



FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

KATEDRA
MATEMATIKY

Bakalářská práce

Fučíkovo spektrum
 p -Laplaciánu s nelokálními
okrajovými podmínkami

Jiří Sloup



FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

KATEDRA
MATEMATIKY

Bakalářská práce

Fučíkovo spektrum
 p -Laplaciánu s nelokálními
okrajovými podmínkami

Jiří Sloup

Vedoucí práce

Ing. Petr Nečesal, Ph.D.

© Jiří Sloup, 2023.

Všechna práva vyhrazena. Žádná část tohoto dokumentu nesmí být reprodukována ani rozšiřována jakoukoli formou, elektronicky či mechanicky, fotokopírováním, nahráváním nebo jiným způsobem, nebo uložena v systému pro ukládání a vyhledávání informací bez písemného souhlasu držitelů autorských práv.

Citace v seznamu literatury:

SLOUP, Jiří. *Fučíkovo spektrum p -Laplaciánu s nelokálními okrajovými podmínkami*. Plzeň, 2023. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky. Vedoucí práce Ing. Petr Nečesal, Ph.D.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Jiří SLOUP**
Osobní číslo: **A20B0044P**
Studijní program: **B0541A170007 Matematika a její aplikace**
Téma práce: **Fučíkovo spektrum p -Laplaceova operátoru s nelokálními okrajovými podmínkami**
Zadávací katedra: **Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování

1. Představte p -trigonometrické funkce, uveďte jejich základní známé vlastnosti.
2. Uvažujte jednodimenzionální p -Laplaceův operátor L_p s jednou lokální okrajovou podmínkou a jednou nelokální okrajovou podmínkou integrálního typu. Určete vlastní čísla operátoru L_p .
3. Navrhněte algoritmus pro numerickou aproximaci Fučíkova spektra operátoru L_p a získejte aproximace pro vybrané hodnoty L_p .
4. Pro $p > 1$ sestavte implicitní popis Fučíkova spektra operátoru L_p . Nalezený popis užitě k vykreslení Fučíkova spektra a proveďte srovnání s numerickými aproximacemi z předchozího bodu.

Rozsah bakalářské práce: **20-50 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

- Brown, B. M., Reichel, W.: Computing Eigenvalues and Fučík-Spectrum of the Radially Symmetric p -Laplacian. J. Comput. Appl. Math. 148, No. 1, 183-211 (2002).
- Fučík, S.: Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems. Mathematics and Its Applications, 4. Dordrecht – Boston – London: D. Reidel Publishing Company. X, 390 p. (1980).
- Girg, P.; Kotrla, L.: Differentiability Properties of p -trigonometric Functions. Electron. J. Differ. Equ. 2014, Conf. 21, 101-127 (2014).
- Kadlec, J.; Nečesal, P.: The Fučík Spectrum as Two Regular Curves. NABVP 2018, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 292, 177-198 (2019).

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Petr Nečesal, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **3. října 2022**
Termín odevzdání bakalářské práce: **24. května 2023**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Západočeská univerzita v Plzni má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

Plzeň dne 27. července 2023

.....

Jiří Sloup

V textu jsou použity názvy produktů, technologií, služeb, aplikací, společností apod., které mohou být ochrannými známkami nebo registrovanými ochrannými známkami příslušných vlastníků.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá Fučikovým spektrem p -Laplaceova operátoru. Zkoumáme úlohu s nelokálními okrajovými podmínkami, kde jedna podmínka je Dirichletovská a jedna integrální. Fučikovo spektrum implicitně popíšeme, zároveň i numericky aproximujeme a na základě toho určíme některé jeho vlastnosti.

Abstract

This Bachelor thesis deals with the Fučík spectrum of p -Laplace operator. We examine a nonlocal boundary value problem, with one Dirichlet boundary condition and one integral boundary condition. We implicitly describe the Fučík spectrum, we also approximate it numerically and based on that, we describe some of its characteristics.

Klíčová slova

Fučikovo spektrum • p -Laplaceův operátor • nelokální okrajové podmínky • integrální okrajová podmínka • implicitní popis

Poděkování

Děkuji panu Ing. Petru Nečesalovi, Ph.D. za odborný dohled, cenné rady, ochotu a trpělivost při zpracování bakalářské práce.

Obsah

1 Úvod	2
2 Počáteční úlohy	4
2.1 Zobecněné trigonometrické a hyperbolické funkce	7
2.2 Počáteční úloha pro $\alpha = \beta = \lambda$	11
2.3 Počáteční úloha s nelinearitou $g_{\alpha,\beta}$	16
3 Okrajové úlohy	23
3.1 Fučíkovo spektrum pro úlohu s Dirichletovými podmínkami . . .	24
3.2 Vlastní čísla pro úlohu s integrální okrajovou podmínkou	27
3.3 Fučíkovo spektrum pro úlohu s integrální okrajovou podmínkou .	31
4 Numerické experimenty a vlastnosti Fučíkova spektra	46
4.1 Numerická aproximace Fučíkova spektra	46
4.2 Fučíkovo spektrum pro $p \rightarrow 1+$	47
4.3 Fučíkovo spektrum pro $p \rightarrow +\infty$	52
5 Shrnutí	56
Bibliografie	57
Implementace algoritmů v programu MATLAB	58

V této práci se budeme zabývat studiem okrajové úlohy

$$\begin{cases} -\Delta_p u(t) = \alpha |u^+(t)|^{p-2} u^+(t) - \beta |u^-(t)|^{p-2} u^-(t), & t \in (0; \pi_p), \\ u(0) = 0, \\ \int_0^{\pi_p} |u(t)|^{p-2} u(t) dt = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

kde $p > 1$ je parametr, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Δ_p je jednodimenzionální diferenciální operátor nazývaný jako p -Laplaceův operátor, nebo také p -Laplacián, $\Delta_p u := (|u'(t)|^{p-2} u'(t))'$, u^+ a u^- značí kladnou a zápornou část funkce u , tedy $u^\pm(t) := \max\{\pm u(t), 0\}$ a $\pi_p = (2\pi)/(p \sin(\frac{\pi}{p}))$. Řešením okrajové úlohy (1.1) budeme rozumět takovou funkci $u \in C^1(\langle 0; \pi_p \rangle)$, pro kterou platí $(|u'|^{p-2} u') \in C^1(\langle 0; \pi_p \rangle)$ a která na intervalu $(0; \pi_p)$ vyhovuje diferenciální rovnici v (1.1) a zároveň splňuje okrajové podmínky v (1.1).

Hlavním cílem práce je pro pevně zvolené $p > 1$ prozkoumat tzv. Fučíkovo spektrum pro úlohu (1.1), což je množina

$$\Sigma_p := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{úloha (1.1) má netriviální řešení } u\}.$$

Povšimněme si, že pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ má okrajová úloha (1.1) vždy triviální řešení $u(t) \equiv 0$. Naším cílem bude hledat všechny dvojice $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pro které má úloha (1.1) netriviální řešení u , tedy takové řešení u , které je nenulové alespoň v jednom bodě intervalu $(0; \pi_p)$. Pro speciální volbu hodnoty parametru $p = 2$ má okrajová úloha (1.1) následující tvar

$$\begin{cases} -u''(t) = \alpha u^+(t) - \beta u^-(t), & t \in (0; \pi), \\ u(0) = 0, \\ \int_0^\pi u(t) dt = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Okrajová úloha (1.2) byla již dříve podrobně zkoumána a implicitní popis jejího Fučíkova spektra Σ_2 lze nalézt například v práci [1]. Poznamenejme, že ve Fučíkové

spektru Σ_2 leží body (λ_n, λ_n) , kde $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda_n = (2n)^2$, které v α, β rovině leží na diagonále $\alpha = \beta$. Dále jsou λ_n vlastní čísla okrajové úlohy

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda u(t) & t \in (0; \pi), \\ u(0) = 0, \\ \int_0^\pi u(t) dt = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

kterou získáme snadno z (1.2) pro $\alpha = \beta = \lambda$.

Struktura celé práce je následující. Druhá kapitola bude věnována počátečním úlohám. Zavedeme zde zobecněné p -trigonometrické a p -hyperbolické funkce a ukážeme, jak s jejich pomocí popsat řešení počáteční úlohy pro diferenciální rovnici v (1.1). Ve třetí kapitole se budeme věnovat okrajovým úlohám a pomocí výsledků předchozí kapitoly se pokusíme popsat Fučíkovo spektrum Σ_p úlohy (1.1). Ve čtvrté kapitole pak představíme výsledky numerických experimentů a použité numerické algoritmy.

Počáteční úlohy

2

V této kapitole se budeme zabývat řešením počáteční úlohy

$$\begin{cases} -(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' = \alpha|u^+(t)|^{p-2}u^+(t) - \beta|u^-(t)|^{p-2}u^-(t), & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = \mu, \end{cases} \quad (2.1)$$

kde $p > 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\mu \in \mathbb{R}$. Tato počáteční úloha je odvozená z okrajové úlohy (1.1) nahrazením integrální okrajové podmínky podmínkou na derivaci $u'(0) = \mu$ a diferenciální rovnice je nyní uvažována na celém \mathbb{R} . Řešením u počáteční úlohy (2.1) budeme rozumět takovou funkci $u \in C^1(\mathbb{R})$, pro kterou platí $(|u'|^{p-2}u') \in C^1(\mathbb{R})$, která vyhovuje diferenciální rovnici i okrajovým podmínkám v (2.1).

Pro další práci s diferenciální rovnicí v (2.1) bude výhodné zavést následující funkci φ_p , která umožní kompaktnější zápis této diferenciální rovnice a také snadnější manipulaci s touto rovnicí.

Definice 2.1. Funkce $\varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována jako

$$\varphi_p(t) := \begin{cases} |t|^{p-2} \cdot t & \text{pro } t \neq 0, \\ 0 & \text{pro } t = 0, \end{cases}$$

kde $p > 1$ je parametr.

Počáteční úlohu (2.1) nyní můžeme psát v následujícím tvaru

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = \alpha \cdot \varphi_p(u^+(t)) - \beta \cdot \varphi_p(u^-(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = \mu. \end{cases} \quad (2.2)$$

V následujícím lemmatu nyní uvedme základní vlastnosti funkce φ_p (viz obrázek 2.1).

Lemma 2.2. Necht $p > 1$.

1. Pro funkci φ_p platí

$$\varphi_p(t) = |t|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

2. Funkce φ_p je ostře rostoucí.

3. Funkce φ_p je lichá.

4. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\varphi_p(a \cdot t) = \varphi_p(a) \cdot \varphi_p(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

5. K funkci φ_p existuje inverzní funkce $\varphi_p^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a platí

$$\varphi_p^{-1}(t) = \varphi_q(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

kde $q > 1$ je konjugovaný exponent k p , tedy platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (2.6)$$

Důkaz. Dokazovat budeme postupně jednotlivé body lemmatu 2.2.

1. Jelikož pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $t = |t| \cdot \operatorname{sgn}(t)$, můžeme pro $t \neq 0$ upravit předpis pro funkci φ_p následujícím způsobem

$$\varphi_p(t) = |t|^{p-2} \cdot t = |t|^{p-2} \cdot |t| \cdot \operatorname{sgn} t = |t|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(t), \quad t \neq 0.$$

Dále pro $t = 0$ vztah v (2.3) platí, neboť

$$0 = \varphi_p(0) = |0|^{p-1} \cdot 0.$$

2. Mějme $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ takové, že $t_1 < t_2$. S využitím vztahu (2.3) ověříme, že pak platí $\varphi_p(t_1) < \varphi_p(t_2)$. Ukážeme tedy, že platí

$$|t_1|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(t_1) < |t_2|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(t_2).$$

Důkaz rozdělíme na pět případů podle znaménka t_1 a t_2 , jde tedy o následující případy:

- a) $t_1, t_2 < 0$,
- b) $t_1 < 0, t_2 = 0$,
- c) $t_1 < 0 < t_2$,
- d) $t_1 = 0, t_2 > 0$,

e) $t_1, t_2 > 0$.

Důkaz je ve všech pěti případech velmi podobný, proto zde uvedeme pouze zdůvodnění pro první případ, kdy $t_1, t_2 < 0$:

$$\begin{aligned} |t_1|^{p-1} \cdot (-1) &< |t_2|^{p-1} \cdot (-1), \\ |t_1|^{p-1} &> |t_2|^{p-1}, \\ |t_1| &> |t_2|, \\ -t_1 &> -t_2, \\ t_1 &< t_2. \end{aligned}$$

3. Lichost funkce φ_p ukážeme s využitím (2.3) následujícím způsobem

$$\varphi_p(-t) = |-t|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(-t) = -|t|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(t) = -\varphi_p(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Mějme $a \in \mathbb{R}$. Platnost vztahu (2.4) opět snadno ověříme s využitím (2.3) následujícím způsobem

$$\varphi_p(a \cdot t) = |a \cdot t|^{p-1} \operatorname{sgn}(a \cdot t) = |a|^{p-1} \operatorname{sgn}(a) |t|^{p-1} \operatorname{sgn}(t) = \varphi_p(a) \varphi_p(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Inverzní funkce φ_p^{-1} k funkci φ_p existuje, protože funkce φ_p je ostře monotónní. Zároveň pro definiční obor funkce φ_p^{-1} platí

$$D(\varphi_p^{-1}) = H(\varphi_p) = \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Pro libovolně zvolené $t \in \mathbb{R}$ označíme $s = |t|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(t)$, a následně vyjádříme t v závislosti na s . Nejprve však určíme znaménko s

$$\operatorname{sgn}(s) = \operatorname{sgn}(|t|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(t)) = \operatorname{sgn}(t).$$

A nyní můžeme přistoupit k provedení následujících úprav:

$$\begin{aligned} s &= |t|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(t), \\ |s| \cdot \operatorname{sgn}(s) &= |t|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(t), \\ |s| &= |t|^{p-1}, \\ |s|^{\frac{1}{p-1}} &= |t|, \\ |s|^{\frac{1}{p-1}} \cdot \operatorname{sgn}(s) &= |t| \cdot \operatorname{sgn}(t), \\ t &= |s|^{\frac{1}{p-1}} \cdot \operatorname{sgn}(s). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ze vztahu (2.6) dále vyjádříme $\frac{1}{p-1}$ v závislosti na q

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= 1, \\ \frac{1}{p} &= 1 - \frac{1}{q}, \\ p &= \frac{q}{q-1}, \\ p-1 &= \frac{1}{q-1}, \\ \frac{1}{p-1} &= q-1.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Dosazením (2.9) do (2.8) dostáváme

$$t = |s|^{q-1} \cdot \operatorname{sgn}(s) = \varphi_q(s).$$

Pro inverzní funkci φ_p^{-1} tedy platí

$$\varphi_p^{-1}(t) = \varphi_q(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Poznamenejme, že na obrázku 2.1 je graf lineární funkce φ_2 a dále grafy funkcí φ_3 a její inverzní funkce $\varphi_{\frac{3}{2}}$.

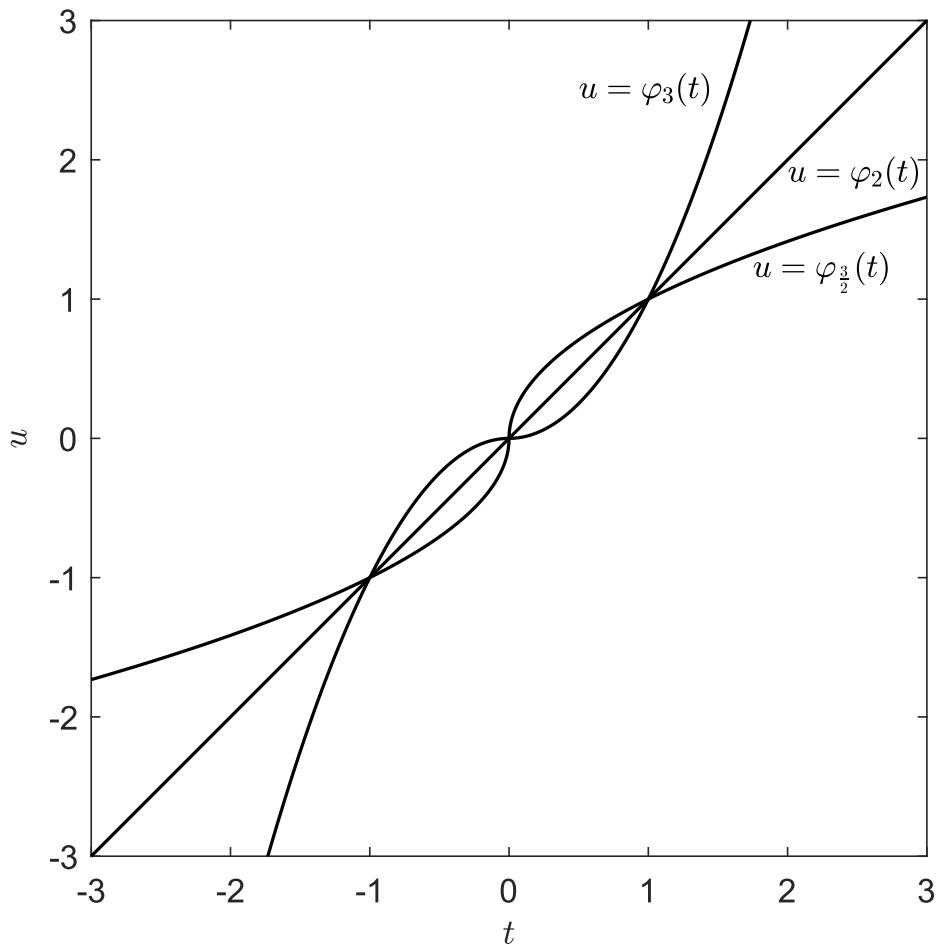
2.1 Zobecněné trigonometrické a hyperbolické funkce

V této části představíme zobecněné p -trigonometrické funkce \sin_p a \cos_p tak, jak jsou zavedeny v článcích [2] a [3]. Pomocí těchto zobecněných funkcí se nám podaří vyjádřit řešení u studované počáteční úlohy (2.1) a také s tímto řešením dále pracovat.

Definice 2.3. Funkce $\sin_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována jako řešení počáteční úlohy

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'(t)))' + (p-1)\varphi_p(u(t)) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1, \end{cases}\tag{2.10}$$

kde $p > 1$ je parametr.



Obrázek 2.1: Funkce φ_p pro $p = \frac{3}{2}$, $p = 2$ a $p = 3$.

Poznamenejme, že pro $p = 2$ má počáteční úloha (2.10) tvar

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Snadno ověříme, že řešení této počáteční úlohy (2.11) je dáno jednoznačně a je jím funkce $u(t) = \sin(t)$.

V následujícím lemmatu uvedeme některé vlastnosti funkce \sin_p , které odvodil Elbert v článku [2].

Lemma 2.4. *Mějme $p > 1$.*

1. *Funkce \sin_p je spojitě diferencovatelná.*

2. Funkce \sin_p je $2\pi_p$ -periodická, kde

$$\pi_p := \frac{2\pi}{p \sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}. \quad (2.12)$$

3. Funkce \sin_p je lichá.

4. Pro $t \in (0; \pi_p)$ platí

$$\sin_p(t) > 0. \quad (2.13)$$

5. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin_p(t) = \sin_p(\pi_p - t). \quad (2.14)$$

6. Pro $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$\sin_p(n \cdot \pi_p) = 0. \quad (2.15)$$

Připomeňme, že pro goniometrickou funkci sinus platí známá identita

$$(\sin(t))^2 + (\sin'(t))^2 = 1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

V článku [2] Elbert zobecnil vztah (2.16) pro funkci \sin_p . Toto zobecnění uvádíme v následujícím lemmatu.

Lemma 2.5. *Mějme $p > 1$. Pak platí*

$$|\sin_p(t)|^p + |\sin'_p(t)|^p = 1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Jelikož pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí, že $(\sin(t))' = \cos(t)$, nabízí se zavést funkci \cos_p právě jako první derivaci funkce \sin_p . Následující definice je převzata z článku [3].

