

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MECHANIKY



Diplomová práce

Plzeň, 2023

Bc. Václav Steinbach

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MECHANIKY



Diplomová práce
PERIODICKÁ ŘEŠENÍ
MECHANICKÝCH SOUSTAV S NELINEARITAMI

Plzeň, 2023

Bc. Václav Steinbach

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

V Plzni dne 17. srpna 2023

.....
podpis

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. Ing. Miroslavu Byrtusovi, Ph.D. za čas věnovaný vedení a spolupráci na této práci. Děkuji i za poskytnutí cenných rad, materiálů a literatury při jejím vypracovávání. Rád bych také poděkoval své rodině za psychickou podporu a zázemí při studiu.

ABSTRAKT

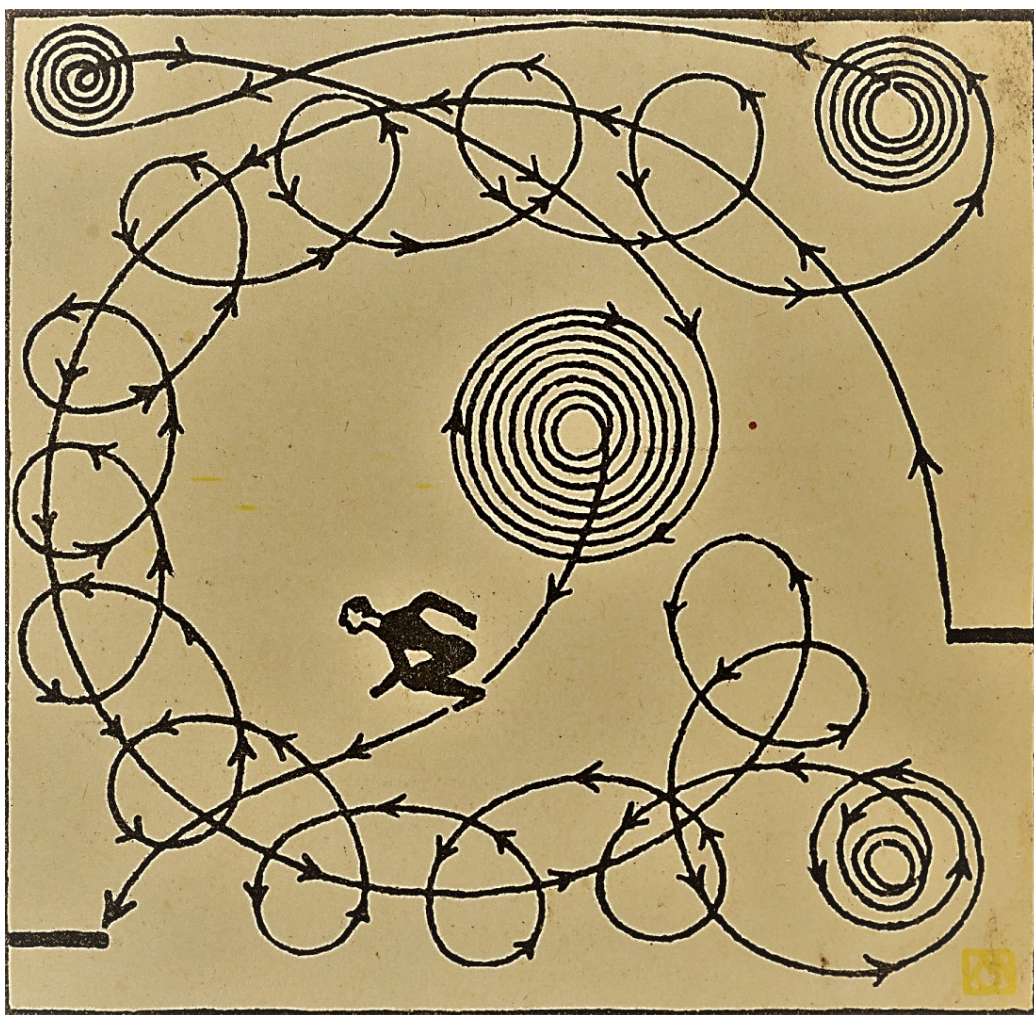
S každým novým dnem naše Slunce vychází a zapadá. Tento děj se rozhodně stal dnes a zítra snad také nastane. Pravidelnost tohoto děje jej činí předvídatelným a spolehlivým. Tuto pravidelnost nazýváme periodicitou a doba, po které nastane opakování tohoto děje, je zvaná jeho periodou. Náš svět je na různých místech protkán periodickými ději o rozdílné povaze. Mnoho periodických dějů lze najít v technických aplikacích např. kmitání lopatek parní turbíny, chod motoru, rotace vrtule letadla apod. A jsou to právě tyto aplikace, u kterých je periodicitu požadována. Tato práce se věnuje studiu periodických odezev mechanických systémů s nelinearitami. Uvažujeme tedy známé lineární mechanické systémy, do kterých jsme přidali nelinearity různého charakteru. Takto složené systémy jsou podrobené dynamické analýze pomocí vybraných numerických metod. Stěžejní metodou této práce je tzv. *metoda harmonické rovnováhy*, která uvažuje řešení nelineárního systému ve formě zkrácené Fourierovy řady. Dalšími používanými metodami jsou *metoda střelby* a *metoda numerické integrace počátečních úloh*. Výsledky získané pomocí výše zmíněných metod jsou mezi sebou porovnány, jsou zobrazené jak ve fázové rovinně, tak pomocí rekurentních zobrazení a je rozhodnuto o jejich stabilitě z hlediska periodicity. Spojením metody harmonické rovnováhy a kontinuity periodického řešení jsme schopni vytrasovat kompletní amplitudovou křivku, která pro nelineární systémy zahrnuje i větve řešení, které jsou nestabilní. Tímto způsobem tak můžeme posoudit celkový charakter odezev nelineárních systémů.

Klíčová slova: periodické řešení, metoda harmonické rovnováhy, Fourierova řada, metoda střelby, nelineární systémy, kmitání, kontinuity, rekurentní mapy, dynamické systémy.

ABSTRACT

With each new day our sun rises and sets. This event has definitely happened today and hopefully will happen tomorrow. The regularity of this event makes it predictable and reliable. This regularity is called periodicity, and the period of time over which the repetition of this event occurs is called its period. Our world is interwoven with periodic events of different nature in different places. Many periodic events can be found in engineering applications e.g. the oscillation of the blades of a steam turbine, the running of an engine, the rotation of the propeller of an aircraft etc. And it is these applications where periodicity is required. This paper is devoted to the study of periodic responses of mechanical systems with non-linearities. Thus, we consider well-known linear mechanical systems to which we have added non-linearities of different nature. Such composite systems are subjected to dynamical analysis using selected numerical methods. The central method of this work is the so-called *harmonic balance method*, which considers the solution of the non-linear system in the form of a truncated Fourier series. The other methods used are *shooting method* and *numerical integration method of initial value problems*. The results obtained by the above mentioned methods are compared with each other, they are represented both in the phase plane and by recurrent representations and their stability in terms of periodicity is decided. By combining the harmonic equilibrium method and the continuation of the periodic solution, we are able to obtain a complete amplitude curve, which for non-linear systems includes the branches of the solution that are unstable. In this way, we can assess the overall nature of the responses of the non-linear systems.

Keywords: periodic solutions, harmonic balance method, Fourier series, shooting method, vibration, non-linear system, continuation, recurrence plots, dynamical systems.



Umělecká představa možné trajektorie běžce při přeskoku propasti [34].

Obsah

Seznam použitých symbolů	8
1 Úvod	11
1.1 Historie dynamických systémů	12
1.2 Cíle práce	17
2 Teorie dynamických systémů	18
2.1 Dynamické systémy	18
2.1.1 Autonomní systémy	19
2.1.2 Neautonomní systémy	20
2.1.3 Převod do stavového prostoru	21
2.1.4 Periodická řešení dynamických systémů	22
2.1.5 Bifurkace spojitých systémů	23
2.1.6 Rekurentní zobrazení	28
2.2 Analýza stability	32
2.2.1 Floquetova teorie stability	32
3 Numerická analýza dynamických systémů	39
3.1 Numerická integrace pohybových rovnic	40
3.1.1 Eulerova metoda	41
3.1.2 Metody typu Runge-Kutta	44
3.2 Metoda střelby	48
3.3 Metoda harmonické rovnováhy	51
3.3.1 <i>Příklad</i> : Duffingův oscilátor	51
3.3.2 Teorie Fourierových řad	55
3.3.3 Odvození rovnic harmonické rovnováhy	62
3.3.4 Použití pro mechanické systémy	63
3.3.5 Rozvoj nelineárních sil	65

3.3.6	Kontinuace podél křivky	66
4	Periodické odezvy vybraných nelineárních systémů	70
4.1	Oscilátory s jedním stupněm volnosti	71
4.1.1	Duffingův oscilátor	72
4.1.2	Oscilátor s pružnou narážkou	77
4.1.3	Oscilátor se suchým třením	82
4.2	Nosníkové systémy	86
4.2.1	Klasická nosníková teorie (Euler-Bernoulli)	89
4.2.2	Variační formulace rovinného prvku typu nosník	92
4.2.3	Piezo patch	95
4.2.4	Nosník se suchým třením	98
4.2.5	Piezo nosník s kubickou nelinearitou	104
5	Závěr	111
	Literatura	113

Seznam použitých symbolů

t	čas [s]
T	perioda systému [s]
n	počet stupňů volnosti systému [-]
\mathbf{q}	vektor zobecněných výchylek
\mathbf{z}	vektor stavů systému
\mathbf{q}_0	vektor počátečních podmínek systému
η	počáteční podmínka systému
$\boldsymbol{\mu}$	vektor parametrů systému
\mathbf{f}	vektorové pole
\mathbf{S}	matice dynamické tuhosti
\mathbf{M}	konstantní matice hmotnosti
\mathbf{B}	konstantní matice proporcionálního tlumení
\mathbf{K}	konstantní matice tuhosti
α	koeficient proporcionálního tlumení [-]
m	hmotnost [kg]
b	viskózní tlumení [$\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$]
k	tuhost lineární pružiny [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$]
γ	koeficient Duffingovy nelinearity [-]
κ	tuhost pružné narážky [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$]
g	mezera mezi rámem a narážkou [m]
F_{thr}	maximální hodnota tření [N]
ϵ	regularizační parametr tanh [-]
P	amplituda buzení [m]
Ω	úhlová frekvence buzení [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$]
Ω_0	vlastní frekvence systému [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$]
Ω^s	počáteční úhlová frekvence buzení [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$]
Ω^e	konečná frekvence buzení [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$]

q_{kin}	předepsaná výchylka kinematického buzení [m]
\mathbf{e}_u	vektor přiřazení kinematického buzení
A	amplituda odevy systému [m]
\mathbf{I}	jednotková matice
I_{zz}	rovinný moment setrvačnosti k ose z [m ⁴]
I	libovolný interval
λ	koeficient růstu [-]
D_q	derivace vzhledem k q
\mathbf{f}_{nl}	vektor nelineárních sil
\mathbf{f}_{ex}	vektor budících sil
\mathbf{r}	reziduum systému
Φ	matice monodromie
\mathbf{Q}_0	periodické řešení v bodě μ_0
\mathbf{y}	vektor perturbace
\mathbf{A}	matice prvních parciálních derivací \mathbf{f}
\mathbf{Y}	matice fundamentálních řešení
h	délka integračního kroku [-]
Δs	délka kontinuačního kroku [-]
N	počet vzorků na periodu řešení [-]
\mathbf{O}^R	matice rekurentního zobrazení
\mathbf{O}^D	matice distančního zobrazení
Θ	Heavisideova funkce
ε	prahová vzdálenost [m]
i	imaginární jednotka
\mathbb{R}	obor reálných čísel
\otimes	Kroneckerův součin
\mathbf{q}_h	odhad řešení
\mathbf{X}	vektor neznámých rozšířený o volný parametr
\mathbf{h}_H	matice zkrácené Fourierovy řady
$\hat{\mathbf{h}}_H$	matice koeficientů zkrácené Fourierovy řady
∇	matice diferenciac
H	řád zkrácení Fourierovy řady [-]
f_H	zkrácená Fourierova řada
Γ	uzavřená trajektorie (orbita)
$\hat{\mathbf{f}}$	vektor Fourierových koeficientů
$\hat{\mathbf{q}}_c$	vektor F. koeficientů u kosínových členů
$\hat{\mathbf{q}}_s$	vektor F. koeficientů u sínových členů

σ	tenzor napětí
e	tenzor deformací
M	ohybový moment [N · m]
E	Youngův modul pružnosti v tahu [Pa]
ρ	hustota materiálu [kg · m ⁻³]
\mathbf{u}	vektor posuvů
u	posuv ve vodorovném směru [m]
v	posuv ve svislém směru [m]
\mathbf{F}	silový vektor
N_e	počet konečných prvků [-]
n_f	umístění nelineárního elementu [-]
n_p	umístění piezo patche [-]
S^E	poddajnost při konstantním elektrickém poli [-]
d_{31}	piezoelektrická konstanta [m · V ⁻¹]
E_z	elektrické pole [V · m ⁻¹]
D_z	náboj na jednotku plochy [Coulomb · m ⁻²]
ξ_{33}^σ	dielektrická konstanta při stálém napětí
\mathbf{D}	matice křivosti
\mathbf{N}	matice interpolačních funkcí
p	spojité zatížení [N/m]
U	vnitřní energie [J]
W	vnější energie [J]
$\hat{\square}$	označení koeficientů
$\bar{\square}$	označení komplexně sdružené proměnné
$\tilde{\square}$	označení navzorkované proměnné
\square_H	označení zkrácení na H členů F.ř.
\square^*	označení jednorozměrného případu

Kapitola 1

Úvod

Představte si, jak se planeta, na které se právě nacházíte, otáčí okolo své osy. Ta samá planeta pak cestuje po eliptické dráze okolo zdroje našeho denního světla, Slunce. Můžete si také představit, jak souběžně s těmito ději rotuje Měsíc okolo naší Země. Pokud jste při dobré náladě, můžete se též uvolnit, položit ruku na srdce a pozorovat jeho tlukot. To, co mají všechny tyto jevy společné, je, že se po určité době začnou znovu opakovat. Doba mezi jednotlivými opakováními jevu se nazývá **periodou** a tento jev je tak klasifikován jako **periodický**. Ať už jde o kmitání kyvadla, refrén v písni, lidskou chůzi, rotaci ručiček hodin či lopatek parní turbíny nebo o výše zmíněné děje, je naše denní zkušenost protkána **periodicitou**.

Předkládaná diplomová práce se zabývá studiem takovýchto jevů. Množinu všech systémů, které mohou vykazovat periodickou odezvu, omezíme na systémy mechanické. U těchto systémů nás v praxi často zajímá právě ustálená (periodická) odezva. Může se jednat např. o chod parní turbíny na určitých otáčkách, kmitání lopatek vrtule či odezvu nápravy automobilu na nerovnost vozovky.

V případě lineárních systémů existuje ucelená teorie [25], díky níž můžeme tyto systémy studovat. Taková teorie však pro studium nelineárních systémů není, a tak je často nutné analyzovat systémy jednoduše. Hlavním tématem této práce je zkoumání projevu určitého druhu nelinearity na periodické odezvě systému. K zodpovězení této otázky využíváme nástrojů z teorie dynamických systémů a numerické matematiky. V následující kapitole 2 je předložena potřebná teorie pro studium ustálené odezvy nelineárních mechanických systémů. Dále jsou představeny vybrané numerické metody vhodné pro jejich studium. Dominantou kapitoly 2 je *metoda harmonické rovnováhy*, která je hlavním nástrojem analýzy. Poslední část kapitoly 2 je věnována Floquetově teorii stability periodických řešení.

Samotnými nelineárními systémy se zabývá kapitola 4, kde je provedena jejich analýza z hlediska kvality odezvy a stability. Tato kapitola zkoumá vliv různých druhů nelinearit na známých mechanických systémech. Pro získané periodické odezvy jsou vypočteny a zobrazeny amplitudové charakteristiky, které jsou porovnány napříč metodami. Dále jsou výsledky zobrazeny ve fázové rovině a jsou vypočtena rekurentní zobrazení příslušných odezev. V kapitole 4 je též provedena diskuze nad výsledky obdržené změnou parametrů numerických metod.

V následující části uvedeme stručnou historii hledání periodických řešení dynamických systémů spolu s motivací ke studiu této problematiky a představíme cíle této diplomové práce.

1.1 Historie dynamických systémů

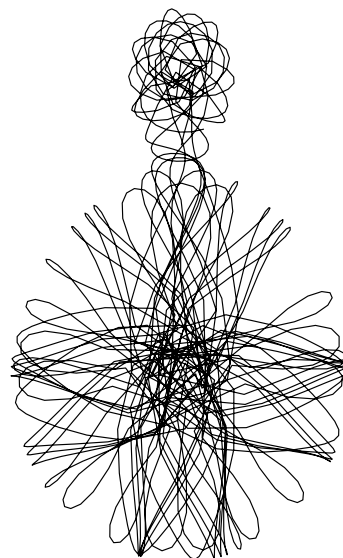
Vraťme se nyní zpět k tématice nebeské mechaniky. Uvažujme pohyb Měsíce kolem Země, kde gravitační síla Země udržuje Měsíc v orbitě. Můžeme předpokládat, že gravitační síla vzdálenějšího Slunce má na Měsíc také nějaký vliv. Toto dodatečné působení Slunce na Měsíc je asi půl procenta gravitační síly působící od Slunce na Zemi [20]. Takovýto přírůstek se může zdát zanedbatelný, ale představme si, co by se stalo, kdyby se tento půl procentní vliv nasčítával s každou nově započatou orbitou! Tento jev nazývá nebeská mechanika „sekulárním“ efektem, tedy takovým efektem který narůstá s časem. Pravdou je, že takový efekt se opravdu projevuje, protože rovina oběhu Měsíce se otočí jednou za osmnáct let [20]. Avšak staletí pozorování ukazují, že vzdálenost Měsíce od Země se nijak výrazně nevyvíjí, stejně jako se nevyvíjí excentricita jeho oběžné dráhy. Je zřejmé, že je třeba pochopit účinky těchto malých dodatečných sil známých jako *perturbace*. Bez jejich porozumění bychom nebyli schopni vysvětlit stabilitu sluneční soustavy po dobu miliard let, po které se na Zemi vyvíjel život.

Podívejme se nyní na systém Slunce-Jupiter-Saturn. Frekvence maxima atrakce Saturnu k Jupiteru ω_J je jednou za dvanáct let, zatímco frekvence oběhu Saturnu okolo Slunce ω_S je jednou za třicet let [20]. To se zdá být velmi vzdálené od rezonance, takže se není čeho obávat, že? Avšak výraz pro velikost gravitační síly působící mezi Jupiterem a Saturnem obsahuje výrazy jako $\frac{1}{|r_S - r_J|^2}$, což rozhodně není lineární výraz. To znamená, že pokud bychom pro obě planety předpokládali pohyby o frekvencích ω_S a ω_J jakožto první aproximaci, pak následující aproximace by dávala síly úměrné vyšším mocninám obou souřadnic. Můžeme se například setkat s výrazy jako $\cos^5(\omega_J t)$, $\cos^2(\omega_S t)$. Asi nás nepřekvapí, že zakladatelé nebeské mechaniky **Pierre-Simon Laplace** (1749 - 1827), **Joseph-**

Louis Lagrange (1736 - 1813) a další se museli obávat rezonancí vyšších řádů, tj. rozdílů mezi násobky frekvence pohybu různých planet, které se objevují ve jmenovatelných matematických výrazech. U těchto výrazů totiž hrozilo dělení nulou, které je značně nežádoucí.

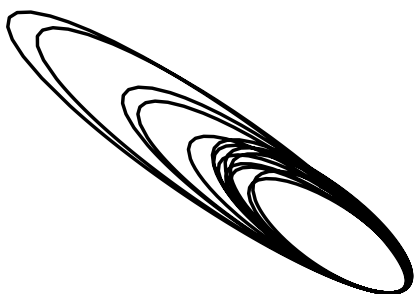
Situace v době, kdy **Henri Poincaré** (1854 - 1912) vstoupil na scénu, byla následující. Existoval propracovaný způsob pro výpočty poloh planet pro všechny časy, který byl reprezentován nekonečnou řadou, ale nebylo zaručeno, zda bude tato řada konvergovat vzhledem k přítomným rezonancím (viz výše zmíněné první a vyšší aproximace pohybu planet). Jednalo se tak o vynikající výzvu a za nejlepší řešení byla vyhlášena cena. Avšak ani Poincaréova práce neposkytla konečné řešení tohoto problému. Úroveň získaných poznatků byla však tak velká, že Švédská akademie neváhala a cenu Poincarému stejně udělila. Ten později shrnul své příspěvky do třísvazkového pojednání „*Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*“ (Nové metody nebeské mechaniky) [26]. Jedná se o velmi rozsáhlou práci, která má po přeložení asi tisíc stran. Proslýchá se, že Poincaré psal velmi rychle a nevěřil v opakované pilování svého přednesu, protože by tento čas raději využil k pracím na nových problémech. Tento svazek byl tak nabit novými myšlenkami, že ty pak ovlivnily obor na velmi dlouhou dobu.

Pozoruhodnou skutečností, kterou Poincaré objevil, bylo, že částice pohybující se ve dvou (nebo více) prostorových souřadnicích může mít pohyb mnohem složitější než nám známé planetární dráhy. Důvodem je, že i po návratu do stejného bodu v prostoru (tj. stejné hodnoty souřadnic x a y) může mít rychlost zcela jiný směr. Demonstrace složité trajektorie je zobrazena na Obr 1.1, kde byla provedena simulace trajektorie volného tělesa ve dvourozměrné verzi problému tří těles [20]. Poincaré nám říká, že bychom si měli položit opačnou otázku: čím to je, že v některých případech může být pohyb ve dvou prostorových rozměrech jednoduchý? Takovým příkladem je Newtonův zákon pro pohyb



Obrázek 1.1: Trajektorie malého objektu v rovinné úloze tří těles, který interaguje s velkou hmotou (Země dole) a malou hmotou (Měsíc nahoře).

planet. Pro inverzní kvadratickou sílu je orbitou prostá elipsa, jak je patrné ze simulace oběhu planety okolo Slunce na Obr. 1.2. Důvodem, proč jsou tyto orbity jednoduché, je, že síla působící směrem do středu je více omezována. Jedná se o zákon zachování momentu hybnosti neboli druhý Keplerův zákon („Obsahy ploch opsaných průvodičem planety (spojnice planety a Slunce) za stejný čas jsou stejně velké.“). Ten fixuje velikost tečné složky rychlosti v daném bodě. Jakmile je tečná složka pevně stanovena a známe velikost rychlosti, může poměrná složka nabývat pouze jedné ze dvou hodnot, tedy směřující dovnitř nebo ven.



Obrázek 1.2: Trajektorie malého objektu v rovinné úloze dvou těles (Slunce-planeta) popsané Keplerovy zákony.

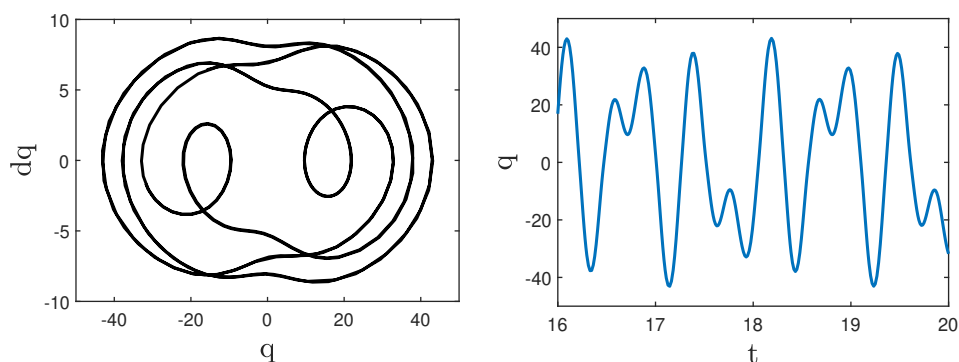
Aniž bychom uváděli podrobnosti o všech Poincaréových inovacích, můžeme na základě analogie uvést základní myšlenku jedné z nich. Inženýr často potřebuje studovat rychle se otáčející strojní zařízení. Jedním z používaných triků je osvětlit jej „stroboskopickým světlem“, lampou, která problikává s měnitelnou frekvencí. Nepřetržitý pohyb je nyní vidět jako série statických obrázků. Pokud se například frekvence záblesků shoduje s frekvencí otáčení kola, zdá se, že je v klidu, což je tak přesvědčivá iluze, že by člověk měl raději nechat ruce v kapsách. Zobecněním stroboskopického efektu je slavný „Poincaréův řez“. Jde o matematický trik (důmyslnější než stroboskop), který redukuje studium spojitěho pohybu na

studium „zobrazení“ v nižších rozměrech. Toto zobrazení je diskrétní transformace, která zobrazuje polohu a rychlost částice na její hodnoty polohy a rychlosti po uplynutí jedné periody.

S využitím vlastností zobrazení byl Poincaré schopen poskytnout kritérium pro nalezení periodických, tj. uzavřených orbit i pro tak komplikované systémy, jako je problém tří těles. Dále byl schopen sestavit mechanismus pro stanovení stability takovéto trajektorie. To znamená, že kdybychom vypustili částici s polohou a rychlostí velmi blízkou té, kterou má na periodické dráze, dospěla by v konečném čase do stejné periodické trajektorie. Když byla taková trajektorie nestabilní, dokázal ukázat, že pohyb začínající v její blízkosti může být velmi komplikovaný. Jeho vlastními slovy . . . „Člověka zarazí složitost tohoto obrázku, který se ani nebudu pokoušet nakreslit. Není nic vhodnějšího pro to, co by nám poskytlo představu o složité povaze problému tří těles a vůbec všech problémů dynamiky“. Po-

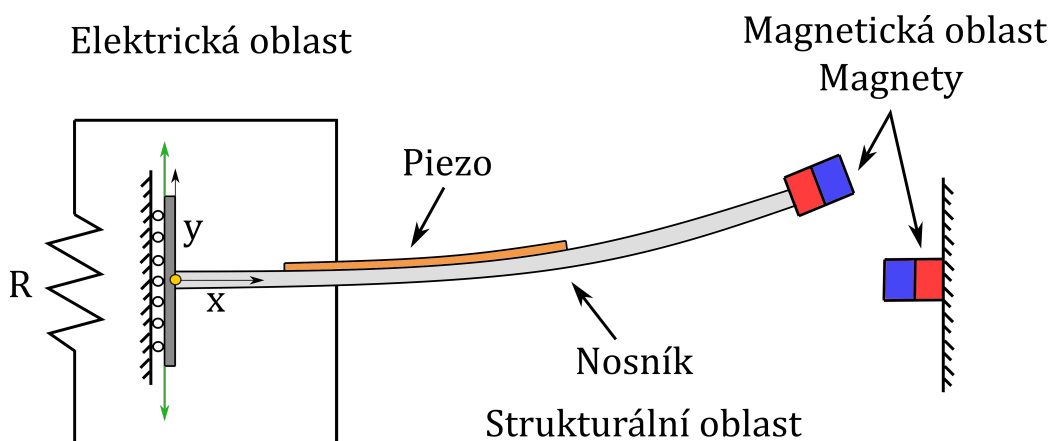
tenciál mnoha Poincaréových myšlenek využili až později Birkhoff, Kolmogorov, Arnold a další k vybudování moderního chápání nebeské mechaniky [21]. A jeho kvalitativní obraz pohybu se bohatě potvrdil, když byly k výpočtu oběžných drah použity výkonné počítače. Do dynamiky, která byla dříve považována čistě za studium diferenciálních rovnic, vnesl nové disciplíny geometrie, algebry, topologie atd. Vidět souvislosti mezi různými oblastmi matematiky bylo Poincaréovou velkou předností.

Vlastní motivace, která vedla k rozhodnutí se věnovat této tématice, vznikla při studiu dynamických projevů bistabilního magnetického kyvadla, které bylo buzeno předepsaným pohybem. Tato jednoduchá soustava (podrobně popsána v [9]) skrývala mnoho forem odezvy. Analýza její dynamiky odhalila pásma frekvencí buzení, kde soustava vykazovala řadu kvalitativně odlišných odezev od periodického pohybu, přes pohyb kvazi-periodický až k chaotickému pohybu. V pásmech periodické odezvy se v některých případech jednalo o jednoduché trajektorie ve fázové rovině (např. eliptická trajektorie). Avšak pro jiná pásma frekvencí bylo možné pozorovat mnohem komplikovanější trajektorii, která je např. zobrazena na Obr. 1.3, kde soustava kmitá okolo svých dvou rovnovážných poloh. Složitě dyna-



Obrázek 1.3: Zobrazení trajektorií bistabilního kyvadla se dvěma magnety [9] pro $\Omega = 15$ rad/s ve fázové rovině (vlevo) a v časové rovině (vpravo).

mické projevy jsou příbuzny mnoha nelineárním mechanickým systémům. Není tak překvapivé, že se pro tyto projevy našlo uplatnění. Jedná se například o vývoj a ladění tzv. *energy harvesting jednotek*. Tyto jednotky jsou navrženy za účelem sběru ztrátové energie ze strojů, které jsou v provozu. Princip těchto jednotek spočívá v tom, že energie potřebná k chodu spotřebičů, např. čidel, se generuje na tom stejném místě, kde se stroj vyskytuje. Není tak třeba přivádět energii z infrastruktury, čímž dojde k ušetření výdajů a zdrojů. Příkladem může být vybuzené kmitání



Obrázek 1.4: Schéma energy harvesteru založeného na vyvolání velkých deformací pomocí magnetické vazby.

železničního mostu, které způsobí projíždějící vlak [15]. Most je v tomto případě osazen energy harvesting jednotkami, které jsou při průjezdu vlaku vybudeny a během této události generují dostatečně energie k odečtu informace o životnosti mostu a poslání těchto dat do centrály. Takovéto systémy na správu životnosti důležitých infrastruktur jsou implementovány například v Číně a Irsku [16],[15]. Dalším příkladem mohou být technologie využívající pohyb lidského těla. Chytré hodinky lze, při správném návrhu energy harvesting jednotky, dobíjet pomocí přirozeného pohybu ruky při chůzi. Tím se tak prodlužuje životnost baterie a dochází k úspoře energie i zdrojů na nové baterie [18]. Pro čtenáře, kteří by se rádi dověděli více o energy harvesting, můžeme doporučit tuto literaturu [17], [18], [19].

1.2 Cíle práce

Tato diplomová práce by měla poskytovat:

- Shrnutí současného stavu řešené problematiky (základní metody pro hledání periodických řešení kmitavých soustav a zkoumání jejich stability).
- Teoretický popis a rozbor metody harmonické rovnováhy (HBM).
- Výpočtovou implementaci HBM pro modely diskrétních mechanických soustav s vybranými typy nelinearit.
- Aplikace
 - Vytvoření výpočtových modelů diskrétních mechanických soustav s vybranými typy nelinearit (např. kubická, nehladká).
 - Výpočtové hledání periodických řešení s využitím HBM.
 - Posouzení vlivu parametrů metody na konvergenci a přesnost nalezených řešení.

Kapitola 2

Teorie dynamických systémů

V této kapitole je představen teoretický základ potřebný pro studium periodických řešení dynamických systémů. Nejdříve jsou definovány vybrané části z teorie dynamických systémů a je ustanovena notace, která je dodržována napříč celou prací. Dále jsou definovány periodická řešení dynamických systémů a bifurkace těchto řešení, což jsou nespojitě kvalitativní změny řešení při spojitě změně parametrů systémů. Poslední část se věnuje analýze stability periodických řešení dynamických systémů na základě Floquetovy teorie stability.

2.1 Dynamické systémy

Dynamický systém bývá především reprezentován svým stavem, který se rozvíjí (mění) v čase t . Vývoj dynamického systému určují jak vstupy tak aktuální stav systému. U dynamických systémů se typicky ze stavu systému generuje výstup [14]. Důležitou charakteristikou dynamického systému je, zda je **spojitý** či **diskrétní**. Spojité systémy (často nazývané toky) jsou dány diferenciálními rovnicemi, zatímco diskrétní dynamické systémy (často nazývané zobrazení) jsou určeny diferenčními rovnicemi [8]. Vedle spojitosti systému je velmi důležitou vlastností autonomie dynamického systému. V případě **neautonomních** systémů je přítomna vstupní veličina, která je časově závislá. Zato **autonomní** systém tuto veličinu neobsahuje. V této práci se zaměříme na spojitě autonomní i neautonomní dynamické systémy, které jsou popsány obyčejnými diferenciálními rovnicemi a mají tzv. soustředěné parametry. Pokud budeme uvažovat systém se spojitě rozloženými parametry, který je popsán parciálními diferenciálními rovnicemi, bude tento systém prostorově diskretizován pomocí metody konečných prvků.

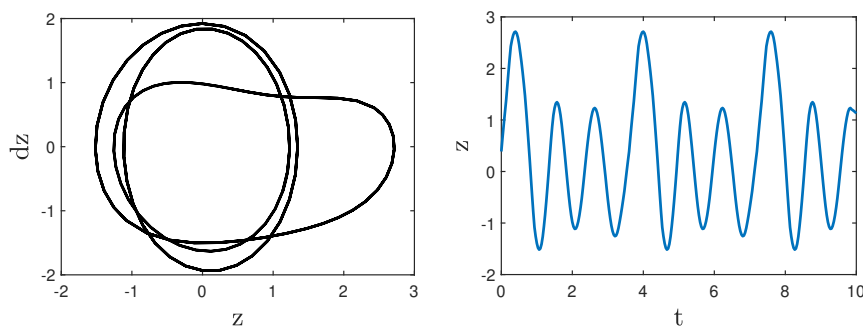
Pro analýzu dynamických systémů je důležité vědět, zda se jedná o lineární systém, či nikoliv. **Lineární** dynamické systémy se díky přítomné ucelené teorii [25] analyzují poměrně lépe než **nelineární** systémy, které mají obvykle složité dynamické projevy [8]. Častý případ, jak se vypořádat s nelinearitou dynamického systému, je ve vybraném bodě daný systém linearizovat. Tato práce linearizaci nezavádí a analýza odezvy nelineárních systémů je provedena pomocí vybraných metod, které jsou představeny níže.

2.1.1 Autonomní systémy

Autonomní systémy jsou popsány rovnicemi v následujícím tvaru

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}), \quad (2.1)$$

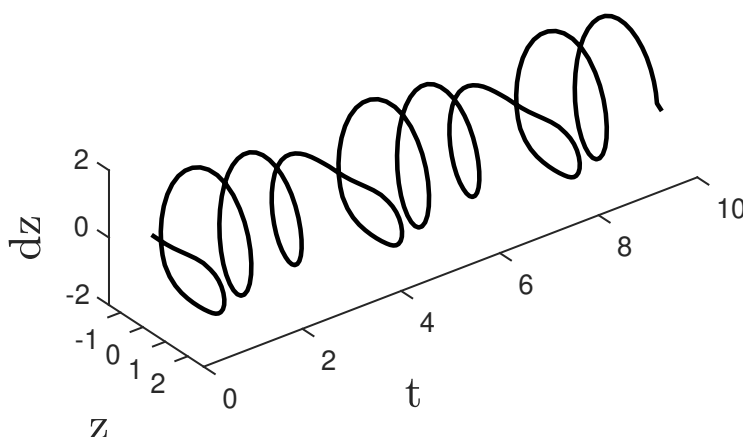
kde $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ je vektor stavů dynamického systému a $\boldsymbol{\mu}$ je vektor parametrů systému.



Obrázek 2.1: Zobrazení trajektorie Duffing-Mathieu systému ve fázové rovině (vlevo) a výchylky v závislosti na čase (vpravo).

