyřkolého vozidla. Ten obsahoval pružiny a tlumiče simulující reálný podvozek automobilu. Pro popis tohoto modelu jsme použili Newton-Eulerovy rovnice. Pro představení použití transformačních matic pro transformaci tenzorů mezi globálními a lokálními systémy, byl popsán princip Eulerových, a následně princip speciálního případu využívaného pro popis vozidel, Tait-Bryanových

úhlů. Při sestavování pohybových rovnic bylo využito poznatků z prostorové dynamiky, především pak podle [10]. Také byl pro tento model použit složitější model pneumatiky, Dugoffův model. Ten představuje dobrý kompromis mezi složitostí a kvalitou získaných informací. Dugoffův model pneumatiky byl popsán v kapitole 4.2. Prostorový model vozidla byl posléze podroben parametrické studii, kdy byly pro různé hodnoty nastavení tuhostí podvozku zkoumány jeho jízdní vlastnosti a vliv naklápění na komfort posádky.

Z parametrické studie byly vybrány nejvhodnější hodnoty nastavení pružin a tlumičů. Rozhodnuto tak bylo podle vlivu naklápění na translační pohyb, při jednotlivých nastaveních parametrů. Parametry byly následně použity při optimalizaci rozložení točivých momentů mezi kola. Ta probíhala v rámci jízdy po kružnici, neboli takzvaném Skid Pad testu, jehož princip byl v kapitole 5 přiblížen. Pro optimalizaci momentů bylo využito funkce `fmincon` z programu Matlab, která hledala minimální hodnotu odchylky os předepsané trasy, a tím vyhodnocovala vhodnost nastavení natočení předních kol a točivých momentů.

Simulace pro tímto způsobem optimalizované parametry byly analyzovány a porovnány pro různá vstupní kritéria pohybu. Nejvyšší dosažená rychlost opisu kružnice o poloměru 10 m s našimi parametry modelu byla 29,23 km/h. Agresivní řízení momentů v tomto případě vedlo k částečnému smyku po celou dobu manévru.

Finální prostorový model vozidla, který byl v rámci této práce zpracován, je již poměrně komplexní, a je ho možno použít pro simulace různých jízdních manévrů silničních vozidel. Zároveň může být dále rozšiřován o další komponenty, které budou zvyšovat jeho autenticitu, jako například odpor vzduchu, doplnění stabilizátorů, doplnění složitějších modelů pneumatiky, jako je například Pacejkův model, viz [1], nebo například aerodynamické působení a přítlak.

Data získaná z parametrické studie vozidla a optimalizace rozdělení momentů mezi jednotlivá kola nám podávají mnoho informací o vlivu nastavení parametrů na kvalitu jízdy. V praxi by mohla být použita například při vývoji podvozkových komponent vozidel, nebo při vývoji rozdělovacích algoritmů pro rozdělení točivých momentů u elektromobilů.

# Literatura

- [1] R. N. Jazar, *Vehicle Dynamics: Theory and Application*. New York, NY, USA: Springer, 2008.
- [2] RACING TEAM PILSEN, *Brožura UWB04*. Plzeň: ZČU, 2017.
- [3] R. Rajamani, *Vehicle Dynamics and Control*. New York, NY, USA: Springer Science + Business Media, LLC, 2012.
- [4] F. Vlk, *Dynamika motorových vozidel*. Brno: Nakladatelství a vydavatelství VLK, 2000.
- [5] M. Hrabáčka, *Modelování a řízení jízdních manévřů silničního vozidla, Bakalářská práce*, Plzeň, 2020.
- [6] M. Blundell and D. Harty, *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*. Warrendale, PA, USA: Society of Automotive Engineers, Inc., 2004.
- [7] W. F. Milliken and D. L. Milliken, *Race Car Vehicle Dynamics*. Warrendale, PA, USA: Society of Automotive Engineers, Inc., 1995.
- [8] G. Rill, *Vehicle Dynamics*. Regensburg, Německo: Hochschule Regensburg, University of Applied Sciences, 2009.
- [9] T. D. Gillespie, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Warrendale, PA, USA: Society of Automotive Engineers, Inc., 1992.
- [10] A. A. Shabana, *Computational Dynamics*, 3rd ed. Chichester, West Sussex, Velká Británie: John Wiley and Sons, Ltd., 2010.
- [11] D. Mikle and M. Bařa, *Torque Vectoring for an Electric All-wheel Drive Vehicle*. IFAC (International Federation of Automatic Control), 2019.