Definice 2.6. *Funkce $\cos_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována pro $p > 1$ jako*

$$\cos_p(t) := \sin'_p(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Nyní můžeme identitu (2.17) psát také v následujícím tvaru

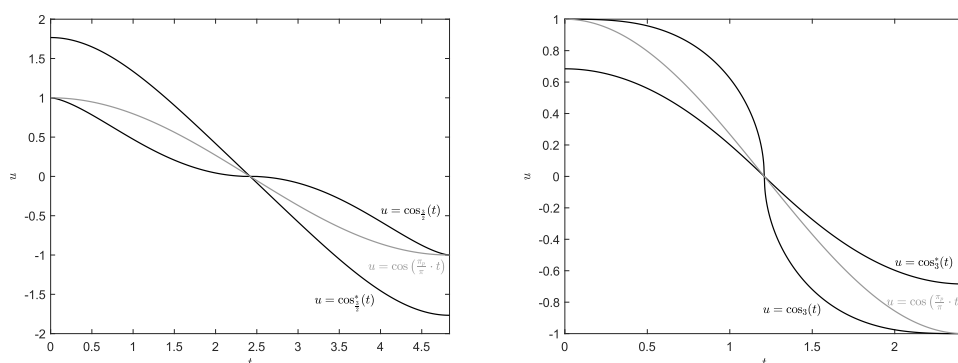
$$|\sin_p(t)|^p + |\cos_p(t)|^p = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 2.7. Existuje také Elbertova [2] definice funkce p -kosinu pro $p > 1$, která není ekvivalentní s definicí 2.6, (viz obrázek 2.2):

$$\cos_p^*(t) := \int_t^{\frac{\pi_p}{2}} \sin_p(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Pro takto definovanou funkci \cos_p^* platí

$$(\cos_p^*(t))' = -\sin_p(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$



Obrázek 2.2: Různé definice p -kosinu pro $p = \frac{3}{2}$ (vlevo) a $p = 3$ (vpravo) a porovnání s grafem funkce $u = \cos\left(\frac{\pi_p}{\pi} \cdot t\right)$.

Lemma 2.8. Pro funkci \cos_p , kde $p > 1$ a pro $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned} \cos_p(2n \cdot \pi_p) &= 1, \\ \cos_p((2n - 1) \cdot \pi_p) &= -1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Důkaz. Díky $2\pi_p$ -periodicitě funkce \sin_p je i funkce \cos_p $2\pi_p$ -periodická a platí

$$\cos_p(2n \cdot \pi_p) = \cos_p(0) = \sin_p'(0).$$

Funkce \sin_p je řešením počáteční úlohy (2.10) a splňuje obě počáteční podmínky. Ze druhé počáteční podmínky tak dostáváme

$$\cos_p(2n \cdot \pi_p) = 1.$$

Obdobně dostaneme, že

$$\cos_p((2n - 1) \cdot \pi_p) = \cos_p(\pi_p) = \sin_p'(\pi_p). \tag{2.21}$$

Derivováním vztahu (2.14) podle t obdržíme

$$\sin_p'(t) = -\sin_p'(\pi_p - t), \quad t \in \mathbb{R},$$

a tedy

$$\sin_p'(\pi_p) = -\sin_p'(0) = -1. \tag{2.22}$$

Celkem tedy z (2.21) a (2.22) dostáváme

$$\cos_p((2n - 1) \cdot \pi_p) = -1.$$

□

Definice 2.9 (Girg, Kotrla [3]). Funkce $\sinh_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována jako řešení počáteční úlohy

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'(t)))' - (p-1)\varphi_p(u(t)) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1, \end{cases} \quad (2.23)$$

kde $p > 1$ je parametr.

V práci [3] autoři ukázali základní vlastnosti funkce \sinh_p . Některé z nich uvádíme v následujícím lemmatu.

Lemma 2.10. Mějme $p > 1$. Pak má funkce \sinh_p následující vlastnosti:

1. Funkce \sinh_p je ostře rostoucí.
2. Funkce \sinh_p je lichá.

2.2 Počáteční úloha pro $\alpha = \beta = \lambda$

Tato část bude věnována následující počáteční úloze

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = \lambda \cdot \varphi_p(u(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = \mu, \end{cases} \quad (2.24)$$

kde $p > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\mu > 0$. Tato počáteční úloha (2.24) představuje úlohu (1.1), respektive (2.1), pro $\alpha = \beta = \lambda$. Poznamenejme, že platí $\varphi_p(u^+(t)) - \varphi_p(u^-(t)) = \varphi_p(u(t))$, neboť

$$\varphi_p(u^+(t)) - \varphi_p(u^-(t)) = (u^+(t))^{p-1} - (u^-(t))^{p-1} = \begin{cases} |u(t)|^{p-1} & \text{pro } u(t) \geq 0, \\ -|u(t)|^{p-1} & \text{pro } u(t) < 0. \end{cases}$$

Poznámka 2.11. Zvolíme-li $\lambda = (p-1)$ a $\mu = 1$, přechází úloha (2.24) na úlohu (2.10).

Lemma 2.12 (del Pino [4]). Existuje jednoznačné řešení počáteční úlohy (2.24).

Poznámka 2.13. Del Pino ve své práci [4] uvádí i tvar řešení počáteční úlohy (2.24), a to

$$u(t) = \mu \cdot \lambda^{-\frac{1}{p}} \cdot \sin_p^\circ \left(\lambda^{\frac{1}{p}} \cdot t \right), \quad (2.25)$$

kde funkce \sin_p° je definována odlišně od \sin_p a platí

$$\sin_p^\circ(t) = (p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot \sin_p\left(\frac{t}{(p-1)^{\frac{1}{p}}}\right). \quad (2.26)$$

Užitím (2.25) a (2.26) lze řešení počáteční úlohy (2.24) psát ve tvaru

$$u(t) = \mu \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \sin_p\left(\left(\frac{\lambda}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

V následující části ukážeme vlastní způsob odvození tvaru (2.27) pro řešení u počáteční úlohy (2.24) bez použití vyjádření (2.25) od del Pina v článku [4].

Lemma 2.14. *Počáteční úlohu (2.24) lze ekvivalentně přepsat do tvaru*

$$\begin{cases} u'(t) = \varphi_q(v(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ v'(t) = -\lambda \cdot \varphi_p(u(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ v(0) = \varphi_p(\mu), \end{cases} \quad (2.28)$$

kde $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Zavedeme

$$v(t) := \varphi_p(u'(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.29)$$

Diferenciální rovnici v (2.28) lze zapsat ve tvaru

$$v'(t) = -\lambda \cdot \varphi_p(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dále vyjádříme u' pomocí v . Díky znalosti inverzní funkce φ_p^{-1} k funkci φ_p , (viz lemma 2.2), platí pro každé $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} v(t) &= \varphi_p(u'(t)), \\ \varphi_p^{-1}(v(t)) &= u'(t), \\ u'(t) &= \varphi_q(v(t)), \end{aligned}$$

kde q je konjugovaný exponent k p . Zbývá určit počáteční podmínku pro $v(0)$

$$v(0) = \varphi_p(u'(0)) = \varphi_p(\mu).$$

□

Lemma 2.15. *Mějme $p > 1$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Diferenciální rovnice*

$$-(\varphi_p(u'(t)))' = \lambda \varphi_p(u(t)) \quad (2.30)$$

je homogenní.

Důkaz. Předpokládejme, že u je řešením rovnice (2.30). Chceme ukázat, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ i funkce

$$w_a(t) \cdot u(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

je řešením rovnice (2.30), tj. chceme ověřit, zda platí

$$-(\varphi_p(w_a'(t)))' = \lambda \varphi_p(w_a(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dosazením za w_a dostáváme

$$-(\varphi_p((a \cdot u(t))'))' = \lambda \varphi_p(a \cdot u(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Z homogenity derivace pak platí

$$-(\varphi_p(a \cdot u'(t)))' = \lambda \varphi_p(a \cdot u(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pomocí bodu 3. lemmatu 2.2 rovnici dále upravíme

$$-(\varphi_p(a) \cdot \varphi_p(u'(t)))' = \lambda \varphi_p(a) \cdot \varphi_p(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opět použijeme homogenitu derivace a dostáváme

$$\begin{aligned} -\varphi_p(a) \cdot (\varphi_p(u'(t)))' &= \lambda \varphi_p(a) \cdot \varphi_p(u(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ -(\varphi_p(u'(t)))' &= \lambda \varphi_p(u(t)), & t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tato rovnice je splněna, protože u je řešením rovnice (2.30). □

Poznámka 2.16. Díky lemmatu 2.15 můžeme provést následující pozorování. Pokud u je řešením počáteční úlohy (2.24) pro $\mu = \mu_1 < 0$, potom funkce $(-u)$ je řešením počáteční úlohy (2.24) pro $\mu = -\mu_1 > 0$. A tedy řešení počáteční úlohy (2.24) pro $\lambda = (p-1)$ a $\mu = \pm 1$ má tvar $u(t) = \pm \sin_p(t)$.

Lemma 2.17. *Mějme $p > 1$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ a $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$ tak, že $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$ a $\operatorname{sgn}(\mu_1) = \operatorname{sgn}(\mu_2)$. Dále mějme řešení (u_1, v_1) počáteční úlohy (2.42) pro $\lambda = \lambda_1$ a $\mu = \mu_1$. Potom dvojice (u_2, v_2) , kde*

$$u_2(t) := \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot u_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.31)$$

$$v_2(t) := \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{p-1} \cdot v_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.32)$$

je řešením počáteční úlohy (2.28) pro $\lambda = \lambda_2$ a $\mu = \mu_2$.

Důkaz. Mějme (u_1, v_1) řešení úlohy (2.28) pro $\lambda = \lambda_1 \neq 0, \mu = \mu_1 \neq 0$. Dosazením do rovnic a úpravou výrazů ukážeme, že dvojice (u_2, v_2) řeší úlohu (2.28) pro $\lambda = \lambda_2 \neq 0, \mu = \mu_2 \neq 0$. Tedy

$$\begin{aligned} u_2'(t) &= \varphi_p^{-1}(v_2(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot u_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right)' &= \varphi_p^{-1}\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{p-1} \cdot v_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right), & t \in \mathbb{R}, \\ \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot u_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right)' &= \varphi_p^{-1}\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{p-1}\right) \cdot \varphi_p^{-1}\left(v_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right), & t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Následující úpravy lze provést, neboť $\frac{\mu_2}{\mu_1} > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot u_1'\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right) &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \varphi_p^{-1}\left(v_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right), & t \in \mathbb{R}, \\ u_1'\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right) &= \varphi_p^{-1}\left(v_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right), & t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pokud označíme

$$s := \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t,$$

kde $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0, t \in \mathbb{R}$, dostaneme rovnici

$$u_1'(s) = |v_1(s)|^{\frac{1}{p-1}} \cdot \text{sgn}(v_1(s)), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.33)$$

Předpokládali jsme, že dvojice (u_1, v_1) je řešením úlohy (2.28), je tedy i řešením rovnice (2.33).

Obdobně ověříme i platnost druhé rovnice pro všechna $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} v_2'(t) &= -\lambda_2 \cdot \varphi_p(u_2(t)), \\ \left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{p-1} v_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right)' &= -\lambda_2 \varphi_p\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot u_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right), \\ \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot v_1'\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right) &= -\lambda_2 \cdot \varphi_p\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \varphi_p\left(u_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right), \\ \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot v_1'\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right) &= -\lambda_2 \cdot \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} \cdot \varphi_p\left(u_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right), \\ v_1'\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right) &= -\lambda_1 \cdot \varphi_p\left(u_1\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right). \end{aligned}$$

Obdobně jako v předchozím případě dosadíme s za $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t$ a dostáváme rovnici

$$v_1'(s) = -\lambda_1 \cdot \varphi_p(u_1(s)), \quad s \in \mathbb{R},$$

kterou dvojice (u_1, v_1) splňuje.

Nakonec je třeba ověřit, že dvojice (u_2, v_2) vyhovuje počátečním podmínkám úlohy (2.28) pro $\lambda = \lambda_2$, $\mu = \mu_2$:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot u_1(0) = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot 0 = 0, \\ v_2(0) &= \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{p-1} \cdot v_1(0) = \left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right|^{p-1} \cdot |\mu_1|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(\mu_1) = |\mu_2|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(\mu_2) = \varphi_p(\mu_2). \end{aligned}$$

□

Počáteční úlohu (2.24) pro $\lambda \neq 0$ a $\mu \neq 0$ nyní zapišme v následujícím ekvivalentním vyjádření

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = (p-1) \cdot \varphi_{p+1}(\gamma) \cdot \varphi_p(u(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = c \cdot \gamma, \end{cases} \quad (2.34)$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned} c &:= \mu \cdot \left(\frac{p-1}{|\lambda|}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \operatorname{sgn}(\lambda), \\ \gamma &:= \left(\frac{|\lambda|}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \operatorname{sgn}(\lambda). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Poznamenejme, že $\operatorname{sgn}(\gamma) = \operatorname{sgn}(\lambda)$ a řešení u počáteční úlohy (2.34) je zároveň řešením úlohy (2.24) pro $\lambda = (p-1) \cdot |\gamma|^p \cdot \operatorname{sgn}(\gamma)$ a $\mu = c \cdot \gamma$. Dále pro $\gamma > 0$ je řešení u počáteční úlohy (2.34) periodické se základní periodou $T = \frac{2 \cdot \pi_p}{\gamma} > 0$ a amplitudou $|c| > 0$, což dokládá následující lemma.

Lemma 2.18. *Mějme $p > 1$, $c \neq 0$ a $\gamma \neq 0$. Úloha (2.34) má právě jedno řešení u . Pro $\gamma > 0$ má řešení u tvar*

$$u(t) = c \cdot \sin_p(\gamma \cdot t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.36)$$

Pro $\gamma < 0$ má řešení u úlohy (2.34) tvar

$$u(t) = c \cdot \sinh_p(-\gamma \cdot t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.37)$$

Důkaz. Mějme počáteční úlohu (2.24) pro $\lambda = \lambda_1 := p - 1 > 0$, $\mu = \mu_1 := \operatorname{sgn}(c \cdot \gamma)$. Úloha (2.24) tím přejde na úlohu (2.10), jejíž řešení je

$$u_1(t) = \operatorname{sgn}(c \cdot \gamma) \cdot \sin_p(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Díky lemmatu 2.14 je dvojice (u_1, v_1) , kde

$$v_1(t) := \varphi_p(u_1'(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

řešením počáteční úlohy (2.28). Funkci u zavedeme jako

$$u(t) := \frac{\mu}{\mu_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot u_1\left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right) = \mu \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} \sin_p\left(\left(\frac{\lambda}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $\lambda > 0$ a $\mu \neq 0$ tak, že $\operatorname{sgn}(\mu) = \operatorname{sgn}(\mu_1)$.

Obdobně lze podle (2.32) definovat i funkci v . Podle lemmatu 2.17 je pak dvojice (u, v) řešením počáteční úlohy (2.28) a díky lemmatu 2.14 je funkce u i řešením počáteční úlohy (2.24). Díky lemmatu 2.12 jde o jednoznačné řešení. Užitím (2.35) dostáváme

$$u(t) = c \cdot \sin_p(\gamma \cdot t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Obdobně lze ukázat i řešení úlohy (2.24) pro $\lambda < 0$. Zvolíme $\lambda = \lambda_1 = -(p-1) < 0$ a dále postupujeme obdobně, jako v případě pro $\lambda > 0$. \square

Poznámka 2.19. Řešení (2.36) úlohy (2.24) pro $\lambda > 0$ odpovídá řešení (2.27), které odvodil del Pino v [4].

2.3 Počáteční úloha s nelinearitou $g_{\alpha,\beta}$

V této závěrečné části se budeme věnovat počáteční úloze (2.1), respektive (2.2), a podáme popis jejího řešení.

Definice 2.20. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definujeme funkci $g_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$g_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} \alpha \cdot t & \text{pro } t \geq 0, \\ \beta \cdot t & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

Pomocí funkce $g_{\alpha,\beta}$ můžeme počáteční úlohu (2.1), respektive (2.2), zapsat ve tvaru

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = g_{\alpha,\beta}(\varphi_p(u(t))), & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = \mu. \end{cases} \quad (2.38)$$

Poznamenejme, že pro $\alpha = \beta$ funkce $g_{\alpha,\beta}$ není lineární, neboť v takovém případě nemáme homogenitu $g_{\alpha,\beta}$.

Lemma 2.21. *Funkce $g_{\alpha,\beta}$ je pozitivně homogenní, tzn. pro funkci $g_{\alpha,\beta}$ a $a > 0$ platí*

$$g_{\alpha,\beta}(a \cdot t) = a \cdot g_{\alpha,\beta}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.39)$$

Důkaz. Platnost vztahu (2.39) ověříme přímo z definice funkce $g_{\alpha,\beta}$. Nejprve předpokládáme, že $t \geq 0$. Pak platí

$$g_{\alpha,\beta}(a \cdot t) = a \cdot \alpha \cdot t = a \cdot g_{\alpha,\beta}(t).$$

Pro $t < 0$ máme

$$g_{\alpha,\beta}(a \cdot t) = a \cdot \beta \cdot t = a \cdot g_{\alpha,\beta}(t).$$

□

Nyní se zaměříme na diferenciální rovnici v (2.38). Rovnice v (2.38) je autonomní a díky pozitivní homogenitě $g_{\alpha,\beta}$ se podaří ukázat pozitivní homogenitu celé rovnice v (2.38).

Lemma 2.22. *Je-li funkce u řešením diferenciální rovnice*

$$(\varphi_p(u'(t)))' + g_{\alpha,\beta}(\varphi_p(u(t))) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.40)$$

pak je i funkce

$$w_a(t) \cdot u(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $a > 0$ řešením rovnice (2.40).