Vektor \mathbf{f} je často nazýván **vektorovým polem**. Prostor \mathbb{R}^n , ve kterém se \mathbf{z} vyvíjí, se nazývá **stavovým prostorem**. Speciálním případem stavového prostoru je tzv. **fázový prostor**, který je definován tím, že polovinu prostoru tvoří stavy a druhou polovinu derivace oněch stavů. Je-li \mathbf{f} lineární funkcí \mathbf{z} , pak se nazývá **lineárním vektorovým polem**, a je-li \mathbf{f} nelineární funkcí \mathbf{z} , je pak nazývána **nelineárním vektorovým polem**. V tomto případě \mathbf{f} nezávisí explicitně na čase $t \in \mathbb{R}$. Proto je systém (2.1) **časově invariantní**, **časově nezávislý** nebo též **stacionární**. To znamená, že je-li $\mathbf{z}(t)$ řešením (2.1), pak $\mathbf{z}(t + \tau)$ je také řešením (2.1) pro libovolné t .

Nechť je počáteční stav systému v čase t_0 roven \mathbf{z}_0 . Obecně platí, že zobrazení řešení $\mathbf{z}(t, t_0, \mathbf{z}_0)$ rovnice (2.1) do n -rozměrného stavového prostoru se označuje



Obrázek 2.2: Zobrazení celkové trajektorie Duffing-Mathieu systému.

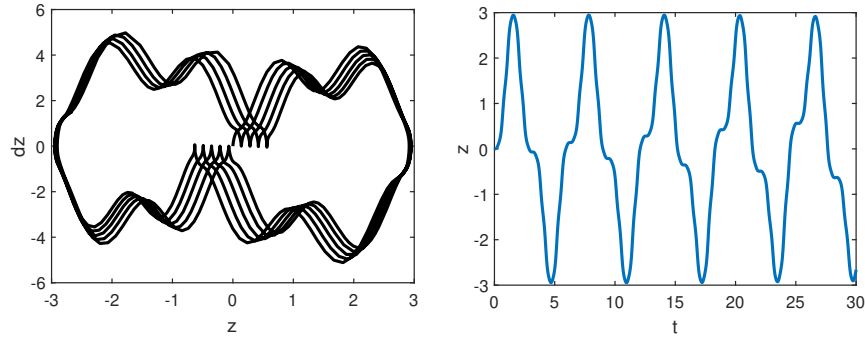
jako **trajektorie** nebo **orbita** soustavy skrz bod $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$. Jinými slovy, řešení si lze představit jako bod, který se pohybuje po trajektorii a v různých časech zaujímá různé polohy podobně jako planeta při pohybu prostorem. Na Obr. 2.1 a 2.2 je představeno periodické řešení autonomního Duffing-Mathieu systému [30]. Na Obr. 2.2 je zobrazeno řešení v třístavovém prostoru, kde je patrna celková trajektorie tohoto systému. Pokud se na tuto trajektorii podíváme v rovině $\widehat{dz} z$, získáme řešení ve fázovém prostoru viz Obr. 2.1 vlevo. Pohledem v rovině $\widehat{z} t$ získáme trajektorii v časové rovině viz Obr. 2.1 vpravo.

2.1.2 Neautonomní systémy

Neautonomní systémy jsou popsány rovnicemi v následujícím tvaru

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}), \quad (2.2)$$

kde \mathbf{z} , $\boldsymbol{\mu}$, \mathbf{f} mají stejný význam jako v autonomním případě a $t \in \mathbf{R}$ značí čas. V tomto případě \mathbf{f} explicitně závisí na čase t , tudíž je do systému vstupováno v různých časových okamžicích. Může se jednat o silové, kinematické či parametrické buzení systému. Silové buzení nastane, pokud je v systému přítomna časově proměnná síla působící v určitém bodě. Pokud se celý systém pohybuje předem předepsaným pohybem, mluvíme o buzení kinematickém. Při parametrickém buzení je nutné, aby systém obsahoval časově proměnný parametr, který je schopen systém vybudit. Příkladem parametrického buzení může být model matematického kyvadla s proměnnou délkou závěsu $l(t)$. Na Obr. 2.3 jsou znázorněny trajektorie onoho modelu, který je zároveň kinematicky buzen.



Obrázek 2.3: Zobrazení trajektorie kyvadla s proměnnou délkou závěsu ve fázové rovině (vlevo) a časové rovině (vpravo).

2.1.3 Převod do stavového prostoru

Při řešení systémů popsaných obyčejnými diferenciálními rovnicemi je často potřebné převést tyto systémy do tzv. *stavového prostoru*. Toho lze dosáhnout díky skutečnosti, že všechny obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů lze převést na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu [25]. Tento převod je zvláště důležitý při analýze dynamických systémů pomocí numerické integrace (viz Kapitola 3.1).

Mějme diferenciální rovnici n -tého řádu

$$q^{(n)}(t) = f(t, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \dots, q^{(n-1)}(t)), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

kde I značí libovolný interval. Stavový prostor zavedeme následující substitucí

$$z_1(t) := q(t), \quad z_2(t) := \dot{q}(t), \quad z_3(t) := \ddot{q}(t), \quad \dots, \quad z_n(t) := q^{(n-1)}(t), \quad t \in I. \quad (2.4)$$

Derivací (2.4) dostaneme soustavu

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{q} = z_2, \\ \dot{z}_2 = \ddot{q} = z_3, \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = q^{(n-1)} = z_n, \\ \dot{z}_n = q^{(n)} = f(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(n-1)}) = f(t, \mathbf{z}). \end{cases} \quad (2.5)$$

Máme-li počáteční úlohu pro diferenciální rovnici n -tého řádu (2.3), musíme za-

dat počáteční podmínku pro $n - 1$ prvních derivací, tj.

$$q^{(n)} = f(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(n-1)}), \quad t \in I, \quad \begin{cases} q(t_0) = q_{01}, \\ \dot{q}(t_0) = q_{02}, \\ \vdots \\ q^{(n)}(t_0) = q_{0n}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Výše zmíněným postupem lze počáteční úlohu (2.3) pro diferenciální rovnici n -tého řádu převést na počáteční úlohu pro systém n rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n, \\ \dot{z}_n = f(t, \mathbf{z}), \end{cases} \quad \begin{cases} z_1(t_0) = q_{01}, \\ z_2(t_0) = q_{02}, \\ \vdots \\ z_n(t_0) = q_{0n}, \end{cases} \quad (2.7)$$

což lze zapsat do vektorového tvaru

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (2.8)$$

kde $\mathbf{f}(t, \mathbf{z})$ je vektor stavů a \mathbf{z}_0 je vektorem počátečních podmínek.

2.1.4 Periodická řešení dynamických systémů

V této části jsou definována periodická řešení dynamických systémů, které jsou spojitě v čase. Periodická řešení jsou charakterizována časově proměnnými stavy. Řešení $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ spojitého systému v čase je **periodické** s periodou T pokud $\mathbf{z}(t + T) = \mathbf{z}(t)$ a $\mathbf{z}(t + \tau) \neq \mathbf{z}(t)$ pro $0 < \tau < T$. Periodické řešení lze také ekvivalentně reprezentovat jednou základní frekvencí Ω .

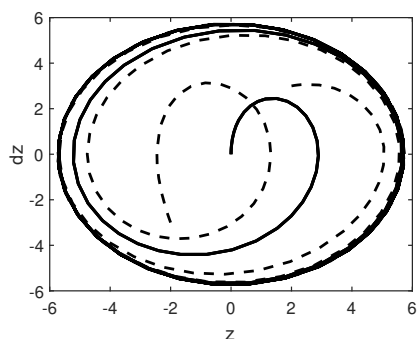
Autonomní systémy

Periodické řešení $\mathbf{z}(t)$ s nejmenší konečnou periodou $T > 0$ systému

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}), \quad (2.9)$$

odpovídá uzavřené trajektorii Γ v \mathbb{R}^n a je takové, že $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}(t_0 + T)$ a $\mathbf{z}(t_0 + \tau) \neq \mathbf{z}(t_0)$ pro $0 < \tau < T$. Zadáním počátečního času t_0 určíme místo $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$

na orbitě. Periodické řešení systému (2.9) lze považovat za pevný bod vhodně definovaného zobrazení zvaného **Poincaréovo zobrazení** [2]. Pokud se systém vrací v konečném čase při změně počátečních podmínek do jediného periodického řešení, hovoříme o tzv. **limitním cyklu** systému (2.9). Jinými slovy, limitní cyklus je izolované periodické řešení a odpovídá izolované uzavřené orbitě ve stavovém prostoru. Příklad limitního cyklu je zobrazen na Obr. 2.4, kde se jedná o trajektorie koncového bodu fyzikálního kyvadla, které je kinematicky buzeno.



Obrázek 2.4: Zobrazení tří trajektorií z různých počátečních podmínek koncového bodu fyzikálního kyvadla při kinematickém buzení s frekvencí buzení $\Omega = 1$ rad/s.

Neautonomní systémy

Periodické řešení $\mathbf{z}(t)$ s nejmenší konečnou periodou $T > 0$ n -rozměrného neautonomního systému

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}), \quad (2.10)$$

také popisuje uzavřenou trajektorii Γ v \mathbb{R}^n . Předpokládáme-li, že $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$ na této orbitě v čase $t = t_0$, pak z periodicity řešení vyplývá, že $\mathbf{z}(t_0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}(t_0 + T, \mathbf{z}_0)$.

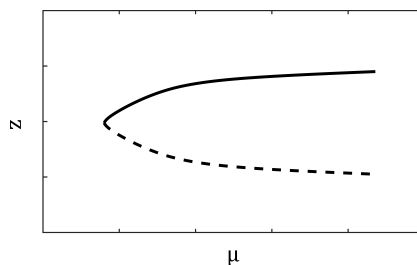
2.1.5 Bifurkace spojitých systémů

Bifurkace řešení vznikají při spojitě změně odpovídajících řídicích parametrů $\boldsymbol{\mu}$ tak, že při přechodu tzv. **bifurkačního bodu** $[\mathbf{z}_c, \boldsymbol{\mu}_c]$ v rozšířeném stavovém prostoru dojde ke kvalitativní změně řešení. Systém se v okolí bifurkačního bodu projevuje nestabilně.

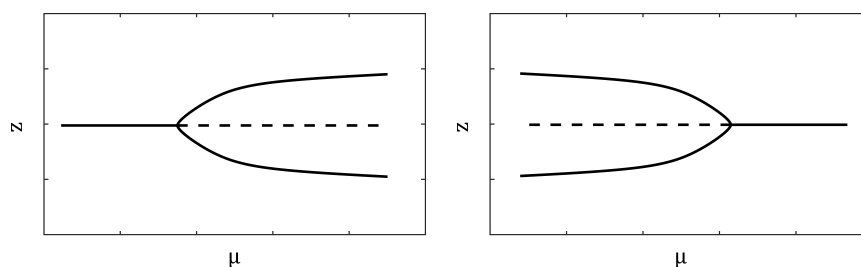
Lokální bifurkace lze klasifikovat jako statické (sedlo uzlová bifurkace, vidličková bifurkace, transkritická bifurkace) a dynamické (Hopfova bifurkace). Bifurkace jsou zaznamenány především pomocí změn stacionárních stavů a znázorňují

se v tzv. **bifurkačním diagramu**. Chování systému v okolí *sedlo-uzlové* bifurkace je znázorněno na Obr. 2.5. Počátek odpovídá statickému bifurkačnímu bodu, ze kterého vychází stabilní a nestabilní větev řešení, jež mají v bifurkačním bodě stejnou směrnici tečny.

Bifurkace znázorněná na Obr. 2.6 se nazývá *vidličková bifurkace*, protože v bifurkačním bodě vznikají netriviální řešení geometricky podobné vidlím. Pokud nebude uvedeno jinak, stabilní větev řešení bude zobrazena plnou čarou a nestabilní větev nespojitou čarou. Bifurkace na Obr. 2.6 (vlevo) představuje *superkritickou vidličkovou bifurkaci* a na Obr. 2.6 (vpravo) je znázorněna *subkritická bifurkace*. V případě superkritické vidličkové bifurkace existuje lokálně větev stabilních řešení na jedné straně bifurkačního bodu a dvě stabilní větve stabilních řešení a jedna větev nestabilních řešení na druhé straně bifurkačního bodu. V případě subkritické vidličkové bifurkace je situace opačná. V tomto případě pak všechny větve řešení nemají v bifurkačním bodě stejnou směrnici tečny. *Transkritická bi-*

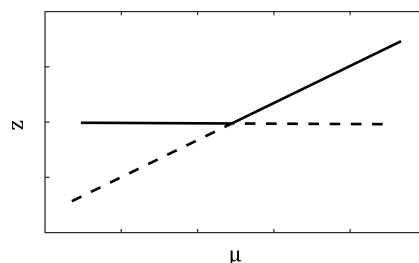


Obrázek 2.5: Znázornění statické sedlo-uzlové bifurkace



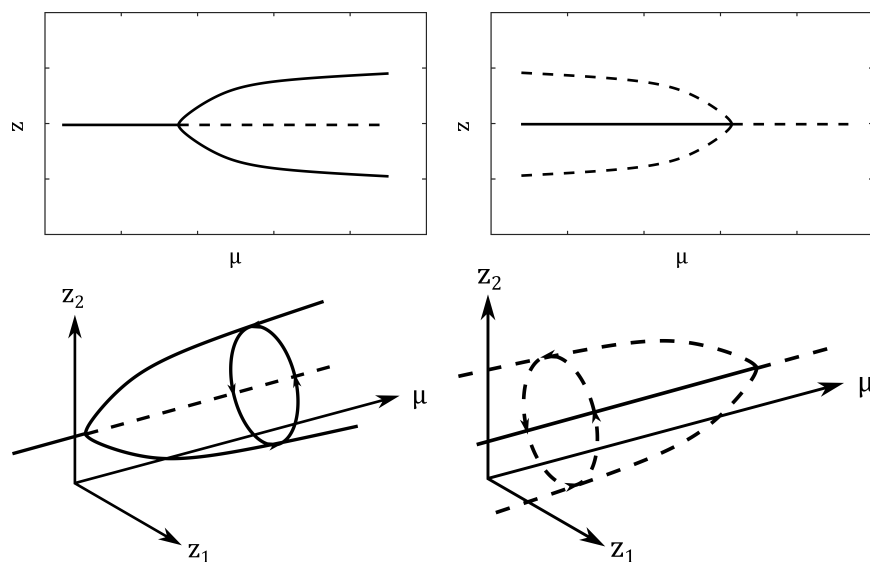
Obrázek 2.6: Znázornění superkritické vidličkové bifurkace (vlevo) a subkritické vidličkové bifurkace (vpravo).

furkace je charakteristická tím, že existuje triviální a netriviální větev řešení a v bifurkačním bodě dojde k záměně stability mezi těmito řešeními. *Hopfova bifurkace* provází vznik či zánik limitního cyklu z limitního bodu. Ilustrace superkritického



Obrázek 2.7: Znázornění transkritické bifurkace.

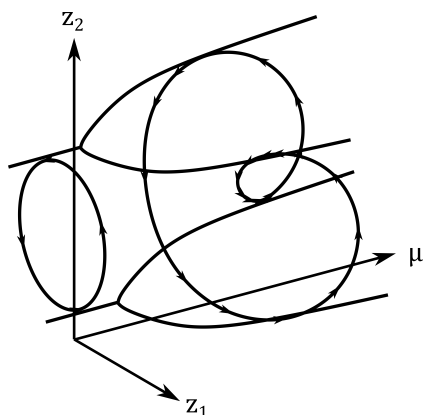
(vlevo) a subkritického (vpravo) typu Hopfovy bifurkace je uvedené na Obr. 2.8. Výskyt Hopfovy bifurkace lze najít například u vzpěru ideálního prutu. Máme-li podélně tuhý prut zatížený osovým periodickým zatížením, pak při nízké hodnotě zatížení bude stacionárním stavem limitní bod odpovídající přímému tvaru prutu. Dosáhne-li zatížení určité vyšší hladiny (odpovídající kritické síle), pak již přímý tvar nebude stabilní a dojde ke zrodu limitního cyklu, který odpovídá podkritickému kmitání prutu. Případně ji lze najít v chování hydrodynamických ložisek [6]. Dále jsou uvedeny některé případy bifurkací, které se vyskytují, existují-li perio-



Obrázek 2.8: Znázornění Hopfovy bifurkace ve dvojrozměrném fázovém prostoru – zrodu limitního cyklu z rovnovážného bodu v závislosti na parametru systému.

dická řešení. *Bifurkace zdvojením periody*, jak již název napovídá, způsobí zdvojení periody limitní množiny. Původní množina se náhle rozštěpí (limitní cyklus

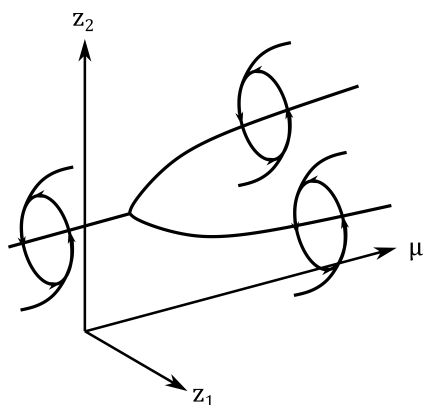
na Obr. 2.9), přičemž rozštěpené části trajektorie se od sebe rychle lokálně vzdálí. Systému, v němž existuje periodické řešení a v němž existuje superkritická a vi-



Obrázek 2.9: Znázornění bifurkace zdvojením periody v rozšířeném stavovém prostoru.

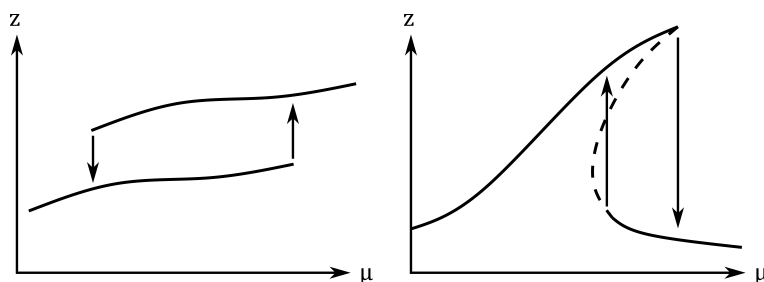
dličková bifurkace, odpovídá chování v okolí bifurkačního bodu uvedené na Obr. 2.10. Dojde-li u dynamického systému k této bifurkaci, pak řešení přejde do jedné ze dvou stabilních větví po překročení bifurkačního bodu. I tento typ bifurkace lze demonstrovat na příkladu vzpěru prutu.

Mějme ideální prut zatížený ve vzpěru v čase neproměnnou silou. Necht' je na prutu také jiné např. harmonické zatížení působící příčně (dochází k ohybu prutu). Situace na Obr. 2.10 pak může odpovídat dosažení kritické hodnoty vzpěrné síly (v čase neproměnná). Bude-li prut vzhledem k vzpěrné síle v podkritickém stavu, pak se ustálí do jediného limitního cyklu. Překročí-li tato síla kritickou hodnotu, pak dojde k vybočení prutu s tím, že prut může nadále kmitat na jedné či na druhé straně (rovinný případ) vlivem stále působícího dostatečně malého příčného harmonického zatížení. Limitní množiny dynamických systémů mohou vznikat či zanikat při změnách parametrů. Příčiny a průběh těchto změn mohou být různé. To, co je spojuje, bývá dramatický nástup a průběh takového děje. Dostává-li se systém k takovému bodu, ztrácí svou stabilitu. Vznik či zánik limitní množiny je často doprovázen *hysterézní smyčkou*. Jde o situaci, kdy v systému existují pro jisté hodnoty řídicího parametru zároveň dvě limitní množiny. Při zvyšování hodnoty parametru systému je možné zmapovat přechod první množiny na druhou a naopak snižováním parametru zmapujeme přechod druhé množiny na první. Jelikož pro určitý interval řídicího parametru existují obě množiny zároveň, dostáváme *hysterézní smyčku*. Na Obr. 2.11 (vlevo) ukazuje obecný scénář hystereze při přechodu mezi dvěma limitními množinami. Na témže obrázku vpravo je zná-



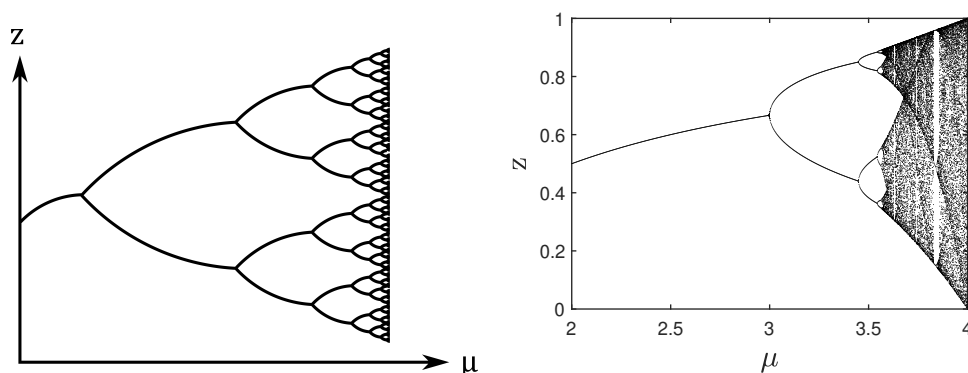
Obrázek 2.10: Znázornění superkritické bifurkace ve dvojrozměrném fázovém prostoru.

zorněn tvar hysterézní smyčky, který je typickým například pro tlumený oscilátor s progresivní tuhnoucí charakteristikou (např. Duffingův oscilátor, viz kapitola 4.1.1). *Kaskáda bifurkací* reprezentuje jednu z možností přechodu periodického



Obrázek 2.11: Znázornění hysterese při přechodech mezi dvěma limitními množinami

řešení nelineárního systému do chaotického stavu. Lze ji popsat jako posloupnost bifurkací jednoduché limitní množiny při změně parametru systému, jak je schématicky uvedeno na Obr. 2.12 (vlevo). V zahraniční literatuře [31] je tento děj označován jako vývoj systému zdvojnásobím period. Limitní množina opakovanou bifurkací zdvojnásobuje svoji periodu a může přejít v kvaziperiodickou limitní množinu a posléze v chaotický atraktor. Navíc pro celou třídu nelineárních systémů, v jejichž chování se objevuje dvojení periody popřípadě kaskáda bifurkací, se ukazuje, že délka intervalu mezi po sobě jdoucími bifurkačními body kaskády bifurkací tvoří konvergující posloupnost. Podíl délek dvou následujících intervalů je roven Feigenbaumovu číslu, které má přibližně hodnotu $\delta \approx 4.66292$. Na Obr. 2.12 (vpravo) je možné vidět zobrazení vývoje stabilních řešení iterační



Obrázek 2.12: Kaskáda bifurkací (vlevo) a průběh populace logistické rovnice v závislosti na koeficientu růstu (vpravo)

populační rovnice

$$z_{k+1} = \lambda z_k (z_k - 1) \quad (2.11)$$

v závislosti na koeficientu růstu λ , který je řídicím parametrem systému. Jedná se o diskretní systém, na který lze nahlížet jako na rovnici, která popisuje reprodukci určité populace.

2.1.6 Rekuretní zobrazení

Jedná se o zobrazovací techniku z oblasti nelineární analýzy dat. *Rekuretní zobrazení* (RZ) je vizualizace čtvercové matice, v níž prvky matice odpovídají časům, ve kterých se stav dynamického systému opakuje (sloupce a řádky pak odpovídají dvojicím časů). Technicky řečeno, RZ odhaluje všechny časy, kdy trajektorie dynamického systému ve fázovém prostoru navštíví přibližně stejnou oblast.

Rekurence je přírodním i technickým procesům blízká. Tato rekurence stavů ve smyslu, že stavy se po určité době libovolně přibližují, je základní vlastností deterministických dynamických systémů a je typická pro nelineární nebo chaotické systémy. Eckmann a další [27] představili nástroj, který dokáže vizualizovat rekurenci stavů q_i i ve fázovém prostoru. Vyjma dvourozměrného fázového prostoru nelze obecně stavový prostor zobrazit. Stavové prostory vyšších rozměrů lze vizualizovat pouze projekcí do dvourozměrných nebo třírozměrných podprostorů. Eckmannův nástroj nám však umožňuje zkoumat trajektorii n -rozměrného stavového prostoru prostřednictvím dvourozměrného zobrazení jeho rekurencí. Taková rekurence stavu v čase i v jiném čase j je vyznačena v rámci dvourozměrné čtvercové matice s jedničkami a nulami (běžně jsou jedničky značené černými body

a nuly bílými). Toto rekurentní zobrazení lze matematicky vyjádřit takto

$$\mathbf{O}_{i,j}^R = \Theta(\varepsilon_i - \|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j\|), \quad \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^n, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2.12)$$

kde N je počet uvažovaných stavů \mathbf{z}_i , ε_i je prahová hodnota a Θ je Heavisideova funkce, která je definována následovně

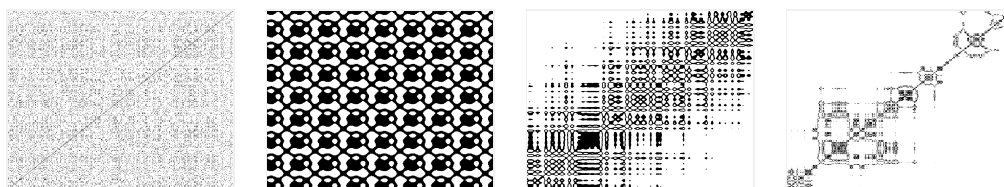
$$\Theta(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Rekurence je definována tím, že vzdálenost mezi dvěma stavy i a j (body na trajektorii) je menší než prahová hodnota ε . Jedná se tedy o párový test mezi každým stavem s každým dalším stavem (N^2 testů, pokud máme N stavů).

RZ vykazují charakteristické velkoplošné a maloplošné vzory. První vzory označili Eckmann a další [27] jako **typologii** a druhé jako **texturu**. Typologie nabízí globální dojem, který lze charakterizovat jako *homogenní*, *periodický*, *drift* a *narušený* [28].

- *Homogenní RZ* jsou typické pro stacionární a autonomní systémy, v nichž jsou relaxační časy krátké v porovnání s časem trvání RZ. Příkladem takového RZ je náhodná časová řada.
- *Periodické systémy* mají RZ s diagonálně orientovanými periodickými rekurentními strukturami (diagonální linie, šachovnicové struktury). U kvaziperiodických systémů jsou vzdálenosti mezi diagonálními liniemi různé. Nicméně i pro ty kmitavé systémy, jejichž kmitání nejsou snadno rozpoznatelné, lze RM použít k nalezení jejich kmitů.
- *Drift* je způsoben systémy s pomalu se měnícími parametry. Takováto pomalá změna rozjasňuje levý horní a pravý dolní roh RZ. Například chaotický systém s přičteným lineárním posuvem.
- *Narušené RZ* jsou produktem náhlé změny v dynamice a extrémní události, které způsobují bílé oblasti nebo pásy v RZ. Pomocí RZ tak lze najít a vyhodnotit extrémní a vzácné události díky frekvenci jejich opakování.

Na Obr. 2.13 jsou zobrazena vypočtená charakteristická rekurentní zobrazení vybraných systémů. První RZ zleva vzniklo ze signálu náhodně generovaného bílého šumu. Druhé RZ bylo vypočteno pro superpozici tří harmonických signálů o různých amplitudách a frekvencích. Třetí RZ přísluší chaotické odezvě bistabilního



Obrázek 2.13: Charakteristická typologie rekurenčních map z leva do prava: *homogenní* (Bílý šum), *periodická* (superpozice harmonických funkcí), *drift* (chaotický systém s lineárním posuvem) a *narušená* (Brownův šum).

magnetického kyvadla [9], ke které byla přičtena kladná lineární funkce o stejném trvání. Poslední RZ vzniklo ze signálu náhodně generovaného hnědého (Brownova) šumu.

Při bližším zkoumání RZ jsou patrné struktury malého měřítka (textura), které jsou tvořeny jednotlivými body, diagonálními čarami a svislými a vodorovnými čarami (kombinace svislých a vodorovných čar zřejmě vytváří pravouhlé shluky rekurenčních bodů). Díky stále se rozrůstajícímu se týmu vědců, kteří se zabývají RZ, byly určité struktury malého měřítka klasifikovány následně [28]

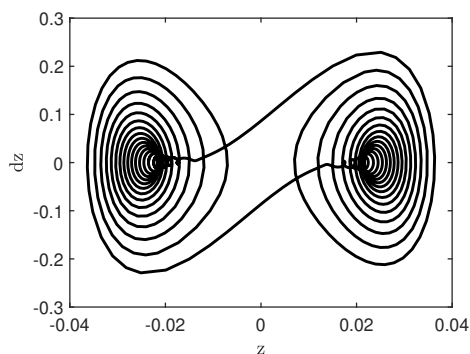
- **Homogenita** - proces je zjevně stacionární.
- **Blednutí v levém horním a pravém dolním rohu** - nestacionarita, proces obsahuje trend nebo drift.
- **Vyskytují se poruchy (bílé pruhy)** - nestacionarita, některé stavy jsou vzácné nebo vzdálené od normality, mohlo dojít k přechodům.
- **Periodické/kvazi-periodické vzory** - cykličnost procesu, časová vzdálenost mezi periodickými obrazci (např. čarami) odpovídá periodě, dlouhé diagonální čáry s různou vzájemnou vzdáleností prozrazují kvaziperiodický proces.
- **Jednotlivé izolované body** - silná fluktuace procesu, pokud se vyskytují pouze jednotlivé izolované body, může jít o nekorelovaný náhodný nebo dokonce antikorelovaný proces.
- **Diagonální čáry (rovnoběžné s úhlopříčkou čtvercového obrazce)** - vývoj stavů je v různých časech obdobný, proces může být deterministický, pokud se tyto diagonální čáry vyskytují vedle jednotlivých izolovaných bodů, může být proces chaotický (pokud jsou tyto diagonální čáry periodické, lze získat nestabilní periodické dráhy).

- **Diagonální čáry (kolmé na úhlopříčce čtvercového obrazce)** - vývoj stavů je v různých časech obdobný, ale s obráceným časem, někdy je to známkou nedostatečného zakotvení.
- **Svislé a vodorovné čáry/skupiny** - některé stavy se po určitou dobu nemění nebo se mění pomalu; indikace pro laminární stavy.
- **Dlouhé obloukové liniové struktury** - vývoj stavů je v různých epochách podobný, ale s různou rychlostí, dynamika systému se může měnit.

Odebráním Heavisideovy funkce z (2.12) lze získat tzv. *Distanční zobrazení* (DZ), které má tvar

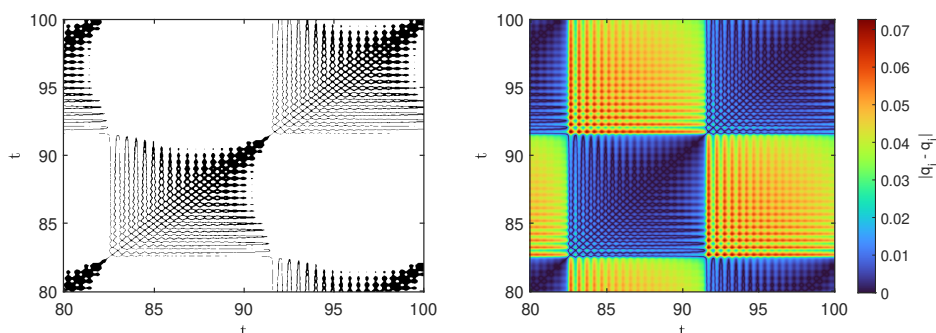
$$O_{i,j}^D = \|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j\|, \quad \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^n, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2.14)$$

kde ostatní členy rovnice (2.14) si ponechávají stejný význam jako v (2.12). Pomocí DZ získáme plnou škálu vzdáleností jednotlivých stavů. Na Obr. 2.14 je



Obrázek 2.14: Zobrazení trajektorie modifikovaného von Misesova vzpěradla [9] ve fázové rovině pro $\Omega = 0.35$ rad/s.

zobrazena trajektorie modifikovaného von Misesova vzpěradla [9] po odříznutí přechodové části ve fázové rovině. K získání rekurentního zobrazení na Obr. 2.15 vlevo, byla vypočtena odezva systému v časové oblasti, ze které jsme pomocí rovnice (2.12) vytvořili RZ s prahovou hodnotou $\varepsilon = 0.002$. Pro vytvoření DZ systému viz Obr. 2.15 vpravo byl použit vztah (2.14). V případě této odezvy dochází k takzvaným „výbušným“ oscilacím [29], které jsou periodické a příslušné DZ a RZ mají šachovnicový tvar s vnořeným vzorem.



Obrázek 2.15: Rekurentní (vlevo) a distanční (vpravo) zobrazení pro modifikované von Misesovo vzpěradlo [9] pro $\Omega = 0.35$ rad/s.

2.2 Analýza stability

Při analýze dynamických systémů nás často vedle samotné dynamické odezvy získaného řešení zajímá i stabilita daného řešení. Stabilitou periodického řešení rozumíme, jak již bylo předesíláno v úvodní části, zda při započetí orbity z blízkého okolí původního počátečního bodu (perturbace počáteční podmínky) ve fázové rovině dospěje řešení v konečném čase k tomu samému limitnímu cyklu. Pokud se tak stane, je limitní cyklus považován za **stabilní**. To, jestli je dané řešení stabilní má velmi důležitý význam, jelikož pouze stabilní řešení je fyzikálně realizovatelné. V následující části je představena jedna ze základních teorií zabývajících se stabilitou periodických řešení, a to Floquetova teorie stability.

2.2.1 Floquetova teorie stability

Autonomní systémy

Budeme se zabývat stabilitou periodického řešení autonomního systému

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}), \quad (2.15)$$

kde \mathbf{z} a $\boldsymbol{\mu}$ mají stejný význam jako v předchozích případech. Periodické řešení rovnice (2.15) v bodě $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ s minimální periodou T označíme jako $\mathbf{Z}_0(t)$. Poté je perturbace \mathbf{y} přenesena na \mathbf{Z}_0 což ústí v

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}_0(t) + \mathbf{y}(t). \quad (2.16)$$

Dosadíme-li rovnici (2.16) do (2.15) s předpokladem, že je f alespoň dvakrát spojitě diferencovatelná (tj. $C^2(\mathbb{R})$), a výsledek rozvineme v Taylorovu řadu v bodě \mathbf{Z}_0 se zachováním pouze lineárních členů u perturbace, dostaneme rovnici

$$\dot{\mathbf{y}} = D_q \mathbf{f}(\mathbf{Z}_0, \boldsymbol{\mu}_0) \mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^2) \text{ nebo } \dot{\mathbf{y}} \simeq \mathbf{A}(t, \boldsymbol{\mu}_0) \mathbf{y}, \quad (2.17)$$

kde \mathbf{A} je maticí prvních parciálních derivací f . Analýza stability je lokální, jelikož jsme provedli linearizaci systému (2.15). Matice \mathbf{A} je periodická v čase a má periodu T , což je perioda řešení $\mathbf{Z}_0(t)$. Floquetova teorie se zabývá lineárními systémy vzhledem perturbaci \mathbf{y} s periodickými koeficienty.

