Ao.Prof. Dr. Josef Schicho
Johann Radon Institute
Austrian Academy of Sciences
Altenbergerstraße 69
A-4040 Linz

May 10, 2011

To the Doctoral Commission
of Jan Vrsek
University of Plzen
Czech Republic

Review on the Doctoral Dissertation
of Jan Vrsek

The study of convolution varieties from an algebraic point of view became recently relevant in the field of computer-aided design. The observation that phytagorean properties of the gradient vector of an algebraic curve has implications for parametrizations of the curve itself and of offset curves or surfaces was applied to various geometric questions by Farouki, Jüttler, Sendra and many other researchers. It was only a natural step to consider the more general case of convolution curves and surfaces (Šír, Lávička, Bastl, and others). This PhD thesis is a nice and useful systematic study of convolutions of hypersurfaces. The author especially analyzes the number of irreducible components and the question of rationality of the individual components.

The stepping stone for answering all this question is the concept of the incidence variety, which I first in this clarity in this PhD thesis. For two given hypersurfaces, the incidence variety is the subset of the product variety consisting of pairs of points that have a common tangent hyperplane. There is a natural map from the incidence variety to the convolution variety, and this makes it possible to determine the convolution degree, the number of irreducible components of the convolution variety, and answer questions on parametrizability.

The thesis is of high scientific quality, carefully written, and the results appear to be correct. The scientific quality is underlined by the fact that three of the results have also been published in good refereed journals, namely the Journal of Symbolic Computation which is the leading journal in its field, the Journal of Geometry and Graphics, and the Journal pf Applied Mathematics. The papers have been co-authored with the PhD advisor Lávička, so it is difficult to tell the contribution of the candidate; the fact that he is mentioned as a first author despite V comes after L indicates that his contribution was essential. In addition, some material has been presented at conferences and in conference proceedings. So I certainly recommend to admit the candidate to the defense. If I were to recommend a grade, I would recommend the highest.

With best regards,

Ao.Prof. Dr. Josef Schicho

Oponentský posudek doktorské disertační práce

„Algebraic analysis of convolutions of hypersurafces“

autora Mgr. Jana Vrška

Předložená práce je věnována problematice konvolucí algebraických variet, zejména nadploch (rovinných křivek a ploch v prostoru). Toto téma je na pomezí mezi algebraickou geometrií, (která vystupuje především v roli účinného nástroje), a geometrickým modelováním (Computer Aided Geometric Design), které je přirozeným aplikačním polem. Jedná se tedy o lukrativní téma, které umožňuje propojení poměrně zajímavého teoretického aparátu a jasně motivovaných aplikací. Z tohoto důvodu zvolené téma dobře navazuje na moderní výzkumné trendy aplikované geometrie.

Kromě úvodu a závěru má práce tři hlavní části – kapitoly 2, 3 a 4. V kapitole 2 jsou nejprve stručně připomenuty některé definice a věty z algebraické geometrie, včetně konceptu duální variety. Je zjevné, že autor předkládá tyto elementární poznatky osobitým způsobem, který svědčí o dobré znalosti algebraické geometrie. Zbytek kapitoly 2 je věnován definici a základním vlastnostem konvolucí včetně jejich aplikací na výpočet offsetu a Minkowského součtu dvou množin.

V kapitole 3 autor pojednává obecně o konvolucích nadploch. Nejprve si připravuje potřebné nástroje, když studuje konvoluci dvou nadploch z hlediska algebraických (implicitně popsaných) variet, dále z hlediska jejich (koherentních) parametrizací a konečně z pohledu jejich popisu pomocí duální reprezentace. V druhé části kapitoly 3 autor s pomocí těchto nástrojů odvozuje hlavní obecné výsledky o konvolucích. Věnuje se studiu ireducibilních komponent konvoluce, které rozlišuje do tří tříd: jednoduchá (simple), speciální (special) a degenerovaná (degenerated). Z hlediska aplikačního potenciálu vyzdvihuje racionální jednoduché komponenty, protože jejich parametrizaci je možno vždy odvodit z parametrizace daných nadploch. Ukazuje rovněž řadu souvislostí mezi vstupními nadplochami a jednoduchými komponentami jejich konvoluce (viz např. Corollary 3.28). Poměrně rozsáhlé je studium konvolučního stupně, který je důležitým invariantem pro afinní nadplochy definovaným (zjednodušeně řečeno) jako stupeň Gaussova zobrazení. Mezi nejzajímavější výsledky celé práce patří formule pro odhad konvolučního stupně obecné nadplochy (Proposition 3.37) a její konkretizace v explicitní formuli pro křivky (Theorem 3.40 a Corollary 3.42). Je rovněž ukázána souvislost mezi konvolučním stupněm vstupních nadploch a počtem ireducibilních komponent konvoluce (Theorem 3.46). Závěr kapitoly 3 je věnován poznámkám o speciálních a degenerovaných komponentách konvolucí.