Důkaz. Předpokládejme, že funkce $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ řeší rovnici (2.40). Ukážeme, že pro každé $a \in (0; +\infty)$ i funkce w_a řeší rovnici (2.40). Ověříme tedy, že platí

$$\begin{aligned} (\varphi_p(w_a'(t)))' + g_{\alpha,\beta}(\varphi_p(w_a(t))) &= 0, & t \in \mathbb{R}, \\ (\varphi_p(a \cdot u'(t)))' + g_{\alpha,\beta}(\varphi_p(a \cdot u(t))) &= 0, & t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Použijeme vztah (2.4), pozitivní homogenitu funkce $g_{\alpha,\beta}$ a homogenitu derivace a provedeme následující úpravy

$$\begin{aligned} a \cdot (\varphi_p(u'(t)))' + a \cdot g_{\alpha,\beta}(\varphi_p(u(t))) &= 0, & t \in \mathbb{R}, \\ (\varphi_p(u'(t)))' + g_{\alpha,\beta}(\varphi_p(u(t))) &= 0, & t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Díky předpokladu, že funkce u řeší rovnici (2.40) je tato rovnice splněna. □

Označíme-li pro $p > 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ a $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} c &:= \mu \cdot \left(\frac{(p-1)^2}{|\alpha \cdot \beta|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \operatorname{sgn}(\beta), \\ a &:= \left(\frac{|\alpha|}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \operatorname{sgn}(\alpha), \\ b &:= \left(\frac{|\beta|}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \operatorname{sgn}(\beta), \end{aligned} \quad (2.41)$$

pak má počáteční úloha (2.38) pro $t \in \mathbb{R}$ tvar

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = (p-1) \cdot (\varphi_{p+1}(a) \cdot \varphi_p(u^+(t)) - \varphi_{p+1}(b) \cdot \varphi_p(u^-(t))), \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = c \cdot a \cdot b. \end{cases} \quad (2.42)$$

Lemma 2.23. *Existuje právě jedno řešení u úlohy (2.42).*

Pro $\alpha, \beta > 0$ je funkce u periodická se základní periodou $T = \frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} > 0$ a na intervalu $\langle 0; T \rangle$ má tvar

$$u(t) = c \cdot \begin{cases} b \cdot \sin_p(a \cdot t), & t \in \langle 0; \frac{\pi_p}{a} \rangle, \\ -a \cdot \sin_p\left(b \cdot \left(t - \frac{\pi_p}{a}\right)\right), & t \in \left(\frac{\pi_p}{a}; T\right). \end{cases} \quad (2.43)$$

Pro $\alpha > 0, \beta < 0$ má řešení u úlohy (2.42) tvar

$$u(t) = c \cdot \begin{cases} -b \cdot \sin_p(a \cdot t), & t \in \langle 0; \frac{\pi_p}{a} \rangle, \\ -a \cdot \sinh_p\left(-b \cdot \left(t - \frac{\pi_p}{a}\right)\right), & t \in \left(\frac{\pi_p}{a}; +\infty\right), \\ a \cdot \sinh_p(-b \cdot t), & t \in (-\infty; 0). \end{cases} \quad (2.44)$$

Pro $\alpha < 0, \beta > 0$ má řešení u úlohy (2.42) tvar

$$u(t) = c \cdot \begin{cases} -a \cdot \sin_p(b \cdot (t)), & t \in \langle -\frac{\pi_p}{b}; 0 \rangle, \\ b \cdot \sinh_p\left(-a \cdot \left(t + \frac{\pi_p}{b}\right)\right), & t \in \left(-\infty; \frac{\pi_p}{a}\right), \\ b \cdot \sinh_p(-a \cdot t), & t \in (0; +\infty). \end{cases} \quad (2.45)$$

Pro $\alpha, \beta < 0$ má řešení u úlohy (2.42) tvar

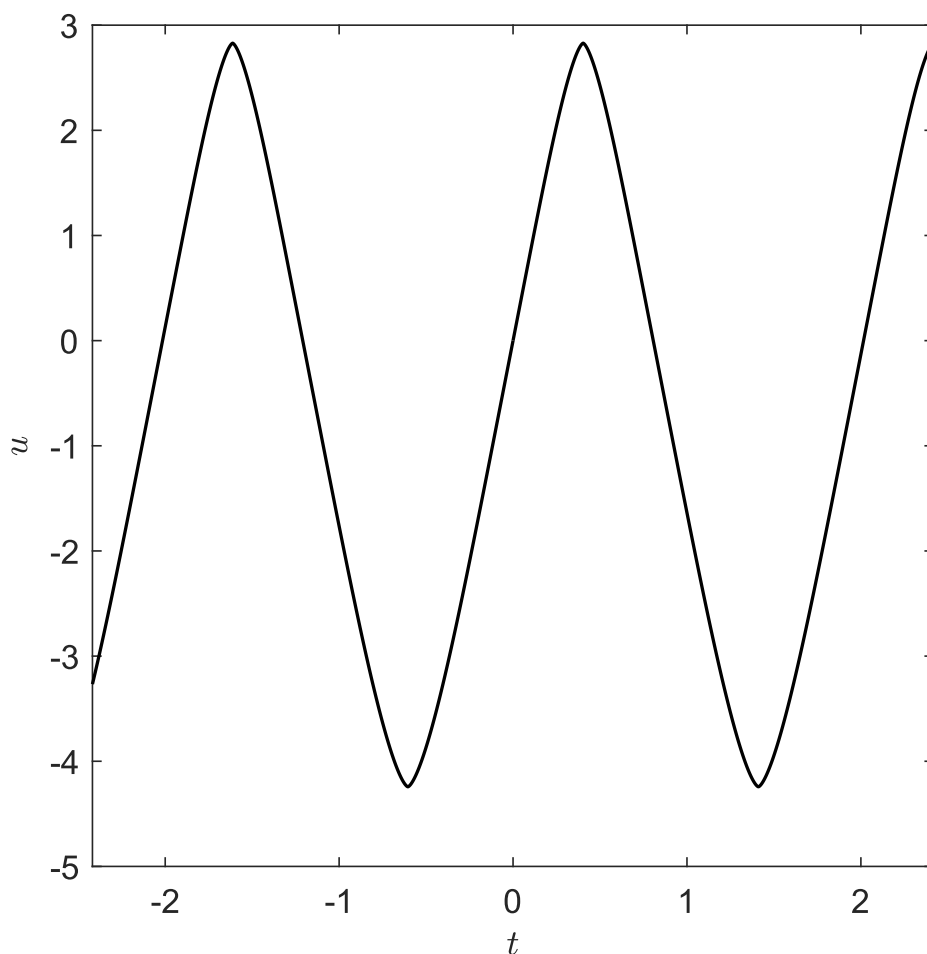
$$u(t) = c \cdot \begin{cases} b \cdot \sinh_p(a \cdot t), & t \in \langle 0; +\infty \rangle, \\ a \cdot \sinh_p(b \cdot t), & t \in (-\infty; 0). \end{cases} \quad (2.46)$$

Důkaz. Mějme řešení u úlohy (2.42) pro $\alpha > 0$ a $\beta > 0$. Pokud uvažujeme interval $I_1 = (0; x)$, kde $x > 0$, takový, že pro každé $t \in I_1$ platí

$$u(t) > 0, \quad (2.47)$$

bude u zároveň řešením následující počáteční úlohy na intervalu I_1 :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = (p-1)a^p \cdot \varphi_p(u(t)), & t \in I_1, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = c \cdot a \cdot b. \end{cases} \quad (2.48)$$

Obrázek 2.3: Řešení u úlohy (2.42) pro $p = 3$, $a = 3$, $b = 2$.

Řešení úlohy (2.48) je podle lemmatu 2.18 funkce

$$u(t) = c \cdot b \cdot \sin_p(a \cdot t), \quad t \in I_1. \quad (2.49)$$

Díky vztahu (2.13) lze určit maximální x takové, že je splněna podmínka (2.47) jako $x_{max} = \frac{\pi_p}{a} > 0$ a platí

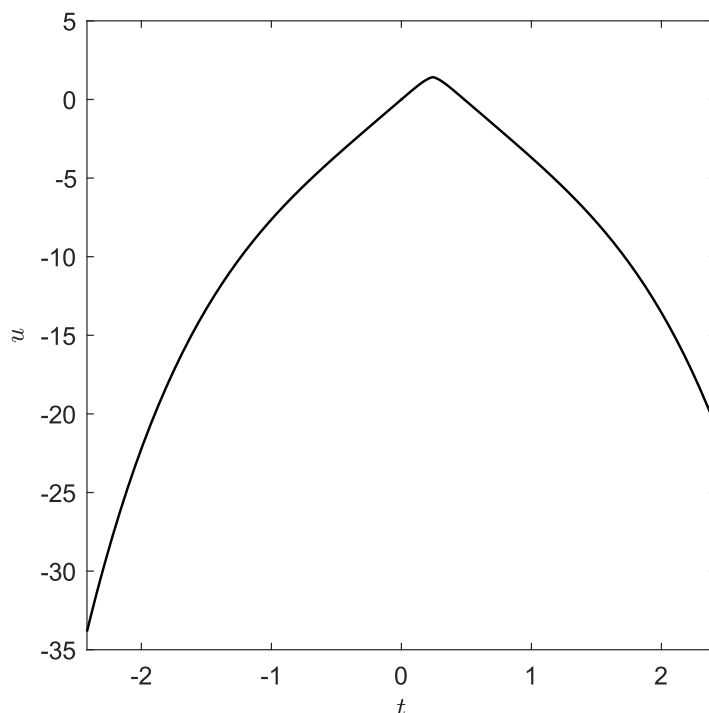
$$u\left(\frac{\pi_p}{a}\right) = 0.$$

Derivováním funkce u dostáváme

$$u'(t) = c \cdot a \cdot b \cdot \cos_p(a \cdot t), \quad t \in I_1.$$

Následně určíme hodnotu derivace funkce u v bodě $t = \frac{\pi_p}{a}$ pomocí vztahu (2.20) jako

$$u'\left(\frac{\pi_p}{a}\right) = c \cdot a \cdot b \cdot \cos_p\left(a \cdot \frac{\pi_p}{a}\right) = c \cdot a \cdot b \cdot \cos_p(\pi_p) = -c \cdot a \cdot b.$$

Obrázek 2.4: Řešení u úlohy (2.42) pro $p = 3$, $a = 5$, $b = -1$.

Aby funkce u byla řešením počáteční úlohy (2.10), požadujeme spojitost její derivace. Řešíme tedy dále úlohu

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = (p-1) \cdot (a^p \cdot \varphi_p(u^+(t)) - b^p \cdot \varphi_p(u^-(t))), & t \in \mathbb{R}, \\ u\left(\frac{\pi_p}{a}\right) = 0, \\ u'\left(\frac{\pi_p}{a}\right) = -c \cdot a \cdot b. \end{cases} \quad (2.50)$$

Označíme-li

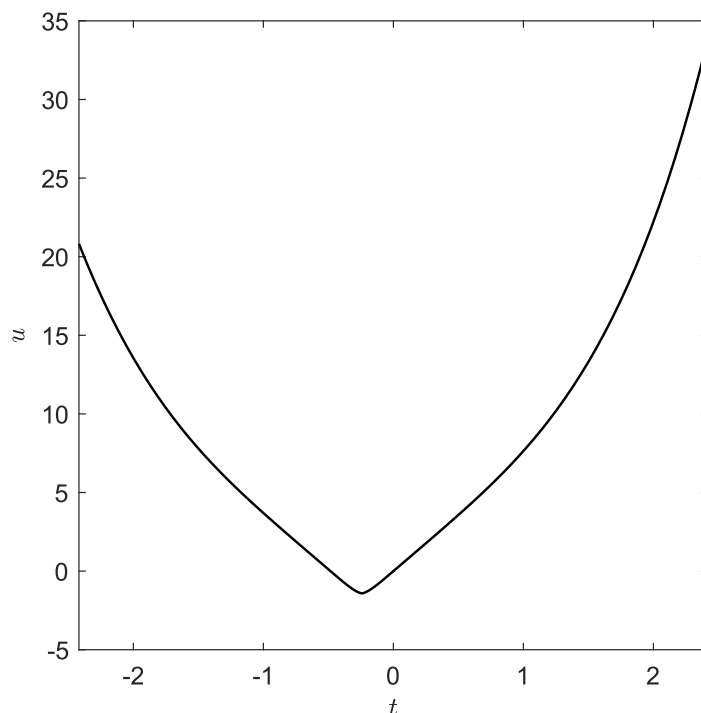
$$w(t) := -u(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

pak platí

$$w'(t) = -u'(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

a úloha (2.50) má tvar

$$\begin{cases} -(\varphi_p(w'(t)))' = (p-1) \cdot (-a^p \cdot \varphi_p(w^-(t)) + b^p \cdot \varphi_p(w^+(t))), & t \in \mathbb{R}, \\ w\left(\frac{\pi_p}{a}\right) = 0, \\ w'\left(\frac{\pi_p}{a}\right) = c \cdot a \cdot b. \end{cases} \quad (2.51)$$

Obrázek 2.5: Řešení u úlohy (2.42) pro $p = 3$, $a = -1$, $b = 5$.

Díky autonomii rovnice v (2.42) lze řešit úlohu (2.51) na intervalu I_2 obdobně jako úlohu (2.48) na intervalu I_1 . Dostaneme tak tvar řešení

$$w(t) = c \cdot a \cdot \sin_p \left(b \cdot \left(t - \frac{\pi_p}{a} \right) \right), \quad t \in I_2,$$

kde $I_2 = \left(\frac{\pi_p}{a}; \frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} \right)$. Pro řešení u na intervalu I_2 pak platí

$$u(t) = -w(t) = -c \cdot a \cdot \sin_p \left(b \cdot \left(t - \frac{\pi_p}{a} \right) \right), \quad t \in I_2. \quad (2.52)$$

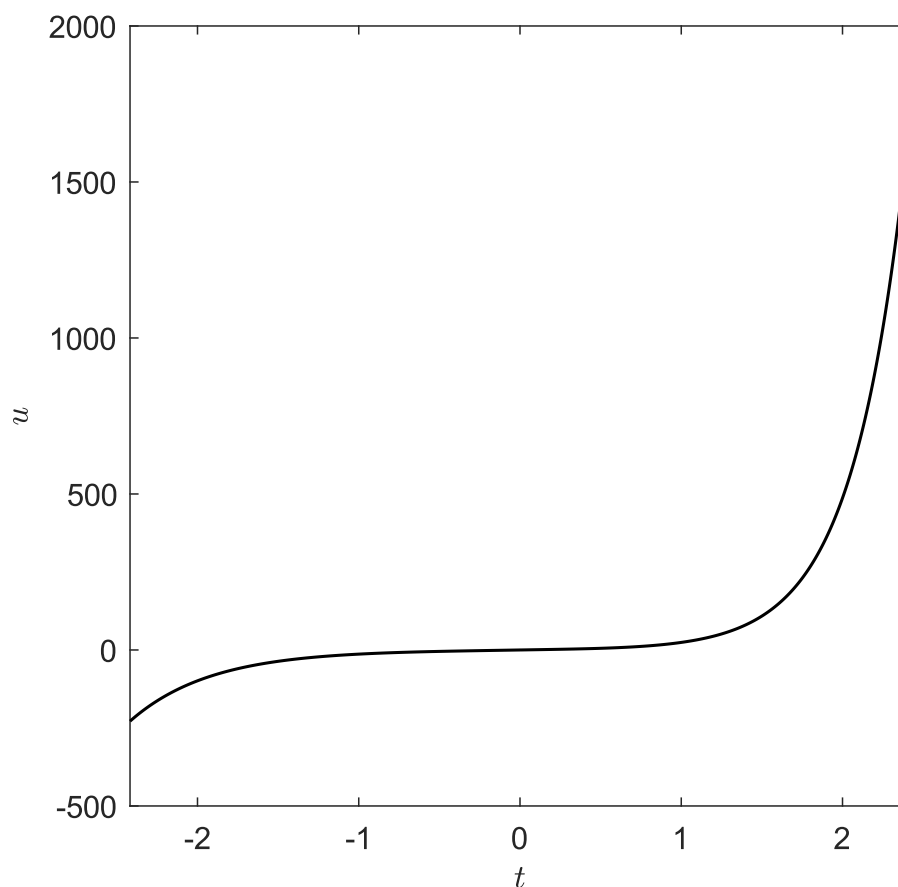
Navíc platí

$$\begin{aligned} u \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} \right) &= 0, \\ u' \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} \right) &= c \cdot a \cdot b. \end{aligned}$$

Povšimněme si, že platí vztahy

$$u(0) = u \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} \right), \quad (2.53)$$

$$u'(0) = u' \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} \right). \quad (2.54)$$

Obrázek 2.6: Řešení u úlohy (2.42) pro $p = 3$, $a = -3$, $b = -2$.

Díky vztahům (2.53), (2.54) a autonomii rovnice v (2.42) platí, že funkce u je periodická s periodou

$$T = \frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} > 0. \quad (2.55)$$

A řešení u úlohy (2.42) jsme již určili na intervalu $\langle 0; T \rangle$ pomocí (2.49) a (2.52) (viz obrázek 2.3).

Pro zbylé případy najdeme tvar řešení u podobným způsobem, s tím rozdílem, že pro záporné hodnoty a , respektive b , je základem řešení funkce \sinh_p , nikoliv funkce \sin_p . Podle lematu 2.10 je funkce \sinh_p ostře rostoucí a platí, že monotónní funkce není periodická. Tvar u pro $a < 0$ nebo $b < 0$ je proto kvalitativně odlišný oproti tvaru u pro $a, b > 0$ (viz obrázky 2.4, 2.5, 2.6). \square

Mějme řešení u úlohy (2.42) ve tvaru (2.43) a $k \in \mathbb{Z}$. Pak pro $t \in \left(k \cdot T; \frac{\pi_p}{a} + k \cdot T\right)$ budeme hovořit o kladných půlvlnách funkce u , pro $t \in \left(\frac{\pi_p}{a} + k \cdot T; (k+1) \cdot T\right)$ pak o záporných půlvlnách funkce u .

Okrajové úlohy

3

V této kapitole se budeme věnovat okrajové úloze (1.1), tedy úloze v následujícím tvaru

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = \alpha \cdot \varphi_p(u^+(t)) - \beta \cdot \varphi_p(u^-(t)), & t \in (0; \pi_p), \\ u(0) = 0, \\ \int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

kde $p > 1$ je parametr, funkce φ_p je zavedena v definici 2.1, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u^\pm(t) := \max\{\pm u(t), 0\}$ a

$$\pi_p := \frac{2\pi}{p \cdot \sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}.$$

Řešením okrajové úlohy (3.1) bude taková funkce $u \in C^1(\langle 0; \pi_p \rangle)$, pro kterou $\varphi_p(u') \in C^1(\langle 0; \pi_p \rangle)$ a která vyhovuje diferenciální rovnici v (3.1) na intervalu $(0; \pi_p)$ a dále splňuje Dirichletovu okrajovou podmínku $u(0) = 0$ a integrální podmínku

$$\int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = 0. \quad (3.2)$$

Naším cílem bude pro $p > 1$ prozkoumat Fučíkovo spektrum Σ_p pro úlohu (3.1), tedy množinu všech dvojic $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pro které má úloha (3.1) netriviální řešení u . Ve speciálním případě, kdy $p = 2$, má okrajová úloha (3.1) následující tvar

$$\begin{cases} -u''(t) = \alpha \cdot u^+(t) - \beta \cdot u^-(t), & t \in (0; \pi), \\ u(0) = 0, \\ \int_0^\pi u(t) dt = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Popis Fučíkova spektra Σ_2 v prvním kvadrantu pro tuto úlohu (3.3) je známý. Například v článku [1] je podán tento popis v prvním kvadrantu $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ a vypadá následovně. Fučíkovo spektrum $\Sigma_2 = \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k^+$ se skládá z množin

$$C_k^\pm = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{úloha (3.3) má netriviální řešení } u,$$

které má právě k nulových bodů na $(0; \pi)$ a $u'(0) \geq 0\}$.

Jednotlivé větve C_k^+ lze v prvním kvadrantu implicitně popsat jako ($n \in \mathbb{N}$)

$$C_{2n-1}^+ \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{2n \cdot \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} - \frac{(2n-1) \cdot \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \cdot \cos \left(\sqrt{\beta} \cdot \pi - \frac{\sqrt{\beta} \cdot \pi \cdot n}{\sqrt{\alpha}} + \pi \cdot n \right) = 0, \right. \\ \left. \frac{n \cdot \pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{(n-1) \cdot \pi}{\sqrt{\beta}} \leq \pi, \frac{n \cdot \pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n \cdot \pi}{\sqrt{\beta}} > \pi \right\}, \quad (3.4)$$

$$C_{2n}^+ \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{(2n+1) \cdot \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2n \cdot \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \cdot \cos \left(\sqrt{\alpha} \cdot \pi - \frac{\sqrt{\alpha} \cdot \pi \cdot n}{\sqrt{\beta}} + \pi \cdot n \right) = 0, \right. \\ \left. \frac{n \cdot \pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n \cdot \pi}{\sqrt{\beta}} \leq \pi, \frac{(n+1) \cdot \pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n \cdot \pi}{\sqrt{\beta}} > \pi \right\}. \quad (3.5)$$

V článku [1] je dále zmínka o bodech napojení jednotlivých větví, ze kterých se Fučikovo spektrum Σ_2 skládá. V [1] je ukázáno, že tyto body napojení jsou zároveň body Fučikova spektra Σ_2^D pro následující okrajovou úlohu s Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{cases} -u''(t) = \alpha \cdot u^+(t) - \beta \cdot u^-(t), & t \in (0; \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Kromě úlohy (3.1) se tedy v následující části také podíváme na okrajovou úlohu Fučikova typu s Dirichletovými okrajovými podmínkami $u(0) = u(\pi_p) = 0$.

3.1 Fučikovo spektrum pro úlohu s Dirichletovými podmínkami

V této části uvedeme popis Fučikova spektra pro následující okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = \alpha \cdot \varphi_p(u^+(t)) - \beta \cdot \varphi_p(u^-(t)) = 0, & t \in (0; \pi_p), \\ u(0) = u(\pi_p) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Pro $p > 1$ označme Fučikovo spektrum pro úlohu (3.7) jako

$$\Sigma_p^D := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{úloha (3.7) má netriviální řešení } u\}.$$

Popis Fučikova spektra Σ_p^D je dobře znám a lze ho nalézt například v práci [5] na straně 129. Drábek Fučikovo spektrum Σ_p^D popsal pro úlohu s okrajovými podmínkami $u(0) = u(\pi) = 0$ a v závislosti na prvním vlastním čísle λ_1 úlohy na vlastní čísla pro $\alpha = \beta = \lambda$. Povšimněme si, že přestože je Fučikovo spektrum Σ_p^D v práci [5] popsáno pro úlohu s odlišnými okrajovými podmínkami, než jaké uvádíme v (3.7), i přesto dosadíme-li za λ_1 první vlastní číslo úlohy (3.7) pro $\alpha = \beta = \lambda$, $\lambda_1 = p - 1$, dostaneme skutečně níže uvedený popis. V následujícím lemmatu tento popis uveďme a připojme i naši verzi jeho důkazu. Poznamenejme, že popsané Fučikovo spektrum Σ_p^D je pro vybrané hodnoty parametru p vykresleno na obrázcích 3.2, 3.3 a 3.4.