Lineární systém (2.17), který je n -rozměrný má n lineárně nezávislých řešení \mathbf{y}_i , kde $i = 1, 2, \dots, n$. Tato řešení se nazývají **fundamentální množinou řešení**. Tuto množinu lze přepsat do formy $n \times n$ matice zvané **fundamentální maticí řešení**

$$\mathbf{Y}(t) = [\mathbf{y}_1(t) \ \mathbf{y}_2(t) \ \cdots \ \mathbf{y}_n(t)]. \quad (2.18)$$

Je zřejmé, že \mathbf{Y} splňuje maticovou rovnici

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}(t, \boldsymbol{\mu}_0) \mathbf{Y}. \quad (2.19)$$

Záměnou závislé proměnné v rovnici (2.19) z t na $\tau = t + T$, získáme

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\tau} = \mathbf{A}(\tau - T, \boldsymbol{\mu}_0) \mathbf{Y} = \mathbf{A}(\tau, \boldsymbol{\mu}_0) \mathbf{Y}, \quad (2.20)$$

na základě skutečnosti, že $\mathbf{A}(\tau - T, \boldsymbol{\mu}_0) = \mathbf{A}(\tau, \boldsymbol{\mu}_0)$. Pokud je

$$\mathbf{Y}(t) = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_n], \quad (2.21)$$

fundamentální maticí řešení, tak

$$\mathbf{Y}(t + T) = [\mathbf{y}_1(t + T) \ \mathbf{y}_2(t + T) \ \cdots \ \mathbf{y}_n(t + T)] \quad (2.22)$$

je též fundamentální maticí řešení. Jelikož (2.17) má nejvýše n lineárně nezávislých řešení a protože $\mathbf{y}_i(t)$ jsou ony n lineárně nezávislé řešení, $\mathbf{y}_i(t + T)$ musí být lineární kombinací $\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_n$. Což je

$$\mathbf{Y}(t + T) = \mathbf{Y}(t) \boldsymbol{\Phi}, \quad (2.23)$$

kde $\boldsymbol{\Phi}$ je konstantní maticí o rozměru $n \times n$. Tato matice závisí na zvolené fundamentální maticí řešení a není tedy jednoznačná. Matice $\boldsymbol{\Phi}$ může být chápána jako

projekce nebo transformace, která promítá počáteční vektor v \mathbb{R}^n v bodě $t = 0$ na další vektor v \mathbb{R}^n v bodě $t = T$. Volbou počáteční podmínky

$$\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}, \quad (2.24)$$

kde \mathbf{I} je $n \times n$ rozměrná jednotková matice, a položením $t = 0$ v rovnici (2.23) získáme

$$\Phi = \mathbf{Y}(T). \quad (2.25)$$

Matice Φ určená rovnicemi (2.23) - (2.25) je takzvaná **matice monodromie**.

Zavedeme transformaci $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{V}(t)\mathbf{P}^{-1}$, kde \mathbf{P} je konstantní nesesingulární $n \times n$ rozměrná matice. Rovnici (2.25) lze pak přepsat do tvaru

$$\mathbf{V}(t + T) = \mathbf{V}\mathbf{J}, \quad (2.26)$$

kde

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\Phi\mathbf{P}. \quad (2.27)$$

Matice \mathbf{P} je volena takovým způsobem, aby \mathbf{J} nabyla nejjednodušší možné formy. Tato forma ovšem závisí na vlastních číslech a vektorech matice Φ .

Pokud jsou vlastní čísla p_m matice monodromie odlišné, lze utvořit matici \mathbf{P} takovým způsobem, že její řádky $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ jsou pravými vlastními vektory matice Φ odpovídající vlatním číslům p_1, p_2, \dots, p_n . Což je

$$\Phi\mathbf{p}_m = p_m\mathbf{p}_m. \quad (2.28)$$

Proto

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]. \quad (2.29)$$

S touto volbou přejde matice \mathbf{J} v tvar

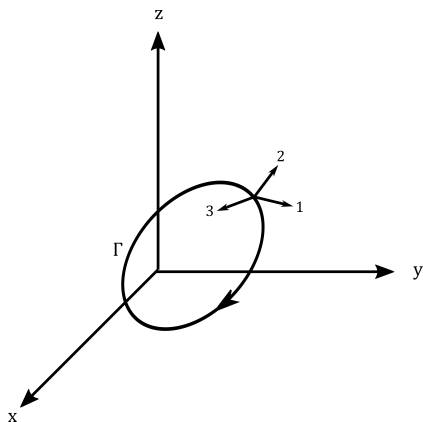
$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{P}^{-1}\Phi\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\Phi[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] \\ &= \mathbf{P}^{-1}[\Phi\mathbf{p}_1, \Phi\mathbf{p}_2, \dots, \Phi\mathbf{p}_n] \\ &= \mathbf{P}^{-1}[p_1\mathbf{p}_1, p_2\mathbf{p}_2, \dots, p_n\mathbf{p}_n] = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

kde matice \mathbf{D} má tvar

$$\begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & p_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & p_n \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Je třeba poznamenat, že pokud je p_m komplexní číslo, poté je p_m též komplexní. Pokud nejsou vlastní čísla matice Φ odlišná, je třeba sestavit matici \mathbf{P} v rovnici (2.29) pomocí zobecněných vlastních vektorů matice Φ . Odpovídající matice \mathbf{J} pak může být buď diagonální, nebo nediagonální s mimodiagonálními prvky o hodnotě rovné jedné.

Vlastní čísla p_m matice Φ jsou nazývána **Floquetovými** nebo též **charakteristickými multiplikátory**. Existuje jednoznačná množina charakteristických multiplikátorů spojených s maticí \mathbf{A} v rovnici (2.17). Každé vlastní číslo p_m vyjadřuje míru **lokální orbitální divergence** nebo **konvergence** v příslušném směru přes jednu periodu uzavřené orbity rovnice (2.15). K vizualizaci tohoto tvrzení na Obr. 2.16 budeme uvažovat uzavřenou orbitu Γ tří rozměrného autonomního systému. Tři zobrazené směry označené 1, 2 a 3 přísluší třem Floquetovým mul-



Obrázek 2.16: Uzavřená orbita Γ tří rozměrného autonomního systému. V bodě na Γ jsou tři směry značeny jako 1, 2 a 3.

tiplikátorům p_1 , p_2 a p_3 v tomto pořadí. Charakteristický multiplikátor p_j ve směru j vyjadřuje lokální konvergenci či divergenci blízkých orbit vzhledem k orbitě Γ .

Pokud jsou Floquetovy multiplikátory různé, rovnici (2.26) lze přepsat do složkového tvaru

$$v_m(t + T) = p_m v_m(t) \text{ pro } m = 1, 2, \dots, n. \quad (2.32)$$

Z této rovnice dále vyplývá, že

$$v_m(t + NT) = p_m^N v_m(t), \quad (2.33)$$

kde N značí celé číslo. Poté když $t \rightarrow \infty$ (tj. $N \rightarrow \infty$),

$$\begin{aligned} v_m(t) &\rightarrow 0 \text{ pokud } \|p_m\| < 1, \\ v_m(t) &\rightarrow \infty \text{ pokud } \|p_m\| > 1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Pokud je $p_m = 1$, $v_m(t)$ je periodické s periodou T a pokud je $p_m = -1$, $v_m(t)$ má periodu rovnou $2T$. Příklad, kde nejsou Floquetovy multiplikátory odlišné, je popsán v [2].

Je důležité poznamenat, že **jeden z Floquetových multiplikátorů příslušející periodickému řešení $\mathbf{Z}_0(t)$ autonomního systému např. rovnici (2.15) je vždy jednotkový**. Toto tvrzení lze dokázat následovně. Jelikož je (2.15) autonomní, tak pokud je $\mathbf{z}(t)$ řešením, tak i $\mathbf{z}(t + \tau)$ pro libovolné τ je řešením. Poté jestliže $\mathbf{Z}_0(t)$ je periodické řešení, pak $\mathbf{Z}_0(t + \tau)$ je též periodickým řešením. Necht' je

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Z}_0(t + \tau) - \mathbf{Z}_0(t). \quad (2.35)$$

Poté dovodíme, že

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{Z}_0(\tau) - \mathbf{Z}_0(0) \quad (2.36)$$

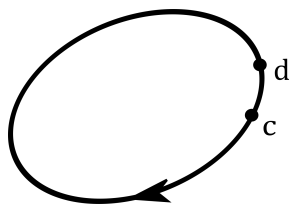
je počáteční perturbace podél orbity periodického řešení $\mathbf{Z}_0(t)$. Z rovnice (2.35) pak dále plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t + NT) &= \mathbf{Z}_0(t + NT + \tau) - \mathbf{Z}_0(t + NT) \\ &= \mathbf{Z}_0(t + \tau) - \mathbf{Z}_0(t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Tudíž,

$$\mathbf{y}(t + NT) = \mathbf{y}(t). \quad (2.38)$$

Proto pro libovolné celé číslo N je Floquetův multiplikátor příslušející této perturbaci jednotkový, a tedy perturbace podél tečného směru k periodické orbitě neroste ani nezaniká. Na Obr. 2.17 zobrazujeme rovinnou projekci orbity periodického řešení $\mathbf{Z}_0(t)$ z (2.15) a dva body $c = \mathbf{Z}_0(0)$ a $d = \mathbf{Z}_0(\tau)$ na této orbitě. Kvůli periodicitě $\mathbf{Z}_0(t)$ se z počátečních bodů c a d opět vrátíme do bodů c a d za čas NT pro libovolné celé číslo N . V důsledku toho vzdálenost mezi těmito body zůstává neměnná po libovolných N period oscilací. Periodické řešení rovnice (2.15) je **hyperbolicky periodickým řešením**, pokud pouze jeden Floquetův multiplikátor je umístěn na jednotkové kružnici v komplexní rovině. Hyperbolické periodické řešení je buď **stabilní**, nebo **nestabilní**. Z rovnice (2.33) vyvozujeme, že hyperbolické periodické řešení je **asymptoticky stabilní**, jestliže nejsou žádné Floquetovy multiplikátory mimo jednotkovou kružnici. Ve všech směrech, které nejsou



Obrázek 2.17: Rovinná projekce uzavřené orbity n -rozměrného autonomního systému. Dva blízké body na orbitě jsou označeny c a d .

tečné k asymptoticky stabilní orbitě, jsou sousední orbity přitahovány k periodické orbitě. Proto se toto řešení nazývá **stabilní limitní cyklus** nebo **periodický atraktor**. Hyperbolické periodické řešení je **nestabilní**, jestliže jeden nebo více Floquetových multiplikátorů leží mimo jednotkovou kružnici. V tomto případě, pokud všechny Floquetovy multiplikátory (vyjma jednotkového) leží mimo jednotkovou kružnici, pak všechny sousední trajektorie periodického řešení jsou od něj odpuzovány v kladných časech. Proto je toto řešení nazýváno **nestabilní limitní cyklus** nebo **periodický repelent**. Když některé z Floquetových multiplikátorů, spojených s nestabilním hyperbolickým řešením, leží uvnitř jednotkové kružnice, pak se periodické řešení nazývá **nestabilní limitní cyklus sedlového typu**.

Pokud dva nebo více Floquetových multiplikátorů leží na jednotkové kružnici, periodické řešení se poté nazývá **nehyperbolické periodické řešení**. Nehyperbolické periodické řešení je nestabilní, jestliže jeden nebo více Floquetových multiplikátorů leží mimo jednotkovou kružnici. Pokud žádný z Floquetových multiplikátorů neleží mimo jednotkovou kružnici, je nutné učinit nelineární analýzu pro určení stability nehyperbolického periodického řešení. Při nelineární analýze je třeba zachovat členy vyššího řádu v (2.17).

Neautonomní systémy

Budeme se zabývat stabilitou periodického řešení neautonomního systému

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}), \quad (2.39)$$

kde $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ a \mathbf{f} je periodická funkce. Stejným způsobem jako u autonomních systémů je periodické řešení rovnice (2.39) v bodě $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ značeno $\mathbf{Z}_0(t)$ a má periodu T . Tato perioda souvisí s periodou \mathbf{f} . Poté je perturbace $\mathbf{y}(t)$ přenesena na \mathbf{Z}_0 a získáme

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}_0(t) + \mathbf{y}(t). \quad (2.40)$$

Dosadíme-li rovnici (2.40) do (2.39) s předpokladem, že je f dostatečně hladká (tj. \mathbb{C}^2) a f rozvineme v Taylorovu řadu v bodě \mathbf{Z}_0 se zachováním pouze lineárních členů u perturbace, dostaneme rovnici

$$\dot{\mathbf{y}} = D_q f(t, \mathbf{Z}_0, \boldsymbol{\mu}_0) \mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^2) \text{ nebo } \dot{\mathbf{y}} \simeq \mathbf{A}(t, \boldsymbol{\mu}_0) \mathbf{y}, \quad (2.41)$$

kde \mathbf{A} je matice prvních parciálních derivací f . Tato matice je periodická v čase s periodou T . V souladu s dříve popsaným postupem použijeme Floquetovu teorii pro řešení (2.41) a určíme matici monodromie spojenou s periodickým řešením (2.39).

Vlastní čísla matice monodromie pak poskytují informaci o stabilitě periodického řešení. Na rozdíl od autonomního případu, pro který je jeden z Floquetových multiplikátorů vždy roven jedné, v neautonomním případě taková podmínka splněna není. Pokud žádný z Floquetových multiplikátorů neleží na jednotkové kružnici, nazývá se periodické řešení **hyperbolické**. V opačném případě se nazývá **nehyperbolické**. Jestliže všech n Floquetových multiplikátorů leží uvnitř jednotkové kružnice, pak je příslušné řešení **asymptoticky stabilní** a nazývá se **stabilní limitní cyklus** nebo **periodický atraktor**. Pokud je alespoň jeden z Floquetových multiplikátorů mimo jednotkový kruh, je příslušné řešení **nestabilní**. Pokud jsou všechny Floquetovy multiplikátory mimo jednotkový kruh, nazývá se periodické řešení **repelent**. Pokud jsou některé (ale ne všechny) Floquetovy multiplikátory mimo jednotkovou kružnici, je periodické řešení **sedlového typu**. Pokud žádný z Floquetových multiplikátorů spojených s nehyperbolickým řešením (2.39) neleží mimo jednotkovou kružnici, je k určení stability nutná nelineární analýza.

Kapitola 3

Numerická analýza dynamických systémů

V této kapitole budou představeny numerické metody, které jsou vhodné pro hledání periodických odezev dynamických systémů popsaných soustavou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{f}_{ext}(t), \quad (3.1)$$

kde \mathbf{M} , \mathbf{B} , $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou konstantní matice hmotnosti, tlumení a tuhosti v tomto pořadí, n je počet stupňů volnosti, \mathbf{q} je vektor zobecněných výchylek a \mathbf{f}_{nl} spolu s \mathbf{f}_{ex} jsou zobecněné nelineární a budící síly. Rovnice (3.1) vyjadřuje dynamickou rovnováhu lineárních a nelineárních sil na levé straně a budících sil na pravé straně. Systémy popsané rovnicí (3.1) lze převážně najít v oblasti dynamiky rotorových soustav. Jedná se tak o matematické modely hřídelů, poddajných nosníků, disků, ozubených kol, lopatek parních turbín apod.

Reziduum $r(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ rovnice (3.1) je pak

$$r(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}_{in} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{f}_{ext}(t) = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

První část je věnována velmi rozšířené metodě k analýze dynamických systémů, *numerické integraci počátečních úloh*. Jedná se o nejobecnější a nejrozšířenější metodu, kterou lze použít pro numerickou analýzu obecných řešení libovolného dynamického systému. Metoda numerické integrace vyžaduje, aby byl řešený model převeden do stavového prostoru. Převedením rovnice (3.1) do stavového prostoru přejde tato rovnice v následovný tvar

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}_{ext}(t) - \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}). \quad (3.3)$$

Reziduum $r(t, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ rovnice (3.3) je pak

$$r(t, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Dále je představena *metoda střelby*, která převádí okrajové úlohy na úlohy počáteční a jejím speciálním případem je hledání periodických řešení. Poslední část se zabývá *metodou harmonické rovnováhy*, která je výhradně navržena pro hledání periodických řešení spojitých dynamických systémů a tvoří základní nástroj této práce ke zkoumání nelineárních systémů. Zmíněné metody lze tak rozdělit následovně

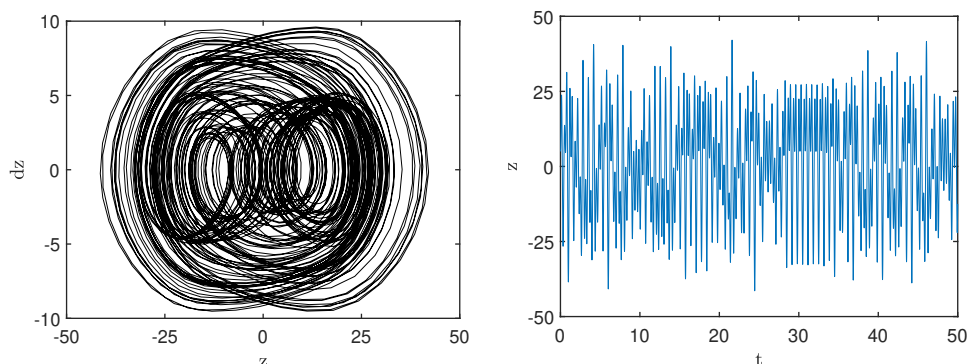
- Numerické integraci počátečních úloh - Obecná analýza (přechodové, periodické, kvazi-periodické, chaotické řešení).
- Metoda střelby - Analýza okrajových úloh, speciálně periodická řešení.
- Metoda harmonické rovnováhy - Výhradně pro analýzu periodických řešení.

3.1 Numerická integrace pohybových rovnic

Značná množina obyčejných diferenciálních rovnic popisující spojitě dynamické systémy nemá jednoduchou strukturu. Dospět tak k přesnému analytickému řešení těchto rovnic, které mají často původ v praktických úlohách, je buď značně komplikované nebo neuskutečnitelné. Jelikož nás řešení mnoha takových rovnic zajímá, ať už praktických či výzkumných důvodů, je nutné hledat řešení přibližné. Oblast numerické matematiky poskytuje velmi robustní nástroj pro získání přibližných řešení komplikovaných systémů zvaný *numerická integrace počátečních úloh*.

Uvažujme fyzikální kyvadlo, které má na svém konci upevněn permanentní magnet a je zasazeno do rámu, kterému byl předepsán harmonický pohyb ve vodorovné rovině. Do rámu jsou též zasazeny dva další magnety, se kterými konec kyvadla s magnetem interaguje po obvodu své dráhy. Matematický model tohoto systému je vyjádřen jedinou nelineární obyčejnou diferenciální rovnicí [9]. Dynamická odezva takového systému byla získána právě využitím numerické integrace příslušné pohybové rovnice. Na Obr. 3.1 je zobrazeno řešení ve fázové (vlevo) a časové (vpravo) rovině, pro zvolenou frekvenci buzení Ω . V tomto případě vykazuje systém chaotickou odezvu. Tato odezva má značně náhodilý charakter, který nelze postihnout standartními analytickými metodami. Numerická

3.1. NUMERICKÁ INTEGRACE POHYBOVÝCH ROVNIC



Obrázek 3.1: Zobrazení trajektorií bistabilního kyvadla se třemi magnety [9] pro $\Omega = 14$ rad/s ve fázové rovině (vlevo) a v časové rovině (vpravo).

integrace počátečních úloh je tak velmi užitečný nástroj pro studium přechodových či chaotických odezev. Tato práce se však zaměřena na hledání periodických odezev nelineárních dynamických systémů. A tak je zde na numerickou integraci nahlíženo jako na verifikační nástroj pro ostatní metody, díky její vysoké robustnosti, nebo jako na metodu pomocnou, jak bude uvedeno v kapitole 3.2. V této části je představena *Eulerova metoda*, jelikož jsou na ní dobře názorné principy, na kterých jsou založeny i numericky robustnější metody. Poté jsou představeny metody typu *Runge-Kutta*, které bývají velmi často implementovány v komerčních softwarech. Právě na základě Runge-Kutta metod jsou získány zobrazované výsledky v kapitole 4.

3.1.1 Eulerova metoda

Nejjednodušší numerickou metodou pro řešení počátečních úloh je *Eulerova metoda*. Důvodem jejího představení v této práci je, že obsahuje mnoho principů, které jsou pak dále uplatněny v numerických schématech dalších, robustnějších a numericky přesnějších metod.

Uvažujme počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici s příslušnou počáteční podmínkou ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= f(t, Z(t)), \quad t_0 \leq t \leq b \\ Z(t_0) &= Z_0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde $Z(t)$ je přesné řešení počáteční úlohy. Numerické metody pro řešení rovnice

3.1. NUMERICKÁ INTEGRACE POHYBOVÝCH ROVNIC

(3.5) hledají přibližné řešení $z(t)$ v diskrétních bodech

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq b. \quad (3.6)$$

Pro jednoduchost budeme zde uvažovat ekvidistantní body

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (3.7)$$

Zavedeme následující notaci, přibližné řešení bude značeno $z(t)$ a

$$z(t_n) = z_n, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (3.8)$$

K získání přibližného řešení $z(t)$ v bodech $z \langle t_0, b \rangle$ jiných než v (3.6) je třeba užití interpolačních metod. Zde tento problém nebude uvažován. Pokud by čtenáře zajímalo jak by se v takovém případě postupovalo můžeme doporučit tuto literaturu [13].

Definice Eulerovy metody

K odvození Eulerovy metody vyjděme z následující aproximace derivace [10]

$$\dot{Z}(t) \approx \frac{1}{h} [Z(t+h) - Z(t)]. \quad (3.9)$$

Ta se nazývá *dopřednou diferencí*. Pokud ji použijeme v počáteční úloze rovnice (3.5) pro čas $t = t_n$

$$\dot{Z}(t_n) = f(t_n, Z(t_n)), \quad (3.10)$$

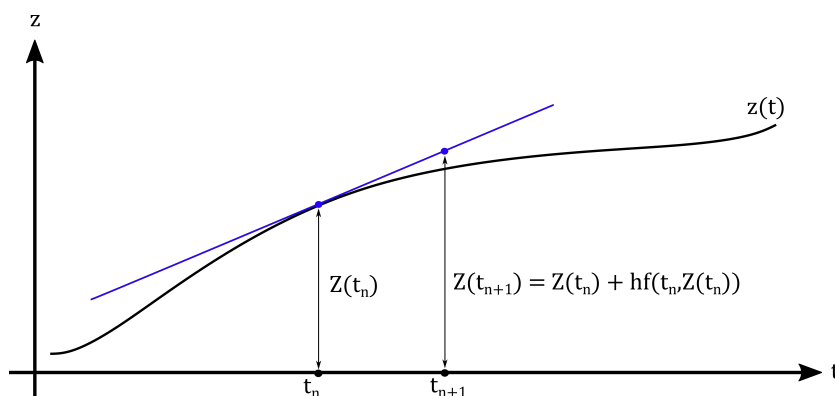
získáme

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [Z(t_{n+1}) - Z(t_n)] &\approx f(t_n, Z(t_n)) \\ Z(t_{n+1}) &\approx Z(t_n) + hf(t_n, Z(t_n)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Eulerovu metoda je pak definována

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (3.12)$$

Pro počáteční odhad použijeme $z_0 = Z_0$ nebo blízkou aproximaci Z_0 . Rovnice (3.12) určuje výpočet posloupnosti z_1, z_2, \dots, z_n v tomto pořadí. Toto je typické pro většinu numerických metod pro počáteční úlohy.



Obrázek 3.2: Grafické znázornění Eulerovy metody.

Eulerovu metodu je možné znázornit geometricky, jak je patrné na Obr. 3.2. Modrá přímka je tečna k funkci $y = z(t)$ v bodě t_n a má směrnici

$$\dot{Z}(t_n) = f(t_n, Z(t_n)). \quad (3.13)$$

Touto tečnou tak aproximujeme křivku okolo bodu $(t_n, Z(t_n))$ a hodnota směrnice tečny v bodě t_{n+1} je pak daná vztahem (3.12). Eulerova metoda je tak metodou prvního řádu vzhledem k uvažovanému řádu aproximace (3.9). Zároveň se jedná o jedno krokovou metodu, která vypočítává následující bod pouze ze směrnice tečny přechozího bodu. K zaručení konvergence této metody je třeba velmi jemný krok [10], proto se v praxi častěji využívá k časové než k prostorové diskretizaci. Ilustrace numerické přesnosti této metody na vhodných příkladech lze najít v [10].

Eulerova metoda pro soustavy rovnic

Jak již bylo představeno v kapitole 2.1.3, všechny obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů lze převést na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

Počáteční úloha pro soustavu m diferenciálních rovnic má následovný obecný tvar

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1(t) &= f_1(t, Z_1(t), z_2(t), \dots, Z_m(t)), & Z_1(t_0) &= Z_{1,0}, \\ \dot{Z}_2(t) &= f_2(t, Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_m(t)), & Z_2(t_0) &= Z_{2,0}, \\ &\vdots & & \\ \dot{Z}_m(t) &= f_m(t, Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_m(t)), & Z_m(t_0) &= Z_{m,0}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.1. NUMERICKÁ INTEGRACE POHYBOVÝCH ROVNIC

Hledanými funkcemi jsou $Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_m(t)$ na libovolném intervalu $t_0 \leq t \leq b$. Pro snazší počítačovou implementaci je vhodné převést soustavu rovnic (3.14) do vektorového tvaru

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_0 = \begin{bmatrix} Z_{1,0} \\ Z_{2,0} \\ \vdots \\ Z_{m,0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} f_1(t, Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \\ f_2(t, Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \\ \vdots \\ f_m(t, Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

kde $\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_m]^T$. Poté lze soustavu rovnic (3.14) přepsat do tvaru

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{Z}(t)), \quad \mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{Z}_0. \quad (3.16)$$

Rovnice (3.16) je tak ve stejném tvaru jako počáteční úloha (3.5), pro kterou jsme odvodili Eulerovu metodu a platí pro ni všechny kroky ve vektorovém smyslu.

3.1.2 Metody typu Runge-Kutta

U Eulerovy metody jsme hledali aproximace $Z(t_{n+1})$ ve tvaru

$$Z(t_{n+1}) \approx Z(t_n) + h\dot{Z}(t_n), \quad (3.17)$$

což lze chápat jako první dva členy Taylorova rozvoje dané funkce v bodě t_n . Pokud bychom chtěli Eulerovu metodu zpřesnit, je přirozené uvažovat Taylorovy aproximace vyšších řádů. Tato úvaha vede k vzniku rodiny metod, které se nazývají *Taylorovy metody* v závislosti na řádu použité Taylorovy aproximace, více zde [10].

Pro odvození Taylorovy metody potřebujeme derivace vyšších řádů přesného řešení a jejich získání může být velmi časově náročné. Abychom se vyhnuli nutnosti počítat derivace vyšších řádů, je možné použít metody typu *Runge-Kutta*. Ty vyhodnocují $f(t, z)$ ve více bodech, přičemž se snaží zachovat přesnost Taylorovy aproximace. Takovéto metody se poměrně snadno implementují a patří tak k nejvíce rozšířeným metodám řešení počátečních úloh. Zde odvodíme Runge-Kutta metody druhého řádu. Samozřejmě jde odvodit i metody vyšších řádů, ale pro ty odkážeme do podrobnější literatury [10].

Runge-Kutta metody mají obecný tvar

$$z_{n+1} = z_n + hF(t_n, z_n; h), \quad n \geq 0, \quad z_0 = Z_0. \quad (3.18)$$

3.1. NUMERICKÁ INTEGRACE POHYBOVÝCH ROVNIC

Člen $F(t_n, z_n; h)$ je možné chápat jako „průměrný sklon“ řešení na intervalu $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$. Pro metody druhého tak řádu obecně volíme

$$F(t, z; h) = b_1 f(t, z) + b_2 f(t, z) + b_2 f(t + \alpha h, z + \beta h f(t, z)). \quad (3.19)$$

Konstanty α, β, b_1, b_2 určíme tím, že dosadíme přesné řešení $Z(t)$ do (3.18), a tak bude chyba krácení Taylorovy řady

$$T_{n+1}(Z) = Z(t_{n+1}) - [Z(t_n) + hF(t_n, Z(t_n); h)] \quad (3.20)$$

vyhovovat

$$T_{n+1}(Z) = \mathcal{O}(h^3), \quad (3.21)$$

jako by bylo v případě Taylorovy metody pro druhý řád [10].

K nalezení rovnic pro určení konstant uijeme Taylorův rozvoj pro výpočet chyby krácení $T_{n+1}(Z)$. Člen $f(t + \alpha h, z + \beta h f(t, z))$ nejdříve rozvineme s ohledem na druhý argument okolo z . Poznamenejme, že potřebujeme zbytek $\mathcal{O}(h^2)$

$$f(t + \alpha h, z + \beta h f(t, z)) = f(t + \alpha h, z) + f_z(t + \alpha h, z) \beta h f(t, z) + \mathcal{O}(h^2). \quad (3.22)$$

Poté tyto členy rozvineme vzhledem k proměnné t a získáme tak

$$f(t, z) + b_2 f(t + \alpha h, z + \beta h f(t, z)) = f + f_t \alpha h + f_z \beta h f + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.23)$$

kde jsou všechny funkce vyhodnocené v bodě (t, z) . Dále platí

$$\ddot{Z} = f_t + f_z f. \quad (3.24)$$

Tudíž

$$\begin{aligned} Z(t+h) &= Z + h\dot{Z} + \frac{h^2}{2}\ddot{Z} + \mathcal{O}(h^3) \\ &= Z + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_z f) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (3.25)$$

A tedy

$$\begin{aligned} T_{n+1}(Z) &= Z(t+h) - [Z(t) + hF(t, Z(t); h)] \\ &= Z + hf + \frac{1}{2}h^2(f_t + f_z f) \\ &\quad - [Z + hb_1 f + b_2 h(f + \alpha h f_t + \beta h f_z f)] + \mathcal{O}(h^3) \\ &= h(1 - b_1 - b_2)f + \frac{1}{2}h^2[(1 - 2b_2\alpha)f_t + (1 - 2b_2\beta)f_z f] + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.1. NUMERICKÁ INTEGRACE POHYBOVÝCH ROVNIC

Požadavek definovaný v (3.21) implikuje, že koeficienty musí vyhovovat soustavě

$$\begin{cases} 1 - b_1 - b_2 = 0, \\ 1 - 2b_2\alpha = 0, \\ 1 - 2b_2\beta = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Poté

$$b \neq 0, \quad b_1 = 1 - b_2, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2b_2}. \quad (3.28)$$

Tím získáme celou rodinu Runge-Kutta metod druhého řádu, která závisí na volbě b_2 . Koeficient b_2 je často volen jako $b_2 = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ nebo 1.

Pokud zvolíme $b = \frac{1}{2}$ získáme tzv. *Heunovu metodu*, jež má tvar

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}[f(t_n, z_n) + f(t_n + h, z_n + hf(t_n, z_n))], \quad n \geq 0. \quad (3.29)$$

Číslo $z_n + hf(t_n, z_n)$ je Eulerovým řešením v bodě t_{n+1} . Pokud toto použijeme, dostaneme aproximaci derivace v bodě t_{n+1} ve tvaru

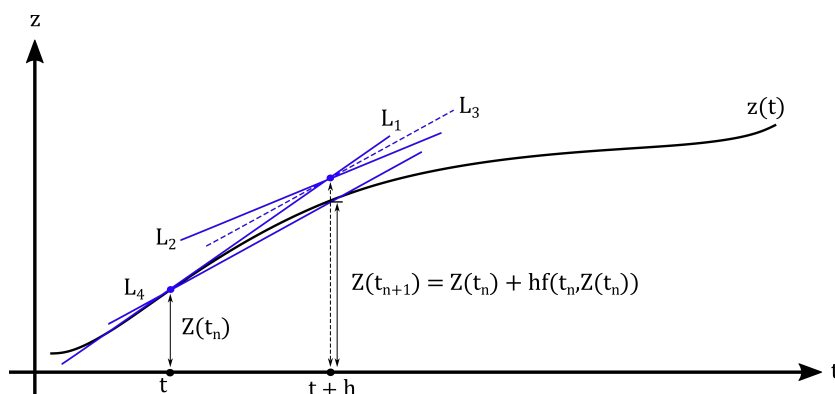
$$f(t_{n+1}, z_n + hf(t_n, z_n)). \quad (3.30)$$

Tento výraz a sklon $f(t_n, z_n)$ jsou poté dále průměrovány, abychom tak získali „průměrný“ sklon řešení na intervalu $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$. Čímž získáme

$$F(t_n, z_n; h) = \frac{1}{2}[f(t_n, z_n) + f(t_n + h, z_n + hf(t_n, z_n))]. \quad (3.31)$$

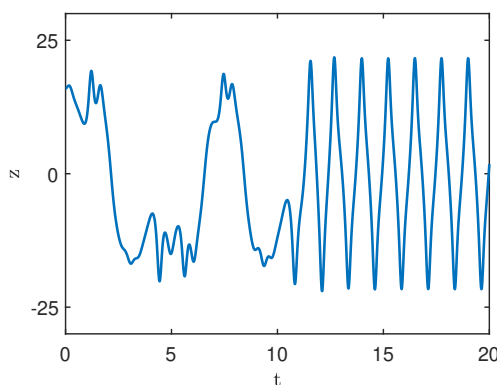
To je dále použito k předpovědi z_{n+1} z z_n v rovnici (3.29). Tato definice je znázorněna na Obr. 3.3 pro $F(t, Z(t); h)$ jakožto „průměrný“ sklon \dot{Z} na intervalu $\langle t, t+h \rangle$. Metody typu Runge-Kutta jsou tak vícekrokové numerické metody. Oproti Eulerově metodě jsou metody typu Runge-Kutta přesnější díky menší chybě zkrácení Taylorovy řady, avšak tato vlastnost závisí na uvažovaných systémech, počátečních podmínkách a zvolené síti bodů [10]. Metody typu Runge-Kutta lze snadno zkombinovat s adaptivním řízením integračního kroku, které upravuje velikost kroku během procesu integrace, což umožňuje těmto metodám dosáhnout nižší časové náročnosti. Díky dobré kombinaci přesnosti, univerzálnosti, stability a přizpůsobivosti jsou Runge-Kutta metody staly často implementovány ve výpočetním softwaru. Konkrétně ve výpočtovém prostředí MATLAB jsou implementovány numerické řešiče obyčejných diferenciálních rovnic, které jsou založené na metodách Runge-Kutta čtvrtého řádu [11], [12]. Užitím těchto řešičů jsou získána periodická řešení nelineárních systémů představené v kapitole 4.

3.1. NUMERICKÁ INTEGRACE POHYBOVÝCH ROVNIC



Obrázek 3.3: Grafická reprezentace Runge-Kutta metody (3.29). Sklon L_1 je roven $f(t, Z(t))$, L_2 je $f(t + h, Z(t) + hf(t, Z(t)))$ a L_3 a L_4 jsou průměrem $F(t, Z(t); h)$.

Jak již bylo řečeno, numerická integrace počátečních úloh generuje posloupnost řešení z_n v diskrétních bodech v intervalu $\langle t_0, b \rangle$. Pokud chceme provést analýzu ustálené odezvy zkoumaného systému, je nutné vypočítat celou přechodovou odezvu, a to může být v mnoha případech časově náročné. Uvažujme systém [9], jehož chaotická odezva byla představena na Obr. 3.1.



Obrázek 3.4: Celková odezva více stabilního kyvadla se třemi magnety [9] v časové oblasti pro $\Omega = 5$ rad/s.

Pro jinou hodnotu frekvence buzení Ω obdržíme periodické kmity systému až po odeznění přechodové odezvy, která trvá zhruba 12 sekund, viz Obr. 3.4. Jak je patrné na Obr. 3.4, tato přechodová odezva má skoro nahodilý charakter, a tak je její získání výpočetně náročné jelikož řešič musí průběžně měnit délku kroku h .

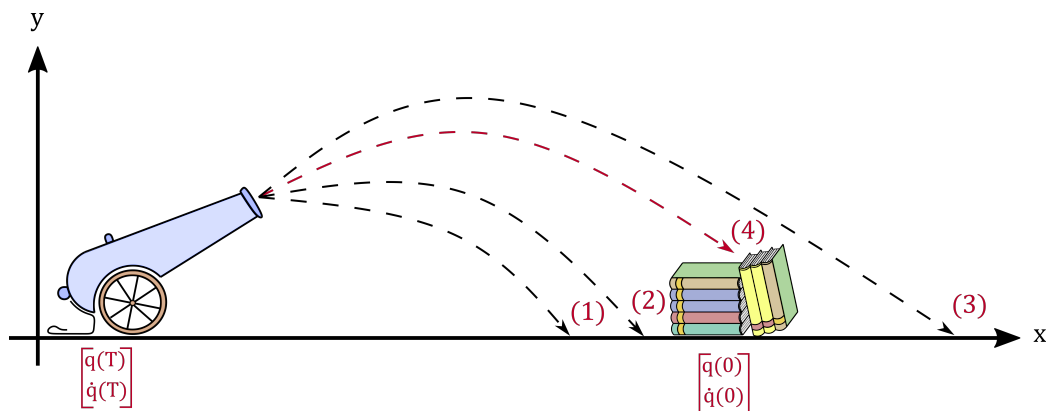
V následující části budou představeny numerické metody, které jsou přímo určeny pro nalezení a analýzu ustálené odezvy.

