

Oponentský posudek dizertační práce  
“Automatic *hp*-Adaptivity for Time-Dependent Problems”

Ing. Jakuba Červeného

Předložená práce je věnována problematice automaticky adaptivní *hp*-verze metody konečných prvků. Jedná se o téma velmi aktuální a přínosné a to nejen v oboru elektrotechnika, ale i v řadě dalších, kde se metoda konečných prvků používá. Význam nových přístupů pak oceníme zejména při řešení velmi rozsáhlých třírozměrných nelineárních dynamických problémů, které bychom i navzdory současné výkonné výpočetní technice třeba nebyli schopni pomocí standardních metod vyřešit.

Autor se v práci zaměřuje na vývoj nových algoritmů pro řešení stacionárních i nestacionárních problémů popsaných pomocí parciálních diferenciálních rovnic ve dvou dimenzích pomocí metody konečných prvků s využitím automatické *hp*-adaptivity. Práce sestává ze sedmi kapitol. V úvodní kapitole je krátce shrnuta historie a jsou zde uvedeny cíle práce. Obsahem druhé kapitoly je odvození a popis metody konečných prvků na regulárních sítích, nejprve pro po částech lineární prvky a následně pro prvky vyšších stupňů a to s využitím uzlových tvarových funkcí (nodal shape functions) i hierarchických tvarových funkcí (hierarchical shape functions). Ve třetí kapitole autor přechází od regulárních k neregulárním sítím využívaných v adaptivní *hp*-verzi metody konečných prvků. Podává zde přehled již existujících technik a popis nového algoritmu a datové struktury dovolující použití tzv. visících bodů (hanging nodes) libovolné urovně. Čtvrtá kapitola uvádí několik existujících strategií *hp*-adaptivity pro stacionární problémy, zejména existující algoritmus založený na tzv. referenčním řešení. Je navržen nový algoritmus, který je dle autora jednodušší a rychlejší, přičemž ale dosahuje lepších nebo srovnatelných výsledků, což je demonstrováno na dvou standardních testovacích příkladech. Tématem páté kapitoly je řešení soustav PDR při použití různých sítí pro různé rovnice. Je zde popsán algoritmus pro sestavení matice tuhosti takového systému, tzv. multi-mesh assembling. Motivací pro použití tohoto přístupu je úspora stupňů volnosti a příprava řešiče pro dynamické problémy. Implementace je testována na modelovém příkladu z termopružnosti. Práce je završena šestou kapitolou, ve které je algoritmus pro multi-mesh assembling použit spolu s adaptivní Rotheho metodou k výpočtům na sítích, které se mohou v čase měnit. Algoritmus, který dokáže automaticky upravovat síť mezi jednotlivými časovými kroky, je testován na dvou nelineárních modelových problémech z oblasti nestlačitelného proudění a fyziky hoření. V závěrečné sedmé kapitole doktorand shrnuje výsledky předložené práce, krátce představuje směry budoucího snažení a uvádí citace svých publikovaných článků.

Jednotlivé kapitoly práce přesně korespondují s náplní vytčených cílů. Dizertační práce je psána přehledně, má velmi dobrou grafickou úpravu, obsahuje názorné obrázky a řadu aplikačních výsledků. V textu jsem zaznamenal pouze několik drobných nedostatků a překlepů. Původní výsledky autora jsou obsaženy v kapitolách 3–6, byly publikovány ve formě 5-ti článků v impaktovaných časopisech a dále prezentovány na řadě mezinárodních konferencí. Nesporný přínos doktoranda nesnižuje ani skutečnost, že je na většině publikací uvedeno více spoluautorů neboť při zpracování takto širokého tématu je týmová práce nevyhnutelná. O kvalitách výsledků hovoří i 6 autorovi dosud známých citací. Na odborném růstu doktoranda měl kromě školitele bezpochyby velký podíl i studijní pobyt na University of Texas v El Paso a spolupráce s dr. Šolínem a jeho kolegy.