Věta 3.1. *Fučikovo spektrum Σ_p^D je množina*

$$\Sigma_p^D = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left(C_{p,k}^{D+} \cup C_{p,k}^{D-} \right),$$

kde $C_{p,k}^{D-} := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : (\beta, \alpha) \in C_{p,k}^{D+} \right\}$ a dále ($j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^+ := (0; +\infty)$)

$$C_{p,0}^{D+} := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = p - 1 \right\},$$

$$C_{p,2j-1}^{D+} := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{j}{\alpha^{\frac{1}{p}}} + \frac{j}{\beta^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} \right\},$$

$$C_{p,2j}^{D+} := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{j+1}{\alpha^{\frac{1}{p}}} + \frac{j}{\beta^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} \right\}.$$

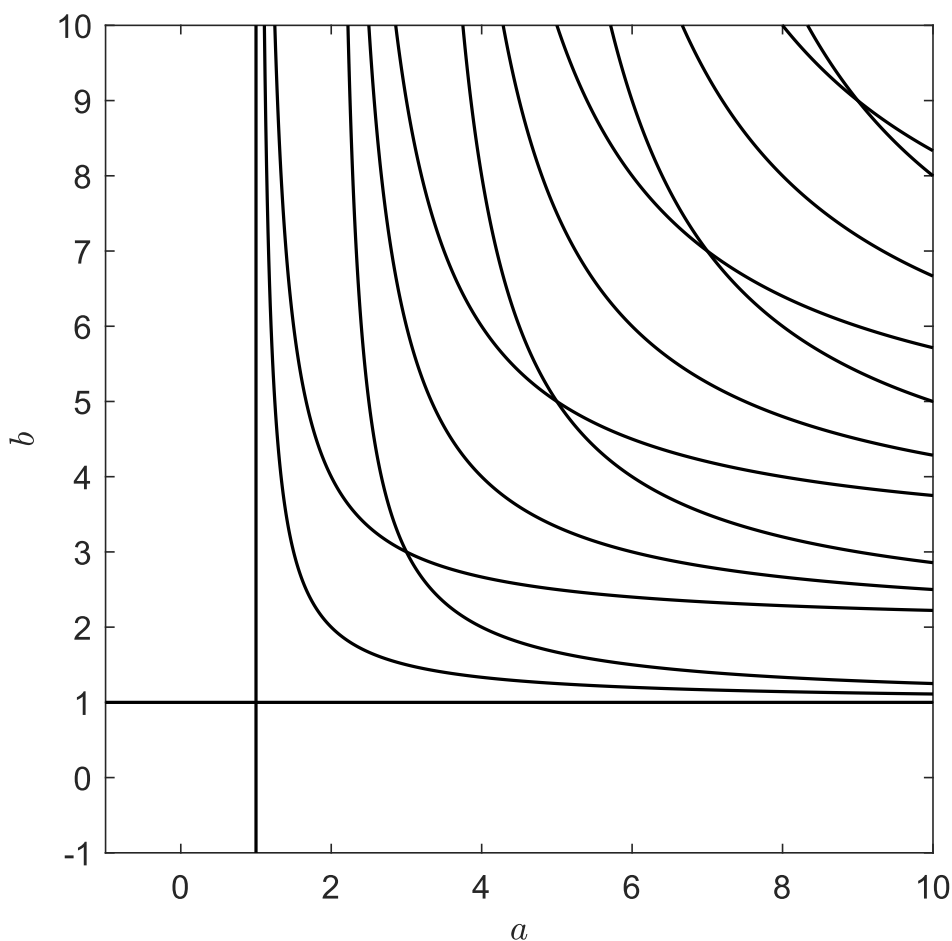
Důkaz. Úlohu (3.7) budeme řešit metodou střelby. Řešíme tedy nejprve počáteční úlohu (2.38). Přeznačením úlohy (2.38) pomocí vztahů (2.41) dostaneme úlohu (2.42), jejíž řešení známe díky lemmatu 2.23. Předpokládejme, že platí $u'(0) > 0$. Hledáme pak takové a, b , aby platilo $u(\pi_p) = 0$. Pro $a < 0$ takové řešení zřejmě neexistuje, protože funkce u je pro $t > 0$ kladná a ostře rostoucí, což přímo plyne z vlastností funkce \sinh_p . Pro $a > 0$, $b < 0$ existuje právě jeden nulový bod na intervalu $(0; +\infty)$, z vlastností funkce \sin_p jde o bod $t = \frac{\pi_p}{a}$. Okrajová podmínka je tedy splněna právě tehdy, když platí

$$\begin{aligned} \frac{\pi_p}{a} &= \pi_p, \\ a &= 1. \end{aligned}$$

Zbývá případ, kdy $a, b > 0$. Funkce u pak má nekonečně mnoho nulových bodů. Jde o body

$$t = j \cdot T - \frac{\pi_p}{b}, \quad (3.8)$$

$$t = j \cdot T, \quad (3.9)$$



Obrázek 3.1: Fučikovo spektrum Σ_p^D úlohy (3.7) v rovině ab pro libovoně $p > 1$.

kde $j \in \mathbb{N}$ a T je základní perioda funkce u . Pro (3.8) tedy chceme, aby platilo

$$j \cdot \frac{\pi_p}{a} + (j-1) \cdot \frac{\pi_p}{b} = \pi_p,$$

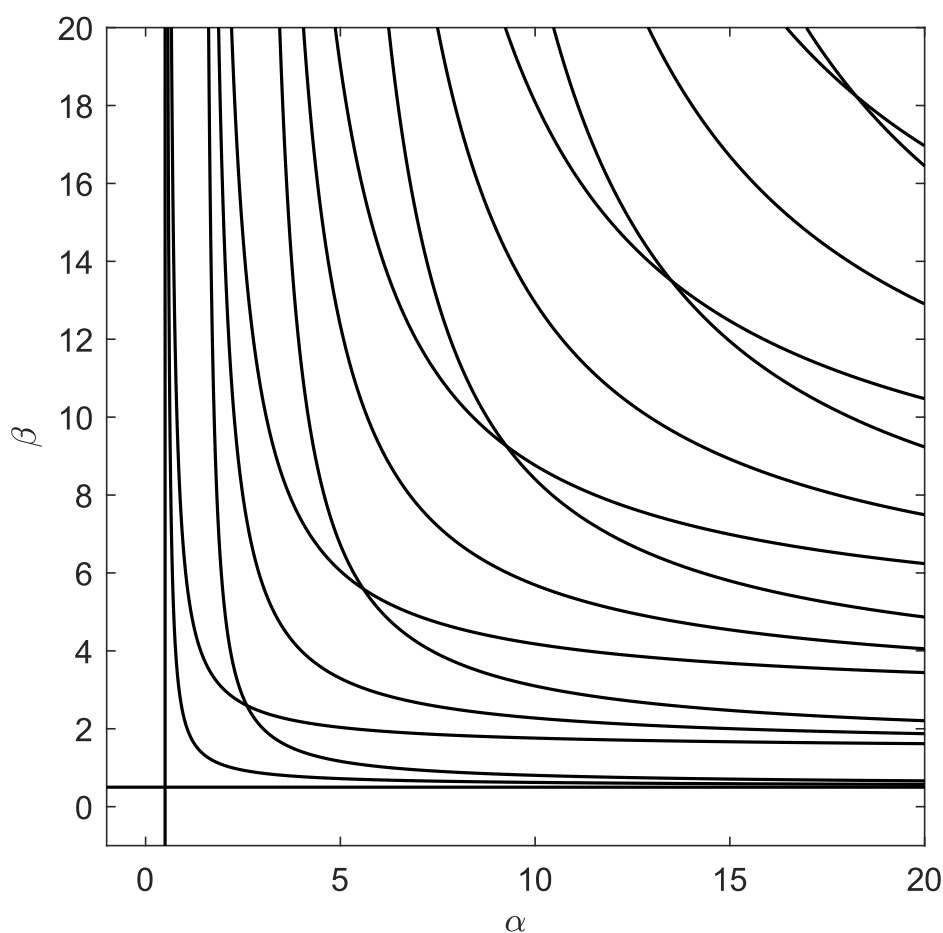
$$\frac{j}{a} + \frac{j-1}{b} = 1.$$

Díky způsobu, jakým bylo zavedeno a, b tak máme implicitní popis množiny nezávislé na p (viz obrázek 3.1). Přeznačením zpět na α a β tak dostáváme

$$\frac{j}{\left(\frac{\alpha}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}} + \frac{j-1}{\left(\frac{\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}} = 1,$$

$$\frac{j}{\alpha^{\frac{1}{p}}} + \frac{j-1}{\beta^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}}.$$

Obdobně bychom upravili i vztah (3.9). Sjednocením všech nalezených dvojic, pro které má úloha (3.7) netriviální řešení pak dostáváme množinu $C_{p,2j-1}^{D+}$. \square



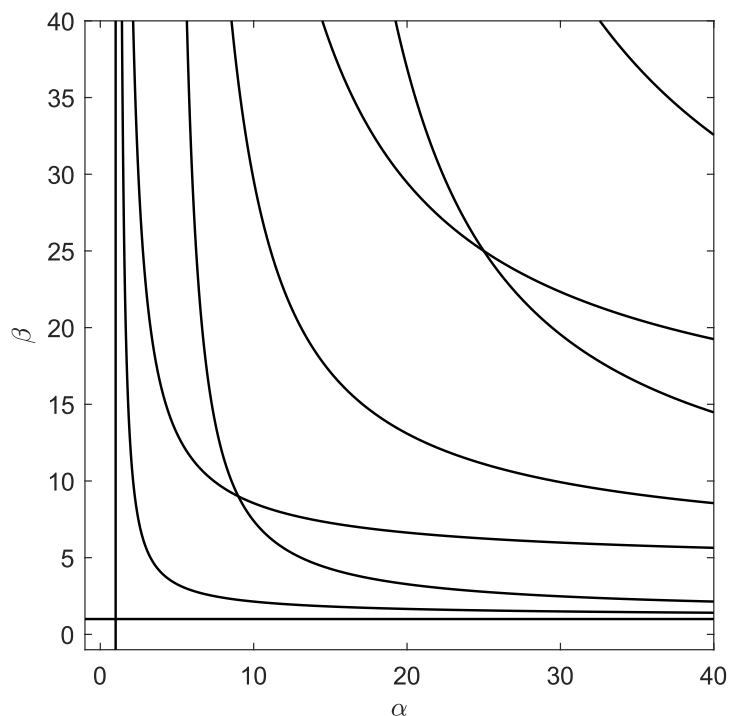
Obrázek 3.2: Fučíkovo spektrum úlohy (3.7) v rovině $\alpha\beta$ pro $p = \frac{3}{2}$.

Poznámka 3.2. Množina $C_{p,k}^{D+}$ ($C_{p,k}^{D-}$) obsahuje všechny dvojice (α, β) pro které má netriviální řešení u úlohy (3.7) právě k nulových bodů na intervalu $(0; \pi_p)$ a dále $u'(0) > 0$ ($u'(0) < 0$).

3.2 Vlastní čísla pro úlohu s integrální okrajovou podmínkou

Tuto část věnujeme okrajové úloze (3.1) s nelokální okrajovou podmínkou integrálního typu v případě, kdy $\alpha = \beta = \lambda$. Okrajová úloha (3.1) pak bude mít následující tvar

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = \lambda \cdot \varphi_p(u(t)), & t \in (0; \pi_p), \\ u(0) = 0, \\ \int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$



Obrázek 3.3: Fučíkovo spektrum úlohy (3.7) v rovině $\alpha\beta$ pro $p = 2$.

Úlohu (3.10) lze pomocí (2.35) přepsat jako okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = (p-1) \cdot \varphi_{p+1}(\gamma) \cdot \varphi_p(u(t)), & t \in (0; \pi_p), \\ u(0) = 0, \\ \int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

kde $\gamma \in \mathbb{R}$.

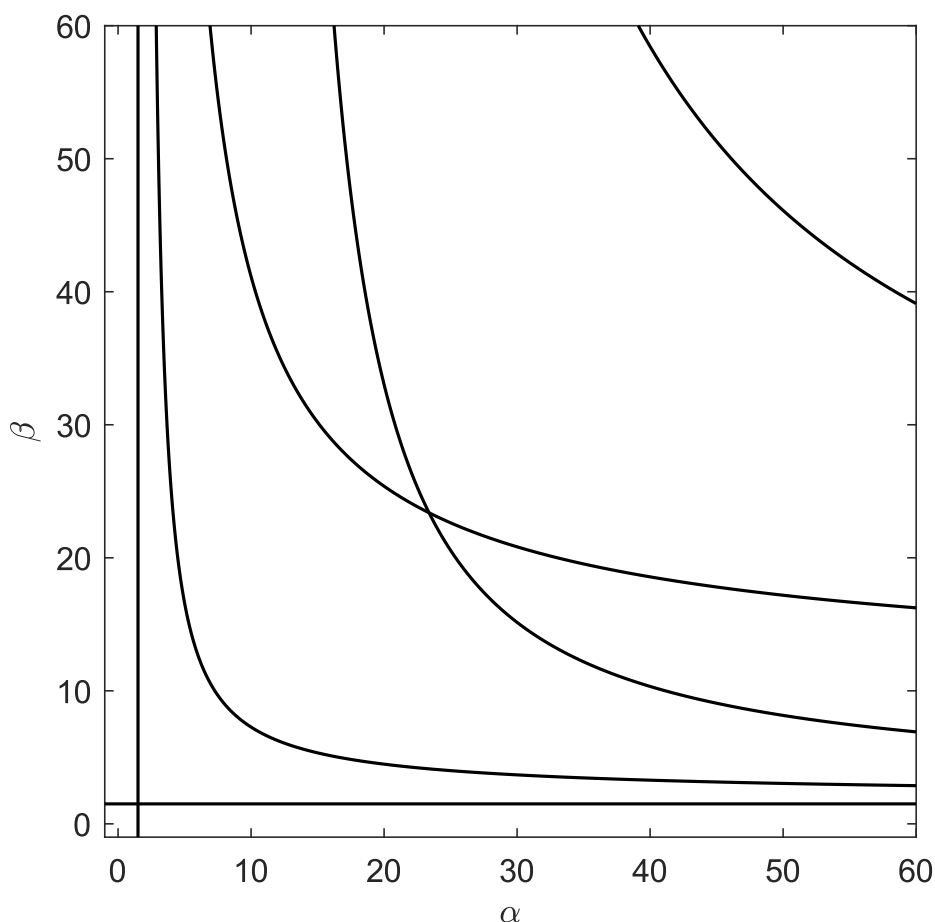
Lemma 3.3. *Úloha (3.11) má netriviální řešení u právě tehdy, když platí*

$$\gamma = 2n, \quad (3.12)$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Počáteční úloha (2.34) má řešení u , které má podle lemmatu 2.18 tvar (2.36) pro $\gamma > 0$ a (2.37) pro $\gamma < 0$. Chceme zjistit, pro které hodnoty γ vyhovuje funkce u okrajové podmínce

$$\int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = 0. \quad (3.13)$$



Obrázek 3.4: Fučíkovo spektrum úlohy (3.7) v rovině $\alpha\beta$ pro $p = \frac{5}{2}$.

Nejprve budeme předpokládat, že $\gamma < 0$. Řešení u je pak z monotónie funkce \sinh_p kladné na celém intervalu $(0; \pi_p)$. Z vlastností integrálu pak pro každé γ platí

$$\int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt > 0. \quad (3.14)$$

Neexistují tedy žádná záporné hodnoty γ , pro které by úloha (3.11) měla netriviální řešení. Dále předpokládejme $\gamma = 0$. Pak má úloha (3.11) tvar

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'(t)))' = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ \int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = 0. \end{cases}$$

Přímou integrací podle t dostáváme pro každé $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi_p(u'(t)) &= x \in \mathbb{R}, \\ u'(t) &= \varphi_q(x), \end{aligned}$$

kde q je konjugovaný exponent k p . Znovu zintegrujeme podle t a dostáváme

$$u(t) = \varphi_q(x) \cdot t.$$

Funkce u je tedy lineární. Okrajové podmínky jsou pak splněny pouze pokud platí $\varphi_q(x) = 0$. Pak jde ovšem o triviální řešení a pro $\gamma = 0$ neexistuje netriviální řešení úlohy (3.11).

Zbývá tedy případ $\gamma > 0$. Z diferenciální rovnice v úloze (3.11) platí

$$\varphi_p(u(t)) = -\frac{(\varphi_p(u'(t)))'}{(p-1) \cdot \varphi_{p+1}(\gamma)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a tedy

$$\int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = \int_0^{\pi_p} -\frac{(\varphi_p(u'(t)))'}{(p-1) \cdot \varphi_{p+1}(\gamma)} dt = \frac{\varphi_p(u'(0)) - \varphi_p(u'(\pi_p))}{(p-1) \cdot \varphi_{p+1}(\gamma)}.$$

Okrajovou podmínku (3.13) pak lze upravit následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt &= 0, \\ \frac{\varphi_p(u'(0)) - \varphi_p(u'(\pi_p))}{(p-1) \cdot \varphi_{p+1}(\gamma)} &= 0, \\ \varphi_p(u'(0)) - \varphi_p(u'(\pi_p)) &= 0, \\ \varphi_p(u'(0)) &= \varphi_p(u'(\pi_p)). \end{aligned}$$

Derivováním funkce u z (2.36) podle t dostáváme

$$u'(t) = c \cdot \gamma \cos_p(\gamma \cdot t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Dosadíme za funkci u' z (3.15) a využitím vlastností funkcí φ_p a \cos_p provedeme následující úpravy

$$\begin{aligned} \varphi_p(c \cdot \gamma \cos_p(0)) &= \varphi_p(c \cdot \gamma \cos_p(\gamma \cdot \pi_p)), \\ c \cdot \gamma \cos_p(0) &= c \cdot \gamma \cos_p(\gamma \cdot \pi_p), \\ \cos_p(0) &= \cos_p(\gamma \cdot \pi_p), \\ \cos_p(\gamma \cdot \pi_p) &= 1. \end{aligned}$$

Díky vztahu (2.20) a předpokladu, že $\gamma > 0$ platí

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \pi_p &= 2n \cdot \pi_p, \\ \gamma &= 2n, \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

□

Věta 3.4. Vlastní čísla a vlastní funkce úlohy (3.10) jsou

$$\lambda_n = (p-1) \cdot (2n)^p, \quad (3.16)$$

$$u_n(t) = \mu \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda_n} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \sin_p \left(\left(\frac{\lambda_n}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot t \right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.17)$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Z lemmatu 3.3 známe hodnoty γ , pro které má funkce (3.11) netriviální řešení. Ze vztahu (2.35) vyjádříme λ v závislosti na γ , navíc využijeme, že platí $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(\frac{\lambda}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \gamma^p &= \frac{\lambda}{p-1}, \\ \lambda &= (p-1) \cdot \gamma^p. \end{aligned}$$

Dosazením za γ ze vztahu (3.12) dostáváme

$$\lambda = (p-1) \cdot (2n)^p, \quad (3.18)$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Řešení úlohy (3.11) má tvar (2.36). Vlastní funkce úlohy (3.10) dostaneme pomocí vztahu (2.35) jako

$$u(t) = \mu \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \sin_p \left(\left(\frac{\lambda}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

3.3 Fučikovo spektrum pro úlohu s integrální okrajovou podmínkou

V této části se budeme věnovat okrajové úloze (3.1) a sestavíme popis jejího Fučikova spektra Σ_p . Nejprve zapišme množinu Σ_p pomocí podmnožin C_k^\pm jako

$$\Sigma_p = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (C_k^+ \cup C_k^-),$$

kde

$$C_k^\pm := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{úloha (3.1) má netriviální řešení } u, \right. \\ \left. \text{ které má právě } k \text{ nulových bodů na } (0; \pi_p) \text{ a } u'(0) \gtrless 0 \right\}.$$

Poznamenejme, že stačí podat popis množin C_k^+ , $k \in \mathbb{N}$, neboť máme následující ekvivalenci

$$(\alpha, \beta) \in C_k^+ \Leftrightarrow (\beta, \alpha) \in C_k^-.$$

Podle přeznačení (2.41) jsou převodní vztahy mezi a a α

$$\begin{aligned} \alpha &= (p-1) \cdot \varphi_{p+1}(a), \\ a &= \frac{\varphi_{\frac{1}{p}+1}(\alpha)}{(p-1)^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Analogické vztahy platí i pro převod mezi b a β . Definujme zobrazení $S_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jako

$$S_p(a, b) := ((p-1) \cdot \varphi_{p+1}(a), (p-1) \cdot \varphi_{p+1}(b)).$$

Potom S_p je prosté zobrazení z \mathbb{R}^2 na \mathbb{R}^2 a existuje k němu inverzní zobrazení

$$S_p^{-1}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\varphi_{\frac{1}{p}+1}(\alpha)}{(p-1)^{\frac{1}{p}}}, \frac{\varphi_{\frac{1}{p}+1}(\beta)}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} \right).$$

Dále označme \mathfrak{C}_k^\pm obraz množiny C_k^\pm při použití S_p^{-1} , tedy $\mathfrak{C}_k^\pm := S_p^{-1}(C_k^\pm)$. Potom platí

$$S_p(\mathfrak{C}_k^\pm) = C_k^\pm.$$

Okrajovou úlohu (3.1) lze tedy ekvivalentně zapsat jako

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = (p-1) \cdot (\varphi_{p+1}(a) \cdot \varphi_p(u^+) - \varphi_{p+1}(b) \cdot \varphi_p(u^-)) & \text{na } (0; \pi_p), \\ u(0) = 0, \\ \int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Dále pro $k \in \mathbb{N}$ označme $\mathfrak{M}_k^\pm := \{(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : S_p(a, b) \in C_k^\pm\}$. Tedy pro $a, b > 0$ má okrajová úloha (3.19) netriviální řešení právě tehdy, když $(a, b) \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} (\mathfrak{M}_k^+ \cup \mathfrak{M}_k^-)$. Jelikož $(a, b) \in \mathfrak{M}_k^-$ právě tehdy, když $(b, a) \in \mathfrak{M}_k^+$, stačí najít popis množiny \mathfrak{M}_k^+ .