3.2 Metoda střelby

Metoda střelby, někdy také nazývaná balistická metoda, je často používanou metodou pro hledání periodických řešení. Je založená na převodu okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice na ekvivalentní počáteční úlohu, kterou pak lze řešit pomocí standartních numerických metod např. numerické integrace, viz kapitola 3.1.

Při řešení počáteční úlohy pomocí metody numerické integrace, je integrace provedena na předem definovaném časovém intervalu bez ohledu na konkrétní vlastnosti řešení - např. periodicitu. Pro okrajové úlohy však takovýto postup neexistuje. Pokud je cílem nalezení periodického řešení s předem neznámou periodou T , která se v případě nelineárních systémů může lišit od frekvence buzení f_{ex} , lze využít metody střelby.

Název této metody je odvozen z analogie se střelbou na cíl. Na Obr. 3.5 je analogicky znázorněn princip metody střelby. Po výstřelení na cíl pozorujeme kam tento výstřel dopadl a z informace o dopadu vyhodnotíme chybu. Z této chyby pak upravíme zamíření s nadějí, že další výstřel zasáhne cíl. Tento děj je opako-



Obrázek 3.5: Znázornění principu metoda střelby.

ván, dokud se opravdu netrefíme a čas potřebný pro dopad objektu odpovídá hledané periodě řešení okrajové úlohy. Jak je patrné z této analogie, metoda střelby je *iterativní metodou*. Periodická řešení okrajové úlohy jsou určena touto soustavou

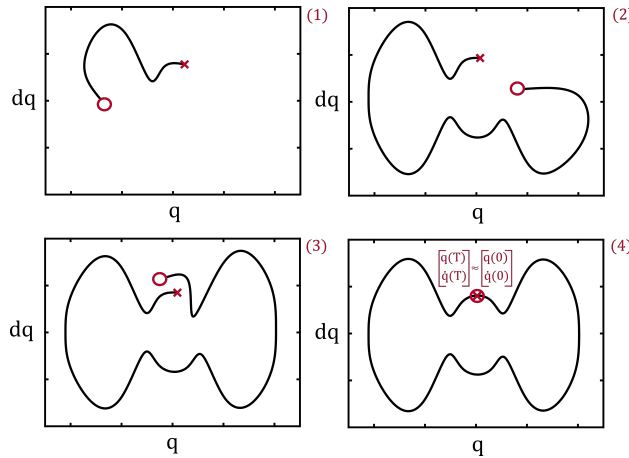
rovnice

$$\mathbf{r}(\mathbf{z}(0)) = \mathbf{z}(T) - \mathbf{z}(0) = \mathbf{0}, \quad (3.32)$$

kde \mathbf{r} značí reziduum soustavy a neznámými jsou počáteční hodnoty $\mathbf{z}(0)$ na začátku periody. Hodnoty na konci periody $\mathbf{z}(T)$ jsou určeny numerickou integrací rovnice (3.3). Naším cílem je tak najít zamíření definované pozicí $\mathbf{q}(0)$ a rychlostí $\dot{\mathbf{q}}(0)$ ve fázovém prostoru k zasažení cíle $\mathbf{q}(T) = \mathbf{q}(0)$, $\dot{\mathbf{q}}(T) = \dot{\mathbf{q}}(0)$ po určité době T . Neboli najít počáteční podmínku $\mathbf{z}(0) = \boldsymbol{\eta}$ a řešení $\mathbf{z}(t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta})$ s minimální periodou T takovou, že

$$\mathbf{z}(T, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}. \quad (3.33)$$

Několik vybraných iterací hledání periodického řešení metodou je znázorněno ve fázové rovině na Obr. 3.6. Počínaje bodem $\mathbf{z}(0) = \boldsymbol{\eta}$ jsou stavové veličiny po



Obrázek 3.6: Demonstrace jednotlivých iterací metody střelby ve fázové rovině pro nalezení periodického řešení dynamického systému.

uplynutí jedné periody určeny numerickou integrací. První „výstřel“ nedopadl na cíl, tj. rozdíl mezi počátečními a koncovými hodnotami (reziduum soustavy algebraických rovnic $\mathbf{r}(\mathbf{z}(0))$) je nenulový. Počáteční odhad je tak nepřesný a potřebuje „korekci“. Této korekce je dosaženo pomocí *Newton-Raphson* metody, která je popsána níže. Hledáme

$$\delta\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0 \quad \text{a} \quad \delta T = T - T_0, \quad (3.34)$$

takové, že rovnice (3.33) je splněna do určité zadané tolerance, tedy

$$\mathbf{z}(T_0 + \delta T, \boldsymbol{\eta}_0 + \delta\boldsymbol{\eta}) - (\boldsymbol{\eta}_0 + \delta\boldsymbol{\eta}) \approx 0. \quad (3.35)$$

Rozvinutím rovnice (3.35) v Taylorovu řadu a ponecháním pouze lineárních členů pro $\delta\boldsymbol{\eta}$ a δT dostaneme

$$\left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(T_0, \boldsymbol{\eta}_0) - \mathbf{I} \right] \delta \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial T}(T_0, \boldsymbol{\eta}_0) \delta T = \boldsymbol{\eta}_0 - \mathbf{z}(T_0, \boldsymbol{\eta}_0), \quad (3.36)$$

kde $\partial \mathbf{z} / \partial \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a značí jednotkovou matici a $\partial \mathbf{z} / \partial T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Z rovnice (2.1) plyne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial T}(T_0, \boldsymbol{\eta}_0) &= \mathbf{f}(\mathbf{z}(T_0, \boldsymbol{\eta}_0), \boldsymbol{\mu}) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{z}(0, \boldsymbol{\eta}_0), \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\mu}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Rovnici (3.35) zderivujeme podle $\boldsymbol{\eta}$ a získáme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right) = D_{\mathbf{z}} \mathbf{f}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\eta}}. \quad (3.38)$$

Dále je potřeba zderivovat i počáteční podmínku $\mathbf{z}(0) = \boldsymbol{\eta}$ podle $\boldsymbol{\eta}$ což vede na

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(0) = \mathbf{I}. \quad (3.39)$$

Po určení \mathbf{z} lze řešit lineární počáteční úlohu (3.38) a (3.39) na intervalu $\langle 0, T_0 \rangle$ a vyhodnotit $\partial \mathbf{z} / \partial \boldsymbol{\eta}$ v bodě $(\boldsymbol{\eta}_0, T_0)$. Místo řešení (2.1) s podmínkou $\mathbf{z}(0) = \boldsymbol{\eta}_0$, uložením řešení $\mathbf{z}(t)$ pro $0 \leq t \leq T_0$ a následného řešení (3.38) a (3.39) můžeme řešit obě úlohy současně, čímž získáme $\mathbf{z}(t, \boldsymbol{\eta}_0)$ a $\partial \mathbf{z} / \partial \boldsymbol{\eta}(T_0, \boldsymbol{\eta}_0)$ najednou.

Metoda střelby však nezaručuje, že vypočtená perioda T je zároveň periodou minimální. Je tomu tak proto, že tato metoda neobsahuje žádnou podmínku, která by omezovala, aby perioda T byla minimální periodou. Abychom zkontrolovali, zda je vypočtená perioda minimální, nebo ne, ověříme, zda $\mathbf{z}(T/n) = \mathbf{z}(0)$, kde n je zde myšleno jako libovolné celé číslo.

Obecně je metoda střelby citlivější na počáteční podmínky než metoda numerické integrace. Citlivost metody střelby se projevuje zejména tehdy, když je hledané periodické řešení velmi nestabilní. V důsledku zaokrouhlovacích a aproximačních chyb je pravděpodobné, že se od nestabilního periodického řešení odchýlíme, i když jsou počáteční podmínky přesně zadány. Metoda střelby je velmi účinná v případě hledání stabilních řešení či nestabilních řešení, které se kvalitativně příliš neliší od stabilních řešení. Důležitou skutečností na metodě střelby je, že jejím vedlejším produktem je matice monodromie

$$\Phi = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(T, \boldsymbol{\eta}), \quad (3.40)$$

tudíž při použití této metody máme rovnou informaci o stabilitě periodického řešení. Tato informace je získána vypočtením vlastních čísel zmíněné matice monodromie Φ jak bylo předesíláno v kapitole 2.2.1. Podrobný důkaz této skutečnosti lze najít v [2].

3.3 Metoda harmonické rovnováhy

Základní myšlenka metody harmonické rovnováhy (HBM) je prostá. Periodické řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic lze reprezentovat **Fourierovou řadou**, která je dána nekonečným součtem harmonických funkcí [5]. Pojmu „harmonická funkce“ v této práci rozumíme sinusové nebo kosinusové funkce s možným fázovým posunem a libovolnými koeficienty. V případě reprezentací nekonečnou řadou bychom získali *přesné* řešení, ale museli bychom postupovat analytickými metodami. Pro získání *přibližného* řešení je nutné Fourierovu řadu uvažovat ve zkráceném tvaru, tj. pouze prvních H členů této řady. Takto uvažovaná zkrácená řada se stane odhadem periodického řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Pokud tento odhad dosadíme zpět do soustavy, není tato soustava splněna přesně. Tento rozdíl nazýváme *reziduem* r . Metoda harmonické rovnováhy požaduje nulovost rezidua, vzhledem k neznámým koeficientům uvažovaného rozvoje hledaného periodického řešení. Z této podmínky pak vyplývají podmínky pro určení daných koeficientů. Získáme tak soustavu algebraických rovnic vzhledem k neznámým Fourierovým koeficientům aproximace. Toto je základní myšlenka metody harmonické rovnováhy. Tuto metodu lze tedy zařadit mezi metody *vážených reziduí*. V případě metody harmonické rovnováhy jsou báze i váhové funkce tvořeny harmonickými funkcemi. Představme si nejdříve tuto metodu na známém příkladu Duffingova oscilátoru.

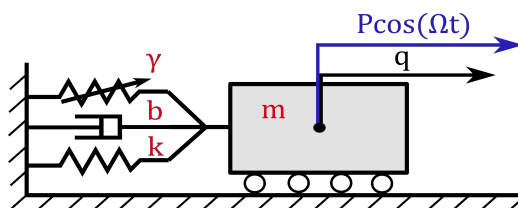
3.3.1 *Příklad: Duffingův oscilátor*

Georg Duffing byl jeden z prvních, který studoval vlastnosti oscilátoru, který zohledňuje nelineární charakter pružné vazby. V roce 1918 publikoval svou práci [1], kde sestavil rovnici (3.41) jakožto prostý model vibrací motoru, který dále ověřoval na experimentálním zařízení. V dnešní době je na Duffingův oscilátor nahlíženo jako na ikonický oscilátor nelineární dynamiky. Tento oscilátor může být interpretován jako kmitavá soustava o jednom stupni volnosti s připojenou kubickou vazbou, na kterou může být nahlíženo jako na elastickou pružinu, jejíž vratná síla závisí na třetí mocnině jejího prodloužení. Obyčejná diferenciální

rovnice popisující takovýto systém má následovný tvar

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq + \gamma q^3 = P \cos \Omega t, \quad (3.41)$$

kde $q = q(t)$ vyjadřuje výchylku z rovnovážné polohy, m značí hmotnost, k je tuhost lineární pružiny, b a γ vyjadřují intenzitu viskozního tlumení a konstantu nelinearity, P a Ω jsou pak amplituda a úhlová frekvence harmonické budící síly. V lineárním případě ($\gamma = 0$) je obecné řešení rovnice (3.41) součtem homogen-



Obrázek 3.7: Oscilátor s jedním stupněm volnosti popsán Duffingovou rovnicí (3.41).

ního řešení, tedy přechodové odezvy a partikulárního řešení, tedy ustálené harmonické odezvy s úhlovou frekvencí Ω . Pro $b > 0$ systém disipuje energii a přechodová odezva po určitém čase vymizí. Systém tak dospěje do ustálené odezvy, která je nezávislá na počátečních podmínkách.

V nelineárním případě ($\gamma \neq 0$) již superpozice přechodové a ustálené odezvy neplatí. Přesto pro $b > 0$ způsobuje disipace energie systému útlum přechodové odezvy a je ponechána pouze ustálená odezva (vznik limitního cyklu viz kapitola 2.1). Pro nenulové buzení ($P \neq 0$) je nelineární ustálená odezva obvykle periodická. Obecně může harmonicky buzený disipativní nelineární dynamický systém dosáhnout periodických, kvaziperiodických a chaotických limitních cyklů. Více limitních cyklů může existovat současně, a to, kterého z nich bude dosaženo, závisí na počátečních hodnotách (na rozdíl od lineárního případu). V následující části je pomocí metody harmonické rovnováhy aproximováno periodické řešení $q(t + T) = q(t)$ s periodou $T > 0$ rovnice (3.41).

Aproximace řešení pomocí metody harmonické rovnováhy

Jak již bylo zmíněno, metoda harmonické rovnováhy je založena na aproximaci periodických řešení ve formě zkrácené Fourierovy řady. Pro zjednodušení uvažujme nejprve odhad řešení $q_h(t) \approx q(t)$ v následujícím tvaru, který zohledňuje pouze první harmonickou složku Fourierovy řady

$$q_h(t) = \hat{q}_c \cos \Omega t + \hat{q}_s \sin \Omega t, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad (3.42)$$

kde \hat{q}_c a \hat{q}_s značí koeficienty kosinových a sínových složek Fourierovy řady. Výraz s frekvencí Ω se nazývá *základní harmonická*, ty s celočíselnými násobky $n\Omega$ s $n \geq 2$ se nazývají *vyšší harmonické* a konstantní člen, který zde není uvažován, se nazývá *nultá harmonická*.

Hledanými Fourierovými koeficienty v rovnici (3.42) jsou \hat{q}_c a \hat{q}_s . Perioda T odhadu $q_h(t)$, $q_h(t + T) = q_h(t)$, je zde stejná jako perioda buzení $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, protože předpokládáme, že odezva bude frekvenčně synchronizována se zadaným buzením soustavy. Tvar odhadu řešení v (3.42) odpovídá přesnému partikulárnímu řešení této rovnice, pokud je zanedbán vliv nelineárních elastických sil ($\gamma = 0$).

Abychom mohli dosadit odhad do rovnice (3.41), je třeba určit derivace \dot{q}_h a $\ddot{q}_h(t)$

$$\begin{aligned} q_h(t) &= +\hat{q}_c \cos \Omega t + \hat{q}_s \sin \Omega t, \\ \dot{q}_h(t) &= -\hat{q}_c \Omega \sin \Omega t + \hat{q}_s \cos \Omega t, \\ \ddot{q}_h(t) &= -\hat{q}_c \Omega^2 \cos \Omega t - \hat{q}_s \Omega^2 \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Nelineární člen q_h^3 je vhodné rozepsat

$$\begin{aligned} q_h^3 &= (\hat{q}_c \cos \Omega t + \hat{q}_s \sin \Omega t)^3 \\ &= \hat{q}_c^3 \cos^3 \Omega t + 3\hat{q}_c^2 \hat{q}_s \cos^2 \Omega t \sin \Omega t + \\ &+ 3\hat{q}_c \hat{q}_s^2 \cos \Omega t \sin^2 \Omega t + \hat{q}_s^3 \sin^3 \Omega t \\ &= \frac{3}{4}(\hat{q}_c^3 + \hat{q}_c \hat{q}_s^2) \cos \Omega t + \frac{3}{4}(\hat{q}_s^3 + \hat{q}_c^2 \hat{q}_s) \sin \Omega t + \\ &+ (\dots) \cos 3\Omega t + (\dots) \sin 3\Omega t. \end{aligned} \quad (3.44)$$

K získání výsledného tvaru (3.44) byly použity vzorce trigonometrické identity. Dosazením (3.43) a (3.44) do rovnice (3.41) a sdružením koeficientů u $\cos(\Omega t)$, $\sin(\Omega t)$, $\cos(3\Omega t)$ a $\sin(3\Omega t)$ dostaneme

$$\begin{aligned} &\left((1 - \Omega^2) \hat{q}_c + \zeta \Omega \hat{q}_s + \frac{3}{4} \gamma (\hat{q}_c^3 + \hat{q}_c \hat{q}_s^2) - P \right) \cos \Omega t + \\ &+ \left((1 - \Omega^2) \hat{q}_s - \zeta \Omega \hat{q}_c + \frac{3}{4} \gamma (\hat{q}_s^3 + \hat{q}_c^2 \hat{q}_s) \right) \sin \Omega t + \\ &+ (\dots) \cos 3\Omega t + (\dots) \sin 3\Omega t = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Dále jsou uvažované pouze harmonické obsažené v odhadu. Zde tedy zohledňujeme pouze členy s frekvencí Ω a zanedbáváme členy s frekvencí 3Ω v rovnici (3.45). Rovnováha harmonických je splněna tím, že součet koeficientů u členů

$\cos(\Omega t)$ a $\sin(\Omega t)$ je roven nule. Což vede k rovnicím

$$r_c(\hat{q}_c, \hat{q}_s) = (1 - \Omega^2)\hat{q}_c + \zeta\Omega\hat{q}_s + \frac{3}{4}\gamma(\hat{q}_c^3 + \hat{q}_c\hat{q}_s^2) - P = 0, \quad (3.46)$$

$$r_s(\hat{q}_c, \hat{q}_s) = (1 - \Omega^2)\hat{q}_s - \zeta\Omega\hat{q}_c + \frac{3}{4}\gamma(\hat{q}_s^3 + \hat{q}_c^2\hat{q}_s) = 0, \quad (3.47)$$

kteří jsou rezidui systému a jedná se o dvě algebraické rovnice $r_c(\hat{q}_c, \hat{q}_s) = 0$, $r_s(\hat{q}_c, \hat{q}_s) = 0$ o dvou neznámých (\hat{q}_c, \hat{q}_s) .

Frekvenční odezva

Pro danou sadu parametrů Ω , P , b , γ můžeme určit řešení rovnic (3.46) a (3.47), a získat tak aproximaci ustálené odezvy Duffingova oscilátoru (3.41). V mnoha praktických úlohách nás zajímá i to, jak se ustálená odezva vyvíjí s budicí frekvencí Ω , tj. *frekvenční odezva*. V lineárním případě mluvíme o tzv. *rezonančních frekvencích*, což jsou frekvence, v jejichž okolí dochází k maximálnímu zesílení odezvy. Výskyt rezonancí je zachován i pro nelineární soustavy. Nicméně charakter odezvy může být různě modifikován podle konkrétního tvaru nelinearity v soustavě a poloha rezonance se povětšinou liší od linearizovaného systému. Odezva soustavy je tak přímo závislá na frekvenci buzení. I v těchto případech jsou nelineární soustavy charakterizované odpovídajícími amplitudovými charakteristikami. Úlohu hledání periodických odezev ve frekvenční oblasti lze matematicky vyjádřit takto

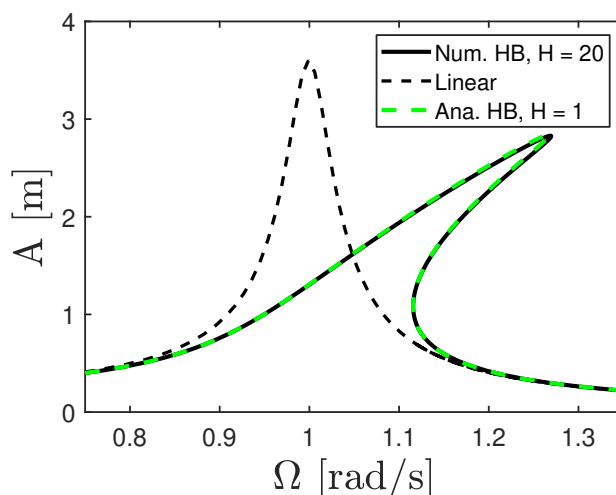
$$\begin{aligned} &\text{vyřešit } \mathbf{r}(\mathbf{X}) = [r_c, r_s]^T = \mathbf{0} \\ &\text{pro } \mathbf{X} = [\hat{q}_c, \hat{q}_s, \Omega]^T \\ &\text{kde } \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \\ &\text{pro interval } \Omega^s \leq \Omega \leq \Omega^e. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Odvoďme nyní analytické řešení. Zavedeme polární souřadnice

$$\hat{q}_c = a \cos \theta, \quad \hat{q}_s = a \sin \theta, \quad \implies \hat{q}_c^2 + \hat{q}_s^2 = a^2, \quad (3.49)$$

kde a je amplituda odezvy a θ je fázové zpoždění mezi odezvou a buzením. Po dosazení rovnice (3.49) do rovnic (3.46) a (3.47) a některých algebraických manipulací získáme kvadratickou rovnici v Ω , která má řešení

$$\Omega_{1,2}^2 = 1 - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{3\gamma a^2}{4} \pm \sqrt{\frac{P^2}{a^2} + \frac{\zeta^4}{4} - \zeta^2 - \frac{3\zeta^2\gamma a^2}{4}}. \quad (3.50)$$



Obrázek 3.8: Porovnání amplitudových charakteristik Duffingova oscilátoru získaných numerickým a analytickým výpočtem.

V závislosti na amplitudě má rovnice (3.50) nulové, jedno nebo dvě reálná řešení pro Ω^2 . Bez újmy na obecnosti uvažujeme pouze $\Omega \geq 0$. Výsledné amplitudové křivky mají tvar znázorněný na Obr. 3.8 pro amplitudu buzení $P = 0.1$. Pro $\gamma > 0$ rezonanční frekvence roste s úrovní buzení (efekt tuhnutí). V porovnání s lineárním případem jsou tedy amplitudové křivky ohnuté směrem doprava. Při dostatečně malém tlumení, silné nelinearitě a vysoké amplitudě buzení dojde ke vzniku bodů zvratu amplitudové křivky na určitých frekvencích. Pro danou budicí frekvenci tak existuje jedna nebo tři amplitudy. Jak je ukázáno v kapitole 4, periodické kmity spojené s převislou větví spojující dva body zvratu, jsou nestabilní. Ostatní větve odpovídají stabilním periodickým kmitům. To, které z nich bude dosaženo, závisí na počátečních podmínkách. Na Obr. 3.8 je také zobrazeno porovnání analytických a numerických výsledků. Je patrné, že analytické řešení s pouze jednou uvažovanou harmonickou přináší dobrou shodu s numerickým řešením kde bylo uvažováno 20 harmonických.

3.3.2 Teorie Fourierových řad

Uvažujme reálnou funkci $f(t)$ s periodou T , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kde $f(t) = f(t + T)$ pro všechny $t \in \mathbb{R}$. Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat t jako čas.

Za použití komplexní notace je pak *Fourierova řada* zkrácená do řádu H ozna-

čena symbolem $f_H(t)$ a definována

$$f_H(t) = \sum_{k=-H}^H \hat{f}(k) e^{ik\Omega t}, \quad (3.51)$$

kde $\Omega = 2\pi/T$, i je imaginární jednotka ($i^2 = -1$). Symbol $\hat{f}(k)$ značí *Fourierovy koeficienty* a $e^{ik\Omega t}$ jsou *Fourierovy báze funkce*, k je *harmonický index*, $\hat{f}(\pm 1)$ jsou koeficienty základní (první) harmonické, $\hat{f}(0)$ je koeficient nulté harmonické a $\hat{f}(k)$ pro $|k| > 1$ jsou koeficienty vyšších harmonických. V limitě $H \rightarrow \infty$ přejde rovnice (3.51) v nezkrácenou Fourierovu řadu.

Fourierovy koeficienty $\hat{f}(k)$ jsou definovány následovně

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\Omega t} dt \quad k = -H, \dots, H. \quad (3.52)$$

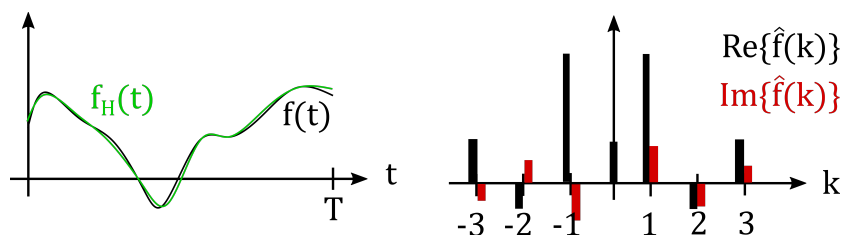
Fourierova řada existuje pokud je $f(t)$ integrovatelná na oblasti $\langle 0, T \rangle$ [22]. Jelikož uvažujeme t jako čas, budeme odkazovat na $f_H(t)$ jako na reprezentaci Fourierovy řady v *časové oblasti* a na posloupnost Fourierových koeficientů

$$\{\hat{f}(-H), \dots, \hat{f}(H)\}, \quad (3.53)$$

jako na reprezentaci Fourierovy řady ve *frekvenční oblasti*, viz. Obr. 3.9. Jelikož je $f(t)$ reálnou funkcí, je zřejmé, že

$$\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)} \quad k = -H, \dots, H, \quad (3.54)$$

kde $\overline{}$ označuje komplexně sdruženou proměnnou. Pro úplnost zde uvedeme Fou-



Obrázek 3.9: Reprezentace Fourierovy řady v časové oblasti (vlevo), frekvenční oblasti (vpravo).

rierovu řadu v běžnější *sínové a kosínové* notaci, kterou budeme nadále využívat. Fourierova řada má poté tvar [22]

$$f_H(t) = \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^H \hat{f}_c(k) \cos(k\Omega t) + \hat{f}_s(k) \sin(k\Omega t). \quad (3.55)$$

Povšimněme si, že člen $\hat{f}(0)$ je pro obě notace stejný. Fourierovy koeficienty pro tuto notaci jsou dány následovnými vztahy

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \\ \hat{f}_c(k) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\Omega t) dt, \\ \hat{f}_s(k) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\Omega t) dt.\end{aligned}\tag{3.56}$$

Z rovnice pro člen $\hat{f}(0)$ jasně plyne, že se jedná o *střední hodnotu* funkce $f(t)$ přes jednu periodu. Jelikož se jedná o dvě identické reprezentace pouze v jiných zápisích, může být někdy užitečné mezi těmito notacemi volně přecházet. Následující rovnice vyjařují pravidla převodu mezi těmito notacemi [22]

$$\begin{aligned}\hat{f}_c(k) &= 2\operatorname{Re}\{\hat{f}(k)\}, \\ \hat{f}_s(k) &= -2\operatorname{Im}\{\hat{f}(k)\}, \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{2} (\hat{f}_c(k) - i\hat{f}_s(k)).\end{aligned}\tag{3.57}$$

Součty v rovnicích (3.51) a (3.55) lze nahradit součiny vektorů nebo matic. Tato náhrada tak umožňuje mnohem kompaktnější zápis, který je vhodný pro snazší odvozování rovnic HBM. V následující části je představeno pět důležitých kvantit: matice pro kompaktní notaci Fourierovy řady $\mathbf{h}(\Omega t)$, matice diskrétní Fourierovy transformace \mathbf{E}_{NH} , matice časové derivace ve frekvenční oblasti ∇ , matice pro kompaktní notaci koeficientů zkrácené Fourierovy řady $\hat{\mathbf{h}}(\Omega t)$ a matice zpětné diskrétní Fourierovy transformace \mathbf{E}_{NH}^{-1} . Ty jsou využity pro spojitě a diskrétně časové vyčíslení Fourierovy řady, její časovou derivaci a výpočet Fourierových koeficientů. Tyto kvantily se nazývají *Fourierovy transformery* [5].

Pro budoucí odvození zavedeme následující skalární součin dvou funkcí $g(t)$ a $f(t)$ na intervalu $\langle 0, T \rangle$ jako

$$\langle g, f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) f(t) dt.\tag{3.58}$$

Spojité čas

Vektor kompaktní notace Fourierovy řady $\mathbf{h}^*(\Omega t)$ pro spojitý čas v jednorozměrném případě má následující tvar

$$\mathbf{h}^*(\Omega t) = [1 \quad \cos(\Omega t) \quad \sin(\Omega t) \quad \dots \quad \cos(H\Omega t) \quad \sin(H\Omega t)].\tag{3.59}$$

3.3. METODA HARMONICKÉ ROVNOVÁHY

Pokud provedeme Kroneckerův součin, který je definován později, tohoto vektoru s jednotkovou maticí $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde n vyjadřuje počet stupňů volnosti systému, získáme matici kompaktní notace Fourierovy řady $\mathbf{h}(\Omega t)$. Seřazením Fourierových koeficientů do sloupcového vektoru $\hat{\mathbf{f}}_H$ následujícím způsobem

$$\hat{\mathbf{f}}_H = [\hat{\mathbf{f}}(0), \hat{\mathbf{f}}_c(1), \hat{\mathbf{f}}_s(1), \dots, \hat{\mathbf{f}}_c(H), \hat{\mathbf{f}}_s(H)]^T, \quad (3.60)$$

a vynásobením $\mathbf{h}^*(\Omega t)$ tímto sloupcovým vektorem lze vyjádřit libovolnou jednorozměrnou spojitou funkci kompaktním zápisem

$$f(t) \approx \mathbf{h}_H^*(\Omega t) \hat{\mathbf{f}}_H. \quad (3.61)$$

Pro získání Fourierových koeficientů $\hat{\mathbf{f}}_H$ platí

$$\hat{\mathbf{f}}_H = \langle \check{\mathbf{h}}_H^*, f \rangle. \quad (3.62)$$

Pokud je $f(t)$ Fourierova řada zkrácená do řádu menšího nebo rovno H , pak platí v rovnici (3.61) rovnost. Jinak je rovnice (3.61) aproximací. Pokud je $f(t)$ dostatečně hladká (alespoň ve třídě $C^1(\mathbb{R})$), pak je přesnost omezena pouze *chybou zkrácení*, která jde k nule pro $H \rightarrow \infty$.

Vektory \mathbf{h}_H^* a $\check{\mathbf{h}}_H^*$ jsou plně definovány H a normalizovaným časem $\tau = \Omega t$. Jelikož je $\hat{\mathbf{f}}_H = (2H + 1) \times 1$, $\dim(\check{\mathbf{h}}_H^*) = \dim(\check{\mathbf{h}}^*)^T = 1 \times (2H + 1)$, kde \dim značí dimenzi vektoru nebo matice. Matici zkrácené Fourierovy řady (3.55) lze tak psát v kompaktním tvaru jako

$$\mathbf{f}_H(t) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & \dots & \cos(H\Omega t) & \sin(H\Omega t) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}(0) \\ \hat{\mathbf{f}}_c(1) \\ \hat{\mathbf{f}}_s(1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{f}}_c(H) \\ \hat{\mathbf{f}}_s(H) \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

kde se vyskytuje tzv. *Kroneckerův součin*. Uvažujme dvě matice \mathbf{A} a \mathbf{B} kde $\dim(\mathbf{A}) = m \times n$. Kroneckerův součin je tak definovaný jako

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & \dots & a_{nn}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

kde a_{ij} je prvek \mathbf{A} v i -tém řádku a j -tém sloupci. Kroneckerův součin je asociativní,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} &= \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}, \\ (\alpha \mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} &= \mathbf{A} \otimes (\alpha \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}), \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} &= \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}), \end{aligned} \quad (3.65)$$

ale není obecně komutativní $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$. Smíšený Kroneckerův součin je pak

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{B} \otimes \mathbf{D}). \quad (3.66)$$

Rovnice (3.63) lze pak zapsat do kompaktního tvaru

$$\mathbf{f}_H(t) = \mathbf{h}_H(\Omega t) \hat{\mathbf{f}}_H. \quad (3.67)$$

Pro vektor $\hat{\mathbf{f}}_H$ dále platí

$$\hat{\mathbf{f}}_H = \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \cos(\Omega t) \\ 2 \sin(\Omega t) \\ \vdots \\ 2 \cos(H\Omega t) \\ 2 \sin(H\Omega t) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \mathbf{f}(t) dt, \quad (3.68)$$

kde sloupcový vektor vyjadřuje $\hat{\mathbf{h}}_H^*$.

Diskrétní čas

Při použití výpočetní techniky, která pracuje s diskrétními hodnotami, nelze počítat se spojitým časem. Řešené problémy je tak třeba časově diskretizovat. Tuto diskretizaci provedeme navzorkováním funkce f pomocí N vzorků a tím získáme funkci \tilde{f}_N . Pokud tyto vzorky seřadíme do sloupcového vektoru $\tilde{\mathbf{f}}_N = [f(nT/N)]$, lze psát

$$\tilde{\mathbf{f}}_N \approx \mathbf{E}_{NH} \hat{\mathbf{f}}_H, \quad (3.69)$$

kde se vyskytuje matice diskrétní Fourierovy transformace \mathbf{E}_{NH} , která definovaná jako

$$\mathbf{E}_{NH} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi(0)(1)}{N}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2\pi(0)(H)}{N}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi(N-1)(1)}{N}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2\pi(N-1)(H)}{N}\right) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n. \quad (3.70)$$

Rovnici (3.69) tak lze rozepsat na

$$\tilde{\mathbf{f}}_N \approx \begin{bmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi(0)(1)}{N}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2\pi(0)(H)}{N}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi(N-1)(1)}{N}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2\pi(N-1)(H)}{N}\right) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}(0) \\ \hat{\mathbf{f}}_c(1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{f}}_s(H) \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Tudíž pro vektor Fourierových koeficientů platí

$$\hat{\mathbf{f}}_H \approx \mathbf{E}_{NH}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}_N, \quad (3.72)$$

kde \mathbf{E}_{HN}^{-1} je matice zpětné diskrétní Fourierovy transformace. Rovnici (3.72) tak lze rozepsat na

$$\hat{\mathbf{f}}_H \approx \frac{2}{N} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\frac{1}{2}2\pi(1)(0)}{N}\right) & \dots & \sin\left(\frac{\frac{1}{2}2\pi(1)(N-1)}{N}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \cos\left(\frac{2\pi(H)(0)}{N}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2\pi(H)(N-1)}{N}\right) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}(0) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{f}}(N-1) \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Rovnost v rovnici (3.69) nastává, pokud nastává v (3.61). Rovnost v (3.61) platí, pokud je $N \geq 2H + 1$, jinak nastává zkreslení způsobené *aliasingem*. Tedy pokud $f(t) \neq f_H(t)$, tak nastávají v (3.72) kumulativní chyby od zkrácení a aliasingu. Matice \mathbf{E}_{NH} a \mathbf{E}_{NH}^{-1} jsou plně definovány H a N . Jelikož

$$\dim(\mathbf{E}_{NH}) = \dim(\mathbf{E}_{NH}^{-1})^T = N \times (2H + 1). \quad (3.74)$$

Diferenciace

Diferenciaci vzhledem k času t lze provést po jednotlivých členech příslušné Fourierovy řady pro dostatečně regulární $f(t)$ (viz Fourierova věta o diferenciaci). Časová derivace $\dot{f}_H(t)$ Fourierovy řady $f_H(t)$ je stále Fourierovou řadou stejného řádu zkrácení. To lze shrnout jako

$$\dot{\hat{\mathbf{f}}}_H = \Omega \nabla \hat{\mathbf{f}}_H. \quad (3.75)$$

Matice $\Omega \nabla$ se stará o časovou derivaci ve frekvenční oblasti.

$$\nabla = \text{diag}[0, \nabla_1, \dots, \nabla_H] \otimes \mathbf{I}_n, \quad \nabla = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ k & k \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{f}}_H &= \frac{d}{dt} \left(\hat{\mathbf{f}}(0) + \sum_{k=1}^H \hat{\mathbf{f}}_c(k) \cos(k\Omega t) + \hat{\mathbf{f}}_s(k) \sin(k\Omega t) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^H k\Omega \hat{\mathbf{f}}_s(k) \cos(k\Omega t) - k\Omega \hat{\mathbf{f}}_c(k) \sin(k\Omega t) \\
 &= \mathbf{h}_H(\Omega t) \Omega \nabla \hat{\mathbf{f}}_H.
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Diskrétní Fourierova transformace

Výpočet Fourierových koeficientů dle rovnice (3.52) není pro mnoho periodických funkcí $f(t)$ proveditelný. Pro takovéto funkce nelze najít výraz pro integrály v uzavřeném tvaru. Obecně je tedy výhodné aproximovat Fourierovy koeficienty numerickou integrací. Zvláště zajímavou numerickou aproximační metodou pro periodické integrály je *diskrétní Fourierova transformace*. Na této metodě je založena velmi důležitá součást metody harmonické rovnováhy a sice *Alternating Frequency–Time* (ATF) metoda nebo také metoda Střídavě časově-frekvenčního režimu, která bude představena níže, viz kapitola 3.3.5.