V kapitole 4 jsou studovány nadplochy konvolučního stupně 1 a 2. O nadplochách konvolučního stupně 1 je ukázáno, že to jsou právě tvz. LN nadplochy (Theorem 4.7) a je popsán postup jak získat příslušnou LN parametrizaci. V důsledku se tedy vždy jedná o plochy racionální. Je ukázáno, jak tyto nadplochy mohou být získány konvolucí elementárních LN nadploch. Velmi zajímavé jsou výsledky o QN plochách konvolučního stupně 2. Je zejména předložena vhodná analogie k LN nadplochám (Definice 4.18), pro kterou je odvozena explicitní podmínka pro existenci koherentní parametrizace druhé nadplochy (Proposition 4.28), která je nezbytná pro existenci racionální parametrizace komponent konvoluce. V této teorii je možno vidět pozoruhodné zobecnění teorie racionálních offsetů.

Předložená práce představuje jedno z prvních systematických rozsáhlejších pojednání o konvolucích a přináší řadu zajímavých a originálních výsledků. Je třeba zejména vyzdvihnout zmíněné výsledky konvolučním stupni, typologii konvolucí a jejich komponent a o nadplochách konvolučního stupně 2. Proto je práce významným přínosem pro obor aplikované geometrie a geometrického modelování. Z celé práce je patrné autorovo důkladné zvládnutí aparátu algebraické geometrie. Rovněž je zjevná jeho orientace v dané problematice. Autor nepochybně užil odpovídající metodu a splnil výzkumné cíle doktorské práce.

Musím rovněž s potěšením ocenit formální kvality předložené práce. Práce je psána velmi dobrou angličtinou, je srozumitelná a přehledná. Obsahuje řadu obrázků a rovněž typograficky je velmi pěkná. Autor na počátku práce pečlivě představuje stav dané problematiky a soustavně cituje použité prameny a odkazy na známé výsledky.

Osobně jsem sledoval vystoupení Mgr. Jana Vrška na několika konferencích. Jeho příspěvky byly vždy zajímavé a dobře připravené. Z diskusí s ním pak byl patrný hluboký zájem o matematiku a zvláště jeho sklon ke studiu teoreticky náročného aparátu. Zaujal mne rovněž jeho přemýšlivý osobitý postoj k problematice geometrického modelování a zájem o nejrůznější aplikace širokého spektra matematických teorií počínaje teorií her a konče abstraktní algebraickou geometrií.

Následující připomínky a otázky k diskuzi je třeba chápat v kontextu jinak všestranně výborné práce.

- Některé jednoduché příklady by mohli být doplněny obrázkem, kupříkladu příklad 3.29.
- Poznámka 1 na straně 11 je špatně umístěna (měla by být na str. 10). Čísla stránek v obsahu ne vždy odpovídají skutečnému stránkování (např. pro kapitolu 2.1.3).
- Autor na mnoha místech používá obrat „Let be given a surface …“ namísto lepšího „Let there be given a surface …“ či „Let a surface be given …“
- Konvoluce je definována pro algebraické variety obecně, ale dále je studována převážně pro nadplochy. Jak užitečná a obtížná by byla teorie konvolucí pro variety nižší dimenze (dvě křivky v prostoru atd.)?
- Lze ukázat, že předpoklad v Theorem 4.9 (iii) je nezbytný? Lze tedy uvézt příklad kdy V*W je v tomto případě degenerované?
- Je pravda, že nadplochy konvolučního stupně 1 a 2 (případně pouze QN nadplochy) jsou právě ty, které je možno popsat explicitní opěrnou funkcí (support function)? Jedná se vždy o plochy, které nemají parabolické body (např. inflexe)?

Celkově vzato, autor předloženou prací i svými dalšími publikacemi a vystoupeními jasně ukázal, že má dispozice k vědecké činnosti, a že tyto dispozice úspěšně rozvinul. Předložená práce vrchovatou měrou splňuje všechny požadavky kladené na disertační práci k získání akademického titulu doktor. Proto navrhuji, aby práce Jana Vrška byla přijata jako disertační a aby po její úspěšné obhajobě byl Mgr. Janu Vrškovi udělen doktorský titul.

Praha, 9.5. 2011

Zbyněk Šír

……………………………

RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.
MÚ MFF UK v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8