Při hledání popisu množiny \mathfrak{M}_k^+ budeme integrovat řešení u počáteční úlohy (2.42). Proto uvádíme následující dvě lemmata, která integraci usnadní.

Lemma 3.5. *Mějme řešení u počáteční úlohy (2.34) pro $p > 1$ a $c, \gamma > 0$. Potom platí*

$$\int_0^{\frac{\pi_p}{\gamma}} \varphi_p(u(t)) dt = \frac{2 \cdot c^{p-1}}{(p-1) \cdot \gamma}. \quad (3.20)$$

Důkaz. Využitím lemmatu 2.14 převedeme úlohu (2.24) na úlohu (2.28). Úpravou druhé rovnice úlohy (2.28) lze vyjádřit

$$\varphi_p(u(t)) = -\frac{v'(t)}{\lambda}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Platí tedy

$$\int_0^{\pi_p \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}} \varphi_p(u(t)) dt = \int_0^{\pi_p \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(-\frac{v'(t)}{\lambda}\right) dt = \frac{v(0) - v\left(\pi_p \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}{\lambda}.$$

Funkce v byla v lemmatu 2.14 zavedena jako

$$v(t) = \varphi_p(u'(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

Z lemmatu 2.18 a definice 2.6 platí

$$u'(t) = \mu \cdot \cos_p\left(\left(\frac{\lambda}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Dosazením (3.22) do (3.21) dostaneme

$$v(t) = \varphi_p\left(\mu \cdot \cos_p\left(\left(\frac{\lambda}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot t\right)\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zajímají nás hodnoty $v(0)$ a $v\left(\pi_p \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$

$$\begin{aligned} v(0) &= \varphi_p(\mu \cdot \cos_p(0)), \\ v\left(\pi_p \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}\right) &= \varphi_p(\mu \cdot \cos_p(\pi_p)). \end{aligned}$$

Nyní využijeme důsledku 2.8

$$\begin{aligned} v(0) &= \varphi_p(\mu) = \mu^{p-1}, \\ v\left(\pi_p \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}\right) &= \varphi_p(\mu \cdot (-1)) = -\mu^{p-1}. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$\int_0^{\pi_p \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}} \varphi_p(u(t)) dt = \frac{\mu^{p-1} - (-\mu^{p-1})}{\lambda} = \frac{2\mu^{p-1}}{\lambda}. \quad (3.23)$$

Pomocí přeznačení (2.35) lze vztah (3.23) převést na odpovídající vztah pro úlohu (2.34), kde $c, \gamma \in (0; +\infty)$. Ze vztahu (2.35) nejprve vyjádříme λ

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(\frac{|\lambda|}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \operatorname{sgn}(\lambda), \\ \gamma &= \left(\frac{\lambda}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}, \\ \gamma^p &= \frac{\lambda}{p-1}, \\ \lambda &= (p-1) \cdot \gamma^p, \end{aligned}$$

a následně také μ

$$c = \mu \cdot \left(\frac{p-1}{|\lambda|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \operatorname{sgn}(\lambda),$$

$$c = \mu \cdot \left(\frac{p-1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\mu = c \cdot \left(\frac{(p-1) \cdot \gamma^p}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\mu = c \cdot \gamma.$$

Dosazením do vztahu (3.23) dostáváme

$$\int_0^{\frac{\pi p}{\gamma}} \varphi_p(u(t)) dt = \frac{2 \cdot (c \cdot \gamma)^{p-1}}{(p-1) \cdot \gamma^p} = \frac{2 \cdot c^{p-1}}{(p-1) \cdot \gamma}.$$

□

Lemma 3.6. *Mějme řešení u počáteční úlohy (2.42) pro $c, a, b > 0$. Potom pro $k \in \mathbb{Z}$ platí*

$$\int_{k \cdot T}^{\frac{\pi p}{a} + k \cdot T} \varphi_p(u(t)) dt = (c \cdot b)^{p-1} \cdot \frac{2}{(p-1) \cdot a}, \quad (3.24)$$

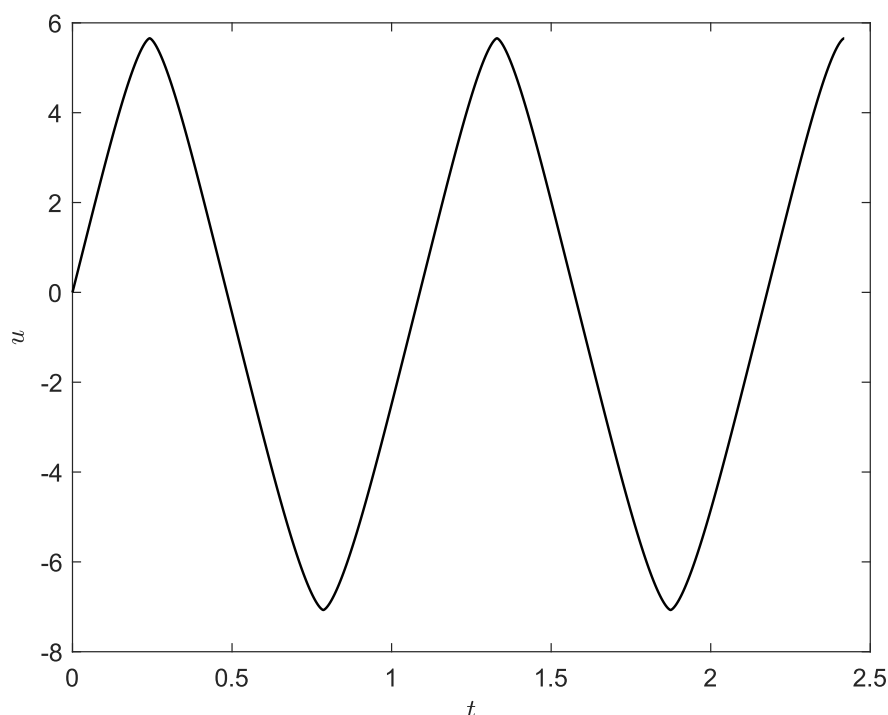
$$\int_{\frac{\pi p}{a} + k \cdot T}^{(k+1) \cdot T} \varphi_p(u(t)) dt = -(c \cdot a)^{p-1} \cdot \frac{2}{(p-1) \cdot b}. \quad (3.25)$$

Důkaz. V lemmatu 2.23 jsme ukázali, že pro $t \in \left(k \cdot T; \frac{\pi p}{a} + k \cdot T \right)$ má počáteční úloha (2.38) tvar (2.48). Díky lemmatu 3.5 pak platí vztah (3.24). Obdobně bychom ukázali i vztah (3.25). □

Lemma 3.7. *Pro množiny \mathfrak{M}_k^+ platí ($j \in \mathbb{N}$)*

$$\mathfrak{M}_{2j-1}^+ = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{2j \cdot b^{p-1}}{a} - \frac{(2j-2) \cdot a^{p-1}}{b} - \right. \\ \left. (p-1) \cdot a^{p-1} \cdot \int_0^{\pi p - \frac{j \cdot \pi p}{a} - \frac{(j-1) \cdot \pi p}{b}} \varphi_p(\sin_p(b \cdot t)) dt = 0, \right. \\ \left. \frac{j}{a} + \frac{j-1}{b} \leq 1, \frac{j}{a} + \frac{j}{b} > 1 \right\}, \quad (3.26)$$

$$\mathfrak{M}_{2j}^+ = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{2j \cdot b^{p-1}}{a} - \frac{2j \cdot a^{p-1}}{b} + \right. \\ \left. (p-1) \cdot b^{p-1} \cdot \int_0^{\pi p - \frac{j \cdot \pi p}{a} - \frac{j \cdot \pi p}{b}} \varphi_p(\sin_p(a \cdot t)) dt = 0, \right. \\ \left. \frac{j}{a} + \frac{j}{b} \leq 1, \frac{j+1}{a} + \frac{j}{b} > 1 \right\}. \quad (3.27)$$



Obrázek 3.5: Řešení u počáteční úlohy (2.42) se čtyřmi nulovými body na intervalu $(0; \pi_p)$ pro $p = 3$.

Důkaz. Mějme řešení u počáteční úlohy (2.42), kde zvolíme $c = (p - 1)^{\frac{1}{p-1}}$. Funkce u je řešením okrajové úlohy (3.19), splňuje-li okrajovou podmínku

$$\int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = 0. \quad (3.28)$$

Označíme $k \in \mathbb{N}$ počet nulových bodů funkce u na intervalu $(0; \pi_p)$. Budeme předpokládat, že k je sudé. Z vlastností řešení u pak lze tvrdit, že je na intervalu $(0; \frac{k}{2} \cdot T)$, kde T je základní perioda funkce u , funkce u tvořena $\frac{k}{2}$ kladnými a $\frac{k}{2}$ zápornými půlvlnami (viz obrázek 3.5). Z periodicity funkce u navíc pro každé x, y platí

$$\int_x^y u(t) dt = \int_{x+T}^{y+T} u(t) dt. \quad (3.29)$$

Díky aditivě integrálu vzhledem k integračnímu oboru, znalosti počtu celých půl-

vln a vztahu (3.29) platí

$$\int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = \frac{k}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi_p}{a}} \varphi_p(u(t)) dt + \frac{k}{2} \cdot \int_{\frac{\pi_p}{a}}^T \varphi_p(u(t)) dt + \int_{\frac{k}{2} \cdot T}^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt. \quad (3.30)$$

Využitím lemmatu 3.6 známe hodnoty integrálu přes jednotlivé půlvlny, dosazením do (3.30) dostaneme

$$\int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = \frac{k}{2} \cdot \frac{2 \cdot b^{p-1}}{a} - \frac{k}{2} \cdot \frac{2 \cdot a^{p-1}}{b} + \int_{\frac{k}{2} \cdot T}^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt. \quad (3.31)$$

Získaný vztah dosadíme do okrajové podmínky (3.28) a sudost k vyjádříme jako $k = 2 \cdot j$, $j \in \mathbb{N}$. Dostáváme

$$\frac{2j \cdot b^{p-1}}{a} - \frac{2j \cdot a^{p-1}}{b} + \int_0^{\pi_p - j \cdot T} \varphi_p(u(t)) dt = 0. \quad (3.32)$$

Navíc dosadíme za funkci u ze vztahu (2.43)

$$\frac{2j \cdot b^{p-1}}{a} - \frac{2j \cdot a^{p-1}}{b} + (p-1) \cdot b^{p-1} \cdot \int_0^{\pi_p - j \cdot T} \varphi_p(\sin_p(a \cdot t)) dt = 0. \quad (3.33)$$

Zbývá určit, za jakých podmínek má funkce u na intervalu $(0; \pi_p)$ právě k nulových bodů. Aby na intervalu $(0; \pi_p)$ leželo alespoň k nulových bodů, požadujeme, aby platilo

$$\frac{k}{2} \cdot T \leq \pi_p. \quad (3.34)$$

Obdobně, aby na intervalu $(0; \pi_p)$ leželo nejméně k nulových bodů, požadujeme

$$\pi_p < \frac{k}{2} \cdot T + \frac{\pi_p}{a}. \quad (3.35)$$

Do vztahů (3.34), (3.35) dosadíme za k a T a upravíme následujícím způsobem

$$j \cdot \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} \right) \leq \pi_p < j \cdot \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} \right) + \frac{\pi_p}{a}, \quad (3.36)$$

$$\frac{j}{a} + \frac{j}{b} \leq 1 < \frac{j+1}{a} + \frac{j}{b}. \quad (3.37)$$

Ukázali jsme tak implicitní popis množiny \mathfrak{M}_k^+ pro sudý počet nulových bodů na intervalu $(0; \pi_p)$. Pro lichý počet nulových bodů na intervalu $(0; \pi_p)$ je postup důkazu analogický. \square

Lemma 3.7 dobře popisuje množiny \mathfrak{M}_k^+ , pro které má úloha (3.19) netriviální řešení pro dvojici (a, b) v prvním kvadrantu roviny ab , navíc je vhodné pro numerický výpočet spektra, jelikož hodnotu integrálu lze dobře aproximovat. Nicméně pro další práci s implicitním popisem množin \mathfrak{M}_k^+ se ukázala být vhodnější forma popisu uvedená v následujícím lemmatu.

Lemma 3.8. Pro množiny \mathfrak{M}_k^+ platí ($j \in \mathbb{N}$)

$$\mathfrak{M}_{2j-1}^+ = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{2j \cdot b^{p-1}}{a} - \frac{(2j-1) \cdot a^{p-1}}{b} + \frac{a^{p-1}}{b} \varphi_p \left(\cos_p \left(b \cdot \pi_p \left(1 - \frac{j}{a} - \frac{j-1}{b} \right) \right) \right) = 0, \right. \\ \left. \frac{j}{a} + \frac{j-1}{b} \leq 1, \frac{j}{a} + \frac{j}{b} > 1 \right\}, \quad (3.38)$$

$$\mathfrak{M}_{2j}^+ = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{(2j+1) \cdot b^{p-1}}{a} - \frac{2j \cdot a^{p-1}}{b} - \frac{b^{p-1}}{a} \varphi_p \left(\cos_p \left(a \cdot \pi_p \left(1 - \frac{j}{a} - \frac{j}{b} \right) \right) \right) = 0, \right. \\ \left. \frac{j}{a} + \frac{j}{b} \leq 1, \frac{j+1}{a} + \frac{j}{b} > 1 \right\}. \quad (3.39)$$

Důkaz. Budeme navazovat na důkaz lemmatu 3.7 a budeme pro sudý počet nulových bodů na intervalu $(0; \pi_p)$ upravovat výraz

$$\int_{j \cdot T}^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = \int_0^{\pi_p - j \cdot T} \varphi_p(u(t)) dt. \quad (3.40)$$

Pro každé t z intervalu $(j \cdot T; \pi_p)$ platí $u(t) > 0$, a předpokládáme $a, b > 0$, úlohu (3.19) tedy lze přepsat následujícím způsobem

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'(t)))' = (p-1) \cdot a^p \varphi_p(u(t)), & t \in (0; \pi_p), \\ u(0) = 0, \\ \int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = 0. \end{cases}$$

Snadno vyjádříme funkci $\varphi_p(u)$ jako

$$\varphi_p(u(t)) = \frac{-(\varphi_p(u'(t)))'}{(p-1) \cdot a^p}.$$

Dosadíme do vztahu (3.40) a dále upravíme

$$\int_0^{\pi_p - j \cdot T} \frac{-(\varphi_p(u'(t)))'}{(p-1) \cdot a^p} dt = \frac{\varphi_p(u'(0)) - \varphi_p(u'(\pi_p - j \cdot T))}{(p-1) \cdot a^p}. \quad (3.41)$$

Podle vztahu (2.43) má funkce u pro volbu $c = (p-1)^{\frac{1}{p-1}}$ na intervalu $(0; \pi_p - j \cdot T)$ tvar

$$u(t) = (p-1)^{\frac{1}{p-1}} \cdot b \cdot \sin_p(a \cdot t).$$

Derivace funkce u pak má tvar

$$u'(t) = (p-1)^{\frac{1}{p-1}} \cdot a \cdot b \cdot \cos_p(a \cdot t).$$

Dosadíme za u' do výrazu (3.41) a dostaneme

$$\frac{\varphi_p((p-1)^{\frac{1}{p-1}} \cdot a \cdot b \cdot \cos_p(a \cdot (\pi_p - j \cdot T))) - \varphi_p((p-1)^{\frac{1}{p-1}} \cdot a \cdot b)}{(1-p) \cdot a^p}.$$

Úpravou výrazu dojdeme až ke vztahu

$$\int_0^{\pi_p - j \cdot T} \varphi_p(u(t)) dt = \frac{b^{p-1}}{a} \cdot (1 - \varphi_p(\cos_p(a \cdot (\pi_p - j \cdot T))))). \quad (3.42)$$

Vztah (3.42) dosadíme do rovnice (3.32) a upravíme následujícím způsobem

$$\frac{2j \cdot b^{p-1}}{a} - \frac{2j \cdot a^{p-1}}{b} + \frac{b^{p-1}}{a} \cdot (1 - \varphi_p(\cos_p(a \cdot (\pi_p - j \cdot T)))) = 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{(2j+1) \cdot b^{p-1}}{a} - \frac{2j \cdot a^{p-1}}{b} - \frac{b^{p-1}}{a} \cdot \varphi_p\left(\cos_p\left(a \cdot \left(\pi_p - j \cdot \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b}\right)\right)\right)\right) = 0, \quad (3.44)$$

$$\frac{(2j+1) \cdot b^{p-1}}{a} - \frac{2j \cdot a^{p-1}}{b} - \frac{b^{p-1}}{a} \cdot \varphi_p\left(\cos_p\left(a \cdot \pi_p \cdot \left(1 - \frac{j}{a} + \frac{j}{b}\right)\right)\right) = 0. \quad (3.45)$$

Obdobně lze ukázat i vztah pro lichý počet nulových bodů na intervalu $(0; \pi_p)$. \square

Zavedeme $\mathbb{R}^- := (-\infty; 0)$. Označme $\mathfrak{N}_1^+ := \{(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- : S_p(a, b) \in C_1^+\}$.