Uvažujme ekvidistantní diskretizaci intervalu $\langle 0, T \rangle$ na N časových vzorků t_0, t_1, \dots, t_{N-1} (*body mřížky*), kde

$$t_n = n\Delta t \quad \Delta t = \frac{T}{N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \tag{3.78}$$

Označme funkční hodnotu ve vzorku $\tilde{f}(n) = f(t_n)$. Fourierovy koeficienty $\hat{f}(k)$ lze pak získat jako

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt. \tag{3.79}$$

Aproximace spojitého integrálu lze pak odvodit jako

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(k) &\approx \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t_n} \Delta t, \\
 \hat{f}(k) &\approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}(n) e^{-ik\frac{2\pi}{N}n} \Delta t \quad k = -H, \dots, H.
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Rovnice (3.80) by měla poskytnout přijatelně přesnou aproximaci Fourierových koeficientů až do řádu H pro dostatečně velký počet vzorků N . Na otázku, jak velké by mělo být N , lze odpovědět *Nyquistovým-Shannonovým vzorkovacím teoremem* [23], který tvrdí, že vzorkovací frekvence by měla být alespoň dvakrát větší než nejvyšší frekvence obsažená ve funkci.

3.3.3 Odvození rovnic harmonické rovnováhy

Jak již bylo řečeno, k určení periodického řešení používá metoda harmonické rovnováhy harmonické funkce jako odhad i jako váhové funkce. Harmonické funkce poskytují dobré vlastnosti. Snadno se sčítají, mohou reprezentovat jakoukoli dostatečně hladkou periodickou funkci a v mnoha případech zajišťují rychlou konvergenci [5]. V této části se zabýváme přístupem vážených reziduí pro tuto konkrétní volbu odhadu a váhových funkcí. Tím tak získáme algebraický systém rovnic pro Fourierovy koeficienty aproximace.

Seřadíme funkce odhadu periodického řešení následovně, $1, \cos \Omega t, \sin \Omega t$ atd. Lineární kombinace těchto funkcí je tak

$$\mathbf{q}_h(t, \{\beta_k\}) = \beta_1 + \sum_{k=1}^H \beta_{2k} \cos(k\Omega t) + \beta_{2k+1} \sin(k\Omega t). \quad (3.81)$$

Celkový počet funkcí odhadu je $2H + 1$. Povšimněme si, že koeficienty β_k jsou Fourierovy koeficienty funkce \mathbf{q}_h . Odhad $\mathbf{q}_h(t, \{\beta_k\})$ je T -periodický a stejně tak jeho časová derivace $\dot{\mathbf{q}}_h(t, \{\beta_k\})$. Reziduum $\mathbf{r}(t, \mathbf{q}_h, \dot{\mathbf{q}}_h)$ (3.2) je proto také T -periodické. To platí jak pro autonomní případ (s apriorně neznámým T), tak pro neautonomní případ (kde požadujeme T -periodickou explicitní časovou závislost).

V souladu s Galerkinovou myšlenkou [33] používáme odhadové funkce také jako váhové funkce, $1, \cos \Omega t, \sin \Omega t$ atd. Vážení rezidua tak provedeme jako

$$\frac{1}{T} \int_0^T 1 \cdot \mathbf{r}(t, \{\beta_k\}) dt = \mathbf{0}, \quad (3.82)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\Omega t) \cdot \mathbf{r}(t, \{\beta_k\}) dt = \mathbf{0} \quad k = 1, \dots, H, \quad (3.83)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(k\Omega t) \cdot \mathbf{r}(t, \{\beta_k\}) dt = \mathbf{0} \quad k = 1, \dots, H. \quad (3.84)$$

Srovnáním s definicí Fourierových koeficientů v rovnicích (3.52) lze tvrdit, že *Metoda harmonické rovnováhy vyžaduje, aby Fourierovy koeficienty v reziduích mizely až do H uvažovaných Fourierových funkcí v odhadu. Tudíž*

$$\hat{\mathbf{r}}(0), \dots, \hat{\mathbf{r}}_c(H), \hat{\mathbf{r}}_s(H) = \mathbf{0}. \quad (3.85)$$

Fourierovy koeficienty jsou zde koeficienty $\mathbf{r}(t, \{\beta_k\})$. Lze na ně pohlížet jako na projekce reziduálního členu v časové oblasti do frekvenční oblasti (nebo Fourierova prostoru). Metoda harmonické rovnováhy požaduje, aby reziduum nemělo

žádnou složku v prostoru pokrytém zkrácenou množinou Fourierových bázových funkcí. Proto se tato metoda označuje také jako *Fourierova-Galerkinova projekce* nebo *Fourierova-Galerkinova metoda*. Protože metoda harmonické rovnováhy používá Fourierovy koeficienty, tj. frekvenční nebo spektrální reprezentaci hledané aproximace a rezidua, označuje se také jako *metoda frekvenční oblasti* nebo *spektrální metoda*. Název harmonická rovnováha lze vysvětlit následovně. V některých případech, zejména je-li $\mathbf{r}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ polynomem v prvních dvou argumentech, lze $\mathbf{r}(t, \hat{\mathbf{q}}_H)$ algebraicky rozložit v Fourierovu řadu. Toto bylo např. provedeno v úvodním příkladu Duffingova oscilátoru v rovnicích (3.44)-(3.45). Rovnice (3.85) tak odpovídá dáním do *rovnováhy* každé *harmonické* zvlášť, tj. vyrovnání příslušných Fourierových koeficientů na nulu. Stojí za zmínku, že pokud Fourierovy koeficienty rezidua mizí v sinusově-kosinovém zobrazení, mizí také v jakémkoli jiném zobrazení, včetně komplexně-exponenciálního.

3.3.4 Použití pro mechanické systémy

Mechanické systémy, které uvažujeme jsou obecně popsány soustavou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu ve tvaru (3.1). Hledejme aproximaci $\mathbf{q}_h(t, \hat{\mathbf{q}}_H) \approx \mathbf{q}(t)$ T -periodického řešení, $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t + T)$ ve tvaru zkrácené Fourierovy řady

$$\mathbf{q}_h(t, \{\hat{q}_k\}) = \hat{q}_0 + \sum_{k=1}^H \hat{q}_{2k} \cos(k\Omega t) + \hat{q}_{2k-1} \sin(k\Omega t). \quad (3.86)$$

Zavedením matic Fourierovy řady \mathbf{h}_H a Fourierových koeficientů $\hat{\mathbf{h}}_H$, které byly již definovány v kapitole 3.3.2, získáme rovnici v kompaktním tvaru

$$\mathbf{q}_h(t, \hat{\mathbf{q}}_H) = \mathbf{h}_H(\Omega t) \hat{\mathbf{q}}_H, \quad (3.87)$$

pro vlastní frekvence kmitu $\Omega = 2\pi/T$. Řád zkrácení je označen symbolem H . Pro snazší manipulaci a značení zavedeme vektor \mathbf{r} v následujícím tvaru

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{f}_{lin}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{f}_{ext}(t). \quad (3.88)$$

Pokud dosadíme aproximaci $\mathbf{q}_h(t, \hat{\mathbf{q}}_H)$ do rovnice (3.88), získáme tím reziduum. Metoda harmonické rovnováhy pak vyžaduje, aby součet Fourierových koeficientů u příslušných harmonických rezidua vymizel až do řádu zkrácení H , tudíž

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\mathbf{h}}_H, \mathbf{r}(\mathbf{q}_h, \dot{\mathbf{q}}_h, \ddot{\mathbf{q}}_h, t) \rangle &= \mathbf{0}, \\
 \langle \hat{\mathbf{h}}_H, \mathbf{r}(\mathbf{h}_H \hat{\mathbf{q}}_H, \mathbf{h}_H \Omega \nabla \hat{\mathbf{q}}_H, \mathbf{h}_H \Omega^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{q}}_H, t) \rangle &= \mathbf{0}, \\
 \hat{\mathbf{f}}_{lin,H}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega) + \hat{\mathbf{f}}_{nl,H}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega) - \hat{\mathbf{f}}_{ext,H} &= \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Závislost členů \mathbf{h}_H a $\hat{\mathbf{h}}_H$ na Ωt zde byla záměrně vynechána pro lepší čitelnost. Povšimněme si, že Fourierovy koeficienty periodické budící síly $\hat{\mathbf{f}}_{ext,H}$ jsou nezávislé na hledaných Fourierových koeficientech $\hat{\mathbf{q}}_H$ a jsou často známé nebo je lze vypočítat z funkce $f_{ext}(t)$ pomocí Fourierovy analýzy. Nějvětší výzvou se činí výpočet Fourierových koeficientů nelineárních sil $\hat{\mathbf{f}}_{nl,H}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega)$. Této problematice se věnuje kapitola 3.3.5. V následující sekci se zaměříme na lineární část. Fourierovy koeficienty lineárních sil $\hat{\mathbf{f}}_{lin,H}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega)$ lze rozdělit na tři členy v souvislosti s rovnicí (3.1). Nejprve vyřešíme člen se zrychlením:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\mathbf{h}}_H, \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_h \rangle &= \langle \hat{\mathbf{h}}_H, \mathbf{M}\mathbf{h}_H \Omega^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{q}}_H \rangle \\
 &= \langle \hat{\mathbf{h}}_H, \mathbf{M}\mathbf{h}_H \rangle \Omega^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{q}}_H \\
 &= \left\langle (\hat{\mathbf{h}}_H^* \otimes \mathbf{I}_n), (\mathbf{1} \otimes \mathbf{M}) (\hat{\mathbf{h}}_H^* \otimes \mathbf{I}_n) \right\rangle \Omega^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{q}}_H \\
 &= \left\langle (\hat{\mathbf{h}}_H^* \otimes \mathbf{I}_n), (\hat{\mathbf{h}}_H \otimes \mathbf{M}) \right\rangle \Omega^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{q}}_H \\
 &= \left(\langle \hat{\mathbf{h}}_H^*, \mathbf{h}_H \rangle \otimes \mathbf{M} \right) \Omega^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{q}}_H \\
 &= (\mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{M}) (\nabla^* \otimes \mathbf{I}_n) (\nabla^* \otimes \mathbf{I}_n) \Omega^2 \hat{\mathbf{q}}_H \\
 &= (\mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{M}) (\nabla^{*2} \otimes \mathbf{I}_n) \Omega^2 \hat{\mathbf{q}}_H \\
 &= (\nabla^{*2} \otimes \mathbf{M}) \Omega^2 \hat{\mathbf{q}}_H.
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Obdobnými operacemi bychom bychom dospěli k výrazu $(\nabla^{*1} \otimes \Omega \mathbf{B}) \hat{\mathbf{q}}_H$ ze členu $\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_h$ a dále k výrazu $(\nabla^{*0} \otimes \Omega \mathbf{K}) \hat{\mathbf{q}}_H$ ze členu $\mathbf{K}\mathbf{q}_h$. Rovnice (3.1) po převodu do frekvenční oblasti je v následovném tvaru

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{r}}_H(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega) &= \left(\nabla^{*2} \otimes \mathbf{M} + \nabla^{*1} \otimes \Omega \mathbf{B} + \nabla^{*0} \otimes \Omega \mathbf{K} \right) \hat{\mathbf{q}}_H \\
 &+ \hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega) - \hat{\mathbf{f}}_{ext}(\Omega) \\
 &= \mathbf{S}(\Omega) \hat{\mathbf{q}}_H + \hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega) - \hat{\mathbf{f}}_{ext}(\Omega) = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Rovnici (3.91) lze interpretovat jako podmínku dynamické rovnováhy formulovanou ve frekvenční oblasti, tj. rovnováha mezi lineárními a nelineárními vnitřními silami a silami vnějšími. Vnitřní lineární síly jsou reprezentovány maticí dynamické tuhosti $\mathbf{S}(\Omega)$, která odpovídá lineární části systému (3.1) a je hojně používaná pro analýzu frekvenční odezvy lineárních systémů.

3.3.5 Rozvoj nelineárních sil

V kompaktním a na zobrazení nezávislém zápisu lze odhad (3.81) psát takto

$$\mathbf{q}_h(t, \hat{\mathbf{q}}_H) = \mathbf{h}_H(\Omega t) \hat{\mathbf{q}}_H. \quad (3.92)$$

Na rozdíl od jednorozměrného případu v rovnici (3.61) je nyní reprezentovaná funkce \mathbf{q}_h vektorovou funkcí s $\dim \mathbf{q} = n_y \times 1$. Proto sloupcový vektor $\hat{\mathbf{q}}_H$ obsahuje Fourierovy koeficienty všech prvků \mathbf{q}_h , takže $\dim \hat{\mathbf{q}}_H = n_y(2H + 1) \times 1$. Podobně je \mathbf{h}_H^* v rovnici (3.61) nahrazeno \mathbf{h}_H v rovnici (3.92). Pro připomenutí symbol \square^* používáme pro označení jednorozměrného případu. n -rozměrný případ lze pohodlně zapsat pomocí Kroneckerova součinu (\otimes), např. $\mathbf{h}_H = \mathbf{h}_H^* \otimes \mathbf{I}_n$, jak bylo uvedeno výše.

Rovnice (3.82) - (3.84) lze přepsat na

$$\hat{\mathbf{r}}_H(\hat{\mathbf{q}}_H) = \mathbf{0}. \quad (3.93)$$

Rozšířením této rovnice pomocí $\mathbf{r}_H = \mathbf{r}(\mathbf{q}_h, \dot{\mathbf{h}}_h, t)$ získáme

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_H(\hat{\mathbf{q}}_H) &= \langle \hat{\mathbf{h}}(\Omega t), \mathbf{r}(\mathbf{q}_h, \dot{\mathbf{h}}_h, t) \rangle \\ &= \langle \hat{\mathbf{h}}_H(\Omega t) \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{h}_H \hat{\mathbf{q}}_H, \mathbf{h}_H \Omega \nabla \hat{\mathbf{q}}_H, \mathbf{h}_H \Omega^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{q}}_H, t) \rangle \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \hat{\mathbf{h}}_H(\Omega t) \mathbf{r}(\mathbf{h}_H \hat{\mathbf{q}}_H, \mathbf{h}_H \Omega \nabla \hat{\mathbf{q}}_H, \mathbf{h}_H \Omega^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{q}}_H, t) dt \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Požadováním rovnosti v (3.94) získáme *klasickou* metodu harmonické rovnováhy. K tomu je však třeba vyjádřit příslušné integrály v uzavřeném tvaru. Pokud toto není možné, lze aproximovat $\hat{\mathbf{r}}_H(\hat{\mathbf{y}}_H)$ pomocí diskrétní Fourierovy transformace, která vede na

$$\mathbf{E}_{NH}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}_{nl,N}(\mathbf{E}_{NH} \hat{\mathbf{q}}_H, \mathbf{E}_{NH} \nabla \Omega \hat{\mathbf{q}}_H) = \mathbf{0}. \quad (3.95)$$

Povšimněme si, že N vzorků obsažených v $\tilde{\mathbf{r}}_N(\tilde{\mathbf{q}}_N, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_N)$ lze vyhodnotit nezávisle na sobě jako $\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{q}}_h(n), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_h(n), t_n)$, $n = 0, \dots, N - 1$. Metoda, která vyžaduje rovnost v (3.95), se nazývá *Střídavě časově-frekvenční* (ATF) harmonická rovnováha.

Pro pochopení tohoto názvu předpokládáme, že hledané řešení $\hat{\mathbf{q}}_h$ určíme iteračním algoritmem. Abychom postupně zlepšili počáteční odhad, musíme vyhodnotit levou stranu rovnice (3.95) což zpravidla vrátí nenulovou hodnotu. V každé iteraci tedy musíme vyhodnotit $\tilde{\mathbf{q}}_h(n) = \mathbf{q}_h(t_n, \hat{\mathbf{q}}_H)$, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_h(n) = \dot{\mathbf{q}}_h(t_n, \hat{\mathbf{q}}_H)$ v diskretních časových okamžicích t_n s využitím aktuálního odhadu pro $\hat{\mathbf{q}}_h$. V těchto časových okamžicích pak vyhodnotíme $\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{q}}_h(n), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_h(n), t_n)$. Nakonec transformujeme zpět do frekvenční oblasti použitím diskretní Fourierovy transformace.

Pokud tak chceme rozvinout ve rozvoj nelineárních sil ve Fourierovu řadu a tím získání koeficientů $\hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega)$ je ATF schéma nejspolehlivějším nástrojem. Obecně lze Fourierovy koeficienty nelineárních sil vyjádřit ve tvaru spojitého integrálu vycházejícího z rovnice (3.89)

$$\hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{\mathbf{h}}_H(\Omega t) \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{h}_H \hat{\mathbf{q}}_H, \mathbf{h}_H \Omega \nabla \hat{\mathbf{q}}_H, \mathbf{h}_H \Omega^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{q}}_H, t) dt. \quad (3.96)$$

U jednoduchých problémů lze nelineární síly ručně rozvinout do Fourierovy řady, obvykle pomocí trigonometrických identit (viz. část 3.3.1). To se může brzy stát zdlouhavé pro složité polynomy nebo vyšší řády krácení H . Pro tento rozvoj lze také použít systémy počítačové algebry. Optimální způsob tedy je užití ATF. Toto schéma je často využívanou metodou pro řešení nelineárních sil v metodě harmonické rovnováhy [32]. ATF schéma vyjádříme pro výpočet $\hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega)$ takto

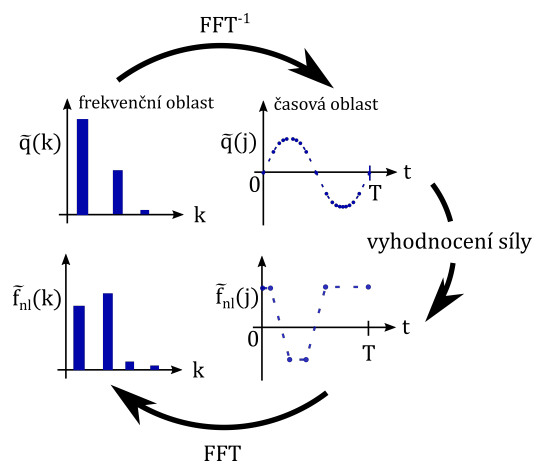
$$\hat{\mathbf{f}}_{nl,H}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega) \approx \hat{\mathbf{f}}_{nl}^{ATF}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega) = \mathbf{E}_{NH}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}_{nl,N}(\mathbf{E}_{NH} \hat{\mathbf{q}}_H, \mathbf{E}_{NH} \nabla \Omega \hat{\mathbf{q}}_H). \quad (3.97)$$

Algoritmus ATF schéma je zobrazen na Obr. 3.10. Vezmeme vzorky zobecněných souřadnic a rychlostí, $\tilde{\mathbf{q}}(j) = \mathbf{h}_H(\Omega t_j) \hat{\mathbf{q}}_H$ a $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(j) = \mathbf{h}_H(\Omega t_j) \nabla \Omega \hat{\mathbf{q}}_H$ v ekvidistantních časových okamžicích t_j přes jednu periodu kmitu. Vyhodnocením nelineárních sil \mathbf{f}_{nl} v těchto okamžicích získáme silové vzorky $\tilde{\mathbf{f}}_{nl}(j) = \mathbf{f}_{nl}(\tilde{\mathbf{q}}(j), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(j), t_j)$. Nakonec aplikací diskretní Fourierova transformace obdržíme (obecně aproximaci) Fourierových koeficientů $\hat{\mathbf{f}}_{nl,H}$ nelineárních sil.

3.3.6 Kontinuace podél křivky

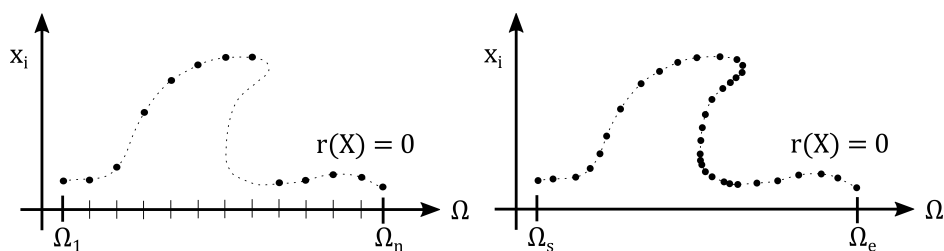
Jak již bylo zmíněno, u problémů kmitavých soustav je častým požadavkem analýza frekvenční odezvy. Tedy analýza odezvy soustavy v závislosti na volném parametru frekvence buzení Ω . Prvotním přístupem může být vytvoření posloupnosti diskretních frekvenčních bodů $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_n$ a vypočtení řešení pro jednotlivé body. Tato metoda, známá jako *sekvenční kontinuace*, je znázorněna na Obr. 3.11 vlevo. Jedná se tak o metodu, která vychází z předchozího bodu řešení

3.3. METODA HARMONICKÉ ROVNOVÁHY



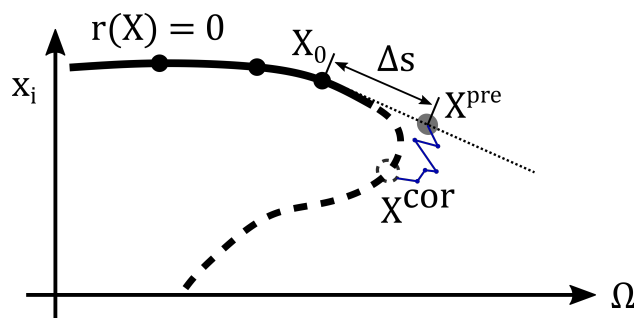
Obrázek 3.10: Ilustrace střídavě časově-frekvenčního režimu pro jednorozměrný případ.

při hledání následujících bodů. Problém s touto metodou nastává tehdy, pokud má řešení vzhledem k volnému parametru body zvratu, jak je znázorněno na Obr. 3.11 čárkovanou křivkou. Procházíme-li křivku zleva nebo zprava a postupujeme-



Obrázek 3.11: Posloupnost bodů řešení vytvořena sekvenční kontinuitu (vlevo) a kontinuitu podél křivky (vpravo).

li přes příslušný bod zvratu, je další řešení vzdáleno od přechodního. Řešič tak nemusí konvergovat nebo je ke konvergenci potřeba velké množství iterací. Navíc tento postup nedokáže najít řešení na převíslé větvi mezi dvěma body zvratu. Nabízí se řešení tohoto nedostatku ve formě *kontinuity podél křivky*, metody, která je zobrazena na Obr. 3.11 vpravo. Tato metoda je popsána následovně. Uvažujme



Obrázek 3.12: Prediktor-korektor metoda s tečným prediktorem.

případ analýzy frekvenční odezvy

$$\begin{aligned}
 &\text{vyřešit } \mathbf{r}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \\
 &\text{pro } \mathbf{X} = [\mathbf{x}^T \ \Omega]^T \\
 &\text{kde } \mathbf{r}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1} \\
 &\text{pro interval } \Omega^s \leq \Omega \leq \Omega^e.
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Účelem kontinuity je vytvořit posloupnost vhodně rozmístěných bodů řešení v daném rozsahu parametrů $\Omega_s \leq \Omega \leq \Omega_e$ a překonat body zvratu (pokud existují). Kromě překonávání bodů zvratu, kontinuita zvyšuje numerickou robustnost a efektivitu [5]. To je důležité zejména v oblastech se silnými změnami gradientu (např. v blízkosti rezonancí). Zde se rovnoměrná vzdálenost bodů řešení vzhledem k volnému parametru nezdá být vhodná. Přesné umístění silných gradientových změn vzhledem k volnému parametru však obvykle není předem známo. Pokračovací algoritmy mohou automaticky upravovat délku kroku v závislosti na chování (např. změnách gradientu) řešení.

Zdaleka nejběžnější technikou kontinuity podél křivky jsou metody *prediktor-korektor*, které jsme již představili v kapitole 3.1.2 věnované metodám typu Runge Kutta. Na Obr. 3.12 je znázorněna metoda typu prediktor-korektor s tečným prediktorem. Tuto metodu zde pouze stručně popíšeme. Pro podrobnosti odkazujeme na [24]. Počínaje daným bodem řešení \mathbf{X}_0 se predikuje další bod tak, že se postoupí o určitou vzdálenost Δs do odhadovaného směru větve \mathbf{X}^{pre} . Předpovězený bod se zpravidla nenachází na větvi řešení. Pomocí některého z numerických řešičů se předpovězený bod iterativně opravuje dokud není reziduum \mathbf{r} pod danou tolerancí a nenajde se další bod řešení \mathbf{X}^{cor} .

Prediktor

Možná nejvíce rozšířeným prediktorem je prediktor s krokem tečným k větvi řešení. Tudíž predikovaný bod je

$$\mathbf{X}^{pre} = \mathbf{X}_0 + \Delta s \mathbf{X}_1^t, \quad (3.99)$$

kde \mathbf{X}_0 je předchozí bod řešení, Δs je délka kroku a \mathbf{X}_1^t je normalizovaný tečný vektor. Tento vektor je určen řešením soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}_0) \mathbf{X}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}^T \mathbf{X}_1 = 1. \quad (3.100)$$

První část soustavy rovnic lze odvodit z požadavku, že první řád Taylorova rozvoje rezidua okolo bodu \mathbf{X}_0 by měl být nulový ve směru tečeného vektoru. Tohle pouze omezuje směr tečeného vektoru nikoliv jeho délku. Tudíž tato soustava je neurčitá, kde $\dim(\mathbf{X}) = \dim(\mathbf{r}) + 1 = n_x + 1$. Druhá část této rovnice by měla omezit délku tečeného vektoru. Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{X}) \times 1}$ musí být takový, aby $\mathbf{c}^T \mathbf{X}_1 \neq 0$, ale jinak je to libovolné. Obvyklá volba pro \mathbf{c} je předchozí tečný vektor nebo jednotkový vektor s 1 umístěnou na index proměnné, která prošla největší změnou v předchozím kroku. Po vyřešení rovnice (3.100) je tečný vektor normalizován následovně $\mathbf{X}_1^t = \mathbf{X}_1 \sqrt{\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1}$, aby měl délku jedna. Povšimněme si, že tečný vektor může stále směřovat nesprávným směrem. Abychom zjistili, zda ukazuje správným směrem, můžeme jej porovnat s vektorem s předchozím tečným nebo sečným vektorem. Pokud je vnitřní součin kladný a délka kroku není příliš velká, \mathbf{X}_1^t by měl ukazovat v zamýšleném směru. Nakonec se normovaný tangenciální vektor se použije pro přechod predikčního kroku v souladu s rovnicí.

Kapitola 4

Periodické odezvy vybraných nelineárních systémů

V této kapitole se zabýváme vybranými nelineárními mechanickými systémy, které jsou buzeny buď harmonickou silou, jak tomu je v případě oscilátorů s jedním stupněm volnosti, nebo kinematickým buzením v případě nosníkových systémů. Pro studované systémy jsou formulovány matematické modely, jež obsahují různé typy nelinearity. Jmenovitě se jedná o tyto nelinearity

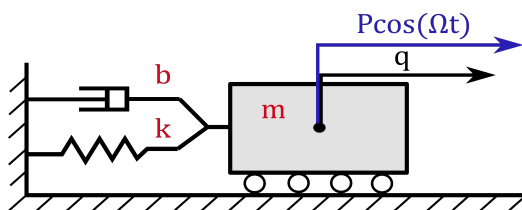
- kubická nelinearita,
- pružná nárazka,
- suché tření.

Výše uvedené nelinearity hrají významnou roli v praktických úlohách, jelikož právě v těchto úlohách se s nimi můžeme potkat. Obecně tyto nelinearity zásadně mění charakter odezvy zkoumaných systémů oproti jejich lineárnímu případu. Pro zkoumané systémy obsahující jednotlivé nelinearity jsou hledány periodické odezvy pro různé frekvence buzení pomocí tří různých metod představených v kapitole 3. Jedná se o metodu harmonické rovnováhy, metodu střelby a numerickou integraci počátečních úloh. Odezvy získané pomocí zmíněných metod jsou dále analyzovány jak v rámci jednoho systému tak mezi sebou a obdržené výsledky jsou zobrazovány v několika formách. Pro každý zkoumaný systém je vypočtena a zobrazena amplitudová charakteristika, která vypovídá o frekvenční odezvě systému. Poté je zobrazen vývoj periodické odezvy systému jakožto posloupnost trajektorií ve fázové rovině (FR) a pro vybrané trajektorie je vypočteno rekurentní

zobrazení (RZ). Nadále je zkoumána numerická citlivost metody harmonické rovnováhy na různé parametry. Sledujeme změnu získaného řešení při změně řídicích parametrů metody (jmenovitě řád zkrácení Fourieovy řady H , počet vzorků v ATF schématu N a délka kontinuálního kroku Δs).

4.1 Oscilátory s jedním stupněm volnosti

V této části jsou představeny odezvy vybraných mechanických systémů s jedním stupněm volnosti. Matematický model zkoumaných systémů tvoří jediná obyčejná



Obrázek 4.1: Schéma lineárního oscilátoru s jedním stupněm volnosti.

diferenciální rovnice ve tvaru

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = P \cos \Omega t. \quad (4.1)$$

Tento systém si lze představit jako hmotu připojenou k rámu visko-elastickou vazbou, jak je zobrazeno na Obr. 4.1. Pro snazší porovnání získaných odezev mají zkoumané systémy stejné strukturální parametry

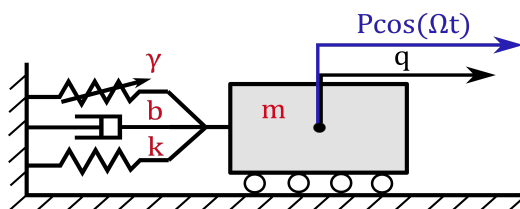
$$m = 0.8, \quad b = 0.03, \quad k = 1.8,$$

kde m [kg] vyjadřuje hmotnost, b [$\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$] značí viskózní tlumení, k [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$] je tuhost lineární pružiny. Vlastní frekvence takového systému lze určit jako

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.5 \text{ rad/s} = 0.24 \text{ Hz}. \quad (4.2)$$

4.1.1 Duffingův oscilátor

Duffingův oscilátor je jedním z řady prostých, dlouhodobě, zejména analyticky, studovaných nelineárních modelů. V kapitole 3.3.1 a 3.3 bylo odvozeno analytické řešení tohoto oscilátoru pomocí metody harmonické rovnováhy, kde byl uvažován pouze jeden člen Fourierovy řady. V této části je provedena podrobnější analýza periodické odezvy Duffingova oscilátoru. Matematický model Duffingova



Obrázek 4.2: Schéma Duffingova oscilátoru.

oscilátoru buzeného harmonickou silou je dán jedinou obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu v následujícím tvaru

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq + \gamma q^3 = P \cos \Omega t. \quad (4.3)$$

Rovnice (4.3) popisuje model znázorněný na Obr. 4.2. V tomto schématu je kubické nelinearitě přiřazena schématická značka stejná jako pro lineární pružinu, ale s přidáním šipky, která značí nelineární závislost vratné síly na výchylce. *Kubická* nelinearita γq^3 se tak dá chápat jako elastická pružina, jejíž vratná síla je rovna třetí mocnině výchylky. Tato pružina přináší do odezvy takzvanou tuhnoucí charakteristiku. Při analýze systému se tak může zdát, že pro rostoucí frekvence buzení systém „tuhne“.

Sledujme nyní vývoj periodické odezvy rovnice (4.3) v závislosti na frekvenci buzení f_{ex} . Parametry pro tuto soustavu jsou voleny následovně

$$\gamma = 0.33, \quad P = 0.33,$$

kde γ představuje koeficient míry nelinearity a P [m] je amplituda silového harmonického buzení.

Na Obr. 4.3 je zobrazena amplituda A nelineárního systému (4.3) v závislosti na frekvenci buzení f_{ex} . Pro porovnání s nelineární odezvou byla vypočtena i odezva lineární části systému (4.3), u které dochází k rezonanci na $\Omega = 0.24$ Hz a o amplitudě $A_{lin} = 7.17$ m. Vzhledem k vyšší amplitudě odezvy lineární části

4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

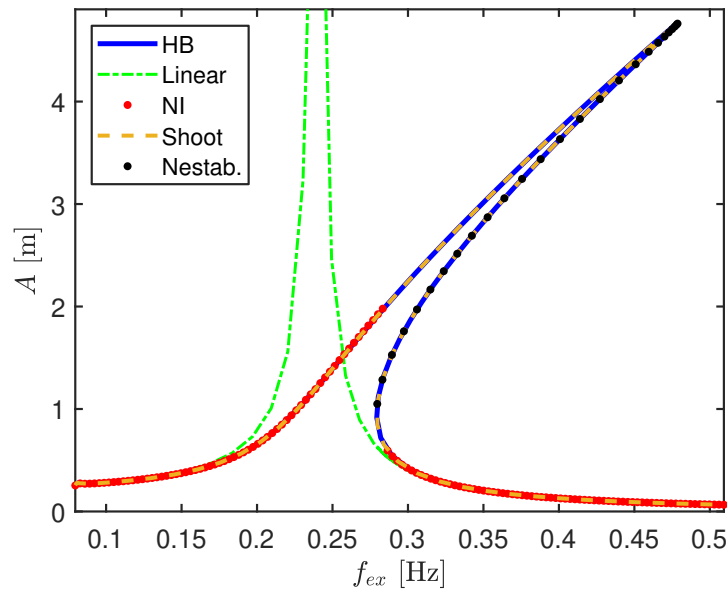
rovnice (4.3), je řešení nelineární odezvy na Obr. 4.3 přiblíženo pro lepší čitelnost. Řešení nelineárního systému bylo získáno pomocí tří různých metod na předem zvoleném intervalu budících frekvencí $f_{ex} \in \langle 0.08, 0.5 \rangle$. V případě HBM a metody střelby byl interval frekvencí volen kontinuálním programem. Pro numerickou integraci byla zvolena sekvenční kontinuační metoda a body řešení byly předem zvolené, viz níže. Počet vygenerovaných bodů řešení jednotlivých metod tak byl

$$HBM = 109, \quad Shoot = 88, \quad NI = 136. \quad (4.4)$$

Numerická integrace byla tedy spuštěna 136 krát. Časová náročnost jednotlivých metod byla následující

$$HBM = 1.1 \text{ s}, \quad Shoot = 5.1 \text{ s}, \quad NI = 4.1 \text{ s}. \quad (4.5)$$

U tohoto systému nedocházelo v zásadním rozdílu ve výpočetním čase jednotlivých metod. Nejrychlejší metodou se stala HBM. Numerická integrace a metoda střelby vykazují blízkou časovou náročnost, avšak metoda střelby poskytuje kompletní amplitudovou křivku. Řešení získané pomocí HBM přísluší na Obr. 4.3

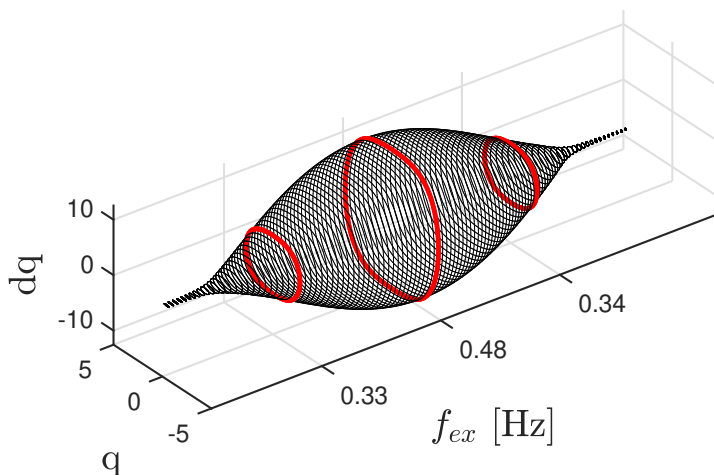


Obrázek 4.3: Srovnání amplitudových charakteristik napříč metodami.

modře zobrazená křivka. Pro získání tohoto řešení byly uvažované tyto parametry

$$H = 7, \quad N = 2^8, \quad \Delta s = 0.02.$$

4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI



Obrázek 4.4: Vývoj periodické odezvy Duffingova oscilátoru podél amplitudové křivky.