#### **Závěr:**

Doktorand Ing. Jakub Červený předložil k posouzení velmi kvalitní dizertační práci, která podle mého názoru splňuje všechny požadavky na ní kladené. Je zřejmé, že autor ve své práci prokázal hluboké znalosti i schopnost je aplikovat, a to zejména v oblasti numerické matematiky a programování. Dizertační práci proto jednoznačně doporučuji k obhajobě. V případě její úspěšné obhajoby doporučuji udělit panu Ing. Jakubovi Červenému titul Ph.D.

V Plzni 12. ledna 2012



Doc. Ing. Josef Daněk, Ph.D.

ZČU v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Univerzitní 22, 306 14 Plzeň

Oponentní posudek dizertační práce

Ing. Jakub Červený

### Automatic $hp$ -Adaptivity for Time-Dependent Problems

Předložená dizertační práce se zabývá řešením parciálních diferenciálních rovnic, které popisují různé fyzikální problémy. Jádrem práce je popis originální implementace výpočetního software postaveného na automaticky adaptivní  $hp$  variantě metody konečných prvků. Jednotlivé kapitoly se zaměřují na různé aspekty této implementace, podávají základní teoretické informace a detailně popisují datové struktury a algoritmy použité při implementaci. Její efektivita je poté dokazována pomocí numerických experimentů.

V první a druhé kapitole je podán úvod do historie a současného stavu teorie  $hp$ -FEM, včetně odkazů na relevantní literaturu.

Třetí kapitola se podrobně zabývá sítěmi s visícními uzly a omezenou aproximací. Nejdříve je prezentována řada postupů, kterými se tato problematika řeší (regularizace sítě, omezení pomocí Lagrangeových multiplikátorů a další). Dále je detailně popsána velmi nápaditá implementace, která umožňuje použití sítí s visícními uzly libovolné úrovně. V textu jsou popsány i datové struktury, které toto umožňují.

Další kapitola je věnována automatické  $hp$  adaptivitě. Nejdříve je opět uvedena řada existujících přístupů s referencemi na jednotlivé zdroje. Poté je vysvětlena myšlenka použité adaptivity, která využívá referenčního řešení. Je sice výpočetně náročná, její nepornou výhodou je však rychlá konvergence a univerzalita, tedy nezávislost na konkrétním typu problému. Algoritmus výběru kandidátů na zjemnění je dále vylepšen pomocí ortogonalizace bazových funkcí kandidátů na zjemnění, což výrazně zrychluje celý proces a umožňuje testovat mnohem větší počet zjemnění a najít to optimální. V závěru kapitoly jsou jednotlivé přístupy srovnány na dvou příkladech se známým přesným řešením. Použitý algoritmus ukazuje vynikající konvergenci jak v případě se singularitou, tak s vnitřní vrstvou.

Pátá kapitola se zabývá atraktivní tematikou sdružených úloh. Je popsán unikátní algoritmus, který umožňuje řešení jednotlivých polí na různých sítích. Adaptivita potom může zjemňovat různá pole různým způsobem. Význam je ilustrován na příkladu termoeelastivity, kde elastické pole má v několika bodech singularitu, zatímco teplotní pole je hladké. Automatická adaptivita pak může zjemňovat síť pro složky elasticity směrem k singularitám, zatímco síť pro teplotu zůstane hrubá. Tím jsou ušetřeny stupně volnosti a zlepšena konvergence.

Šestá kapitola popisuje řešení časově závislých úloh. Je zvolena Rothelova metoda, která umožňuje použití různých sítí pro jednotlivé časové kroky. Zde se výborně uplatňuje technika více sítí, popsaná v předchozí kapitole. Na těchto základech je vybudována unikátní metoda  $hp$ -adaptivity na dynamických sítích, kde je v každém časovém kroku použita síť vhodná pro řešení problému v aktuálním stavu. To je dokumentováno na dvou zajímavých časově závislých úlohách.