Lemma 3.9. Pro množinu \mathfrak{N}_1^+ platí

$$\mathfrak{N}_1^+ = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- : -\frac{2 \cdot b^{p-1}}{a} + (p-1) \cdot a^{p-1} \cdot \int_0^{\pi_p - \frac{\pi_p}{a}} \varphi_p(\sinh_p(b \cdot t)) dt = 0, a > 1 \right\}. \quad (3.46)$$

Důkaz. Mějme řešení u úlohy (2.42) pro volbu $c = (p-1)^{\frac{1}{p-1}}$. Předpokládáme, že platí $u'(0) > 0$. Pak má řešení u úlohy (2.42) tvar (2.46). Řešíme, za jakých podmínek je splněna okrajová podmínka

$$\int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = 0.$$

Použijeme aditivitu integrálu vzhledem k integračnímu oboru a dostaneme

$$\int_0^{\frac{\pi_p}{a}} \varphi_p(u(t)) dt + \int_{\frac{\pi_p}{a}}^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = 0. \quad (3.47)$$

Na intervalu $(0; \frac{\pi_p}{a})$ platí

$$u(t) = -(p-1)^{\frac{1}{p-1}} \cdot b \cdot \sin_p(a \cdot t).$$

Díky tomu lze použít lemma 3.6, které tvrdí

$$\int_0^{\frac{\pi_p}{a}} \varphi_p(u(t)) dt = -\frac{2 \cdot b^{p-1}}{a}. \quad (3.48)$$

Na intervalu $(\frac{\pi_p}{a}; \pi_p)$ má funkce u podle (2.46) tvar

$$u(t) = (p-1)^{\frac{1}{p-1}} \cdot a \cdot \sinh_p\left(b \cdot \left(t - \frac{\pi_p}{a}\right)\right).$$

Platí tedy následující vztah

$$\int_{\frac{\pi_p}{a}}^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = \int_{\frac{\pi_p}{a}}^{\pi_p} \varphi_p\left(\left(p-1\right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot a \cdot \sinh_p\left(b \cdot \left(t - \frac{\pi_p}{a}\right)\right)\right) dt.$$

Díky vlastnostem funkce φ_p a integrálu můžeme provést následující úpravy

$$\int_{\frac{\pi_p}{a}}^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = \varphi_p\left(\left(p-1\right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot a\right) \cdot \int_{\frac{\pi_p}{a}}^{\pi_p} \varphi_p\left(\sinh_p\left(b \cdot \left(t - \frac{\pi_p}{a}\right)\right)\right) dt.$$

Zavedeme $s = t - \frac{\pi_p}{a}$. Pak dostáváme

$$\int_0^{\pi_p - \frac{\pi_p}{a}} \varphi_p\left(u\left(s + \frac{\pi_p}{a}\right)\right) ds = (p-1) \cdot a^{p-1} \cdot \int_0^{\pi_p - \frac{\pi_p}{a}} \varphi_p\left(\sinh_p(b \cdot s)\right) ds. \quad (3.49)$$

Dosazením (3.48) a (3.49) do (3.47) dostáváme

$$-\frac{2 \cdot b^{p-1}}{a} + (p-1) \cdot a^{p-1} \cdot \int_0^{\pi_p - \frac{\pi_p}{a}} \varphi_p\left(\sinh_p(b \cdot t)\right) dt = 0. \quad (3.50)$$

Zbývá určit podmínky, za jakých tento vztah platí. Požadujeme, aby bod $t = \frac{\pi_p}{a}$ ležel na intervalu $(0; \pi_p)$, to znamená aby platilo

$$0 < \frac{\pi_p}{a} < \pi_p.$$

Díky tomu, že $a > 0$ platí vztah $0 < \frac{\pi_p}{a}$ vždy. Ze vztahu $\frac{\pi_p}{a} < \pi_p$ pak dostáváme podmínku $a > 1$. V případě, kdy bychom předpokládali $u'(0) < 0$ by řešení u na intervalu $(0; \frac{\pi_p}{a})$ bylo podle (2.45) monotónní a integrální okrajová podmínka by tedy nemohla být splněna. \square

Pro $a > 0$ jsme určili tvar Fučikova spektra v rovině ab pro $b > 0$, $b < 0$ a zbývá tedy prozkoumat případ, kdy $b = 0$. Označme $\mathfrak{D}_1^+ = \{(a, 0) : a > 0 \wedge S_p(a, b) \in C_1^+\}$.

Lemma 3.10. Pro množinu \mathfrak{D}_1^+ platí

$$\mathfrak{D}_1^+ = \left\{ (a, 0) : a > 0 \wedge \frac{2}{a} - (p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot a \cdot \frac{\left(\pi_p - \frac{\pi_p}{a}\right)^p}{p} = 0 \right\}. \quad (3.51)$$

Důkaz. Předpokládejme $a > 0$ a $\beta = 0$. Platí tedy i $a > 0$, $b = 0$. Řešíme, pro která a, b vyhovuje řešení úlohy (2.42) pro $c = \frac{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}}{b}$ integrální okrajové podmínce v (3.19). Úlohu (2.42) lze tedy psát v následujícím tvaru

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'(t)))' = (p-1) \cdot a^p \cdot \varphi_p(u^+(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = (p-1)^{\frac{1}{p-1}} \cdot a. \end{cases} \quad (3.52)$$

Pro $t \in \left(0; \frac{\pi_p}{a}\right)$ lze použít lemma 3.6 a dostáváme hodnotu integrálu přes první půlvlnu řešení u jako

$$\int_0^{\frac{\pi_p}{a}} \varphi_p(u(t)) dt = \frac{2}{a}. \quad (3.53)$$

Pro $t > \frac{\pi_p}{a}$ platí $u(t) < 0$, a zároveň platí $u'\left(\frac{\pi_p}{a}\right) = -u'(0) = -(p-1)^{\frac{1}{p-1}} \cdot a$. Úloha (3.52) tak má tvar

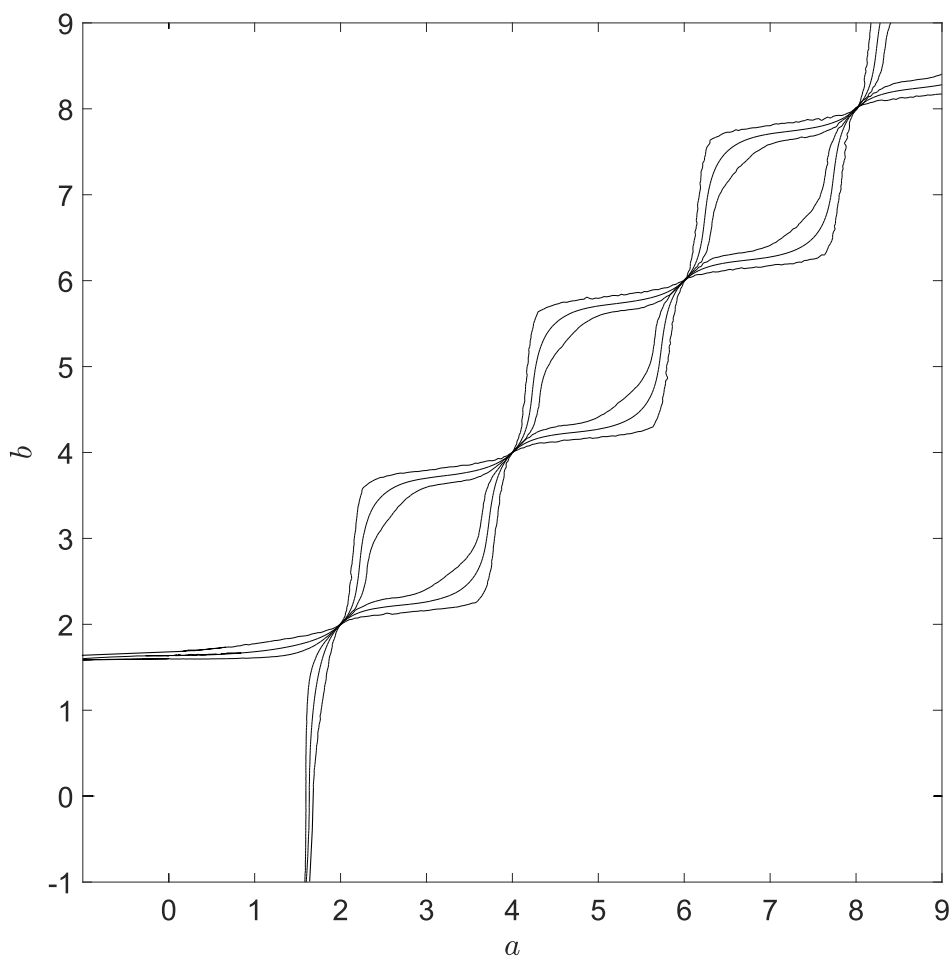
$$\begin{cases} (\varphi_p(u'(t)))' = 0, & t \in \left(\frac{\pi_p}{a}; +\infty\right), \\ u\left(\frac{\pi_p}{a}\right) = 0, \\ u'\left(\frac{\pi_p}{a}\right) = -(p-1)^{\frac{1}{p-1}} \cdot a. \end{cases} \quad (3.54)$$

Z diferenciální rovnice v (3.54) plyne $u''(t) = 0$ pro $t \in \left(\frac{\pi_p}{a}; +\infty\right)$. Řešíme tedy následující počáteční úlohu prvního řádu

$$\begin{cases} u'\left(\frac{\pi_p}{a}\right) = -(p-1)^{\frac{1}{p-1}} \cdot a, & t \in \left(\frac{\pi_p}{a}; +\infty\right), \\ u\left(\frac{\pi_p}{a}\right) = 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

Úlohu (3.55) vyřešíme metodou přímé integrace a dostáváme řešení

$$u(t) = -(p-1)^{\frac{1}{p-1}} \cdot a \cdot \left(t - \frac{\pi_p}{a}\right), \quad t \in \left(\frac{\pi_p}{a}; +\infty\right). \quad (3.56)$$



Obrázek 3.6: Porovnání Fučikova spektra Σ_p pro úlohu (3.1) v rovině ab pro $p = \frac{3}{2}$, $p = 2$ a $p = 3$.

Vypočítáme integrál z funkce $\varphi_p(u)$, kde u je řešení úlohy (3.52) přes interval $\left(\frac{\pi_p}{a}; \pi_p\right)$

$$\int_{\frac{\pi_p}{a}}^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = -(p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot a \cdot \frac{\left(\pi_p - \frac{\pi_p}{a}\right)^p}{p}.$$

Integrální podmínka z (3.19) pak má tvar

$$\int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = \frac{2}{a} - (p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot a \cdot \frac{\left(\pi_p - \frac{\pi_p}{a}\right)^p}{p} = 0. \quad (3.57)$$

□

Nalezli jsme popis Fučikova spektra Σ_p úlohy (3.1) v rovině ab . Tento popis je vhodný k porovnání vlastností spektra Σ_p pro různá p , neboť pro $a = b = \gamma$

3.3. Fučikovo spektrum pro úlohu s integrální okrajovou podmínkou

dostáváme úlohu (3.11), která má podle lemmatu 3.3 netriviální řešení pro hodnoty γ nezávislé na p . Díky tomu mají spektra Σ_{p_1} a Σ_{p_2} , kde $p_1 \neq p_2$, vždy průnik v bodech na diagonále $a = b$ (viz obrázek 3.6). Zbývá najít popis Fučikova spektra Σ_p v rovině $\alpha\beta$. Tento popis uvedeme v následujících větách a ilustrujeme obrázky 3.7, 3.8, 3.9.

Věta 3.11. *Mějme $p, q > 1$ tak, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom pro první větev C_1^+ Fučikova spektra Σ_p platí*

$$C_1^+ = C_{1,a}^+ \cup C_{1,b}^+ \cup C_{1,c}^+,$$

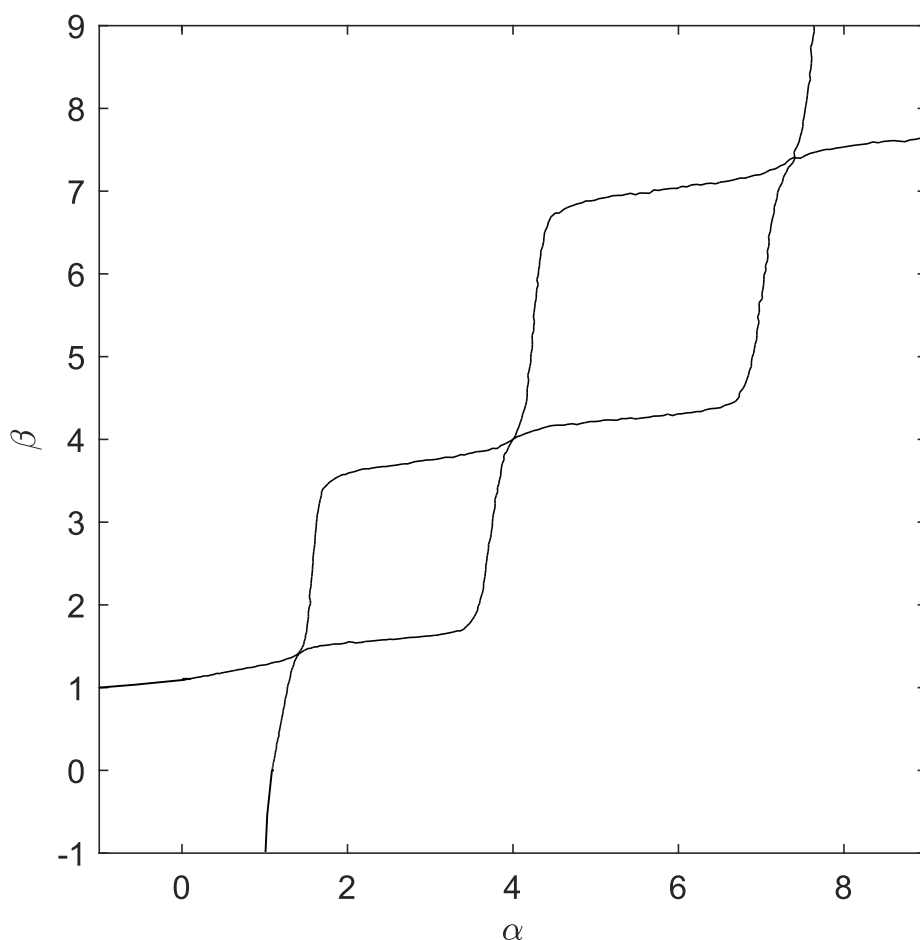
kde

$$C_{1,a}^+ = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{2 \cdot \beta^{\frac{1}{q}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \cdot (p-1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} - \right. \\ \left. (p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot \alpha^{\frac{1}{q}} \cdot \int_0^{\pi_p - \frac{(p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot \pi_p}{\alpha^{\frac{1}{p}}}} \varphi_p \left(\sin_p \left(\left(\frac{\beta}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot t \right) \right) dt = 0, \right. \\ \left. \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}}, \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{p}}} + \frac{1}{\beta^{\frac{1}{p}}} > \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} \right\},$$

$$C_{1,b}^+ = \left\{ (\alpha, 0) : \alpha > 0 \wedge 2 \cdot \left(\frac{p-1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} - \right. \\ \left. (p-1)^{\frac{1}{p^2-p}} \cdot \alpha^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{\left(\pi_p \cdot \left(1 - \left(\frac{p-1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \right)^p}{p} = 0 \right\},$$

$$C_{1,c}^+ = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- : \frac{2 \cdot |\beta|^{\frac{1}{q}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \cdot (p-1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} - \right. \\ \left. (p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot \alpha^{\frac{1}{q}} \cdot \int_0^{\pi_p - \frac{(p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot \pi_p}{\alpha^{\frac{1}{p}}}} \varphi_p \left(\sinh_p \left(\left(\frac{|\beta|}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot t \right) \right) dt = 0, \alpha > p-1 \right\}.$$

Důkaz. Tvar množin $C_{1,a}^+$, $C_{1,b}^+$ a $C_{1,c}^+$ lze snadno ukázat pomocí lemmat 3.7, 3.10, 3.9 a využitím vztahu $S_p(\mathbb{C}_k^\pm) = C_k^\pm$. \square



Obrázek 3.7: Fučíkovo spektrum Σ_p pro úlohu (3.1) v rovině $\alpha\beta$ pro $p = \frac{3}{2}$.

Věta 3.12. Mějme $p, q > 1$ tak, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom pro vyšší větve C_k^+ , $k \geq 2$, Fučíkova spektra Σ_p platí ($j \in \mathbb{N}$)

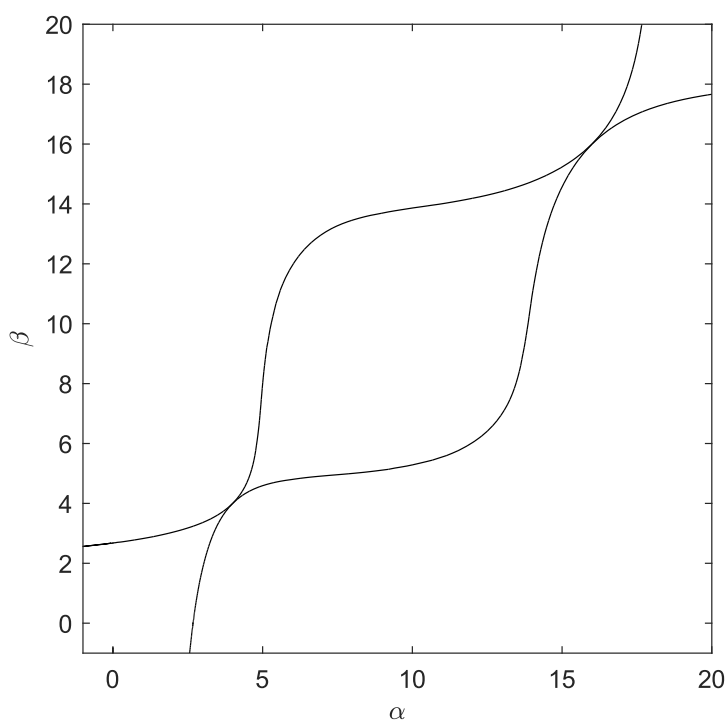
$$C_{2j+1}^+ = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{2j \cdot \beta^{\frac{1}{q}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \cdot (p-1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} - \frac{(2j-2) \cdot \alpha^{\frac{1}{q}}}{\beta^{\frac{1}{p}}} \cdot (p-1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} - \right.$$

$$\left. (p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot \alpha^{\frac{1}{q}} \cdot \int_0^{\pi_p - \frac{j \cdot (p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot \pi_p}{\alpha^{\frac{1}{p}}} - \frac{(j-1) \cdot (p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot \pi_p}{\beta^{\frac{1}{p}}}} \varphi_p \left(\sin_p \left(\left(\frac{\beta}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot t \right) \right) dt = 0, \right.$$

$$\left. \frac{j}{\alpha^{\frac{1}{p}}} + \frac{j-1}{\beta^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}}, \frac{j}{\alpha^{\frac{1}{p}}} + \frac{j}{\beta^{\frac{1}{p}}} > \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} \right\},$$

3.3. Fučikovo spektrum pro úlohu s integrální okrajovou podmínkou

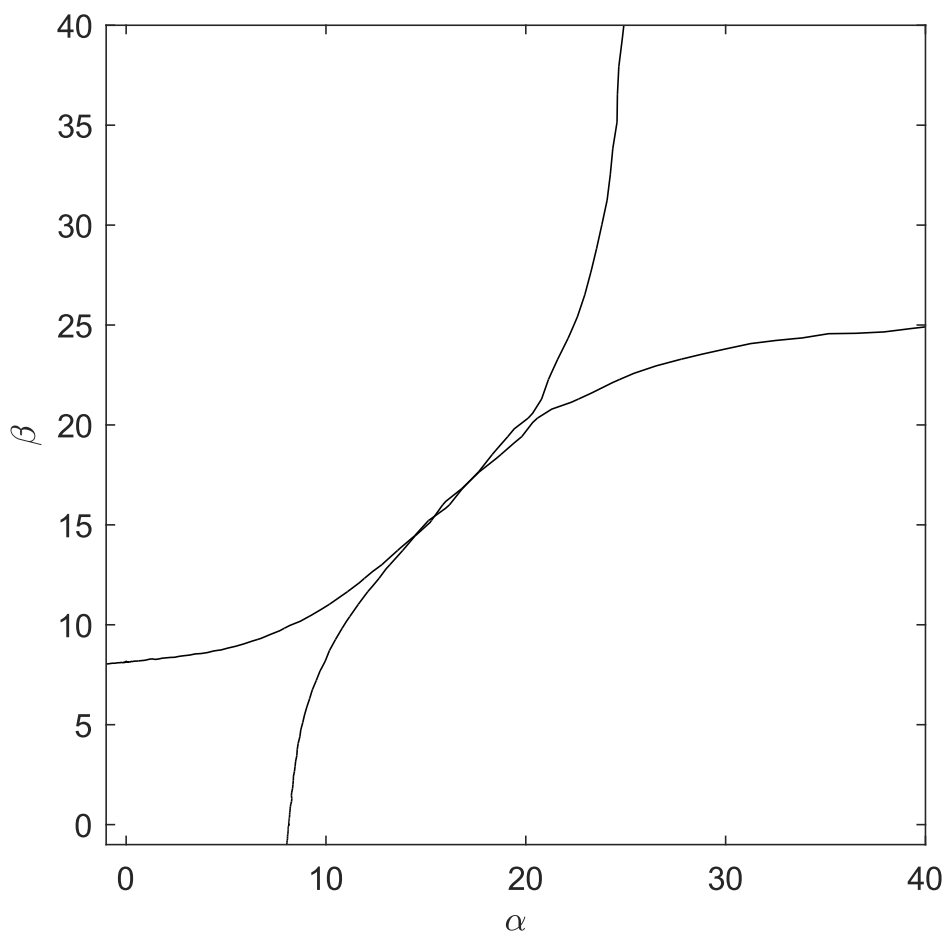
$$C_{2j}^+ = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{2j \cdot \beta^{\frac{1}{q}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \cdot (p-1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} - \frac{2j \cdot \alpha^{\frac{1}{q}}}{\beta^{\frac{1}{p}}} \cdot (p-1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} + \right. \\ \left. (p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot \beta^{\frac{1}{q}} \cdot \int_0^{\pi_p - \frac{j \cdot (p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot \pi_p}{\alpha^{\frac{1}{p}}} - \frac{j \cdot (p-1)^{\frac{1}{p}} \cdot \pi_p}{\beta^{\frac{1}{p}}}} \varphi_p \left(\sin_p \left(\left(\frac{\alpha}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot t \right) \right) dt = 0, \right. \\ \left. \frac{j}{\alpha^{\frac{1}{p}}} + \frac{j}{\beta^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}}, \frac{j+1}{\alpha^{\frac{1}{p}}} + \frac{j}{\beta^{\frac{1}{p}}} > \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} \right\}.$$



Obrázek 3.8: Fučikovo spektrum Σ_p pro úlohu (3.1) v rovině $\alpha\beta$ pro $p = 2$.