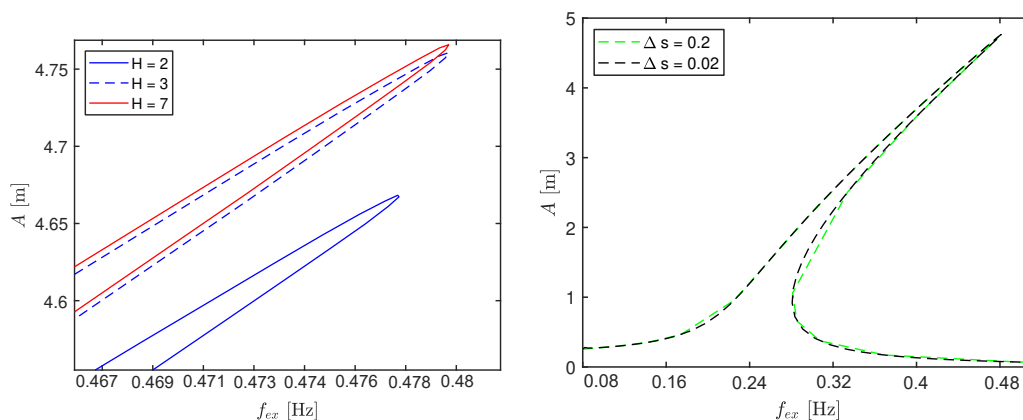
Jako počáteční odhad řešení pro HBM byla zvolena amplituda přenosu lineární části rovnice (4.3)

$$Q = \frac{-\Omega_s^2 m + i\Omega_s b + k}{P}, \quad (4.6)$$

kde Ω_s je počáteční hodnota budící frekvence v rad/s. Pro metodu střelby, která je na Obr. 4.3 zobrazena žlutou, čárkovanou čarou byly parametry N a Δs voleny stejně. Z výsledků na Obr. 4.3 je patrné, že HBM a metoda střelby poskytly stejné výsledky. Celková nelineární odezva změnila svůj charakter (došlo k „ohnutí“ doprava) oproti lineárnímu případu. Rezonanční frekvence se zvýšila na $f_{ex} = 0.48$ Hz a maximální amplituda klesla na hodnotu $A_{nelin} = 4.3$ m. Po dosažení rezonance řešení ztratilo stabilitu až do hodnoty frekvence $f_{ex} = 0.28$ Hz. Na Obr. 4.3 je tato nestabilní větev označena černými tečkami. Odezva získaná pomocí numerické integrace počáteční úlohy, označené na Obr. 4.3 červenými tečkami, přeskočila na stabilní větev řešení při frekvenci $f_{ex} = 0.28$ Hz, kdy se poprvé objevili dvě větve řešení. Tato metoda tak zvolila větev s minimální energetickou náročností. Z metody numerické integrace tak není možné získat informaci o „pravé“ rezonanci systému. Bez znalosti kompletní amplitudové křivky bychom nejspíše usuzovali, že systém dosahuje rezonance již v bodě „přeskoku“ na $f_{ex} = 0.28$ Hz.

Vývoj periodických trajektorií Duffingova oscilátoru lze zobrazit jako sérii fázových trajektorií v tří-stavového prostoru. Tento prostor je tvořen posloupností periodických trajektorií ve fázovém prostoru, kde každá další trajektorie je bo-

4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI



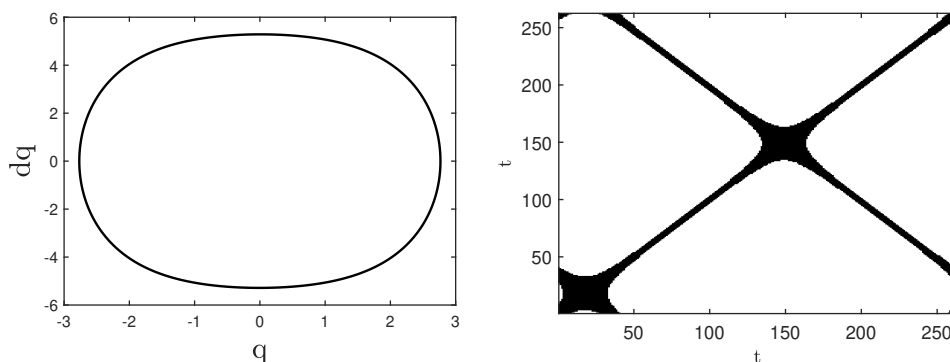
Obrázek 4.5: Porovnání amplitudových křivek při změnách parametrů: řád Fourierovy řady H (vlevo) a délka kontinuačního kroku Δs (vpravo).

dem řešení na amplitudové křivce získané kontinuací řešení získaného HBM. Na Obr. 4.4 je tento vývoj zobrazen a je patrné, že si trajektorie zachovávají eliptický tvar bez ohledu na stabilitu napříč budícími frekvencemi f_{ex} . Tři červeně označené trajektorie na Obr. 4.4 jsou dále zobrazeny na Obr. 4.6 - Obr. 4.8 vlevo, kde jsou izolovány od ostatních řešení. Na Obr. 4.6 - Obr. 4.8 vpravo jsou zobrazeny rekurentní zobrazení příslušející periodickým trajektoriím pro volbu $\varepsilon = 0.2$. Porovnáním Obr. 4.6 a Obr. 4.8 lze usoudit, že se jedná o charakterově identické odezvy, které jsou vůči sobě fázově posunuty.

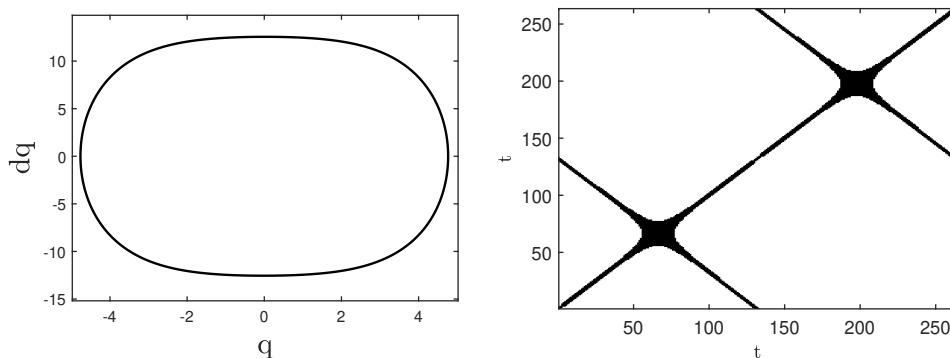
Posledním zkoumaným aspektem je citlivost získaných řešení na řídicích parametrech HBM. Na Obr. 4.5 je zobrazeno porovnání amplitudových křivek při změně parametrů H a Δs . Jak je patrné na 4.5 vlevo a jak bylo ukázáno v kapitole 3.3.1, periodická odezva Duffingova oscilátoru je dobře aproximovatelná i nižšími počty uvažovaných členů Fourierovy řady, což může být způsobeno eliptickým charakterem odezvy. Rozdíl amplitud pro $H = 2$ a $H = 3$ je řádu desetin a pro $H = 3$ a $H = 7$ se chyba pohybuje v řádu setin. Pro $H \geq 7$ není získáno zásadní zpřesnění, spíše roste výpočetní náročnost. Periodická odezva Duffingova oscilátoru je také málo závislá na počátečním odhadu řešení. Při nastavení $Q = 0$ byl řešič stále schopen dobře konvergovat ke správnému řešení.

Změna délky kroku Δs nepřinášela zásadní zlepšení amplitudové křivky. Při hodnotě $\Delta s = 0.2$ bylo dosaženo stejné podrezonanční i rezonanční odezvy. Avšak pro nadrezonanční odezvu došlo, kvůli vyšší křivosti křivky, k výraznému odklonu od reálné amplitudové křivky.

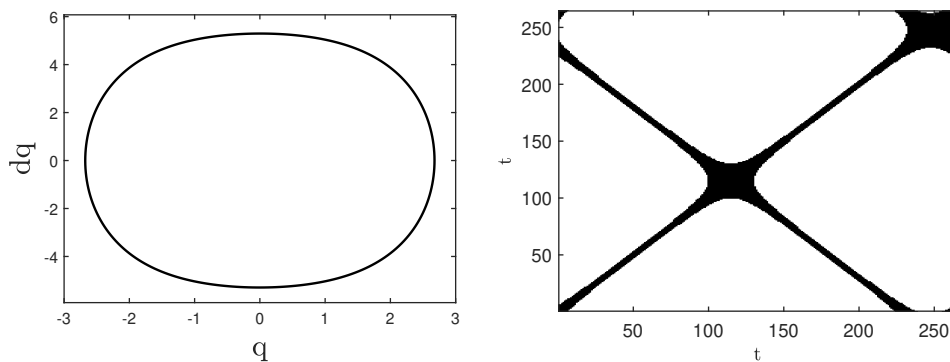
4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI



Obrázek 4.6: Stabilní trajektorie Duffingova oscilátoru pro $f_{ex} = 0.33$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).



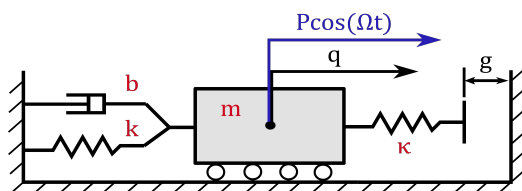
Obrázek 4.7: Stabilní trajektorie Duffingova oscilátoru pro $f_{ex} = 0.48$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).



Obrázek 4.8: Nestabilní trajektorie Duffingova oscilátoru pro $f_{ex} = 0.34$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).

4.1.2 Oscilátor s pružnou narážkou

Uvažovaný model se skládá z hmoty připojené visko-elastickou vazbou k rámu na jedné straně a pružnou narážkou na straně druhé. Matematický model oscilá-



Obrázek 4.9: Schéma oscilátoru s pružnou narážkou.

toru s pružnou narážkou buzeného harmonickou silou je tvořen jedinou obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu v následujícím tvaru

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq + f_u(q - g) = P \cos \Omega t. \quad (4.7)$$

Tento model obsahuje tzv. *nehladkou nelinearitu* tvořenou funkcí f_u , která je definována následovně

$$f_u(x) = \kappa \max(x, 0) = \kappa \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Je třeba podotknout, že se nejedná o kontaktní úlohu. Narážka je zde připojena do modelu na pouze základě překročení určité výchylky, která je definována mezerou g . Tato nelinearita má, stejně jako v případě Duffingova oscilátoru, tuhnoucí charakter. Sledujme nyní vývoj periodické odezvy rovnice (4.7) v závislosti na frekvenci buzení f_{ex} . Parametry pro tuto soustavu jsou voleny následovně

$$\kappa = 7.5, \quad g = 0.42, \quad P = 0.1,$$

kde κ [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$] představuje tuhost pružné narážky a g [m] je mezera mezi rámem a narážkou.

Na Obr. 4.10 je zobrazena odezva nelineárního systému (4.7) v závislosti na frekvenci buzení f_{ex} . Pro porovnání s nelineární odezvou byla vypočtena i odezva lineární části systému (4.7), u které dochází k rezonanci na frekvenci $\Omega = 0.24$ Hz a o amplitudě $A_{lin} = 7.51$ m. Odezva nelineárního systému byla získána pomocí tří různých metod na předem zvoleném intervalu budících frekvencí $f_{ex} \in \langle 0.08, 0.5 \rangle$. V případě HBM a metody střelby byl interval frekvencí volen

4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

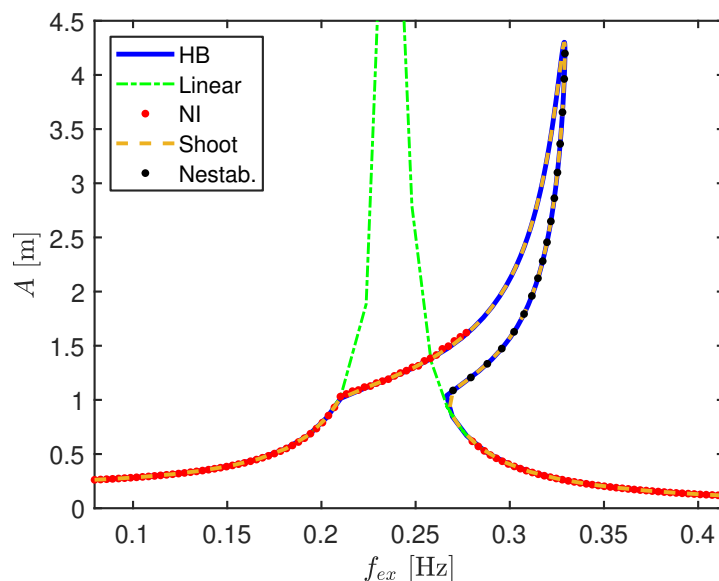
kontinuačním programem. Pro numerickou integraci byla zvolena sekvenční kontinuace a body řešení byly předem zvolené, viz níže. Počet vygenerovaných bodů řešení jednotlivých metod tak byl

$$HBM = 127, \quad Shoot = 77, \quad NI = 106. \quad (4.9)$$

Numerická integrace byla tedy spuštěna 106 krát. Časová náročnost jednotlivých metod byla následující

$$HBM = 5.5 \text{ s}, \quad Shoot = 41.4 \text{ s}, \quad NI = 2.18 \text{ s}. \quad (4.10)$$

Nejrychlejší metodou byla numerická integrace. Ta, však neposkytla kompletní informaci o amplitudové křivce. Tuto informaci poskytli obě další metody, avšak odezva získaná pomocí metody střelby byla velmi časově náročná, což mohlo být způsobené častým vyčíslováním nelineární funkce. Časově optimální metodou se tak stala HBM. Modře zobrazená křivka na Obr. 4.3 patří řešení získaném

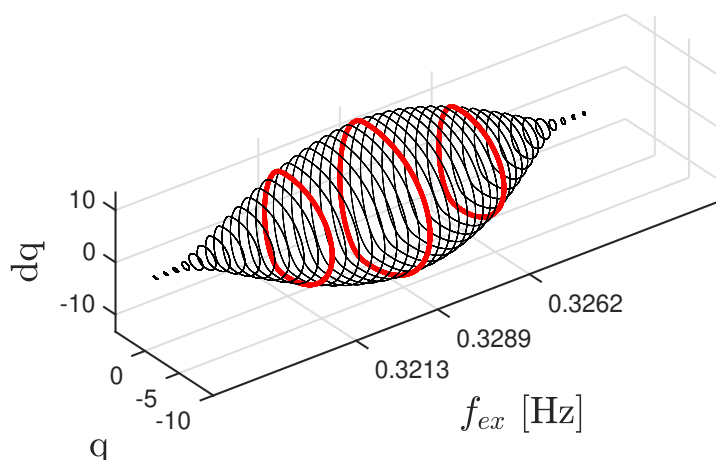


Obrázek 4.10: Srovnání amplitudových charakteristik získaných třemi různými metodami.

metodou harmonické rovnováhy. Pro získání tohoto řešení byly uvažované tyto parametry

$$H = 20, \quad N = 2^{12}, \quad \Delta s = 0.02.$$

4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI



Obrázek 4.11: Vývoj periodického řešení oscilátoru s pružnou narážkou podél amplitudové křivky.

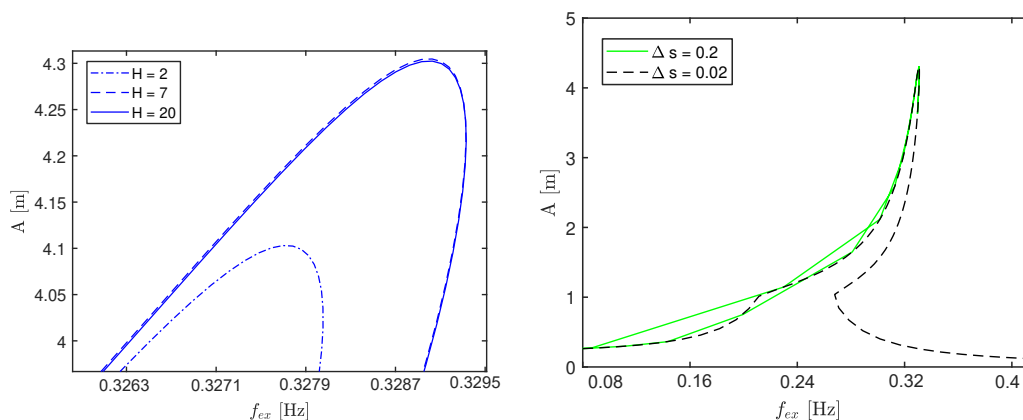
Jako počáteční odhad řešení pro HBM byla opět zvolena amplituda lineární části rovnice (4.3)

$$Q = \frac{-\Omega_s^2 m + i\Omega_s b + k}{P}, \quad (4.11)$$

Pro metodu střelby, která je na Obr. 4.3 zobrazena žlutou, čárkovanou čarou, byly parametry N a Δ_s voleny stejně. Z výsledků na Obr. 4.10 je patrné, že metoda harmonické rovnováhy a metoda střelby jsou v dobré shodě. Pro nízké hodnoty f_{ex} je odezva systému shodná s lineární odezvou. Na frekvenci $f_{ex} = 0.21$ Hz projde systém bifurkačním bodem, kde dochází k překročení mezery g výchylkou q a systém se stává nelineární. Tato nelinearita se pak pro rostoucí frekvence buzení projeví jako „vybočení“ amplitudové křivky. Dále nastalo přeladění rezonance systému na hodnotu $f_{ex} = 0.33$ Hz a maximální amplituda klesla na hodnotu $A_{nelin} = 4.3$ m. Po dosažení rezonance řešení ztratilo stabilitu až do hodnoty frekvence $f_{ex} = 0.28$ Hz. Odezva získaná pomocí numerické integrace, označená na Obr. 4.10 červenými tečkami, přeskočila na stabilní větev řešení při frekvenci $f_{ex} = 0.28$ Hz, kdy se poprvé objevily dvě větve řešení. Tato metoda tak opět zvolila větev s minimální energetickou náročností.

Na Obr. 4.11 zobrazen vývoj periodických trajektorií tohoto oscilátoru a je patrné, že si trajektorie zachovávají eliptický tvar, bez ohledu na stabilitu, napříč budícími frekvencemi f_{ex} . Tři červeně označené trajektorie na Obr. 4.11 jsou dále zobrazeny na Obr. 4.13 - Obr. 4.15 vlevo, kde jsou izolovány od ostatních řešení. Na Obr. 4.13 - Obr. 4.15 vpravo jsou zobrazeny rekurentní zobrazení příslušející

4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

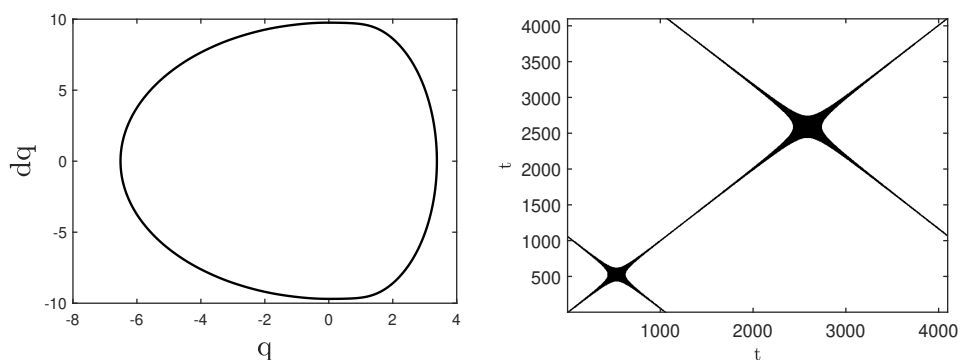


Obrázek 4.12: Porovnání získaných amplitudových křivek při změnách parametrů: řád Fourierovy řady H (vlevo) a délka kontinuálního kroku Δs (vpravo).

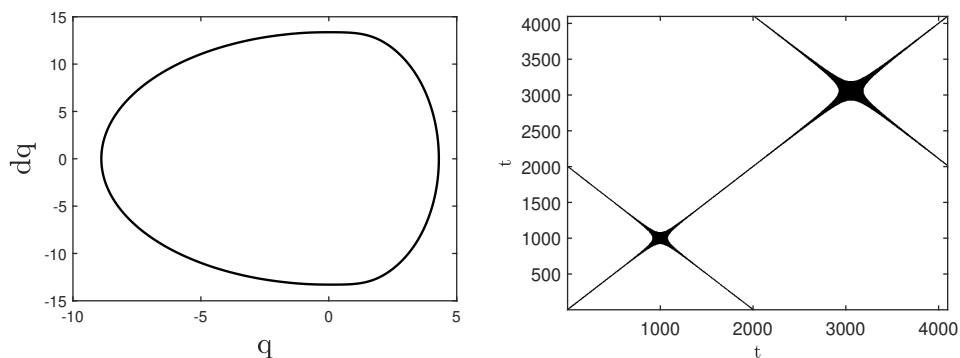
periodickým trajektoriím pro volbu $\varepsilon = 0.1$. Porovnáním Obr. 4.13 a Obr. 4.15 lze zjistit, že se jedná o charakterově identické odezvy, které jsou vůči sobě mírně fázově posunuty.

Posledním zkoumaným aspektem je citlivost získaných řešení na řídicích parametrech metody harmonické rovnováhy. Na Obr. 4.12 je zobrazeno porovnání amplitudových křivek při změně parametrů H a Δs . Jak je patrné na Obr. 4.12 vlevo, periodická odezva tohoto oscilátoru je dobře aproximovatelná i nižšími počty uvažovaných členů Fourierovy řady. To, lze opět přičíst eliptickému charakteru odezvy. Rozdíl amplitud pro $H = 2$ a $H = 3$ je řádu až dvou desetín a pro $H = 3$ a $H = 7$ se chyba pohybuje v řádu setin. Pro $H \geq 7$ není získáno zásadní zpřesnění, spíše roste výpočetní náročnost. Periodická odezva tohoto oscilátoru je také málo závislá na počátečním odhadu řešení. Při nastavení $Q = 0$ byl řešič stále schopen dobře konvergovat ke správnému řešení. Změna délky kroku Δs poskytovala zásadní zlepšení amplitudové křivky. Při hodnotě $\Delta s = 0.2$ nebylo dosaženo vytrasování kompletní křivky, ale po dosažení rezonance pokračoval řešič opačným směrem, což může být způsobeno vysokou strmostí křivky v okolí rezonance. Při zjemnění délky kroku bylo dosaženo vytrasování kompletní křivky. Jemnější délka kroku však znamená vyšší časovou náročnost. Optimální strategií se tak stalo zvýšení H , které dovolilo hrubší Δs .

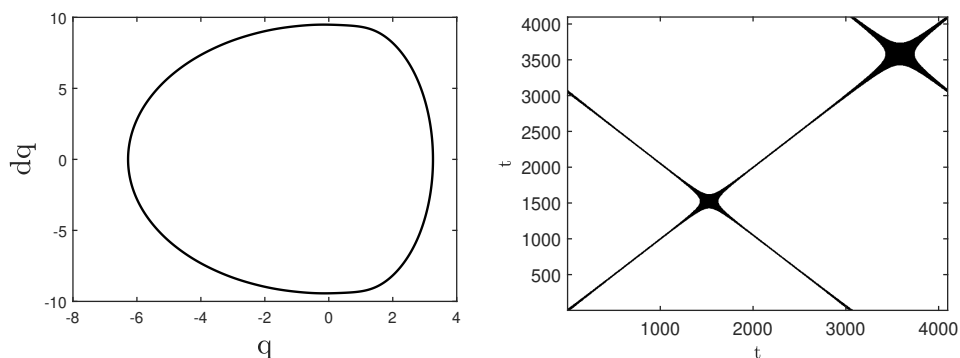
4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI



Obrázek 4.13: Stabilní trajektorie oscilátoru s pružnou nárazkou pro $f_{ex} = 0.3213$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).



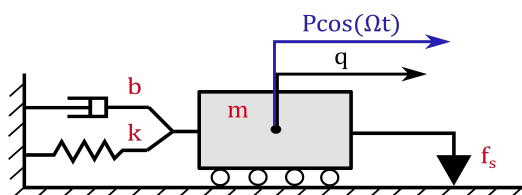
Obrázek 4.14: Stabilní trajektorie oscilátoru s pružnou nárazkou pro $f_{ex} = 0.3289$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).



Obrázek 4.15: Nestabilní trajektorie oscilátoru s pružnou nárazkou pro $f_{ex} = 0.3262$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).

4.1.3 Oscilátor se suchým třením

Uvažovaný model se skládá z hmoty připojené visko-elastickou vazbou k rámu na jedné straně a třecím elementem na straně druhé. Matematický model oscilá-



Obrázek 4.16: Schéma oscilátoru se suchým třením.

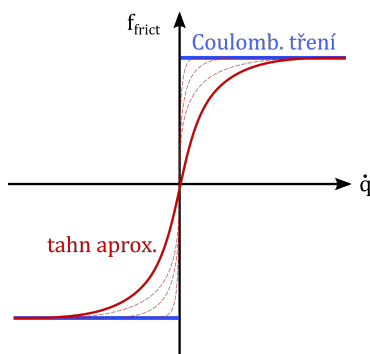
toru se suchým třením buzeného harmonickou silou je tvořen jedinou obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu v následujícím tvaru

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq + f_{frict} = P \cos \Omega t. \quad (4.12)$$

Stejně jako předchozím případě i tento systém obsahuje nehladkou nelinearitu. Zde se jedná o suché tření mezi třecím elementem a rámem charakterizované *Coulombovo modelem tření*. Jelikož se s nehladkými funkcemi hůře počítá, je tento model aproximován hladkou tanh funkcí a nabývá tak tvaru

$$f_{frict} = F_{thr} \tanh\left(\frac{\dot{q}}{\epsilon}\right), \quad (4.13)$$

kde F_{thr} je maximální hodnota tření a ϵ je regularizační parametr funkce. Tímto parametrem určujeme strmost funkce f_{frict} . Na Obr. 4.17 je tento model znázor-



Obrázek 4.17: Model suchého tření a jeho aproximace.

4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

něh spolu s jeho aproximacemi. Sledujme nyní vývoj periodické odezvy rovnice (4.12) v závislosti na frekvenci buzení f_{ex} . Parametry pro tuto soustavu jsou voleny následovně

$$F_{thr} = 0.3, \quad \epsilon = 8 \cdot 10^{-4}, \quad P = 0.42,$$

kde F_{thr} [N] je maximální hodnota tření a ϵ je regularizační parametr funkce \tanh .

Na Obr. 4.18 je zobrazena odezva nelineárního systému (4.12) v závislosti na frekvenci buzení f_{ex} . Pro porovnání s nelineární odezvou byla vypočtena i odezva lineární části systému (4.12), u kterého dochází k rezonanci na frekvenci $\Omega = 0.24$ Hz a o amplitudě $A_{lin} = 1.45$ m. Odezva nelineárního systému byla získána pomocí tří různých metod na předem zvoleném intervalu budících frekvencí $f_{ex} \in \langle 0.08, 0.5 \rangle$. V případě HBM a metody střelby byl interval frekvencí volen kontinuálním programem. Pro numerickou integraci byla zvolena sekvenční kontinuace a body řešení byly předem zvolené, viz níže. Počet vygenerovaných bodů řešení jednotlivých metod tak byl

$$HBM = 201, \quad Shoot = 49, \quad NI = 121. \quad (4.14)$$

Metoda harmonické rovnováhy v tomto případě potřebovala o mnoho víc bodů řešení k vykreslení křivky oproti metodě střelby a numerická integrace byla spuštěna 121 krát. Časová náročnost jednotlivých metod byla následující

$$HBM = 4.9 \text{ s}, \quad Shoot = 27.6 \text{ s}, \quad NI = 25 \text{ s}. \quad (4.15)$$

Nejrychlejší metodou byla HBM, a to se značným náskokem. Metoda střelby i numerická integrace vypočetli kompletní frekvenční odezvu ve velmi blízkých časech. Modře zobrazená křivka na Obr. 4.18 patří řešení získaného metodou harmonické rovnováhy. Pro získání tohoto řešení byly uvažované tyto parametry

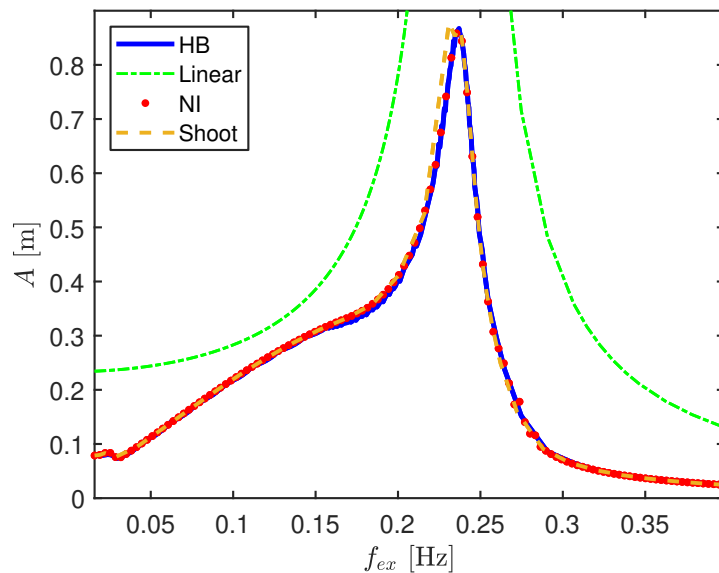
$$H = 20, \quad N = 2^{12}, \quad \Delta s = 0.02.$$

Jako počáteční odhad řešení pro HBM byla opět zvolena amplituda lineární části rovnice (4.12)

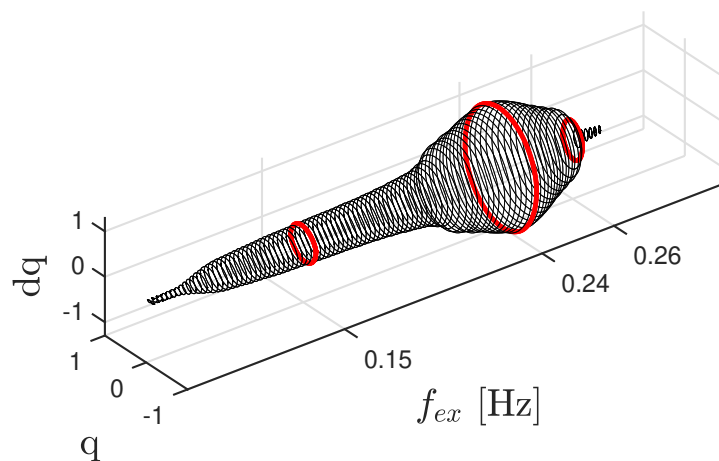
$$Q = \frac{-\Omega_s^2 m + i\Omega_s b + k}{P}, \quad (4.16)$$

Odezva získaná metodou střelby je zobrazena na Obr. 4.3 žlutou, čárkovanou čarou. Pro tuto metodu byly parametry N a Δs voleny stejně jako pro HBM. Z výsledků na Obr. 4.10 je patrné, že všechny metody poskytlí shodné výsledky.

4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

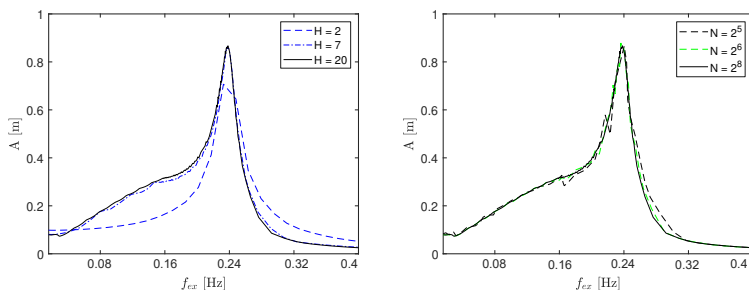


Obrázek 4.18: Srovnání amplitudových charakteristik získaných třemi různými metodami.



Obrázek 4.19: Vývoj periodického řešení oscilátoru se suchým třením podél amplitudové křivky.

4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI



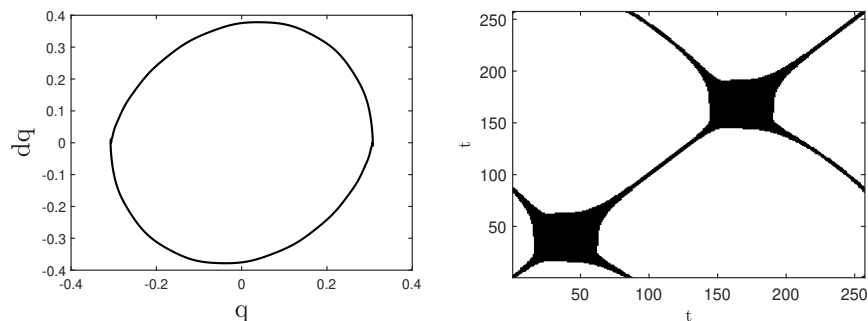
Obrázek 4.20: Porovnání získaných amplitudových křivek při změnách parametrů: řád Fourierovy řady H (vlevo) a délka kontinuačního kroku Δs (vpravo).

V okolí rezonance ale dochází k mírnému rozdílu mezi metodou střelby a ostatními metodami, který může být opět způsoben častým vyčíslováním nelineární funkce. Celková nelineární odezva změnila svůj charakter oproti lineárnímu případu a je ve všech bodech stabilní. Došlo k obecnému utlumení amplitudy (v rezonanci na maximální hodnotu $A_{nelin} = 0.87$ m) a v podrezonanční oblasti se začla silně projevovat nelinearita. Suché tření je pro malé výchylky dominantní. Od $f_{ex} = 0.2$ Hz se vliv tohoto tření vytrácí a začne převládat vnější buzení. Systém má pak charakterově lineární odezvu, která je značně utlumena působícím třením. Z toho důvodu se systém nepřeladil, a tak zůstala hodnota rezonanční frekvence stejná jako v lineárním případě.

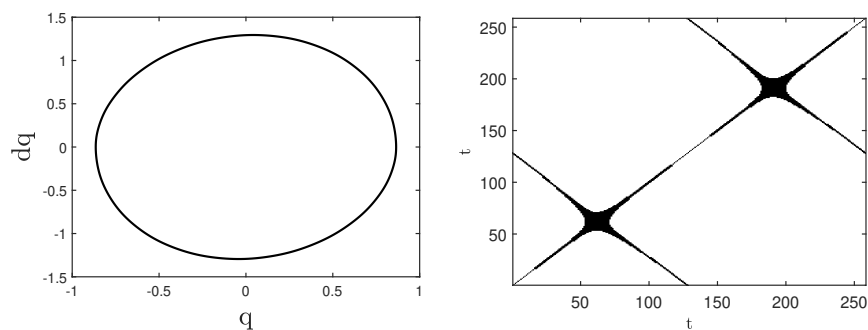
Na Obr. 4.19 je zobrazen vývoj periodické odezvy systému. Tři červeně označené trajektorie na Obr. 4.19 jsou dále zobrazeny na Obr. 4.21 - Obr. 4.23 vlevo, kde jsou izolovány od ostatních řešení a vpravo jsou zobrazeny rekurentní zobrazení příslušející periodickým trajektoriím pro volbu $\varepsilon = 0.01$. Na Obr. 4.21 vlevo je patrná malá singularita pro maxima výchylky. Tato singularita je lépe viditelná v příslušném RZ a způsobuje charakteristické „ohnutí“ dvou příčných větví. Pokud bychom zvýšili F_{thr} objevilo by se těchto singularit více, avšak to by vedlo k numerické nestabilitě. Při dosažení rezonance toto „ohnutí“ vymizí a vrací se až v nadrezonanční oblasti.