Lze konstatovat, že práce splnila své cíle. Hlavní přínos autora je ve vývoji algoritmů, které umožňují velmi efektivní řešení obtížných fyzikálních úloh z různých oblastí. Dizertant projevuje značné znalosti z oborů výpočetní techniky, numerické matematiky a aplikací a schopnost samostatné tvůrčí práce. Samotná práce má vynikající jazykovou úroveň, je

přehledná a podrobně vysvětluje různé aspekty zpracovávané tematiky. Výsledky práce byly průběžně publikovány ve vědeckých časopisech a prezentovány na řadě domácích i zahraničních konferencích.

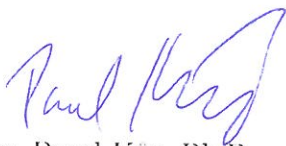
Práci Ing. Jakuba Červeného doporučuji k obhajobě.

K práci mám následující otázky:

Otázka 1: Autor srovnává konvergenci použitého adaptivního algoritmu s jinými implementacemi na obrázcích 4.8 a 4.14. Na těchto grafech je vidět závislost přesnosti řešení na počtu stupňů volnosti a použitá metoda dává vynikající výsledky. Autor sám však uvádí (a obr. 4.15 to dokumentuje), že časově nejnáročnější část výpočtu je výpočet referenčního řešení. Byla prováděna také srovnání celkového času, který jednotlivé algoritmy potřebují ke zkonvergování k řešení požadované přesnosti?

Otázka 2: V souvislosti s tím se chci zeptat, zda autor prováděl experimenty s nastavením parametrů adaptivity s cílem minimalizovat celkovou dobu (CPU čas) potřebný k nalezení řešení požadované přesnosti. Zjednodušeně řečeno jde o otázku, kolik stupňů volnosti by se mělo přidat v každém kroku adaptivity. Příliš malé zvětšení sice vede k optimální konvergenční křivce, je však potřeba provést mnoho kroků adaptivity a tedy mnoho drahých výpočtů referenčního řešení. Opačná strategie zřejmě povede k méně kvalitním sítím se zbytečnými stupni volnosti a tedy horší konvergencí. Co se dá říct o optimální hodnotě, je-li naším cílem minimalizovat celkový čas, nikoli získat co nejlepší konvergenci?

Otázka 3: Technika použití více sítí je velmi zajímavá a algoritmus popsáný v páté kapitole dobře propracovaný. Zrychlení výpočtu, jak je vidět z grafu 5.15 a 5.16 je sice znatelné, ale ne příliš výrazné. Tato technika se tedy možná uplatní spíše zjednodušením jiných částí kódu, jako např. při použití dynamických sítí, popsáných v kapitole 6. Jsou známy nějaké další možné aplikace?



Mgr. Pavel Kůs, Ph.D.  
Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i.  
Dolejškova 5  
182 00 Praha 8

V Praze dne 12. ledna 2012



## Posudek doktorské disertační práce

Název: **Automatic *hp*-adaptivity for time-dependent problems**

Autor: **Ing. Jakub Červený**

### Význam, výsledky a původní přínos disertační práce

Hlavním přínosem předkládané disertační práce je podrobný popis několika nových výpočetních algoritmů a jejich implementace v systému Hermes2D. V porovnání se stávajícími implementacemi *hp*-adaptivní metody konečných prvků představují tyto algoritmy významný pokrok. Zvyšují efektivitu výpočtů a rozšiřují množství možných aplikací. Jde především o zavedení technologie visících uzlů libovolného řádu včetně příslušných datových struktur, optimalizace algoritmu na vyhledávání nejlepšího kandidáta na *hp*-zjemnění, rozšíření *hp*-metody na systémy parciálních diferenciálních rovnic, kde každá složka řešení je aproximovaná na své individuálně zjemněné síti, a využití tohoto více-síťového přístupu pro adaptivní řešení časově závislých úloh.

Disertant se zásadním způsobem zasloužil o naprogramování softwaru Hermes2D, který je velmi kvalitní a v současné době je používán řadou uživatelů z celého světa. Systém Hermes2D je velmi univerzální a s jeho pomocí lze kromě elektrotechnických úloh řešit širokou škálu dalších úloh. Tuto disertační práci tedy hodnotím jako velmi významnou, protože její výsledky již nacházejí a ještě jistě najdou mnohá další uplatnění nejen v elektrotechnice ale i v ostatních oborech.