Důkaz. Věta je založena na lemmatu 3.7 a využívá vztah $S_p(\mathfrak{C}_k^\pm) = C_k^\pm$. □

3.3. Fučíkovo spektrum pro úlohu s integrální okrajovou podmínkou



Obrázek 3.9: Fučíkovo spektrum Σ_p pro úlohu (3.1) v rovině $\alpha\beta$ pro $p = 3$.

Numerické experimenty a vlastnosti Fučíkova spektra

4

V této kapitole budou uvedeny jednak numerické výpočty a následně také některé vlastnosti Fučíkova spektra úlohy (3.1). Numerické algoritmy využijeme jednak k formulaci hypotéz, a také k vykreslení částí Fučíkova spektra úlohy (3.1), respektive (3.19). Použijeme algoritmy s různou výpočetní složitostí a přesností.

4.1 Numerická aproximace Fučíkova spektra

Součástí práce je navržení numerických algoritmů pro vykreslení Fučíkova spektra úlohy (3.1). Tyto algoritmy byly následně implementovány v programu MATLAB R2019b, verze 9.7. Všechny uvedené algoritmy jsou navrženy pro nalezení Fučíkova spektra v rovině ab , spektrum v rovině $\alpha\beta$ lze pak snadno získat využitím převodních vztahů (2.41).

Základní algoritmus vychází z metody střelby. Na zvolené oblasti v rovině ab vytvoříme síť bodů. Pro každý bod této sítě následně numericky řešíme počáteční úlohu (2.42). Úlohu (2.42) převedeme po vzoru lemmatu 2.14 na úlohu pro $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u'(t) = \varphi_q(v(t)), \\ v'(t) = -(p-1) \cdot (\varphi_{p+1}(a) \cdot \varphi_p(u^+(t)) - \varphi_{p+1}(b) \cdot \varphi_p(u^-(t))), \\ u(0) = 0, \\ v(0) = (c \cdot a \cdot b)^{p-1}, \end{cases} \quad (4.1)$$

kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a řešíme pomocí funkce `ode45`. Zavedeme funkci F následujícím způsobem

$$F(a, b) = \int_0^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt,$$

kde u je řešení počáteční úlohy (2.42) pro zvolené a, b . Funkční hodnoty funkce F najdeme numerickou integrací pomocí funkce *trapz*. Nakonec pomocí funkce *contour* necháme vykreslit nultou hladinu funkce F , čímž dostáváme hledanou aproximaci Fučikova spektra úlohy (3.1) v rovině ab .

Následující algoritmus vychází ze základního algoritmu a pro jeho zrychlení využívá některé poznatky z kapitoly 2. Namísto numerického řešení počáteční úlohy pro každý bod sítě vyřešíme samotnou úlohu pouze jednou, následně budeme využívat lemmatu 2.17, které po převedení pomocí vztahu (2.35) nabízí způsob, jak snadno z řešení počáteční úlohy (2.42) najít i řešení pro libovolné a, b . Dále využijeme znalosti základní periody řešení $T = \frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b}$ k zjištění počtu celých půlvln nalezeného řešení na intervalu $(0; \pi_p)$. Pak můžeme využít lemma 3.6, díky kterému známe hodnoty integrálu přes jednotlivé půlvlny. Tím známe hodnotu integrálu na intervalu $(0; \tau)$, kde τ je poslední nulový bod na intervalu $(0; \pi_p)$. Numericky pak integrujeme pouze řešení na intervalu $(\tau; \pi_p)$.

Třetí verze algoritmu se zaměřuje na výpočet integrálu

$$\int_{\tau}^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt. \quad (4.2)$$

Bod τ jsme zvolili jako poslední nulový bod na intervalu $(0; \pi_p)$. Ze spojitosti funkce u celý interval náleží jedné půlvlně. Předpokládejme, že jde o kladnou půlvlnu. Pro kladnou půlvlnu řešíme počáteční úlohu (2.48). S využitím vztahu (2.29) platí pro integrál (4.2)

$$\int_{\tau}^{\pi_p} \varphi_p(u(t)) dt = \int_{\tau}^{\pi_p} \frac{-(\varphi_p(u'(t)))'}{(p-1) \cdot a^p} dt = \int_{\tau}^{\pi_p} \frac{-v'(t)}{(p-1) \cdot a^p} dt = \frac{v(\tau) - v(\pi_p)}{(p-1) \cdot a^p}.$$

Díky tomu, že numericky řešíme úlohu (4.1), máme jak numerické řešení funkce u , tak funkce v . Navíc i pro funkci v lze využít lemma 2.17. Tím jsme se zbavili nutnosti numericky integrovat.

4.2 Fučikovo spektrum pro $p \rightarrow 1+$

Fučikovo spektrum úlohy (3.1) jsme úspěšně popsali v kapitole 3 pro $p \in (1; +\infty)$. Zajímavou otázkou ovšem zůstává, jak kvalitativně toto spektrum vypadá, blíží-li se p některé ze svých krajních hodnot, tedy $p \rightarrow 1+$ nebo $p \rightarrow +\infty$. Nejprve se budeme zabývat případem $p \rightarrow 1+$.

Lemma 4.1. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{p \rightarrow 1+} \varphi_p(t) = \operatorname{sgn}(t). \quad (4.3)$$

Důkaz. Platnost vztahu (4.3) ukážeme přímým výpočtem. Pro $t = 0$ platí

$$\lim_{p \rightarrow 1+} \varphi_p(0) = \lim_{p \rightarrow 1+} 0 = 0 = \operatorname{sgn}(0).$$

Dále tedy předpokládáme $t \neq 0$, pak platí

$$\lim_{p \rightarrow 1+} \varphi_p(t) = \lim_{p \rightarrow 1+} |t|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(t) = |t|^0 \cdot \operatorname{sgn}(t) = \operatorname{sgn}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Definice 4.2. Mějme řešení u počáteční úlohy (2.42). Pak definujme funkci $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$W(t) = \int_0^t \operatorname{sgn}(u(s)) \, ds. \quad (4.4)$$

Lemma 4.3. Mějme řešení u počáteční úlohy (2.42), kde $u'(0) > 0$ pro $a, b > 0$ a funkci W . Funkce W je pak spojitá funkce a lze ji zapsat po částech následujícím způsobem:

$$W(t) = \begin{cases} t - k \cdot \frac{2 \cdot \pi_p}{b}, & t \in \left(k \cdot T; k \cdot T + \frac{\pi_p}{a} \right), \\ (k+1) \cdot \frac{2 \cdot \pi_p}{a} - t, & t \in \left(k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}; (k+1) \cdot T \right), \end{cases} \quad (4.5)$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ a $T = \frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} > 0$ je základní perioda funkce u .

Důkaz. Nejprve určíme funkční hodnotu $W(T)$, to znamená

$$W(T) = \int_0^T \operatorname{sgn}(u(t)) \, dt = \int_0^{\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b}} \operatorname{sgn}(u(t)) \, dt. \quad (4.6)$$

Z lemmatu 2.18 víme, že pro funkci u platí

$$\begin{aligned} u(t) &> 0 \quad \text{pro } t \in \left(0; \frac{\pi_p}{a} \right), \\ u(t) &< 0 \quad \text{pro } t \in \left(\frac{\pi_p}{a}; \frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} \right). \end{aligned}$$

Pro funkci $\operatorname{sgn}(u)$ tedy platí

$$\operatorname{sgn}(u(t)) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \left(0; \frac{\pi_p}{a} \right), \\ -1 & \text{pro } t \in \left(\frac{\pi_p}{a}; \frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} \right). \end{cases} \quad (4.7)$$

Integrál ve vyjádření (4.6) rozdělíme pomocí aditivity integrálu vzhledem k integračnímu oboru následujícím způsobem

$$W(T) = \int_0^{\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b}} \operatorname{sgn}(u(t)) \, dt = \int_0^{\frac{\pi_p}{a}} \operatorname{sgn}(u(t)) \, dt + \int_{\frac{\pi_p}{a}}^{\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b}} \operatorname{sgn}(u(t)) \, dt. \quad (4.8)$$

Díky vztahu (4.7) můžeme dosadit do (4.8) za funkci $\text{sgn}(u)$, dostáváme

$$W(t) = \int_0^{\frac{\pi_p}{a}} 1 \, dt + \int_{\frac{\pi_p}{a}}^{\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b}} (-1) \, dt = \frac{\pi_p}{a} - \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} - \frac{\pi_p}{a} \right) = \frac{\pi_p}{a} - \frac{\pi_p}{b}.$$

Z periodicity funkce u platí pro $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{k \cdot T} \text{sgn}(u(t)) \, dt = k \cdot \int_0^T \text{sgn}(u(t)) \, dt = k \cdot \left(\frac{\pi_p}{a} - \frac{\pi_p}{b} \right). \quad (4.9)$$

Předpokládejme, že hodnota t leží v kladné půlplně funkce u , tedy

$$t \in \left(k \cdot T; k \cdot T + \frac{\pi_p}{a} \right),$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Pak platí

$$\int_{k \cdot T}^t \text{sgn}(u(s)) \, ds = \int_{k \cdot T}^t 1 \, ds = t - k \cdot T = t - k \cdot \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} \right). \quad (4.10)$$

Funkci W pak upravíme následovně

$$W(t) = \int_0^{k \cdot T} \text{sgn}(u(s)) \, ds + \int_{k \cdot T}^t \text{sgn}(u(s)) \, ds.$$

Dosadíme ze vztahů (4.9) a (4.10) a dostáváme

$$W(t) = k \cdot \left(\frac{\pi_p}{a} - \frac{\pi_p}{b} \right) + t - k \cdot \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{b} \right) = t - 2k \cdot \frac{\pi_p}{b}.$$

Pro $t \in \left(k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}; (k+1) \cdot T \right)$ bychom postupovali obdobně.

Máme tedy funkci W zapsanou po částech pomocí vztahu (4.5). Jednotlivé části jsou zřejmě tvořeny lineárními funkcemi, které jsou spojité. Zbývá tedy ověřit, zda je funkce W spojitá i v bodech napojení jednotlivých částí. Určíme následující hodnoty

$$\begin{aligned} W\left(k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}\right) &= k \cdot T + \frac{\pi_p}{a} - k \cdot \frac{2 \cdot \pi_p}{b} = (k+1) \cdot \frac{\pi_p}{a} - k \cdot \frac{\pi_p}{b}, \\ \lim_{t \rightarrow \left(k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}\right)^-} W(t) &= W\left(k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}\right) = (k+1) \cdot \frac{\pi_p}{a} - k \cdot \frac{\pi_p}{b}, \\ \lim_{t \rightarrow \left(k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}\right)^+} W(t) &= (k+1) \cdot \frac{2 \cdot \pi_p}{a} - \left(k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}\right) = (k+1) \cdot \frac{\pi_p}{a} - k \cdot \frac{\pi_p}{b}. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$\lim_{t \rightarrow \left(k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}\right)^-} W(t) = W\left(k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}\right) = \lim_{t \rightarrow \left(k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}\right)^+} W(t) = (k+1) \cdot \frac{\pi_p}{a} - k \cdot \frac{\pi_p}{b},$$

to znamená že funkce W je v bodě $t = k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}$ spojitá. Obdobně platí

$$\lim_{t \rightarrow (k \cdot T)^-} W(t) = W(k \cdot T) = \lim_{t \rightarrow (k \cdot T)^+} W(t) = k \cdot \frac{\pi_p}{a} - k \cdot \frac{\pi_p}{b},$$

dokázali jsme tak spojitost funkce W . □

Lemma 4.4. *Mějme řešení u počáteční úlohy (2.42) pro $a, b > 0$ a $u'(0) > 0$. Potom je následující rovnice*

$$W(\pi_p) = 0 \quad (4.11)$$

splněna právě tehdy, když platí

$$a \in (2 \cdot k; 2 \cdot (k + 1)), \quad b = 2 \cdot k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.12)$$

nebo

$$a = 2 \cdot (k + 1), \quad b \in (2 \cdot k; 2 \cdot (k + 1)), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (4.13)$$

Důkaz. S využitím vyjádření (4.5) ukážeme, pro které dvojice (a, b) je splněna rovnice (4.11). Budeme předpokládat, že platí

$$\pi_p \in \left(k \cdot T; k \cdot T + \frac{\pi_p}{a} \right). \quad (4.14)$$

Rovnice (4.11) pak má tvar

$$\pi_p - k \cdot \frac{2 \cdot \pi_p}{b} = 0.$$

Vyjádřením b pro $k \neq 0$ dostáváme

$$b = 2 \cdot k.$$

Zbývá určit a tak, aby byl splněn předpoklad (4.14). Dosazením za b a T dostáváme

$$\begin{aligned} k \cdot \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{2 \cdot k} \right) < \pi_p \leq k \cdot \left(\frac{\pi_p}{a} + \frac{\pi_p}{2 \cdot k} \right) + \frac{\pi_p}{a}, \\ \frac{k}{a} < \frac{1}{2} \leq \frac{k+1}{a}, \\ 2k < a \leq 2 \cdot (k+1), \\ a \in (2 \cdot k; 2 \cdot (k+1)). \end{aligned}$$

Tím jsme získali podmínky (4.12). Pro $\pi_p \in \left(k \cdot T + \frac{\pi_p}{a}; (k+1) \cdot T \right)$ bychom obdobným postupem obdrželi podmínky (4.13). \square

Lemma 4.5. *Všechny body popsané vztahy (4.12) a (4.13) tvoří v rovině ab obraz křivky η_1^+ , která má parametrizaci*

$$\eta_1^+ = [2 + 2 \cdot f(t); 2 \cdot f(t+1)], \quad t \in (0; +\infty), \quad (4.15)$$

kde pro $m \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f(t) = \begin{cases} m, & t \in (2m, 1 + 2m), \\ t - (m + 1), & t \in (1 + 2m, 2 + 2m). \end{cases}$$

Důkaz. Platí-li $t \in (2m, 1+2m)$ pak platí $(t+1) \in (1+2m, 2+2m)$ a parametrizace η_1^+ má tvar

$$\eta_1^+ = [2 + 2 \cdot m; 2 \cdot (t + 1 - (m + 1))].$$

Rozepsáním pro a, b platí

$$a = 2 \cdot (m + 1),$$

$$b = 2 \cdot (t - m),$$

z čehož plyne $a = 2 \cdot (m + 1)$, $b \in (2 \cdot m; 2 \cdot (m + 1))$, což odpovídá vztahu (4.13). Obdobně bychom ukázali, že pro $t \in (1 + 2m, 2 + 2m)$ odpovídá parametrizace η_1^+ podmínkám (4.12). Nakonec ukážeme spojitost vektorové funkce η_1^+ . Stačí ukázat, že funkce f je spojitá, neboť ze spojitosti funkce f plyne i spojitost vektorové funkce η_1^+ . Funkce $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ je spojitá na intervalu $(2m, 2+2m)$ a tedy i na intervalu $(2m, 1+2m)$. Obdobně je funkce $\lceil \frac{t}{2} \rceil$ spojitá na intervalu $(2m, 2+2m)$. Bod nespojitosti funkce f by tak mohl existovat jedině v napojení jednotlivých částí. Že žádné body nespojitosti funkce f neexistují ověříme výpočtem následujících limit:

$$f(1+2m) = \left\lfloor \frac{1+2m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} + m \right\rfloor = m,$$

$$\lim_{t \rightarrow (1+2m)^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow (1+2m)^+} \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1+2m}{2} \right\rfloor = m,$$

$$\lim_{t \rightarrow (1+2m)^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow (1+2m)^-} \left(t - \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil \right) = 1+2m - \left\lceil \frac{1}{2} + m \right\rceil = 1+2m - (1+m) = m.$$

Platí tedy

$$\lim_{t \rightarrow (1+2m)^-} f(t) = f(1+2m) = \lim_{t \rightarrow (1+2m)^+} f(t) = m,$$

funkce f je proto spojitá v bodě $t = 1 + 2m$. Obdobně lze ověřit, že platí

$$\lim_{t \rightarrow (2+2m)^-} f(t) = f(2+2m) = \lim_{t \rightarrow (2+2m)^+} f(t) = 1 + m,$$

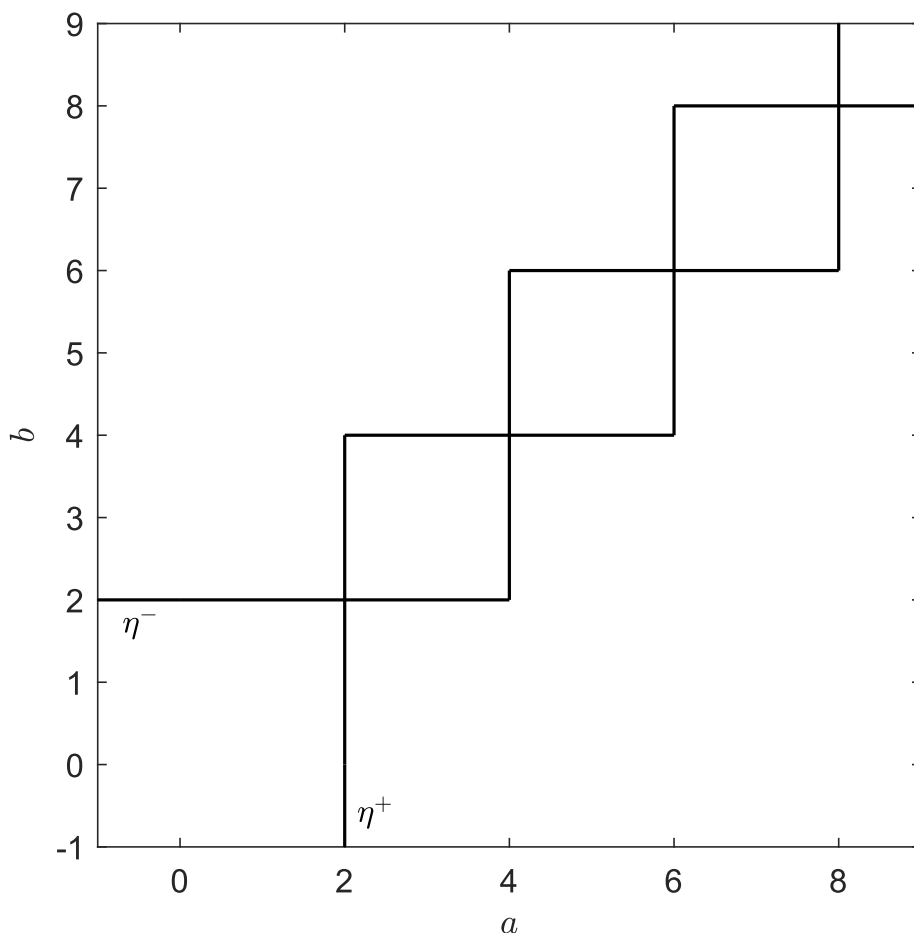
a tedy, že funkce f je spojitá i v bodě $t = 2 + 2m$. □

Poznámka 4.6. Obdobným postupem, jakým jsme našli parametrizaci křivky η_1^+ lze odvodit i parametrizaci křivky η_2^+ pro $a > 0$, $b < 0$, kde

$$\eta_2^+ = [2; t], \quad t \in (-\infty; 0). \quad (4.16)$$

Pro $a, b < 0$ se žádné body splňující rovnici (4.11) nalézt nepodaří. Označíme pak $\eta^+ := \eta_1^+ \cup \eta_2^+$.