Posledním zkoumaným aspektem je citlivost získaných řešení na řídicích parametrech HBM. Na Obr. 4.20 je zobrazeno porovnání amplitudových křivek při změně parametrů H a N . Jak je patrné na 4.20 vlevo, periodická odezva tohoto oscilátoru není dobře aproximovatelná nižšími počty H . Změna počtu vzorků N způsobovala výrazné změny v kvalitě řešení. Pro nízké hodnoty N se zdá, že je nelineární síla podvzorkována a jsou při těchto hodnotách patrné časté „hroty“ v amplitudové křivce. Ty, pro $N > 2^8$ mizí.

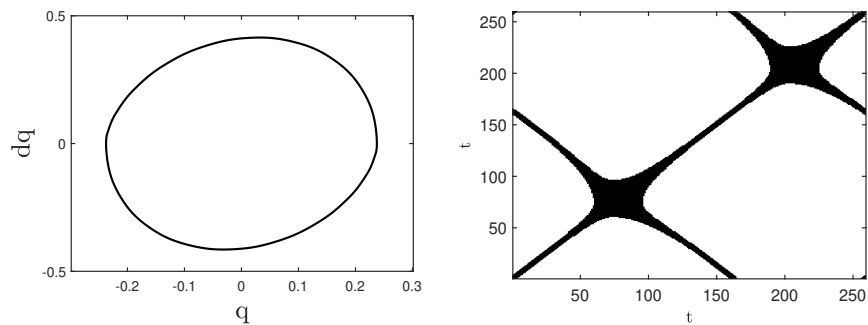
4.1. OSCILÁTORY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI



Obrázek 4.21: Stabilní trajektorie oscilátoru se suchým třením pro $f_{ex} = 0.15$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).



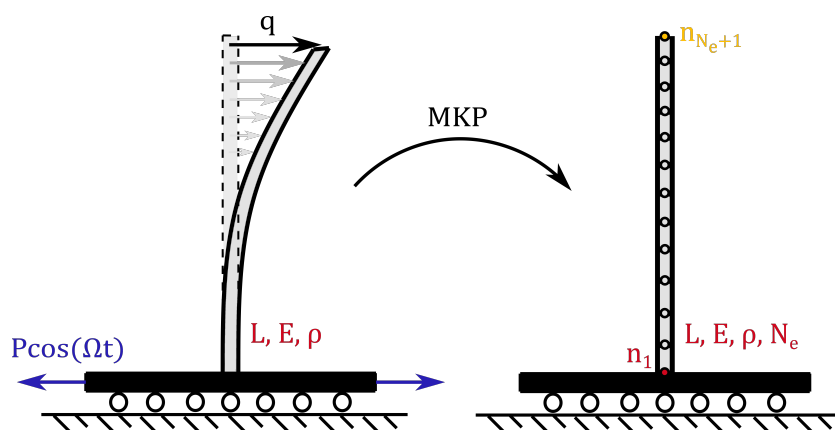
Obrázek 4.22: Stabilní trajektorie oscilátoru se suchým třením pro $f_{ex} = 0.24$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).



Obrázek 4.23: Stabilní trajektorie oscilátoru se suchým třením pro $f_{ex} = 0.26$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).

4.2 Nosníkové systémy

Tato část se zaměřuje na mechanické systémy, jež se skládají z elastického nosníku připojeného nelineární vazbou k rámu a pohyblivé báze. Na Obr. 4.24 vlevo je schématicky znázorněn obecný nosníkový systém, kterým se zde budeme zabývat. *Nosníkem* rozumíme prutový konstrukční prvek, který je navržen tak, aby odolával kombinaci zatěžovacích účinků, jako jsou např. dvouosý ohyb, příčné smyky, osový tah nebo tlak a případně i krut. Nosník je přímý, pokud je jeho podélná osa přímá. Pokud je jeho průřez konstantní, jedná se o *prizmatický nosník*. Rozměry nosníku jsou uvažovány takové, že podélný rozměr je značně větší než zbylé dva. *Prostorový nosník* přenáší příčná zatížení, která mohou působit v libovolných směrech podél průřezu. *Rovinný nosník* odolává především příčnému zatížení v preferované podélné rovině. V tomto případě se jedná se o ro-



Obrázek 4.24: Schéma elastického nosníku.

vinný, prizmatický nosník, který je kinematicky buzen. Tento druh buzení znamená, že bázi, ve které je nosník vetknut, je předepsán pohyb. V obecném případě je matematický model nosníku tvořen parciální diferenciální rovnicí čtvrtého řádu [4]. Pro zjednodušení výpočtů budeme uvažovat matematické modely nosníků, které jsou formulovány na základě tzv. *nosníkových teorií*. Jelikož jsou nosníky ve skutečnosti trojrozměrná tělesa, všechny jejich modely vhodným způsobem zjednodušují skutečnost. Nejjednodušší a nejznámější modely jsou založeny na *Eulerově-Bernoulliho* teorii, nazývané také klasická teorie nosníků a *Timošenkovu teorii* nosníků. Na základě Eulerově-Bernoulliho teorii, která je představená v následující části, formulujeme prostorově diskrétní model nosníku pomocí *Metody konečných prvků* a tento model nosníku tak bude shodný s rovnicí (3.1).

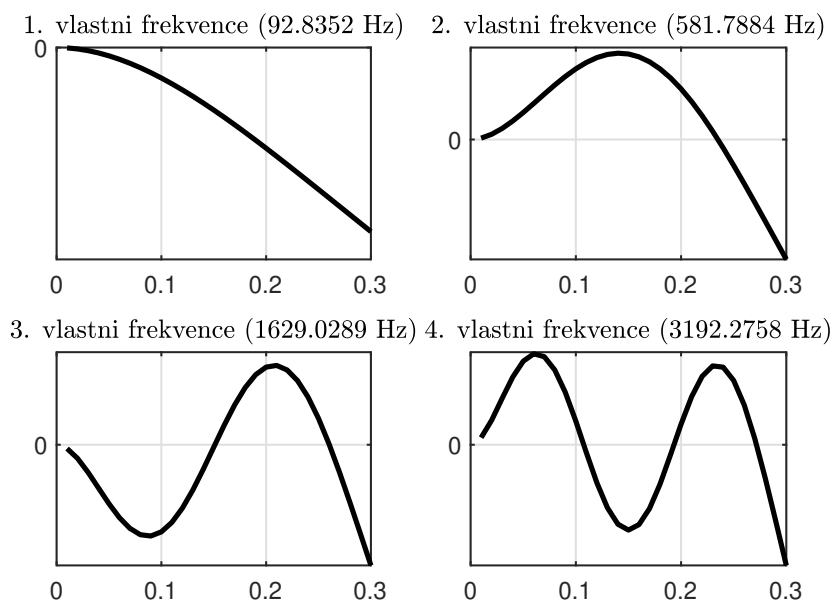
4.2. NOSNÍKOVÉ SYSTÉMY

Nosník, který je uvažován v následujících modelech má nasledovné parametry

$$L = 0.3, \quad b_b = 0.01, \quad t_b = 0.001, \quad E = 2.1 \cdot 10^{11}, \quad \rho = 7850,$$

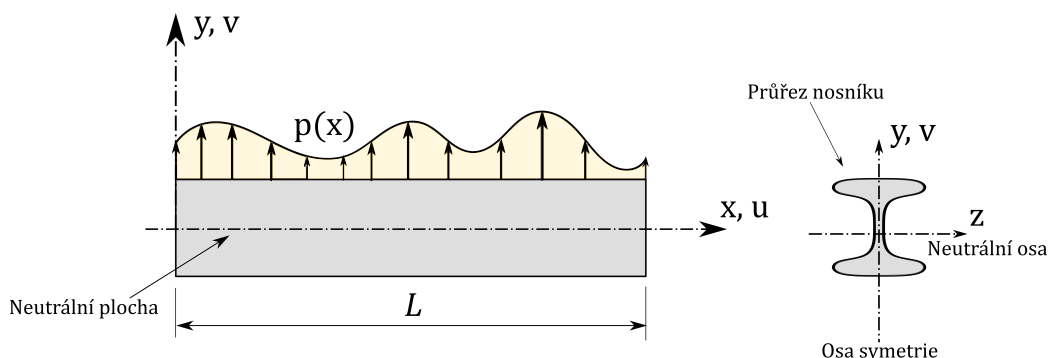
kde L [m], b_b [m], t_b [m] jsou délka, šířka a hloubka nosníku, E [Pa] je Youngův modul pružnosti a ρ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] je označení pro hustotu materiálu.

Pro nosník vetknutý do rámu, viz Obr. 4.24, s takto zvolenými parametry byla provedena modální analýza. Tato analýza přináší informaci jaký typ odezvy lze od nosníku očekávat a na jakých frekvencích. Na Obr. 4.25 jsou zobrazeny první čtyři vlastní tvary vetknutého elastického nosníku s příslušnými vlastními frekvencemi.



Obrázek 4.25: První čtyři vlastní tvary elastického nosníku.

4.2.1 Klasická nosníková teorie (Euler-Bernoulli)



Obrázek 4.26: Terminologie v Euler-Bernoulli modelu rovinného nosníku.

Klasická (Euler-Bernoulli) nosníková teorie pro rovinné nosníky je založena na těchto předpokladech:

- *Rovinná symetrie.* Podélná osa je přímá a průřez nosníku má podélnou rovinu symetrie. Výslednice příčných zatížení působících na jednotlivé průřezy leží v této rovině.
- *Změna průřezu.* Průřez nosníku je buď konstantní nebo se mění spojitě.
- *Normalita.* Řezy kolmé na osu zůstávají při deformaci ohybem rovinné a pouze se natáčejí kolem tzv. neutrální osy. Tyto osy v jednotlivých průřezích vyplní tzv. neutrální rovinu.
- *Deformační energie.* Vnitřní deformační energie nosníku zohledňuje pouze deformace od ohybového momentu. Všechny ostatní účinky, zejména příčného smyku a osově síly jsou zanedbány.
- *Linearizace.* Příčné výchylky, rotace a deformace jsou uvažovány tak malé, že platí předpoklad infinitezimálních deformací.
- *Elasticita.* Nosník je vyroben z takového materiálu, který je elastický a izotropický. Pro heterogenní nosníky vyrobené z více materiálů jsou uvažované stejné vlastnosti pro všechny přítomné složky.

Kinematika

Posuvy rovinného nosníkového prvku v rovině x, y jsou popsány dvourozměrným polem posuvů

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

kde u a v jsou složky osového, resp. příčného posunutí libovolného hmotného bodu nosníku ve směrech x a y . Posuvy ve směru z , jsou pro případ Euler-Bernoulli teorie zanedbány. Předpoklad normality klasického (Eulerova-Bernoulliho) modelu může být matematicky vyjádřen jako

$$u(x, y) = -y \frac{\partial v(x)}{\partial x} = -yv' = -y\varphi, \quad v(x, y) = v(x). \quad (4.18)$$

Deformace, napětí a ohybové momenty

Klasická nosníková teorie předpokládá, že vnitřní energie nosníku je výhradně zohledňuje ohybové deformace a napětí. Při ohybu vzniká osové napětí σ_{xx} a osová deformace e_{xx} . Vzhledem k jednorozměrnosti modelu bude toto napětí a deformace zkráceno na σ a e . Osová deformace může být získána derivací osového posuvu $u(x, y)$ z (4.18)

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} = -y\kappa, \quad (4.19)$$

kde κ značí křivost osy deformovaného nosníku. Ohybové napětí σ lze propojit s osovou deformací e pomocí jednorozměrného Hookova zákona

$$\sigma = Ee = -Ey \frac{d^2 v}{dx^2} = -Ey\kappa, \quad (4.20)$$

kde E značí Youngův modul pružnosti. Velmi důležitou veličinou vyplývající z klasické nosníkové teorie je ohybový moment M , který je definován jako integrál přes průřez

$$M = \int_A -y\sigma dx = E \frac{d^2 v}{dx^2} \int_A y^2 dA = EI \kappa, \quad (4.21)$$

kde $I \equiv I_{zz}$ má význam momentu setrvačnosti průřezu k z ose.

4.2.2 Variační formulace rovinného prvku typu nosník

Celkový energetický funkcionál

Celková potenciální energie nosníku je

$$\Pi = U - W, \quad (4.22)$$

kde U a W je vnitřní je vnější energie. Jak již bylo zmíněno v Euler-Bernoulli modelu U obsahuje pouze ohybovou energii

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_0^L M \kappa dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI \kappa^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L v'' EI v'' dx. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Vnější práce zohledňuje příčné spojitě zatížení

$$W = \int_0^L p v dx, \quad (4.24)$$

kde p [N/m] značí spojitě zatížení. Všechny tři funkcionály Π , U a W závisí na příčném posuvu $v(x)$. Je patrné, že $\Pi(v)$ obsahuje druhé derivace v , protože $v'' = \kappa$ se objevuje v U . Toto číslo (řád nejvyšší derivace ve funkcionálu) se nazývá *variační index*. Jelikož je variační index roven 2, přípustné posuvy musejí být spojitě, mít spojitě první derivace a splňovat přesně okrajové podmínky na posuvy. Tento požadavek na spojitost může být též formulován tak, že přípustné posuvy musejí být C^1 spojitě. Tato podmínka provází sestavení konečných prvků typu nosník, které bude následovat.

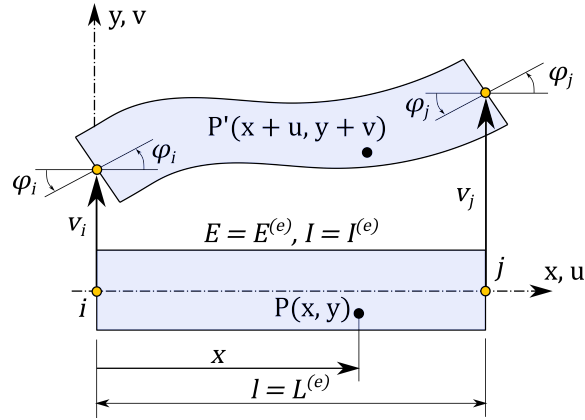
Konečné prvky typu nosník

Konečné prvky jsou získány podélným rozdělením nosníku. Nejjednodušší Euler-Bernoulli konečný prvek typu nosník, viz Obr. 4.27 má dva uzly, i a j a 4 stupně volnosti sdružené do vektoru uzlových posuvů

$$\mathbf{u}^{(e)} = \left[v_i^{(e)} \quad \varphi^{(e)} \quad \varphi_j^{(e)} \quad v_j^{(e)} \right]^T. \quad (4.25)$$

Tvarové funkce

Nejjednodušší tvarové funkce, které vyhovují $C^1(\mathbb{R})$ podmínky spojitosti pro (4.25) jsou nazývány *Hermitovsky kubické* tvarové funkce. Vzorec pro interpolaci, který



Obrázek 4.27: Dvou uzlový Euler-Bernoulli rovinný nosníkový prvek se čtyřmi stupni volnosti.

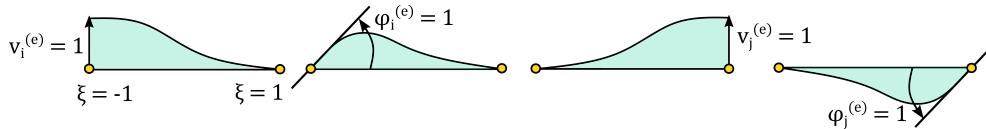
je založen na těchto funkcích, lze napsat jako

$$v^{(e)} = \begin{bmatrix} N_{v_i}^{(e)} & N_{\varphi_i}^{(e)} & N_{v_j}^{(e)} & N_{\varphi_j}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^{(e)} \\ \varphi_i^{(e)} \\ v_j^{(e)} \\ \varphi_j^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}^{(e)}. \quad (4.26)$$

Tyto tvarové funkce jsou vhodně napsány v bezrozměrném tvaru pro souřadnici

$$\xi = \frac{2x}{l} - 1, \quad (4.27)$$

která se pohybuje v rozmezí od -1 pro uzel i ($x = 0$) do $+1$ pro uzel j ($x = l$), kde l značí délku prvku.



Obrázek 4.28: C^1 (Hermitovské) tvarové funkce rovinného prvku typu nosník

$$\begin{aligned} N_{v_i}^{(e)}(\xi) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) & N_{\varphi_i}^{(e)}(\xi) &= \frac{1}{8}l(1 - \xi)^2(1 + \xi) \\ N_{v_j}^{(e)}(\xi) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) & N_{\varphi_j}^{(e)}(\xi) &= -\frac{1}{8}l(1 + \xi)^2(1 - \xi) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Tyto čtyři tvarové funkce jsou zobrazeny na Obr. 4.28. Křivost κ , která se nachází v U , může být vyjádřena v uzlových posuvech dvojitou derivací podle x

$$\kappa = \frac{d^2 v^{(e)}(x)}{dx^2} = \frac{4}{l^2} \frac{d^2 v^{(e)}(\xi)}{d\xi^2} = \frac{4}{l^2} \frac{d\mathbf{N}^{(e)}}{d\xi^2} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{D}\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}''\mathbf{u}^{(e)}. \quad (4.29)$$

Zde značí $\mathbf{D} = \mathbf{N}''$, matici křivosti a posunutí o rozměru 1×4

$$\mathbf{D} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 6\frac{\xi}{l} & 3\xi - 1 & -6\frac{\xi}{l} & 3\xi + 1 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Rovnice konečných prvků

Vložením rovnic (4.28) a (4.30) do (4.22) získáme kvadratickou formu pro uzlové posuvy

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)}, \quad (4.31)$$

kde

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^l EI \mathbf{D}^T \mathbf{D} dx = \int_{-1}^1 EI \mathbf{D}^T \mathbf{D} \frac{1}{2} l d\xi, \quad (4.32)$$

je matice tuhosti prvku a

$$\mathbf{F}^{(e)} = \int_0^l \mathbf{N}^T q dx = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T q \frac{1}{2} l d\xi \quad (4.33)$$

je silový vektor uzlu. Pokud je člen EI konstantní přes prvek je možné ho vyjmout z ξ -interálu v (4.32)

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{1}{2} EI l \int_{-1}^1 \mathbf{D}^T \mathbf{D} d\xi = \frac{EI}{2l} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 6\frac{\xi}{l} \\ 3\xi - 1 \\ -6\frac{\xi}{l} \\ 3\xi + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6\frac{\xi}{l} & 3\xi - 1 & -6\frac{\xi}{l} & 3\xi + 1 \end{bmatrix} d\xi. \quad (4.34)$$

Rozšířením a integrováním přes prvek dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \frac{EI}{2l^3} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 36\xi^2 & 6\xi(3\xi - 1)l & -36\xi^2 & 6\xi(3\xi + 1)l \\ 6\xi(3\xi - 1)l & (3\xi - 1)l^2 & -6\xi(3\xi - 1)l & (9\xi^2 - 1)l^2 \\ -36\xi^2 & -6\xi(3\xi - 1)l & 36\xi^2 & -6\xi(3\xi + 1)l \\ 6\xi(3\xi + 1)l & (9\xi^2 - 1)l^2 & -6\xi(3\xi + 1)l & (3\xi + 1)^2 l^2 \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{EI}{2l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Podobným postupem můžeme sestavit i matici hmotnosti prvku

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

kde ρ je hustota materiálu, ze kterého je nosník vyroben a A je průřez nosníku. Provedením součtu přes všechny konečné prvky získáme globální matici tuhosti \mathbf{K} a globální matici hmotnosti \mathbf{M} .

4.2.3 Piezo patch

V této části je představen způsob, jak matematický model nosníku obohatit o piezo patch (záplatu). Piezo patch budeme uvažovat jako jiný Euler-Bernoulli nosníkový prvek. Díky tomu jsou matice tuhosti $\mathbf{K}^{(p)}$ a hmotnosti $\mathbf{M}^{(p)}$ piezo patche ve stejném tvaru pouze s konstantami E_p , l_p , ρ_p , A_p ,

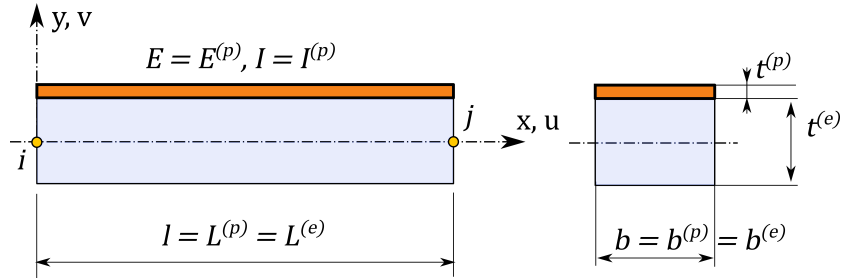
$$\mathbf{K}^{(p)} = \frac{E_p I_p + E_b I_b}{2l_p^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_p & -12 & 6l_p \\ 6l_p & 4l_p^2 & -6l_p & 2l_p^2 \\ -12 & -6l_p & 12 & -6l_p \\ 6l_p & 2l_p^2 & -6l_p & 4l_p^2 \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{M}^{(p)} = \frac{b_b(\rho_b t_b l_b + \rho_p t_p)}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_p & 54 & -13l_p \\ 22l_p & 4l_p^2 & 13l_p & -3l_p^2 \\ 54 & 13l_p & 156 & -22l_p \\ -13l_p & -3l_p^2 & -22l_p & 4l_p^2 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Tento nosníkový konečný prvek s piezo patchem, jak je zobrazen na Obr. 4.29, pak můžeme přičíst do globální matice tuhosti \mathbf{K} a hmotnosti \mathbf{M} libovolné místo n_p .

Rovnice senzoru

Senzorem rozumíme použití informace o deformaci piezo patche k vypočtení možného generovaného náboje tohoto patche. Piezo patch lze také použít opačným způsobem, tedy dodáním potřebného náboje k řízené deformaci. V takovém případě se jedná o použití piezo patche jako *aktuátoru*. Zde se zaměříme pouze senzorické užití. Následující lineární piezoelektrické konstitutivní vztahy [35] jsou



Obrázek 4.29: Rovinný nosníkový prvek s piezo patchem.

použity pro odvození rovnic senzoru.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= S_{11}^E \sigma_x + d_{31} E_z \\ D_z &= d_{31} \sigma_x + \xi_{33}^\sigma E_z, \end{aligned} \quad (4.39)$$

kde ε je deformace, σ je napětí, S^E je poddajnost při konstantním elektrickém poli, d_{31} [$\text{m} \cdot \text{V}^{-1}$] je piezoelektrická konstanta, E_z [$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$] je elektrické pole, D_z [$\text{Coulomb} \cdot \text{m}^{-2}$] značí náboj na jednotku plochy a ξ_{33}^σ je dielektrická konstanta při stálém napětí. Přímý piezoelektrický jev se používá k výpočtu výstupního náboje na vrstvě senzoru, který vzniká v důsledku deformace prvku. Protože na vrstvu snímače nepůsobí žádné elektrické pole, dostaneme

$$D_z = C_{11} d_{31} \varepsilon_x, \quad (4.40)$$

kde zde značíme C_{11} Youngův modul pružnosti. Náboj měřený přes elektrody senzoru je dán vztahem

$$q(t) = \int_S D_z ds. \quad (4.41)$$

Proud na povrchu senzoru je dán vztahem

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad (4.42)$$

což lze dle [35] rozepsat jako

$$i(t) = z C_{11} d_{31} b_b \int_0^{l_p} \mathbf{D}^T \dot{\mathbf{u}} dx, \quad (4.43)$$

kde \mathbf{D} značí matici křivosti a $z = t_b/2 + t_p$ pro maximální smyk. Napětí generované piezo patchem je pak

$$V^S(t) = G_S i(t), \quad (4.44)$$

kde G_S je zesílení zařízení pro úpravu signálu

$$V^S(t) = G_S C_{11} d_{31} z b_b \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 & \dot{\varphi}_1 & \dot{v}_2 & \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}^T, \quad (4.45)$$

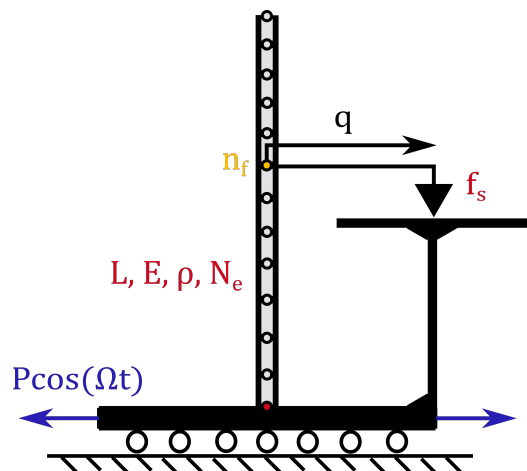
což lze přepsat jako

$$V^S(t) = C_S \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}, \quad (4.46)$$

kde $C_S = G_S C_{11} d_{31} z b_b$ a značí sensorovou konstantu.

4.2.4 Nosník se suchým třením

První nosníkový systém je složen z poddajného nosníku, který je provázán třecí vazbou s rámem, kterému je předepsána výchylka q_{kin} . Systém je tak vystaven kinematickému buzení. Diskrétní matematický model kinematicky buzeného nos-



Obrázek 4.30: Schéma elastického nosníku se suchým třením.

níku se suchým třením je tvořen soustavou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu v následujícím tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + q_{kin}\mathbf{M}\mathbf{e}_u, \quad (4.47)$$

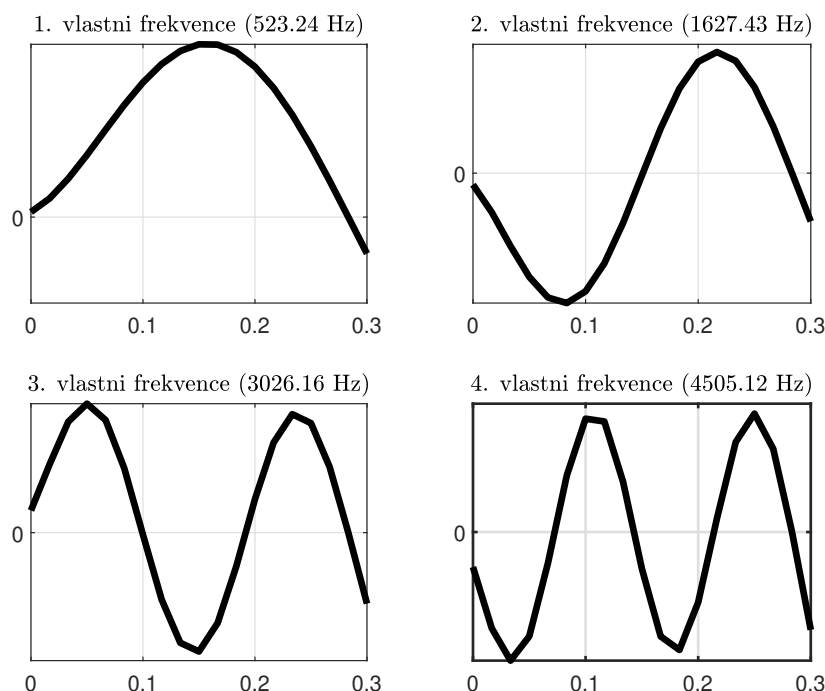
kde je uvažováno proporcionální tlumení $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{K}$ a člen $q_{kin}\mathbf{M}\mathbf{e}_u$ představuje kinematické buzení. V tomto členu je $q_{kin} = P \cos(\Omega t)$ a

$$\mathbf{e}_u = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots]^T, \quad (4.48)$$

což je vektor přiřazení kinematického buzení. Po pronásobení tohoto vektoru s maticí hmotnosti \mathbf{M} je soustavě předepsána výchylka na všech posuvných stupních volnosti viz (4.25) s příslušnou váhou. Tento systém obsahuje element suchého tření, který byl představen v kapitole 4.1.3. V tomto případě je nelinearita vnášena do soustavy tím, že vztah (4.13) je vložen do silového vektoru \mathbf{F} na vybrané místo n_f .

Pro systém byla provedena modální analýza, která pomohla lépe určit rozmezí f_{ex} , ve kterém je vhodné systém budit. Tato analýza byla provedena pro nosník,

který je v místě výskytu nelinearity vetknutý. Dle této analýzy bylo usouzeno, že hledání periodických odezev nosníkové soustavy bude provedeno v okolí první vlastní frekvence. U této frekvence, jejíž vlastní tvar je zobrazen na Obr. 4.31, dochází k největšímu zesílení amplitudy odezvy. Pro porovnání s nelineární odezvou byla vypočtena i odezva lineární části systému (4.12), u kterého dochází k rezonanci na frekvenci $\Omega_0 = 523.24$ Hz a o amplitudě $A_{lin} = 4.95 \cdot 10^{-6}$ m. Sledujme



Obrázek 4.31: První čtyři vlastní tvary elastického nosníku se suchým třením.

nyní vývoj periodické odezvy rovnice (4.47) v závislosti na frekvenci buzení f_{ex} . Parametry pro tuto soustavu jsou voleny následovně

$$F_{thr} = 0.02, \quad \epsilon = 8 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha = 7.07 \cdot 10^{-6}, \quad P = 1.66, \quad N_e = 8, \quad n_f = 7,$$

kde α je koeficient proporcionálního tlumení, N_e je počet uvažovaných konečných prvků, n_f značí uzel spojený nelineární vazbou k rámu. Ostatní parametry mají stejný význam jako v předchozích případech.

Na Obr. 4.32 je zobrazena odezva nelineárního systému (4.47) v závislosti na frekvenci buzení f_{ex} . Odezva nelineárního systému byla získána pomocí tří různých metod na předem zvoleném intervalu budících frekvencí $f_{ex} \in \langle 250, 750 \rangle$.

V případě HBM a metody střelby byl interval frekvencí volen kontinuálním programem. Pro numerickou integraci byla zvolena sekvenční kontinuace a body řešení byly předem zvolené, viz níže. Počet vygenerovaných bodů řešení jednotlivých metod tak byl

$$HBM = 883, \quad Shoot = 883, \quad NI = 83. \quad (4.49)$$

U metody numerické integrace byla zvýšena hrubost dělení intervalu f_{ex} , a tak byl počet bodů řešení snížen desetkrát oproti ostatním metodám. Numerická integrace byla tedy spuštěna 83 krát. Jak HBM tak metoda střelby potřebovali stejný počet bodů řešení k vytrasování křivky. Časová náročnost jednotlivých metod byla následující

$$HBM = 132.7 \text{ s}, \quad Shoot = 156.4 \text{ s}, \quad NI = 249.3 \text{ s}. \quad (4.50)$$

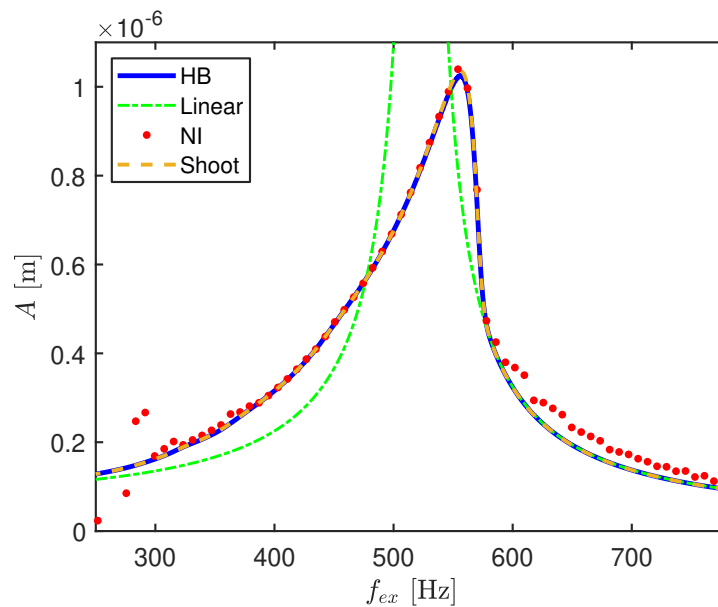
Nejrychlejší metodou se stala HBM. Časově nejnáročnější metodou byla dle očekávání numerická integrace. I přes snížení bodů řešení byl výpočetní čas numerické integrace zhruba $1.8 \times$ delší než pro HBM. Pokud bychom zvolil větší počet N_e nebo přidali více nelinearit do systémů stoupla by míra komplexity systému. V takovém případě by nebylo vhodné použít numerickou integraci pro frekvenční analýzu systému vzhledem k velmi vysoké časové náročnosti. Modrá křivka na Obr. 4.32 patří řešení získaného metodou harmonické rovnováhy. Pro získání tohoto řešení byly uvažované následovné parametry

$$H = 13, \quad N = 2^7, \quad \Delta s = 5.$$

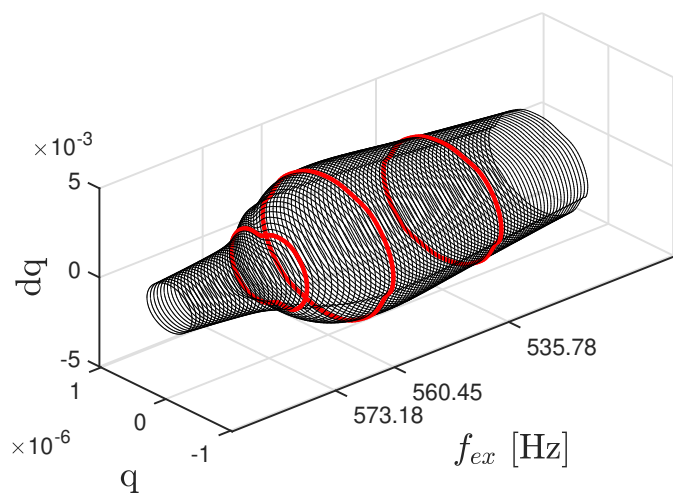
Jako počáteční odhad řešení pro HBM byla opět zvolena amplituda lineární části rovnice (4.47)

$$Q = \left(-\Omega_s^2 \mathbf{M} + i\Omega_s \mathbf{B} + \mathbf{K} \right) \mathbf{F}^{-1}, \quad (4.51)$$

Pro metodu střelby, která je na Obr. 4.32 zobrazena žlutou, čárkovanou čarou, byly parametry N a Δs voleny stejně. Z výsledků na Obr. 4.32 je patrné, že všechny metody poskytly souhlasné výsledky. Výsledky vypočtené metodou numerické integrace lze v okolí rezonance považovat shodné s ostatními metodami. V podrezonanční i nadrezonanční oblasti však dochází k rozdílům. Tento fakt dále potvrzuje nevhodnost této metody k analýze nosníkového systému. Celková nelineární odezva změnila svůj charakter oproti lineárnímu případu a je ve všech bodech stabilní. Systému se vlivem nelinearity zvýšila rezonanční frekvence na hodnotu $\Omega_0 = 560.4 \text{ Hz}$. V podrezonanční oblasti dochází k postupnému oddalování obou



Obrázek 4.32: Srovnání amplitudových charakteristik získaných třemi různými metodami.

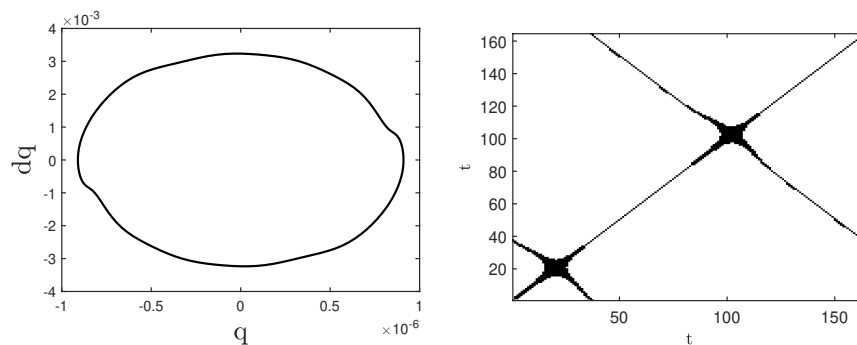


Obrázek 4.33: Vývoj periodického řešení nosníku se suchým třením podél amplitudové křivky.