### Postup řešení a splnění cílů

Disertant v úvodu své práce jasně specifikuje své záměry a cíle. Všem se v následujících částech práce věnuje a všechny cíle plní. Kladně hodnotím ten fakt, že disertant se ve své práci nezaměřil jen na popis svých vlastních výsledků, ale stručně popsal i algoritmy ostatních autorů a provedl porovnání výsledků na vzorových úlohách, což bylo nepochybně velmi pracné.

### Formální a jazyková úprava

Po formální i jazykové stránce je práce na velmi vysoké úrovni. Text je zpracován na profesionální úrovni. Oceňuji především velké množství kvalitních ilustrací, které usnadňují pochopení předkládaných myšlenek a názorně prezentují získané výsledky.

### Publikace disertanta

Disertant publikoval během doktorského studia 7 odborných článků. Většina z nich vyšla v prestižních zahraničních časopisech, a u většiny z nich je disertant jedním ze spoluautorů. Disertant uvádí 5 citací těchto článků. Podle mého názoru je množství, kvalita i ohlas disertantových prací nadprůměrný.

### Připomínky

- Na str. 4 ve vztahu (2.1) a dále na str. 5 se divergence označuje stejným symbolem jako gradient.
- Prvky se tradičně definují jako uzavřené množiny (viz str. 7).
- Na str. 8 (a dále) se používá termín „regular mesh“. Z jakého důvodu? Tento termín se mi nezdá vhodný kvůli možné záměně s termínem „regular family of meshes“, který má ale úplně jiný význam. Doporučil bych užívat „conforming mesh“.

- Ve druhé kapitole (sekce 2.3–2.7) není zřejmé jaký tvar konečných prvků se uvažuje. Na str. 7 je definován prvek  $K_i$  jako polygon. Nicméně dále se často mluví o trojúhelnících. Ovšem na str. 11 je definován prostor polynomů vhodný pro obdélníkové prvky. V diskusní části obhajoby by bylo vhodné, aby disertant vysvětlil jaké tvary konečných prvků se ve 2D nejčastěji používají a jak se pro ně definují příslušné polynomiální prostory.
- Na str. 15 nesouhlasím s tvrzením, že popisované „minimum rule“ zaručuje nezávislost prostorů  $V_{hp}$  na volbě báze. Prostor  $V_{hp}$  je jednoznačně určen požadavkem konformity (např. spojitost), příslušnou sítí konečných prvků a rozložením polynomiálních stupňů na elementech. (Takže je nezávislý na volbě báze funkcí). Popisované „minimum rule“ už je jen nutným důsledkem výše uvedených požadavků na prostor  $V_{hp}$ .
- Na str. 27 se ve třetím bodě mluví o „quadratic bubble functions“. Pro popisované skalární ( $H^1$ -konformní) konečné prvky takové kvadratické bublinové funkce přece neexistují. Jak je to míněno?
- Na str. 46 se v kroku 3 mluví o zajišťování 1-neregularity sítě. Proč, když máme k dispozici visící uzly libovolné úrovně?
- V kapitole 5 (sekce 5.3) se mluví o výpočetní náročnosti sestavování matic v případě více různých sítí. Tato operace by se ovšem mohla velmi snadno paralelizovat. Proč se tato možnost v práci nezmiňuje?

## Závěr

Význam získaných výsledků a celková kvalita práce rozhodně mnohonásobně převažuje nad drobnými nedostatky, které se v práci vyskytují. Jakub Červený svou disertační práci rozhodně prokázal dobré předpoklady pro samostatnou tvůrčí vědeckou činnost. Proto vřele doporučuji předloženou disertační práci k obhajobě.

V Praze, 10. února 2012

RNDr. Tomáš Vejchodský, Ph.D.  
 Matematický ústav AV ČR, v.v.i.  
 Žitná 25, 115 67 Praha 1