Pokud bychom v lemmatech 4.3 a 4.4 předpokládali $u'(0) < 0$, obdrželi bychom parametrizaci křivky η_1^- pro $a, b > 0$, respektive η_2^- pro $a < 0$, $b > 0$ (viz obrázek 4.1).

Obrázek 4.1: Křivky η^+ a η^- v rovině ab .

Následující hypotézu se nepodařilo dokázat, nicméně naše numerické experimenty naznačují, že by tvrzení mělo být pravdivé.

Hypotéza 4.7. *Mějme reálnou posloupnost $(p_n)_{n=1}^{+\infty}$ takovou, že $1 < p_n \rightarrow 1+$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ mějme $a_n > 0$ a $b_n > 0$ tak, že okrajová úloha (3.19) pro $p = p_n$, $a = a_n$ a $b = b_n$ má netriviální řešení u_n , pro které $u'_n(0) > 0$. Jestliže $a_n \rightarrow a$ a $b_n \rightarrow b$, potom bod (a, b) leží na křivce η_1^+ .*

4.3 Fučíkovo spektrum pro $p \rightarrow +\infty$

Dále se pokusíme popsat případ $p \rightarrow +\infty$.

Lemma 4.8. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, a mějme reálnou posloupnost $(p_n)_{n=1}^{+\infty}$ takovou, že $1 < p_n \rightarrow +\infty$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ mějme bod (a_n, b_n) tak, že okrajová úloha (3.19)*

pro $p = p_n$, $a = a_n$ a $b = b_n$ má netriviální řešení u_n , které má právě k nulových bodů na intervalu $(0; \pi_p)$. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $k \geq 2$ je sudé. Pak můžeme využít implicitní popis množiny \mathfrak{M}_{2j}^+ , kde $j \in \mathbb{N}$, a má tvar (3.39). Označíme

$$\theta = 1 - \varphi_p \left(\cos_p \left(1 - \frac{j}{a} - \frac{j}{b} \right) \right) \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Pro každé $n, j \in \mathbb{N}$ platí

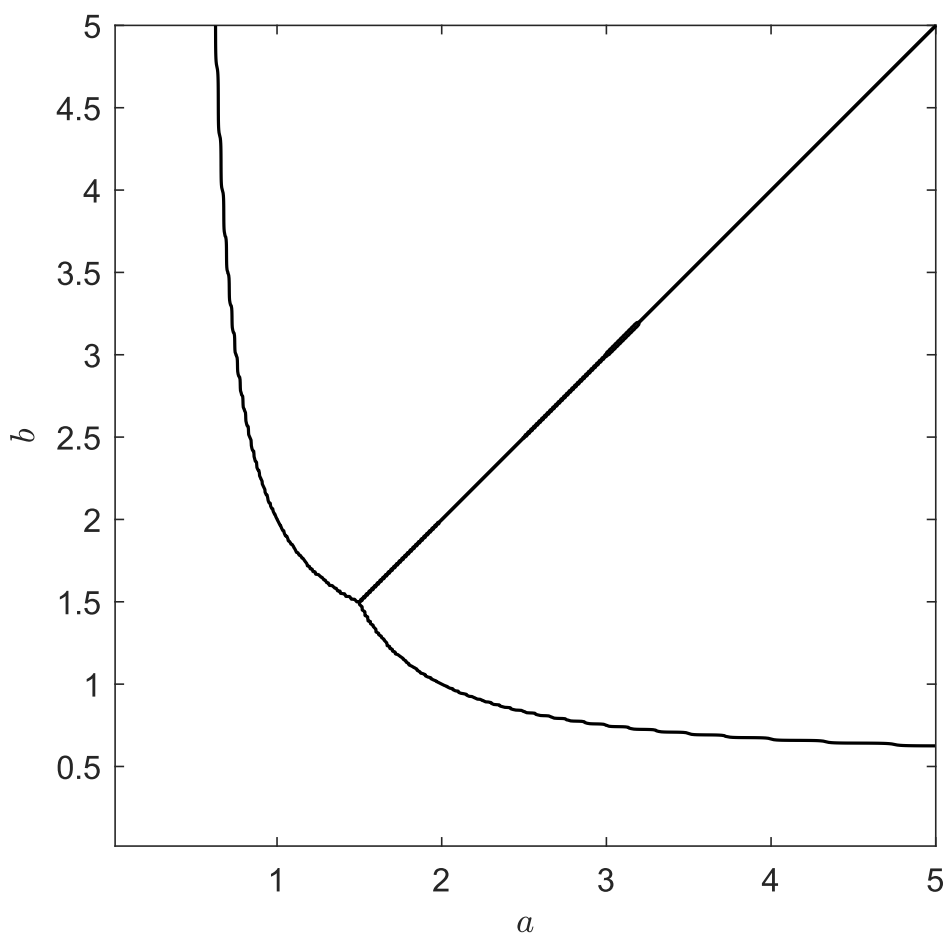
$$\begin{aligned} j \cdot \frac{2 \cdot b_n^{p_n-1}}{a_n} - j \cdot \frac{2 \cdot a_n^{p_n-1}}{b_n} + \theta \cdot \frac{b_n^{p_n-1}}{a_n} &= 0, \\ j \cdot \frac{2}{a_n} - j \cdot \frac{2}{b_n} \cdot \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{p_n-1} + \frac{\theta}{a_n} &= 0, \\ j \cdot \frac{2}{b_n} \cdot \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{p_n-1} &= j \cdot \frac{2}{a_n} + \frac{\theta}{a_n}, \\ \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{p_n-1} &= \theta \cdot \frac{b_n}{a_n} \cdot \frac{1}{2j} + \frac{b_n}{a_n}, \\ \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{p_n-1} &= \frac{b_n}{a_n} \cdot \left(\frac{\theta}{2j} + 1 \right), \\ \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{p_n} &= \frac{\theta}{2j} + 1. \end{aligned}$$

Výrazy na obou stranách rovnice mohou nabývat pouze kladných hodnot, rovnici tedy můžeme zlogaritmovat.

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{p_n} &= \ln \left(\frac{\theta}{2j} + 1 \right), \\ p_n \cdot \ln \left(\frac{a_n}{b_n} \right) &= \ln \left(\frac{\theta}{2j} + 1 \right), \\ \ln \left(\frac{a_n}{b_n} \right) &= \frac{1}{p_n} \cdot \ln \left(\frac{\theta}{2j} + 1 \right). \end{aligned}$$

Dostali jsme tak rovnici ve tvaru vhodném pro provedení limitního přechodu $n \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{a_n}{b_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_n} \cdot \ln \left(\frac{\theta}{2j} + 1 \right), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{a_n}{b_n} \right) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= 1. \end{aligned}$$

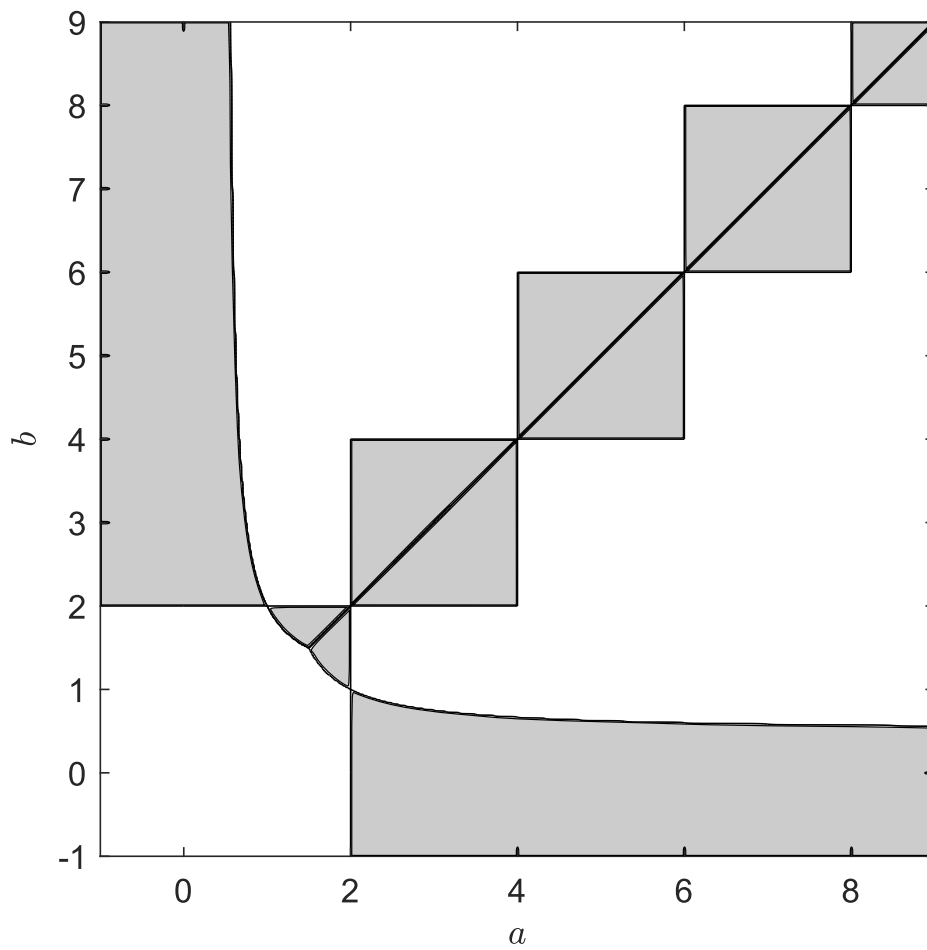


Obrázek 4.2: Limitní případ Fučíkova spektra Σ_p pro úlohu (3.1) pro $p \rightarrow +\infty$ v rovině ab .

Pokud bychom předpokládali, že funkce u má na intervalu $(0; \pi_p)$ lichý počet nulových bodů, důkaz by probíhal analogicky. \square

Podarilo se popsat sice jen část limitního případu $p \rightarrow +\infty$, nicméně pomocí numerických experimentů lze alespoň vykreslit tvar nepopsané části (viz obrázek 4.2).

Hypotéza 4.9. *Fučikovo spektrum úlohy (3.1) v ab -rovině leží pro libovolné p v oblasti Ω vymezené limitními případy $p \rightarrow 1+$ a $p \rightarrow +\infty$ (viz obrázek 4.3).*



Obrázek 4.3: Oblast Ω v rovině ab .

Cílem této práce bylo prozkoumat Fučíkovo spektrum p -Laplaceova operátoru s ne-lokální okrajovou podmínkou. Chtěli jsme určit implicitní popis Fučíkova spektra, a zároveň navrhnout program, který spektrum numericky aproximuje.

Okrajové úlohy jsme v této práci řešili pomocí metody střelby, která spočívá v převedení okrajové úlohy na posloupnost počátečních úloh. Proto se nejprve zabýváme počátečními úlohami a jejich vlastnostmi, podařilo se určit i přesný tvar řešení. Jeho základem jsou p -trigonometrické, respektive p -hyperbolické funkce, proto se jimi v příslušné kapitole také zabýváme.

Pak už jsme mohli přejít k řešení samotných okrajových úloh, kdy zkoumáme, pro které hodnoty parametrů řešení počáteční úlohy řeší i okrajovou úlohu. Tímto způsobem se podařilo určit implicitní popis Fučíkova spektra.

Dále jsme navrhli skript, který Fučíkovo spektrum aproximuje v programu MATLAB pomocí funkcí *ode45* a *contour* a pomocí tvrzení odvozených v předešlých kapitolách jsme tento skript následně zefektivnili.

Nakonec jsme se ještě pokusili určit chování Fučíkova spektra v limitních případech pro $p \rightarrow 1+$ a $p \rightarrow +\infty$. Většinu tvrzení ohledně těchto případů se sice nepodařilo dokázat, nicméně výsledky numerických experimentů vysloveným hypotézám odpovídají.

Bibliografie

1. SERGEJEVA, Natalija. Fučik Spectrum for the Second Order BVP with Nonlocal Boundary Condition. *Nonlinear Analysis. Modelling and Control*. 2007, roč. 3. Dostupné z DOI: 10.15388/NA.2007.12.3.14704.
2. ELBERT, Árpád. A half-linear second order differential equation. In: 1979.
3. GIRG, Petr; KOTRLA, Lukáš. p-Trigonometric and p-Hyperbolic Functions in Complex Domain. In: 2016.
4. PINO, Manuel del. A Half-Linear Second Order Differential Equation. 1989.
5. DRÁBEK, Pavel. *Solvability and bifurcations of nonlinear equations*. Sv. 264. Harlow: Longman Scientific & Technical; New York: John Wiley & Sons, Inc., 1992. Pitman Res. Notes Math. Ser. ISBN 0-582-08769-4; 0-470-21867-3. ISSN 0269-3674.

Implementace algoritmů v programu MATLAB

V sekci 4.1 jsme navrhli algoritmy pro vykreslení Fučíkova spektra Σ_p v ab rovině. Zde uvedeme implementaci algoritmů v programu MATLAB R2019b, verze 9.7.

Zdrojový kód 1: Implementace první verze algoritmu pro aproximaci Fučíkova spektra Σ_p .

```
1 function [F] = BP(p)
2 % alokace paměti pro hodnoty funkce F
3 F = zeros(300);
4
5 % výpočet pi_p
6 pi_p = 2*pi/(p*sin(pi/p));
7
8 % cyklus pro každý bod zvolené sítě
9 for i = 1:1:300
10 for j = 1:1:300
11
12 % krok mezi dvěma body sítě je 1/60
13 a = i/60;
14 b = j/60;
15
16 % funkce pro řešení odpovídající počáteční úlohy
17 [x,u] = ode(a,b,p,[0 pi_p]);
18 u = u(:,1);
19
20 % uložení hodnoty integrálu jako hodnoty 2D funkce F(a,b)
21 F(j,i) = trapz(x,abs(u).^(p-2).*u);
22 end
23 end
```

Zdrojový kód 2: Využití lemmat 2.17 a 3.6 pro zefektivnění algoritmu pro aproximaci Fučíkova spektra Σ_p .

```
1 function [F] = BP_2(p)
2 F = zeros(300);
```

```

3 pi_p = 2*pi/(p*sin(pi/p));
4
5 %výchozí řešení u pro kladné půlvlny
6 [x_1,u_1] = ode(1,1,p,[0 pi_p]);
7 u_1 = u_1(:,1);
8
9 %výchozí řešení u pro záporné půlvlny
10 [x_2,u_2] = ode(1,1,p,[pi_p 2*pi_p]);
11 u_2 = -u_2(:,1);
12 x_2 = x_2-pi_p;
13
14 for i = 1:1:300
15 for j = 1:1:300
16 a = i/60; b = j/60;
17
18 %řešení pro dané a,b
19 u_1_n = u_1*b;
20 x_1_n = x_1/a;
21 u_2_n = u_2*a;
22 x_2_n = x_2/b+pi_p/a;
23
24 %počet celých period na intervalu (0;pi_p)
25 k = floor(1/(1/a+1/b));
26 %bod, ve kterém končí poslední celá záporná půlvlna na
    intervalu (0;pi_p)
27 tau = k*(pi_p/a+pi_p/b);
28
29 %hodnota integrálu na intervalu (0;tau)
30 integral = k*(2*b^(p-1)/(a)-2*a^(p-1)/(b));
31
32 %určení, zda bod t=pi_p náleží kladné či záporné půlvlně
33 if pi_p/a+tau > pi_p
34     %vyjádření poslední (neuplné) půlvlny na (0;pi_p)
35     index = find(x_1_n<pi_p-tau,1,'last');
36     x_posl = x_1_n(1:index)+tau;
37     u_posl = u_1_n(2:index);
38     %ošetření případu, kdy poslední půvlvnu aproximuje jen
        jeden bod
39     if length(x_posl)==1
40         x_posl = [1;1];
41         u_posl = 0;
42     end
43     %výpočet celkové hodnoty integrálu na intervalu (0;pi_p)
44     F(j,i) = integral+trapz(x_posl,[0;abs(u_posl).^(p-2).*
        u_posl]);
45 else
46     %vyjádření poslední (neuplné) půlvlny na (0;pi_p)
47     index = find(x_2_n<1-tau,1,'last');

```

```

48     y_posl = x_2_n(1:index)+tau;
49     v_posl = u_2_n(2:index);
50     %ošetření případu, kdy poslední půlvlnu aproximuje jen
        jeden bod
51     if length(y_posl)==1
52         y_posl = [1;1];
53         v_posl = 0;
54     end
55     %výpočet celkové hodnoty integrálu na intervalu (0;pi_p)
56     F(j,i) = integral+2*(b^(p-1)/a)+trapez(y_posl,[0;abs(v_posl)
        ].^(p-2).*v_posl]);
57 end
58 end
59 end

```

Zdrojový kód 3: Část kódu s implementací algoritmu pro výpočet hodnoty integrálu (4.2) bez použití numerické integrace.

```

1 %počet celých period na intervalu (0;pi_p)
2 k = floor(1/(1/a+1/b));
3 %bod, ve kterém končí poslední celá záporná půlvlna na
        intervalu (0;pi_p)
4 tau = k*(pi_p/a+pi_p/b);
5
6 %hodnota integrálu na intervalu (0;tau)
7 integral = k*(2*b^(p-1)/(a)-2*a^(p-1)/(b));
8
9 %určení, zda bod t=pi_p náleží kladné či záporné půvlně
10 if pi_p/a+tau > pi_p
11     %vyjádření poslední (neuplné) půvlny na (0;pi_p)
12     index = find(x_1_n<pi_p-tau,1,'last');
13     x_posl = x_1_n(1:index)+tau;
14     u_posl = u_1_n(2:index);
15     %ošetření případu, kdy poslední půlvlnu aproximuje jen
        jeden bod
16     if length(x_posl)==1
17         x_posl = [1;1];
18         u_posl = 0;
19     end
20     %výpočet celkové hodnoty integrálu na intervalu (0;pi_p)
21     F(j,i) = integral+1/((1-p).*a^p).*(u(end,2)-u(index,2));
22 else
23     %vyjádření poslední (neuplné) půvlny na (0;pi_p)
24     index = find(x_2_n<1-tau,1,'last');
25     y_posl = x_2_n(1:index)+tau;
26     v_posl = u_2_n(2:index);
27     %ošetření případu, kdy poslední půlvlnu aproximuje jen
        jeden bod

```

```
28     if length(y_posl)==1
29         y_posl = [1;1];
30         v_posl = 0;
31     end
32     %výpočet celkové hodnoty integrálu na intervalu (0;pi_p)
33     F(j,i) = integral+2*(b^(p-1)/a)+1/((1-p).*b^p).*(u(end,2)-
        u(index,2));
34 end
```

Zdrojový kód 4: Funkce pro numerický výpočet řešení počáteční úlohy (2.42).

```
1 function [x,u] = ode(a,b,p,meze)
2 pi_p=2.*pi/(p.*sin(pi/p));
3 [x,u] = ode45(@odefun,meze,[0;(((p-1)^(1/(p-1)))).*a.*b]^(p-1)
        ],odeset('RelTol',1e-10,'MaxStep',1e-2));
4
5 function dudx = odefun(x,u)
6
7 dudx = zeros(2,1);
8 dudx(1) = abs(u(2)).^(1/(p-1)).*sign(u(2));
9 dudx(2) = -sign(a).*(p-1).*(abs(a)).^p.*abs(max(u(1),0)).^(p
        -1).*sign(max(u(1),0))+...
10     sign(b).*(p-1).*(abs(b)).^p.*abs(max(-u(1),0)).^(p-1).*
        sign(max(-u(1),0));
11 end
12
13 end
```