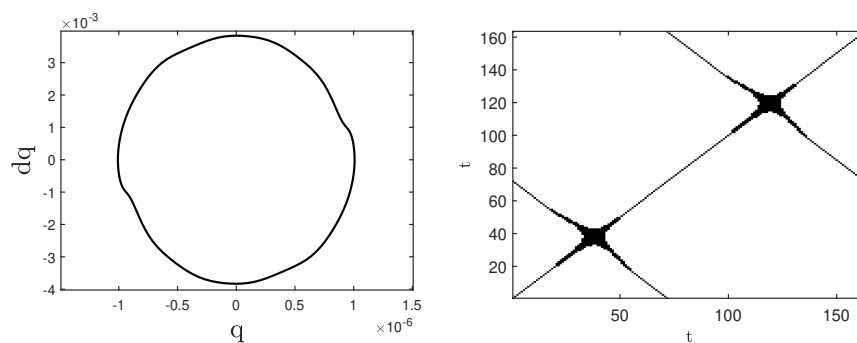
odezev. V rezonanční oblasti sledujeme značný útlum amplitudy nelineárního systému. Ta, je utlumena na hodnotu $A_{nelin} = 1.02 \cdot 10^{-6}$ m. Pro nadrezonanční oblast jsou odezvy lineárního a nelineárního systému ve shodě.

Na Obr. 4.33 je zobrazen vývoj periodické odezvy systému. Tři červeně označené trajektorie na Obr. 4.33 jsou dále zobrazeny na Obr. 4.36 - Obr. 4.34 vlevo, kde jsou izolovány od ostatních řešení a vpravo jsou zobrazeny příslušná rekurentní zobrazení pro volbu $\varepsilon = 1.8 \cdot 10^{-8}$. Na Obr. 4.34 vlevo je zobrazena první podrezonanční periodická trajektorie. Tato trajektorie se postupně rozšiřuje s rostoucí frekvencí f_{ex} až do rezonance. Po dosažení rezonance dochází k přesunu po směru hodinových ručiček dvou „hrbolků“ až na pozici zobrazenou na Obr. 4.36. Tyto „hrbolky“ způsobují zvlnění diagonál kolmých na úhlopříčnou diagonálu RZ a jsou charakteristické pro nelinearitu typu suché tření, viz kapitola 4.1.3. V nadrezonanční oblasti se pak začínají vytrácet a následné trajektorie přechází v elipsu.

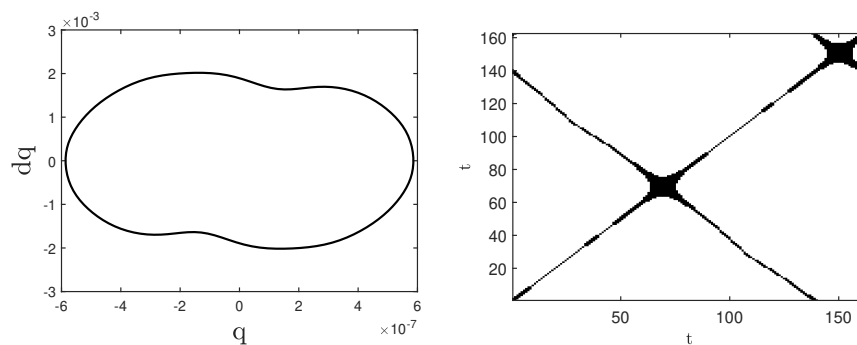
Posledním zkoumaným aspektem je citlivost získaných řešení na řídicích parametrech HBM. V tomto případě změna H a N na nižší hodnoty než uvažované nezpůsobovala příliš velkou změnu od referenčního řešení. Při změnách H a N nad uvažované hodnoty pouze k velkému nárůstu výpočetního času. Tento systém se tak jeví jako velmi robustní vůči změnám parametrů řešení.



Obrázek 4.34: Stabilní trajektorie nosníku se suchým třením pro $f_{ex} = 535.78$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).



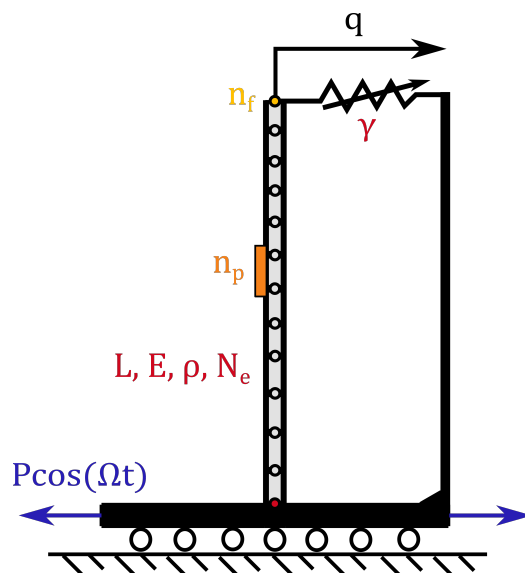
Obrázek 4.35: Stabilní trajektorie nosníku se suchým třením pro $f_{ex} = 560.45$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).



Obrázek 4.36: Stabilní trajektorie nosníku se suchým třením pro $f_{ex} = 573.18$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).

4.2.5 Piezo nosník s kubickou nelinearitou

Druhý nosníkový systém je složen z poddajného nosníku, který je k pohyblivé bázi s předepsanou výchylkou q_{kin} připojen kubickou nelinearitou. Systém je tak kinematically buzen. Dále je v polovině tohoto nosníku umístěn piezo patch pro sběr energie. Může se tak jednat o variaci energy harvesteru představeného na Obr. 1.4. Diskrétní matematický model kinematically buzeného nosníku s kubickou



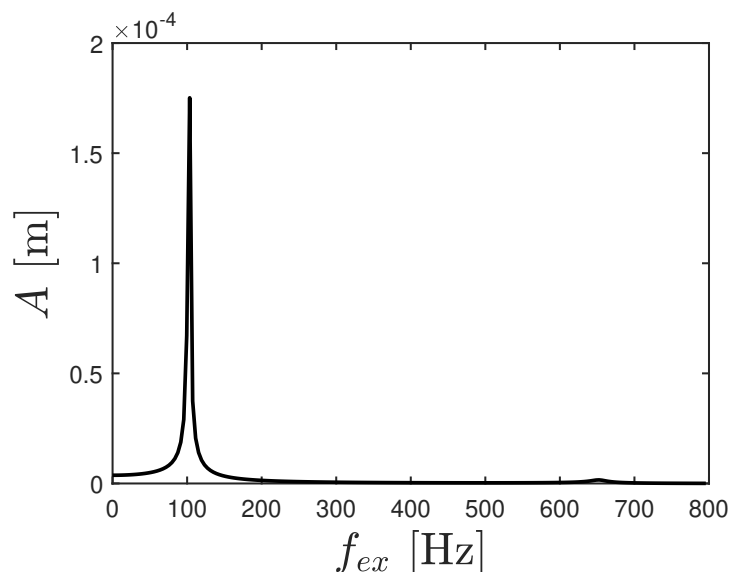
Obrázek 4.37: Schéma piezo nosníku s kubickou nelinearitou.

nelinearitou je tvořen soustavou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu v následujícím tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + q_{kin}\mathbf{M}\mathbf{e}_u, \quad (4.52)$$

kde je opět uvažováno proporcionální tlumení $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{K}$. Kinematické buzení a vnesení nelinearity do systému je uvažováno stejným způsobem jako části v 4.2.4.

Přidáním piezo patche do soustavy byli změněny její modální vlastnosti oproti prostému nosníku, viz Obr. (4.25). Provedení modální analýzy pro soustavu obohacenou o piezo patch nám pomohlo lépe určit rozmezí f_{ex} , ve kterém je systém vhodné budít. Pro porovnání s nelineární odezvou byla vypočtena i odezva lineární části systému (4.12), u kterého dochází k první rezonanci na frekvenci $\Omega_0 = 102.38$ Hz a o amplitudě $A_{lin} = 1.8 \cdot 10^{-4}$ m jak je zobrazeno na Obr. 4.38.



Obrázek 4.38: Srovnání amplitudových charakteristik získaných třemi různými metodami.

Vzhledem k velmi malé amplitudě u druhé vlastní frekvence je provedena analýza odezvy pouze v okolí první rezonance. Tento potenciální energy harvester by tak z amplitudy v okolí druhé vlastní frekvence nebyl schopen vygenerovat dostatečné napětí. Na Obr. 4.39 jsou zobrazeny první čtyři vlastní tvary piezo nosníku.

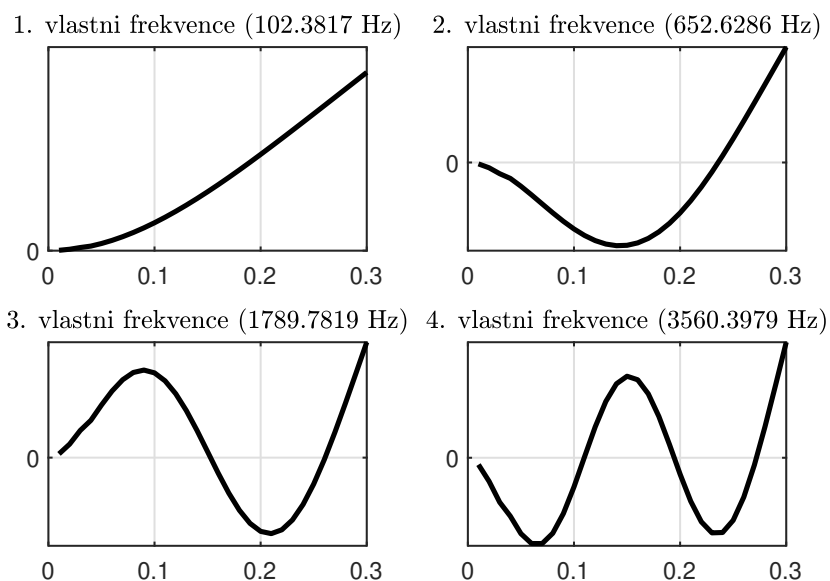
Sledujme nyní vývoj periodické odezvy rovnice (4.52) v závislosti na frekvenci buzení f_{ex} . Parametry pro tuto soustavu jsou voleny následovně

$$\gamma = 15 \cdot 10^6, \quad P = 1.53, \quad \alpha = 7.07 \cdot 10^{-6}, \quad N_e = 8, \quad n_f = 8, \quad n_p = 4.$$

Uvažované parametry mají stejný význam jako v předchozích příkladech.

Na Obr. 4.40 je zobrazena odezva nelineárního systému (4.52) v závislosti na frekvenci buzení f_{ex} . Odezva nelineárního systému byla získána pomocí tří různých metod na předem zvoleném intervalu budících frekvencí $f_{ex} \in \langle 97, 120 \rangle$. V případě HBM a metody střelby byl interval frekvencí volen kontinuálním programem. Pro numerickou integraci byla zvolena sekvenční kontinuace a body řešení byly předem zvolené, viz níže. Počet vygenerovaných bodů řešení jednotlivých metod tak byl

$$HBM = 664, \quad Shoot = 32, \quad NI = 41. \quad (4.53)$$



Obrázek 4.39: První čtyři vlastní tvary piezo nosníku.

Metoda harmonické rovnováhy potřebovala k dobré konvergenci mnoho kontinuálních bodů. U metody numerické integrace byla zvýšena hrubost dělení intervalu f_{ex} , a tak byl počet bodů řešení snížen zhruba šestnáctkrát oproti HBM. Numerická integrace byla tak spuštěna 41 krát. Časová náročnost jednotlivých metod byla následující

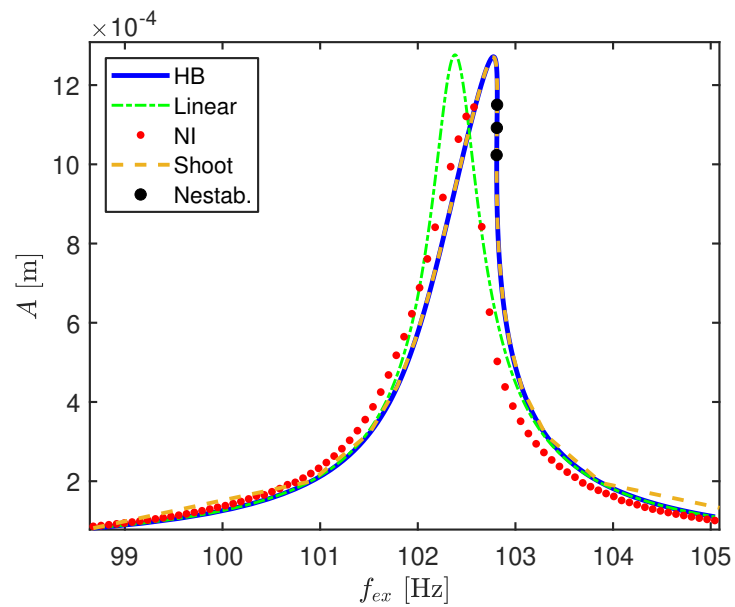
$$HBM = 130.3 \text{ s}, \quad Shoot = 42.4 \text{ s}, \quad NI = 38.24 \text{ min.} \quad (4.54)$$

Nejrychlejší metodou se s velkou rezervou stala Metoda střelby. Metoda harmonické rovnováhy se kvůli vysokému počtu kontinuálních bodů značně zpomalila. Časově nejnáročnější se metodou byla dle očekávání numerická integrace. I přes snížení bodů řešení byl výpočetní čas této metody zhruba $54\times$ delší než pro metodu střelby. Použití této metody k dynamické analýze tohoto systému je tak obzvláště nevhodné. Modře zobrazená křivka na Obr. 4.40 patří řešení získaného metodou harmonické rovnováhy. Pro získání tohoto řešení byly uvažované tyto parametry

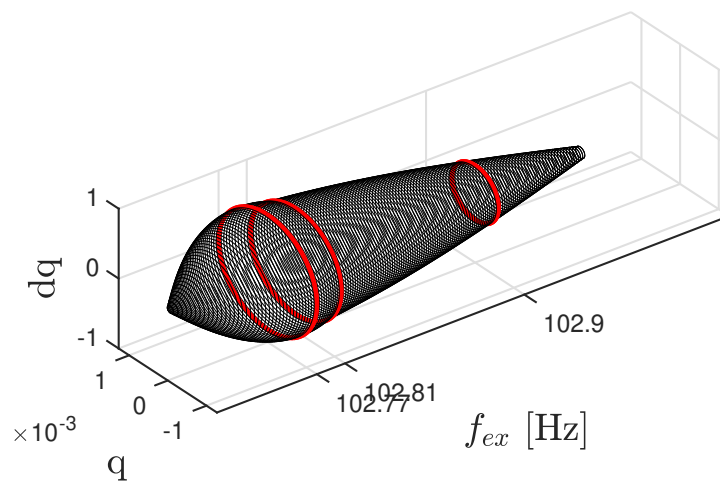
$$H = 13, \quad N = 2^7, \quad \Delta s = 0.5.$$

Jako počáteční odhad řešení pro HBM byla opět zvolena amplituda lineární části rovnice (4.52)

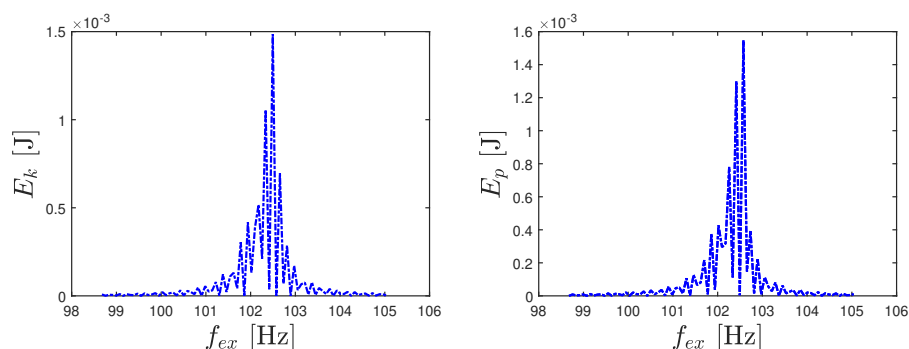
$$Q = \left(-\Omega_s^2 \mathbf{M} + i\Omega_s \mathbf{B} + \mathbf{K} \right) \mathbf{F}^{-1}, \quad (4.55)$$



Obrázek 4.40: Srovnání amplitudových charakteristik získaných třemi různými metodami.



Obrázek 4.41: Vývoj periodického řešení piezo nosníku s kubickou nelinearitou podél amplitudové křivky.



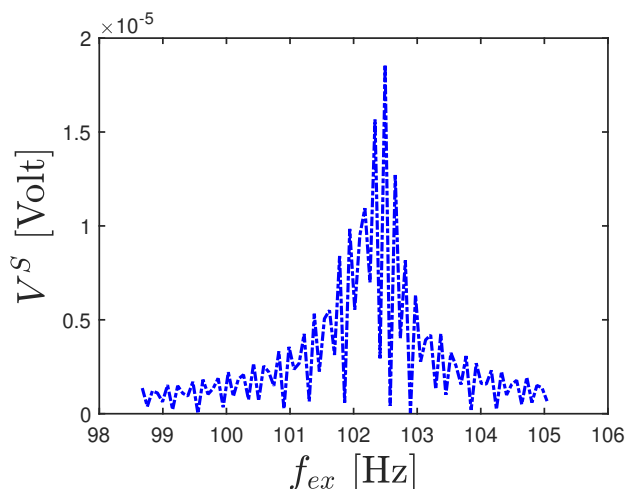
Obrázek 4.42: Zobrazení kinetická energie (vlevo) a deformační energie (vpravo) v závislosti na frekvenci buzení.

Pro metodu střelby, která je na Obr. 4.40 zobrazena žlutou, čárkovanou čarou, byly parametry voleny následovně

$$N = 2^9, \quad \Delta s = 2.$$

Z výsledků na Obr. 4.32 je patrné, že Metoda střelby a HBM poskytly shodné výsledky. Výsledky vypočtené metodou numerické integrace lze v podrezonanční oblasti považovat za souhlasné s ostatními metodami, avšak v rezonanční i nadrezonanční oblasti dochází k velkým rozdílům. Tento fakt dále potvrzuje nevhodnost této metody k analýze tohoto systému. Celková nelineární odezva změnila svůj charakter oproti lineárnímu případu. Tvar nelineární křivky je „ohnutý“ směrem do prava, což se dalo očekávat vzhledem k přítomnosti kubické nelinearity, viz kapitola 4.1.1. Kvůli tomuto „ohnutí“ se vyskytl poměrně krátký úsek nestabilních odezev. Systému se vlivem nelinearity mírně zvýší rezonanční frekvence na hodnotu $\Omega_0 = 102.84$ Hz, avšak amplituda zůstává beze změny. Na Obr. 4.41 je zobrazen vývoj periodické odezvy systému. Tři červeně označené trajektorie na Obr. 4.41 jsou dále zobrazeny na Obr. 4.44 - Obr. 4.46 vlevo, kde jsou izolovány od ostatních řešení a vpravo jsou zobrazeny rekurentní zobrazení příslušející periodickým trajektoriím pro volbu $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$. Na Obr. 4.44 vlevo je zobrazena periodická trajektorie v rezonanci. Se zvyšující se frekvencí f_{ex} ztratí řešení stabilitu, viz Obr. 4.45 a dojde k poklesu maxima výchylky. Dále nastává postupný útlum amplitudy. Periodické trajektorie si pro rozmení budících frekvencí drží eliptický tvar.

Jak již bylo zmíněno, na tento systém je nahlíženo jako na prototyp energy harvester jednotky. Ke zjištění vlastností tohoto potenciálního energy harvesteru



Obrázek 4.43: Zobrazení vygenerovaného napětí v závislosti na frekvenci buzení.

byla vypočtena kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^T, \quad (4.56)$$

deformační energie

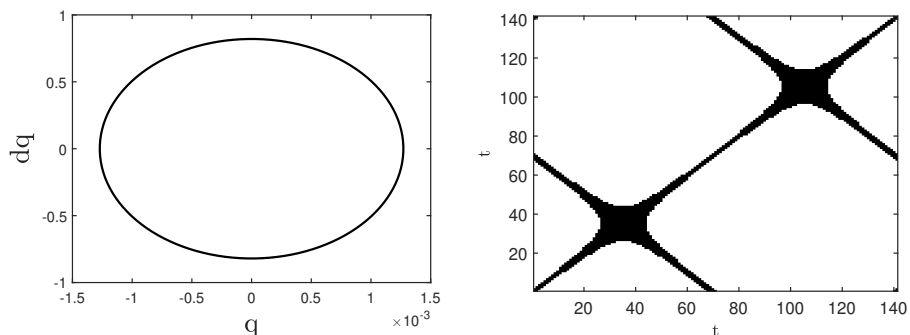
$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{q} \mathbf{K} \mathbf{q}^T \quad (4.57)$$

a vygenerované napětí V^S , viz rovnice (4.46) s piezoeletrickými parametry převzatými z [35]. Všechny tři kvantitly byly vypočtené z ustálené odezvy získané numerickou integrací. Velikost těchto kvantit byla proměnná v čase, a tak z byl z těchto rozvoju vypočten kvadratický průměr dle

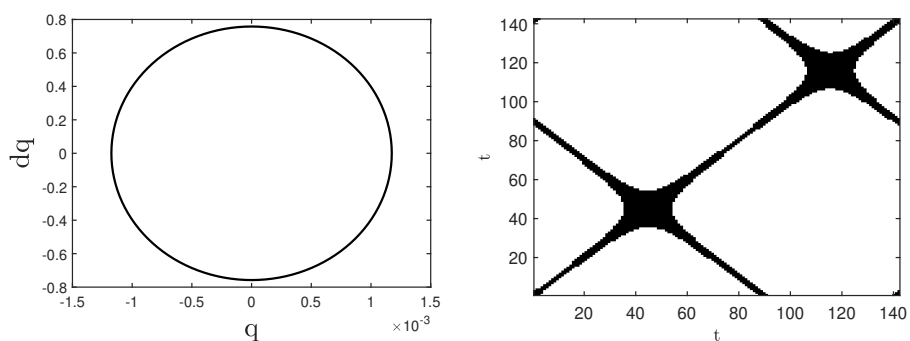
$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}, \quad (4.58)$$

kde x_{RMS} je kvadratický průměr veličiny, x je vzorek odezvy a n je počet vzorků odezvy. Jak je patrné na Obr. 4.42 a 4.43 nejlepší volbou f_{ex} pro energy harvesting by bylo provozovat tuto jednotku v rezonanci.

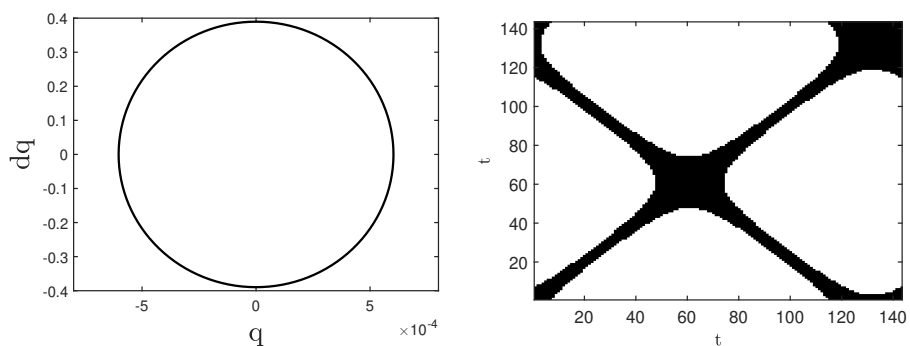
Posledním zkoumaným aspektem je citlivost získaných řešení na řídicích parametrech HBM. V tomto případě změna H a N na nižší hodnoty než uvažované způsobovala získání odezvy, která byla shodná s lineární odezvou. Dá se tak tvrdit, že systém je slabě nelineární a na zachycení jeho nelineární odezvy je zapotřebí vyšších řádů H . Při změnách H a N nad uvažované hodnoty docházelo pouze k velkému nárůstu výpočetního času.



Obrázek 4.44: Stabilní trajektorie piezo nosníku s kubickou nelinearitou pro $f_{ex} = 102.77$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).



Obrázek 4.45: Nestabilní trajektorie piezo nosníku s kubickou nelinearitou pro $f_{ex} = 102.81$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).



Obrázek 4.46: Stabilní trajektorie piezo nosníku s kubickou nelinearitou pro $f_{ex} = 102.9$ Hz ve FR (vlevo) s příslušným RZ (vpravo).

Kapitola 5

Závěr

Předložená diplomová práce se zabývala studiem periodických odezev mechanických systémů s různými druhy nelinearit. V úvodní kapitole 1 byla představena stručná historie této problematiky demonstrováná na problémech nebeské mechaniky, jmenovitě problému tří těles. Dále jsme v této kapitole představili vlastní motivaci a stanovili cíle této práce.

V následující kapitole 2 jsou definovány a popsány vybrané části z teorie dynamických systémů spolu s představením Floquetovy teorie stability periodických řešení. V další části tedy v kapitole 3 jsou představeny tři různé numerické metody pro hledání periodických řešení mechanických systémů. Jedná se o metodu numerické integrace, metodu harmonické rovnováhy (HBM) a metodu střelby. Pro zmíněné metody bylo zavedeno značení a byly odvozeny důležité vztahy. Pro metodu numerické integrace byla nejdříve představena Eulerova metoda, jakožto základní numerická metoda pro integraci pohybových rovnic. Dále se tato část věnovala rozšířeným Runge-Kutta metodám, které bývají velmi často implementovány ve výpočetních softwarech. V následující části byla definována metoda střelby, u které byl vyzdvihnut důležitý důsledek. Tím bylo, že metoda poskytuje jako vedlejší produkt k samotnému řešení informaci o stabilitě získaného periodického řešení pomocí výpočtu matice monodromie. Poslední část kapitoly 3 se věnovala stěženi metodě této práce, metodě harmonické rovnováhy. Tato metoda byla nejdříve představena na příkladu známého Duffingova oscilátoru, kde byly demonstrovány důležité myšlenky metody harmonické rovnováhy. Dále byly v této kapitole představeny potřebné části z teorie Fourierových řad a diskrétní Fourierovy transformace. Následovalo použití HBM pro mechanické systémy a odvození základních rovnic této metody. Poslední část pojednávající o HBM se věnovala spojením této metody s kontinuací periodických řešení, které poté slouží

k vytrasování kompletní amplitudové křivky. Ta, narozdíl od lineárního případu může obsahovat více větví řešení, které často nejsou postihnutele standartními metodami.

Samotnému hledání periodických řešení vybraných mechanických systémů byla věnována kapitola 4. V této kapitole byly představeny modely oscilátorů s jedním stupněm volnosti a modely nosíkových systémů. Na oscilátorech s jedním stupněm volnosti bylo ukázáno jak se mění odezva této soustavy přidáním tří různých druhů nelinearit. Zkoumanými nelinearitami byli

- kubická nelinearita,
- pružná narážka,
- suché tření.

Tyto nelinearity zásadně změnily jak tvar amplitudové charakteristiky systému tak samotných periodických trajektorií. Mohli jsme pozorovat „ohnutí“ amplitudové křivky charakteristické pro kubickou nelinearitu nebo zvlnění periodických trajektorií, které zas příslušelo suchému tření. Pro vybrané oscilátory byla též provedena analýza citlivosti HBM na jejích parametrech. Bylo zjištěno, že zvýšení H skoro pokaždé vede k numericky stabilním výsledkům, avšak s vysokou časovou náročností. Změna N pak často způsobovala podvzorkování příslušných nelineárních sil a tedy chybné výsledky.

Druhá část kapitoly 4 se věnovala nosíkovým systémům. Pro tyto systémy byla představena Euler-Bernoulliho nosíková teorie, na jejíž základě byl formulován MKP model příslušných nosníků. Dále bylo pojednáno o rozšíření tohoto modelu u piezoelektrický patch, který umožňuje sběr energie z deformace nosníku. Následovalo představení dvou modelů nosníků s nelinearitami, a to nosník se suchým třením a piezo nosník s kubickou nelinearitou. Pro druhý ze zmíněných nosníků byla díky přítomnosti piezo patche vypočtena optimální budící frekvence ke sběru energie.

Literatura

- [1] HAMEL. *Georg Duffing, Ingenieur: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*. Sammlung Vieweg. Heft 41/42, Braunschweig 1918. VI+134 S. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1921, 1(1), 72-73. ISSN 00442267. Dostupné z: doi:10.1002/zamm.19210010109
- [2] Nayfeh, A. H.; Mook, D. T.: *Nonlinear Oscillation*. Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2004T. MOOK. Nonlinear Oscillations. Wiley, 1995. ISBN 9780471121428. Dostupné z: doi:10.1002/9783527617586
- [3] THOMPSON, J. M. T. a H. B. STEWART. *Nonlinear dynamics and chaos*. 2nd ed. Chichester: John Wiley, c2002. ISBN 978-0-471-87645-8.
- [4] SLAVÍK, Jaromír, Vladimír STEJSKAL a Vladimír ZEMAN. *Základy dynamiky strojů*. Praha: ČVUT, 1999. ISBN 9788001016220.
- [5] KRACK, Malte a Johann GROSS. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Cham: Springer International Publishing, 2019. Mathematical Engineering. ISBN 978-3-030-14022-9. Dostupné z: doi:10.1007/978-3-030-14023-6
- [6] BYRTUS, Miroslav, Michal HAJŽMAN a Vladimír ZEMAN. *Dynamika rotujících soustav*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010. ISBN 80-7043-953-x.
- [7] NAYFEH, Ali Hasan a Balakumar BALACHANDRAN. *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods*. New York: John Wiley and Sons, c1995. Wiley series in nonlinear science. ISBN 0-471-59348-6.

-
- [8] STROGATZ, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Cambridge: Perseu publishing, 2000. Studies in nonlinearity. ISBN 978-0738204536.
- [9] STEINBACH, V. *Kmitání bistabilních mechanických soustav*. Bakalářská práce, Západočeská univerzita, 2020.
- [10] ATKINSON, Kendall E., Weimin HAN a David STEWART. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley and Sons, 2009. ISBN 9781118164495. Dostupné z: doi:10.1002/9781118164495
- [11] DORMAND, J. R. and P. J. PRINCE *A family of embedded Runge-Kutta formulae*, J. Comp. Appl. Math., Vol. 6, 1980, pp. 19–26.
- [12] SHAMPINE, L. F. and M. W. REICHEL, *The MATLAB ODE Suite*, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 18, 1997, pp. 1–22.
- [13] LUNARDI, Alessandra. *Interpolation Theory*. Pisa: Scuola Normale Superiore, 2018. ISBN 978-88-7642-639-1. Dostupné z: doi:10.1007/978-88-7642-638-4
- [14] RINALDI, S. *Nonlinear dynamical systems: Bifurcation and chaos with applications in ecology*. Notes to a lecture held at the Institute of Econometrics, Vienna University of Technology, May 1995.
- [15] CAHILL, Paul, Budhaditya HAZRA, Raid KAROUMI, Alan MATHEWSON a Vikram PAKRASHI. *Vibration energy harvesting based monitoring of an operational bridge undergoing forced vibration and train passage*. Mechanical Systems and Signal Processing. 2018, 106, 265-283. ISSN 08883270. Dostupné z: doi:10.1016/j.ymsp.2018.01.007
- [16] HOU, Wenqi, Yankun LI, Wei GUO, Junlong LI, Yehong CHEN a Xiaoxu DUAN. *Railway vehicle induced vibration energy harvesting and saving of rail transit segmental prefabricated and assembling bridges*. Journal of Cleaner Production. 2018, 182, 946-959 [cit. 2023-07-23]. ISSN 09596526. Dostupné z: doi:10.1016/j.jclepro.2018.02.019
- [17] ZHANG, C.L., Z.H. LAI, M.Q. LI a D. YURCHENKO. *Wind energy harvesting from a conventional turbine structure with an embedded vibro-impact dielectric elastomer generator*. Journal of Sound and Vibration. 2020, 487. ISSN 0022460X. Dostupné z: doi:10.1016/j.jsv.2020.115616

-
- [18] CAI, Mingjing a Wei-Hsin LIAO. *Enhanced electromagnetic wrist-worn energy harvester using repulsive magnetic spring*. Mechanical Systems and Signal Processing. 2021, 150. ISSN 08883270. Dostupné z: doi:10.1016/j.ymssp.2020.107251
- [19] WEI, Chongfeng a Xingjian JING. *A comprehensive review on vibration energy harvesting: Modelling and realization*. Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2017, 74, 1-18. ISSN 13640321. Dostupné z: doi:10.1016/j.rser.2017.01.073
- [20] HOLMES, Philip. *Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and „chaos“*. Physics Reports. 1990, 193(3), 137-163. ISSN 03701573. Dostupné z: doi:10.1016/0370-1573(90)90012-Q
- [21] RANGARAJAN, Govindan. *Kolmogorov-Arnold-Moser theorem*. Resonance. 1998, 3(4), 43-53. ISSN 0971-8044. Dostupné z: doi:10.1007/BF02834611
- [22] HERMAN, Russell L. *An Introduction to Fourier Analysis*. Chapman and Hall/CRC, 2016. ISBN 9781315367064. Dostupné z: doi:10.1201/9781315367064
- [23] SHANNON, C.E. *Communication in the Presence of Noise*. Proceedings of the IRE. 1949, 37(1), 10-21. ISSN 0096-8390. Dostupné z: doi:10.1109/JRPROC.1949.232969
- [24] SEYDEL, Rüdiger. *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. New York, NY: Springer New York, 2010. Interdisciplinary Applied Mathematics. ISBN 978-1-4419-1739-3. Dostupné z: doi:10.1007/978-1-4419-1740-9
- [25] SZIDAROVSKY, Ferenc. *Linear Systems Theory*, Second Edition. Routledge, 2018. ISBN 9780203748886. Dostupné z: doi:10.1201/9780203748886
- [26] POINCARÉ, Henri. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris, Gauthier-Villars, 1899.
- [27] ECKMANN, J.-P, S. Oliffson KAMPHORST a D RUELLE. *Recurrence Plots of Dynamical Systems*. Europhysics Letters (EPL). 1987, 4(9), 973-977. ISSN 0295-5075. Dostupné z: doi:10.1209/0295-5075/4/9/004

-
- [28] MARWAN, N, M CARMENROMANO, M THIEL a J KURTHS. *Recurrence plots for the analysis of complex systems*. Physics Reports. 2007, 438(5-6), 237-329. ISSN 03701573. Dostupné z: doi:10.1016/j.physrep.2006.11.001
- [29] CHEN, Jufeng, Xianghong LI, Jingyu HOU a Dawei ZUO. *Bursting oscillation and bifurcation mechanism in fractional-order Brusselator with two different time scales*. Journal of Vibroengineering. 2017, 19(2), 1453-1464. ISSN 1392-8716. Dostupné z: doi:10.21595/jve.2017.18109
- [30] ESMAILZADEH, E. a G. NAKHAIE-JAZAR. *Periodic solution of a Mathieu-Duffing type equation*. International Journal of Non-Linear Mechanics. 1997, 32(5), 905-912. ISSN 00207462. Dostupné z: doi:10.1016/S0020-7462(96)00119-9
- [31] ZHAO, Runchao, Yeyin XU, Zhiqian ZHAO, Zhitong LI, Zengtao CHEN, Zhaobo CHEN a Yinghou JIAO. *Multi-scale contact induced period-doubling vibrations in rotor systems: Numerical and experimental studies*. Mechanical Systems and Signal Processing. 2023, 195. ISSN 08883270. Dostupné z: doi:10.1016/j.ymsp.2023.110251
- [32] DETROUX, T., L. RENSON, L. MASSET a G. KERSCHEN. *The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering [online]. 2015, 296, 18-38 [cit. 2023-07-23]. ISSN 00457825. Dostupné z: doi:10.1016/j.cma.2015.07.017
- [33] THOMÉE, Vidar. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. Springer Series in Computational Mathematics. ISBN 978-3-540-33121-6. Dostupné z: doi:10.1007/3-540-33122-0
- [34] UNKNOWN AUTHOR, *Three body problem article*, 2023, Dostupné z: <https://tinyurl.com/2p97nxtu>
- [35] SRIVASTAVA, Rajeev. SRIVASTAVA, Ravindra. (2014). *Active Vibration Control Of Smart Piezo Cantilever Beam Using PID Controller*. International Journal of research in Engineering and Technology. 3. 392-399.